



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Construcción de familias infinitas de nudos
no alternantes con $\text{alt}(\mathbf{K})=1$**

Tesis que presenta

María de los Angeles Guevara Hernández

Para obtener el grado de

Maestra en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2013



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Construcción de familias infinitas de nudos no alternantes con $\text{alt}(K)=1$** " presentada para obtener el Grado de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **María de los Ángeles Guevara Hernández** y aprobada el **nueve de julio del dos mil trece** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Director de la tesis

Dr. Gelasio Salazar Anaya
Jurado en el Examen

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
Jurado en el Examen

Dra. Lorena Armas Sanabria
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Hugo Cabrera Ibarra.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 424051 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 003 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 9 días del mes de julio del año 2013, se reunió a las 10:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Gelasio Salazar Anaya	Presidente	UASLP
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Secretario	IPICYT
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Sinodal	IPICYT
Dra. Lorena Armas Sanabria	Sinodal externo	UAM-Cuajimalpa

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó la C.

María de los Angeles Guevara Hernández

sobre la Tesis intitulada:

Construcción de familias infinitas de nudos no alternantes con $alt(K)=1$

que se desarrolló bajo la dirección de

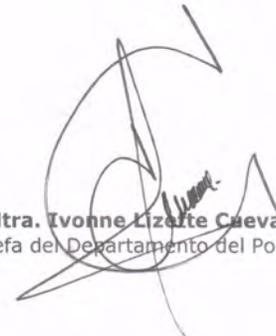
Dr. Hugo Cabrera Ibarra

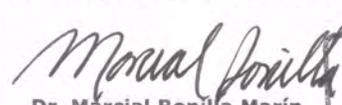
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 11:10 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 9 días del mes de julio de 2013.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



Agradecimientos

Dr. Hugo Cabrera Ibarra por su ejemplo, disponibilidad, asesoría y apoyo.

A los Doctores: Lorena Armas Sanabria, Gelasio Salazar Anaya y David Antonio Lizárraga Navarro, por sus comentarios y disponibilidad.

Resumen

Buscando extender propiedades particulares de los nudos alternantes se han hecho generalizaciones del concepto. En [8] Kawauchi introdujo el número de alternancia de un enlace L y se denota como $alt(L)$, el cual mide qué tan lejos esta L de los enlaces alternantes con el mismo número de componentes.

En esta tesis se encontraron nudos de 2-puentes a partir de los cuales se generaron conjuntos infinitos de nudos no alternantes. Tales nudos tienen la característica de tener número de alternancia igual a uno, es decir, con el cambio de un determinado cruce se vuelven alternantes. Para mostrar que los conjuntos generados son infinitos y no alternantes, se construyeron fórmulas para calcular los polinomios de Conway y de Alexander de los habitantes de un 3-cuarto dado y de los enlaces formados con ellos. Para el caso particular de calcular el polinomio de Alexander de los conjuntos infinitos se proporcionan fórmulas, no recursivas, mediante las cuales es fácil determinar el polinomio de los nudos en los conjuntos.

Abstract

In order to extend particular properties of non alternating knots, generalizations of the concept had been made. In [8] Kawauchi introduced the alternation number of a link, denoted by $alt(L)$, which measures how far is L of alternating links with the same number of components.

In this thesis, certain 2-bridge knots, from which infinity sets of non-alternating knots have been generated, are shown. These non-alternating knots have the characteristic of having alternation number one, i.e., by changing one crossing an alternating knot is obtained. In order to demonstrate that the generated knots are different and non alternating, formulas are derived. With these formulas it is possible to calculate the Conway and Alexander polynomials of the knots that are formed. In the case of the Alexander polynomials no recursive formulas are supplied.

Contenido

Constancia de aprobación de la tesis	iii
Créditos institucionales	v
Acta de examen	vii
Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Introducción	1
1. Preliminares	2
1.1. Enlaces e invariantes	2
1.2. 3-ovillos	7
1.2.1. 3-cuartos	8
1.2.2. 3-trenzas	9
1.3. 3-trenzas y nudos de 2-puentes	11
2. Nudos y el cuarto R_1	12
3. Invariantes polinomiales	15
3.1. Polinomio de Conway	15
3.1.1. 3-ovillos	15
3.1.2. 3-trenzas	21
3.2. Polinomio de Alexander	23
4. De nudos no alternantes a alternantes	27
4.1. Nudos no alternantes	27
4.2. Nudos con $\text{alt}(K)=1$	33
5. Aplicaciones	36
6. Conclusiones	38
Bibliografía	39

Introducción

Dos preguntas fundamentales de la teoría de nudos son: ¿Se pueden clasificar a los nudos? y dados dos nudos K_1 y K_2 , ¿Se puede determinar si son equivalentes o no? Como se estudia a los nudos con diagramas, conviene tener una noción de equivalencia basada en diagramas. Las movidas de Reidemeister son operaciones en diagramas de un nudo, las cuales cambian a un diagrama pero preservan el tipo de nudo que representan. Para distinguir dos nudos se usan invariantes de nudos, es decir, se asocia un número, propiedad, grupo o polinomio a un diagrama, de modo que se preserve bajo movidas de Reidemeister. Esto implicará que tal invariante no depende del diagrama, y es por lo tanto un invariante del tipo de nudo.

Los enlaces se han clasificado en enlaces alternantes y no alternantes. Además, con el propósito de extender las propiedades particulares de los enlaces alternantes a algunas clases de enlaces no alternantes se han hecho generalizaciones del concepto de enlaces alternantes. Por ejemplo, en 1992 Colin C. Adams y colaboradores en [2] introdujeron la noción de nudos casi alternantes, los cuales son nudos no alternantes que tienen una proyección, con la propiedad de volverse alternante al cambiar un cruce. En el 2010 Horiuchi y Ohyaama en [6] definen para un nudo alternante K , $Alm(K)$, como el número de nudos casi alternantes, los cuales tienen una proyección que al cambiar un cruce producen una proyección del nudo K . En 2010 Kawauchi en [8] introdujo el número de alternancia de un enlace, el cual mide qué tan lejos está de enlaces alternantes con el mismo número de componentes y se denota como $alt(L)$. Sobre éstas ideas, para un nudo alternante K se puede determinar el número de nudos no alternantes, los cuales tienen una proyección que al cambiar un cruce producen el nudo K . Dicho de otra forma, determinar el número de nudos K' con $alt(K') = 1$.

Dado que los nudos de 2-puentes son alternantes y están completamente clasificados [10, Teo. 9.3.1, 9.3.2], en el presente trabajo se busca determinar el número de nudos no alternantes tales que al cambiarles un cruce generen un cierto nudo de 2-puentes. Para realizar dicha cuestión se construyen nudos no alternantes y se utilizan invariantes polinomiales. El contenido de la tesis se organiza de la siguiente forma: En el capítulo 1 se exponen algunos conceptos de la teoría de nudos que serán necesarios para el desarrollo del texto. En el capítulo 2 se expone un 3-cuarto, R_1 , que será útil para la construcción de diagramas no alternantes. En el capítulo 3 se exponen algunas fórmulas para el cálculo de invariantes polinomiales de habitantes de R_1 , para el caso particular del polinomio de Alexander dichas fórmulas no son recursivas. En el capítulo 4 se usan los resultados de los capítulos 2 y 3 para construir una familia infinita de nudos no alternantes distintos tales que al cambiar un cruce generen determinados nudos de 2-puentes. Por último, en el capítulo 5 se muestran algunos ejemplos del polinomio de Alexander de algunos enlaces formados por habitantes del cuarto R_1 .

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo se expondrán algunos conceptos de la teoría de nudos, para profundizar se recomienda revisar [1], [4] y [10].

1.1. Enlaces e invariantes

Definición 1.1. Un *enlace* de m componentes es un subconjunto de S^3 , o de \mathbb{R}^3 , que consiste de m curvas disjuntas, lineales a pedazos, cerradas y simples. Un enlace de una componente es un *nudo*.

Definición 1.2. Dos nudos K_1 y K_2 son *isotópicos ambientalmente* si existe una función continua $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

- $h_0 = H(-, 0)$ de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la identidad.
- Para toda $t \in [0, 1]$, $h_t = H(-, t)$ de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un homeomorfismo.
- Si $h_1 = H(-, 1)$ entonces $h_1(K_1) = K_2$

A h se le llama *isotopía ambiente*.

La isotopía ambiente es una relación de equivalencia en nudos: dos nudos son equivalentes si, y sólo si, pueden ser deformados, mediante una isotopía ambiente, el uno en el otro. Cada clase de equivalencia es llamada un **tipo de nudo**; dos nudos equivalentes tienen el mismo tipo.

Se trabaja con las proyecciones de los nudos en el plano yz . A tales proyecciones se les denomina **diagramas regulares** si no tienen puntos de tangencia ni puntos triples y en los puntos dobles se marcan los segmentos que pasan por abajo con una discontinuidad, véanse Figuras 1.1 y 1.2. Se les llamará **crucos** a los puntos dobles y a las componentes conexas de los diagramas regulares **cuerdas**. El nudo más simple de todos es el **nudo trivial** (véase Figura 1.2 (c)).



Figura 1.1: Diagramas no regulares.

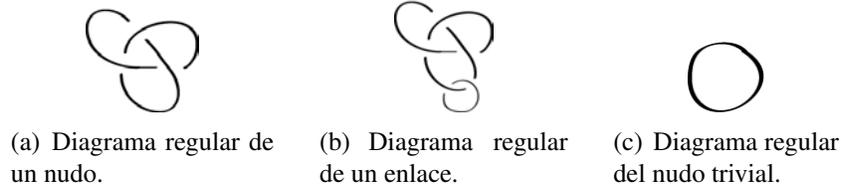


Figura 1.2: *Diagramas regulares.*

Definición 1.3. *Si se puede deformar un diagrama regular D en uno D' mediante un número finito de movidas de Reidemeister o sus inversas (véase Figura 1.3), entonces se dice que D y D' son **equivalentes** y se denota $D \cong D'$.*



Figura 1.3: *Movidas de Reidemeister.*

Nótese que cada movida de Reidemeister es una isotopía ambiente.

Teorema 1.1. [10, Teo. 4.1.1] *Dados dos diagramas regulares D y D' de nudos (o enlaces) K y K' , respectivamente. Entonces*

$$K \cong K' \iff D \cong D'.$$

A lo largo del texto, se trabajará sólo con diagramas regulares. Cuando dos diagramas D, D' se pueden obtener, uno a partir del otro usando únicamente movidas de Reidemeister del tipo Ω_2 y Ω_3 se dicen que son **regularmente equivalentes**. Del hecho de no conocer el número de movidas para poder determinar si dos nudos son equivalentes es necesario el uso de invariantes.

Definición 1.4. [4] *Un **invariante** es una función del conjunto de enlaces a algún otro conjunto cuyos valores dependen sólo de la clase de equivalencia del nudo. Cualquier representante de la clase puede ser escogido para calcular el invariante. No hay restricción en la clase de objetos. Por ejemplo, pueden ser enteros, polinomios, matrices o grupos.*

El primer trabajo en tabulación de diagramas de nudos fue hecho, alrededor de 1880, por Reverend Thomas P. Kirkman y desde entonces se busca completar dicha tabla. Algunas familias de enlaces son definidas en términos de las propiedades de sus diagramas. Enseguida se definen algunos enlaces con los que se trabajará.

Definición 1.5. *Un diagrama regular D de un enlace que es una composición de los diagramas regulares de dos enlaces sin puntos en común se dice ser **dividido**, véase Figura 1.4. Un enlace que tiene un diagrama regular dividido se dice ser un **enlace dividido**.*



Figura 1.4: Enlace dividido.

Definición 1.6. *Tómese un punto arbitrario P en un diagrama A de un nudo K y recórrase sobre A . Si P en los puntos de cruce de A , se mueve alternadamente entre un segmento que pasa por encima y un segmento que pasa por debajo, entonces se dice que es un **diagrama alternante**. Un nudo que tiene al menos un diagrama alternante se llama **nudo alternante**, véase Figura 1.5.*

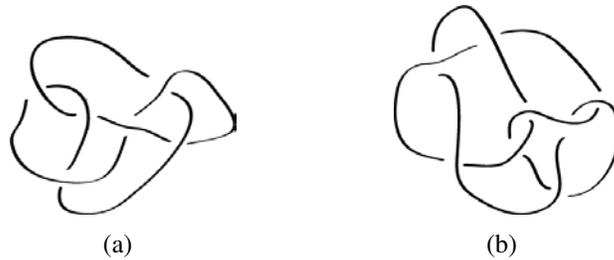


Figura 1.5: Ejemplo de nudos; alternante (a) y no alternante (b).

Definición 1.7. [2] *Un diagrama de un enlace es n -casi alternante si n cambios de cruce hacen la proyección alternante. Un enlace es n -casi **alternante** si éste tiene un diagrama n -casi alternante y no tiene proyecciones $(n - 1)$ -casi alternantes. Si un enlace L es n -casi alternante, se dice que tiene un **número de dealternancia** n . Si $n = 0$ corresponde a enlaces alternantes. Se dice que un enlace es **casi alternante** si éste es 1-casi alternante, véase Figura 1.6.*

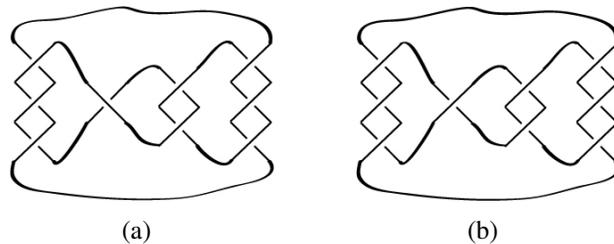


Figura 1.6: En (a) se muestra un nudo casi alternante y en (b) un nudo alternante.

Se denota el número de dealternancia de un enlace L por $dalt(L)$ y puede ser definido como el mínimo sobre todas las proyecciones de un nudo del número de cambios de cruces necesarios para llevar la proyección a una alternante. Se sabe que todos los nudos no alternantes de once o menos cruces son casi alternantes excepto 11_{n95} y 11_{n118} los cuales tienen

proyecciones 2-casi alternantes [2]. Nótese que un enlace m -casi alternante tiene proyecciones l -casi alternantes para todo $l \geq m$, las cuales pueden ser fácilmente obtenidas aplicando repetidamente la movida Ω_2 de Reidemeister. De manera análoga, todo nudo alternante tiene una proyección casi-alternante, ya que si se toma una proyección alternante y se le aplica una movida de Reidemeister del tipo Ω_2 , se genera una proyección casi alternante, véase Figura 1.7.

Un cruce en una proyección casi alternante que produce una proyección alternante es llamado el **alternador**. Además el cambio de un cruce en una proyección casi alternante puede generar distintos nudos, lo cual depende del cruce que se cambie, véase Figura 1.7 (c) y (d).

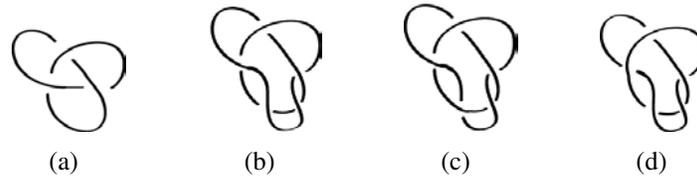


Figura 1.7: (a) Un diagrama alternante. (b) Una proyección casi alternante del nudo en (a). En (c) y (d) dos nudos generados por un cambio de cruce de la proyección en (b).

Existen nudos no alternantes que no tienen proyecciones casi alternantes, y sin embargo con un cambio de cruce se vuelven nudos alternantes. Kawauchi en [8] introdujo el número de alternancia de un enlace, el cual mide qué tan lejos está éste de los enlaces alternantes. Para dos enlaces L y L' , la distancia Gordian $dG(L, L')$ entre L y L' , con el mismo número de componentes, es el mínimo número de cambios de cruces necesarios para deformar un diagrama de L a uno de L' , donde el mínimo es tomado sobre todos los diagramas de L . El número de alternancia $alt(L)$ de un enlace L es el mínimo número de $dG(L, L')$ entre todos los enlaces alternantes L' . Por definición, se tiene $alt(L) \leq dalt(L)$ para todo enlace L . Nótese que el número de alternancia es distinto del número de dealternancia. Por ejemplo, el nudo mostrado en la Figura 1.8 es 2-casi alternante y tiene número de alternancia igual a uno.

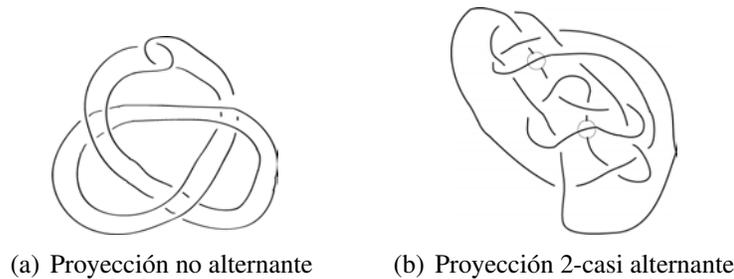


Figura 1.8: Dos proyecciones de un mismo nudo.

Dadas dos proyecciones de nudos, se define un nuevo nudo obtenido por remover un pequeño arco de la proyección de cada nudo y después conectar los cuatro puntos finales con dos nuevos arcos como muestra la Figura 1.9. El nudo resultante será la composición de dos nudos. Si se denotan dos nudos como J y K , entonces su composición es denotada por $J\#K$.

Si un nudo no es la composición de nudos no triviales, se le llama **nudo primo**. Ejemplo de ellos son los nudos J y K de la Figura 1.9. Las tablas de clasificación de nudos que existen enumeran a los nudos primos hasta 16 cruces [7].

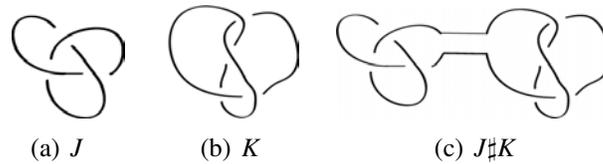


Figura 1.9: Composición de nudos.

A un enlace se le puede dotar de una orientación. Esto se realiza asignándole una dirección en cada componente y se coloca una flecha sobre ella para denotarlo (véase Figura 1.10).



Figura 1.10: Un nudo orientado.

El primer polinomio que surgió asociado a nudos y enlaces fue debido a J. Alexander en 1928. Este invariante polinomial era definido en conceptos relativamente abstractos. En 1969 John H. Conway encontró una forma de calcular el polinomio de Alexander de un enlace usando la llamada *relación de madeja*. Ésta es una ecuación que relaciona el polinomio de un enlace con el polinomio de enlaces obtenidos por cambios de cruces en una proyección del enlace original. El **polinomio de Alexander**, se denota como $\Delta(L)$ o $\Delta_L(t)$, donde $\Delta(L) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$. El **polinomio de Conway** es un polinomio de Laurent en $\mathbb{Z}[z]$, donde $\mathbb{Z}[z]$ es el anillo de polinomios en z con coeficientes enteros, y es denotado como $\nabla(L)$ o $\nabla_L(z)$.

Definición 1.8. El **polinomio de Conway** de un enlace orientado L es definido por los siguientes tres axiomas.

1. *Invariante:* $\nabla(L)$ es invariante bajo isotopía ambiente de L .
2. *Normalización:* si K es el nudo trivial entonces $\nabla(K) = 1$.
3. *Relación de madeja:* $\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z\nabla(L_0)$ donde (L_+, L_-, L_0) es una madeja triple, esto es, una terna ordenada de enlaces orientados los cuales son idénticos excepto en un cruce específico, éstos son ilustrados en la Figura 1.11.

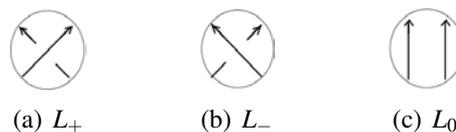


Figura 1.11: Madeja triple.

Nótese que la relación de madeja es recursiva, esto quiere decir que, dado un nudo K con n cruces tenemos que aplicar la relación de madeja 2^n veces. Un resultado importante es que existe una relación entre los polinomios de Conway y de Alexander. Dicha relación muestra que en realidad son el mismo invariante, esto es fácil de ver al hacer el cambio de variable $z = (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$.

Teorema 1.2. [10, Teo. 6.2.1] Sea L un enlace orientado, entonces $\Delta_L(t) = \nabla_L(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$.

Se cuenta con las siguientes propiedades.

Proposición 1.1. [10] Si un enlace orientado L es un enlace dividido, entonces $\nabla(L) = 0$.

Proposición 1.2. [10] Si K es un nudo orientado, entonces $\Delta_K(1) = 1$.

Una relación entre los polinomios de Alexander de dos enlaces y su composición es la siguiente:

Teorema 1.3. [10, Teo. 6.3.5] Si un enlace orientado puede ser factorizado como $L_1 \# L_2$ entonces $\Delta(L_1 \# L_2) = \Delta(L_1)\Delta(L_2)$.

Una manera de generar nudos es por medio de “bloques” llamados n -ovillos. En la siguiente sección son definidos de manera formal y para una mayor información se recomienda consultar [6] y [10]. En el capítulo 2 se construirán nudos no alternantes por medio de 3-ovillos.

1.2. 3-ovillos

Conway, desde 1970 persiguió el objetivo de formar una tabla completa de los nudos. Los invariantes de nudo que se habían descubierto hasta ese momento no eran suficientes para lograr este objetivo. Por lo tanto, Conway introdujo el concepto de ovillo y con él, los nudos algebraicos [10]. Mediante el estudio de esta clase de nudos, se resolvieron diversos problemas, lo que ayudó a una mejor comprensión de la teoría de los nudos. Un tipo especial de nudos algebraicos son los nudos de 2-puentes.

Definición 1.9. Un n -ovillo es un par (B^3, T) donde B^3 es una 3-bola y T es un conjunto de n arcos disjuntos propiamente encajados en B^3 .

Se trabajará con 3-ovillos y se escribirá sólo T en lugar de (B^3, T) . Además se trabajará con su proyección en el plano yz . Se define el **denominador** de un 2-ovillo T , $D(T)$, como el enlace obtenido de cerrar el 2-ovillo como muestra la Figura 1.12.



Figura 1.12: Diagrama de un 2-ovillo y la cerradura D del 2-ovillo T .

Definición 1.10. Un n -ovillo es llamado **racional** si existe un homeomorfismo de pares de (B^3, T) a $(D, P) \times I$ donde D es el disco unitario y P es un conjunto de n puntos en el interior de D , e I es el intervalo unitario cerrado.

Análogo al caso de los nudos, a los n -ovillos también se les puede dotar de una orientación.

Definición 1.11. Un n -ovillo orientado es un n -ovillo (B^3, T) tal que cada componente de T es orientada.

Para trabajar con 3-ovillos orientados y calcular el polinomio de Conway de ellos se usarán algunos conceptos introducidos por Giller en [5].

1.2.1. 3-cuartos

Siguiendo la adaptación de [9] generada de [5], se tienen las siguientes definiciones.

Definición 1.12. Sea P un conjunto ordenado de n puntos en el interior de D^2 , el disco unitario cerrado en \mathbb{R}^2 y sea $S \subset P$. La terna $R = (D^2 \times I, P, S)$ es llamada **n -cuarto**. Los puntos en $P \times \{0\}$ son llamados **puertos izquierdos** y aquellos en $P \times \{1\}$ como **puertos derechos**; los puertos en $S \times \{0, 1\}$ se dicen ser positivamente orientados y aquéllos en $(P \setminus S) \times \{0, 1\}$ son llamados negativamente orientados. Un n -cuarto $R = (D^2 \times I, P, S)$ se dice tener la orientación estándar si $S = P$.

Definición 1.13. Un n -ovillo orientado $T = (B^3, T)$ es llamado un **habitante** de un n -cuarto R si existe un homeomorfismo $\varphi : B^3 \rightarrow D^2 \times I$, con $\varphi(\partial T) = P \times \{0, 1\}$, tal que para cada arco $t \in T$ se cumplan las siguientes condiciones:

- φ mapea ∂t a un puerto izquierdo y a uno derecho, ambos con la misma orientación, o φ mapea ∂t en dos puertos derechos (o dos izquierdos) con diferente orientación.
- La orientación de t coincide con la inducida por R en la manera obvia.

Definición 1.14. La **madeja** de un n -cuarto es el conjunto de todos los habitantes de R y se denota $S(R)$.

Dadas $s_1, s_2 \in S(R)$, diremos que $s_1 = s_2$ si existe una isotopía ambiente que lleve s_1 en s_2 , dejando $\partial(D^2 \times I)$ fija. Los n -cuartos y sus habitantes serán representados con diagramas de forma análoga a los enlaces (véase Figura 1.13).



(a) Un 3-cuarto con un puerto positivamente orientado.

(b) 3-cuarto con un habitante.

Figura 1.13: Diagramas de un 3-cuarto y un habitante del cuarto.

Para el cuarto de la Figura 1.14 se define en $S(R)$ una operación binaria por yuxtaposición, la cual mapea habitantes S y T de R al habitante $S \cdot T$ de R (véase Figura 1.14).

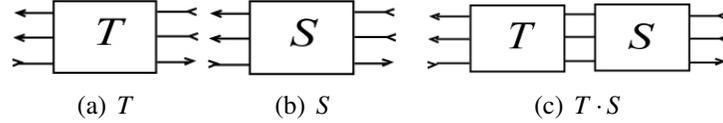


Figura 1.14: Operación definida en $S(R)$.

Sea R un 3-cuarto, T_+, T_-, T_o habitantes del cuarto R , (T_+, T_-, T_o) una madeja triple (i.e. una terna triple de 3-ovillos orientados los cuales son idénticos excepto en un específico cruce, véase Figura 1.11) y \mathbb{F} el campo de cocientes de $\mathbb{Z}[z]$. Se denota $V(R)$ el espacio vectorial libre generado por $S(R)$ sobre F y $N(R)$ el subespacio vectorial generado por los elementos de la forma $T_+ - T_- - zT_o$. Se define el espacio vectorial cociente $L(R)$, por $L(R) = V(R)/N(R)$. Donde $L(R)$ es un espacio vectorial y además es un álgebra bajo la extensión, a $L(R)$, de la operación binaria “ \cdot ”.

Como ya se mencionó anteriormente se usarán los 3-ovillos para formar nudos no alternantes pero en especial se usará un tipo de 3-ovillos denominados 3-trenzas.

1.2.2. 3-trenzas

En los inicios de 1930, E. Artin introduce el concepto de trenza, para realizar el estudio de nudos. Sin embargo, fue V. Jones en 1984 quien consiguió el objetivo original de Artin al aplicar el concepto de trenza a la teoría de nudos. Una n -trenza es un ejemplo particular de un n -ovillo: En la parte superior y en la base de un cubo, B , se marcan n puntos, A_1, A_2, \dots, A_n y A'_1, A'_2, \dots, A'_n , respectivamente. Se representan en la Figura. 1.15.

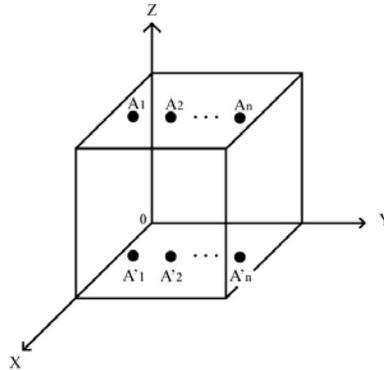


Figura 1.15: Los puntos A_1, A_2, \dots, A_n y A'_1, A'_2, \dots, A'_n en el cubo B .

Ahora uniendo los puntos A_1, A_2, \dots, A_n a los puntos A'_1, A'_2, \dots, A'_n mediante n curvas poligonales en B , de tal manera que estas curvas no se intersequen entre sí, no es necesario que se junten A_i con A'_i , pero no puede juntarse A_i con A'_j . A estas curvas poligonales se les denominará cuerdas. Supóngase ahora que se divide en dos partes al cubo B , por un plano arbitrario, E , que es paralelo a la base del cubo. Entonces si E interseca cada cuerda en uno

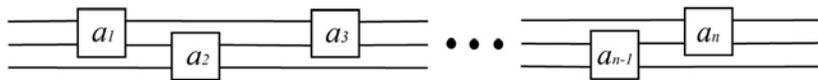
y sólo en un punto, se dirá que estas n cuerdas en B son una **n -trenza**. Es de interés el caso de las 3-trenzas que son con las que se trabajará.

En forma similar al caso de 3-ovillos, se puede obtener un diagrama regular de una 3-trenza por la proyección de ella en el plano yz , como en la Figura 1.16.

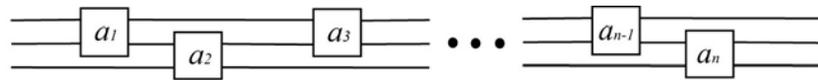


Figura 1.16: Diagrama regular de una 3-trenza.

Para mayor comodidad se trabajará con las 3-trenzas en forma horizontal, usando la notación $\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ donde $a_i \in \mathbb{Z}$ con $i = 1, \dots, n$ y $n \in \mathbb{N}$ para denotar la 3-trenza de la Figura 1.17.



(a) $\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ con n impar.



(b) $\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ con n par.

Figura 1.17: 3-trenza con n impar y n par.

Se tiene la siguiente definición para los a_i de la Figura 1.17.

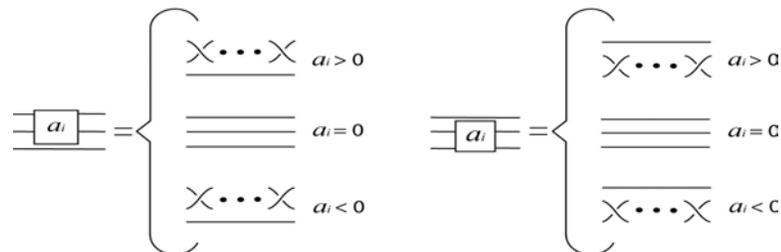


Figura 1.18: Nomenclatura de 3-trenzas.

Ejemplos de 3-trenzas son: $\mathcal{E} = \mathcal{T}(1, -1, 1)$ y $\mathcal{E}^{-1} = \mathcal{T}(-1, 1, -1)$, las cuales se muestran en la Figura 1.19 (b) y (c).

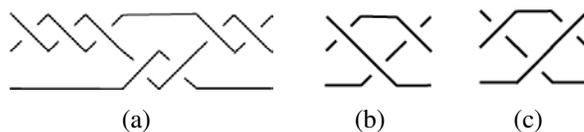


Figura 1.19: En (a) la 3-trenza $\mathcal{T}(3, 2, 2)$, en (b) y (c) son ejemplos de 3-trenzas no alternantes.

Es mostrado en [3] que toda 3-trenza T admite un diagrama estándar, es decir, un diagrama de la forma $T = A \cdot \mathcal{E}^k$ donde A es un diagrama alternante y $k \in \mathbb{Z}$.

Por medio de diagramas de 3-trenzas se construirán tanto nudos no alternantes como nudos de 2-puentes. En la siguiente sección se muestra cómo con una 3-trenza se puede construir un nudo de 2-puentes.

1.3. 3-trenzas y nudos de 2-puentes

Los nudos de 2-puentes son una familia de nudos que están muy estrechamente relacionados con los ovillos racionales. Se sabe que el nudo trivial es el único nudo de 1-puente. Los nudos de 2-puentes tienen la característica de ser siempre primos y tener a lo más dos componentes [10].

El siguiente Teorema muestra la relación entre nudos de 2-puentes y 2-ovillo racionales.

Teorema 1.4. [10, Teo. 9.3.1]

- 1) *Un nudo (o enlace) de 2-puentes es el denominador de algún 2-ovillo racional.*
- 2) *Por el contrario, el denominador de un 2-ovillo racional es un nudo (o enlace) de 2-puentes.*

Gracias a este teorema, un diagrama regular estándar de un nudo de 2-puentes puede ser representado como lo muestra la Figura 1.20. Sea $\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ una 3-trenza, se define la cerradura de $\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, del tipo A , como el nudo o enlace obtenido de cerrar como se muestra en la Figura 1.20 que se denotará como $A(\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n))$. Por lo tanto un nudo de 2-puentes puede ser considerado como la cerradura A de una 3-trenza. En [3] se muestra: Si un nudo de 2-puentes es de cierto tipo denotado por $b(a, b)$, donde a y b son primos relativos, se tiene que si $\frac{a}{b} = [a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}]$ es una expansión de fracción continua, con $a_1 \neq 0$ y $a_i > 0$ o $a_i < 0$ para todo i , entonces $b(a, b) \cong A(\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n))$.

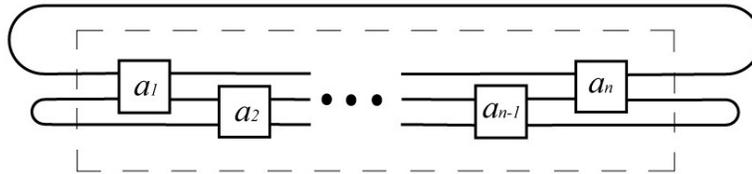


Figura 1.20: *Enlace de 2-puentes generado por la cerradura, tipo A, de $\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.*

Se considerarán nudos de 2-puentes con diagrama regular estándar para determinar nudos no alternantes tales que al cambiarles un cruce generen nudos de 2-puentes.

Capítulo 2

Nudos y el cuarto R_1

Considérese el 3-cuarto mostrado en Figura 2.1 (a), el cual se denotará como R_1 .

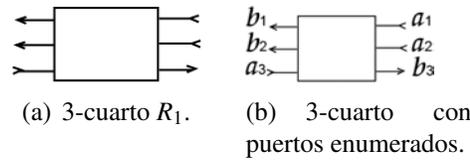


Figura 2.1: 3-cuarto no estándar.

Derivado de [5] se tiene que una base para $L(R_1)$ es $\mathfrak{B} = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6\}$, véase Figura 2.2. Así todo elemento en $L(R_1)$ admite una única expresión como combinación de elementos en \mathfrak{B} . Lo cual implica que para $T \in L(R_1)$ existen polinomios p_1, \dots, p_6 tal que

$$\nabla(T) = \sum_{i=1}^6 p_i \nabla(\chi_i).$$

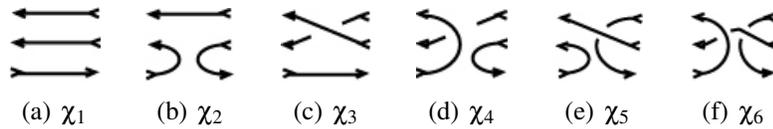


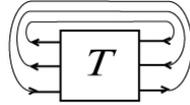
Figura 2.2: Elementos básicos.

Se enumeran los puertos de R_1 , con a_j los que entran y los que salen con b_j , como se muestra en Figura 2.1 (b). Se denota al conjunto de los puertos a_j por A y a los b_j por B . Nótese que el número de funciones de A sobre B son seis. Para cada habitante $T \in S(R)$ las conexiones entre los puertos, que son hechas por los arcos, determinan una única función $\hat{T}_i : A \rightarrow B$, para $i = 1, 2, \dots, 6$, la cual es biyectiva. Por lo tanto, para cada elemento χ_i sus conexiones determinan una función $\hat{\chi}_i$, véase la Figura 2.2. Las cuales son definidas de la siguiente manera:

$\hat{\chi}_1 : A \rightarrow B$	$\hat{\chi}_2 : A \rightarrow B$	$\hat{\chi}_3 : A \rightarrow B$	$\hat{\chi}_4 : A \rightarrow B$	$\hat{\chi}_5 : A \rightarrow B$	$\hat{\chi}_6 : A \rightarrow B$
$a_1 \mapsto b_1$	$a_1 \mapsto b_1$	$a_1 \mapsto b_2$	$a_1 \mapsto b_2$	$a_1 \mapsto b_3$	$a_1 \mapsto b_3$
$a_2 \mapsto b_2$	$a_2 \mapsto b_3$	$a_2 \mapsto b_1$	$a_2 \mapsto b_3$	$a_2 \mapsto b_1$	$a_2 \mapsto b_2$
$a_3 \mapsto b_3$	$a_3 \mapsto b_2$	$a_3 \mapsto b_3$	$a_3 \mapsto b_1$	$a_3 \mapsto b_2$	$a_3 \mapsto b_1$

Nótese que cada función definida por algún habitante de $S(R_1)$ es igual a alguna función $\hat{\chi}_i$ con $i = 1, \dots, 6$; por lo cual las conexiones de $T \in S(R)$ pueden ser representados por un habitante χ_i . Además una 3-trenza T es habitante de la madeja $S(R)$ si todos los puertos izquierdos de R , son conectados con todos los puertos derechos de R ; por lo tanto $T \in S(R_1)$ si, y sólo si, $\hat{T}(a_3) = (b_3)$.

Definición 2.1. Sea $T \in S(R)$, se define el numerador de T , $N(T)$ como el enlace obtenido de la siguiente forma:



Se denotará por c al 3-ovillo orientado mostrado en la Figura 2.3, nótese que c define a la función \hat{c} que, por sus conexiones, es igual a $\hat{\chi}_2$.



Figura 2.3: El habitante c .

Los siguientes resultados serán usados para determinar diagramas de nudos no alternantes que al cambiar un cruce generen nudos de 2-puentes. Esto determinando el número de componentes de algunos enlaces formados por 3-ovillos.

Lema 2.1. Sea t una 3-trenza habitante del 3-cuarto R_1 . Entonces $N(t \cdot c)$ es un nudo si, y sólo si, las conexiones de t definen la función $\hat{\chi}_3$.

Demostración: Supóngase que las conexiones de t definen la función $\hat{\chi}_3$, por ello sus conexiones pueden ser representadas por χ_3 . El 3-ovillo c define $\hat{\chi}_2$ y sus conexiones serán representadas por χ_2 , usando esto se calculará el número de componentes del enlace $N(t \cdot c)$. Las conexiones del 3-ovillo $t \cdot c$ serán representadas por el 3-ovillo $\chi_3 \cdot \chi_2$, por lo tanto la función que define $t \cdot c$ es $\hat{\chi}_4$. Además nótese que se puede considerar el enlace $N(t \cdot c)$ como la unión de los 3-ovillos $t \cdot c$ y χ_1 . Debido a que $\hat{\chi}_4(a_i) \neq b_i$ y $\hat{\chi}_1(a_i) = b_i$ para todo i , entonces $N(t \cdot c)$ sólo tiene una componente y por lo tanto es un nudo. Ahora supóngase que las conexiones de t no definen la función $\hat{\chi}_3$, como t es una 3-trenza habitante de R_1 entonces definen la función $\hat{\chi}_1$. Se calcula la función que define el 3-ovillo $t \cdot c$ con $\chi_1 \cdot \chi_2$, como $\hat{\chi}_2(a_1) = b_1$ el número de componentes de $N(t \cdot c)$ es dos, de modo que $N(t \cdot c)$ es un enlace de más de una componente. □

Lema 2.2. Sea $\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k}$ una 3-trenza, con a_i números enteros y $k \in \mathbb{Z}$, entonces la función que define $\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k}$ es $\hat{\chi}_3$.

Demostración: Supóngase m impar, el caso m par es análogo. Se reescribe la 3-trenza $\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k}$,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k} \\
&= \mathcal{T}(2a_1) \cdot \mathcal{T}(1) \cdot \mathcal{T}(0, 2a_2) \cdot \mathcal{T}(2a_3) \cdots \mathcal{T}(2a_m) \cdot (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E})^k \\
&= (\mathcal{T}(2))^{a_1} \cdot \mathcal{T}(1) \cdot (\mathcal{T}(0, 2))^{a_2} \cdot (\mathcal{T}(2))^{a_3} \cdots (\mathcal{T}(2))^{a_m} \cdot (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E})^k
\end{aligned}$$

Es claro que $\mathcal{T}(1)$ define la función $\hat{\chi}_3$, y $\mathcal{T}(2)$, $\mathcal{T}(0, 2)$ y $(\mathcal{E} \cdot \mathcal{E})$ definen la función $\hat{\chi}_1$, por ello $\mathcal{T}(2)^l$, $\mathcal{T}(0, 2)^n$ y $(\mathcal{E} \cdot \mathcal{E})^k$ para todo l, n y $k \in \mathbb{Z}$ definen la función $\hat{\chi}_1$. Por lo tanto las conexiones de $\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k}$ pueden ser representados por el 3-ovillo χ_3 y definen la función $\hat{\chi}_3$. \square

Teorema 2.1. Dada $\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k}$ una 3-trenza, con a_i números enteros y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $N(\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k} \cdot c)$ es un nudo.

Demostración: Por el Lema 2.2 la 3-trenza $\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k}$ define la función $\hat{\chi}_3$. Como $\hat{\chi}_3(a_3) = (b_3)$, la 3-trenza $\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k}$ es habitante de $S(R_1)$ y por el Lema 2.1 se concluye que $N(\mathcal{T}(2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_m) \cdot \mathcal{E}^{2k} \cdot c)$ es un nudo. \square

Lema 2.3. Si t es una 3-trenza tal que define la función $\hat{\chi}_3$ con $t \neq \mathcal{T}(\pm 1)$, entonces $A(t)$ es un nudo de 2-puentes.

Demostración: El enlace $A(t)$ puede ser considerado como $t \cdot \chi_2$. Si t es una 3-trenza tal que define la función $\hat{\chi}_3$, entonces las conexiones de $t \cdot \chi_2$ pueden ser representadas por $\chi_3 \cdot \chi_2$ y definen la función $\hat{\chi}_4$. Como $\hat{\chi}_4(a_i) \neq b_i$ para todo i , entonces $A(t)$ tiene una sola componente. Por el Teorema 1.4 y por la definición de la cerradura A , se tiene que $A(t)$ es un nudo de 2-puentes. \square

Nota 1. Nótese que $t \cdot \mathcal{E}^{2k} \cdot c \cong t \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k}$ (véase Figura 2.4).

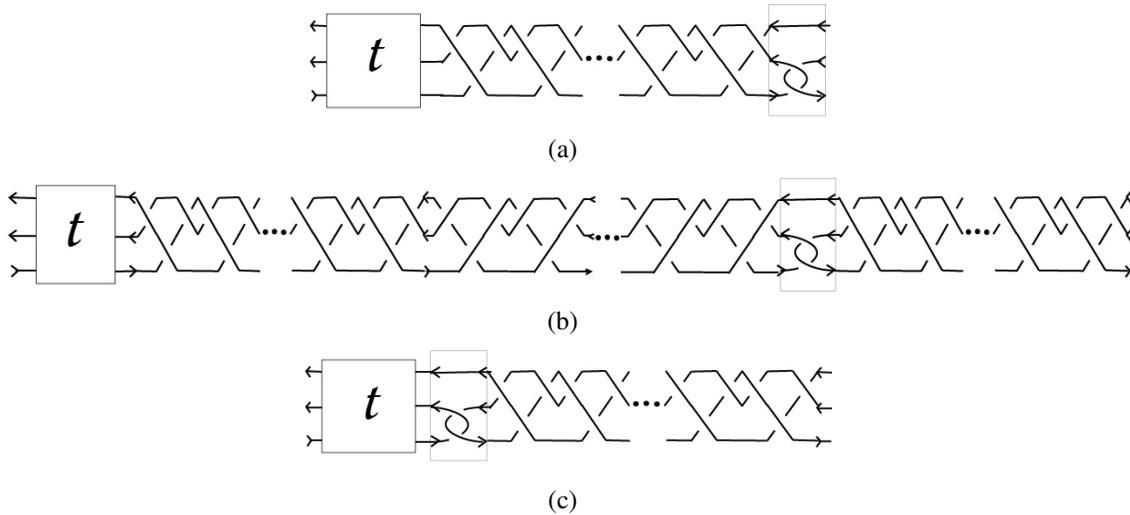


Figura 2.4: En (a) el 3-ovillo $t \cdot \mathcal{E}^{2k} \cdot c$, en (b) se muestra el 3-ovillo obtenido de girar $2k$ veces el 3-ovillo c dejando fijo el 3-ovillo $t \cdot \mathcal{E}^{2k}$, en (c) el 3-ovillo $t \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k}$ que es obtenido de anular \mathcal{E}^{2k} con \mathcal{E}^{-2k} .

Capítulo 3

Invariantes polinomiales

Se calculará el polinomio de Alexander con ayuda del polinomio de Conway, tomando $z = x^{-1} - x$ para trabajar con exponentes enteros. Por lo tanto los polinomios de Alexander se presentarán con potencias pares.

Nota 2. Se trabajará en el resto del texto con 3-ovillos orientados que sean habitantes del 3-cuarto R_1 , véase Figura 2.1 y sólo se escribirá 3-ovillos para denotarlos.

3.1. Polinomio de Conway

Se calculará el polinomio de Conway tanto de 3-ovillos como de enlaces y se denotará en ambos casos por ∇ . Además se colocará un punto en el diagrama sobre el cruce al cual se le aplica la relación de madeja.

3.1.1. 3-ovillos

Se recuerda que, como se mencionó en el capítulo anterior, si T es un 3-ovillo habitante del 3-cuarto R_1 entonces $\nabla(T) = \sum_{i=1}^6 p_i \nabla(\chi_i)$. Teniendo el polinomio de Conway de dos 3-ovillos, será de utilidad el polinomio asociado al diagrama de la yuxtaposición de ellos. Para lo cual se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Sean T_1 y T_2 dos diagramas de 3-ovillos, tales que

$$\nabla(T_1) = \sum_{i=1}^6 p_i \nabla(\chi_i) \text{ y } \nabla(T_2) = \sum_{i=1}^6 q_i \nabla(\chi_i), \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} \nabla(T_1 \cdot T_2) = & (p_1 q_1 + p_3 q_3) \nabla(\chi_1) \\ & + (p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_2 q_4 + p_3 q_4 + p_5 q_2 + p_5 q_3 + z p_5 q_4) \nabla(\chi_2) \\ & + (p_1 q_3 + p_3 q_1 + z p_3 q_3) \nabla(\chi_3) \\ & + (p_1 q_4 + p_3 q_2 + p_4 q_1 + p_4 q_4 + p_6 q_2 + z p_3 q_4 + p_6 q_3 + z p_6 q_4) \nabla(\chi_4) \\ & + (p_1 q_5 + p_2 q_3 + p_2 q_6 + p_3 q_6 + p_5 q_1 + p_5 q_5 + z p_5 q_3 + z p_5 q_6) \nabla(\chi_5) \\ & + (p_1 q_6 + p_3 q_5 + p_4 q_3 + p_4 q_6 + p_6 q_1 + p_6 q_5 + z p_3 q_6 + z p_6 q_3 + z p_6 q_6) \nabla(\chi_6) \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación anterior y factorizando se obtiene lo deseado. \square

Para obtener el polinomio de Conway de un nudo o enlace, obtenido al aplicar la cerradura N a un 3-ovillo, se tiene el siguiente lema.

Lema 3.1. Sea T un 3-ovillo, si $\nabla(T) = \sum_{i=1}^6 p_i \nabla(\chi_i)$, entonces

$$\nabla(N(T)) = p_4 + p_5 + zp_6.$$

Demostración: Supóngase que $\nabla(T) = \sum_{i=1}^6 p_i \nabla(\chi_i)$, entonces $\nabla(N(T)) = \sum_{i=1}^6 p_i \nabla(N(\chi_i))$.

Ahora obsérvese que $N(\chi_i)$ para $i = 1, 2, 3$ son enlaces divididos, $N(\chi_i)$ cuando $i = 4, 5$ son equivalentes al nudo trivial, véase Figura 3.1. Además es fácil ver que $N(\chi_6) \cong A(\mathcal{T}(2))$.

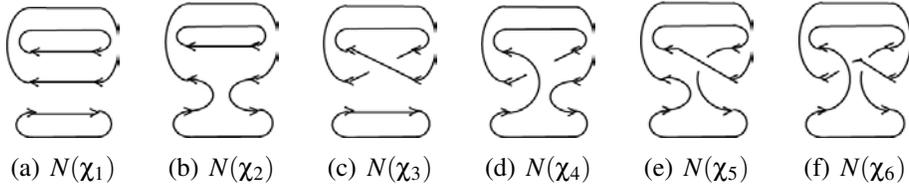


Figura 3.1: Cerradura N de elementos básicos.

Se calcula el polinomio de Conway a $N(\chi_i)$ para $i = 1, \dots, 6$: por la Proposición 1.1 se obtiene que $\nabla(N(\chi_1)) = \nabla(N(\chi_2)) = \nabla(N(\chi_3)) = 0$, por la propiedad de normalización del polinomio de Conway $\nabla(N(\chi_4)) = \nabla(N(\chi_5)) = 1$, y

$$\nabla(N(\chi_6)) = \nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) = \nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) + z \nabla\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) = z$$

Por lo tanto $\nabla(N(T)) = p_4 + p_5 + zp_6$. \square

Lema 3.2. Si S y T son dos 3-ovillos, entonces

$$\nabla(N(S \cdot T)) = \nabla(N(T \cdot S)).$$

Demostración: Es claro que $N(S \cdot T) \cong N(T \cdot S)$, véase Figura 3.2. Por lo cual $\nabla(N(S \cdot T)) = \nabla(N(T \cdot S))$. \square

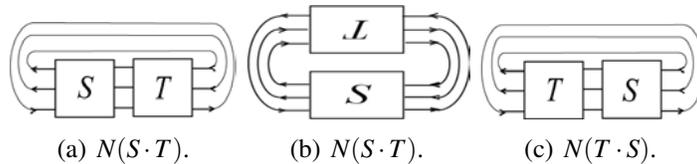


Figura 3.2: Cerradura N de $S \cdot T$ y $T \cdot S$.

Se trabajará con 3-ovillos formados con 3-trenzas; por lo cual es importante calcular para una 3-trenza T , $\nabla(\mathcal{E}^{2k})$, $\nabla(T \cdot \mathcal{E}^{2k})$ y $\nabla(N(T \cdot \mathcal{E}^{2k}))$.

Teorema 3.2. Sea $D = \mathcal{E}^{2k}$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $\nabla(D) = \sum_{i=1}^6 \alpha_{i_k} \nabla(\chi_i)$, donde:

$$\begin{aligned}\alpha_{1_k} &= 1 - \alpha_{4_k}, \\ \alpha_{2_k} &= -\alpha_{3_k} - z\alpha_{4_k}, \\ \alpha_{3_k} &= z(1 - \alpha_{4_{k-1}}) + (1 + z^2)\alpha_{3_{k-1}}, \\ \alpha_{4_k} &= -z\alpha_{3_{k-1}} + \alpha_{4_{k-1}}, \\ \alpha_{5_k} &= \alpha_{4_k}, \\ \alpha_{6_k} &= -\alpha_{3_k}.\end{aligned}$$

Con $\alpha_{3_0} = \alpha_{4_0} = 0$.

Nota 3. Nótese que α_{3_k} y α_{4_k} estan definidas como relaciones de recurrencia y $\alpha_{1_k}, \alpha_{2_k}, \alpha_{5_k}$ y α_{6_k} en términos de ellas.

Demostración: Se hará por inducción sobre k . Para $k = 1$, se calculará $\nabla(\mathcal{E}^2)$,

$$\begin{aligned}\nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) &= \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \\ &= \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \\ &= \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \\ &= \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \\ &= \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) + z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \\ &= \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) + z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) \\ &= \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) + z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \leftarrow \quad \rightarrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \right).\end{aligned}$$

Entonces $\alpha_{1_1} = 1$, $\alpha_{2_1} = -z$, $\alpha_{3_1} = z$, $\alpha_{4_1} = \alpha_{5_1} = 0$ y $\alpha_{6_1} = -z$, lo cual verifica las fórmulas para α_{3_1} y α_{4_1} , así como $\alpha_{1_1} = 1 - \alpha_{4_1}$, $\alpha_{2_1} = -\alpha_{3_1} - z\alpha_{4_1}$, $\alpha_{5_1} = \alpha_{4_1}$ y $\alpha_{6_1} = -\alpha_{3_1}$.

Para k . Aplicando el Teorema 3.1 se tiene:

$$\begin{aligned}\nabla(\mathcal{E}^{2k}) &= \nabla(\mathcal{E}^{2(k-1)} \cdot \mathcal{E}^2) = \\ &[\alpha_{1_{k-1}} \alpha_{1_1} + \alpha_{3_{k-1}} \alpha_{3_1}] \nabla(\chi_1) \\ &+ [\alpha_{1_{k-1}} \alpha_{2_1} + \alpha_{2_{k-1}} \alpha_{1_1} + \alpha_{2_{k-1}} \alpha_{4_1} + \alpha_{3_{k-1}} \alpha_{4_1} + \alpha_{5_{k-1}} \alpha_{2_1} + \alpha_{5_{k-1}} \alpha_{3_1} + z\alpha_{5_{k-1}} \alpha_{4_1}] \nabla(\chi_2) \\ &+ [\alpha_{1_{k-1}} \alpha_{3_1} + \alpha_{3_{k-1}} \alpha_{1_1} + z\alpha_{3_{k-1}} \alpha_{3_1}] \nabla(\chi_3) \\ &+ [\alpha_{1_{k-1}} \alpha_{4_1} + \alpha_{3_{k-1}} \alpha_{2_1} + \alpha_{4_{k-1}} \alpha_{1_1} + \alpha_{4_{k-1}} \alpha_{4_1} + \alpha_{6_{k-1}} \alpha_{2_1} + z\alpha_{3_{k-1}} \alpha_{4_1} + \alpha_{6_{k-1}} \alpha_{3_1} \\ &+ z\alpha_{6_{k-1}} \alpha_{4_1}] \nabla(\chi_4) \\ &+ [\alpha_{1_{k-1}} \alpha_{5_1} + \alpha_{2_{k-1}} \alpha_{3_1} + \alpha_{2_{k-1}} \alpha_{6_1} + \alpha_{3_{k-1}} \alpha_{6_1} + \alpha_{5_{k-1}} \alpha_{1_1} + \alpha_{5_{k-1}} \alpha_{5_1} + z\alpha_{5_{k-1}} \alpha_{3_1} \\ &+ z\alpha_{5_{k-1}} \alpha_{6_1}] \nabla(\chi_5) \\ &+ [\alpha_{1_{k-1}} \alpha_{6_1} + \alpha_{3_{k-1}} \alpha_{5_1} + \alpha_{4_{k-1}} \alpha_{3_1} + \alpha_{4_{k-1}} \alpha_{6_1} + \alpha_{6_{k-1}} \alpha_{1_1} + \alpha_{6_{k-1}} \alpha_{5_1} + z\alpha_{3_{k-1}} \alpha_{6_1} \\ &+ z\alpha_{6_{k-1}} \alpha_{3_1} + z\alpha_{6_{k-1}} \alpha_{6_1}] \nabla(\chi_6).\end{aligned}$$

Recuérdese que α_{i_k} es el coeficiente de $\nabla(\chi_i)$ en la descomposición de \mathcal{E}^{2k} . Sustituyendo los valores correspondientes a $\nabla(\mathcal{E}^2)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\alpha_{1_k} &= \alpha_{1_{k-1}} + \alpha_{3_{k-1}}z, \\ \alpha_{2_k} &= \alpha_{1_{k-1}}(-z) + \alpha_{2_{k-1}} + \alpha_{5_{k-1}}(-z) + \alpha_{5_{k-1}}(z), \\ \alpha_{3_k} &= \alpha_{1_{k-1}}(z) + \alpha_{3_{k-1}} + z\alpha_{3_{k-1}}(z), \\ \alpha_{4_k} &= \alpha_{3_{k-1}}(-z) + \alpha_{4_{k-1}} + \alpha_{6_{k-1}}(-z) + \alpha_{6_{k-1}}(z), \\ \alpha_{5_k} &= \alpha_{2_{k-1}}(z) + \alpha_{2_{k-1}}(-z) + \alpha_{3_{k-1}}\alpha_{6_1} + \alpha_{5_{k-1}} + z\alpha_{5_{k-1}}(z) + z\alpha_{5_{k-1}}(-z), \\ \alpha_{6_k} &= \alpha_{1_{k-1}}(-z) + \alpha_{4_{k-1}}(z) + \alpha_{4_{k-1}}(-z) + \alpha_{6_{k-1}} + z\alpha_{3_{k-1}}(-z) + z\alpha_{6_{k-1}}(z) + z\alpha_{6_{k-1}}(-z).\end{aligned}$$

Reacomodando y agrupando resulta:

$$\begin{aligned}\alpha_{1_k} &= \alpha_{1_{k-1}} + \alpha_{3_{k-1}}z, & \alpha_{4_k} &= \alpha_{3_{k-1}}(-z) + \alpha_{4_{k-1}}, \\ \alpha_{2_k} &= \alpha_{1_{k-1}}(-z) + \alpha_{2_{k-1}}, & \alpha_{5_k} &= \alpha_{3_{k-1}}(-z) + \alpha_{5_{k-1}} \\ \alpha_{3_k} &= \alpha_{1_{k-1}}(z) + \alpha_{3_{k-1}}(1+z^2), & \alpha_{6_k} &= \alpha_{1_{k-1}}(-z) + \alpha_{6_{k-1}} - z^2\alpha_{3_{k-1}}.\end{aligned}\tag{a}$$

Por hipótesis de inducción se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha_{1_{k-1}} &= 1 - \alpha_{4_{k-1}}, & \alpha_{5_{k-1}} &= \alpha_{4_{k-1}}, \\ \alpha_{2_{k-1}} &= -\alpha_{3_{k-1}} - z\alpha_{4_{k-1}}, & \alpha_{6_{k-1}} &= -\alpha_{3_{k-1}}.\end{aligned}\tag{b}$$

Sustituyendo las ecuaciones de (b) en las ecuaciones de α_{i_k} en (a) para $i = 1, 2, 5, 6$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\alpha_{3_k} &= z(1 - \alpha_{4_{k-1}}) + (1 + z^2)\alpha_{3_{k-1}}, \\ \alpha_{4_k} &= -z\alpha_{3_{k-1}} + \alpha_{4_{k-1}}, \\ \alpha_{1_k} &= 1 - \alpha_{4_k}, \\ \alpha_{2_k} &= -\alpha_{3_k} - z\alpha_{4_k}, \\ \alpha_{5_k} &= \alpha_{4_k}, \\ \alpha_{6_k} &= -\alpha_{3_k}.\end{aligned}$$

Lo cual verifica que la propiedad se satisface para k . □

Teorema 3.3. *Sea T un 3-ovillo. Si*

$$\nabla(T) = \sum_{i=1}^6 p_i \nabla(\chi_i) \text{ y } \nabla(\mathcal{E}^{2k}) = \sum_{i=1}^6 \alpha_{i_k} \nabla(\chi_i), \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned}\nabla(T_1 \cdot \mathcal{E}^{2k}) &= (p_1\alpha_{1_k} + p_3\alpha_{3_k})\nabla(\chi_1) + (p_1\alpha_{2_k} + p_2 + p_3\alpha_{4_k})\nabla(\chi_2) \\ &+ (p_1\alpha_{3_k} + p_3\alpha_{1_k} + zp_3\alpha_{3_k})\nabla(\chi_3) + (p_4 + p_1\alpha_{4_k} - p_3\alpha_{3_k})\nabla(\chi_4) \\ &+ (p_5 - p_3\alpha_{3_k} + p_1\alpha_{4_k})\nabla(\chi_5) + (p_6 - p_1\alpha_{3_k} + p_3\alpha_{4_k} - zp_3\alpha_{3_k})\nabla(\chi_6).\end{aligned}$$

Demostración: Por el Teorema 3.1 se tiene

$$\begin{aligned}\nabla(T_1 \cdot \mathcal{E}^{2k}) &= \\ &(p_1\alpha_{1_k} + p_3\alpha_{3_k})\nabla(\chi_1) \\ &+ (p_1\alpha_{2_k} + p_2\alpha_{1_k} + p_2\alpha_{4_k} + p_3\alpha_{4_k} + p_5\alpha_{2_k} + p_5\alpha_{3_k} + zp_5\alpha_{4_k})\nabla(\chi_2) \\ &+ (p_1\alpha_{3_k} + p_3\alpha_{1_k} + zp_3\alpha_{3_k})\nabla(\chi_3) \\ &+ (p_1\alpha_{4_k} + p_3\alpha_{2_k} + p_4\alpha_{1_k} + p_4\alpha_{4_k} + p_6\alpha_{2_k} + zp_3\alpha_{4_k} + p_6\alpha_{3_k} + zp_6\alpha_{4_k})\nabla(\chi_4) \\ &+ (p_1\alpha_{5_k} + p_2\alpha_{3_k} + p_2\alpha_{6_k} + p_3\alpha_{6_k} + p_5\alpha_{1_k} + p_5\alpha_{5_k} + zp_5\alpha_{3_k} + zp_5\alpha_{6_k})\nabla(\chi_5) \\ &+ (p_1\alpha_{6_k} + p_3\alpha_{5_k} + p_4\alpha_{3_k} + p_4\alpha_{6_k} + p_6\alpha_{1_k} + p_6\alpha_{5_k} + zp_3\alpha_{6_k} + zp_6\alpha_{3_k} + zp_6\alpha_{6_k})\nabla(\chi_6).\end{aligned}$$

Factorizando,

$$\begin{aligned}
\nabla(T_1 \cdot \mathcal{E}^{2k}) = & (p_1 \alpha_{1_k} + p_3 \alpha_{3_k}) \nabla(\chi_1) \\
& + (p_1 \alpha_{2_k} + p_2 (\alpha_{1_k} + \alpha_{4_k}) + p_3 \alpha_{4_k} + p_5 (\alpha_{2_k} + \alpha_{3_k}) + zp_5 \alpha_{4_k}) \nabla(\chi_2) \\
& + (p_1 \alpha_{3_k} + p_3 \alpha_{1_k} + zp_3 \alpha_{3_k}) \nabla(\chi_3) \\
& + (p_1 \alpha_{4_k} + p_3 \alpha_{2_k} + p_4 (\alpha_{1_k} + \alpha_{4_k}) + p_6 (\alpha_{2_k} + \alpha_{3_k}) + zp_3 \alpha_{4_k} + zp_6 \alpha_{4_k}) \nabla(\chi_4) \\
& + (p_1 \alpha_{5_k} + p_2 (\alpha_{3_k} + \alpha_{6_k}) + p_3 \alpha_{6_k} + p_5 (\alpha_{1_k} + \alpha_{5_k}) + zp_5 (\alpha_{3_k} + \alpha_{6_k})) \nabla(\chi_5) \\
& + (p_1 \alpha_{6_k} + p_3 \alpha_{5_k} + p_4 (\alpha_{3_k} + \alpha_{6_k}) + p_6 (\alpha_{1_k} + \alpha_{5_k}) + zp_3 \alpha_{6_k} + zp_6 (\alpha_{3_k} + \alpha_{6_k})) \nabla(\chi_6).
\end{aligned}$$

Además debido al Teorema 3.2:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1_k} &= 1 - \alpha_{4_k}, & \alpha_{5_k} &= \alpha_{4_k}, \\
\alpha_{2_k} &= -\alpha_{3_k} - z\alpha_{4_k}, & \alpha_{6_k} &= -\alpha_{3_k}.
\end{aligned}$$

Usando estas relaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
\nabla(T_1 \cdot \mathcal{E}^{2k}) = & (p_1 \alpha_{1_k} + p_3 \alpha_{3_k}) \nabla(\chi_1) \\
& + (p_1 \alpha_{2_k} + p_2 + p_3 \alpha_{4_k} + p_5 (-z\alpha_{4_k}) + zp_5 \alpha_{4_k}) \nabla(\chi_2) \\
& + (p_1 \alpha_{3_k} + p_3 \alpha_{1_k} + zp_3 \alpha_{3_k}) \nabla(\chi_3) \\
& + (p_1 \alpha_{4_k} + p_3 \alpha_{2_k} + p_4 + p_6 (-z\alpha_{4_k}) + zp_3 \alpha_{4_k} + zp_6 \alpha_{4_k}) \nabla(\chi_4) \\
& + (p_1 \alpha_{5_k} + p_3 \alpha_{6_k} + p_5) \nabla(\chi_5) \\
& + (p_1 \alpha_{6_k} + p_3 \alpha_{5_k} + p_6 + zp_3 \alpha_{6_k}) \nabla(\chi_6).
\end{aligned}$$

Llegando así a lo deseado. □

Corolario 3.1. Sea T un 3-ovillo y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\text{Si } \nabla(T) = \sum_{i=1}^6 p_i \nabla(\chi_i) \text{ y } \nabla(\mathcal{E}^{2k}) = \sum_{i=1}^6 \alpha_{i_k} \nabla(\chi_i), \text{ entonces}$$

$$\nabla(N(T \cdot \mathcal{E}^{2k})) = \alpha_{3_k} (-zp_1 - p_3(2 + z^2)) + \alpha_{4_k} (2p_1 + zp_3) + (p_4 + p_5 + zp_6).$$

Demostración: Usando el Teorema 3.3,

$$\begin{aligned}
\nabla(T \cdot \mathcal{E}^{2k}) = & (p_1 \alpha_{1_k} + p_3 \alpha_{3_k}) \nabla(\chi_1) + (p_1 \alpha_{2_k} + p_2 + p_3 \alpha_{4_k}) \nabla(\chi_2) \\
& + (p_1 \alpha_{3_k} + p_3 \alpha_{1_k} + zp_3 \alpha_{3_k}) \nabla(\chi_3) + (p_4 + p_1 \alpha_{4_k} - p_3 \alpha_{3_k}) \nabla(\chi_4) \\
& + (p_5 - p_3 \alpha_{3_k} + p_1 \alpha_{4_k}) \nabla(\chi_5) + (p_6 - p_1 \alpha_{3_k} + p_3 \alpha_{4_k} - zp_3 \alpha_{3_k}) \nabla(\chi_6).
\end{aligned}$$

Por el Lema 3.1 $\nabla(N(T \cdot \mathcal{E}^{2k})) = (p_4 + p_1 \alpha_{4_k} - p_3 \alpha_{3_k}) + (p_5 - p_3 \alpha_{3_k} + p_1 \alpha_{4_k}) + z(p_6 - p_1 \alpha_{3_k} + p_3 \alpha_{4_k} - zp_3 \alpha_{3_k})$, reacomodando

$$\nabla(N(T \cdot \mathcal{E}^{2k})) = \alpha_{3_k} (-zp_1 - p_3(2 + z^2)) + \alpha_{4_k} (2p_1 + zp_3) + (p_4 + p_5 + zp_6).$$

□

Para 3-ovillos del tipo de 3-trenzas se tienen los siguientes resultados.

3.1.2. 3-trenzas

En esta sección se muestran algunas fórmulas para obtener los polinomios de Conway de 3-trenzas, las cuales están basadas en las relaciones de recurrencia (3.1) y (3.2). Nótese que estas relaciones también se usan para calcular $\nabla(\mathcal{E}^{2k})$.

$$\alpha_{3_k} = z(1 - \alpha_{4_{k-1}}) + (1 + z^2)\alpha_{3_{k-1}}, \quad (3.1)$$

$$\alpha_{4_k} = -z\alpha_{3_{k-1}} + \alpha_{4_{k-1}}. \quad (3.2)$$

Donde $\alpha_{3_0} = \alpha_{4_0} = 0$. Estas relaciones son reescritas tomando $\alpha_{1_k} = 1 - \alpha_{4_k}$, donde $\alpha_{3_0} = 0$ y $\alpha_{1_0} = 1$.

$$\alpha_{3_k} = z\alpha_{1_{k-1}} + (1 + z^2)\alpha_{3_{k-1}}, \quad (3.3)$$

$$\alpha_{1_k} = z\alpha_{3_{k-1}} + \alpha_{1_{k-1}}. \quad (3.4)$$

Teorema 3.4. *Sea $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces*

- i) $\nabla(\mathcal{T}(2t)) = \alpha_{1_t}\nabla(\chi_1) + \alpha_{3_t}\nabla(\chi_3)$.
- ii) $\nabla(\mathcal{T}(2t+1)) = \alpha_{3_t}\nabla(\chi_1) + (\alpha_{1_t} + z\alpha_{3_t})\nabla(\chi_3)$.
- iii) $\nabla(\mathcal{T}(-2t)) = (\alpha_{1_t} + z\alpha_{3_t})\nabla(\chi_1) - \alpha_{3_t}\nabla(\chi_3)$.
- iv) $\nabla(\mathcal{T}(-(2t-1))) = -\alpha_{3_t}\nabla(\chi_1) + \alpha_{1_t}\nabla(\chi_3)$
- v) $\nabla(\mathcal{T}(0, 2t)) = \nabla(\chi_1) + tz\nabla(\chi_3)$.
- vi) $\nabla(\mathcal{T}(0, -2t)) = \nabla(\chi_1) - tz\nabla(\chi_3)$.

Demostración:

i) Se usará inducción sobre t . Para $t = 0$, $\nabla(\mathcal{T}(0)) = \nabla(\chi_1)$. Como $\alpha_{3_0} = 0$ y $\alpha_{1_0} = 1$, entonces $\nabla(\mathcal{T}(0)) = \alpha_{1_0}\nabla(\chi_1) + \alpha_{3_0}\nabla(\chi_3)$.

Para $t = 1$, $\nabla(\mathcal{T}(2)) = \nabla(\chi_1) + z\nabla(\chi_3)$. Como $\alpha_{1_1} = 1$ y $\alpha_{3_1} = z$, entonces $\nabla(\mathcal{T}(2)) = \alpha_{1_1}\nabla(\chi_1) + \alpha_{3_1}\nabla(\chi_3)$.

Se calcula para t , usando el Teorema 3.1. Sea $\nabla(\mathcal{T}(2)^{t-1}) = p_1\nabla(\chi_1) + p_2\nabla(\chi_2) + p_3\nabla(\chi_3) + p_4\nabla(\chi_4) + p_5\nabla(\chi_5) + p_6\nabla(\chi_6)$, entonces

$$\begin{aligned} \nabla(\mathcal{T}(2)^{t-1} \cdot \mathcal{T}(2)) &= (p_1 + zp_3)\nabla(\chi_1) + (p_2 + zp_5)\nabla(\chi_2) \\ &\quad + (p_1z + p_3 + z^2p_3)\nabla(\chi_3) + (p_4 + p_6z)\nabla(\chi_4) \\ &\quad + (p_2z + p_5 + z^2p_5)\nabla(\chi_5) + (p_4z + p_6 + z^2p_6)\nabla(\chi_6). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $\nabla(\mathcal{T}(2)^{t-1}) = \alpha_{1_{t-1}}\nabla(\chi_1) + \alpha_{3_{t-1}}\nabla(\chi_3)$, sustituyendo

$$\begin{aligned} \nabla(\mathcal{T}(2)^{t-1} \cdot \mathcal{T}(2)) &= (\alpha_{1_{t-1}} + z\alpha_{3_{t-1}})\nabla(\chi_1) \\ &\quad + (\alpha_{1_{t-1}}z + \alpha_{3_{t-1}}(1 + z^2))\nabla(\chi_3). \end{aligned}$$

Ahora debido a las ecuaciones (3.3) y (3.4) se obtiene $\nabla(\mathcal{T}(2t)) = \alpha_{1_t}\nabla(\chi_1) + \alpha_{3_t}\nabla(\chi_3)$.

ii) Por el Teorema 3.1 y el resultado en i), se obtiene

$$\nabla(\mathcal{T}(2t+1)) = \nabla(\mathcal{T}(2)^t \cdot \mathcal{T}(1)) = \alpha_{3_t} \nabla(\chi_1) + (\alpha_{1_t} + z\alpha_{3_t}) \nabla(\chi_3).$$

iii) Se usará inducción sobre t . Para $t = 0$, $\nabla(\mathcal{T}(0)) = \nabla(\chi_1)$. Como $\alpha_{3_0} = 0$ y $\alpha_{1_0} = 1$, entonces $\nabla(\mathcal{T}(0)) = (\alpha_{1_0} + z\alpha_{3_0}) \nabla(\chi_1) - \alpha_{3_0} \nabla(\chi_3)$.

Para $t = 1$, $\nabla(\mathcal{T}(-2)) = (1+z^2)\nabla(\chi_1) - z\nabla(\chi_3)$. Como $\alpha_{1_1} = 1$ y $\alpha_{3_1} = z$, entonces $\nabla(\mathcal{T}(-2)) = (\alpha_{1_1} + z\alpha_{3_1}) \nabla(\chi_1) - \alpha_{3_1} \nabla(\chi_3)$.

Se calcula para t , usando el Teorema 3.1. Sea $\nabla(\mathcal{T}(2)^{t-1}) = p_1 \nabla(\chi_1) + p_2 \nabla(\chi_2) + p_3 \nabla(\chi_3) + p_4 \nabla(\chi_4) + p_5 \nabla(\chi_5) + p_6 \nabla(\chi_6)$, entonces

$$\begin{aligned} \nabla(\mathcal{T}(-2)^{t-1} \cdot \mathcal{T}(-2)) &= (p_1(1+z^2) - p_3z) \nabla(\chi_1) + (p_2(1+z^2) + p_5(-z)) \nabla(\chi_2) \\ &\quad + (p_1)(-z) + p_3 \nabla(\chi_3) + (p_4(1+z^2) + p_6(-z)) \nabla(\chi_4) \\ &\quad + (p_2(-z) + p_5) \nabla(\chi_5) + (p_4(-z) + p_6) \nabla(\chi_6). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $\nabla(\mathcal{T}(-2)^{t-1}) = (\alpha_{1_{t-1}} + z\alpha_{3_{t-1}}) \nabla(\chi_1) - z\alpha_{3_{t-1}} \nabla(\chi_3)$, sustituyendo

$$\begin{aligned} \nabla(\mathcal{T}(-2)^{t-1} \cdot \mathcal{T}(-2)) &= [(\alpha_{1_{t-1}} + z\alpha_{3_{t-1}})(1+z^2) + z\alpha_{3_{t-1}}] \nabla(\chi_1) \\ &\quad + (\alpha_{1_{t-1}} + z\alpha_{3_{t-1}})(-z) - \alpha_{3_{t-1}} \nabla(\chi_3) \\ &= ((\alpha_{1_{t-1}} + z\alpha_{3_{t-1}}) + z(\alpha_{1_{t-1}}z + \alpha_{3_{t-1}}(1+z^2))) \nabla(\chi_1) \\ &\quad - (\alpha_{1_{t-1}}z + \alpha_{3_{t-1}}(1+z^2)) \nabla(\chi_3). \end{aligned}$$

Ahora debido a las ecuaciones (3.3) y (3.4) se obtiene $\nabla(\mathcal{T}(-2t)) = (\alpha_{1_t} + z\alpha_{3_t}) \nabla(\chi_1) - \alpha_{3_t} \nabla(\chi_3)$.

iv) Se usará el Teorema 3.1 y iii),

$$\begin{aligned} \nabla(\mathcal{T}(-2)^t \cdot \mathcal{T}(1)) &= p_3 \nabla(\chi_1) + (p_1 + zp_3) \nabla(\chi_3) \\ &= (-\alpha_{3_t}) \nabla(\chi_1) + ((\alpha_{1_t} + z\alpha_{3_t}) - z\alpha_{3_t}) \nabla(\chi_3). \end{aligned}$$

Entonces $\nabla(\mathcal{T}(-(2t-1))) = (-\alpha_{3_t}) + \alpha_{1_t} \nabla(\chi_3)$.

v) Se usará inducción sobre t . Para $t = 0$, $\nabla(\mathcal{T}(0,0)) = \nabla(\chi_1)$. Para $t = 1$, $\nabla(\mathcal{T}(0,2)) = \nabla(\chi_1) - z\nabla(\chi_2)$. Se calcula para t , usando el Teorema 3.1. Sea $\nabla(\mathcal{T}(0,2)^{t-1}) = p_1 \nabla(\chi_1) + p_2 \nabla(\chi_2) + p_3 \nabla(\chi_3) + p_4 \nabla(\chi_4) + p_5 \nabla(\chi_5) + p_6 \nabla(\chi_6)$, entonces

$$\begin{aligned} \nabla(\mathcal{T}(0,2)^{t-1} \cdot \mathcal{T}(0,2)) &= (p_1) \nabla(\chi_1) + (p_1(z) + p_2 + p_5) \nabla(\chi_2) \\ &\quad + p_3 \nabla(\chi_3) + (p_3z + p_4 + p_6(z)) \nabla(\chi_4) \\ &\quad + (p_5) \nabla(\chi_5) + (p_6) \nabla(\chi_6). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $\nabla(\mathcal{T}(0,2)^{t-1}) = \nabla(\chi_1) + (n-1)z\alpha_{3_{t-1}} \nabla(\chi_3)$, sustituyendo

$$\nabla(\mathcal{T}(-2)^{t-1} \cdot \mathcal{T}(-2)) = \nabla(\chi_1) + (z + (t-1)z) \nabla(\chi_2)$$

Por lo tanto $\nabla(\mathcal{T}(0,2t)) = \nabla(\chi_1) + tz \nabla(\chi_3)$.

vi) Demostración análoga a v).

□

Nota 4. *Nótese que con las fórmulas del Teorema 3.4 y el Teorema 3.1 se puede calcular el polinomio de Conway de 3-trenzadas conociendo sus componentes. Además por la naturaleza del polinomio de Conway las fórmulas del Teorema 3.4 son recursivas.*

Dado un nudo K , se busca calcular el polinomio de Alexander de dicho nudo.

3.2. Polinomio de Alexander

El polinomio de Alexander será de utilidad para determinar si ciertos nudos son no alternantes. Para calcular el polinomio de Alexander, con base en el polinomio de Conway, se hace un cambio de variable, $z = (x^{-1} - x)$. Se recuerda que $x = t^{\frac{1}{2}}$.

Nota 5. *Nótese que las ecuaciones (3.1) y (3.2) son relaciones de recurrencia, y se usan para calcular el $\nabla(\mathcal{E}^{2t})$ y $\nabla(\mathcal{T})$. En esta sección son numeradas como (3.5) y (3.6). Estas ecuaciones ya no serán presentadas como relaciones de recurrencia ya que al hacer el cambio de variable $z = (x^{-1} - x)$ pueden ser ahora representadas como sumatorias, lo cual facilitará su cálculo.*

Teorema 3.5. *Sea $z = (x^{-1} - x)$ y $\alpha_{3_0} = \alpha_{4_0} = 0$, si para toda $k \in \mathbb{N}$, se tiene:*

$$\alpha_{3_k} = z(1 - \alpha_{4_{k-1}}) + (1 + z^2)\alpha_{3_{k-1}}, \quad (3.5)$$

$$\alpha_{4_k} = -z\alpha_{3_{k-1}} + \alpha_{4_{k-1}}. \quad (3.6)$$

Entonces, para toda $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\alpha_{3_k} = \sum_{i=1}^k (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{k-i}, \quad (3.7)$$

$$\alpha_{4_k} = \left[\sum_{i=1}^k (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{k+1-i} \right] + (-1)^{k+1} + 1. \quad (3.8)$$

Demostración: Usando inducción sobre k . Para $k = 1$, se verifica

$$\begin{aligned} \alpha_{3_1} &= z(1 - \alpha_{4_0}) + (1 + z^2)\alpha_{3_0} & \alpha_{4_1} &= -z\alpha_{3_0} + \alpha_{4_0} \\ &= z & &= 0 \\ &= (x^{-1} - x)(-1)^{1-1} & &= \sum_{i=1}^1 (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{1+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^1 (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{1-i}. & &+ (-1)^{1+1} + 1. \end{aligned}$$

Se calcula para k , $\alpha_{3_k} = (x^{-1} - x)(1 - \alpha_{4_{k-1}}) + (1 + (x^{-1} - x)^2)\alpha_{3_{k-1}}$. Por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} \alpha_{3_k} &= (x^{-1} - x) \left(1 - \left(\left[\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{k-1+1-i} \right] + (-1)^{k-1+1} + 1 \right) \right) \\ &\quad + (1 + (x^{-1} - x)^2) \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{(k-1)-i} \right). \end{aligned}$$

Operando,

$$\begin{aligned}
\alpha_{3_k} &= (x^{-1} - x) - \left[\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-1)} + x^{2i-3})(-1)^{k-1+1-i} \right] - x^{-1}(-1)^{k-1+1} - x^{-1} \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-3)} + x^{2i-1})(-1)^{k-1+1-i} \right] + x(-1)^{k-1+1} + x \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{(k-1)-i} \right) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i+1)} - x^{2i-3})(-1)^{(k-1)-i} \right) \\
&\quad - 2 \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{(k-1)-i} \right) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-3)} - x^{2i+1})(-1)^{(k-1)-i} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i+1)} - x^{2i+1})(-1)^{(k-1)-i} \right) + (-1)^{(k-1)}(x^{-1} - x) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2(i+1)-1)} - x^{2(i+1)-1})(-1)^{(k-1)-i} \right) + (-1)^{(k-1)}(x^{-1} - x)
\end{aligned}$$

Tomando $r = i + 1$, se reescribe.

$$\begin{aligned}
\alpha_{3_k} &= \left(\sum_{r=2}^k (x^{-(2r-1)} - x^{2r-1})(-1)^{(k-1)-(r-1)} \right) + (-1)^{(k-1)}(x^{-1} - x) \\
&= \left(\sum_{r=2}^k (x^{-(2r-1)} - x^{2r-1})(-1)^{k-r} \right) + (-1)^{k-1}(x^{-1} - x) \\
&= \sum_{r=1}^k (x^{-(2r-1)} - x^{2r-1})(-1)^{k-r}.
\end{aligned}$$

Para α_{4_k} , $\alpha_{4_k}(z) = -z\alpha_{3_{k-1}} + \alpha_{4_{k-1}}$. Por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
\alpha_{4_k} &= -(x^{-1} - x) \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{(k-1)-i} \right) \\
&\quad + \left(\left[\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{k-1+1-i} \right] + (-1)^{k-1+1} + 1 \right)
\end{aligned}$$

Operando,

$$\begin{aligned}
\alpha_{4_k} &= \sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-2)} - x^{2i})(-1)^{(k-1)-i} - \sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i)} - x^{2i-2})(-1)^{(k-1)-i} \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{k-1+1-i} \right] + (-1)^{k-1+1} + 1 \\
&= - \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2i)} + x^{2i})(-1)^{(k-1)-i} \right) + (-1)^{(k-1)+1} + 1 \\
&= - \left(\sum_{i=1}^{k-1} (x^{-(2(i+1)-2)} + x^{2(i+1)-2})(-1)^{(k-1)-i} \right) + (-1)^{k-1+1} + 1 \\
&= - \left(\sum_{r=2}^k (x^{-(2r-2)} + x^{2r-2})(-1)^{(k-1)-(r-1)} \right) + (-1)^{k-1+1} + 1 \\
&= \left(\sum_{r=2}^k (x^{-(2r-2)} + x^{2r-2})(-1)^{((k-1)+1)+1-r} \right) + (-1)^{k-1+1} + 1 \\
&= \left(\sum_{r=1}^k (x^{-(2r-2)} + x^{2r-2})(-1)^{((k-1)+1)+1-r} \right) + (-1)^{k-1+1} + 1 - 2(-1)^{(k-1)+1}
\end{aligned}$$

Agrupando se obtiene

$$\alpha_{4_k} = \left[\sum_{i=1}^k (x^{-(2r-2)} + x^{2r-2})(-1)^{k+1-r} \right] + (-1)^{k+1} + 1.$$

□

Para obtener el polinomio de Alexander de 3-trenzas, usando el Teorema 3.5, se puede reescribir el Teorema 3.4 con fórmulas no recursivas. Nótese que por ser fórmulas no recursivas, el polinomio de Alexander de 3-trenzas y de enlaces formados con ellas es más sencillo de calcular y se facilita su programación.

Teorema 3.6. *Sea $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces*

- i) $\Delta(\mathcal{T}(2t)) = \alpha_{1_t} \Delta(\chi_1) + \alpha_{3_t} \Delta(\chi_3).$
- ii) $\Delta(\mathcal{T}(2t+1)) = \alpha_{3_t} \Delta(\chi_1) + \beta_t \Delta(\chi_3).$
- iii) $\Delta(\mathcal{T}(-2t)) = \beta_t \Delta(\chi_1) - \alpha_{3_t} \Delta(\chi_3).$
- iv) $\Delta(\mathcal{T}(-(2t-1))) = -\alpha_{3_t} \Delta(\chi_1) + \alpha_{1_t} \Delta(\chi_3)$
- v) $\Delta(\mathcal{T}(0, 2t)) = \Delta(\chi_1) + t(x^{-1} - x) \Delta(\chi_3).$
- vi) $\Delta(\mathcal{T}(0, -2t)) = \Delta(\chi_1) - t(x^{-1} - x) \Delta(\chi_3).$

Donde

$$\beta_t = \left[\sum_{i=1}^t (x^{-(2i)} + x^{2i})(-1)^{t-i} \right] + (-1)^t,$$

$\alpha_{3_0} = \alpha_{4_0} = 0$ y $\alpha_{1_t} = 1 - \alpha_{4_t}$. Para todo $t \in \mathbb{N}$ α_{3_t} y α_{4_t} están definidas en las ecuaciones (3.7) y (3.8) respectivamente.

Demostración: Por el Teorema 3.4 se obtiene el resultado en términos del polinomio de Conway con α_{3_t} y α_{4_t} definidas en las ecuaciones (3.5) y (3.6), y $\beta_t = (\alpha_{1_t} + z\alpha_{3_t})$. Tanto α_{3_t} como α_{4_t} están en forma recursiva y dependen de z . Se calcula β_t , haciendo el cambio de variable $z = (x^{-1} - x)$ y usando las ecuaciones (3.7) y (3.8),

$$\begin{aligned} \beta_t &= (\alpha_{1_t} + z\alpha_{3_t}) \\ &= \left[-\sum_{i=1}^t (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{t+1-i} \right] - (-1)^{t+1} \\ &\quad + z\sum_{i=1}^t (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{t-i} \\ &= \left[-\sum_{i=1}^t (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{t+1-i} \right] - (-1)^{t+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^t (x^{-(2i)} + x^{2i} - x^{-(2i-2)} - x^{2i-2})(-1)^{t-i} \\ &= (-1)^t + \sum_{i=1}^t (x^{-(2i)} + x^{2i})(-1)^{t-i}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.5, tomando $z = (x^{-1} - x)$, se reescriben α_{3_t} y α_{4_t} como las ecuaciones mostradas en (3.7) y (3.8) respectivamente. Además por el Teorema 1.2, $\Delta_L(t) = \nabla_L(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$, tomando $x = t^{\frac{1}{2}}$ se obtiene lo deseado. \square

Nota 6. Se recuerda que $\Delta_L(t) = \nabla_L(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$, y se está tomando $z = (x^{-1} - x)$ donde $x = t^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, cuando el polinomio de Alexander está definido con base en el polinomio de Conway tomando $z = (x^{-1} - x)$ todos sus exponentes son pares.

Se usará el polinomio de Alexander para buscar determinar si un nudo es o no es alternante.

Capítulo 4

De nudos no alternantes a alternantes

Dado un nudo alternante K un problema que surge es calcular el número de nudos no alternantes los cuales tengan una proyección tal que, al cambiar un cruce, se genere el nudo K . O bien otro más restrictivo, calcular el número de nudos casi alternantes los cuales tengan una proyección tal que, al cambiar un cruce, se genere una proyección alternante del nudo K . Para determinar el número de nudos no alternantes los cuales con un cambio de cruce generen un cierto nudo K es necesario generar proyecciones no alternantes con las siguientes condiciones: la proyección debe ser de un nudo y no de un enlace, el nudo al cual represente debe ser no alternante y al cambiarle un cruce genere una proyección del nudo K . Se usará el polinomio de Alexander para determinar si los diagramas de ciertos nudos son de nudos no alternantes, usando para ello el resultado del Teorema 4.1 que aplica para nudos alternantes.

4.1. Nudos no alternantes

El Teorema 4.1 se aplica para nudos y puede ser aplicado para determinar nudos no alternantes.

Teorema 4.1. [10, Teo. 11.5.2] *Supóngase que K es un nudo alternante y*

$$\Delta_K(t) = a_{-m}t^{-m} + a_{-m+1}t^{-m+1} + \dots + a_m t^m$$

es su polinomio de Alexander ($a_m \neq 0 \neq a_{-m}$). Entonces

1. $a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, a_m$ son distintos de cero;
2. el signo de dos coeficientes consecutivos alterna, i.e.,

$$a_i a_{i+1} < 0 \quad (i = -m, -m+1, \dots, m-1).$$

En particular, si K es un nudo tal que en su polinomio de Alexander alguno de sus coeficientes es cero o los signos no alternan, entonces es no alternante.

Debido a que todo nudo alternante tiene proyecciones no alternantes, se verificará que los diagramas construidos en el capítulo 2 sean de nudos no alternantes.

Teorema 4.2. Para todo $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y para todo $k \in \mathbb{N}$ el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante.

Demostración: Por el Teorema 2.1 $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es un nudo y por el Teorema 3.6 se obtiene que $\nabla(\mathcal{T}(2l+1)) = \alpha_{3_l} \nabla(\chi_1) + (\alpha_{1_m} + z\alpha_{3_k}) \nabla(\chi_3)$. Además se tiene que $\nabla(c) = z\nabla(\chi_1) + \nabla(\chi_3)$. Por el Teorema 3.1 se obtiene

$$\nabla(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c) = z\alpha_{3_l} \nabla(\chi_1) + \alpha_{3_l} \nabla(\chi_2) + (z\alpha_{1_l} + z^2\alpha_{3_l}) \nabla(\chi_3) + (\alpha_{1_l} + z\alpha_{3_l}) \nabla(\chi_4).$$

Debido al Corolario 3.1,

$$\begin{aligned} & \nabla(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) \\ &= \alpha_{3_k} (-z(z\alpha_{3_l}) - (z\alpha_{1_l} + z^2\alpha_{3_l})(2+z^2)) + \alpha_{4_k} (2(z\alpha_{3_l}) + z(z\alpha_{1_l} + z^2\alpha_{3_l})) + (\alpha_{1_l} + z\alpha_{3_l}) \\ &= z^2\alpha_{1_l}\alpha_{4_k} - (2z+z^3)\alpha_{1_l}\alpha_{3_k} - (3z^2+z^4)\alpha_{3_l}\alpha_{3_k} + (2z+z^3)\alpha_{3_l}\alpha_{4_k} + \alpha_{1_l} + z\alpha_{3_l} \\ &= z(z\alpha_{1_l}\alpha_{4_k} - (2+z^2)\alpha_{1_l}\alpha_{3_k} - (3z+z^3)\alpha_{3_l}\alpha_{3_k} + (2+z^2)\alpha_{3_l}\alpha_{4_k}) + \alpha_{1_l} + z\alpha_{3_l}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = (x^{-1} - x)$ se obtiene el polinomio de Alexander. Sustituyendo en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} & \Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) = \\ & (x^{-1} - x) \left\{ (x^{-1} - x) \left[- \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{l+1-i} \right] - (-1)^{l+1} \right] \right. \\ & \left[\left[\sum_{i=1}^k (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{k+1-i} \right] + (-1)^{k+1} + 1 \right] \\ & - (x^{-2} + x^2) \left[\left[- \sum_{i=1}^l (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{l+1-i} \right] - (-1)^{l+1} \right] \left[\sum_{i=1}^k (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{k-i} \right] \\ & - (x^{-3} - x^3) \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{l-i} \right] \left[\sum_{i=1}^k (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{k-i} \right] \\ & + (x^{-2} + x^2) \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{l-i} \right] \left[\left[\sum_{i=1}^k (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{k+1-i} \right] + (-1)^{k+1} + 1 \right] \right\} \\ & - \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{l+1-i} \right] - (-1)^{l+1} + (x^{-1} - x) \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1})(-1)^{l-i} \right] \end{aligned}$$

Operando,

$$\begin{aligned} & \Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) = \\ & (x^{-1} - x) \left\{ (x^{-1} - x) \left[- \sum_{i=1}^l (+x^{-(2(i+t)-4)} + x^{2(i+t)-4} + x^{-2(i-t)} + x^{2(i-t)})(-1)^{l+k+2-(i+t)} \right. \right. \\ & - \sum_{t=1}^k (x^{-(2t-2)} + x^{2t-2})(-1)^{l+k+2-t} + \sum_{i=1}^l (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2})(-1)^{l-i} (1 + (-1)^{k+1}) \\ & \left. \left. + (-1)^{(l)} (1 + (-1)^{k+1}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(x^{-2} + x^2) \left[-\sum_{it} (x^{-(2(i+t)-3)} - x^{2(i+t)-3} - x^{-(2(i-t)-1)} + x^{2(i-t)-1}) (-1)^{l+k+1-(i+t)} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{t=1}^k (x^{-(2t-1)} - x^{2t-1}) (-1)^{l+k+1-t} \right] \\
& -(x^{-3} - x^3) \left[\sum_{it} (x^{-(2(i+t)-2)} + x^{2(i+t)-2} - x^{-2(i-t)} - x^{2(i-t)}) (-1)^{l+k-(i+t)} \right] \\
& -(x^{-2} + x^2) \left[\sum_{it} (x^{-(2(i+t)-3)} - x^{2(i+t)-3} + x^{-2((i-t)+1)} - x^{2(i-t)} + 1) (-1)^{l+k+1-(i+t)} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^l (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1}) (-1)^{l-i} (1 + (-1)^k) \right] \Big\} \\
& - \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-2)} + x^{2i-2}) (-1)^{l+1-i} \right] - (-1)^{l+1} + (x^{-1} - x) \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1}) (-1)^{l-i} \right] \\
= & (x^{-1} - x) \left\{ \left[-\sum_{it} (-x^{-(2(i+t)-5)} + x^{2(i+t)-5} + x^{-(2(i+t)-3)} - x^{2(i+t)-3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - x^{-(2(i-t)-1)} + x^{2(i-t)-1} + x^{-(2(i-t)+1)} - x^{2(i-t)+1}) (-1)^{l+k+2-(i+t)} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\sum_{t=1}^k (x^{-(2t-1)} - x^{2t-1} - x^{-(2t-3)} + x^{2t-3}) (-1)^{l+k+2-i} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1} - x^{-(2i-3)} + x^{2i-3}) (-1)^{l-i} \right] (1 + (-1)^k) \right. \\
& \quad \left. + (x^{-1} - x) (-1)^{(l)} (1 + (-1)^{k+1}) \right. \\
& \quad \left. + \left[\sum_{it} (x^{-(2(i+t)-5)} - x^{2(i+t)-5} + x^{-(2(i+t)-1)} - x^{2(i+t)-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - x^{-(2(i-t)-3)} + x^{2(i-t)-3} - x^{-(2(i-t)+1)} + x^{2(i-t)+1}) (-1)^{l+k+1-(i+t)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\sum_{t=1}^k (x^{-(2t+1)} - x^{2t+1} + x^{-(2t-3)} - x^{2t-3}) (-1)^{l+k+1-t} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\sum_{it} (-x^{-(2(i+t)-5)} + x^{2(i+t)-5} + x^{-(2(i+t)+1)} - x^{2(i+t)+1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - x^{-(2(i-t)+3)} + x^{2(i-t)+3} + x^{-(2(i-t)-3)} - x^{2(i-t)-3}) (-1)^{l+k+1-(i+t)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\sum_{it} (x^{-(2(i+t)-5)} - x^{2(i+t)-5} + x^{-(2(i+t)-1)} - x^{2(i+t)-1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + x^{-(2(i-t)+3)} - x^{2(i-t)+3} + x^{-(2(i-t)-1)} - x^{2(i-t)-1}) (-1)^{l+k+1-(i+t)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i+1)} - x^{2i+1} + x^{-(2i-3)} - x^{2i-3})(-1)^{l-i} \right] (1 + (-1)^k) \Big\} \\
& + \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i)} + x^{2i})(-1)^{l-i} \right] + (-1)^l \\
= & (x^{-1} - x) \left\{ \left[\sum_{it} (x^{-(2(i+t)+1)} - x^{2(i+t)+1} + 2x^{-(2(i+t)-1)} - 2x^{2(i+t)-1} \right. \right. \\
& \left. \left. + x^{-(2(i+t)-3)} - x^{2(i+t)-3})(-1)^{l+k+1-(i+t)} \right] \right. \\
& + \left[\sum_{t=1}^k (x^{-(2t-1)} - x^{2t-1} + x^{-(2t+1)} - x^{2t+1})(-1)^{l+k+1-t} \right] \\
& + \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i-1)} - x^{2i-1} + x^{-(2i+1)} - x^{2i+1})(-1)^{l-i}(1 + (-1)^{k+1}) \right] \\
& \left. + (x^{-1} - x)(-1)^l(1 + (-1)^{k+1}) \right\} \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i)} + x^{2i})(-1)^{l-i} \right] + (-1)^l \\
= & \left[\sum_{it} (x^{-(2(i+t)+2)} + x^{2(i+t)+2} + x^{-2(i+t)} + x^{2(i+t)} - x^{-(2(i+t)-2)} - x^{2(i+t)-2} \right. \\
& \left. - x^{-(2(i+t)-4)} - x^{2(i+t)-4})(-1)^{l+k+1-(i+t)} \right] \\
& + \left[\sum_{t=1}^k (x^{-(2t+2)} + x^{2t+2} - x^{-(2t-2)} - x^{2t-2})(-1)^{k+l+1-t} \right] \\
& + \left[\sum_{i=1}^l (x^{-(2i+2)} + x^{2i+2} - x^{-(2i-2)} - x^{2i-2})(-1)^{l-i}((-1)^{k+1} + 1) \right] \\
& + \left[\sum_{i=1}^l (x^{-2i} + x^{2i})(-1)^{l-i} \right] + (-1)^l - (x^{-2} - 2 + x^2)(-1)^{l+1}((-1)^{k+1} + 1)
\end{aligned}$$

Haciendo las sumatorias la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned}
& \Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) \\
= & \left[(2 - x^{-2} - x^2)(-1)^{l+k} + (-x^{-(2l)} - x^{2l} + x^{-(2l+2)} + x^{2l+2})(-1)^k \right. \\
& \left. + (-x^{-(2k)} - x^{2k} + x^{-(2k+2)} + x^{2k+2})(-1)^l + (-x^{-2(l+k)} - x^{2(l+k)} - x^{-(2(l+k)+2)} + x^{2(l+k)+2}) \right] \\
& + \left[(2 - x^{-2} - x^2)(-1)^{l+k+1} + (-x^{-(2k)} - x^{2k} + x^{-(2k+2)} + x^{2k+2})(-1)^{l+1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[((2 - x^{-2} - x^2)(-1)^l + (-x^{-(2l)} - x^{2l} + x^{-(2l+2)} + x^{2l+2}))(1 + (-1)^{k+1}) \right] \\
& + \left[\sum_{i=1}^l (x^{-2i} + x^{2i})(-1)^{l-i} \right] + (-1)^l - (x^{-2} - 2 + x^2)(-1)^{l+1}((-1)^{k+1} + 1) \\
= & (-x^{-2l} - x^{2l} + x^{-(2l+2)} + x^{-(2l+2)}) \\
& + (-x^{-2(l+k)} - x^{2(l+k)} + x^{-(2(l+k)+2)} + x^{(2(l+k)+2)}) \\
& + \left[\sum_{i=1}^l (x^{-2i} + x^{2i})(-1)^{l-i} \right] + (-1)^l
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) & = \left[\sum_{i=1}^l (x^{-2i} + x^{2i})(-1)^{l-i} \right] + (-1)^l \\
& + (-x^{-2l} - x^{2l} + x^{-(2l+2)} + x^{(2l+2)}) \\
& + (x^{-2(l+k)} + x^{2(l+k)} - x^{-(2(l+k)+2)} - x^{(2(l+k)+2)})
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x = t^{\frac{1}{2}}$ se obtiene para todo $l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la ecuación 4.1.

$$\begin{aligned}
\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) & = \left[\sum_{i=1}^l (t^{-i} + t^i)(-1)^{l-i} \right] + (-1)^l \\
& + (-t^{-l} - t^l + t^{-(l+1)} + t^{(l+1)}) \\
& + (t^{-(l+k)} + t^{(l+k)} - t^{-((l+k)+1)} - t^{((l+k)+1)}) \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Para $l > 0$, la expresión se puede reescribir usando el hecho que $(t^{-l} + t^l)$ se elimina cuando $i = l$. Por ello,

$$\begin{aligned}
\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) & = \left[\sum_{i=1}^{l-1} (t^{-i} + t^i)(-1)^{l-i} \right] + (-1)^l \\
& + (+t^{-(l+1)} + t^{(l+1)}) \\
& + (t^{-(l+k)} + t^{(l+k)} - t^{-((l+k)+1)} - t^{((l+k)+1)}) \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Se probará que para todo $k, l \in \mathbb{N}$ el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante. De la ecuación 4.2 se tiene que $\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k}))$ es un polinomio en t cuyos exponentes varían entre 0 y $\pm((l+k)+1)$. Además los coeficientes de los términos con exponentes $\pm l$ son cero. Y para $k \geq 3$ los coeficientes de $\sum_{r=2}^{k-1} (t^{-(l+r)} + t^{(l+r)})$ son cero. Por ello, para todo $l, k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k}))$ tiene coeficientes cero y por el Teorema 4.1 $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante.

Ahora se probará que para todo $k \in \mathbb{N}$ y $l = 0$, el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante. Por la ecuación 4.1 se tiene que $\Delta(N(\mathcal{T}(1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) = (-1 + t^{-1} + t + t^{-(k)} + t^{(k)} - t^{-(k+1)} - t^{(k+1)})$. Sustituyendo $k = 1$, se obtiene $\Delta(N(\mathcal{T}(1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = -1 + 2(t^{-1} + t) - (t^{-2} + t^2)$, además su diagrama tiene 9 cruces. Por la clasificación ya existente de nudos es una proyección del nudo 9_{42} , que es no alternante. Para $k = 2$, se tiene que $\Delta(N(\mathcal{T}(1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^4)) = -1 +$

$t^{-1} + t + t^{-2} + t^2 - (t^{-3} + t^3)$ los coeficientes no alternan. Para $k \geq 3$, se tiene $\Delta(N(\mathcal{T}(1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k}))$ tiene coeficientes cero, debido a ello y por el Teorema 4.1, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $l = 0$, el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante. Por lo tanto para todo $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$ el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante. \square

Corolario 4.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ son distintos entre sí.

Demostración: El polinomio de Alexander es un invariante de enlaces orientados y por la ecuación 4.1 se tiene que

$$\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k_1})) \neq \Delta(N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k_2}))$$

para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ con $k_1 \neq k_2$; por lo tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ son distintos. \square

Teorema 4.3. Para todo $l \in \mathbb{N}$ y para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante.

Demostración: De manera análoga al Teorema 4.2, para todo $l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se obtiene la ecuación 4.3

$$\begin{aligned} \Delta(N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})) &= \left[\sum_{i=1}^l (t^{-(i-1)} + t^{(i-1)}) (-1)^{l-i} \right] + (-1)^l \\ &\quad + 2(-t^{-(l+1)} - t^{l+1} + t^{-(l+2)} + t^{l+2}) \\ &\quad + (t^{-(l+k+1)} + t^{l+k+1} - t^{-(l+k+2)} - t^{l+k+2}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nótese que para todo $l \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene $\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k}))$ es un polinomio en t cuyos exponentes varían entre ± 0 y $\pm(l+k+2)$, los coeficientes de los términos con exponentes $\pm l$ son cero. Además para $k \geq 3$ los coeficientes de $\sum_{r=3}^k (t^{-(l+r)} + t^{l+r})$ son cero. Debido a ello para todo $l \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se obtiene que $\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k}))$ tiene coeficientes cero y por el Teorema 4.1 el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante. \square

Corolario 4.2. Para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $l \in \mathbb{N}$, los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ son distintos entre sí.

Demostración: El polinomio de Alexander es un invariante de enlaces orientados y por la ecuación 4.3, para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ con $k_1 \neq k_2$, se tiene que

$$\Delta(N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k_1})) \neq \Delta(N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k_2}))$$

Por lo tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ son distintos. \square

4.2. Nudos con $\text{alt}(\mathbf{K})=1$

Dado un diagrama de un nudo con n cruces, se tiene que existen n posibilidades para cambiar un cruce y el nudo resultante dependerá de qué cruce se cambie. En particular para los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ y $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ se hará un cambio de cruce en el 3-ovillo c , véase la Figura 4.1 a), tal cambio será en un cruce mostrado en Figura 4.1 b). Note que al cambiar el cruce se obtiene el 3-ovillo en la Figura 4.1 c).

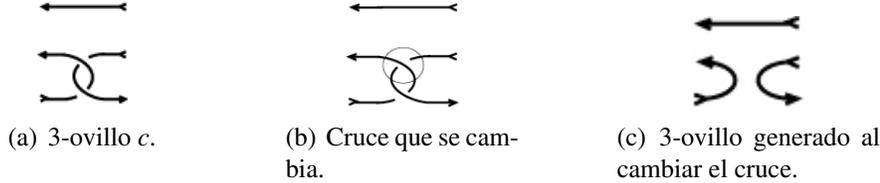


Figura 4.1: 3-ovillo c y un cambio de cruce.

Los siguientes resultados muestran nudos no alternantes que con un cambio de cruce generan un nudo de 2-puentes.

Teorema 4.4. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante y al cambiar un cruce en el 3-ovillo c se vuelve el nudo $A(\mathcal{T}(2l+1))$.*

Demostración: Por el Teorema 4.2, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante. El 3-ovillo c se convierte en el 3-ovillo χ_2 al cambiar un cruce (véase Figura 4.1); por lo tanto los cruces que forman \mathcal{E}^{2k} se contraen y se genera el diagrama $A(\mathcal{T}(2l+1))$, véase Figura 4.2. \square

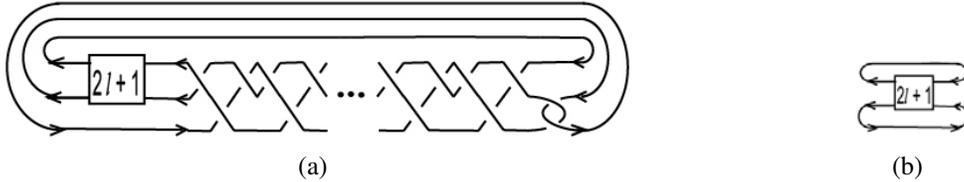


Figura 4.2: En (a) $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ y en (b) $A(\mathcal{T}(2l+1))$.

Teorema 4.5. *Para todo $l \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es no alternante y al cambiar el cruce en el oவில்lo c se vuelve el nudo $A(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2))$.*

Demostración: Análoga a la del Teorema 4.4 usando el Teorema 4.3, véanse Figuras 4.3 y 4.4. \square

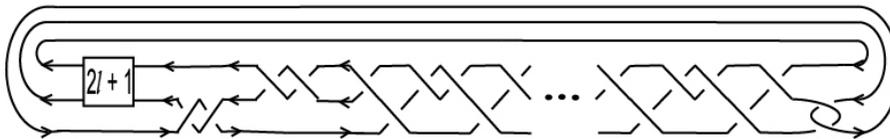


Figura 4.3: $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot \mathcal{E}^{2k})$.

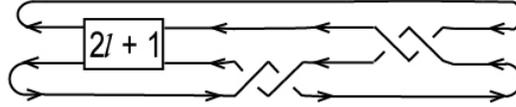


Figura 4.4: $A(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2))$.

Corolario 4.3. Si K es un nudo $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ para $l \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ o el nudo $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ para $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\text{alt}(K) = 1$.

Demostración: Por los Teoremas 4.4 y 4.5, los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ con $k \in \mathbb{N}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ con $l \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son no alternantes que al cambiar un cruce en el 3-ovillo c generan los nudos $A(\mathcal{T}(2l+1))$ y $A(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2))$ respectivamente. Los cuales por ser nudos de 2-puentes tienen la propiedad de ser alternantes. \square

El siguiente resultado muestra la cantidad de nudos no alternantes que con un cambio de cruce producen nudos de 2-puentes.

Corolario 4.4. Si K es un nudo de los siguientes:

1. $A(\mathcal{T}(2l+1))$, con $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
2. $A(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2))$ con $l \in \mathbb{N}$

Entonces el número de nudos no alternantes que al cambiar un cruce los genere es infinita.

Demostración: Por los Teoremas 4.4 y 4.5, los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ con $k \in \mathbb{N}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ con $l \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son no alternantes que al cambiar un cruce en el 3-ovillo c generan los nudos $A(\mathcal{T}(2l+1))$ y $A(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2))$ respectivamente. Además por el Corolario 4.1 para todo $k \in \mathbb{N}$, con $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fija, los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ son distintos y por el Corolario 4.2 para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $l \in \mathbb{N}$ fija, los nudos $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ son distintos. \square

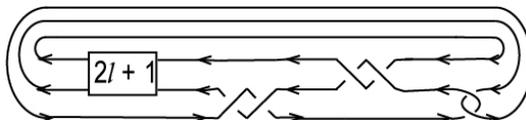
Corolario 4.5. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existen n nudos no alternantes tal que al cambiar un cruce se obtiene el nudo trivial.

Demostración: Por el Teorema 4.4 en la parte 1, tomando $l = 0$, se obtiene el resultado. \square

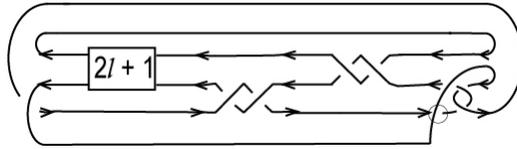
Los nudos no alternantes $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ tienen número de alternancia igual a uno y cuentan con diagramas $2k+1$ casi alternantes.

Teorema 4.6. El diagrama del nudo $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $l \in \mathbb{N}$ fija, es $(2k+1)$ -casi alternante.

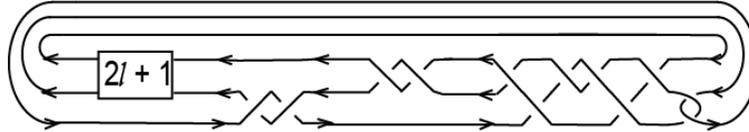
Demostración: Por inducción sobre k , para $k = 0$ el diagrama del nudo $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^0)$ es el siguiente



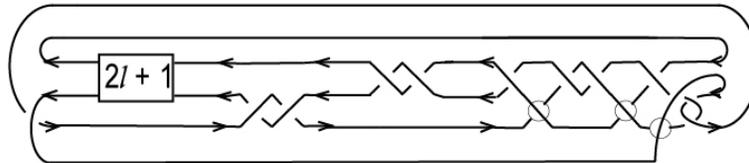
Puede ser transformado al siguiente diagrama, donde se marca el cruce alternador.



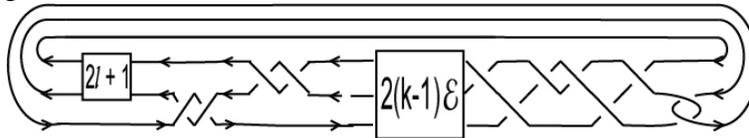
Por lo tanto $N(\mathcal{T}(2l + 1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^0)$ es un diagrama casi alternante. Para $k = 1$, el nudo $N(\mathcal{T}(2l + 1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)$ tiene el diagrama:



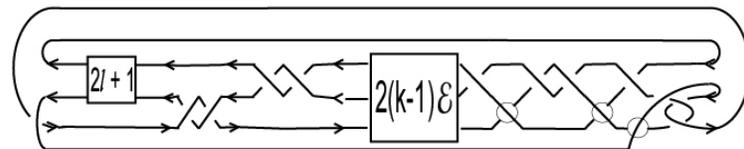
Con el movimiento de una cuerda se obtiene el diagrama siguiente



Se marcan los cruces alternadores, que muestran que es un diagrama 3-casi alternante. Para k , se tiene el diagrama:



Por hipótesis de inducción el diagrama del nudo $N(\mathcal{T}(2l + 1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es $2(k - 1) + 1$ -casi alternante



Por lo tanto el número de cruces alternadores es $[2(k - 1) + 1] + 2 = 2k + 1$ y el diagrama $N(\mathcal{T}(2l + 1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ es $(2k + 1)$ -casi alternante. \square

Nótese que cualquier diagrama de la forma $N(\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$, con $a_i \in \mathbb{N}$, n impar y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tienen un diagrama $(2k + 1)$ -casi alternante.

Capítulo 5

Aplicaciones

Las fórmulas obtenidas en el capítulo 3 sirven para calcular tanto el polinomio de Conway como el de Alexander de 3-ovillos habitantes del 3-cuarto R_1 , así como también para enlaces formados por la cerradura N de tales 3-ovillos. Nótese que en el presente trabajo se calcularon los invariantes polinomiales para 3-ovillos que con la cerradura N formarán nudos y no enlaces. Además se expusieron los casos donde el polinomio de Alexander de tales nudos tuvieran coeficientes cero, esto para poder usar el Teorema 4.1. Se calculará el polinomio de Alexander para el nudo $N(\mathcal{T} \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$, usando el Teorema 4.2 y el Teorema 4.3. Se expresarán en términos de la variable x , pero con el cambio $x = t^{\frac{1}{2}}$ se pueden reescribir.

Ejemplo 5.1. $\Delta(N(\mathcal{T}(1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = -1 + 2(x^2 + x^{-2}) - (x^4 + x^{-4})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^4)) = -1 + (x^2 + x^{-2}) + (x^4 + x^{-4}) - (x^6 + x^{-6})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^6)) = -1 + (x^2 + x^{-2}) + (x^6 + x^{-6}) - (x^6 + x^{-6})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(3) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = -1 + 2(x^4 + x^{-4}) - (x^6 + x^{-6})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(5) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = 1 - (x^2 + x^{-2}) + 2(x^6 + x^{-6}) - (x^8 + x^{-8})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(7) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = -1 + (x^2 + x^{-2}) - (x^4 + x^{-4}) + 2(x^8 + x^{-8}) - (x^{10} + x^{-10})$

Ejemplo 5.2. $\Delta(N(\mathcal{T}(3, 2, 2) \cdot c)) = 1 - (x^4 + x^{-4}) + (x^6 + x^{-6})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(5, 2, 2) \cdot c)) = -1 + (x^2 + x^{-2}) - (x^6 + x^{-6}) + (x^8 + x^{-8})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(3, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = 1 - 2(x^4 + x^{-4}) + 3(x^6 + x^{-6}) - (x^8 + x^{-8})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(5, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = -1 + (x^2 + x^{-2}) - 2(x^6 + x^{-6}) + 3(x^8 + x^{-8}) - (x^{10} + x^{-10})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(9, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = -1 + (x^2 + x^{-2}) - (x^4 + x^{-4}) + (x^6 + x^{-6}) - 2(x^{10} + x^{-10}) + 3(x^{12} + x^{-12}) - (x^{14} + x^{-14})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(9, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^4)) = -1 + (x^2 + x^{-2}) - (x^4 + x^{-4}) + (x^6 + x^{-6}) - 2(x^{10} + x^{-10}) + 2(x^{12} + x^{-12}) + (x^{14} + x^{-14}) - (x^{16} + x^{-16})$

Usando las fórmulas de el Teorema 3.6 y el Teorema 3.1 se obtiene el polinomio de Alexander de 3-trenzas de la forma $\mathcal{T}(a_1, 2a_2, a_3, 2a_4, a_5, \dots, 2a_{n-1}, a_n)$. Con el Corolario 3.1 se obtiene el polinomio de enlaces $N(\mathcal{T}(a_1, 2a_2, a_3, 2a_4, a_5, \dots, 2a_{n-1}, a_n) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$.

Ejemplo 5.3. $\Delta(N(\mathcal{T}(-3, 2, 2) \cdot c)) = 3 - 2(x^2 + x^{-2}) + (x^4 + x^{-4})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(3, 2, -2) \cdot c)) = -5 + 4(x^2 + x^{-2}) - (x^4 + x^{-4})$
 $\Delta(N(\mathcal{T}(3, 4, 4) \cdot c)) = -5 + 3(x^2 + x^{-2}) + (x^4 + x^{-4}) - 3(x^6 + x^{-6}) + 2(x^8 + x^{-8})$

$$\Delta(N(\mathcal{T}(5,4,4) \cdot c)) = 9 - 7(x^2 + x^{-2}) + 3(x^4 + x^{-4}) + (x^6 + x^{-6}) - 3(x^8 + x^{-8}) + 2(x^{10} + x^{-10})$$

$$\Delta(N(\mathcal{T}(3,4,2) \cdot c)) = 1 + (x^2 + x^{-2}) - 3(x^4 + x^{-4}) + 2(x^6 + x^{-6})$$

$$\Delta(N(\mathcal{T}(3,2,4) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = -3 + 2(x^2 + x^{-2}) - (x^6 + x^{-6}) + 3(x^8 + x^{-8}) - (x^{10} + x^{-10})$$

$$\Delta(N(\mathcal{T}(3,2,6) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = 3 - 3(x^2 + x^{-2}) + 2(x^4 + x^{-4}) - 2(x^8 + x^{-8}) + 3(x^{10} + x^{-10}) - (x^{12} + x^{-12})$$

Nótese que:

$$\Delta(N(\mathcal{T}(3,2,2) \cdot c)) = 1 - (x^4 + x^{-4}) + (x^6 + x^{-6}) = \Delta(8_{19})$$

$$\Delta(N(\mathcal{T}(-3,2,2) \cdot c)) = 3 - 2(x^2 + x^{-2}) + (x^4 + x^{-4}) = \Delta(8_{20})$$

$$\Delta(N(\mathcal{T}(3,2,-2) \cdot c)) = -5 + 4(x^2 + x^{-2}) - (x^4 + x^{-4}) = \Delta(8_{21})$$

$$\Delta(N(\mathcal{T}(1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^2)) = -1 + 2(x^2 + x^{-2}) - (x^4 + x^{-4}) = \Delta(9_{42})$$

Donde 8_{19} , 8_{20} , 8_{21} y 9_{42} son los nombres de los primeros nudos no alternantes en las tablas de nudos.

Capítulo 6

Conclusiones

Una de las metas de la teoría de nudos es la clasificación de los mismos. En esta tesis se mostraron nudos de 2-puentes con los cuales se generaron conjuntos infinitos de nudos no alternantes, tales que al cambiar un único cruce se vuelven el nudo de 2-puentes original. Para lo cual se construyeron diagramas no alternantes formados con la cerradura N de la yuxtaposición de una 3-trenza en forma estándar y un 3-ovillo. Al asignarle una orientación a dichos diagramas, formados con 3-trenzas particulares, se genera de forma natural el 3-cuarto R_1 . Se plantearon fórmulas para obtener los polinomios de Conway y Alexander de los diagramas formados y en el caso del polinomio de Alexander son no recursivas. Se probó con el polinomio de Alexander que las familias de nudos $N(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$ y $N(\mathcal{T}(2l+1) \cdot c \cdot \mathcal{E}^{2k})$, mostradas en el capítulo 4, son no alternantes y se proporcionan fórmulas para calcular sus polinomios. Tales nudos no alternantes tienen la característica de tener número de alternancia igual a uno, es decir, con un cambio de cruce se vuelven alternantes y tienen diagramas $(2k+1)$ -casi alternantes. En particular, dado un nudo K que pertenece a las familias $A(\mathcal{T}(2l+1))$ o $A(\mathcal{T}(2l+1, 2, 2))$, se probó que existe un conjunto infinito de nudos no alternantes tales que con un cambio de cruce generan el nudo K .

Bibliografía

- [1] C. C. Adams, *The Knot Book, An elementary introduction to the mathematical theory of knots*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [2] C. C. Adams, J. F. Brock, J. Bugbee, T. D. Comar, K. A. Faigin, A. M. Huston, A.M. Joseph and D. Pesikoff, *Almost alternating links*, *Topol. Appl.* 46 (1992) 151-165.
- [3] H. Cabrera-Ibarra, *On the classification of rational 3-tangles*, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 12 (2003) 921-946.
- [4] Cromwell, Peter R., *Knots and links*, Cambridge University Press, New York, 2004.
- [5] Giller. C.A., *A family of Links and the Conway calculus*, *Trans. AMS* 207 (1982) 75-109.
- [6] S. Horiuchi, Y. Ohyama, *Almost alternating knots producing an alternating knot*, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 19 (4) (2010) 503-507.
- [7] J. Hoste, M. B. Thistlethwaite and J. Weeks, *The first 1,701,936 knots*, *Math. Intelligencer* 20 (4) (1998), 33-48.
- [8] A. Kawachi, *On alternation numbers of links*, *Topol. Appl.* 157 (2010) 274-279
- [9] D. Lizárraga-Navarro, H. Cabrera-Ibarra, and L.Y. Hernández-Villega,. *Computing the Conway polynomial of several closures of oriented 3-braids*, *Topol. Appl.* 159 (2012) 1195-1209.
- [10] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Birkhäuser, 1996.
- [11] K. Murasugi, *On the Alexander polynomial*, *Osaka Math. J.* 10 (1958) 181-189.