



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Estudio analítico de un tipo de modelo  
compartimental de intercambiadores de calor de  
tubos concéntricos.**

Tesis que presenta

**Raúl Santiesteban Cos**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

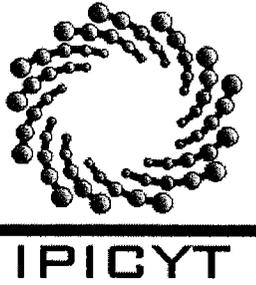
En la opción de

**Control y Sistemas Dinámicos**

Director de la Tesis:

Dr. Arturo Zavala Río

San Luis Potosí, S.L.P., Agosto de 2004.



# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

COPIA CERTIFICADA

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 002 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 27 días del mes de agosto del año 2004, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Arturo Zavala Río</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Antonio De León Rodríguez</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Ricardo Romero Mendez</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Raúl Santiesteban Cos**

sobre la Tesis intitulada:

*Estudio analítico de un tipo de modelo compartimental de intercambiadores de calor de tubos concéntricos*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Arturo Zavala Río**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 13:05 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fé el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 27 días del mes agosto de 2004.



  
**Mtra. Ma. Elisa Lucio Aguilar**  
Jefa del Departamento de Asuntos Escolares

## Resumen

En este trabajo se discute la obtención del modelo de parámetros distribuidos, así como sus propiedades analíticas. Más aún, se desarrolla la obtención del modelo de orden 2 utilizando el LMTD como fuerza conductora y se analizan sus características dinámicas. Tales propiedades concuerdan con aquéllas del modelo de dimensión infinita. Esto nos hace concluir que el modelo de parámetros agrupados que se obtuvo es confiable con respecto a su comportamiento cualitativo. Esto es importante en casos en donde no son las soluciones cuantitativas sino el comportamiento cualitativo que importa, como en la modelación y simulación de redes de intercambiadores de calor y procesos industriales complejos donde los intercambiadores están involucrados. Por otro lado, se explora la idea de considerar una distribución en el término de acumulación, de modelos compartimentales  $N$ -celulares con  $N > 1$ .

## Abstract

In this work, the development of the distributed parameter model is discussed, as well as its analytical properties. More importantly, those of a 2nd-order lumped-parameter model using the LMTD as driving force are derived and shown to agree with those of the former. The results developed in this work are intended to supply a solid support for the reliability on the use of the kind of simple compartmental model that is treated. This is specially addressed to works where it is not the quantitative solutions but the qualitative behavior that is important, like modelling and simulation of heat exchanger networks and complex industrial processes where heat exchangers are involved in. On the other hand, the idea to consider the bulk temperature to be the average among the inlet and outlet temperature at each fluid (for the accumulation term) on an  $N$ -cell compartmental model with  $N > 1$  is explored.



**INSTITUTO POTOSINO DE  
INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y  
TECNOLÓGICA, A.C.**

**DIVISIÓN DE MATEMÁTICAS APLICADAS  
Y SISTEMAS COMPUTACIONALES**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS APLICADAS CON OPCIÓN EN CONTROL Y  
SISTEMAS DINÁMICOS**

**ESTUDIO ANALÍTICO DE UN TIPO DE MODELO  
COMPARTIMENTAL DE INTERCAMBIADORES DE  
CALOR DE TUBOS CONCÉNTRICOS**

**ING. RAÚL SANTIESTEBAN COS**

**SINODALES**

**DR. ARTURO ZAVALA RÍO  
(ASESOR)**

**DR. RICARDO FEMAT FLORES**

**DR. ANTONIO DE LEÓN RODRIGUEZ**

**DR. RICARDO ROMERO MÉNDEZ**

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>2. Modelación</b>	<b>12</b>
2.1. Modelo de parámetros distribuidos . . . . .	12
2.1.1. Obtención del modelo . . . . .	14
2.1.2. Contorno de equilibrio . . . . .	17
2.2. Modelo de parámetros agrupados . . . . .	22
2.3. Modelación compartimental: una propuesta . . . . .	25
<b>3. Análisis del modelo de parámetros agrupados</b>	<b>32</b>
3.1. Media logarítmica de diferencia de temperatura . . . . .	33
3.2. Análisis de las propiedades dinámicas del sistema . . . . .	37
3.2.1. Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	37
3.2.2. Soluciones de equilibrio . . . . .	39
3.2.3. Estabilidad . . . . .	45
<b>4. Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>47</b>
<b>A. Obtención de las expresiones <math>g_c(z)</math> y <math>g_h(z)</math></b>	<b>49</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Los intercambiadores de calor (en adelante referidos simplemente como intercambiadores) son extensamente utilizados en procesos industriales tales como plantas generadoras de energía [1], turbinas de gas [2], sistemas de aire acondicionado [3], calefacción (doméstica, urbana o central) [4], refrigeración [5] y sistemas de congeladores [6] entre muchos otros. Debido a sus múltiples aplicaciones, un sinnúmero de trabajos de investigación han sido dedicados al estudio de su comportamiento dinámico, modelación, simulación, identificación y control desde los años 1940's (con un auge en los 50's y 60's) [7, 8, 9]. El primer modelo dinámico de intercambiadores fue propuesto por P. Profos en 1943 [7]. En las décadas posteriores a los 40's, abundaron trabajos cuyo análisis era basado en representaciones frecuenciales a través de funciones de transferencia [10, 11]. En los 50's, los estudios propuestos se enfocaban a respuestas ante perturbaciones en las temperaturas de entrada. En los 60's, aún y cuando esta línea continuó, nuevos estudios en los que se consideró la respuesta a perturbaciones en los flujos fueron propuestos [12]. Éstos incluían nuevos enfoques de respuesta espacio-temporal (además de los tradicionales análisis frecuenciales). Después de los 60's, con el tiempo, los análisis de respuesta transitoria tomaron importancia [13, 14], de la misma manera que la modelación compartimental a través de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias [15, 16]. No obstante, dada la extrema complejidad de la dinámica de los procesos térmicos y las crecientes exigencias impuestas en la operación de procesos industriales, los intercambiadores de calor son aún objeto de muchos estudios. Puesto que generalmente son parte de un sistema o red compleja, el análisis dinámico basado en suposiciones simplificadoras pero aceptables y/o modelos simples pero adecuados son deseables [15, 16, 17, 18, 19].

La dinámica de los intercambiadores es representada principalmente de dos posibles maneras: a través de modelos de parámetros distribuidos o agrupados [9, 20, 21, 22]. Puesto que las variaciones de los estados involucrados tienen lugar no sólo en tiempo sino también en espacio, los modelos de parámetros distribuidos son aquéllos que mejor se ajustan a la naturaleza de los intercambiadores [7]. Estos modelos se representan por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales. Puesto que éstas son difíciles de analizar, complicadas para simulación y complejas para diseño de control, sus aproximaciones a través de modelos de parámetros agrupados son generalmente preferidas [17].

Los modelos de parámetros agrupados se han usado ampliamente para simulación dinámica [20, 23, 24, 25, 26], diseño de control [27, 28, 29, 30], modelación de redes de intercambiadores [18, 22, 31, 32] o identificación de parámetros [33, 34, 35], por ejemplo. Su construcción radica en la división del intercambiador en un número finito de elementos, llamados secciones o celdas, la cual permite su representación dinámica a través de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este proceso de seccionamiento asume que cada elemento se comporta como un tanque perfectamente mezclado. Consecuentemente la temperatura del fluido se considera constante a lo largo de cada celda. Así, la distribución espacial de la temperatura en cada sección es despreciada. Como consecuencia, un número grande de celdas es requerido para una modelación aceptable [17]. Esto da lugar a modelos de alto orden que complican el análisis dinámico y el diseño de control [25, 29].

No obstante, la reducción del orden del modelo con una pérdida de exactitud pequeña puede ser contemplada tomando en cuenta la distribución de la temperatura en cada sección. Esta idea es explorada, por ejemplo, en [16, 19], donde se propone un estudio numérico comparativo entre tres diferentes modelos unicelulares bi-compartimentales (un elemento por fluido cubriendo toda la longitud del tubo). Las características de estado estable, así como las respuestas de la temperatura de salida (de uno de los fluidos) ante perturbaciones de tipo escalón y frecuenciales en la temperatura de entrada y en el flujo (del otro fluido) son comparadas con aquéllas del modelo de parámetros distribuidos de un intercambiador en contracorriente. Cada uno de los modelos compartimentales considerados incluyen dos ecuaciones diferenciales ordinarias (acopladas) de primer orden, uno por celda (fluido), el cual es el caso más simple. La diferencia entre cada uno de ellos consiste en la consideración, respectivamente, de una distribución uniforme, lineal y exponencial de la temperatura para seleccionar la expresión de la fuerza conductora (*driving force*). Para cada uno de los casos, la fuerza conductora se expresa en términos de la diferencia de temperaturas de salida, la *media aritmética de diferencia de temperaturas* (AMTD por sus siglas en inglés), y la *media logarítmica de diferencia de temperaturas* (LMTD por sus siglas en inglés). Los resultados muestran que el modelo que utiliza la LMTD como fuerza conductora es el que mejor se aproxima al modelo distribuido, mientras que aquél que asume un mezclado perfecto es el que da los peores resultados. Además se concluye que los modelos simples (unicelulares bi-compartimentales), que utilizan la LMTD como fuerza conductora, conservan las propiedades dinámicas del modelo distribuido. La consideración de más de una celda bicompartimental es sugerida para requerimientos de modelación más estrictos.

Los modelos de parámetros agrupados con la LMTD como fuerza conductora han mostrado ser apropiados en otros trabajos. En [23], usadas para la simulación de procesos petroquímicos, tales representaciones dinámicas fueron examinadas a través de simulaciones numéricas considerando de dos a diez compartimentos. Se concluyó que el modelo de dos compartimentos ciertamente conserva el comportamiento cualitativo de la dinámica del modelo de parámetros distribuidos. La consideración de más de dos compartimentos fue reportada conveniente para mejorar la precisión en las características de estado estable y el retardo de transporte en las respuestas del sistema. Pruebas similares fueron hechas y conclusiones semejantes fueron obtenidas en [26], donde los ajustes cuantitativos al pasar a dos o más celdas bicompartimentales se encontraron despreciables. En estos trabajos, el objetivo no sólo fue obtener un buen modelo de aproximación para el intercambiador sino también evi-

tar problemas como el *undershooting*, que se dan al utilizar otra aproximaciones como fuerza conductora [16]. La superioridad de los modelos compartimentales de bajo orden utilizando la LMTD como fuerza conductora (comparados con aquéllos que utilizan la AMTD o la diferencia de temperaturas de salida) fue corroborada (a través de pruebas similares) en [31], donde se concluyó que estos modelos son ventajosos para la simulación de redes de intercambiadores de calor.

Los modelos de parámetros agrupados con la LMTD como fuerza conductora han sido también considerados por Alsop y Edgar en [27], donde un modelo de segundo orden fue usado para diseño de control en un intercambiador en contracorriente; el esquema en lazo cerrado fue probado a través de simulación utilizando un modelo de 20 celdas bicompartimentales (de orden 40). Las respuestas de la temperatura de salida de ambos modelos a cambios de tipo escalón en el flujo fueron mostradas. Las diferencias observadas entre ellas fueron pequeñas. Cabe hacer notar que Alsop y Edgar fueron más lejos en la modelación bicompartimental al tomar la temperatura de los fluidos como el promedio entre las temperaturas de salida y de entrada de cada fluido, en lugar de tomar sólo la temperatura de salida (para calcular el término de acumulación). Consecuentemente el modelo usado en [27] conserva la estructura tradicional de los trabajos previos pero duplica la tasa de transferencia por conducción y convección (*i.e.* un 2 aparece multiplicando cada término a la derecha de las ecuaciones dinámicas). Esto, por un lado, no altera los valores de estado estable y por otro lado, acelera la dinámica del sistema mejorando el tiempo de respuesta (acercándolo al de las trayectorias del modelo de parámetros distribuidos).

Basados en los estudios mencionados, los modelos de parámetros agrupados de bajo orden con la LMTD como fuerza conductora han sido utilizados por diversos autores como una representación dinámica confiable de intercambiadores. Por ejemplo, fueron usados en [28] y [30] para diseño de control, [36] y [37] para análisis de estabilidad en lazo cerrado, [23] y [26] para el desarrollo de simuladores dinámicos y [18] para modelación y simulación de redes de intercambiadores de calor. No obstante, el hecho de que tales representaciones conservan las propiedades dinámicas de los modelos de parámetros distribuidos se concluye en los trabajos previos, [16, 19, 23, 26, 27, 31], a través de simulación numérica. Una escasez clara de trabajos que enfoquen la caracterización del comportamiento cualitativo de los intercambiadores bajo un marco analítico propio de sistemas dinámicos puede constatarse en la literatura.

En este trabajo se desarrollan pruebas analíticas que muestran que un modelo compartimental de segundo orden con la LMTD como fuerza conductora conserva las propiedades dinámicas del modelo de parámetros distribuidos del cual se obtiene la aproximación. Se analizan aspectos fundamentales como la existencia y unicidad de soluciones la cual podrá mostrarse ser una característica común de ambos modelos dinámicos. Además, se obtienen las soluciones de equilibrio de la dinámica de dimensión finita y se muestra una exacta concordancia con los valores de salida de las temperaturas del contorno de equilibrio del modelo distribuido. Además, se concluye que tales estados de equilibrio son exponencialmente estables y globalmente atractivos en el dominio de espacio de estado del sistema en ambas representaciones dinámicas. Estos resultados, por un lado, dan una idea del comportamiento cualitativo del intercambiador bajo las suposiciones hechas. Por otro lado, establecen una base formal dando fundamento a los trabajos previamente mencionados, y proporcionan un

soporte sólido para la confiabilidad en el uso del tipo de modelo compartimental simple que es tratado. Esto es de especial interés en los casos donde las soluciones cuantitativas no son tan importantes como lo es el comportamiento cualitativo, como la modelación y simulación de redes de intercambiadores y procesos industriales complejos donde los intercambiadores están implicados. Más aún, una mejor comprensión de las propiedades analíticas de un tipo de modelo que ha sido previamente considerado para síntesis de control entre otros varios propósitos, puede ser útil para el diseño de esquemas de control más apropiados que tomen en cuenta y de hecho exploten las características intrínsecas del sistema.

Complementariamente en este trabajo, se explora la generalización a modelos N-celulares ( $N > 1$ ) de la idea desarrollada en [27] en un modelo de 2º orden: la temperatura de cada sección de los fluidos será aproximada usando el promedio de las temperaturas de entrada y salida (de la sección). Esto tiene una repercusión directa en el término de acumulación de cada compartimento. El interés de tal consideración radica en investigar si los modelos N-celulares, con cualquier  $N > 1$  finito, tienen trayectorias más cercanas a las de la dinámica distribuida que aproximan, que aquéllos que toman la temperatura de salida como temperatura de la sección. Una vez investigados los cambios implicados por tal consideración en el modelo dinámico, la evaluación de las trayectorias se hará a través de simulaciones numéricas.

La tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 2 se obtienen los modelos de parámetros distribuidos y agrupados, además de obtener el contorno de equilibrio del modelo de parámetros distribuidos. En el capítulo 3 se hace un análisis de las propiedades dinámicas del modelo de parámetros agrupados y se introduce el modelo complementado de la LMTD. Las conclusiones se dan en el capítulo 4.

## Nomenclatura y notación

Una representación esquemática de los intercambiadores de calor de tubos concéntricos es mostrada en las figuras 1.1 y 1.2.

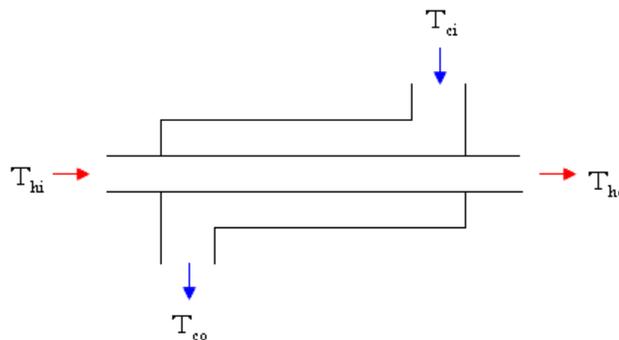


Figura 1.1: Intercambiador de calor en contracorriente.

A lo largo de la tesis será usada la siguiente nomenclatura:

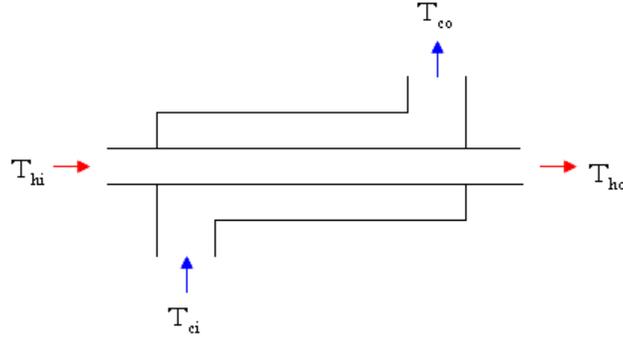


Figura 1.2: Intercambiador de calor en paralelo.

- $F_c$  : Flujo másico del fluido frío (tubo externo) ( $\frac{\text{kg}}{\text{seg}}$ )
- $C_{pc}$  : Calor específico del fluido frío ( $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$ )
- $T_c$  : Temperatura del fluido frío (K)
- $T_{ci}$  : Temperatura de entrada del fluido frío (K)
- $T_{co}$  : Temperatura de salida del fluido frío (K)
- $\nu_c$  : Velocidad del fluido frío ( $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ )
- $\rho_c$  : Densidad del fluido frío ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )
- $V_c$  : Volumen total del fluido frío del intercambiador ( $\text{m}^3$ )
- $M_c$  : Masa total contenida en el tubo externo (kg)
- $l$  : Longitud total del intercambiador (m)
- $U$  : Coeficiente global de intercambio de calor ( $\frac{\text{W}}{\text{Km}^2}$ )
- $F_h$  : Flujo másico del fluido caliente (tubo interno) ( $\frac{\text{kg}}{\text{seg}}$ )
- $C_{ph}$  : Calor específico del fluido caliente ( $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$ )
- $T_h$  : Temperatura del fluido caliente (K)
- $T_{hi}$  : Temperatura de entrada del fluido caliente (K)
- $T_{ho}$  : Temperatura de salida del fluido caliente (K)
- $\nu_h$  : Velocidad del fluido caliente ( $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ )
- $\rho_h$  : Densidad del fluido caliente ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )
- $V_h$  : Volumen total del fluido caliente del intercambiador ( $\text{m}^3$ )
- $M_h$  : Masa total contenida en el tubo interno (kg)
- $A$  : Área superficial de intercambio de calor ( $\text{m}^2$ )
- $r$  : Radio del tubo interno (m)

Por simplicidad se empleará la siguiente notación:

$$x_1 = T_{co}; \quad x_2 = T_{ho} \quad (1.1)$$

$$\Theta = \begin{cases} 1 & \text{para flujo en contracorriente} \\ -1 & \text{para flujo en paralelo} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\Delta T_1 = \begin{cases} T_{hi} - T_{co} & \text{para contracorriente} \\ T_{hi} - T_{ci} & \text{para paralelo} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\Delta T_2 = \begin{cases} T_{ho} - T_{ci} & \text{para contracorriente} \\ T_{ho} - T_{co} & \text{para paralelo} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\gamma_c = \frac{UA}{C_{pc}}; \quad \alpha_c = \frac{\gamma_c}{M_c}; \quad \gamma_h = \frac{UA}{C_{ph}}; \quad \alpha_h = \frac{\gamma_h}{M_h} \quad (1.5)$$

$$R = \frac{F_c C_{pc}}{F_h C_{ph}}; \quad S = e^{UA \left( \frac{\Theta}{F_h C_{ph}} - \frac{1}{F_c C_{pc}} \right)} \quad (1.6)$$

Sean  $T_c = T_c(t, z)$  y  $T_h = T_h(t, z)$  la temperatura del fluido frío y caliente, respectivamente, en el instante  $t$  y posición  $z \in [0, l]$ . Defínase  $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_j > 0, j = 1, 2\}$ . Considérese los conjuntos  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ , con  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ , y una función  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .  $f|_{\mathcal{B}}$  denota la restricción de  $f$  a  $\mathcal{B}$ , i.e.,  $f|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D} : x \mapsto f|_{\mathcal{B}}(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{B}$ . La frontera de un subconjunto, por ejemplo  $\mathcal{B}$ , se representa como  $\partial\mathcal{B}$ . Dentro del marco de sistemas distribuidos, el espacio de estado considerado estará definido por el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(0, l) \times \mathcal{L}_2(0, l)$  (con el producto interno estándar  $\langle f, g \rangle = \int_0^l [f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)]dx$ ), donde  $\mathcal{L}_2(0, l)$  denota el espacio de funciones continuas *de energía finita* en  $[0, l]$  (i. e.  $\int_0^l f^T(x)f(x)dx < \infty, \forall f \in \mathcal{L}_2(0, l)$ ).

# Capítulo 2

## Modelación

### 2.1. Modelo de parámetros distribuidos

Considérese las siguientes suposiciones:

1. Las temperaturas y velocidades de los fluidos son radialmente uniformes.
2. El coeficiente global de intercambio de calor es axialmente uniforme e invariante con respecto al flujo, la temperatura y el tiempo.
3. Las propiedades térmicas de los fluidos son constantes.
4. No hay transferencia de calor con los alrededores.
5. Los fluidos son incompresibles y no cambian de fase.
6. La conducción axial de calor es despreciable.
7. No hay almacenamiento de energía calorífica en las paredes de los tubos.
8. Las temperaturas de entrada  $T_{ci}$  y  $T_{hi}$  son constantes.

En las figuras 2.1 y 2.2 se muestra un diagrama de intercambiadores de tubos concéntricos en contracorriente y paralelo (respectivamente) esquematizando los flujos de calor en cada fluido y entre ellos.

Las suposiciones 1-6 permiten obtener un modelo de parámetros distribuidos [7]. Bajo la consideración de éstas y la suposición 7, tal modelo está dado por (ver por ejemplo [29, 38]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_c}{\partial t} &= \Theta \nu_c \frac{\partial T_c}{\partial z} + \alpha_c (T_h - T_c) \\ \frac{\partial T_h}{\partial t} &= -\nu_h \frac{\partial T_h}{\partial z} - \alpha_h (T_h - T_c)\end{aligned}\tag{2.1}$$

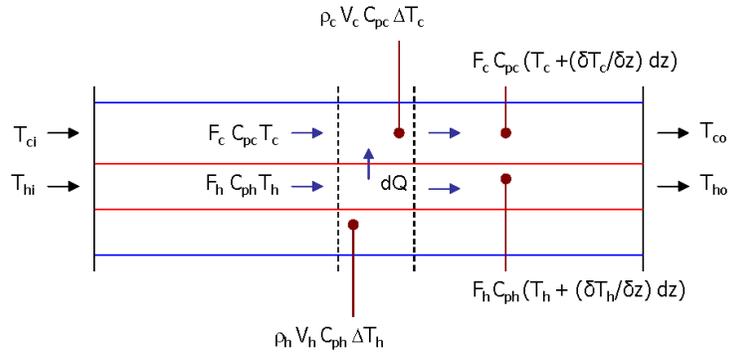


Figura 2.1: Esquema del intercambiador de calor en paralelo.

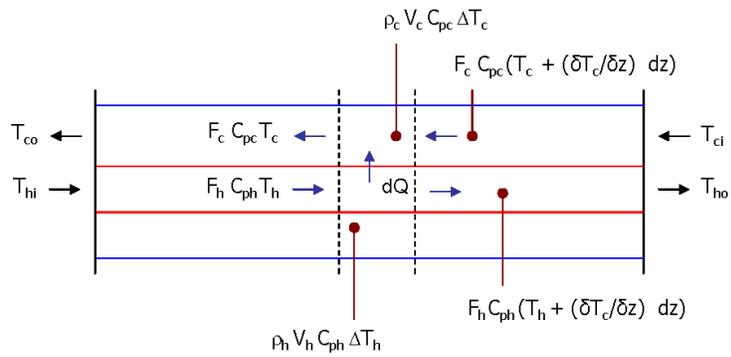


Figura 2.2: Esquema del intercambiador de calor en contracorriente.

con  $\Theta$  como ha sido definido en la ecuación (1.2).

Más aún, la suposición 8 garantiza la existencia de una solución de equilibrio del sistema (2.1). Este modelo se obtiene aplicando la ley de balance de energía a cada punto del intercambiador. El procedimiento es desarrollado a continuación.

### 2.1.1. Obtención del modelo

Considérese un intercambiador de tubos concéntricos en paralelo. Aplicando puntualmente la ley de balance de energía sobre el tubo externo del intercambiador, de acuerdo al esquema de la figura 2.1, se tiene que:

$$\rho_c V_c C_{pc} \frac{\partial T_c}{\partial t} \frac{dz}{l} = F_c C_{pc} T_c - F_c C_{pc} (T_c + \frac{\partial T_c}{\partial z} dz) + dQ \quad (2.2)$$

Para obtener el flujo de energía calorífica que se transfiere del tubo caliente al tubo frío,  $dQ$ , utilizamos la ley de enfriamiento de Newton:

$$dQ = U(T_h - T_c)2\pi r dz \quad (2.3)$$

substituyendo (2.3) en la ecuación (2.2) se obtiene:

$$\rho_c V_c C_{pc} \frac{\partial T_c}{\partial t} \frac{dz}{l} = F_c C_{pc} T_c - F_c C_{pc} (T_c + \frac{\partial T_c}{\partial z} dz) + U(T_h - T_c)2\pi r dz$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa la rapidez de variación de energía calorífica acumulada en un punto. En el lado derecho se tienen los flujos de energía transportada por el fluido (transferencia de calor por convección) sumados con el flujo de energía calorífica que se transfiere del tubo caliente al tubo frío (transferencia de calor por conducción).

De la ecuación anterior, se puede ver que el término  $F_c C_{pc} T_c$  se elimina y despejando  $\frac{\partial T_c}{\partial t}$  se obtiene

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = -\frac{F_c l}{\rho_c V_c} \frac{\partial T_c}{\partial z} + \frac{2\pi r l U}{C_{pc} \rho_c V_c} (T_h - T_c)$$

Nótese que la masa del fluido contenida en el interior del tubo, el área superficial del tubo (cilíndrico) interno y la velocidad del fluido están dadas por

$$M_c = \rho_c V_c; \quad \nu_c = \frac{F_c l}{M_c}; \quad A = 2\pi r l;$$

Substituyendo estas expresiones se obtiene

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = -\nu_c \frac{\partial T_c}{\partial z} + \frac{UA}{C_{pc} M_c} (T_h - T_c)$$

Utilizando la definición de  $\alpha_c$  (ecuación (1.5)), la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = -\nu_c \frac{\partial T_c}{\partial z} + \alpha_c(T_h - T_c)$$

Para obtener la ecuación diferencial del tubo interno se sigue el mismo razonamiento, aplicamos la ley de balance de energía

$$\rho_h V_h C_{ph} \frac{\partial T_h}{\partial t} \frac{dz}{l} = F_h C_{ph} T_h - F_h C_{ph} (T_h + \frac{\partial T_h}{\partial z} dz) - dQ$$

Haciendo uso de la ley de enfriamiento de Newton, (2.3), se obtiene

$$\rho_h V_h C_{ph} \frac{\partial T_h}{\partial t} \frac{dz}{l} = F_h C_{ph} T_h - F_h C_{ph} (T_h + \frac{\partial T_h}{\partial z} dz) - U(T_h - T_c) 2\pi r dz$$

De la ecuación anterior, el término  $F_h C_{ph} T_h$  se elimina y al despejar  $\frac{\partial T_h}{\partial t}$  se obtiene

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} = -\frac{F_h l}{\rho_h V_h} \frac{\partial T_h}{\partial z} - \frac{2\pi r l U}{C_{ph} \rho_h V_h} (T_h - T_c)$$

Tomando,

$$M_h = \rho_h V_h; \quad \nu_h = \frac{F_h l}{M_h}; \quad A = 2\pi r l;$$

se obtiene:

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} = -\nu_h \frac{\partial T_h}{\partial z} - \frac{UA}{C_{ph} M_h} (T_h - T_c)$$

Utilizando la definición de  $\alpha_h$  (ecuación (1.5)), la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} = -\nu_h \frac{\partial T_h}{\partial z} - \alpha_h (T_h - T_c) \quad (2.4)$$

De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, ver ecuación (2.1) con  $\Theta = -1$ , para el intercambiador en paralelo.

Se puede desarrollar un procedimiento semejante para obtener el modelo de parámetros distribuidos de un intercambiador en contracorriente. La diferencia con el modelo del intercambiador en paralelo está al aplicar la ley de balance de energía al fluido del tubo externo, ya que el flujo del fluido del tubo interno no cambia (figura 2.2). Así, la ecuación (2.4) es usada también en el modelo del intercambiador en contracorriente. Por otro lado, aplicando la ley de balance de energía al tubo externo, se obtiene:

$$\rho_c V_c C_{pc} \frac{\partial T_c}{\partial t} \frac{dz}{l} = F_c C_{pc} (T_c + \frac{\partial T_c}{\partial z} dz) - F_c C_{pc} T_c + dQ$$

Al substituir (2.3) y hacer las manipulaciones algebraicas pertinentes (realizadas en los casos anteriores) se llega a

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = \frac{F_c l}{\rho_c V_c} \frac{\partial T_c}{\partial z} + \frac{2\pi r l U}{C_{pc} \rho_c V_c} (T_h - T_c)$$

Tomando,

$$M_c = \rho_c V_c; \quad \nu_c = \frac{F_c l}{M_c}; \quad A = 2\pi r l;$$

se obtiene,

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = \nu_c \frac{\partial T_c}{\partial z} + \frac{UA}{C_{pc} M_c} (T_h - T_c)$$

Utilizando la definición de  $\alpha_c$  (ecuación (1.5)), la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = \nu_c \frac{\partial T_c}{\partial z} + \alpha_c (T_h - T_c)$$

Entonces, el modelo de parámetros distribuidos para un intercambiador en contracorriente, está dado por la ecuación (2.1) con  $\Theta = 1$ .

En notación vectorial el sistema (2.1) se puede representar como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{A}_1 \frac{\partial T}{\partial z} + \mathcal{A}_2 T \tag{2.5}$$

donde,

$$T = \begin{pmatrix} T_c \\ T_h \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \Theta \nu_c & 0 \\ 0 & -\nu_h \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{UA}{M_c C_{pc}} & \frac{UA}{M_c C_{pc}} \\ -\frac{UA}{M_h C_{ph}} & \frac{UA}{M_h C_{ph}} \end{pmatrix}$$

o de manera más compacta a través de la ecuación diferencial abstracta

$$\dot{T} = \mathcal{A}_0 T \tag{2.6}$$

donde  $\mathcal{A}_0$  es el operador lineal desacotado  $\mathcal{A}_0 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : f \rightarrow \mathcal{A}_0 f = \mathcal{A}_1 \frac{df}{dz} + \mathcal{A}_2 f$  con  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{f \in \mathcal{H} \mid \frac{df}{dz} \in \mathcal{H}, f_2(0) = T_{hi}, f_1(\frac{1+\Theta}{2}l) = T_{ci}\}$ . Cabe hacer notar que, denotando  $T^* = T^*(z)$  la solución de equilibrio tal que  $\mathcal{A}_1 \frac{dT^*}{dz} + \mathcal{A}_2 T^* = 0$ , (debido a la linealidad de  $\mathcal{A}_0$ ) el modelo (2.6) puede representar el comportamiento dinámico de las temperaturas de los fluidos o el de su desviación con respecto a  $T^*$ . El primer caso es generalmente considerado para obtener el contorno de equilibrio de las temperaturas del sistema. En el otro caso, las condiciones de frontera (temperaturas de entrada) deben ser tomadas como cero en la definición de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ , *i.e.*  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{f \in \mathcal{H} \mid \frac{df}{dz} \in \mathcal{H}, f_2(0) = f_1(\frac{1+\Theta}{2}l) = 0\}$ . Tal manera

de considerar a  $T$  (*i.e.* como desviación de la temperatura con respecto a  $T^*$ ) en el modelo de parámetros distribuidos es estándar en el análisis de estabilidad del contorno de equilibrio del sistema (véase por ejemplo [39, 38, 40]). Subsecuentemente, el modelo de parámetros distribuidos será indistintamente referido como (2.1), (2.5) o (2.6).

**Observación 2.1. Existencia y Unicidad de Soluciones.** La existencia de soluciones del modelo de parámetros distribuidos se puede corroborar a través del teorema 91 en [41, cap. V]. Más aún, el operador lineal desacotado  $\mathcal{A}_0$  en (2.6) es un generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo (o semigrupo de clase  $C_0$ ),  $\Phi(t)$ , en  $\mathcal{H}$  (lo cual fue demostrado en [40]). Consecuentemente, las soluciones de (2.6) están definidas de manera única para cada  $T_0 \in \mathcal{H}$  como  $T = \Phi(t)T_0$  (véase por ejemplo el teorema 2.1.10 en [42]).

## 2.1.2. Contorno de equilibrio

En equilibrio  $\frac{\partial T_h^*}{\partial t} = \frac{\partial T_c^*}{\partial t} = 0$ . Entonces, de (2.5) el contorno de equilibrio está dado por

$$\frac{dT^*}{dz} = \mathcal{A}T^* \quad (2.7)$$

donde

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} & -\Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} \\ \frac{\alpha_h}{\nu_h} & -\frac{\alpha_h}{\nu_h} \end{pmatrix}$$

La solución de (2.7) está dada por  $T(z) = e^{\mathcal{A}z}T_i$ , donde para el caso contracorriente,  $T_i = (T_{co} \ T_{hi})^T$ ; y para el caso en paralelo,  $T_i = (T_{ci} \ T_{hi})^T$ . Para calcular  $e^{\mathcal{A}z}$  se usa la transformada inversa de Laplace de  $(sI - \mathcal{A})^{-1}$ :

$$(sI - \mathcal{A})^{-1} = \frac{1}{s \left( s + \frac{\alpha_h}{\nu_h} - \Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} \right)} \begin{pmatrix} s + \frac{\alpha_h}{\nu_h} & -\Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} \\ \frac{\alpha_h}{\nu_h} & s - \Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$e^{\mathcal{A}z} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - \mathcal{A})^{-1}\} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(z) & \phi_{12}(z) \\ \phi_{21}(z) & \phi_{22}(z) \end{pmatrix}$$

donde,

$$\begin{aligned} \phi_{11}(z) &= \frac{\alpha_h \nu_c}{\alpha_h \nu_c - \Theta \alpha_c \nu_h} + \frac{\Theta \alpha_c \nu_h}{\Theta \alpha_c \nu_h - \alpha_h \nu_c} \left( e^{\left( \Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} - \frac{\alpha_h}{\nu_h} \right) z} \right) \\ \phi_{12}(z) &= \frac{\Theta \alpha_c \nu_h}{\Theta \alpha_c \nu_h - \alpha_h \nu_c} \left( 1 - e^{\left( \Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} - \frac{\alpha_h}{\nu_h} \right) z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{21}(z) &= \frac{\alpha_h \nu_c}{\alpha_h \nu_c - \Theta \alpha_c \nu_h} \left( 1 - e^{\left( \Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} - \frac{\alpha_h}{\nu_h} \right) z} \right) \\ \phi_{22}(z) &= \frac{\Theta \alpha_c \nu_h}{\Theta \alpha_c \nu_h - \alpha_h \nu_c} + \frac{\alpha_h \nu_c}{\alpha_h \nu_c - \Theta \alpha_c \nu_h} \left( e^{\left( \Theta \frac{\alpha_c}{\nu_c} - \frac{\alpha_h}{\nu_h} \right) z} \right)\end{aligned}$$

Substituyendo  $\nu_c = \frac{F_c}{M_c} l$ ,  $\nu_h = \frac{F_h}{M_h} l$  y utilizando las expresiones (1.5) en  $\phi_{ij}(z)$  ( $i, j = 1, 2$ ) se obtiene  $e^{Az}$  en términos de  $F_c$  y  $F_h$  (en lugar de las velocidades de los fluidos,  $\nu_c$  y  $\nu_h$ ):

$$\begin{aligned}\phi_{11}(z) &= \frac{\gamma_h F_c}{\gamma_h F_c - \Theta \gamma_c F_h} + \frac{\Theta \gamma_c F_h}{\Theta \gamma_c F_h - \gamma_h F_c} \left( e^{\left( \Theta \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right) \left( \frac{z}{l} \right)} \right) \\ \phi_{12}(z) &= \frac{\Theta \gamma_c F_h}{\Theta \gamma_c F_h - \gamma_h F_c} \left( 1 - e^{\left( \Theta \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right) \left( \frac{z}{l} \right)} \right) \\ \phi_{21}(z) &= \frac{\gamma_h F_c}{\gamma_h F_c - \Theta \gamma_c F_h} \left( 1 - e^{\left( \Theta \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right) \left( \frac{z}{l} \right)} \right) \\ \phi_{22}(z) &= \frac{\Theta \gamma_c F_h}{\Theta \gamma_c F_h - \gamma_h F_c} + \frac{\gamma_h F_c}{\gamma_h F_c - \Theta \gamma_c F_h} \left( e^{\left( \Theta \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right) \left( \frac{z}{l} \right)} \right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Para el intercambiador en paralelo,  $T_c^*(z)$  y  $T_h^*(z)$ , está dada por

$$\begin{aligned}T_c^*(z) &= \phi_{11}(z) T_{ci} + \phi_{12}(z) T_{hi} \\ T_h^*(z) &= \phi_{21}(z) T_{ci} + \phi_{22}(z) T_{hi}\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde los términos  $\phi_{ij}(z)$  ( $i, j = 1, 2$ ) se obtienen de (2.8) con  $\Theta = -1$ :

$$\begin{aligned}\phi_{11}(z) &= \frac{1}{\gamma_h F_c + \gamma_c F_h} \left( \gamma_h F_c + \gamma_h F_c \left( e^{-\left( \frac{\gamma_h}{F_h} + \frac{\gamma_c}{F_c} \right) \left( \frac{z}{l} \right)} \right) \right) \\ \phi_{12}(z) &= \frac{\gamma_c F_h}{\gamma_c F_h + \gamma_h F_c} \left( 1 - e^{-\left( \frac{\gamma_h}{F_h} + \frac{\gamma_c}{F_c} \right) \left( \frac{z}{l} \right)} \right) \\ \phi_{21}(z) &= \frac{\gamma_h F_c}{\gamma_h F_c + \gamma_c F_h} \left( 1 - e^{-\left( \frac{\gamma_h}{F_h} + \frac{\gamma_c}{F_c} \right) \left( \frac{z}{l} \right)} \right) \\ \phi_{22}(z) &= \frac{1}{\gamma_h F_c + \gamma_c F_h} \left( \gamma_h F_c + \gamma_h F_c \left( e^{-\left( \frac{\gamma_h}{F_h} + \frac{\gamma_c}{F_c} \right) \left( \frac{z}{l} \right)} \right) \right)\end{aligned} \tag{2.10}$$

Simplificando y substituyendo  $R$  y  $S$  de la ecuación (1.6), con  $\Theta = -1$  debido al flujo en

paralelo, las ecuaciones (2.9) se reducen a:

$$\begin{aligned} T_c^*(z) &= \left( \frac{R+S\tilde{t}}{R+1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-S\tilde{t}}{R+1} \right) T_{hi} \\ T_h^*(z) &= \left( \frac{R(1-S\tilde{t})}{R+1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1+RS\tilde{t}}{R+1} \right) T_{hi} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para un intercambiador en contracorriente,  $T_c^*(z)$  y  $T_h^*(z)$  están dadas por

$$T_c^*(z) = \phi_{11}(z)T_{co} + \phi_{12}(z)T_{hi} \quad (2.12)$$

$$T_h^*(z) = \phi_{21}(z)T_{co} + \phi_{22}(z)T_{hi} \quad (2.13)$$

Con el fin de expresar  $T_c^*(z)$  y  $T_h^*(z)$  en términos de las temperaturas de entrada  $T_{ci}$  y  $T_{hi}$ , se realizan los siguientes desarrollos. Tenemos que

$$T_c^*(l) = \phi_{11}(l)T_{co} + \phi_{12}(l)T_{hi} = T_{ci} \quad (2.14)$$

Despejando  $T_{co}$  :

$$T_{co} = \frac{T_{ci} - \phi_{12}(l)T_{hi}}{\phi_{11}(l)} \quad (2.15)$$

Substituyendo la ecuación (2.15) en (2.12) y (2.13):

$$T_c^*(z) = \left( \frac{\phi_{11}(z)}{\phi_{11}(l)} \right) T_{ci} + \left( \phi_{12}(z) - \left( \frac{\phi_{12}(l)}{\phi_{11}(l)} \right) \phi_{11}(z) \right) T_{hi}$$

$$T_h^*(z) = \left( \frac{\phi_{21}(z)}{\phi_{11}(l)} \right) T_{ci} + \left( \phi_{22}(z) - \left( \frac{\phi_{12}(l)}{\phi_{11}(l)} \right) \phi_{21}(z) \right) T_{hi}$$

Estas ecuaciones pueden ser reescritas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T_c^*(z) &= b_{11}(z)T_{ci} + b_{12}(z)T_{hi} \\ T_h^*(z) &= b_{21}(z)T_{ci} + b_{22}(z)T_{hi} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde,

$$b_{11}(z) = \frac{\phi_{11}(z)}{\phi_{11}(l)}$$

$$b_{12}(z) = \phi_{12}(z) - \left( \frac{\phi_{12}(l)}{\phi_{11}(l)} \right) \phi_{11}(z)$$

$$b_{21}(z) = \frac{\phi_{21}(z)}{\phi_{11}(l)}$$

$$b_{22}(z) = \phi_{22}(z) - \left( \frac{\phi_{12}(l)}{\phi_{11}(l)} \right) \phi_{21}(z)$$

que equivale a:

$$\begin{aligned}
b_{11}(z) &= \frac{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h e^{\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right) \frac{z}{l}}}{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h e^{\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}}} \\
b_{12}(z) &= \frac{\gamma_c F_h (1 - e^{\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right) \frac{z}{l}})}{\gamma_c F_h - \gamma_h F_c} - \left( \frac{\gamma_c F_h (1 - e^{\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}})}{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h e^{\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}}} \right) \left( \frac{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h e^{\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right) \frac{z}{l}}}{\gamma_c F_h - \gamma_h F_c} \right) \\
b_{21}(z) &= \frac{\gamma_h F_c (1 - e^{\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right) \frac{z}{l}})}{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h e^{\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}}} \\
b_{22}(z) &= \frac{\gamma_c F_h - \gamma_h F_c e^{\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right) \frac{z}{l}}}{\gamma_c F_h - \gamma_h F_c} - \left( \frac{\gamma_c F_h (1 - e^{\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}})}{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h e^{\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}}} \right) \left( \frac{\gamma_h F_c (1 - e^{\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right) \frac{z}{l}})}{\gamma_c F_h - \gamma_h F_c} \right)
\end{aligned}$$

Simplificando y substituyendo  $R$  y  $S$  de la ecuación (1.6), con  $\Theta = 1$  debido al flujo en contracorriente, las ecuaciones (2.16) se reducen a:

$$\begin{aligned}
T_c^*(z) &= \left( \frac{S(R - S^{-\frac{z}{l}})}{SR - 1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1 - S^{(1 - \frac{z}{l})}}{1 - SR} \right) T_{hi} \\
T_h^*(z) &= \left( \frac{SR(1 - S^{-\frac{z}{l}})}{SR - 1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1 - RS^{(1 - \frac{z}{l})}}{1 - SR} \right) T_{hi}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Cuando  $R = 1$ , se puede ver que  $S = 1$  (véase la ecuación 1.6). Entonces, en las ecuaciones anteriores,  $T_c^*(z)$  y  $T_h^*(z)$  quedan indeterminadas. Para este caso la matriz  $\mathcal{A}$  del sistema (2.7) se define como:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

donde  $\beta = \frac{\gamma_h}{F_h} = \frac{\gamma_c}{F_c}$  (ya que  $R = 1$ , *i. e.*  $\frac{\gamma_h F_c}{\gamma_c F_h} = 1$ ) y  $\Theta = 1$ , debido al flujo en contracorriente. Hay que recordar que  $\gamma_h$ ,  $F_h$ ,  $\gamma_c$  y  $F_c$  son parámetros constantes y positivos. La solución del sistema, con esta nueva definición de  $\mathcal{A}$ , está dada por (nótese como  $T_c^*(z)$  y  $T_h^*(z)$  están en términos de  $T_{ci}$  y  $T_{hi}$ ):

$$\begin{aligned}
T_c^*(z) &= \phi_{11}(z) T_{ci} + \phi_{12}(z) T_{hi} \\
T_h^*(z) &= \phi_{21}(z) T_{ci} + \phi_{22}(z) T_{hi}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

donde

$$\begin{aligned}
\phi_{11}(z) &= \frac{F_c + \frac{\gamma_c z}{l}}{F_c + \gamma_c} \\
\phi_{12}(z) &= \frac{\gamma_c (1 - \frac{z}{l})}{F_c + \gamma_c} \\
\phi_{21}(z) &= \frac{\gamma_c z}{l(F_c + \gamma_c)} \\
\phi_{22}(z) &= 1 - \frac{\gamma_c z}{l(F_c + \gamma_c)}
\end{aligned}$$

De una manera general, los contornos de equilibrio para ambas configuraciones se pueden expresar en una s3la ecuaci3n vectorial de la siguiente manera (los desarrollos para llegar a esta ecuaci3n se detallan en el ap3ndice A):

$$T^*(z) = \begin{pmatrix} T_c^*(z) \\ T_h^*(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{co}^* \\ T_{ho}^* \end{pmatrix} + (T_{hi} - T_{ci}) \begin{pmatrix} g_c(z) \\ g_h(z) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde

$$g_c(z) = \begin{cases} \frac{S-Sz/l}{1+R} & \text{si } \Theta = -1 \\ \frac{S-S(1-z/l)}{1-RS} & \text{si } \Theta = 1, R \neq 1 \\ -\frac{Pz}{l} & \text{si } \Theta = 1, R = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$g_h(z) = \begin{cases} \frac{R(S-Sz/l)}{1+R} & \text{si } \Theta = -1 \\ \frac{R(1-S(1-z/l))}{1-RS} & \text{si } \Theta = 1, R \neq 1 \\ -P(1 - \frac{z}{l}) & \text{si } \Theta = 1, R = 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

y

$$\begin{pmatrix} T_{co}^* \\ T_{ho}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-P & P \\ RP & 1-RP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{ci} \\ T_{hi} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

con

$$P = \begin{cases} \frac{1-S}{1+R} & \text{si } \Theta = -1 \\ \frac{1-S}{1-RS} & \text{si } \Theta = 1, R \neq 1 \\ \frac{UA}{UA+F_c C_{pc}} & \text{si } \Theta = 1, R = 1 \end{cases}$$

y  $R$  y  $S$  como fueron definidas en la ecuaci3n (1.6). Los valores de estado estacionario de las temperaturas de salida del intercambiador pueden ser obtenidas de (2.19). En efecto, no es dif3cil verificar de (2.20) y (2.21) que  $g_h(0) = g_c(\frac{1+\Theta}{2}l) = 0$ . Entonces, de (2.19) (con  $g_h = g_c = 0$ ) se observa que  $(T_{co}^*, T_{ho}^*)$  en (2.22) representa el vector de valores de estado estacionario de las temperaturas de salida del intercambiador.

**Observaci3n 2.2. Estabilidad.** La estabilidad del contorno de equilibrio es tratada en [38, 39, 40]. En [39], la estabilidad asint3tica es probada a trav3s de un funcional de Lyapunov. Estabilidad fuerte en el caso contracorriente es probada en [40] dentro de un contexto de sistemas lineales de dimensi3n infinita, mientras que m3s tarde, tal propiedad de estabilidad es probada ser exponencial en [38].

## 2.2. Modelo de parámetros agrupados

Para obtener el modelo de parámetros agrupados, consideraremos que el intercambiador se divide en varias secciones. En cada una de estas secciones se aplica la ley de balance de energía y así obtenemos el modelo matemático. Se partirá de una sola sección que considere el volumen total del intercambiador (figura 2.3). Posteriormente se considerará el caso general en que se tienen  $N$  secciones.

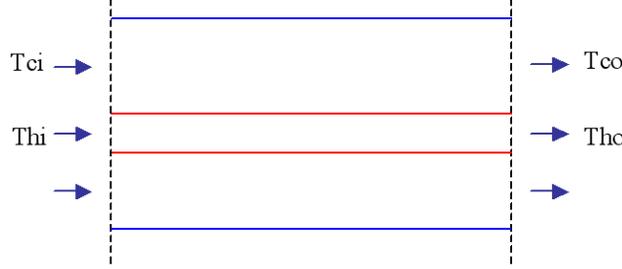


Figura 2.3: Esquema del intercambiador de calor en paralelo de una sola sección.

Como parte del procedimiento de seccionamiento se asume que cada sección se comporta como un tanque perfectamente mezclado. De ahí que la temperatura de cada sector se considera uniforme. Esto implica que no hay cambios de temperatura con respecto a la variable espacial a lo largo del sector. Al aplicar la ley de balance de energía se obtienen un par de ecuaciones diferenciales ordinarias por cada sector.

Para el tubo exterior aplicamos el balance de energía a una sección que considera todo el volumen de un intercambiador en paralelo

$$\rho_c V_c C_{pc} \frac{dT_{co}}{dt} = F_c C_{pc} (T_{ci} - T_{co}) + 2U\pi r l \Delta T$$

donde  $\Delta T$  representa la diferencia (promedio) de temperatura entre ambos fluidos. Despejando  $\frac{dT_c}{dt}$  y considerando que

$$M_c = \rho_c V_c; \quad A = 2\pi r l$$

se obtiene:

$$\frac{dT_{co}}{dt} = \frac{F_c}{M_c} (T_{ci} - T_{co}) + \frac{UA}{M_c C_{pc}} \Delta T$$

De igual forma procedemos con el tubo interno. Aplicando el balance de energía tenemos

$$\rho_h V_h C_{ph} \frac{dT_{ho}}{dt} = F_h C_{ph} (T_{hi} - T_{ho}) + 2U\pi r l \Delta T$$

Despejando  $\frac{dT_{ho}}{dt}$  y considerando que

$$M_h = \rho_h V_h; \quad A = 2\pi r l$$

se obtiene

$$\frac{dT_{ho}}{dt} = \frac{F_h}{M_h}(T_{hi} - T_{ho}) - \frac{UA}{M_h C_{ph}} \Delta T$$

De esta manera obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{co}}{dt} &= \frac{F_c}{M_c}(T_{ci} - T_{co}) + \frac{UA}{M_c C_{pc}} \Delta T \\ \frac{dT_{ho}}{dt} &= \frac{F_h}{M_h}(T_{hi} - T_{ho}) - \frac{UA}{M_h C_{ph}} \Delta T \end{aligned} \quad (2.23)$$

La diferencia de temperatura entre los fluidos,  $\Delta T$ , es la fuerza (*driving force*) que da lugar a la transferencia de calor por convección. Si se asume una distribución uniforme de las temperatura (suposición estándar para la obtención del model compartimental), la fuerza conductora es tomada como  $\Delta T = T_{ho} - T_{co}$ . Sin embargo, de acuerdo con [16], la AMTD

$$\Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2) = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2}$$

o la LMTD

$$\Delta T_L(\Delta T_1, \Delta T_2) = \begin{cases} \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} & \text{si } \Delta T_1 \neq \Delta T_2 \\ \Delta T_0 & \text{si } \Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_0 \end{cases}$$

con  $\Delta T_1$  y  $\Delta T_2$  como fueron definidos en las ecuaciones (1.3) y (1.4), pueden ser usadas para modelar  $\Delta T$  con el objeto de mejorar las trayectorias de evolución de las temperaturas de salida.

Nótese que si el promedio entre las temperaturas de entrada y salida,  $\frac{T_{co} + T_{ci}}{2}$  y  $\frac{T_{ho} + T_{hi}}{2}$ , es tomada como la temperatura de cada fluido en el término de acumulación (lado izquierdo de las ecuaciones), como fue considerado en [27], el modelo de 2º orden queda dado por

$$\begin{aligned} \frac{dT_{co}}{dt} &= 2 \left( \frac{F_c}{M_c}(T_{ci} - T_{co}) + \frac{UA}{M_c C_{pc}} \Delta T \right) \\ \frac{dT_{ho}}{dt} &= 2 \left( \frac{F_h}{M_h}(T_{hi} - T_{ho}) - \frac{UA}{M_h C_{ph}} \Delta T \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Obsérvese que un 2 aparece multiplicando cada término a la derecha de las ecuaciones dinámicas. Esto, por un lado, no altera los valores de estado estable y por otro lado, acelera la dinámica del sistema mejorando el tiempo de respuesta (acercándolo al de las trayectorias del modelo de parámetros distribuidos).

Cuando se tienen  $N$  celdas, se aplica la ley de balance de energía al  $k$ -ésimo sector (figura 2.4). Para el tubo externo, de un intercambiador en configuración contracorriente, la ecuación está dada por:

$$\frac{\rho_c V_c C_{pc}}{N} \frac{dT_{c,N-k+1}}{dt} = F_c C_{pc} (T_{c,N-k} - T_{c,N-k+1}) + 2U\pi r \frac{l}{N} \Delta T_k \quad (2.25)$$

donde  $\Delta T_k$  denota la diferencia (promedio) de temperatura entre los fluidos en la sección  $k$ . Si la suposición estándar de mezclado perfecto es asumido, entonces  $\Delta T_k = T_{h,k} - T_{c,N-k+1}$ .

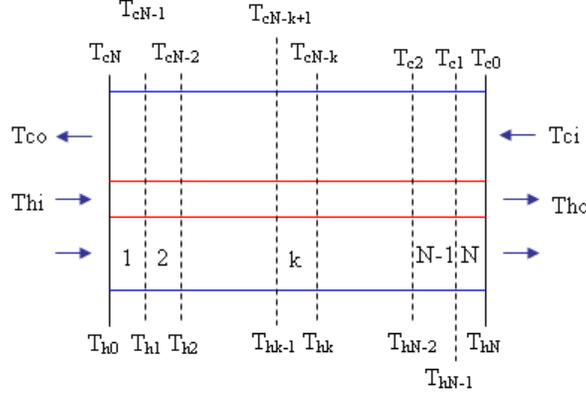


Figura 2.4: Esquema del intercambiador en contracorriente con  $N$  celdas.

Para el tubo interno se aplica la ley de balance de energía:

$$\frac{\rho_h V_h C_{ph}}{N} \frac{dT_{h,k}}{dt} = F_h C_{ph} (T_{h,k-1} - T_{h,k}) - 2U\pi r \frac{l}{N} \Delta T_k \quad (2.26)$$

Despejando  $\frac{dT_{c,N-k+1}}{dt}$  y  $\frac{dT_{h,k}}{dt}$  y tomando:

$$M_c = \rho_c V_c; \quad M_h = \rho_h V_h; \quad A = 2\pi r l;$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{dT_{c,N-k+1}}{dt} &= \frac{F_c N}{M_c} (T_{c,N-k} - T_{c,N-k+1}) + \frac{UA}{M_c C_{pc}} \Delta T_k \\ \frac{dT_{h,k}}{dt} &= \frac{F_h N}{M_h} (T_{h,k-1} - T_{h,k}) - \frac{UA}{M_h C_{ph}} \Delta T_k \end{aligned} \quad (2.27)$$

$\forall k = 1, \dots, N$ . Para el tubo externo, de un intercambiador en paralelo dividido en  $N$  celdas (figura 2.5), la ecuación está dada por:

$$\frac{\rho_c V_c C_{pc}}{N} \frac{dT_{c,k}}{dt} = F_c C_{pc} (T_{c,k-1} - T_{c,k}) + 2U\pi r \frac{l}{N} \Delta T_k$$

Si la suposición estándar de mezclado perfecto es asumido, entonces  $\Delta T_k = T_{h,k} - T_{c,k}$ .

Para el tubo interno se aplica la ley de balance de energía:

$$\frac{\rho_h V_h C_{ph}}{N} \frac{dT_{h,k}}{dt} = F_h C_{ph} (T_{h,k-1} - T_{h,k}) + 2U\pi r \frac{l}{N} \Delta T_k$$

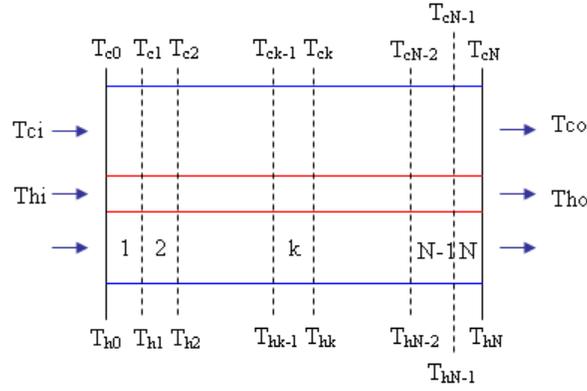


Figura 2.5: Esquema del intercambiador en paralelo con  $N$  celdas.

Despejando  $\frac{dT_{c,k}}{dt}$  y  $\frac{dT_{h,k}}{dt}$  y tomando:

$$M_c = \rho_c V_c; \quad M_h = \rho_h V_h; \quad A = 2\pi r l;$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{dT_{c,k}}{dt} &= \frac{F_c N}{M_c} (T_{c,k-1} - T_{c,k}) + \frac{UA}{M_c C_{pc}} \Delta T_k \\ \frac{dT_{h,k}}{dt} &= \frac{F_h N}{M_h} (T_{h,k-1} - T_{h,k}) - \frac{UA}{M_h C_{ph}} \Delta T_k \end{aligned} \quad (2.28)$$

$\forall k = 1, \dots, N$ . En estos modelos, (2.27) y (2.28), la aproximación de  $\Delta T_k$  a través de la AMTD o la LMTD aplicada a cada sección, también puede ser hecha para mejorar las trayectorias de evolución de las temperaturas de salida.

### 2.3. Modelación compartimental: una propuesta

En esta sección se explora la idea de considerar una distribución (lineal) en el término de acumulación, de modelos compartimentales N-celulares con  $N > 1$ . Los resultados de esta exploración se evaluarán a través de simulaciones numéricas. Usando los parámetros de la tabla 2.1 (tomados del artículo [37]) se hará una simulación numérica de la temperatura a la salida del tubo interno y externo para un intercambiador en contracorriente (con  $N = 100$ , figura 2.6) y en paralelo (con  $N = 100$ , figura 2.7). Las condiciones iniciales, para las simulaciones numéricas, se obtuvieron calculando el contorno de equilibrio tomando  $F_c = 0.07875 \frac{\text{kg}}{\text{seg}}$  y el resto de los valores paramétricos de la tabla 2.1. Los resultados mostrados en las figuras 2.6 y 2.7 consideran la evolución de las temperaturas de salida hacia su nuevo

valor de equilibrio habiendo hecho un cambio repentino (en  $t = 0$ ) del valor del fluido frío a  $F_c = 0.315 \frac{\text{kg}}{\text{seg}}$ .

$F_c$	$= 0.315 \frac{\text{kg}}{\text{seg}}$	$F_h$	$= 0.19 \frac{\text{kg}}{\text{seg}}$
$C_{pc}$	$= 1.91 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	$C_{ph}$	$= 1.59 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$
$T_{ci}$	$= 295\text{K}$	$T_{hi}$	$= 366.7\text{K}$
$M_c$	$= 18.15\text{kg}$	$M_h$	$= 6.8\text{kg}$
$A$	$= 1.9\text{m}^2$	$U$	$= 198.8 \frac{\text{W}}{\text{Km}^2}$

Tabla 2.1: Parámetros para la simulación numérica.

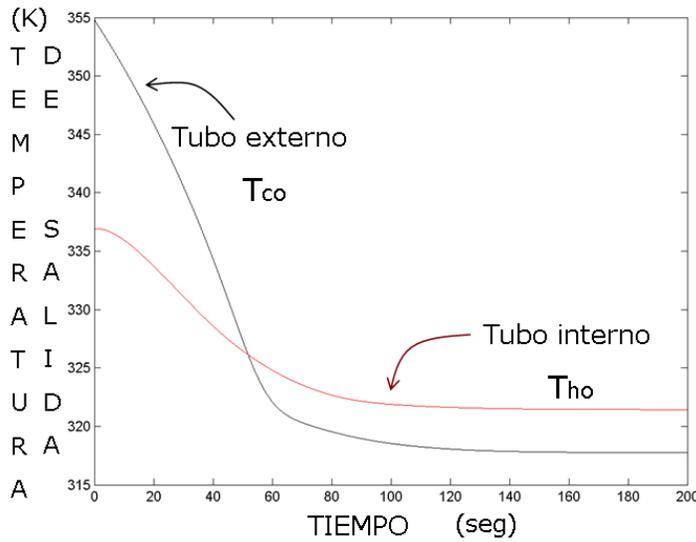


Figura 2.6: Simulación numérica para el intercambiador en contracorriente, con  $N = 100$ .

Nótese que este cambio de flujo repercute en una disminución de la energía calorífica acumulada en el sistema. Esta es redistribuida de acuerdo a su nuevo valor y a la dinámica del sistema dando lugar a la evolución mostrada en las figuras 2.6 y 2.7.

En adelante se utilizarán como referencias de comparación a modelos de intercambiadores con  $N = 100$  y  $N = 50$  indistintamente, ya que gráficamente hay poca diferencia entre ambos. Para efectos de simulación, es conveniente definir variables de estado en el orden siguiente:

para el intercambiador en contracorriente:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= T_{c,N} & x_{N+1} &= T_{h,1} \\
 x_2 &= T_{c,N-1} & x_{N+2} &= T_{h,2} \\
 &\vdots & &\vdots \\
 x_N &= T_{c,1} & x_{2N} &= T_{h,N}
 \end{aligned}$$

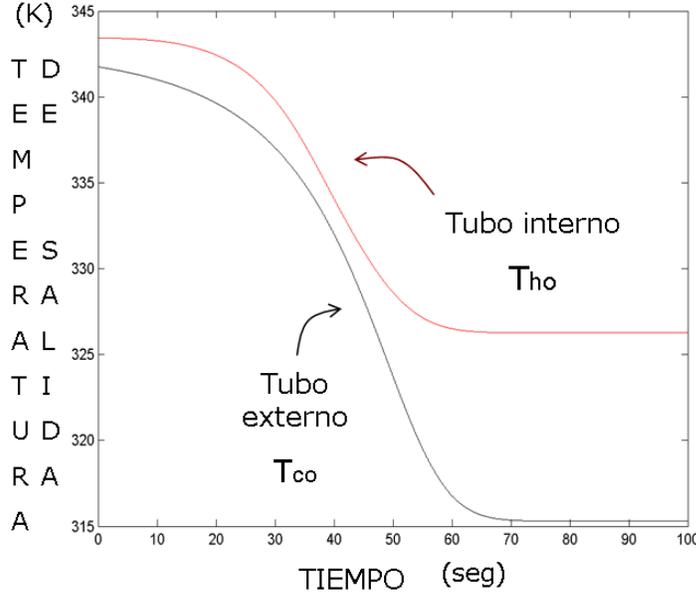


Figura 2.7: Simulación numérica para el intercambiador en paralelo, con  $N = 100$ .

para el intercambiador en paralelo:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= T_{c,1} & x_{N+1} &= T_{h,1} \\
 x_2 &= T_{c,2} & x_{N+2} &= T_{h,2} \\
 \vdots & & \vdots & \\
 x_N &= T_{c,N} & x_{2N} &= T_{h,N}
 \end{aligned}$$

Esta definición de estados ayuda a conservar una sólo expresión (en el simulador) de la media aritmética y logarítmica de diferencia de temperaturas, para ambos tipos de configuración del intercambiador, las cuales están dadas por:

$$\Delta T_{a,k} = \frac{(x_{N+k} - x_{k+1}) + (x_{N+k-1} - x_k)}{2}$$

$$\Delta T_{l,k} = \frac{(x_{N+k} - x_k) + (x_{N+k-1} - x_{k-1})}{\ln\left(\frac{x_{N+k} - x_k}{x_{N+k-1} - x_{k-1}}\right)}$$

Cabe hacer notar que cuando el número de celdas  $N$ , toma un valor grande, gráficamente no hay diferencia perceptible al usar la AMTD o la LMTD (ver figura 2.8). La LMTD será tomada en adelante como fuerza conductora en cada sección.

Para explorar la idea de considerar una distribución lineal para efectos de acumulación, partimos del caso más simple: el sistema de segundo orden dado por (2.24). Éste puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$M\dot{x} = (\mathcal{A}x + BT_i) + C\Delta T(x) \triangleq f(x)$$

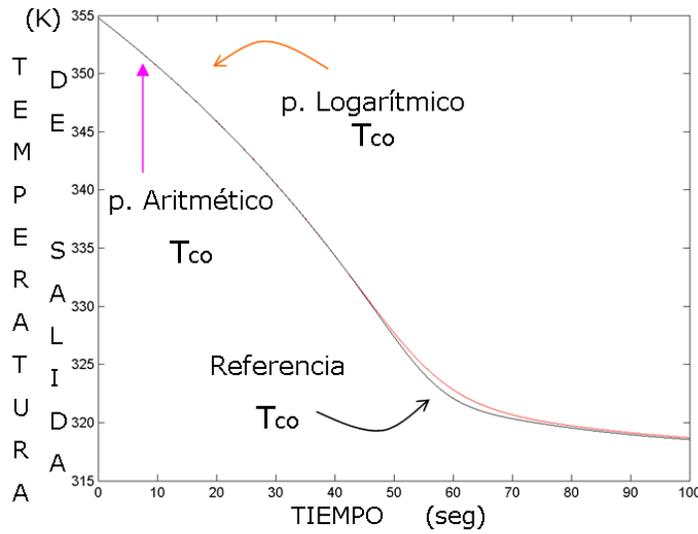


Figura 2.8: Respuesta de la temperatura a la salida del tubo externo, utilizando la AMTD y la LMTD para  $N = 50$ .

donde:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{F_c}{M_c} & 0 \\ 0 & -\frac{F_h}{M_h} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{F_c}{M_c} & 0 \\ 0 & \frac{F_h}{M_h} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_c \\ \alpha_h \end{pmatrix};$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

Al despejar  $\dot{x}$ , se obtiene:

$$\dot{x} = M^{-1}f(x)$$

El efecto de tomar la media aritmética de las temperaturas de salida y de entrada de cada fluido (en lugar de tomar sólo la diferencia de temperaturas de salida) se ve en las figuras 2.9 y 2.10. Estas simulaciones se hicieron para el caso contracorriente (tubo externo e interno, figuras 2.9 y 2.10 respectivamente) usando  $a = 2$  con  $N = 1$  para compararlo con la respuesta de la temperatura en el caso  $a = 1$  con  $N = 1$  y con la referencia ( $a = 1$  y  $N = 100$ ).

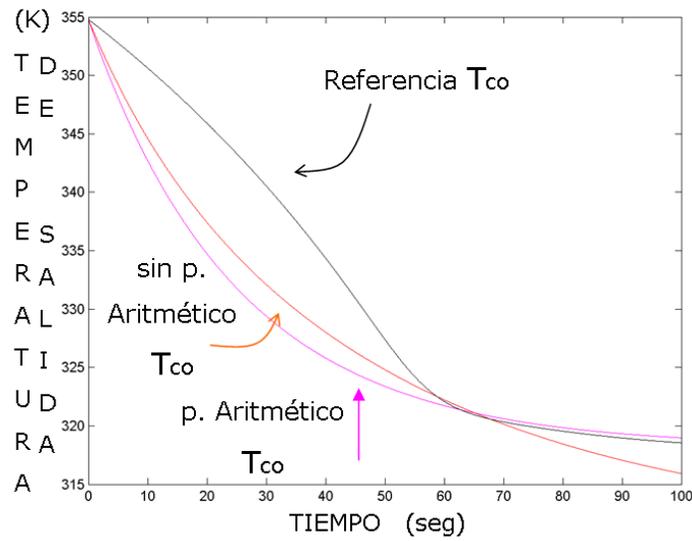


Figura 2.9: Respuesta de la temperatura a la salida del tubo externo, con  $a = 1$ ,  $a = 2$  y  $N = 1$ , (referencia:  $a = 1$  y  $N = 100$ ) caso contracorriente.

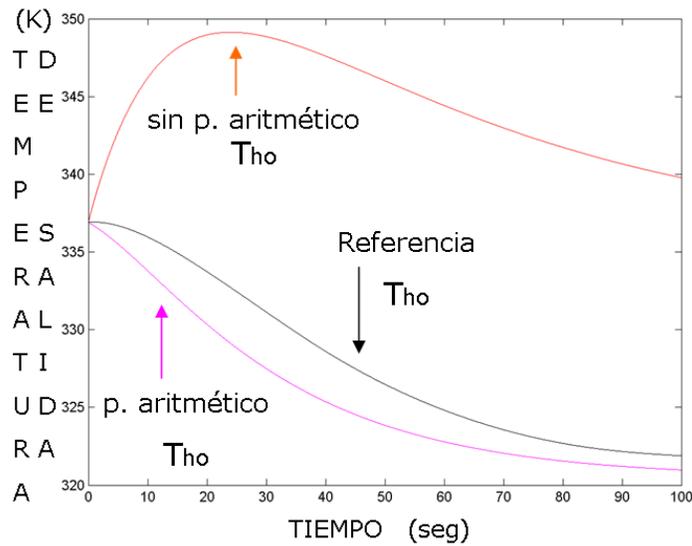


Figura 2.10: Respuesta de la temperatura a la salida del tubo interno, para  $a = 1$ ,  $a = 2$  y  $N = 1$ , (referencia:  $a = 1$  y  $N = 100$ ) caso contracorriente.

Para el caso en el que se usan  $N$  celdas:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{F_c}{M_c} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\frac{F_h}{M_h} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{F_c}{M_c} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{F_h}{M_h} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_c \\ \vdots \\ \alpha_h \\ \vdots \end{pmatrix};$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{pmatrix}.$$

En las siguientes figuras se observa el efecto de la matriz  $M$  en un modelo de orden bajo ( $N = 3$ , figura 2.11) y en uno de orden alto ( $N = 50$ , figura 2.12) y se comparan con la referencia.

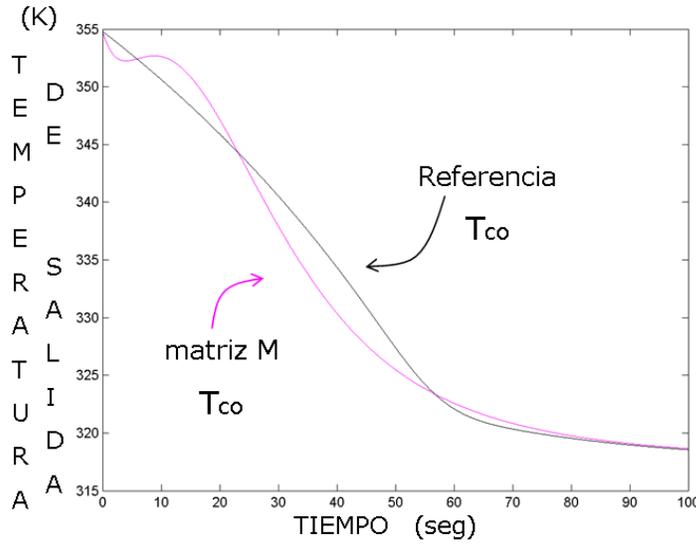


Figura 2.11: Respuesta de la temperatura a la salida del tubo externo, con  $a = 1$ ,  $a = 2$  y la referencia ( $N = 3$ ) para el caso contracorriente.

Como se puede ver en las figuras antes mencionadas, ciertas oscilaciones son observadas en la evolución de las temperaturas de salida. Al respecto, obsérvese que al aplicar el promedio aritmético, para efectos de acumulación, a la expresión para  $T_{c,k}$  (ecuación (2.28)) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{T_{c,k} + T_{c,k-1}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{dT_{c,k}}{dt} + \frac{dT_{c,k-1}}{dt} \right) = f_{1,k}$$

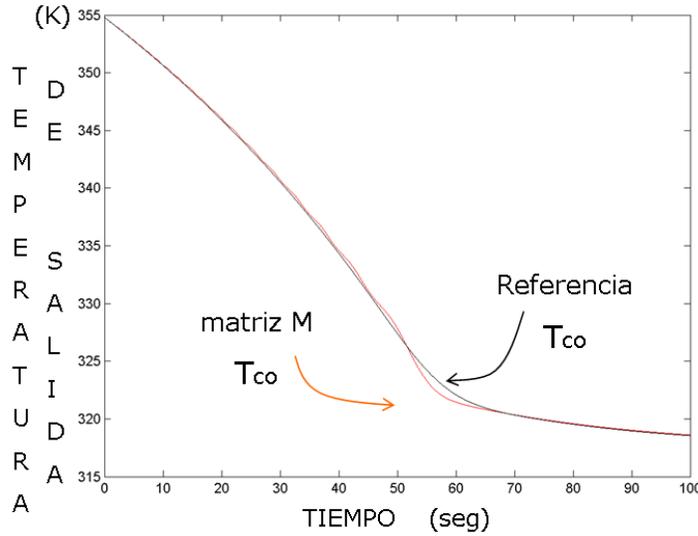


Figura 2.12: Respuesta de la temperatura a la salida del tubo externo, con  $a = 1$ ,  $a = 2$  y la referencia ( $N = 50$ ) para el caso contracorriente.

donde

$$f_{1,k} = \frac{F_c N}{M_c} (T_{c,k-1} - T_{c,k}) + \frac{\gamma_c}{M_c} \Delta T_k$$

despejando  $\frac{dT_{c,k}}{dt}$ :

$$\frac{dT_{c,k}}{dt} = 2f_{1,k} - \frac{dT_{c,k-1}}{dt}$$

Como se puede ver, en la ecuación anterior se tiene al término  $\frac{dT_{c,k-1}}{dt}$  restándose al resto de la expresión. Esto ayuda a visualizar la razón de las oscilaciones que se presentan al utilizar la matriz M (figuras 2.11 y 2.12): un incremento en  $T_{c,k-1}$  implica, de manera instantánea, una (tendencia de) disminución en  $T_{c,k}$ ; a su vez una disminución en  $T_{c,k}$  implicará un incremento en  $T_{c,k-1}$ . Conforme cada estado cambia de valor, su evolución repercute negativamente (en sentido contrario) en el movimiento de cada estado subsecuente. Esto genera que los estados manifiesten un comportamiento oscilatorio alrededor de una trayectoria nominal que conduce al sistema a su condición de estado estable (misma que se obtendría si  $M$  se tomara como la matriz identidad). Esta trayectoria nominal podría ser considerada como la esperada si las evoluciones no se manifestarán. Como quiera, las oscilaciones son inherentes a esta modelación lo cual nos hace concluir que su uso no es recomendable.

# Capítulo 3

## Análisis del modelo de parámetros agrupados

El modelo de parámetros agrupados que analizaremos está dado por las ecuaciones (2.23)/(2.24):

$$\begin{aligned}\frac{dT_{co}}{dt} &= \frac{aF_c}{M_c} (T_{ci} - T_{co}) + \alpha_c \Delta T_L \\ \frac{dT_{ho}}{dt} &= \frac{aF_h}{M_h} (T_{hi} - T_{ho}) - \alpha_h \Delta T_L\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $a = 1$  si se toma la temperatura a la salida del tubo como la temperatura del fluido (como en [16]) o  $a = 2$  si ésta es estimada a través del promedio de las temperaturas de la entrada y salida (como en [27]).  $\Delta T_L$  es modelado a través de la LMTD, ecuación (3.4). Defínase el vector de estado  $x = (x_1, x_2) = (T_{co}, T_{ho})$ . El sistema (3.1) será representado en forma genérica como  $\dot{x} = f(x)$  donde

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{aF_c}{M_c} (T_{ci} - x_1) + \alpha_c \Delta T_L \\ \frac{aF_h}{M_h} (T_{hi} - x_2) - \alpha_h \Delta T_L \end{pmatrix}\tag{3.2}$$

El dominio de espacio de estado del sistema queda definido por

$$\mathbb{D} = \begin{cases} \mathbb{D}_c \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid T_{ci} < x_j < T_{hi}, j = 1, 2\} & \text{si } \Theta = 1 \\ \mathbb{D}_p \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid T_{ci} < x_1 < x_2 < T_{hi}\} & \text{si } \Theta = -1 \end{cases}\tag{3.3}$$

La naturaleza del proceso de transferencia de calor da una idea físicamente razonable para la definición de  $\mathbb{D}$  como dominio de espacio de estado del sistema (3.1). Debido al calor absorbido por el fluido frío a la largo del tubo externo, su temperatura de salida,  $x_1$ , no puede ser menor o igual a  $T_{ci}$ . Tampoco puede ser mayor o igual que  $T_{hi}$  porque el fluido frío no puede absorber el total (o más) de la energía calorífica llevada por el fluido caliente a lo largo del tubo interno [43].

### 3.1. Media logarítmica de diferencia de temperatura

Normalmente en la literatura se define la LMTD como

$$\Delta T_l(\Delta T_1, \Delta T_2) = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \quad (3.4)$$

Sin embargo, es importante hacer notar que cuando  $\Delta T_1 = \Delta T_2$  dicha función queda indeterminada, lo cual es especialmente problemático en el caso contracorriente (véase Apéndice B). En esta sección se mostrará que tal indeterminación es eliminada si la LMTD es definida como

$$\Delta T_L(\Delta T_1, \Delta T_2) = \begin{cases} \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} & \text{si } \Delta T_1 \neq \Delta T_2 \\ \Delta T_0 & \text{si } \Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

la cual es continuamente diferenciable para cualesquiera valores positivos de  $\Delta T_1$  y  $\Delta T_2$ . Así, la LMTD en (3.5) y la AMTD definida por

$$\Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2) = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} \quad (3.6)$$

serán consideradas funciones bivariables en esta sección. Otras propiedades analíticas de la LMTD en (3.5) serán también demostradas. Empezamos mostrando una expresión equivalente.

**Lema 3.1.** *Defínase*

$$L(\Delta T_1, \Delta T_2) \triangleq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left( \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_1 + \Delta T_2} \right)^{2i} \quad (3.7)$$

$\forall(\Delta T_1, \Delta T_2)$  tal que  $\Delta T_1 + \Delta T_2 \neq 0$ . Entonces

$$\Delta T_L(\Delta T_1, \Delta T_2) \equiv \frac{\Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2)}{L(\Delta T_1, \Delta T_2)} \quad (3.8)$$

$\forall(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}_+^2$ .

**Demostración.** Se divide la demostración en dos partes:

1)  $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$ . De la fórmula 4.1.27 en<sup>1</sup> [44], se tiene que:

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left( \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_1 + \Delta T_2} \right)^{2i+1}$$

<sup>1</sup>La fórmula 4.1.27 en [44] enuncia una expansión en series de la función logarítmica:  $\ln z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{2i+1}$ ,  $\forall z : \Re(z) \geq 0, z \neq 0$

$\forall(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}_+^2$ . Entonces para todo  $(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}_+^2$  tal que  $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} &= \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \left( \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_1 + \Delta T_2} \right)^{2^{i+1}}} \\ &= \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{2 \left( \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_1 + \Delta T_2} \right) \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \left( \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_1 + \Delta T_2} \right)^{2^i} \right]} \\ &= \frac{\frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \left( \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_1 + \Delta T_2} \right)^{2^i}} \end{aligned}$$

usando (3.6) y (3.7) se obtiene

$$= \frac{\Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2)}{L(\Delta T_1, \Delta T_2)}$$

$2)\Delta T_1 = \Delta T_2$ . Nótese, de (3.6) y (3.7) que,  $L(\Delta T_0, \Delta T_0) = 1$  y  $\Delta T_a(\Delta T_0, \Delta T_0) = \Delta T_0$ ,  $\forall \Delta T_0 \neq 0$ . Entonces, para  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_0 > 0$ , se tiene:

$$\frac{\Delta T_a(\Delta T_0, \Delta T_0)}{L(\Delta T_0, \Delta T_0)} = \Delta T_0 = \Delta T_L(\Delta T_0, \Delta T_0)$$

**Observación 3.1.** Nótese que la función cociente  $\frac{\Delta T_a}{L}(\Delta T_1, \Delta T_2) = \frac{\Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2)}{L(\Delta T_1, \Delta T_2)}$  está definida en un subconjunto más grande que el dominio de  $\Delta T_L$ . De hecho,

$$\frac{\Delta T_a}{L} : \{(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \Delta T_1 + \Delta T_2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Entonces  $\frac{\Delta T_a}{L}$  es una extensión de  $\Delta T_L$ . Por lo tanto,  $\frac{\Delta T_a}{L}$  se puede usar para extrapolar  $\Delta T_L$  a puntos en  $\mathbb{R}^2$  donde esta última no está definida. Esto es útil para propósitos de análisis. Por ejemplo, se puede ver de (3.7) que,

$$L|_{\partial \mathbb{R}_+^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}}$$

y como  $\frac{1}{2^{i+1}} > \frac{1}{2^{(i+1)}}$ ,  $\forall i \geq 0$ , entonces  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}}$  es divergente acorde a los teoremas 3.28 y 3.25 en<sup>2</sup> [45].

<sup>2</sup>En [45], el teorema 3.28 establece que  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si  $p > 1$  y diverge si  $p \leq 1$ ; en el punto (b) del teorema 3.25 se enuncia que si  $a_n \geq d_n \geq 0$  para  $n \geq N_0$  (para algún  $N_0$ ), y si  $\sum_{i=0}^{\infty} d_n$  diverge, entonces  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$  también diverge.

Por lo tanto  $\frac{\Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2)}{L(\Delta T_1, \Delta T_2)} \rightarrow 0$  conforme  $(\Delta T_1, \Delta T_2) \rightarrow \partial\mathbb{R}_+^2$  lo que, del lema 3.1.1, equivale a  $\Delta T_L(\Delta T_1, \Delta T_2) \rightarrow 0$  conforme  $(\Delta T_1, \Delta T_2)$  se acerca a  $\partial\mathbb{R}_+^2$  (en el interior de  $\mathbb{R}_+^2$ ). Entonces, cero se puede considerar como el valor que toma la LMTD cuando  $\Delta T_1 = 0$  ó  $\Delta T_2 = 0$ . Para el caso contracorriente:  $\Delta T_1 = 0$  implica que  $x_1 = T_{hi}$  y  $\Delta T_2 = 0$  implica que  $x_2 = T_{ci}$ , entonces si  $x_1 \rightarrow T_{hi}$  o  $x_2 \rightarrow T_{ci}$ , la función  $\Delta T \rightarrow 0$ . Para el caso paralelo:  $\Delta T_2 = 0$  implica que  $x_2 = x_1$ , entonces si  $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ , la función  $\Delta T \rightarrow 0$ .

**Lema 3.2.** *El modelo de la LMTD en (3.5) es continuamente diferenciable y positivo en  $\mathbb{R}_+^2$ .*

**Demostración.** Como  $L(\Delta T_1, \Delta T_2) \geq 1, \forall(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}_+^2$  (véase ecuación (3.7)), se puede ver de (3.8) y (3.6) que  $\Delta T_L$  existe y es continua en  $\mathbb{R}^2$ . Más aún, de (3.8), se tiene

$$\frac{\partial \Delta T_L}{\partial \Delta T_i} = \frac{\frac{L}{2} - \Delta T_a \frac{\partial L}{\partial \Delta T_i}}{L^2} \quad (3.9)$$

con  $i = 1, 2$ , donde los argumentos son omitidos por simplicidad, y de (3.7), se puede ver que

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta T_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i}{2i+1} S^{2i-1} \frac{\partial S}{\partial \Delta T_i}$$

con

$$S = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_2 + \Delta T_1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta T_i} = \frac{(-1)^i 2 \Delta T_{3-i}}{(\Delta T_1 + \Delta T_2)^2}$$

De estas expresiones se puede ver que  $\frac{\partial \Delta T_L}{\partial \Delta T_i}, i = 1, 2$ , existen y son continuas en  $\mathbb{R}_+^2$ , probando la diferenciable continua de  $\Delta T_L$ . Por otro lado, nótese que, de (3.6),  $\Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2) > 0, \forall(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}_+^2$ , (el promedio de dos números positivos es positivo). Por esta razón y por el hecho de que  $L(\Delta T_1, \Delta T_2) \geq 1$  en  $\mathbb{R}_+^2$ , se tiene que

$$0 < \frac{\Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2)}{L(\Delta T_1, \Delta T_2)} \leq \Delta T_a(\Delta T_1, \Delta T_2)$$

$\forall(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}_+^2$ . Entonces del lema 3.1, la positividad de  $\Delta T_L$  se concluye.

**Lema 3.3.** *La media logarítmica de diferencia de temperaturas (3.5) es estrictamente creciente en sus argumentos, i.e.  $\frac{\partial \Delta T_L}{\partial \Delta T_i} > 0, i = 1, 2, \forall(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}_+^2$ .*

**Demostración.** De (3.5) para  $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$ , y de (3.9) para  $\Delta T_1 = \Delta T_2$  se tiene que:

$$\frac{\partial \Delta T_L}{\partial T_1} = \begin{cases} \frac{\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_1} - \ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)}{\left(\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)\right)^2} & \text{si } \Delta T_1 \neq \Delta T_2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \Delta T_1 = \Delta T_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \Delta T_L}{\partial T_2} = \begin{cases} \frac{\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) - \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_2}}{\left(\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)\right)^2} & \text{si } \Delta T_1 \neq \Delta T_2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \Delta T_1 = \Delta T_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

entonces

$$\frac{\partial \Delta T_L}{\partial T_i} = \begin{cases} \frac{(-1)^i \left[ \ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) - \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_i} \right]}{\left(\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)\right)^2} & \text{si } \Delta T_1 \neq \Delta T_2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \Delta T_1 = \Delta T_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

$i = 1, 2$ , las cuales son continuas en  $\mathbb{R}_+^2$ , acorde al lema 2. Nótese que la demostración del lema se reduce a probar que

$$(-1)^i \left[ \ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) - \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_i} \right] > 0 \quad (3.13)$$

$i = 1, 2$ , para todo  $(\Delta T_1, \Delta T_2) \in \mathbb{R}_+^2$ , tal que  $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$ . Entonces de la fórmula 4.1.33 en<sup>3</sup> [44], se tiene que para tales valores de  $(\Delta T_1, \Delta T_2)$  :

$$\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_2} < \ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) < \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\Delta T_1}$$

de donde se observa la satisfacción de (3.13).

**Observación 3.2.** Como consecuencia del lema 3.2, obsérvese que  $f(x)$  es continuamente diferenciable en  $\mathbb{D}$ . Considérese la matriz Jacobiana de  $f(x)$  (ecuación 3.2):

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \frac{F_c}{M_c} + 2 \frac{\gamma_c}{M_c} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} & 2 \frac{\gamma_c}{M_c} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \\ -2 \frac{\gamma_h}{M_h} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} & -2 \frac{F_h}{M_h} + 2 \frac{\gamma_h}{M_h} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Como consecuencia del lema 3.3 sabemos que  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} < 0$  y  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} > 0$ , por lo tanto  $\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} < 0$ ,  $\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} > 0$ ,  $\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} > 0$  y  $\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{D}$ .

<sup>3</sup>La fórmula 4.1.33 en [44] enuncia la siguiente desigualdad:  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \forall x > -1, x \neq 0$ , o equivalentemente  $1 - \frac{1}{y} < \ln(y) < y - 1, \forall y > 0, y \neq 1$ .

## 3.2. Análisis de las propiedades dinámicas del sistema

### 3.2.1. Existencia y unicidad de soluciones

Como  $f(x)$  es continuamente diferenciable en el dominio de espacio de estado (véase la observación 3.2), una condición suficiente para garantizar la existencia global y unicidad de soluciones, es que  $\mathbb{D}$  sea positivamente invariante con respecto a (3.1), (ver [46, Teo. 2.4]). Para demostrar que lo es, defínase:

$$L_1 \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = T_{hi} \geq x_2 \geq T_{ci}\}$$

$$L_2 \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = T_{ci} \leq x_1 \leq T_{hi}\}$$

$$L_3 \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = T_{ci} < x_2 \leq T_{hi}\}$$

$$L_4 \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = T_{hi} > x_1 \geq T_{ci}\}$$

$$L_5 \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid T_{ci} \leq x_1 = x_2 \leq T_{hi}\}$$

Nótese que  $\partial\mathbb{D} = \cup_{j=2-\Theta}^{\Theta} L_j$ . Para obtener la dirección de  $f(x)$  a lo largo del conjunto  $L_3$ , se evalúa  $f_1(x)$  en  $x_1 = T_{ci}$ , obteniendo:

$$f_1(T_{ci}, x_2) = \frac{a\gamma_c}{M_c} \left( \frac{x_2 - T_{hi}}{\ln\left(\frac{x_2 - T_{ci}}{T_{hi} - T_{ci}}\right)} \right)$$

$\forall x_2 \in (T_{ci}, T_{hi})$ . Debido a que  $T_{ci} < x_2 < T_{hi} \Leftrightarrow 0 < x_2 - T_{ci} < T_{hi} - T_{ci}, \forall x_2 \in (T_{ci}, T_{hi})$ , entonces  $0 < \frac{x_2 - T_{ci}}{T_{hi} - T_{ci}} < 1$ . Esto implica que  $\frac{a\gamma_c}{M_c} \left( \frac{x_2 - T_{hi}}{\ln\left(\frac{x_2 - T_{ci}}{T_{hi} - T_{ci}}\right)} \right) > 0$ , ya que  $x_2 - T_{hi} < 0$ . Por lo tanto  $f_1(T_{ci}, x_2) > 0, \forall x \in L_3$  (véase las figuras 3.1 y 3.2).

Para obtener la dirección del campo vectorial a lo largo del conjunto  $L_4$ , se sigue el mismo procedimiento, evaluamos  $f_2(x)$  en  $x_2 = T_{hi}$ , y se obtiene,

$$f_2(x_1, T_{hi}) = -\frac{a\gamma_h}{M_h} \left( \frac{T_{ci} - x_1}{\ln\left(\frac{T_{hi} - x_1}{T_{hi} - T_{ci}}\right)} \right)$$

$\forall x_1 \in (T_{ci}, T_{hi})$ . Como  $T_{ci} < x_1 < T_{hi} \Leftrightarrow 0 < T_{hi} - x_1 < T_{hi} - T_{ci}, \forall x_1 \in (T_{ci}, T_{hi})$ , es decir,  $0 < \frac{T_{hi} - x_1}{T_{hi} - T_{ci}} < 1$ , por lo tanto  $\ln\left(\frac{T_{hi} - x_1}{T_{hi} - T_{ci}}\right) < 0$ . Debido a que  $T_{ci} - x_1 < 0$ , entonces  $-\frac{a\gamma_h}{M_h} \left( \frac{T_{ci} - x_1}{\ln\left(\frac{T_{hi} - x_1}{T_{hi} - T_{ci}}\right)} \right) < 0$ , por lo tanto  $f_2(x_1, T_{hi}) < 0, \forall x \in L_4$  (véase las figuras 3.1 y 3.2).

Para la configuración en paralelo se obtiene la dirección del campo vectorial a lo largo del conjunto  $L_5$  (adicionalmente a  $L_3$  y  $L_4$ ). Se utiliza el vector gradiente para una superficie  $\mathcal{S}_p = \{x \in \mathbb{D}_p \mid h(x) = 0\}$ , con  $h(x) = x_2 - x_1$ :

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix}^T = (-1 \quad 1)^T$$

Aplicamos el producto interno evaluado en  $\mathcal{S}_p$  al vector gradiente de  $h(x)$  con las funciones que definen al sistema (3.1) y así obtener la componente de  $f(x)$  en la dirección normal a  $\mathcal{S}_p$ :

$$\langle f(x), \nabla h(x) \rangle |_{\mathcal{S}_p} = \left( f_1(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} + f_2(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \right) \Big|_{\mathcal{S}_p} = (f_2(x) - f_1(x)) |_{\mathcal{S}_p} =$$

$$\left( \frac{2aF_h}{M_h}(T_{hi} - x_2) - 2\frac{\gamma_h}{M_h}\Delta T(x) - \frac{2aF_c}{M_c}(T_{ci} - x_1) - 2\frac{\gamma_c}{M_c}\Delta T(x) \right) \Big|_{\mathcal{S}_p}$$

Al evaluar en  $x \in \mathcal{S}_p$  tenemos que  $\Delta T(x) = 0$  (véase la observación 3.1), entonces:

$$\langle f(x), \nabla h(x) \rangle |_{\mathcal{S}_p} = \frac{2aF_h}{M_h}(T_{hi} - x_2) - \frac{2aF_c}{M_c}(T_{ci} - x_1) \Big|_{x_2=x_1}$$

por lo tanto  $\langle f(x), \nabla h(x) \rangle |_{\mathcal{S}_p} > 0, \forall x \in L_5$ , véase la figura 3.1.

Para la configuración en contracorriente, se obtiene la dirección del campo vectorial a lo largo del conjunto  $L_1$  y  $L_2$  (adicionalmente  $L_3$  y  $L_4$ ). Para la obtención a lo largo de  $L_1$  se evalúa  $f_1(x)$  en  $x_1 = T_{hi}$ , obteniendo:

$$f_1(T_{ci}, x_2) = \frac{a}{M_c} (F_c(T_{ci} - T_{hi}) + \gamma_c (\Delta T))$$

De la observación 3.1 vemos que  $\Delta T_L = 0$ , ya que  $x_1 = T_{hi}$ , entonces al simplificar se obtiene:

$$f_1(T_{ci}, x_2) = \frac{aF_c}{M_c}(T_{ci} - T_{hi})$$

$\forall x_2 \in (T_{ci}, T_{hi})$ . Debido a que  $T_{ci} < T_{hi}$ , entonces  $f_1(T_{ci}, x_2) < 0, \forall x \in L_1$  (véase la figura 3.2).

Para obtener la dirección del campo vectorial a lo largo del conjunto  $L_2$ , se evalúa  $f_2(x)$  en  $x_2 = T_{ci}$ , obteniendo:

$$f_2(x_1, T_{ci}) = \frac{a}{M_h} (F_h(T_{hi} - T_{ci}) + \gamma_h (\Delta T))$$

De la observación 3.1 vemos que  $\Delta T_L = 0$ , ya que  $x_2 = T_{ci}$  implica que  $x_2 - T_{ci} = \Delta T_2 = 0$ , entonces al simplificar se obtiene:

$$f_2(x_1, T_{ci}) = \frac{aF_h}{M_h}(T_{hi} - T_{ci})$$

$\forall x_1 \in (T_{ci}, T_{hi})$ . Debido a que  $T_{ci} < T_{hi}$ , entonces  $f_2(x_1, T_{ci}) > 0$ ,  $\forall x \in L_2$  (véase la figura 3.2).

Esto muestra que para cualquier  $x \in \partial\mathbb{D}$ , el campo vectorial  $f(x)$  apunta al interior de  $\mathbb{D}$  (figuras 3.1 y 3.2). Por lo que,  $\partial\mathbb{D}$  es inalcanzable para cualquier órbita de (3.1) con condiciones iniciales en  $\mathbb{D}$ . Por lo tanto las trayectorias del campo vectorial dado por las funciones del sistema (3.1) permanecen dentro de  $\mathbb{D}$ ,  $\forall t \in (0, \infty)$ , en consecuencia el conjunto  $\mathbb{D}$  es positivamente invariante con respecto a la dinámica del sistema (3.1). Entonces para cada  $x(0) = x_o \in \mathbb{D}$ , el sistema tiene una solución única  $x(t; x_o) \in \mathbb{D}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

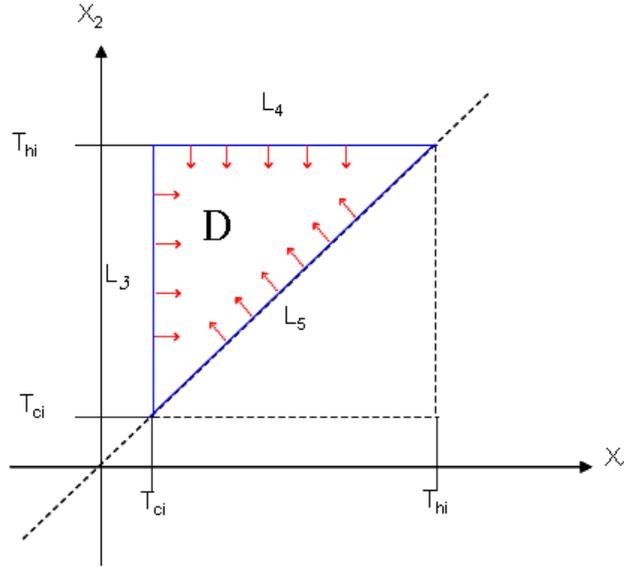


Figura 3.1: Dirección del campo vectorial dado por (3.1), para el flujo en paralelo.

### 3.2.2. Soluciones de equilibrio

**Proposición 3.1.** *Para el sistema (3.1), existe un punto de equilibrio único localizado en:*

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P & P \\ RP & 1 - RP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{ci} \\ T_{hi} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

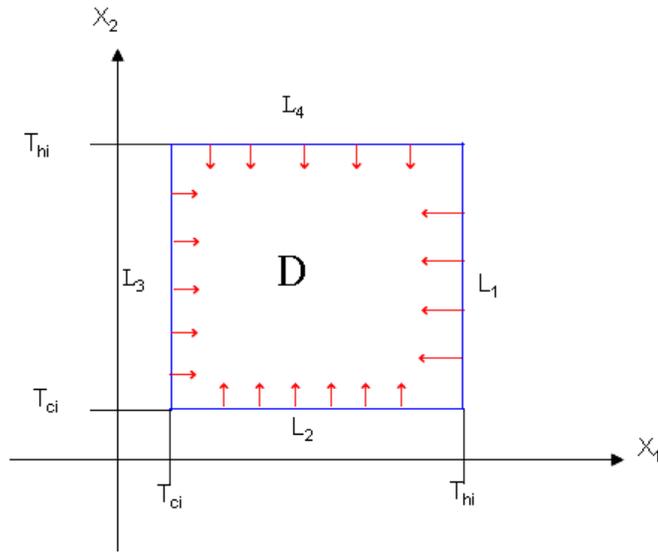


Figura 3.2: Dirección del campo vectorial dado por (3.1), para el flujo en contracorriente.

donde

$$P = \begin{cases} \frac{1-S}{1+R} & \text{si } \Theta = -1 \\ \frac{1-S}{1-RS} & \text{si } \Theta = 1, R \neq 1 \\ \frac{UA}{UA+F_c C_{pc}} & \text{si } \Theta = 1, R = 1 \end{cases}$$

y  $R$  y  $S$  se definen en la ecuación (1.6).

**Demostración.** Para calcular el conjunto de puntos de equilibrio,  $x^*$ , se tiene que satisfacer que  $f_1(x^*) = 0$  y  $f_2(x^*) = 0$ . Entonces se cumple que  $\frac{\gamma_h M_c}{a} f_1(x^*) + \frac{\gamma_c M_h}{a} f_2(x^*) = 0$ , *i. e.*  $\frac{\gamma_h M_c}{a} (T_{ci} - x_1^*) + \frac{\gamma_c M_h}{a} f_2(T_{hi} - x_2^*) = 0$ . Es decir que a cada punto de equilibrio  $x^*$  satisface la siguiente relación:

$$T_{hi} - x_2^* = -R(T_{ci} - x_1^*) \quad (3.16)$$

Ahora, de (3.2) se tiene que

$$\frac{M_c}{a} f_1(x) = F_c(T_{ci} - x_1^*) + \gamma_c \Delta T \quad (3.17)$$

Considérese por lo pronto que  $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$ . Substituyendo la LMTD en la ecuación anterior se obtiene:

$$= (T_{ci} - x_1^*) \left( F_c + \left( \frac{\gamma_c}{T_{ci} - x_1} \right) \left( \frac{x_2^* - T_{hi} + \Theta(x_1^* - T_{ci})}{\ln \left( \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)} \right) \right)$$

Substituyendo, de la ecuación (3.16) en la expresión precedente, se obtiene:

$$\frac{M_c}{a} f_1(x) = \left( F_c + \frac{\gamma_c(R - \Theta)}{\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)} \right) (T_{ci} - x_1) = 0$$

Debido a que  $x_1 > T_{ci}$ , la expresión anterior se satisface si y sólo si se cumple que:

$$F_c + \frac{\gamma_c(R - \Theta)}{\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)} = 0$$

de donde se obtiene:

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = e^{-\frac{\gamma_c}{F_c}(R - \Theta)} = e^{UA\left(\frac{\Theta}{F_c C_{pc}} - \frac{1}{F_h C_{ph}}\right)} \quad (3.18)$$

Para el intercambiador en paralelo, donde  $\Theta = -1$  y considerando  $\Delta T_1$ ,  $\Delta T_2$  y  $S$  como fueron definidas en la sección 1.1, la ecuación (3.18) se puede reescribir como

$$\frac{x_2^* - x_1^*}{T_{hi} - T_{ci}} = S$$

Despejando  $x_2^* - x_1^*$ , se obtiene:  $x_2^* - x_1^* = S(T_{hi} - T_{ci})$ . Sumando y restando  $T_{hi}$  y usando la ecuación (3.16), se obtiene:

$$R(T_{ci} - x_1^*) - x_1^* + T_{hi} = S(T_{hi} - T_{ci})$$

La ecuación queda en términos de una sólo variable. Despejando  $x_1^*$ :

$$RT_{ci} + T_{hi} - x_1^*(R + 1) = S(T_{hi} - T_{ci})$$

$$x_1^* = \frac{(R + S)T_{ci} + (1 - S)T_{hi}}{R + 1}$$

Para obtener  $x_2$  se usa la ecuación (3.16) y se substituye  $x_1^*$ :

$$T_{hi} - x_2^* = -R(T_{ci} - x_1^*)$$

$$x_2^* = T_{hi} + RT_{ci} - R\left(\frac{(R + S)T_{ci} + (1 - S)T_{hi}}{R + 1}\right)$$

$$x_2^* = \left(R - \frac{R(R + S)}{R + 1}\right) T_{ci} + \left(1 - \frac{R(1 - S)}{R + 1}\right) T_{hi}$$

$$x_2^* = \frac{R(1-S)T_{ci} + (1+RS)T_{hi}}{R+1}$$

Entonces el único punto de equilibrio, para un intercambiador en paralelo, está dado por:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \left(\frac{R+S}{R+1}\right) T_{ci} + \left(\frac{1-S}{R+1}\right) T_{hi} \\ x_2^* &= \left(\frac{R(1-S)}{R+1}\right) T_{ci} + \left(\frac{1+RS}{R+1}\right) T_{hi} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para el intercambiador en contracorriente con  $R \neq 1$ , donde  $\Theta = 1$  y considerando  $\Delta T_1$ ,  $\Delta T_2$  y  $S$  como fueron definidas en la sección 1.1, la ecuación (3.18) se puede reescribir como:

$$S\left(\frac{x_2^* - T_{ci}}{T_{hi} - x_1^*}\right) = 1$$

Despejando  $S(x_2^* - T_{ci})$ , se obtiene:  $S(x_2^* - T_{ci}) = T_{hi} - x_1^*$ . Sumando y restando  $T_{hi}$  y usando la ecuación (3.16), se obtiene:

$$S(R(T_{ci} - x_1^*) + T_{hi} - T_{ci}) = T_{hi} - x_1^*$$

La ecuación nos queda en términos de una sola variable. Despejando  $x_1^*$ :

$$RT_{ci} + T_{hi} + x_1^*(S^{-1} - R) = S^{-1}(T_{hi} + T_{ci})$$

$$x_1^* = \frac{S(1-R)T_{ci} + (1-S)T_{hi}}{1-SR}$$

Para obtener  $x_2$  se usa la ecuación (3.16) y se substituye  $x_1^*$ :

$$T_{hi} - x_2^* = -R(T_{ci} - x_1^*)$$

$$x_2^* = T_{hi} + RT_{ci} - R\left(\frac{S(1-R)T_{ci} + (1-S)T_{hi}}{1-SR}\right)$$

$$x_2^* = \left(R - \frac{RS(1-R)}{1-SR}\right) T_{ci} + \left(1 - \frac{R(1-S)}{1-SR}\right) T_{hi}$$

$$x_2^* = \frac{R(1-S)T_{ci} + (1-R)T_{hi}}{1-SR}$$

Entonces el único punto de equilibrio, para un intercambiador en contracorriente con  $R \neq 1$ , está dado por:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \left( \frac{S(1-R)}{1-SR} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-S}{1-SR} \right) T_{hi} \\ x_2^* &= \left( \frac{R(1-S)}{1-SR} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-R}{1-SR} \right) T_{hi} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Obsérvese en estas expresiones que si  $R = 1$  entonces  $x_1^*$  y  $x_2^*$  quedan indeterminados. Por otro lado, obsérvese de la ecuación (3.18) que  $R = \Theta = 1$  implica que  $\Delta T_1 = \Delta T_2$ . Entonces, para obtener el punto de equilibrio con  $R = 1$ , se substituye  $\Delta T_0$  (de la ecuación (3.5)), en lugar de la función  $\Delta T_i$ , en la ecuación (3.17). Así, para el caso contracorriente con  $R = 1$  se tiene

$$\frac{M_c}{a} f_1(x^*) = F_c(T_{ci} - x_1^*) + \gamma_c(T_{hi} - x_1^*) = 0 \quad (3.21)$$

Despejando  $x_1^*$ , nos queda:

$$x_1^* = \frac{F_c T_{ci} + \gamma_c T_{hi}}{F_c + \gamma_c}$$

Para obtener  $x_2^*$  se substituye la expresión de  $x_1^*$  en (3.16), con  $R = 1$ :

$$T_{hi} - x_2^* = \frac{F_c T_{ci} + \gamma_c T_{hi}}{F_c + \gamma_c} - T_{ci}$$

Simplificando,

$$x_2^* = \frac{\gamma_c T_{ci} + F_c T_{hi}}{F_c + \gamma_c}$$

Substituyendo  $\gamma_c$  (véase la ecuación (1.5)) en  $x_1^*$  y  $x_2^*$ , se obtiene

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{(F_c C_{pc}) T_{ci} + (UA) T_{hi}}{F_c C_{pc} + UA} \\ x_2^* &= \frac{(UA) T_{ci} + (F_c C_{pc}) T_{hi}}{F_c C_{pc} + UA} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Entonces para el caso contracorriente el punto de equilibrio está dado por:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \begin{cases} \left( \frac{S(1-R)}{1-SR} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-S}{1-SR} \right) T_{hi} & \text{si } R \neq 1 \\ \left( \frac{F_c C_{pc}}{F_c C_{pc} + UA} \right) T_{ci} + \left( \frac{UA}{F_c C_{pc} + UA} \right) T_{hi} & \text{si } R = 1 \end{cases} \\ x_2^* &= \begin{cases} \left( \frac{R(S-1)}{1-SR} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-R}{1-SR} \right) T_{hi} & \text{si } R \neq 1 \\ \left( \frac{UA}{F_c C_{pc} + UA} \right) T_{ci} + \left( \frac{F_c C_{pc}}{F_c C_{pc} + UA} \right) T_{hi} & \text{si } R = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $R$  y  $S$  se definen en la ecuación (1.6).

Recapitulando, de las ecuaciones (3.19), (3.20) y (3.22), el punto de equilibrio para un intercambiador (en paralelo o contracorriente) está dado por:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P & P \\ RP & 1 - RP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{ci} \\ T_{hi} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{cases} \frac{1-S}{1+R} & \text{si } \Theta = -1 \\ \frac{1-S}{1-RS} & \text{si } \Theta = 1, R \neq 1 \\ \frac{UA}{UA+F_c C_{pc}} & \text{si } \Theta = 1, R = 1 \end{cases}$$

con  $R$  y  $S$  como fueron definidos en (1.6).

**Observación 3.3.** Para el intercambiador en paralelo, verificamos si el punto de equilibrio  $x^* = (x_1^* \ x_2^*)^T$  pertenece a  $\mathbb{D}_p$ : para que  $x^* \in \mathbb{D}_p$ , se tiene que cumplir que  $T_{ci} < x_1^* < x_2^* < T_{hi}$ .  $x_1^*$  lo podemos reescribir como  $x_1^* = \alpha_1 T_{ci} + (1 - \alpha_1) T_{hi}$ , con  $\alpha_1 = \frac{R+S}{R+1}$ , donde  $0 < \alpha_1 < 1$ , esto implica que  $T_{ci} < x_1^* < T_{hi}$ . Con  $x_2^*$  se usa el mismo razonamiento, a  $x_2^*$  se puede reescribir como  $x_2^* = \alpha_2 T_{ci} + (1 - \alpha_2) T_{hi}$  con  $\alpha_2 = \frac{R(1-S)}{R+1}$ , donde  $0 < \alpha_2 < 1$ , por lo tanto  $T_{ci} < x_2^* < T_{hi}$ .

Ahora

$$\begin{aligned} x_1^* - x_2^* &= \alpha_1 T_{ci} + (1 - \alpha_1) T_{hi} - \alpha_2 T_{ci} - (1 - \alpha_2) T_{hi} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) T_{ci} - (\alpha_1 - \alpha_2) T_{hi} = (\alpha_1 - \alpha_2) (T_{ci} - T_{hi}) \end{aligned}$$

Para que  $x_1^* - x_2^* < 0$  entonces se tiene que cumplir que  $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$ , ya que  $T_{ci} - T_{hi} < 0$ , entonces

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{R+S}{R+1} - \frac{R(1-S)}{R+1} = \frac{S(1+R)}{R+1}$$

Como  $R > 0$  y  $0 < S < 1$ , entonces  $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$ , por lo que  $(\alpha_1 - \alpha_2)(T_{ci} - T_{hi}) < 0$ . Entonces  $x_1^* - x_2^* < 0$ . Como  $T_{ci} < x_1^* < x_2^* < T_{hi}$ , entonces  $x^* \in \mathbb{D}_p$ .

Para el intercambiador en contracorriente, verificamos si el punto de equilibrio  $x^* = (x_1^* \ x_2^*)^T$  pertenece a  $\mathbb{D}_c$ : para que  $x^* \in \mathbb{D}_c$ , se tiene que cumplir que  $T_{ci} < x_j^* < T_{hi}$  con  $j = 1, 2$ .  $x_j^*$ , para cualquier valor de  $R$ , se puede reescribir como  $x_j^* = \alpha_j T_{ci} + (1 - \alpha_j) T_{hi}$ , donde  $0 < \alpha_j < 1$ , por lo tanto  $T_{ci} < x_j^* < T_{hi}$ , mostrando que  $x_j^* \in \mathbb{D}$ .

**Observación 3.4.** De la ecuación del contorno de equilibrio (2.19), uno puede ver que  $T_h^*(l) = T_{ho}^*$  y  $T_c^*(\frac{1-\Theta}{2}l) = T_{co}^*$ . Entonces, el sistema (3.1) con  $\Delta T$  como en (3.5) da valores de equilibrio de las temperaturas de salida que corresponden de manera exacta a aquéllos que se obtienen del modelo de parámetros distribuidos en estado estable.

### 3.2.3. Estabilidad

En esta sección se analiza la estabilidad del punto de equilibrio único (3.15). Se empieza estableciendo un resultado preliminar que será útil en el análisis.

**Lema 3.4.** *El sistema (3.1) no tiene órbitas periódicas en  $\mathbb{D}$ .*

**Demostración.** De (3.14) vemos que,

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} = -2 \left( \frac{F_c}{M_c} + \frac{F_h}{M_h} \right) + 2 \frac{\gamma_c}{M_c} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} - 2 \frac{\gamma_h}{M_h} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2}$$

Sabemos que, del lema 3.3,  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} < 0$ ,  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} > 0$ , entonces  $\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{D}$ . Por el criterio de Bendixon, véase por ejemplo [46, Teo. 7.2]. Se concluye que el sistema (3.1) no tiene órbitas periódicas en  $\mathbb{D}$ .

**Lema 3.5.** *El punto de equilibrio  $x^*$  es asintóticamente estable y es globalmente atractivo en  $\mathbb{D}$ .*

**Demostración.** Debido al acotamiento de  $\mathbb{D}$  y a que éste es positivamente invariante con respecto a la dinámica del sistema, cada solución de (3.1) tiene un conjunto límite no vacío, compacto, y positivamente invariante,  $\Gamma^+$ , y  $x(t; x_0) \rightarrow \Gamma^+$  conforme  $t \rightarrow \infty$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{D}$  (véase [46, Lema 3.1]). Entonces, como no existen órbitas periódicas en  $\mathbb{D}$  se concluye que  $x^*$  es el único punto contenido en  $\Gamma^+$  para cada solución de (3.1). Consecuentemente,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = x^*$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{D}$ , mostrando atractividad global de  $x^*$  en  $\mathbb{D}$ .

Por otro lado analizando el polinomio característico de la matriz Jacobiana de  $f(x)$  (véase ecuación (3.14)), es decir:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \left| \lambda I - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right| \\ \det \left( \lambda I - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) &= \det \begin{pmatrix} \lambda I - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \lambda I - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= \left( \lambda - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right) \left( \lambda - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right) - \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \right) \\ &= \lambda^2 - \lambda \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right) + \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right) - \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \right) = \lambda^2 + B(x)\lambda + C(x) \end{aligned}$$

donde,

$$B(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}$$

$$C(x) = \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right) - \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \right)$$

Sabemos, de la observación (3.2), que  $\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} < 0$  y que  $\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} < 0$ , entonces  $-\left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right) > 0$ , lo que implica que  $B(x) > 0$ .

Analizando  $C(x)$ :

$$\begin{aligned} C(x) &= \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right) - \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \right) \\ &= \left( -2 \frac{F_c}{M_c} + 2 \frac{\gamma_c}{M_c} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} \right) \left( -2 \frac{F_h}{M_h} - 2 \frac{\gamma_h}{M_h} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \right) - \left( 2 \frac{\gamma_c}{M_c} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \right) \left( -2 \frac{\gamma_h}{M_h} \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} \right) \\ &= -4 \left( \frac{F_c F_h}{M_c M_h} \right) + 4 \frac{\gamma_h F_c}{M_c M_h} \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \right) - 4 \frac{F_h \gamma_c}{M_h M_c} - 4 \frac{\gamma_h \gamma_c}{M_h M_c} \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \right) + 4 \frac{\gamma_h \gamma_c}{M_h M_c} \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \right) \\ &= -4 \frac{F_c F_h}{M_c M_h} + 4 \frac{\gamma_h F_c}{M_c M_h} \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \right) - 4 \frac{F_h \gamma_c}{M_h M_c} \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} < 0$  y  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} > 0$  (del lema 3.3), tenemos que  $C(x) > 0$ . Por lo tanto  $P(\lambda)$  tiene ambas raíces con parte real negativa, lo que implica que  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  es Hurwitz  $\forall x \in \mathbb{D}$ , por lo tanto el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

**Observación 3.5.** De las ecuaciones (3.7) y (3.8) en el lema 3.1 no es difícil ver que  $\Delta T_L$  es infinitamente diferenciable en  $\mathbb{D}$ . Entonces,  $\frac{\partial f}{\partial T_o}$  es acotada y Lipschitz en  $B_r = \{T_o \in \mathbb{R}^2 \mid \|T_o - T_o^*\|_2 < r\}$ , para cualquier  $r > 0$  tal que  $B_r \subset \mathbb{D}$ . Entonces, la estabilidad asintótica es en realidad exponencial, lo cual coincide con los resultados de estabilidad del perfil de equilibrio para el modelo de parámetros distribuidos (véase la observación 2.2).

# Capítulo 4

## Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo, se desarrolló la obtención del modelo de parámetros distribuidos y se discuten sus propiedades dinámicas. Dicho modelo se obtuvo utilizando la ley de balance de energía, tomando en cuenta ciertas suposiciones que son comunes en la literatura. Bajo la suposición adicional de temperaturas de entrada constantes, se garantiza la existencia de una solución de equilibrio del sistema. Además se obtuvo el contorno de estado estable y con ello las expresiones para las temperaturas de salida de ambos fluidos. El contorno de equilibrio fue probado ser exponencialmente estable en trabajos previos.

Se presentó un modelo complementado de la LMTD que muestra ser continuamente diferenciable y positivo en su dominio. Esta expresión de la LMTD se utilizó en el modelo de parámetros agrupados como fuerza conductora (*driving force*).

Se exploró una modelación compartimental alternativa. Ésta usa un promedio aritmético entre la temperatura de salida y de entrada de cada fluido, en lugar de tomar sólo la temperatura de salida en el término de acumulación. Esto nos llevó a utilizar una matriz constante que multiplica la dinámica del sistema ( $\dot{x} = M^{-1}f(x)$ ). Sin embargo al momento de utilizar este nuevo modelo en simulación, se presentan unas oscilaciones, las cuales disminuyen cuando  $N$  es muy grande (modelos de orden muy alto). Esto nos hace concluir que tal modelación no es conveniente para valores pequeños de  $N > 1$ .

Se caracterizaron las propiedades dinámicas de un modelo de parámetros agrupados de orden 2 con la LMTD como fuerza conductora. Tales propiedades coinciden con las propiedades del modelo de parámetros distribuidos del cual es obtenido. Por ejemplo, se muestra que la existencia y unicidad de soluciones es una característica común de ambos modelos. Por otro lado se prueba que el punto de equilibrio del modelo de parámetros agrupados es exponencialmente estable y además es globalmente atractivo lo cual coincide con las propiedades de estabilidad del contorno de estado estable del modelo de parámetros distribuidos. Además, las soluciones de equilibrio de la dinámica de dimensión finita mostraron ser acorde con los valores de salida del perfil de equilibrio de temperatura del modelo distribuido. Esto nos hace concluir que el modelo de parámetros agrupados que se obtuvo es confiable con respecto a

su comportamiento cualitativo. Esto es importante en casos en donde no son las soluciones cuantitativas sino el comportamiento cualitativo que importa, como en la modelación y simulación de redes de intercambiadores de calor y procesos industriales complejos donde los intercambiadores están involucrados.

Como perspectivas de este trabajo, se puede considerar el análisis sobre estabilidad del modelo de parámetros distribuidos de la configuración en paralelo. Por otro lado, una vez conocidas las propiedades del modelo de parámetros agrupados, puede ser posible proponer leyes de control que tomen en cuenta y de hecho exploten las propiedades intrínsecas del sistema estudiadas en este trabajo.

# Apéndice A

## Obtención de las expresiones $g_c(z)$ y $g_h(z)$

Esta sección se obtendrá la expresión (2.19) partiendo de las ecuaciones (2.11), (2.17) y (2.18). Primero se hará para el intercambiador en contracorriente para después continuar con el intercambiador en paralelo.

Para calcular  $T_{co}^*$ , para el intercambiador en contracorriente utilizamos la expresión (2.17). Evaluando  $T_c^*(z)$  y  $T_h^*(z)$  en  $z = 0$  y  $z = l$ , se puede verificar que,

$$T_c^*(0) = T_{co}^*$$

$$T_c^*(l) = T_{ci}$$

$$T_h^*(0) = T_{hi}$$

$$T_h^*(l) = T_{ho}^*$$

Evaluando  $T_c^*(z)$  en  $z = 0$ , se obtiene

$$T_c^*(0) = T_{co}^* = \frac{\phi_{11}(0)}{\phi_{11}(l)} T_{ci} + \left( \phi_{12}(0) - \frac{\phi_{12}(l)}{\phi_{11}(l)} g_{11}(0) \right) T_{hi} \quad (\text{A.1})$$

$$= \left( \frac{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h}{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h e^{\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right)}} \right) T_{ci} + \left( \frac{-\gamma_c F_h}{\gamma_c F_h - \gamma_h F_c} \right) \left( 1 - e^{\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}} \right) \left( \frac{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h}{\gamma_h F_c - \gamma_c F_h e^{\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right)}} \right) T_{hi}$$

Simplificando y substituyendo  $R$  y  $S$  de la ecuación (1.6), con  $\Theta = 1$  debido al flujo en contracorriente, se obtiene:

$$T_{co}^* = \left( \frac{S(1-R)}{1-RS} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-S}{1-SR} \right) T_{hi} \quad (\text{A.2})$$

Seguendo un procedimiento semejante, calculamos  $T_{ho}$ . Evaluando  $T_h(z)$  en  $z = l$ , se obtiene

$$T_h^*(l) = T_{ho}^* = \frac{\phi_{21}(l)}{\phi_{11}(l)} T_{ci} + \left( f_{22}(l) - \frac{\phi_{12}(l)}{\phi_{11}(l)} \phi_{21}(l) \right) T_{hi} \quad (\text{A.3})$$

$$= \left( \frac{\frac{\gamma_h F_c}{\gamma_c F_h} \left( 1 - e^{\left( \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right)} \right)}{\frac{\gamma_h F_c}{\gamma_c F_h} - e^{\left( \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right)}} \right) T_{ci} + \frac{1}{1 - \frac{\gamma_h F_c}{\gamma_c F_h}} \left( 1 - \left( \frac{\gamma_h F_c}{\gamma_c F_h} \right) e^{\left( \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right)} - \frac{\frac{\gamma_h F_c}{\gamma_c F_h} \left( 1 - e^{\left( \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right)} \right)^2}{\frac{\gamma_h F_c}{\gamma_c F_h} - e^{\left( \frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h} \right)}} \right) T_{hi}$$

Substituyendo  $R$  y  $S$  de la ecuación (1.6), con  $\Theta = 1$ , se obtiene:

$$T_{ho}^* = \left( \frac{R(S-1)}{1-SR} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-R}{1-SR} \right) T_{hi} \quad (\text{A.4})$$

Cuando  $R = 1$ , se puede ver que  $S = 1$ , entonces  $T_{co}^*$  y  $T_{ho}^*$  quedan indeterminados (ecuaciones (A.2) y (A.4) respectivamente). Para el caso en que  $R = 1$ , partimos de la ecuación (2.18), la cual se evalúa en  $z = l$ ,

$$T_c^*(l) = T_{co}^* = \phi_{11}(l) T_{ci} + \phi_{12}(l) T_{hi}$$

$$T_h^*(l) = T_{ho}^* = \phi_{21}(l) T_{ci} + \phi_{22}(l) T_{hi}$$

obteniendo

$$\begin{aligned} T_{co}^* &= \left( \frac{F_c}{F_c + \gamma_c} \right) T_{ci} + \left( \frac{\gamma_c}{F_c + \gamma_c} \right) T_{hi} \\ T_{ho}^* &= \left( \frac{\gamma_c}{F_c + \gamma_c} \right) T_{ci} + \left( \frac{F_c}{F_c + \gamma_c} \right) T_{hi} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

La expresión de  $T_{co}^*$  y  $T_{ho}^*$ , para el caso contracorriente, en términos de  $R$ , está dada por:

$$T_{co}^* = \begin{cases} \left( \frac{S(1-R)}{1-RS} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-S}{1-SR} \right) T_{hi} & \text{si } R \neq 1 \\ \left( \frac{F_c}{F_c + \gamma_c} \right) T_{ci} + \left( \frac{\gamma_c}{F_c + \gamma_c} \right) T_{hi} & \text{si } R = 1 \end{cases}$$

$$T_{ho}^* = \begin{cases} \left( \frac{R(S-1)}{1-SR} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-R}{1-SR} \right) T_{hi} & \text{si } R \neq 1 \\ \left( \frac{\gamma_c}{F_c + \gamma_c} \right) T_{ci} + \left( \frac{F_c}{F_c + \gamma_c} \right) T_{hi} & \text{si } R = 1 \end{cases}$$

donde  $R$  y  $S$  se definen en la ecuación (1.6).

Para calcular  $T_{co}^*$ , para el intercambiador en paralelo, se utiliza la expresión (2.11). Se puede verificar que:

$$\begin{aligned} T_c^*(0) &= T_{ci}^* \\ T_c^*(l) &= T_{co} \\ T_h^*(0) &= T_{hi} \\ T_h^*(l) &= T_{ho}^* \end{aligned}$$

Evaluando  $T_c^*(z)$  en  $z = l$ , se obtiene

$$T_c^*(l) = T_{co}^* = \phi_{11}(l)T_{ci} + \phi_{12}(l)T_{hi} \quad (\text{A.6})$$

$$T_{co}^* = \frac{1}{\gamma_h F_c + \gamma_c F_h} \left( \gamma_h F_c + \gamma_c F_h e^{-\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right)} \right) T_{ci} + \frac{\gamma_c F_h}{\gamma_h F_c + \gamma_c F_h} \left( 1 - e^{-\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right)} \right) T_{hi}$$

Simplificando y substituyendo  $R$  y  $S$ , ecuación (1.6), con  $\Theta = -1$  debido al flujo en paralelo, se obtiene:

$$T_{co}^* = \left( \frac{R + S}{1 + R} \right) T_{ci} + \left( \frac{1 - S}{1 + R} \right) T_{hi}$$

Para calcular  $T_{ho}$  se usa un procedimiento semejante. Evaluando  $T_h(z)$  en  $z = l$ , se obtiene:

$$T_h^*(l) = T_{ho}^* = \phi_{21}(l)T_{ci} + \phi_{22}(l)T_{hi} \quad (\text{A.7})$$

$$T_{co}^* = \frac{\gamma_h F_c}{\gamma_h F_c + \gamma_c F_h} \left( 1 - e^{-\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right)} \right) T_{ci} + \frac{1}{\gamma_h F_c + \gamma_c F_h} \left( \gamma_c F_h + \gamma_h F_c e^{-\left(\frac{\gamma_c}{F_c} - \frac{\gamma_h}{F_h}\right)} \right) T_{hi}$$

Simplificando y substituyendo  $R$  y  $S$ , ecuación (1.6), se obtiene:

$$T_{ho}^* = \left( \frac{R(1 - S)}{R + 1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1 + RS}{R + 1} \right) T_{hi}$$

Nótese que  $T^*\left(\frac{l(1+\Theta)}{2}\right) = (T_{co}^*, T_{ho}^*)$ . Así la relación entrada-salida de la temperatura en estado estable para un intercambiador (en paralelo o contracorriente), está dada por:

$$\begin{pmatrix} T_{co}^* \\ T_{ho}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P & P \\ RP & 1 - RP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{ci} \\ T_{hi} \end{pmatrix}$$

donde

$$P = \begin{cases} \frac{1-S}{1+R} & \text{si } \Theta = -1 \\ \frac{1-S}{1-RS} & \text{si } \Theta = 1, R \neq 1 \\ \frac{UA}{UA+F_c C_{pc}} & \text{si } \Theta = 1, R = 1 \end{cases}$$

con  $R$  y  $S$  como fueron definidos en (1.6).

Una vez que se obtienen los valores de estado estable de la temperatura a la salida de cada tubo, para cada configuración, se realizan los siguientes desarrollos. Para el caso contracorriente con  $R \neq 1$ , se suma y resta  $T_{co}^*$  de  $T_c^*(z)$  (ecuación (2.17)) :

$$T_c^*(z) = \left( \frac{SR - S^{-\frac{z}{l}}}{SR - 1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1 - S^{(1-\frac{z}{l})}}{SR - 1} \right) T_{hi} + T_{co}^* - T_{co}^*$$

simplificando, la expresión se reduce a:

$$T_c^*(z) = T_{co}^* + (T_{hi} - T_{ci})g_c(z)$$

donde,

$$g_c(z) = \frac{S - S^{(1-\frac{z}{l})}}{1 - SR}$$

Sumando y restando  $T_{ho}^*$  en  $T_c^*(z)$  (en la ecuación (2.17)) :

$$T_h^*(z) = \left( \frac{SR(1 - S^{-\frac{z}{l}})}{SR - 1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1 - RS^{(1-\frac{z}{l})}}{1 - SR} \right) T_{hi} + T_{ho}^* - T_{ho}^*$$

simplificando la expresión:

$$T_h(z) = T_{ho}^* + (T_{hi} - T_{ci})g_h(z)$$

donde,

$$g_h(z) = \frac{R(1 - S^{(1-\frac{z}{l})})}{1 - SR}$$

Para el caso contracorriente cuando  $R = 1$  se sigue un procedimiento semejante. Se suma y resta  $T_{co}^*$  y  $T_{ho}^*$  de las expresiones (2.18):

$$\begin{aligned} T_c^*(z) &= \left( \frac{F_c + \frac{\gamma_c z}{l}}{F_c + \gamma_c} \right) T_{ci} + \left( \frac{\gamma_c(1-\frac{z}{l})}{F_c + \gamma_c} \right) T_{hi} + T_{co}^* - T_{co}^* \\ T_h^*(z) &= \left( \frac{\gamma_c z}{l(F_c + \gamma_c)} \right) T_{ci} + \left( 1 - \frac{\gamma_c z}{l(F_c + \gamma_c)} \right) T_{hi} + T_{ho}^* - T_{ho}^* \end{aligned} \tag{A.8}$$

Simplificando, estas expresiones se reducen a:

$$\begin{aligned} T_c^*(z) &= T_{co}^* + (T_{hi} - T_{ci})g_{ce}(z) \\ T_h^*(z) &= T_{ho}^* + (T_{hi} - T_{ci})g_{he}(z) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde,

$$\begin{aligned} g_{ce}(z) &= \frac{-\gamma_c z}{l(F_c + \gamma_c)} \\ g_{he}(z) &= \frac{-\gamma_c(1 - \frac{z}{l})}{F_c + \gamma_c} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

que equivale a:

$$\begin{aligned} g_{ce}(z) &= -P \frac{z}{l} \\ g_{he}(z) &= -P(1 - \frac{z}{l}) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Para el intercambiador en paralelo, se suma y resta  $T_{co}^*$  y  $T_{ho}^*$  de las expresiones (2.11):

$$\begin{aligned} T_c^*(z) &= \left( \frac{R+S\tilde{l}}{R+1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1-S\tilde{l}}{R+1} \right) T_{hi} + T_{co}^* - T_{co}^* \\ T_h^*(z) &= \left( \frac{R(1-S\tilde{l})}{R+1} \right) T_{ci} + \left( \frac{1+RS\tilde{l}}{R+1} \right) T_{hi} + T_{ho}^* - T_{ho}^* \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} T_c(z) &= T_{co}^* + (T_{hi} - T_{ci})g_c(z) \\ T_h(z) &= T_{ho}^* + (T_{hi} - T_{ci})g_h(z) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde,

$$\begin{aligned} g_c(z) &= \frac{S-S\tilde{l}}{1+R} \\ g_h(z) &= \frac{R(S-S\tilde{l})}{1+R} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

De esta manera se obtienen las ecuaciones (2.20) y (2.21):

$$g_c(z) = \begin{cases} \frac{S-Sz/l}{1+R} & \text{si } \Theta = -1 \\ \frac{S-S(1-z/l)}{1-RS} & \text{si } \Theta = 1, R \neq 1 \\ -\frac{Pz}{l} & \text{si } \Theta = 1, R = 1 \end{cases}$$

$$g_h(z) = \begin{cases} \frac{R(S-S^{z/l})}{1+R} & \text{si } \Theta = -1 \\ \frac{R(1-S^{(1-z/l)})}{1-RS} & \text{si } \Theta = 1, R \neq 1 \\ -P \left(1 - \frac{z}{l}\right) & \text{si } \Theta = 1, R = 1 \end{cases}$$

# Apéndice B

## Discontinuidad de $\Delta T_l$

En este apéndice se mostrará gráficamente el conjunto de puntos donde la función  $\Delta T_l$  en (3.4) se indetermina, tanto para el intercambiador en contracorriente como para el paralelo.

Para el intercambiador en contracorriente  $\Delta T_l$  se indetermina en el conjunto de puntos  $\mathcal{S}_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 + x_1 = T_{hi} + T_{ci}\}$  (véase figura B.1). Tal indefinición se corrobora de la expresión (3.4) con  $\Delta T_1$  y  $\Delta T_2$  como se definen en (1.3) y (1.4).

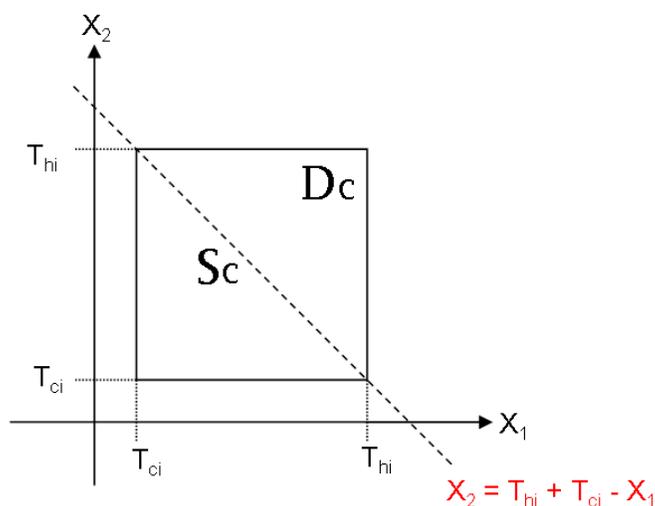


Figura B.1: Dominio del espacio de estado  $\mathbb{D}_c$ , para un intercambiador en contracorriente.

Analizando la función  $\Delta T_l$  para el intercambiador en paralelo :

$$\Delta T_l(x) = \frac{(x_2 - x_1) - (T_{ci} - T_{hi})}{\ln\left(\frac{x_2 - x_1}{T_{ci} - T_{hi}}\right)} \quad (\text{B.1})$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  se definen en la ecuación (1.1). Esta función queda indeterminada en el conjunto de puntos

$$\mathcal{S}_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1 = T_{hi} - T_{ci}\} \quad (\text{B.2})$$

Este conjunto sólo se intersecta en un punto de  $\partial\mathbb{D}$  (indicado como  $\alpha$  en la figura 2), es decir,  $\mathcal{S}_p \cap \mathbb{D}_p = \emptyset$ , en consecuencia la función  $\Delta T(x)$  es continua en  $\mathbb{D}_p$ .

Cuando  $x_2 - x_1 = T_{hi} - T_{ci} \Leftrightarrow \frac{x_2 - x_1}{T_{hi} - T_{ci}} = 1$ , entonces  $\ln\left(\frac{x_2 - x_1}{T_{hi} - T_{ci}}\right) = 0$  por lo tanto  $\Delta T(x)$  queda indeterminado. Sin embargo,  $x_2 - x_1 = T_{hi} - T_{ci}$  es una línea recta que tiene una intersección con  $\partial\mathbb{D}$  en  $(T_{ci}, T_{hi})$  (véase la figura B.2).

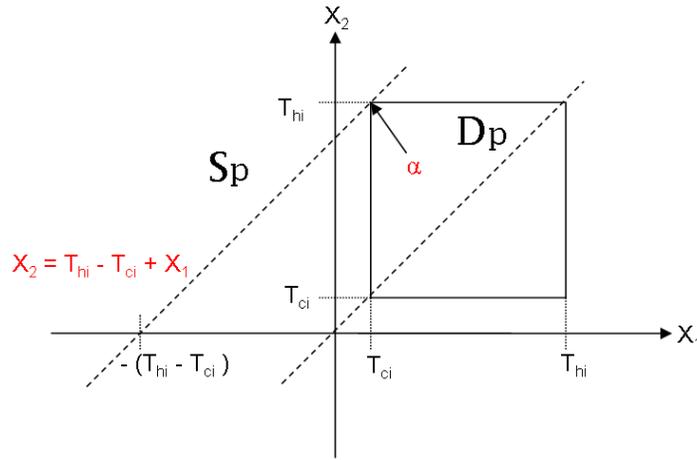


Figura B.2: Dominio del espacio de estado  $\mathbb{D}_p$ , para un intercambiador en paralelo.

# Bibliografía

- [1] Buden, D., y Miller, R. Direct cycle nuclear power plant stability analysis. *IRE Transactions on Automatic Control*, 6(2):237-244, 1961.
- [2] Camporeale, S. M., y Fortunato, B. Dynamic analysis and control of turbo-gas power plant. *32nd Intersociety Energy Conversion Engineering Conference (IECEC-97)*, 3:1702-1707, 27 Julio - 1 Agosto, 1997.
- [3] Romagnoni, P., Scattolin, M., y Zecchin, R. Low energy air conditioning of shelters for telecommunication networks. *3rd International Conference on Telecommunications Energy Special (TELESCON 2000)*, pp. 143-146, 7-10 Mayo, 2000.
- [4] Eltimsahy, A. H., y Kazda, L. F. A suboptimal heating system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(1):172-173, 1972.
- [5] Ikegami, Y., Nanayakkara, V. K., Nakashima, M. y Uehara, H. Refrigerator systems modeling and validation. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE 2001)*, 3:2001-2006, 1972.
- [6] Ameel, T. A., y Hewavitharana, L. Countercurrent heat exchangers with both fluids subjected to external heating. *Heat Transfer Engineering*, 20(3):37-44, 1999.
- [7] Kanoh, H. Distributed parameter heat exchangers - modeling, dynamics and control. In *Distributed Parameter Control System*, S. G. Tzafestas (ed.), Pergamon Press, pp. 417-449, 1982.
- [8] Masubuchi, M. Heat exchangers- dynamic control- a survey. *Journal of the Society of Instrument and Control Engineerings*, 16(2):173-183, 1977.
- [9] Williams, T. J., y Morris, H. J. A survey of the literature on heat exchangers dynamics and control. *Chemical Engineering Progress, Symposium Series (Process Dynamics Control)*, 57(36):20-30, 1961.
- [10] Cohen, W. C., y Johnson, E. F. Dynamic characteristic of double-pipe heat exchangers. *Industrial and Engineering Chemistry*, 48(6):1031-1034, 1956.
- [11] Thal-Larsen, H. Dynamics of heat exchangers and their models. *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, pp. 489-504, 1960.
- [12] Koppel, L. B. Dynamics of a flow-forced heat exchanger. *I & EC Fundamentals*, 1(2):131-134, 1962.

- [13] Abdelghani-Idrissi, M. A., Bagui, F., y Estel, L. Countercurrent double-pipe heat exchanger subjected to flow-rate step change, Part II: analytical and experimental transient response. *Heat Transfer Engineering*. 23:12-24, 2002.
- [14] Xuan, Y., y Roetzel, W. Dynamics of shell-and-tube heat exchangers to arbitrary temperature and step flow variations. *AIChE Journal*, 29(3):413-421, 1993.
- [15] Shoureshi, R., y Paynter, H. M. Simple models for dynamics and control of heat exchangers. En Proc. *American Control conference 1983*, pp. 1294-1298, 1983.
- [16] Steiner, M. Low order dynamic models of heat exchangers. *Int. Symp. Distr. Heat Simul.*, Reykjavik, Islandia, 1989.
- [17] Masada, G. Y., y Wormley, D. N. Evaluation of lumped Parameter Heat Exchanger Dynamic Models. *ASME Paper No. 82-WA/DSC-16*, 1982.
- [18] Mathisen, K. W., y Morari, M. Dynamic models for heat exchangers and heat exchangers network. *Computers and Chemical Engineering*, 18:S459-S463, 1994.
- [19] Steiner, M. Dynamic models of heat exchangers. *Chemical Engineering Fundamentals, XVIII Congress: The use of Computers in Chemical Engineering*, pp. 809-814, Giardini Naxos, Sicilia, Italia, 26-30 Abril, 1987.
- [20] Correa, D. J., y Marchetti, J. L. Dynamic Simulation of shell-and-tube heat exchangers. *Heat Transfer Engineering*, 8(1):50-59, 1987.
- [21] Enns, M. Comparison of dynamic models of a superheater. *ASME Paper No. 61-WA-171*, 1961.
- [22] Wolff, E. A., Mathisen, K. W., y Skogestad, S. Dynamics and controllability of heat exchanger networks. *Proc. Computer Oriented Process Engineering (COPE-91)*, L. Puigjaner and A. Espuna, eds., pp. 117-122, 1991.
- [23] Papastros, S., Isambert, A. y Depeyre, D. Computerized optimum design and dynamic simulation of heat exchanger networks. *Computer and Chemical Eng.*, 17:S329-S334, 1993.
- [24] Roppo, M. N., y Ganić, E. N. Time-dependent heat exchanger modeling. *Heat Transfer Engineering*, 4(2):42-46, 1983.
- [25] Xia, L., de Abreu-García, J. A., y Hartley, T. T. Modeling simulation of a heat exchanger. *IEEE International Conference on Systems Engineering*, pp. 453-456, 1991.
- [26] Zhegal, S., Isambert, A., Laouilleau, P., Boudehen, A., y Depeyre, D. Dynamic Simulation: a tool for process analysis. *Computer-Oriented Process Engineering, EFChE Working Party*, pp. 165-170, Barcelona, 1991.
- [27] Alsop, A. W., y Edgar, T. F. Nonlinear Heat Exchanger control through the use of partially linearized control variables. *Chemical Eng. Comm.*, 75:115, 1989.
- [28] Álvarez-Ramírez, J., Cervantes, I., y Femat, R. Robust controllers for a heat exchanger. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 36:382-388, 1997.

- [29] Fazlur Rahman, M. H. R., y Devanathan, R. Modelling and dynamic feedback linearisation of a heat exchanger model. *3rd IEEE Conference on Control Applications*, 3:1801-1806, 1994.
- [30] Malleswararao, Y. S. N., y Chidambaram M. Nonlinear controllers for a heat exchanger. *Journal of Process Control*, 2(1):17-21, 1992.
- [31] Reimann, K. A. Consideration of dynamics and control in the design of heat exchanger networks. Tesis de doctorado, Swiss Federal Institute of Technology Zürich (ETH), Suiza, 1986.
- [32] Varga, E. I., Hangos, K. M., y Szigeti, F. Controllability and observability of heat exchanger networks in the time-varying parameter case. *Control Engineering Practice*, 3(10):1409-1419, 1995.
- [33] Chantre, P., Maschke, B. M., y Barthelemy, B. Physical modeling and parameter identification of a heat exchanger. *20th International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation (IECON '94)*, 3:1965-1970, 1994.
- [34] Jonsson, G. Parameter estimation in models of heat exchangers and geothermal reservoirs. Tesis de doctorado, Lund Institute of Technology, Suecia, 1990.
- [35] Mutambara, A. G. O., y Al-Haik, M. S. Y. EKF based parameter estimation for a heat exchanger. *American Control Conference (ACC '99)*, 6:3918-3922, 1999.
- [36] Khambanonda, T., Palazoglu, A., y Romagnoli, J. A. The stability analysis of nonlinear feedback systems. *AIChE Journal*, 36(1):66-74, 1990.
- [37] Khambanonda, T., Palazoglu, A., y Romagnoli, J. A. A transformation approach to nonlinear process control. *AIChE Journal*, 3(7):1082-1092, 1991.
- [38] Xu, C. Z., Gauthier, J. P., y Kupka, I. Exponential Stability of the heat exchanger equation. *2nd European Control Conference (ECC93)*, 1:303-307, Groningen, 1993.
- [39] Clough, D. E., y Ramirez, W. F. Stability of counter-current and parallel flow heat exchangers with and without diffusive effects. In Proc. of the *Joint Automatic Control Conference*, Sess. 23-A:596-601, 1970.
- [40] Xu, C. Z., y Gauthier, J. P. Analyse et commande d'un échangeur thermique à contre-courant. *RAIRO Automatic Control Production Systems (APII: Automatique Industrielle)*, 25:377-396, 1991.
- [41] Zubov, V. I. *Mathematical Theory of the Motion Stability*. The Saint-Petersburg State University, Rusia, 1997.
- [42] Curtain, R. F., y Zwart, H. J. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, TAM 21, Nueva York, 1995.

- [43] Zavala-Río, A., Femat, R., y Romero-Méndez, R. Countercurrent double-pipe heat exchangers are a special type of positive systems. In *Positive Systems. Proceedings of the First Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 2003), Rome, Italy, 28-30 August, 2003.* . Benvenuti, A. de Santis, and L. Farina (eds.), LNCIS 294, Springer, pp. 385-392, 2003.
- [44] Abramowitz, M., y Stegun, I.A. (eds.). *Handbook of Mathematical Functions.* 9th printing, Dover Publications, Nueva York, 1972.
- [45] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis,* 3rd edition, McGraw-Hill, USA, 1976.
- [46] Khalil, H. K. Nonlinear systems. *Prentice-Hall,* Upper Saddle River, NJ, segunda edición, 1996.