



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Estrategias de Control Conmutado Robusto  
para Mitigar Volcadura y Derrape en Vehículos con Ruedas**

Tesis que presenta

**Martín Antonio Rodríguez Licea**

para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias Aplicadas**

en la opción de

**Control y Sistemas Dinámicos**

**Directora de Tesis:**

Dra. Ilse Cervantes Camacho

San Luis Potosí, S.L.P., Diciembre de 2014



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Estrategias de Control Conmutado Robusto para Mitigar Volcadura y Derrape en Vehículos con Ruedas**" presentada para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Martín Antonio Rodríguez Licea** y aprobada el **dieciocho de febrero del dos mil quince** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dra. Hise Cervantes Camacho**  
Director de la tesis

**Dr. Martín Velasco Villa**  
Jurado en el Examen

**Dr. Diego Langarica Córdoba**  
Jurado en el Examen

**Dra. Nancy Visairo Cruz**  
Jurado en el Examen

**Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez**  
Jurado en el Examen



## **Créditos Institucionales**

Esta tesis fue elaborada en el Laboratorio de Sistemas Híbridos de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección de la Dra. Ilse Cervantes Camacho, y el apoyo técnico del M.C. Irwin Allen Díaz Díaz.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro:357742) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 020 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 18 días del mes de febrero del año 2015, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Martín Velasco Villa</b>	<b>Presidente</b>	<b>CINVESTAV</b>
<b>Dra. Ilse Cervantes Camacho</b>	<b>Secretaria</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Diego Langarica Córdoba</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dra. Nancy Visairo Cruz</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Martín Antonio Rodríguez Licea**

sobre la Tesis intitulada:

*Estrategias de Control Conmutado Robusto para Mitigar Volcadura y Derrape en Vehículos con Ruedas*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dra. Ilse Cervantes Camacho**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 14:06 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 18 días del mes de febrero de 2015.

**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

  
**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico



# **Agradecimientos**

Agradezco al CONACYT por otorgarme una beca durante mis estudios en el Doctorado y al IPICYT por brindarme su infraestructura que fue favorable para culminar mis estudios.

# Contenido

<b>Portada</b>	<b>I</b>
<b>Contenido</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>XIV</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XV</b>
<b>Notación</b>	<b>XVII</b>
<b>Acrónimos</b>	<b>XIX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XXI</b>
<b>Abstract</b>	<b>XXIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes del problema de vuelco y derrape lateral . . . . .	1
1.1.1. La medición del riesgo . . . . .	3
1.1.2. Mitigación del riesgo . . . . .	4
1.2. Antecedentes del problema de estabilización . . . . .	5
1.3. Estado del conocimiento . . . . .	6
1.3.1. Estrategias que utilizan diversos actuadores de control . . . . .	8
1.3.2. Enfoques robustos con frenado diferencial . . . . .	9
1.3.3. Estrategias de control predictivo basado en modelo . . . . .	9
1.3.4. Estrategias de control en vehículos comerciales . . . . .	10
1.4. Motivación . . . . .	11
1.5. Objetivos . . . . .	11
1.6. Aportaciones . . . . .	12
1.7. Organización . . . . .	13
<b>2. Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1. Descripción de sistemas politópicos conmutados . . . . .	15
2.1.1. Sistemas conmutados . . . . .	15
2.1.2. Sistemas politópicos . . . . .	19
2.1.3. Sistemas politópicos conmutados . . . . .	23

2.2.	Observaciones sobre la estabilidad de sistemas politópicos conmutados y su relación al diseño de un sistema de seguridad activa. . . . .	24
2.3.	Comentarios finales del capítulo . . . . .	26
<b>3.</b>	<b>Control con retroalimentación de salida para sistemas lineales politópicos</b>	<b>27</b>
3.1.	Control robusto para sistemas inciertos . . . . .	27
3.2.	Control robusto dependiente de la salida para sistemas politópicos . . . . .	29
3.3.	Control robusto dependiente de la salida para sistemas politópicos conmutados .	36
3.4.	Control robusto dependiente de la salida para sistemas politópicos conmutados con subsistemas en lazo abierto . . . . .	42
3.5.	Comentarios finales del capítulo . . . . .	48
<b>4.</b>	<b>Estabilidad de sistemas conmutados con leyes de conmutación predictivas</b>	<b>49</b>
4.1.	Ley de conmutación predictiva dependiente de la salida . . . . .	49
4.2.	Control conmutado por una ley de conmutación predictiva para sistemas inciertos	53
4.3.	Comentarios finales del capítulo . . . . .	58
<b>5.</b>	<b>Modelo dinámico de un vehículo de 4 ruedas.</b>	<b>59</b>
5.1.	Dinámica traslacional . . . . .	59
5.2.	Dinámica rotacional . . . . .	65
5.3.	Modelo completo . . . . .	67
5.4.	Modelo politópico conmutado del vehículo . . . . .	71
5.5.	Observaciones respecto a la implementación . . . . .	78
5.6.	Comentarios finales del capítulo . . . . .	78
<b>6.</b>	<b>Detección integral del riesgo de volcadura y derrape lateral</b>	<b>81</b>
6.1.	Riesgo de volcadura . . . . .	81
6.2.	Riesgo de derrape lateral . . . . .	81
6.3.	Valoración del riesgo ante incertidumbre paramétrica . . . . .	84
6.4.	Ejemplos de evaluación del riesgo . . . . .	84
6.5.	Prueba de estabilidad del sistema de seguridad activa . . . . .	86
6.6.	Comentarios finales del capítulo . . . . .	88
<b>7.</b>	<b>Ejemplo de estudio</b>	<b>93</b>
7.1.	Modelo politópico de un vehículo de 4 ruedas . . . . .	93
7.2.	Diseño del controlador antivuelco y antiderrape con una sola linealización. . . . .	96
7.3.	Diseño del controlador antivuelco y antiderrape con varias linealizaciones. . . . .	97
7.3.1.	Diseño del controlador antivuelco y antiderrape con dos linealizaciones .	98
7.3.2.	Diseño del controlador antivuelco y antiderrape con cuatro linealizaciones	98
7.4.	Simulaciones numéricas . . . . .	99
7.5.	Comentarios finales del capítulo . . . . .	100
<b>8.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>107</b>
8.1.	Conclusiones de la tesis . . . . .	107

8.2. Trabajo futuro . . . . .	108
8.3. Publicaciones . . . . .	109
<b>Anexos</b>	<b>111</b>
A. Definiciones . . . . .	111
B. Teoremas . . . . .	114



# Lista de Figuras

1.1.	Escenarios de riesgo por una considerable fuerza lateral. . . . .	8
2.1.	a. Regiones de operación sin histéresis. b. Regiones de operación con histéresis .	17
3.1.	Algoritmo para el cálculo de $\gamma_{1,max}$ . . . . .	35
3.2.	Ilustración del conjunto invariante al cual las trayectorias convergen en lazo cerrado	36
3.3.	Algoritmo para el cálculo de $\gamma_{1,mc}$ . . . . .	41
3.4.	Algoritmo para el cálculo de $v_{1,mc}$ con modos en lazo abierto . . . . .	47
4.1.	Descripción del procedimiento de prueba ISO 3888-2 “Prueba del Alce” . . . . .	50
4.2.	Comparativa de la respuesta de modelos de chofer de orden uno, dos y tres para la prueba ISO 3888-2 aplicada a un vehículo SUV Cherokee 2000 . . . . .	52
4.3.	Comparativa de la predicción de la salida RI con modelos de chofer de orden uno, dos y tres para la prueba ISO 3888-2 aplicada a un vehículo SUV Cherokee 2000 . . . . .	52
4.4.	Ilustración del efecto de la predicción. . . . .	54
5.1.	Sistemas coordenados utilizados para la descripción de la dinámica del vehículo.	60
5.2.	Modelo de bicicleta. . . . .	64
5.3.	Fuerzas verticales en los puntos de contacto (vista posterior). . . . .	66
5.4.	Fuerzas verticales en los puntos de contacto (vista lateral). . . . .	66
5.5.	Ilustración de la región de validez del modelo, y de la región de no riesgo. El modelo es válido siempre y cuando no ocurra una pérdida de adherencia en la llanta, es decir como el interior de la bola negra más pequeña. La región verde ilustra la región donde el SI y el RI tienen valores considerados seguros. . . . .	71
5.6.	Ilustración del dominio de operación $\mathcal{D}$ . . . . .	75
6.1.	Diagrama esquemático de la elipse de fricción. . . . .	82
6.2.	Diagrama a bloques de la estrategia de control. . . . .	89
6.3.	Skid Index para una maniobra agresiva en un vehículo Clase-E. . . . .	89
6.4.	Skid Index para una maniobra agresiva en un vehículo Porsche 911. . . . .	90
6.5.	Skid Index para una maniobra agresiva en un vehículo U67T. . . . .	90
6.6.	Aproximación lineal del Skid Index sin derrape lateral. . . . .	91
6.7.	Rollover Index para una maniobra agresiva en un vehículo Clase-E con alto centro de gravedad. . . . .	91

7.1.	Predicción de la salida del sistema para una maniobra de cambio de carril en Mercedes Benz Clase-E. . . . .	101
7.2.	Comparativa de desempeño de la estrategia de control con una sola linealización y con varias linealizaciones para un vehículo Mercedes Benz Clase-E. . . . .	101
7.3.	Comparativa de desempeño para diferentes escenarios del controlador, con maniobra de cambio de carril en Mercedes Benz Clase-E. . . . .	102
7.4.	Comparativa de las acciones de control para diferentes escenarios del controlador, con maniobra de cambio de carril en Mercedes Benz Clase-E. . . . .	102
7.5.	Maniobra de cambio de carril que produce un riesgo de vuelco/derrape para varios vehículos. . . . .	103
7.6.	RI y SI para una maniobra de cambio de carril que produce un riesgo de vuelco/derrape en lazo abierto, para un Mercedes Benz Clase E. . . . .	103
7.7.	RI y SI para una maniobra de cambio de carril que produce un riesgo de vuelco/derrape en lazo abierto, para un Porsche GT. . . . .	104
7.8.	RI y SI para una maniobra de cambio de carril que produce un riesgo de vuelco/derrape en lazo abierto, para un Mitsubishi U67. . . . .	104
7.9.	Comparativa de ángulo de giro lazo abierto vs lazo cerrado. . . . .	105

# Lista de tablas

4.1. Índice de desempeño (4.3) como función del orden del modelo del conductor para una maniobra de ISO 3888-2. . . . .	51
5.1. Nomenclatura . . . . .	61
6.1. Parámetros de los Vehículos . . . . .	88
7.1. Índice de Sensibilidad . . . . .	105
7.2. Comparativa de márgenes de estabilidad obtenidos con varias linealizaciones . .	106

# Notación

$\mathbb{0}_n$ : Cero vector de dimensión  $n$  con todas sus entradas cero.

$\mathbb{0}_{n \times n}$ : Cero matriz de dimensión  $n \times n$  con todas sus entradas cero.

$\mathbb{I}_n$ : Vector identidad de dimensión  $n$ , con todas sus entradas uno.

$\mathbb{I}_{n \times n}$ : Matriz identidad de dimensión  $n \times n$  con las entradas de la diagonal uno.

$\mathfrak{D}^{[d]}$ :  $d$ -ésimo elemento del vector  $\mathfrak{D}$ .

$\mathfrak{E}'$ : Es la matriz transpuesta de  $\mathfrak{E}$

$\mathbb{N}$ : Conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Q}$ : Conjunto de los números racionales.

$\mathbb{R}^n$ : Espacio euclidiano  $n$ -dimensional.

$\mathbb{Z}$ : Conjunto de los números enteros.

$\|x\|$ : Norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ .

$\forall$ : “Para todo”.

$\exists$ : “Existe”.

$|$ : “Tal que”.

$\wedge$ : “y” (conjunción).

$\vee$ : “o” (disyunción).

$FL$ : Subíndice para identificar la rueda frontal izquierda.

$FR$ : Subíndice para identificar la rueda frontal derecha.

$RL$ : Subíndice para identificar la rueda posterior izquierda.

$RR$ : Subíndice para identificar la rueda posterior derecha.

$F_{Zij}$ : Fuerza Vertical en el  $ij$ -ésimo punto de contacto suelo llanta, con  $ij \in \{FL, FR, RL, RR\}$ .

$F_{Sij}$ : Fuerza lateral en el centro de la rueda.

$F_{Xij}, F_{Yij}$ : Fuerza longitudinal, lateral en el punto de contacto de la rueda.

$F_{Lij}$ : Fuerza de aceleración/frenado en la rueda.

$x$ : Vector de estados del sistema dinámico del vehículo.

$v$ : Vector de entradas de control del sistema dinámico del vehículo.

$w$ : Vector de entradas exógenas del sistema dinámico del vehículo.

$y$ : Vector de salidas del sistema dinámico del vehículo para propósitos de control.

$z$ : Vector de salidas del sistema dinámico del vehículo para propósitos de medición de desempeño.

$RI$ : Índice de Volcadura o Rollover Index.

$SI$ : Índice de Derrape o Skid Index.

$\alpha_{ij}$ : Ángulo de deriva lateral en la rueda.

$\beta$ : Ángulo de deriva lateral del chasis.

$\delta_{wL}, \delta_{wR}$ : Ángulo en la rueda frontal izquierda, derecha.

$\psi$ : Ángulo de giro o Yaw.

$\chi$ : Ángulo de cabeceo p Pitch.

$\phi$ : Ángulo de alabeo o Roll.

$\phi_{Road}$ : Ángulo de peralte del camino.

$\chi_{Road}$ : Ángulo de pendiente del camino.

$a_x, a_y$ : Aceleración longitudinal, lateral del COG.

# Acrónimos

**ABS:** Anti-lock Braking System.

**BIBO:** Bounded Input Bounded Output.

**CoG:** Center of gravity.

**ECU:** Electronic Control Unit.

**ESC:** Electronic Stability Control.

**ESP:** Electronic Stability Program.

**FWD:** Front Wheel Drive.

**GPS:** Global Positioning System.

**HIL:** Hardware-in-the-loop.

**ISA:** Intelligent Speed Adaptation.

**LMI:** Linear Matrix Inequalities.

**LQR:** Linear Quadratic Regulator.

**LTR:** Load Transfer Ratio.

**MPC:** Model Predictive Control.

**NMPC:** Non-linear Model Predictive Control.

**RI:** Rollover Index.

**RSC:** Roll Stability Control.

**RWD:** Rear Wheel Drive.

**SI:** Skid Index.

**SUV:** Sport Utility Van.

**TCS:** Traction Control System.

# Resumen

En esta tesis se estudian los problemas de volcadura no lanzada, derrape lateral, así como un tipo de volcadura lanzada inducida por derrape lateral, bajo un enfoque de estabilidad robusta entrada-salida que utiliza una representación conmutada para la dinámica de un vehículo de 4 ruedas. Se introduce un criterio de medición del riesgo de derrape y de volcadura que se utiliza como la salida del sistema conmutado para propósitos de control. La conmutación se obtiene en función de la existencia del riesgo en la maniobra del conductor; si el riesgo es inminente se aplican acciones de frenado y tracción/propulsión diferenciales para mitigar el riesgo, por lo que el control no es invasivo.

El problema de control se formula como el diseño de acciones de frenado y aceleración que garanticen que el vehículo se encuentra en un régimen seguro de manejo. El objetivo de control se complica por la presencia de incertidumbre de modelado en el sistema, la cual depende del tipo de terreno, de la suspensión, del tipo de llanta y del tipo de vehículo entre los más relevantes. La ley de control que se acciona bajo riesgo inminente, se modifica con el uso de un sistema predictivo de riesgo para mejorar el desempeño y se establecen las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del sistema. En resumen, esta tesis se enfoca en el estudio de condiciones de estabilidad y en el diseño de estrategias de conmutación estabilizantes para los casos en donde existe o no predicción del riesgo de la maniobra.

**Palabras claves:** Mitigación de riesgo de derrape lateral, mitigación de riesgo de vuelco, sistemas conmutados, incertidumbre paramétrica, control robusto.

# Abstract

This Thesis studies the tripped rollover and lateral skid problems as well as a kind of non-tripped rollover induced by lateral skid. The input-output robust stability of the system is established using a piecewise linear description of the wheeled vehicle and the definition of a rollover and skid indexes. The skid index is proposed based on the well-known friction ellipse along with some considerations regarding vertical dynamics of the system. The rollover and skid risks are evaluated continuously using measurements of vehicle's side slip, yaw and roll angles and they are used to define the switching criterion to guarantee the stability of the system. The proposed control is not invasive since braking and traction/propulsion actions are only performed if an imminent risk is detected.

The control problem is formulated as the synthesis of braking and accelerating actions that guarantee stability in spite of model uncertainty, parameter variations, fast switching actions and bounded control inputs. The model uncertainty arises from an imperfect description of the vehicle dynamics, and estimation mismatches of the vehicle parameters depending on the type of terrain, the type of tire, the vehicle suspension among others.

In order to further improve the performance of the control, predictive actions on drivers maneuvering is included using a first order linear model. The resulted predictive switched robust linear controller proves to be sufficient to mitigate both rollover and skid and displays less conservative control actions since the control is performed only if a risk is foreseen within a designer-fixed time horizon.

**Key words:** Lateral skid mitigation, rollover mitigation, switched system, parametric uncertainty, robust control.



# 1. Introducción

*En esta sección se establece la motivación de esta Tesis, los problemas considerados y su relevancia en la actualidad. Además, se realiza una revisión bibliográfica de trabajos relacionados y se concluye con la descripción de la estructura de la Tesis.*

## 1.1. Antecedentes del problema de vuelco y derrape lateral

El uso de vehículos como medio de transporte se ha vuelto indispensable en nuestra vida cotidiana; conservar la integridad de las personas durante este trayecto es un tema que día a día adquiere más relevancia y los mecanismos para preservarla gradualmente requieren ser más sofisticados y eficientes.

Es indudable que el diseño de controles automáticos ha sido un factor clave en la innovación tecnológica de estos mecanismos. Por medio del control automático se pueden realizar labores en una fracción del tiempo que un humano requiere y con mayor precisión, por lo que a un controlador automático se le delegan actividades que involucran riesgo, precisión y rapidez en los más diversos escenarios, como en el caso de vehículos motorizados.

Múltiples mecanismos para la preservación de la integridad de las personas son incorporados y ofrecidos comercialmente como parte integral del vehículo. Tales sistemas son evaluados experimentalmente, incluso por las instancias gubernamentales competentes, proveyendo evidencia de su eficacia. Los sistemas de control automático usualmente son los encargados de la optimización del consumo de combustible, de la reducción de emisiones contaminantes, de los sistemas de seguridad pasiva o activa, de confort o de conveniencia entre otros.

Un sistema de seguridad pasiva en un vehículo motorizado es un mecanismo que busca la protección de los ocupantes durante una colisión, mientras un sistema de seguridad activa es un mecanismo de prevención de una colisión. Por ejemplo, el cinturón de seguridad es un sistema de seguridad pasivo y su uso por los ocupantes de cierto tipo de vehículos es obligatorio en algunos países; el sistema de frenado antibloqueo (ABS) es un dispositivo de seguridad activa y su implementación en vehículos nuevos es obligatoria en algunos países como Estados Unidos.

Una buena relación costo beneficio de un sistema de seguridad pasiva o activa es indispensable para que su uso sea obligatorio o incluido en la producción del vehículo. Por ejemplo en E.U.A. existen requisitos muy estrictos para que un dispositivo de seguridad activa sea obligatorio, estos requisitos son esencialmente acerca de su relación costo-beneficio. También en E.U.A., la National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA) es una agencia dependiente del gobierno encargada de promover los estándares y normas legislativas relacionadas al uso de vehículos en

carreteras.

En la actualidad, existen dispositivos de seguridad activa basados en control automático disponibles comercialmente en ciertos vehículos bajo diferentes denominaciones dependiendo del fabricante. Por ejemplo, el sistema de frenado antibloqueo (ABS), el control de estabilidad electrónica (ESC), el sistema de control de tracción (TCS), el sistema de asistencia de velocidad (ISA), entre otros.

Cada dispositivo de seguridad activa tiene una función específica. Por ejemplo durante el frenado de un vehículo, puede ocurrir una pérdida de adherencia de las llantas con el suelo. En el transcurso del frenado, el ABS busca reducir la posibilidad de que exista una pérdida de adherencia de las llantas con el suelo, inhibiendo el frenado de manera intermitente en la(s) rueda(s) que rueden a una velocidad menor a la esperada. La pérdida de adherencia de alguna de las llantas puede provocar que el conductor pierda el control del vehículo y provocar un accidente.

Prevenir la volcadura es un tema de fundamental interés en esta Tesis. La volcadura es un tipo de accidente en el que un vehículo termina su movimiento instantes después de perder el contacto de sus llantas con el suelo y es un problema muy serio en el área de transporte, ya que causa un número considerablemente mayor de heridas fatales que otros tipos de accidentes [1]. En la literatura los términos “volcadura lanzada” y “volcadura no lanzada” se usan dependiendo si se origina por la influencia del camino u obstáculos en el mismo o solamente por una maniobra mal ejecutada, respectivamente. El derrape lateral es considerado una causa de volcadura lanzada; sin embargo a pesar de ello el problema de derrape lateral ha sido poco estudiado de manera conjunta con el de volcadura.

La función de prevenir el derrape lateral es también un tema de fundamental interés en esta Tesis. Con la finalidad de establecer lo que es un derrape lateral, considere los términos sobreviraje y subviraje. Un sobreviraje se puede ver como el fenómeno de deslizamiento o derrape del eje trasero que ocurre en un automóvil al tratar de tomar una curva o cuando éste ya está virando. Un subviraje se produce cuando el vehículo pierde adherencia o derrapa en el tren delantero de un automóvil al tratar de tomar una curva o cuando ya está girando. En esta Tesis se estudia el fenómeno de derrape por sobreviraje y por subviraje de manera conjunta y en lo que sigue se utilizará derrape lateral para referirse a la pérdida de adherencia en un sobreviraje y/o en un subviraje.

Los dispositivos de seguridad activa con la función específica de mitigar la volcadura o vuelco (Rollover) son poco comunes en vehículos comerciales de 4 ruedas y se les encuentra en vehículos de lujo con un alto costo de venta [2]. Por ejemplo la marca Mercedes Benz ofrece el sistema de seguridad activa Adaptive ESP para algunos de sus vehículos y presume mitigar la volcadura y el derrape lateral. Ford anuncia el sistema de seguridad activa de mitigación de derrape lateral AdvanceTrac con la opción antivuelco RSC para la Explorer y la Expedition Limited, se presume que este sistema incrementa la protección contra volcadura. Chevrolet ofrece el sistema de seguridad activa StabiliTrak sin embargo no se compromete a la mitigación de la volcadura al igual que otras marcas.

En contraste, existen una gran variedad de dispositivos de seguridad pasiva con la función espe-

cífica de aminorar los perjuicios a los ocupantes cuando ocurre la volcadura, como son bolsas de aire, barras antivuelco, etc.

Por otro lado, se pueden encontrar en vehículos convencionales dispositivos de seguridad activa para evitar el derrape lateral conocidos como Control de Estabilidad, Programa de Estabilidad Electrónico, Estabilidad de Tracción, etc.; los dispositivos de seguridad activa para evitar el derrape lateral son obligatorios en vehículos nuevos que se comercializan en los Estados Unidos de categoría turismo, vehículo industrial ligero, autobús, vehículo industrial mediano y pesado a partir de noviembre de 2014.

**Observación 1.1.** *Es muy importante diferenciar a los sistemas de seguridad activa que tienen la función de evitar el derrape lateral (ESC, ESP, etc.), de los sistemas de seguridad activa que tienen la función de evitar la volcadura, ya que si bien son problemas íntimamente relacionados, no son equivalentes . Como ejemplo, puede ocurrir una volcadura sin que ocurra un derrape lateral y viceversa. En la Sección 6 se estudia la relación que existe entre los problemas de volcadura y derrape lateral.*

El grupo de prevención de accidentes (Crash Avoidance) de la NHTSA, actualmente dirige investigación y pruebas para examinar cuestiones referentes al riesgo de volcadura y hoy en día a pesar de repetidos esfuerzos por regular las especificaciones vehiculares respecto al riesgo de vuelco, existen en el mercado vehículos nuevos con una alta probabilidad de volcadura. En [3] se presentan al público consumidor valoraciones de diferentes tipos de riesgo en condiciones controladas de vehículos comerciales, entre estos riesgos el de volcadura, y existen vehículos de fabricación reciente calificados como de alto riesgo de vuelco. Cabe mencionar que ninguna de las instituciones mencionadas anteriormente cuenta con regulación o evaluación de riesgo de derrape lateral.

### 1.1.1. La medición del riesgo

En los más de 5 millones de accidentes de vehículos automotores en el año 2012 en los Estados Unidos, 2,362,000 personas resultaron con heridas. Por otro lado del número total de decesos en accidentes automovilísticos, el 31 % (6763 decesos) fueron por volcadura. Del total de volcaduras, el 31 % involucró una SUV, el 26 % una pickup, el 15 % una VAN, el 16 % automóviles y el resto (12 %) en vehículos de otro tipo ([1]). En los más de 5 millones de accidentes de vehículos automotores en el año 2007, las acciones correctivas intentadas por los conductores para evitar la volcadura fueron el 69 % fue sobre la dirección del vehículo, el 22 % no tuvo tiempo de reaccionar y solo el 9 % intentó frenar ([4]).

La preocupación por estas estadísticas ha sido considerable desde hace años. Para ayudar a los consumidores y en general a los pasajeros a evaluar la posibilidad de volcadura de su vehículo,

la NHTSA de los Estados Unidos desarrolló desde el año 2000 el índice o factor de estabilidad estática SSF (Static Stability Factor) que equivale aproximadamente a la relación entre la mitad del ancho del vehículo contra su altura. Vehículos con un bajo factor de estabilidad estática lo tienen camionetas y camiones. Este índice fue cuestionado por la industria automotriz puesto que no considera la flexión de la suspensión, la flexión de las llantas, ni el efecto de sistemas electrónicos de seguridad activa, por lo que se buscan estrategias más confiables para evaluar la posibilidad de volcadura ([5]).

Posteriormente el Congreso de los Estados Unidos solicita a la NHTSA que añada pruebas dinámicas para aportar información suficiente al consumidor referente al riesgo de volcadura de un vehículo y añade al SSF una serie de pruebas dinámicas, para luego presentar los resultados al consumidor en forma de escala de una a cinco estrellas, donde un vehículo con 5 estrellas es el menos propenso al vuelco. Algunos vehículos de hoy en día no son mucho mejores en lo que respecta a la posibilidad o riesgo de volcadura, un ejemplo es el modelo 4Runner 2013 de Toyota, con sólo 3 de 5 estrellas en riesgo de volcadura.

En lo que respecta a la legislación, el Consejo de Viceministros de Canadá, responsable por la seguridad en el transporte y carreteras, en el año 2002 publicó un estándar de desempeño vehicular para los integrantes del Tratado de Libre Comercio, donde se propone como medida del riesgo de vuelco la razón de transferencia de carga (Load Transfer Ratio LTR), conocido en la literatura también como índice de volcadura (Rollover Index RI). El RI es un valor que establece que tan cerca se encuentra un vehículo de volcarse y puede ser interpretado como una medida del desequilibrio entre las fuerzas verticales en los puntos de contacto de las llantas con el suelo, tal como se puede ver en la siguiente definición [6]:

$$RI = LTR = \frac{\sum F_{ZL} - \sum F_{ZR}}{\sum F_{ZL} + \sum F_{ZR}}. \quad (1.1)$$

En la Ecuación (1.1),  $F_{ZL}$ ,  $F_{ZR}$  son la suma de las fuerzas verticales en los puntos de contacto suelo-llanta izquierdos y derechos respectivamente. Valores de  $|RI|$  por debajo de 0.6 son considerados como seguros mientras  $|RI| = 1$  indica un riesgo inminente de vuelco. El  $RI$  puede ser utilizado para describir el riesgo de vuelco en cualquier vehículo de 4 ruedas ya que está relacionado con un balance de fuerzas.

### 1.1.2. Mitigación del riesgo

En la última década se han presentado numerosos estudios y mecanismos de control para evitar el vuelco o el derrape lateral de vehículos. Existen estudios que proponen mecanismos simples como una alarma, hasta sistemas complejos y costosos que involucran suspensión activa, diferencial activo y dirección eléctrica entre otros.

Desafortunadamente una alarma de tiempo para volcadura ([7]) por sí sola no es suficiente para mitigar el riesgo, ya que el tiempo de respuesta de un ser humano y su experiencia como conductor son factores decisivos. Los eventos y circunstancias que dan lugar a un accidente de volcadura

pueden ocurrir en fracciones de segundo y aunque la alarma sea efectivamente activada ante una situación de riesgo de vuelco, el tiempo de respuesta del conductor debe ser instantáneo para intentar compensar o tomar una acción correctiva ante el riesgo. Aún más, la acción correctiva que el conductor efectúa puede no ser la más adecuada para el propósito de mitigar el riesgo y tal elección depende de su experiencia como conductor.

Debido a lo anterior es necesario establecer políticas de control activo donde usualmente se involucra frenado diferencial y/o dirección eléctrica y/o suspensión activa entre otros para lograr compensar efectivamente la inexperiencia del conductor ante una situación de riesgo. Las propuestas de sistemas de seguridad activa que involucran suspensión activa para mitigar el vuelco, resultan en un alto costo de implementación en vehículos que no disponen de la misma y los vehículos que la incorporan de fábrica son vehículos de lujo, de alto costo y/o poco convencionales. Por otro lado si el vehículo dispone de suspensión activa, el sistema anti-vuelco interferiría de manera permanente con la función principal para la cual fue añadida la suspensión activa, por ejemplo estabilidad lateral, confort, etc.

Vehículos con diferencial activo son poco comunes y con tecnología aún en desarrollo como por ejemplo, vehículos militares. La aplicación de propuestas de seguridad activa antivuelco en vehículos convencionales de 4 ruedas resulta inconveniente como estrategia de control ya que tienen un alto costo de implementación por el desarrollo tecnológico requerido.

Por otro lado, los sistemas de dirección activa puramente eléctrica no han tenido gran aceptación entre los fabricantes de automotores y por la sociedad en general. A lo largo de los años, son poco aceptados estos sistemas debido a que fallas en sus componentes pueden imposibilitar al conductor de manipular la dirección del vehículo, por lo que no son una alternativa viable como medio de control.

Por otro lado el frenado diferencial puede utilizarse en cualquier vehículo que tenga frenos ABS y constituyen una alternativa viable como sistema de seguridad activa anti-vuelco o anti-derrape lateral. Esto es debido a que una gran parte del parque vehicular incorpora de fábrica el sistema de frenado anti-bloqueo en las 4 ruedas, a diferencia de sistemas de suspensión activa o diferencial activo. La tecnología ABS permite de manera relativamente sencilla realizar un frenado diferencial a través de sus dispositivos de distribución de frenado y su aplicación se puede realizar a un costo menor en comparación con otras estrategias.

## **1.2. Antecedentes del problema de estabilización**

Las descripciones matemáticas existentes de un vehículo de 4 ruedas incluyen parámetros que no son medibles de manera directa por medio de sensores o que pueden cambiar considerablemente en diferentes escenarios; por ejemplo condiciones del camino, climáticas, situaciones de estrés mecánico de la estructura del vehículo, etc. A este desconocimiento de los valores de los parámetros se le conoce como incertidumbre paramétrica. La incertidumbre paramétrica puede tener un efecto adverso en la estabilidad del sistema y en la complejidad de diseño del control. Se sabe que

si la variación paramétrica es arbitrariamente grande en un sistema lineal, no se puede decidir si las soluciones del sistema están acotadas [8]. Sin embargo, si la variación paramétrica es acotada, la teoría de control robusto nos da la posibilidad de asegurar el acotamiento de las trayectorias. Debido a lo anterior el uso de controladores robustos es deseable en aplicaciones vehiculares; además que los comportamientos altamente no lineales son difíciles de describir. Modelos no-lineales exhaustivos no pueden ser utilizados para propósitos de control pues el problema se vuelve matemáticamente intratable. En su lugar se utilizan modelos no-lineales simplificados o modelos lineales por pedazos para describir la dinámica del vehículo y simplificar la síntesis del control, así como su estudio de estabilidad ([9]-[10]).

En particular un sistema de seguridad activa antivuelco y antiderrape lateral puede ser descrito con una dinámica lineal por pedazos, también llamada híbrida o conmutada. En esta descripción, el modelo consta de un número finito de aproximaciones lineales del sistema en ciertos puntos de operación. Para el caso de sistemas conmutados existen resultados relacionados con la estabilidad robusta sólo para determinadas estructuras de sistemas que no necesariamente concuerdan con la descripción de un vehículo de 4 ruedas.

### **1.3. Estado del conocimiento**

En secciones anteriores se estableció en que consiste el problema de volcadura. Con el fin de introducir la revisión bibliográfica acerca de los problemas de mitigación de volcadura y derrape lateral, a continuación se mencionan trabajos relevantes que lidian con la detección del riesgo de volcadura y/o derrape lateral.

Como se mencionó en secciones anteriores, se ha propuesto el llamado tiempo para volcadura, es decir un tiempo estimado en el cual se prevé la volcadura dada la dinámica previa y actual del vehículo. La estimación del tiempo para volcadura utiliza un modelo simplificado de 4 grados de libertad que es validado con simulaciones de software ArcSim. ArcSim es un programa de simulación desarrollado en el Centro de Investigación Vehicular de la Universidad de Michigan, y se considera que ArcSim puede predecir la aceleración lateral y el ángulo de alabeo del chasis con precisión suficiente. Dado que el modelo cambia cuando ocurre un levantamiento del eje de alguna llanta, en las simulaciones de este trabajo sólo se utiliza el modelo previo al levantamiento de cualquier eje.

En [11] se calcula un umbral de aceleración lateral del chasis y se realiza un análisis basado en frecuencia para mostrar el efecto en el riesgo de vuelco, de la rigidez de torsión del chasis y de la resistencia de rodamiento. Sin embargo este umbral es un cálculo estático en el que se desprecia el efecto dinámico de la suspensión y de las llantas.

En [12] se examinan los efectos en el riesgo de vuelco de algunos parámetros de diseño de la suspensión incluyendo efectos de desplazamiento del centro de gravedad, efectos de levantamientos por baches o topes y fuerzas giroscópicas entre otros. En [13] también se examinan diferentes factores de riesgo de vuelco como variaciones en la carga (masa) del vehículo.

En [14] se proponen dos criterios de detección del riesgo de vuelco lanzado estimados a partir de la energía cinética rotacional y la energía cinética inicial. El efecto de la suspensión, características de la llanta, entre otros factores no son considerados. En [15] se desarrolla un indicador de vuelco para vehículos todo terreno que incluye condiciones de pérdida de adherencia de las ruedas con el suelo. En [16] se realiza una evaluación experimental de una descripción simple del riesgo de volcadura basado en un modelo lineal sin suspensión y se obtiene una estimación a futuro del riesgo. En [17] los autores presentan una estrategia de detección simultánea de volcaduras lanzadas y no lanzadas que puede ser implementada de manera sencilla en un circuito electrónico con el uso de acelerómetros. Además presentan un análisis de similaridad dinámica de un vehículo a escala con uno de dimensiones reales con base en el Teorema de Buckingham<sup>1</sup>, en la que basan su experimentación con un vehículo a escala, ilustrando buenos resultados. Posteriormente en [18] los mismos autores presentan un observador no lineal para la misma estrategia de detección de vuelco. En [19], los autores presentan una estimación del riesgo de volcadura que considera el efecto de la suspensión y la deformación lateral de la llanta como un desplazamiento del centro de gravedad.

Indudablemente estos antecedentes son parte fundamental de investigaciones recientes respecto a la estimación del riesgo de volcadura. Sin embargo, solamente la detección de un riesgo de vuelco, no es suficiente para mitigar la volcadura. Aún si se detectara el riesgo, los eventos y circunstancias que dan lugar a un accidente de volcadura pueden ocurrir en fracciones de segundo y el tiempo de respuesta de un ser humano así como su experiencia como conductor son factores decisivos para lograr evitar el accidente.

Por otro lado, se han adoptado sistemas de seguridad activa de estabilidad lateral en vehículos comerciales, inclusive obligatoriamente en países como Australia. Ejemplos de estos tipos de sistemas de seguridad activa son el Control de Estabilidad Electrónico (ESC), el Programa Electrónico de Estabilidad (ESP), entre otros. Actualmente nuevas técnicas siguen siendo desarrolladas para asegurar que el derrape lateral se evite a todo momento por medio de la implementación de algún sistema de seguridad activa.

Además de lo anterior no existen trabajos relacionados con la estimación del riesgo de derrape lateral, el cual como se mencionó anteriormente puede ser causa de una volcadura lanzada. El problema conjunto de derrape lateral y volcadura ha sido poco estudiado a pesar de ser problemas íntimamente relacionados, ver por ejemplo [15], [20],[21],[22] y [23]. Esto es, si se realiza una maniobra agresiva en el volante de un vehículo a alta velocidad, éste tiende a derrapar y/o volcarse (en cualquier orden de sucesos) dependiendo de diversos factores como: características del vehículo, del camino, de las llantas, etc.

Considere la ilustración mostrada en la Figura 1.1. Si las fuerzas laterales que son ejercidas en el chasis del vehículo son de cierta magnitud y dirección pueden lograr que el chasis gire (alabeo) hasta levantar las ruedas de un costado, como en la ilustración izquierda de la Figura 1.1

---

<sup>1</sup>El teorema establece que dada una relación física expresable mediante una ecuación en la que están involucradas  $n$  magnitudes físicas o variables, y si dichas variables se expresan en términos de  $k$  cantidades físicas dimensionalmente independientes, entonces la ecuación original puede escribirse equivalentemente como una ecuación con una serie de  $n - k$  números adimensionales construidos con las variables originales.

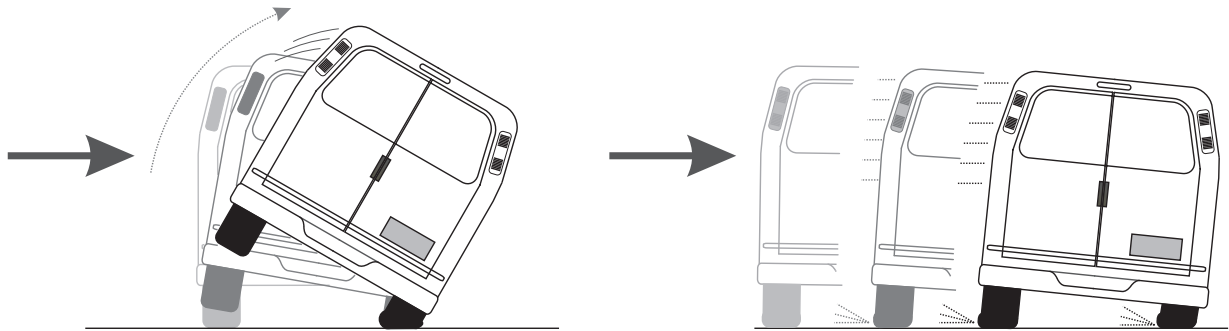


Figura 1.1.: Escenarios de riesgo por una considerable fuerza lateral.

o que se deslice lateralmente sobre el camino como en la ilustración derecha de la Figura 1.1 o una combinación de ambas. Las circunstancias y factores que determinan si el chasis gira o se desliza lateralmente son muy diversos y podemos destacar la altura del centro de gravedad, el coeficiente de fricción suelo-llantas, el tipo de llanta y la capacidad de amortiguamiento de la suspensión, entre los factores más importantes que afectan el escenario de riesgo. En la Sección 6 se estudia la relación que existe entre los problemas de volcadura y derrape lateral.

El derrape lateral de un vehículo es un fenómeno definido en la literatura como la pérdida de adherencia de alguna de las ruedas del vehículo con el suelo, ver por ejemplo [24], [25] *et al.* Sin embargo la pérdida de adhesión o adherencia de todas las ruedas mientras el vehículo se desplaza lateralmente ha sido poco estudiada y aún menos se ha estudiado su relación con el problema de volcadura de manera explícita. El fenómeno de pérdida de adhesión o adherencia mientras el vehículo se desplaza lateralmente será entendido como derrape lateral, y en esta Tesis se estudia su relación con el problema de volcadura. A continuación se presenta una revisión de algunos de los trabajos más relevantes que versan sobre mitigación de volcadura y derrape lateral.

### 1.3.1. Estrategias que utilizan diversos actuadores de control

Retomando el estudio de [16], en este se propone la estimación a futuro del índice de volcadura y su mitigación utilizando la técnica de control predictivo basado en modelo. La propuesta utiliza un diferencial activo como actuador y muestra con simulaciones su efectividad.

En [26] se propone un algoritmo de control que está constituido por un supervisor, el cual le da las referencias a los controladores que actúan sobre una suspensión activa y un actuador de frenado diferencial. El control del frenado diferencial es de tipo cascada con dos niveles: superior e inferior que funcionan por medio de optimización. Aunque en el artículo se muestra con simulaciones que el controlador es efectivo tal estrategia hace uso de suspensión activa la cual no siempre está disponible en un vehículo de producción en serie.

En [27], se propone un controlador predictivo el cual asume que la dirección de las llantas puede preverse mediante el uso de un sistema de posicionamiento global (GPS) y que existe un sistema



de direccionamiento automático anticolidión de las ruedas. Los autores proponen un controlador lineal cuadrático (LQR) dependiente de la aceleración lateral, la velocidad del ángulo de alabeo y del error de una trayectoria de referencia, para obtener un comportamiento deseado del chasis del vehículo.

En [28], se establece una analogía con el problema de estabilización del péndulo móvil, la cual es usada para derivar un control basado en una técnica llamada “energy shaping” que consiste en regular la energía potencial del sistema a un punto fijo inestable. Los autores utilizan simulaciones numéricas para mostrar el efecto de la fricción y propiedades de la suspensión en el levantamiento de las ruedas, sin embargo la distribución de las fuerzas de frenado no queda clara y utilizan una única descripción lineal.

En [29] se propone un estimador de orden alto de modos deslizantes para determinar parámetros relevantes, y utiliza un controlador de modos deslizantes para obtener un comando de dirección. El mecanismo de dirección en este trabajo es accionado eléctricamente y el comando es adicionado al comando proporcionado por el chofer.

En [30] se propone reducir la magnitud transitoria del índice de volcadura utilizando suspensión activa. Se proponen dos modos de operación con diferente rigidez de la suspensión, y la estabilidad del sistema conmutado es asegurada en presencia de incertidumbre paramétrica del actuador por medio de un regulador cuadrático.

### **1.3.2. Enfoques robustos con frenado diferencial**

A continuación se realiza una revisión bibliográfica acerca de controladores robustos y otras estrategias de control anti-vuelco reportados en las que se usa frenado diferencial para mitigar la volcadura o el derrape lateral.

En [31] se propone una estrategia de control robusta ante incertidumbre paramétrica que se aplica en todo momento, obtenida a partir de una descripción lineal del vehículo que incluye la dinámica de la suspensión. En [32] se propone un controlador robusto basado en desigualdades lineales matriciales (LMI's), sin embargo no queda clara la construcción de las LMI's, ni para que valores de incertidumbre el análisis es válido. En [33] se presenta una estrategia de control adaptable donde técnicas de mínimos cuadrados y filtrado de Kalman son utilizadas para estimar la altura del centro de gravedad. En [34] se propone una estrategia de control predictiva basada en la estimación a futuro del  $RI$ , sin embargo la acción de control es aplicada en todo momento interfiriendo con los comandos del conductor.

### **1.3.3. Estrategias de control predictivo basado en modelo**

Con los recientes avances tecnológicos en la electrónica y en los sistemas computacionales, el aumento en la capacidad de procesamiento de información ha permitido que el control predictivo basado en modelo sea una opción relevante en términos de implementación experimental. Problemas de control no-lineal complicados pueden ser resueltos en una fracción de segundo bajo

ciertas condiciones. En la literatura se ha reportado el uso de técnicas de optimización en tiempo real, o de control predictivo basado en modelo para disminuir el riesgo de vuelco o derrape lateral. Por ejemplo en [35] se presenta un esquema de control predictivo basado en un modelo lineal (MPC) que considera el efecto de la conmutación y utiliza frenado diferencial y dirección en las ruedas traseras como medio de control. Sin embargo en este escenario poco convencional la incertidumbre paramétrica no es considerada de manera explícita, al igual que en [36] donde se propone una estrategia basada en control predictivo basado en modelo no lineal (NMPC); en [36] se hace una analogía de la dinámica del vehículo con el modelo de un péndulo invertido con el fin de diseñar el control que puede ser implementado en tiempo real. Aunque no se demuestra que el controlador sea robusto, toma en cuenta no-linealidades del sistema. Otro interesante trabajo es el de [37] en el que la incertidumbre paramétrica no es considerada de manera explícita. Adicionalmente, una desventaja de las técnicas de control predictivo basado en modelo es que requieren de la optimización de una entrada de control mientras que se asegura que uno o varios objetivos de control se cumplan, y por tanto requieren de un alto nivel de procesamiento numérico lo cual eleva el costo de producción.

De la revisión bibliográfica realizada es posible observar que el caso de control de sistemas conmutados bajo acciones de control predictivo basado en modelo con incertidumbre paramétrica ha sido poco estudiado, ver [38], [39] entre otros.

#### **1.3.4. Estrategias de control en vehículos comerciales**

Debido a la gran cantidad de fatalidades relacionadas con la volcadura, a partir del año 1997, la NHTSA creó el “Programa para la Investigación de la Volcadura en Vehículos” para determinar las causas del fenómeno; aunado a ello, las constantes críticas a vehículos con evidentes fallas de diseño [40] que los hacen propensos a una volcadura, obligaron a los fabricantes de automotores a considerar la mitigación del fenómeno de volcadura en sus nuevos diseños.

Marcas como Volvo, Mercedes Benz, Jeep, Volkswagen entre otras, ofrecen dispositivos de asistencia a la conducción para ciertos vehículos. Por ejemplo, Mercedes Benz ofrece el “Control de Estabilidad Adaptable” (ADAPTIVE ESP) para sus vehículos deportivos utilitarios (SUV) de lujo. Estos dispositivos son diseñados para evitar un derrape lateral pero los fabricantes promocionan la funcionalidad adicional de mitigar la volcadura.

Debido a que los dispositivos como el “Control de Estabilidad Adaptable” son dispositivos comerciales, muy probablemente en proceso de ser patentados, su funcionamiento en detalle no es divulgado, de manera que no será posible realizar una comparación de su desempeño con el obtenido por la propuesta en esta Tesis.

Desde un punto de vista comercial, la adquisición de un vehículo que integra un dispositivo como el “Control de Estabilidad Adaptable” está al alcance de una población con poder adquisitivo muy alto, dejando de lado al grueso del parque vehicular que se vende en el mundo. En esta Tesis se propone un dispositivo de seguridad activa que puede ser implementado en vehículos de 4 ruedas que cuentan con frenado antibloqueo (ABS) disponible (incluso obligatorio en algunos países) en un alto porcentaje de vehículos ofrecidos comercialmente. Además se propone una estrategia de control que mitiga tanto el derrape lateral como la volcadura de manera integral para

vehículos de 4 ruedas, independientemente del propósito para el cuál fueron diseñados (carga, transporte de personal, familiar, etc.)

## **1.4. Motivación**

En la actualidad las estrategias de control robusto y basado en modelo constituyen un tema de interés para la comunidad académica e industrial debido a que pueden ser aplicados a una gran variedad de sistemas dinámicos con muy buenos resultados.

Por otro lado, la versatilidad de las representaciones conmutadas y en particular de las lineales por pedazos permiten resolver problemas que en su forma no-lineal resultan intratables. Además permiten representar cambios radicales en la estructura del sistema dinámico y diseñar acciones automáticas que aseguren que el objetivo de control se cumple a pesar de estos cambios.

En la literatura podemos encontrar estudios relacionados con la obtención de controladores acotados que aseguren que la salida de un sistema lineal se encuentra acotada por un valor requerido, a pesar de la existencia de incertidumbre paramétrica. Sin embargo de la revisión bibliográfica dada en secciones previas es posible concluir que para el caso de mitigación de riesgo de volcadura y derrape lateral en forma conjunta: no existen resultados previos relacionados con la medición del riesgo de derrape lateral, no existe un modelo de vehículo capaz de reproducir un indicador de volcadura y derrape lateral de forma conjunta, no existen resultados previos relacionados con la obtención de controles robustos con retroalimentación de salida para modelos lineales por pedazos que representan la dinámica del vehículo, ni tampoco se han presentado resultados de estabilidad en un escenario que anticipa el riesgo para efectuar la conmutación entre las descripciones lineales.

La estructura de control propuesta en esta Tesis busca permitir la evolución en lazo abierto mientras no exista riesgo de vuelco o derrape lateral. Si el conductor ejecuta una maniobra perturba al sistema en lazo abierto. Si la magnitud de la perturbación es suficientemente grande, la norma del estado puede crecer a un valor tal que un riesgo sea inminente. En esta Tesis se busca predecir el comportamiento del conductor para evaluar si la norma del estado crecerá de tal forma que existirá un riesgo inminente. En tal caso se busca conmutar a un modo en lazo cerrado cuya acción de control provoca una mitigación del riesgo, incluso ante incertidumbre paramétrica.

El diseño de tal controlador predictivo robusto ante incertidumbre paramétrica y conmutado, así como el análisis de acotamiento de la salida, es por tanto relevante en aplicaciones vehiculares para mitigar el riesgo de volcadura y derrape lateral ya que podrían dotar de flexibilidad a los controladores de manera que sólo se interferiría con las acciones del conductor cuando existiera riesgo. Lo anterior constituye el objetivo de esta Tesis como se expresa a continuación.

## **1.5. Objetivos**

El objetivo de esta Tesis es el de diseñar controladores que serán aplicados de manera predictiva para la mitigación del riesgo de volcadura y derrape lateral en vehículos de 4 ruedas que admiten

una descripción lineal por pedazos. En particular se partirá de una descripción politópica del modelo conmutado para establecer robustez ante incertidumbres y perturbaciones dadas por las acciones de conducción del chofer y se usará la predicción de estas acciones para mejorar el desempeño. Esto es, los objetivos específicos son los siguientes:

1. Establecer criterios para la detección de riesgo de volcadura no lanzada, riesgo de derrape lateral y consecuentemente riesgo de volcadura lanzada por derrape lateral en vehículos de 4 ruedas.
2. Determinar un modelo conmutado para vehículos de 4 ruedas capaz de reproducir el riesgo de volcadura y derrape lateral.
3. Proponer y estudiar algoritmos para la detección y mitigación automática del riesgo de volcadura y derrape lateral con base en controladores lineales con retroalimentación de salida que sean robustos ante incertidumbre paramétrica.
4. Estudiar la estabilidad del sistema dinámico conmutado ante perturbaciones exógenas dadas por los comandos del conductor.
5. Proponer leyes de conmutación predictivas para evitar volcadura y derrape lateral en vehículos que admiten una descripción lineal por pedazos politópica.

## 1.6. Aportaciones

En esta Tesis se propone un esquema de mitigación de riesgo de volcadura y derrape lateral que tiene un criterio de conmutación predictivo. La conmutación sucede cuando el comportamiento en lazo abierto (sin interferir con el conductor) indica un riesgo predicho a un horizonte de tiempo. El esquema propuesto presenta las siguientes ventajas respecto al control predictivo basado en modelo, control robusto con enfoques  $\mathcal{H}_\infty$  y otros enfoques:

1. Se considera de manera explícita la incertidumbre paramétrica en intervalos de variación para el diseño del control.
2. Se analiza de manera explícita el efecto de la conmutación.
3. Su implementación no requiere una gran capacidad de procesamiento.

Las aportaciones realizadas como producto de esta Tesis son las siguientes:

1. El estudio de una detección predictiva del riesgo de volcadura en vehículos de 4 ruedas [41].
2. El diseño de controladores que serán aplicados de manera predictiva del comportamiento del chofer, para la mitigación del riesgo de volcadura en vehículos de 4 ruedas representados por modelos politópicos por pedazos [42].

3. El estudio de una estrategia de predicción de riesgo de volcadura y derrape lateral (de manera conjunta) en vehículos de cuatro ruedas. [43].
4. El diseño de controladores para la mitigación del riesgo de volcadura y derrape lateral en vehículos de 4 ruedas, basados en una descripción politópica por pedazos y cuya estrategia de conmutación es predictiva [43].

## 1.7. Organización

Esta Tesis está organizada como sigue:

- Capítulo 2. Preliminares. En esta sección se revisan algunas definiciones y resultados previos que se utilizan en la Tesis.
- Capítulo 3. Control con retroalimentación de salida para sistemas lineales politópicos. En este capítulo se establece un algoritmo para la obtención de un controlador dependiente de la salida del sistema conmutado que es robusto ante incertidumbre paramétrica.
- Capítulo 4. Estabilidad de sistemas conmutados con leyes de conmutación predictivas. En este capítulo se establecen las ventajas de una ley de conmutación predictiva de la perturbación exógena, además se analizan las condiciones para la estabilidad y acotamiento de la salida del sistema conmutado incierto, bajo la acción de una perturbación exógena.
- Capítulo 5. Modelo dinámico de un vehículo de 4 ruedas. En este capítulo se obtiene la descripción matemática para el caso particular de vehículos de 4 ruedas.
- Capítulo 6. Detección integral del riesgo de volcadura y derrape lateral. En este capítulo se obtiene la descripción matemática para la efectiva detección del riesgo de vuelco y derrape lateral.
- Capítulo 7. Ejemplo de estudio. En este capítulo se presenta el diseño de un controlador predictivo, conmutado y robusto que es capaz de mitigar el riesgo de vuelco y derrape lateral de manera conjunta para un vehículo convencional de 4 ruedas.
- Capítulo 8. Conclusiones. En este capítulo se presentan algunas conclusiones.

## 2. Preliminares

*En este capítulo se presentan las diferentes nociones que serán usadas a lo largo de este documento y se introducen la descripciones de sistemas conmutados y sistemas politópicos conmutados. Además se revisa el estado del arte sobre estabilidad de sistemas conmutados politópicos sobre el cual se derivarán parte de las aportaciones de esta Tesis.*

### 2.1. Descripción de sistemas politópicos conmutados

Con el fin de derivar los resultados de esta Tesis a continuación se hace una descripción de los sistemas conmutados y de sus particularidades.

#### 2.1.1. Sistemas conmutados

Para poder establecer lo que es un sistema dinámico conmutado, es necesario conocer una clase de sistemas más generales conocidos como sistemas híbridos. Un sistema híbrido es un sistema dinámico que es descrito por la interacción entre una dinámica continua y una dinámica discreta [44]. Un sistema dinámico conmutado es una clase de sistema híbrido que consta de dos niveles de abstracción, donde un nivel de abstracción es gobernado por un conjunto de modos descritos por ecuaciones diferenciales que evolucionan en el espacio Euclidiano  $n$ -dimensional y el otro nivel de abstracción es un coordinador que orquesta la conmutación entre modos llamado ley de conmutación y cuya dinámica evoluciona en un conjunto finito de números naturales [44]. Un sistema dinámico conmutado admite estados continuos de un espacio vectorial.

La conmutación en los sistemas dinámicos conmutados puede depender de los estados, del tiempo o de una combinación de los anteriores, de manera que podemos clasificarlas como sigue [45]:

1. **Conmutación dependiente del estado y/o de la salida**, en la que en cada región de operación existe un subsistema dinámico. El evento de conmutación es función del estado o de parte de éste y tiene el objetivo de cambiar el subsistema o modo activo.
2. **Conmutación dependiente del tiempo**, en el que la conmutación es determinada por funciones dependientes únicamente del tiempo. Ejemplos de este tipo de conmutación son las señales de conmutación (funciones continuas por pedazos dependientes del tiempo) y secuencias de conmutación (pares ordenados de tiempo de conmutación y subsistema activo).

3. **Conmutación dependiente del tiempo y del estado y/o de la salida.** Se trata de eventos de conmutación que combinan las cualidades de las dos anteriores.

**Observación 2.1.** *El tipo de conmutaciones arriba descritas son las que se encuentran en la literatura; sin embargo en esta Tesis se propone una ley de conmutación que depende del estado/salida y de las perturbaciones a las cuáles es sometido el sistema y además de manera predictiva. Esto es, hasta donde el autor de la Tesis conoce, este trabajo representa una incursión en el uso de leyes de conmutación dependientes de las perturbaciones con acción predictiva. La derivación de las condiciones de estabilidad bajo estas leyes se presenta en el Capítulo 4.*

Por otro lado, a los sistemas dinámicos conmutados que presentan cambios instantáneos del estado al momento de la conmutación se les conoce como *impulsivos*. En otras palabras, a los sistemas cuya condición inicial de la dinámica del modo activo no es equivalente al estado inmediato en el modo anterior, se les conoce como *impulsivos*. Los sistemas dinámicos *impulsivos* no son el objeto de estudio de esta Tesis y en lo que sigue se considera solo a los sistemas no impulsivos.

Un sistema conmutado puede presentar diversos comportamientos dependiendo del criterio de conmutación usado [45] como por ejemplo:

1. **Comportamiento zenon** es un fenómeno idealizado en el que los tiempos de conmutación tienen un punto de acumulación finito. Esto es, el sistema conmuta entre regiones de operación secuencialmente en un tiempo de conmutación cada vez menor hasta desvanecerse, la suma de estos tiempos tiende al punto de acumulación sin llegar a igualarlo necesariamente, de manera que hay un número infinito de conmutaciones.
2. **Modos deslizantes** es un fenómeno que puede entenderse como conmutación infinitamente rápida que no se desvanece. Desde el punto de vista de sistemas conmutados, un modo deslizante puede ser interpretado como *chattering*. Un comportamiento de modo deslizante puede generar un comportamiento completamente distinto al de cada subsistema.
3. **Conmutación con histéresis** es un modo deslizante en el cuál la conmutación no sucede hasta que un mínimo intervalo de tiempo transcurre. Con el fin de explicar la conmutación con histéresis, considere la Figura 2.1 a, donde se encuentran dos regiones de operación separados por una superficie de conmutación  $S$  que se encuentra entre las regiones  $S_1$  y  $S_2$ . Suponga que se construyen dos nuevas regiones  $\omega_1$  y  $\omega_2$  como se muestra en la Figura (2.1 b), que se traslapan o sobreponen y existe una región común  $\underline{\Omega}_3 = \underline{\Omega}_1 \cap \underline{\Omega}_2$ , de manera que el criterio de conmutación depende de la dirección en la cual se aproxime la trayectoria al conjunto. Si la trayectoria proviene de  $\Omega_1$ , conserva el comportamiento indicado para  $\Omega_1$  hasta que llega a la frontera de  $\Omega_3$ , donde toma el comportamiento de  $\Omega_2$ ; mientras que si

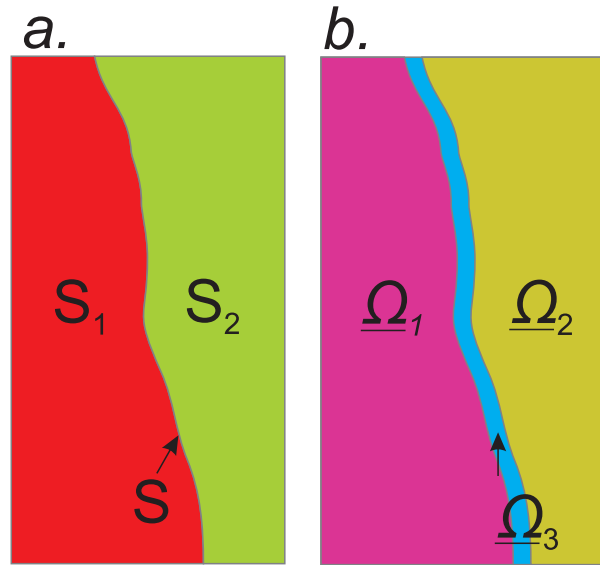


Figura 2.1.: a. Regiones de operación sin histéresis. b. Regiones de operación con histéresis

viene de  $\Omega_2$ , conserva el comportamiento de  $\Omega_2$  hasta que llega a la frontera de  $\Omega_3$  donde toma el comportamiento de  $\Omega_1$ .

En particular en esta Tesis estamos interesados en la estabilidad de sistemas híbridos bajo conmutación dependiente de una salida/estado y de las perturbaciones, evitando comportamientos tipo *zenon* y modos deslizantes; estos comportamientos de conmutación no son deseables por dos razones principalmente:

1. Los actuadores que se encargan de transformar los comandos de un controlador en una acción de control requieren cierto tiempo para activarse o desactivarse debido a su construcción y limitaciones físicas.
2. La conmutación aunque no sea infinitamente rápida pero si incesante, puede provocar el desgaste prematuro de los actuadores y otros componentes mecánicos involucrados.

Considere la siguiente descripción de sistemas conmutados dada por:

- **Una familia de subsistemas o modos** descritos a partir de funciones y campos vectoriales como sigue

$$\dot{x} = f_{\zeta}(t, x(t), v(t), w(t)) \quad (2.1)$$

$$y = h(x(t)) \quad (2.2)$$

$$z = b_{\zeta}(x(t), w(t)) \quad (2.3)$$

$$\zeta = g(z, w) \quad (2.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ , es el vector de estado del sistema,  $v \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^l$  es un vector que representa las perturbaciones exógenas,  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $z \in \mathbb{R}^d$  son salidas del



sistema con  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $b_\zeta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^d \forall \zeta \in G$  y  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \rightarrow G = \{1, 2, \dots, M\}$  donde  $M$  el número máximo de modos de conmutación. Las funciones vectoriales  $v(t), w(t)$  se consideran continuas por pedazos, los campos vectoriales  $f_\zeta$  son continuos y al menos una vez diferenciables.  $b_\zeta, h$  son funciones vectoriales que se consideran continuas. La versión lineal del Sistema (2.1)-(2.4) está dada por:

$$\dot{x} = A_i(t)x + B_{v,i}(t)v + B_{w,i}(t)w \quad (2.5)$$

$$y = Cx \quad (2.6)$$

$$z = D_i(t)x + E_i(t)w \quad (2.7)$$

$$i = g(z, w) \quad (2.8)$$

donde  $A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{v,i}(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B_{w,i}(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_i(t) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ ,  $E_i(t) \in \mathbb{R}^{d \times l}$  para cada  $i \in G = \{1, 2, \dots, M\}$  donde  $M$  es el mismo número máximo de modos de conmutación. Además  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \rightarrow G = \{1, 2, \dots, M\}$ . El sistema (2.5)-(2.8) será llamado no perturbado si se cumple que  $w = \mathbb{0}_l$ :

$$\dot{x} = A_i(t)x + B_{v,i}(t)v \quad (2.9)$$

$$y = Cx \quad (2.10)$$

$$z = D_i(t)x + E_i(t)w \quad (2.11)$$

$$i = g(z, w) \quad (2.12)$$

El sistema (2.5)-(2.8) será llamado nominal cuando las matrices y vectores asociados ( $A_i(t), B_{v,i}(t), B_{w,i}(t), D_i(t), E_i(t)$ ) se calculan con los parámetros nominales:

$$\dot{x} = A_i x + B_{v,i} v + B_{w,i} w \quad (2.13)$$

$$y = Cx \quad (2.14)$$

$$z = D_i x + E_i w \quad (2.15)$$

$$i = g(z, w) \quad (2.16)$$

En los Capítulos 3 y 4 se usará la salida  $y$  para fines de retroalimentación continua de (2.6), mientras que  $z$  se utilizará para definir los eventos de conmutación tal como se establece en (2.8).

- **Una ley de conmutación** que determina el subsistema que está activo en cada instante de tiempo, por medio de una función escalar  $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \rightarrow G = \{1, 2, \dots, M\}$ . La dinámica representada por  $g(\cdot, \cdot)$  es también llamada supervisor y determina un y sólo un valor para cada instante de tiempo. Si  $g(z, w) = \zeta$  con  $\zeta \in G$ , se dice que  $\zeta$  es el modo o subsistema activo del Sistema (2.1)-(2.4). Si  $g(z, w) = i$  con  $i \in G$ , se dice que  $i$  es el modo o subsistema activo del Sistema (2.5)-(2.8).

Observe que dada la descripción anterior de la ley de conmutación, ésta especifica a su vez a lo largo del tiempo, una secuencia de conmutación  $S_{[t_0, t_s]}$  que representa la sucesión ordenada de los modos activos en el intervalo de tiempo  $[t_0, t_s)$

$$S_{[t_0, t_s]} = \{(i_0, t_0), (i_1, t_1), \dots, (i_s, t_s)\} \quad (2.17)$$

donde  $t_0 < t_1 < \dots < t_s$ . A cada  $t_c \in \{t_0, \dots, t_s\}$  se le llama instante de conmutación con  $i_c \in G$ .

**Observación 2.2.** En la literatura [[44]] también se suele definir una **ley de conmutación**  $\mathfrak{Z}$  como un mapeo de  $\mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{U}_{[t_0, t_f]} = \{ \text{Sucesiones ordenadas de modos de conmutación } S \text{ en el intervalo } [t_0, t_f) \}$  la cual asigna a cada conjunto de argumentos una secuencia de conmutación  $S$ . A su vez, una secuencia de conmutación determina de manera única una **señal de conmutación** descrita como sigue:

$$i(t) = \begin{cases} i_0 & t \in [t_0, t_1) \\ i_1 & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ i_{\mathfrak{k}} & t \in [t_{\mathfrak{k}}, t_f), \mathfrak{k} \in [3, t_f-1) \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.1.2. Sistemas politópicos

En la teoría de Control y Sistemas Dinámicos es de particular interés el estudio de sistemas dinámicos que pueden ser representados por medio de modelos lineales, debido a que pueden representar la dinámica de un gran número de sistemas. Además tienen la ventaja de que existen muchas herramientas para el análisis y el control de este tipo de sistemas. Sin embargo, existen algunos fenómenos físicos que requieren de la descripción no lineal para poder reflejar su complejidad. Tales modelos no lineales pueden resultar matemáticamente muy complicados para el propósito de diseñar controladores estabilizantes; por lo que, comúnmente se prefiere el uso de múltiples modelos lineales que proporcionan una respuesta dinámica suficientemente aproximada a la no lineal.

La obtención de modelos lineales a partir de una descripción no lineal se obtiene por medio de lo que se conoce como linealización. Para ilustrar este proceso de linealización, considere el sistema dinámico no lineal perturbado por  $w$ :

$$\dot{x} = F(x, v, w) \quad (2.19)$$

donde la dependencia en tiempo de los argumentos de  $F$  se omiten por legibilidad,  $x \in \mathbb{R}^n$ , es el vector de estado del sistema,  $v \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control y  $w \in \mathbb{R}^l$  es un vector que representa las perturbaciones exógenas. Cuando no es posible el estudio de la estabilidad o la síntesis de leyes de control estabilizantes para el sistema no lineal (2.19), puede realizarse el proceso de linealización. La linealización de (2.19) consiste en obtener un modelo lineal perturbado que sirve como una aproximación de su dinámica en valores cercanos a cierto punto de operación

$(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$  [46]. La linealización de (2.19) en el punto de operación  $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$  se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x} = F(x, v, w) \approx F_L(x, v, w) &= F(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}) \\ &+ \left. \frac{\partial F(x, v, w)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ v=\bar{v} \\ w=\bar{w}}} (x - \bar{x}) \\ &+ \left. \frac{\partial F(x, v, w)}{\partial v} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ v=\bar{v} \\ w=\bar{w}}} (v - \bar{v}) \\ &+ \left. \frac{\partial F(x, v, w)}{\partial w} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ v=\bar{v} \\ w=\bar{w}}} (w - \bar{w}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$= \bar{A}x + \bar{B}_v v + \bar{B}_w w \quad (2.21)$$

donde  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{B}_v \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $\bar{B}_w \in \mathbb{R}^{n \times l}$ .

Por otro lado, en la literatura se pueden encontrar tres clases importantes de sistemas lineales perturbados, los cuales se presentan a continuación y que constituyen diferentes aproximaciones lineales de modelos más complejos. En las siguientes descripciones, nuevamente  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado del sistema,  $v \in \mathbb{R}^m$  es una entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^l$  es un vector que representa las perturbaciones y  $\vartheta$  representa parámetros exógenos que pueden cambiar en el tiempo.

- Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI), descritos en espacio de estados a través de la ecuación:

$$\dot{x} = Ax + B_v v + B_w w \quad (2.22)$$

- Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LTV), cuya descripción en variables de estado está definida a través de la dependencia explícita del tiempo de las matrices  $A(t)$ ,  $B_v(t)$ ,  $B_w(t)$ , es decir:

$$\dot{x} = A(t)x + B_v(t)v + B_w(t)w \quad (2.23)$$

- Sistemas Lineales con Parámetros Variantes (LPV) son sistemas dinámicos cuya descripción en variables de estado está definida a través de la dependencia explícita de las entradas de las matrices en función de un vector de parámetros  $\vartheta \in \mathbb{R}^{\mathfrak{S}}$ , es decir:

$$\dot{x} = A(\vartheta(t))x + B_v(\vartheta(t))v + B_w(\vartheta(t))w \quad (2.24)$$

donde  $A, A(t), A(\vartheta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_v, B_v(t), B_v(\vartheta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $B_w, B_w(t), B_w(\vartheta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ .

En los sistemas LPV, usualmente se caracterizan las variaciones asociadas a los parámetros con cotas sobre su magnitud y velocidad de variación, es decir:

$$\underline{\vartheta}^{[s]} \leq \vartheta^{[s]}(t) \leq \overline{\vartheta}^{[s]} \quad (2.25)$$

$$\underline{\dot{\vartheta}}^{[s]} \leq \dot{\vartheta}^{[s]}(t) \leq \overline{\dot{\vartheta}}^{[s]} \quad (2.26)$$

$\forall t \geq 0, \forall \xi \in \{1, \dots, \mathfrak{S}\}$ . Además  $\Theta$  usualmente denota los valores de  $\vartheta(t)$  que satisfacen (2.25), y  $\mathcal{D}$  denota las trayectorias de  $\vartheta(t)$  que satisfacen (2.26).

**Observación 2.3.** *En esta Tesis se ha elegido una descripción de sistemas LPV para caracterizar la variación de los parámetros. Esto debido a la flexibilidad que brinda esta descripción en el análisis de estabilidad (ver Capítulo 3) y a que existen una gran cantidad de resultados para este tipo de sistemas dinámicos.*

Con el fin de representar la incertidumbre paramétrica de un sistema dinámico lineal en la forma de un sistema LPV y en particular a la clase de sistemas LPV conocida como sistemas politópicos, es necesario introducir los siguientes conceptos sobre matrices politópicas. En particular,

**Definición 2.1.** [47] *El conjunto*

$$\Theta = \left\{ \theta(t) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{v}} \left| \sum_{j=1}^{\mathfrak{v}} \theta^{[j]}(t) = 1, \theta^{[j]}(t) \geq 0 \right. \right\} \quad (2.27)$$

es llamado simplejo donde  $\mathfrak{v}$  es llamado el número de vértices y  $\theta^{[j]}$  es el  $j$ -ésimo elemento del vector  $\theta$ .

**Definición 2.2.** [47] *La matriz  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es llamada politópica si*

$$A(t) = \left\{ A(\theta) \left| \sum_{j=1}^{\mathfrak{v}} A^{[j]} \theta^{[j]}(t) = A, \theta^{[j]}(t) \geq 0 \right. \right\} \quad (2.28)$$

Con la finalidad de ilustrar la obtención de la representación politópica de una matriz con entradas variantes en tiempo, considere que  $\mathcal{A}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz que depende de los parámetros inciertos  $0 < a_p(t) \in [\underline{a}_p, \overline{a}_p]$ ,  $0 < b_p(t) \in [\underline{b}_p, \overline{b}_p]$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} a_p(t) & 1/a_p(t) & 1 \\ 1 & b_p(t)/a_p(t) & 1 \\ 1 & 0 & 1/a_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(t) & \mathcal{A}_{12}(t) & 1 \\ 1 & \mathcal{A}_{22}(t) & 1 \\ 1 & 0 & \mathcal{A}_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

entonces se tiene que

$$\underline{\mathcal{A}}_a = \underline{a}_p \leq \mathcal{A}_{11}(t) \leq \overline{a}_p = \overline{\mathcal{A}}_a \quad (2.30)$$

$$\underline{\mathcal{A}}_b = 1/\overline{a}_p \leq \mathcal{A}_{12}(t) = \mathcal{A}_{33}(t) \leq 1/\underline{a}_p = \overline{\mathcal{A}}_b \quad (2.31)$$

$$\underline{\mathcal{A}}_c = \underline{b}_p/\overline{a}_p \leq \mathcal{A}_{22}(t) \leq \overline{b}_p/\underline{a}_p = \overline{\mathcal{A}}_c. \quad (2.32)$$

Debido a que se tienen 3 entradas inciertas (note que  $\mathcal{A}_{12}(t) = \mathcal{A}_{33}(t)$ ), el número de vértices será  $2^3 = 8$ . Sea el vector  $\zeta(t) = [\zeta_1(t) \ \zeta_2(t) \ \zeta_3(t) \ \zeta_4(t) \ \zeta_5(t) \ \zeta_6(t) \ \zeta_7(t) \ \zeta_8(t)]$  que

cumple con:

$$\mathbb{O}_8 \triangleleft \zeta(t) \triangleleft \mathbb{I}_8, \sum_{i=1}^8 \zeta_i(t) = 1 \quad (2.33)$$

donde  $\triangleleft$  denota la desigualdad por elemento y  $\mathbb{O}_8$  e  $\mathbb{I}_8$  denotan vectores de dimensión 8 con entradas cero y uno respectivamente, entonces  $\zeta(t)$  siempre es un elemento del simplejo (2.27) en dimensión 8. La matriz  $\mathcal{A}(t)$  puede escribirse entonces como politópica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) = & \zeta_1(t) \begin{bmatrix} \mathcal{A}_a & \mathcal{A}_b & 1 \\ 1 & \mathcal{A}_c & 1 \\ 1 & 0 & \mathcal{A}_b \end{bmatrix} + \zeta_2(t) \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{A}_a} & \overline{\mathcal{A}_b} & 1 \\ 1 & \overline{\mathcal{A}_c} & 1 \\ 1 & 0 & \overline{\mathcal{A}_b} \end{bmatrix} \\ & + \zeta_3 \begin{bmatrix} \mathcal{A}_a & \overline{\mathcal{A}_b} & 1 \\ 1 & \mathcal{A}_c & 1 \\ 1 & 0 & \overline{\mathcal{A}_b} \end{bmatrix} + \zeta_4(t) \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{A}_a} & \overline{\mathcal{A}_b} & 1 \\ 1 & \overline{\mathcal{A}_c} & 1 \\ 1 & 0 & \overline{\mathcal{A}_b} \end{bmatrix} \\ & + \zeta_5(t) \begin{bmatrix} \mathcal{A}_a & \overline{\mathcal{A}_b} & 1 \\ 1 & \overline{\mathcal{A}_c} & 1 \\ 1 & 0 & \overline{\mathcal{A}_b} \end{bmatrix} + \zeta_6(t) \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{A}_a} & \overline{\mathcal{A}_b} & 1 \\ 1 & \overline{\mathcal{A}_c} & 1 \\ 1 & 0 & \overline{\mathcal{A}_b} \end{bmatrix} \\ & + \zeta_7(t) \begin{bmatrix} \mathcal{A}_a & \overline{\mathcal{A}_b} & 1 \\ 1 & \overline{\mathcal{A}_c} & 1 \\ 1 & 0 & \overline{\mathcal{A}_b} \end{bmatrix} + \zeta_8(t) \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{A}_a} & \overline{\mathcal{A}_b} & 1 \\ 1 & \overline{\mathcal{A}_c} & 1 \\ 1 & 0 & \overline{\mathcal{A}_b} \end{bmatrix} = \mathcal{A}(\zeta(t)). \end{aligned}$$

Denote como  $\zeta_{v1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , entonces  $\zeta_{v1} \in \Theta$  y se tiene que

$$\mathcal{A}(\zeta_{v1}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_a & \mathcal{A}_b & 1 \\ 1 & \mathcal{A}_c & 1 \\ 1 & 0 & \mathcal{A}_b \end{bmatrix}$$

donde  $\mathcal{A}(\zeta_{v1})$  es un vértice de la matriz politópica. Cuando  $\zeta_{v2} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  se obtiene el segundo vértice, es decir  $\mathcal{A}(\zeta_{v2})$  es un segundo vértice. De manera análoga se obtienen los vértices restantes.

Con las Definiciones 2.27 y 2.28 es posible hacer una descripción lineal politópica para el sistema dinámico de las Ecuaciones (2.5), (2.8) como sigue:

$$\dot{x} = A(\theta(t))x + B_v(\theta(t))v + B_w(\theta(t))w \quad (2.34)$$

$$z = D(\theta(t))x + E(\theta(t))w \quad (2.35)$$

En la literatura se pueden encontrar resultados acerca de la estabilidad de sistemas politópicos cuya tasa de variación paramétrica se desconoce, es decir no se tiene certeza de que la desigualdad (2.26) se cumpla o se desconocen sus cotas. A continuación presentamos un resultado relevante que se encuentra en la literatura respecto a la estabilizabilidad de sistemas politópicos con tasa de variación paramétrica arbitraria, su obtención se puede encontrar en la respectiva referencia.

**Proposición 2.1.** [48] La estabilizabilidad cuadrática del sistema (2.34) con  $w(t) = 0$  para toda familia de trayectorias  $\mathcal{D}$  valuadas en  $\Theta$ , es equivalente a la existencia de una matriz  $P = Q^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica, definida positiva y una matriz  $Y = KQ$  con  $v = Kx$  que satisfacen:

$$QA^{[j]'} + A^{[j]}Q + B_w^{[j]}Y + Y'B_w^{[j]'} \prec 0, j = 1, \dots, v. \quad (2.36)$$

donde  $'$  denota la transposición.

### 2.1.3. Sistemas politópicos conmutados

En la literatura se pueden encontrar resultados acerca de la estabilidad de sistemas conmutados bajo conmutación arbitraria, inclusive para sistemas no-lineales (e.g. [45], [44]); sin embargo la inclusión de incertidumbre paramétrica representa dificultades adicionales en el análisis de sistemas conmutados. En el caso de un sistema de seguridad activa vehicular, las limitaciones físicas que imponen el tipo de vehículo, el tipo de llanta, el tipo de camino, etc. y sus posibles cambios durante la evolución dinámica, son aspectos que deben considerarse en el diseño de un controlador para la mitigación de riesgo de vuelco y derrape. En esta Tesis se considera incertidumbre paramétrica para tomar en cuenta las condiciones cambiantes del entorno. Dado que una sola descripción lineal no es suficiente para describir el comportamiento no lineal en el dominio de operación, es necesario usar una descripción lineal por pedazos que tome en cuenta incertidumbre paramétrica.

Un modelo lineal puede obtenerse como una aproximación en cierto punto de operación, cuando la dinámica representada por las Ecuaciones (2.1)-(2.4) es no lineal para algún  $\zeta \in G$ . La descripción de sistemas lineales conmutados resultante está la dada por las Ecuaciones (2.5)- (2.7). Si el dominio de operación se divide en un número finito de subconjuntos ( $M$ ) tal que a cada subdominio  $\mathcal{D}_i$  le corresponde la descripción lineal  $i \in G$ , entonces los subdominios satisfacen:

1.  $\bigcup_{i=1}^M \mathcal{D}_i = \mathcal{D}$
2.  $\mathcal{D}_i \cap \text{Int}(\mathcal{D}_j) = \emptyset$  for  $i \neq j$
3.  $\mathcal{D}_i \neq \emptyset$

donde  $\text{Int}$  es la función que devuelve el interior del conjunto. Con base en lo anterior y en las Definiciones 2.1-2.2 es posible hacer un conjunto de  $M$  descripciones lineales politópicas del sistema conmutado (2.5)- (2.7):

$$\dot{x} = A_i(\theta(t))x + B_{v,i}(\theta(t))v + B_{w,i}(\theta(t))w \quad (2.37)$$

$$y = Cx \quad (2.38)$$

$$z = D_i(\theta(t))x + E_i(\theta(t))w \quad (2.39)$$

donde  $A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{v,i}(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B_{w,i}(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_i(t) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ ,  $E_i(t) \in \mathbb{R}^{d \times l}$  para cada  $i \in G = \{1, 2, \dots, M\}$ . Como se vio anteriormente las matrices politópicas hacen uso de los parámetros del sistema en los vértices del simplejo por lo que satisfacen que  $\theta_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, v$ .

**Observación 2.4.** *Note que como cada parámetro está en un conjunto compacto no puede tomar valores más allá de sus límites máximo y mínimo, por lo que  $v = 2^r$  donde  $r$  es el número máximo de entradas inciertas de las matrices; es decir, en una descripción politópica más que las cotas de los parámetros y su variación, se toman en cuenta la variaciones en el polítopo.*

Realizando un número finito de aproximaciones lineales de (2.1) en diferentes puntos de operación, es posible obtener el modelo multilineal conmutado e incierto (2.37)-(2.39).

## 2.2. Observaciones sobre la estabilidad de sistemas politópicos conmutados y su relación al diseño de un sistema de seguridad activa.

La conmutación puede tener un efecto adverso en la estabilidad. Por ejemplo, es bien conocido que un sistema conmutado puede ser inestable aun cuando cada subsistema que lo compone sea estable. En la literatura existen diversos resultados que estudian el efecto de la conmutación en la estabilidad, vea por ejemplo [44] y [45]. La estabilidad de un sistema conmutado variante en tiempo, con conmutación dependiente de una salida puede ser asegurada si se obtiene una función común de Lyapunov para todos los subsistemas [44] y [45]. La obtención de controladores que aseguren la estabilidad de un sistema conmutado politópico, sujeto a perturbaciones exógenas es un tópico de investigación actual.

**Observación 2.5.** *Note que la estabilidad asintótica del origen no es una propiedad obtenible para el sistema (2.37) si es persistentemente perturbado por  $w$ . Una alternativa para establecer la estabilidad del sistema (2.37) que es persistentemente perturbado por  $w$ , es formular el problema de control como de regulación o de seguimiento de trayectorias, sin embargo para el caso particular de la dinámica de un vehículo descrita por un sistema con la forma (2.37) será necesaria la caracterización de los deseos del conductor como una referencia variante en tiempo. Este punto de vista implica una complejidad adicional para encontrar las referencias que se ajusten a los deseos del conductor y para valorar si la trayectoria deseada por el chofer no implica un riesgo de derrape lateral o volcadura. Por otro lado, si se formula el problema de control para mantener el estado del sistema (2.37) que es persistentemente perturbado por  $w$  en valores seguros, el tipo de análisis de estabilidad más adecuado es el de acotamiento ulterior.*

En la literatura podemos encontrar estudios relacionados con la estabilización de sistemas lineales no conmutados inciertos, por ejemplo [56]. En particular, el trabajo en [56] es relevante para el problema de vuelco ya que se demuestra que la dinámica de un vehículo de 4 ruedas se puede aproximar por medio de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ([31]) que toma la forma de un sistema politópico:

$$\dot{x} = A(\theta)x + B_v(\theta)v + B_w(\theta)w \quad (2.40)$$

$$RI = C(\theta)x \quad (2.41)$$

Además se demuestra que la salida  $RI$  puede ser confinada a cierto intervalo que asegura que no hay riesgo de vuelco para perturbaciones  $\mathbb{R} \ni |w| \leq w_{max}$ . Sin embargo, en tal estudio se aplica la acción de control a todo instante por lo que se interfiere con los comandos del conductor, no considera de manera integral el problema del riesgo de derrape que es un potencial detonador de la volcadura lanzada y requiere de la estimación de todas las variables de estado para la obtención de la entrada de control.

Una opción para interferir lo menos posible con los deseos del conductor, es utilizar un enfoque de control que se aplique sólo cuando existe riesgo de volcadura o derrape. Esto podría implicar una descripción conmutada de las acciones de control y la derivación de leyes de control que fueran robustas ante incertidumbre paramétrica.

En [10] se estudia la estabilización asintótica de sistemas lineales conmutados inciertos cuando la incertidumbre paramétrica se puede expresar como una combinación convexa de matrices. En este estudio se propone una función de Lyapunov polinomial-homogénea por pedazos y se encuentran las condiciones para asegurar la estabilidad robusta del sistema, cuando las incertidumbres no varían en tiempo. Además propone el diseño de un controlador por pedazos que estabiliza asintóticamente al sistema incierto. Aunque este resultado podría ser extendido para el caso de sistemas conmutados politópicos variantes en tiempo, presenta algunas desventajas para el diseño de un sistema anti-vuelco y anti-derrape; por ejemplo, se aplica la acción de control a todo instante y requiere de la estimación de todas las variables de estado para la obtención de la entrada de control. Además en [10] no se toman en cuenta perturbaciones exógenas por lo que el tipo de estabilidad estudiada es asintótica del origen.

**Observación 2.6.** *En esta Tesis se obtiene un controlador robusto dependiente de una salida para un sistema conmutado politópico que se encuentra persistentemente perturbado. Se analizan las condiciones para que una segunda salida compuesta por un indicador del riesgo de volcadura y por un indicador del riesgo derrape lateral se mantenga acotada en norma. Estos resultados se muestran en los Capítulos 3 y 4 y se usarán para la solución del problema de derrape lateral y volcadura en el Capítulo 6, donde un punto de vista conmutado permitirá aplicar la acción de control únicamente cuando un riesgo es detectado.*



## **2.3. Comentarios finales del capítulo**

En este capítulo se presentaron las definiciones y resultados relevantes al problema de estabilización de sistemas politópicos conmutados en los cuáles se basan los resultados de esta Tesis, así como también algunas observaciones sobre su aplicación a la resolución del problema de volcadura y derrape lateral en vehículos de 4 ruedas.

## 3. Control con retroalimentación de salida para sistemas lineales politópicos

*En este capítulo se obtienen controladores robustos con retroalimentación de salida para sistemas lineales no conmutados con incertidumbre que admiten una descripción politópica. Es de particular interés el estudio del efecto de una perturbación exógena que es desconocida pero acotada, la cual representará las acciones de manejo del conductor.*

### 3.1. Control robusto para sistemas inciertos

En años recientes se ha dedicado mucho esfuerzo al problema de la obtención de controladores que establezcan sistemas con incertidumbre paramétrica. En gran parte de tales investigaciones la incertidumbre es caracterizada por su estructura (aditiva, multiplicativa o politópica) y la existencia de límites de confinamiento. Los resultados de estabilidad que se encuentran en la literatura dependen esencialmente de la estructura de incertidumbre que se asume. Existen enfoques de control robusto con incertidumbre aditiva como en [49], multiplicativa [50] y no estructurada como en [51]. Dentro de los enfoques de control robusto se puede mencionar: a) los politópicos, b) los basados en control óptimo y c) los  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$ . Los basados en control óptimo parten de una descripción lineal

$$\dot{x} = A(\varpi)x + B_v(\varpi)v \quad (3.1)$$

donde  $\varpi$  representa la incertidumbre,  $v$  es la entrada de control, las matrices  $A, B_v$  son de dimensiones adecuadas y el objetivo es diseñar una ley de retroalimentación de estados para todas las posibles  $\varpi$  dentro de un conjunto. La solución de este problema robusto depende de si la incertidumbre satisface lo que se llama una condición de correspondencia o emparejamiento (*matching condition*) que requiere que la incertidumbre varíe en el rango de  $B_v$ . Si se satisface esta condición la solución del problema de control robusto puede obtenerse resolviendo un problema LQR (*Linear Quadratic Regulator*), el cual incluye las cotas de la incertidumbre en la función de costo. Sin embargo si la incertidumbre no satisface esta condición de correspondencia, el problema se hace más complejo y se necesita descomponer la incertidumbre en una parte emparejada (*matched part*) y una no emparejada. La solución del problema depende de si la incertidumbre satisface algunas condiciones suficientes, y consiste en el diseño de una ley de control aumentada que lidia con la incertidumbre no emparejada.

Por otro lado existen enfoques de control robusto con incertidumbre estructurada y no estructurada que en vez de utilizar un enfoque en tiempo lo hacen en frecuencia. Entre estos enfoques se encuentra el de Kharitonov, en el cual se parte de una descripción de la incertidumbre en cierto

intervalo y establece una equivalencia entre la estabilidad de 4 polinomios y la estabilidad para todas las posibles combinaciones de incertidumbre. Este resultado se le conoce como el Teorema de Kharitonov y puede encontrarse en [51].

Otro punto de vista que se le incluye en control robusto es el control  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ .  $\mathcal{H}_2$  denota el espacio de Banach de todas las funciones  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que son analíticas y acotadas en el lado derecho del plano complejo y acotadas en el eje imaginario. En este enfoque se define un sistema nominal (con valores nominales en los parámetros) para la síntesis de control y la incertidumbre se toma en cuenta en el lazo de retroalimentación, la estabilidad del sistema se estudia usando el teorema de pequeña ganancia que establece que el sistema perturbado en lazo cerrado es estable si la norma  $\mathcal{H}_2$  es menor a uno. Existen resultados en donde la síntesis del controlador para el sistema nominal se minimiza; esto es hacen uso de un enfoque mixto óptimo. Este enfoque sin embargo es diferente del enfoque óptimo porque no se garantiza la estabilidad para una incertidumbre dentro de los límites de diseño. Esto es, en el enfoque  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  las cotas de las incertidumbres no se dan de antemano, el diseño de control se hace para alcanzar un rango de máxima tolerancia a la incertidumbre; sin embargo, puede que este rango no cubra todas las posibles incertidumbres. En otras palabras la robustez del control  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  no se puede garantizar de antemano y si este control es adecuado o no dependerá de la incertidumbre.

**Observación 3.1.** *Este capítulo se enfoca al estudio del problema de diseño de controladores dependientes de la salida que provean de estabilidad a un sistema politópico, pero además que maximicen su capacidad para el rechazo de una perturbación exógena.*

La simplicidad de un enfoque politópico permite en primera instancia obtener un sistema matemáticamente tratable con fines de control, que involucre incertidumbre en los parámetros así como en su tasa de variación, y para los cuales existen herramientas de análisis y diseño de controladores. En segunda instancia, una ventaja de este enfoque en comparación con estrategias  $\mathcal{H}_2$  o  $\mathcal{H}_\infty$  es que asegura la robustez del resultado de estabilidad.

Como se dijo anteriormente, en los enfoques  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  las cotas de las incertidumbres no se dan de antemano y el diseño de control se hace para alcanzar un rango de máxima tolerancia a la incertidumbre; sin embargo, puede que este rango no cubra todas las posibles incertidumbres. En contraste el enfoque politópico permite conocer las condiciones bajo las cuales el sistema es estabilizable para un rango de incertidumbre dada a priori; lo anterior debido a que la representación politópica de las matrices permite describir la variación de los parámetros dentro de ciertos rangos, así como en tiempo, y sintetizar controladores que garanticen su estabilidad en estas condiciones.

## 3.2. Control robusto dependiente de la salida para sistemas politópicos

En la literatura se han presentado resultados relevantes respecto a la estabilidad asintótica de sistemas lineales inciertos no conmutados de la forma:

$$\dot{x} = A(\overline{\omega})x + B_v(\overline{\omega})v \quad (3.2)$$

En [52] se realiza un análisis de estabilidad robusta ante incertidumbres paramétricas para sistemas lineales de la forma (3.2) que tienen tasa de variación paramétrica acotada. Se utiliza una descripción politópica para derivar una función de Lyapunov común que está en función de los vértices. Los autores son capaces de establecer condiciones para la estabilidad cuadrática del sistema, así como de establecer un desempeño garantizado.

En [53] se realiza un análisis de estabilidad robusta asintótica de sistemas lineales de la forma (3.2) afectados por incertidumbres paramétricas que tienen una tasa de variación acotada por medio de la resolución de LMI's. Además se estudia la tasa de variación máxima de los parámetros para que la estabilidad robusta sea aún garantizada; esto es, se calcula el margen de estabilidad del sistema dada una tasa de variación de los parámetros. Los autores sólo estudian la estabilidad del sistema y no su control.

En [54] se propone el uso de funciones polinomiales homogéneas dependientes de los parámetros para derivar estabilidad robusta ante incertidumbre paramétrica en sistemas lineales de la forma (3.2). La estrategia de verificación de estabilidad está basada en LMI's y no requiere del conocimiento de los parámetros sino que se reduce a encontrar tantas matrices positivas definidas como el grado de la función de Lyapunov por el número de vértices de la incertidumbre. Conforme el grado crece, el número de LMI's asociadas y variables que se pueden manipular crece. De tal manera que la prueba de estabilidad se vuelve menos conservadora. Sin embargo también aumenta la complejidad de la solución de las LMI's. En [54] no se estudia de manera explícita el caso de variación arbitraria de los parámetros, ni la síntesis de control.

En [55] se estudia la síntesis de controladores dependientes de la salida bajo perturbaciones exógenas para sistemas lineales de parámetros variantes (LPV) de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\overline{\omega})x + B_v(\overline{\omega})v \\ y &= C(\overline{\omega})x \end{aligned} \quad (3.3)$$

por medio del uso de una función de Lyapunov cuadrática. En este trabajo se requiere el conocimiento instantáneo de los parámetros ( $\overline{\omega}$ ), es decir no se trata de un enfoque robusto sino de la síntesis de un controlador que es capaz de rechazar perturbaciones para parámetros conocidos pero que varían dentro de un conjunto acotado.

Entre los trabajos que tratan el problema de sistemas lineales con perturbaciones exógenas y con variación de parámetros de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\overline{\omega})x + B_v(\overline{\omega})v + B_w(\overline{\omega})w \\ y &= C(\overline{\omega})x \end{aligned} \quad (3.4)$$

vale la pena mencionar [56] y [57]. En estos trabajos se adopta un enfoque  $\mathcal{L}_\infty$  para establecer condiciones de estabilidad y desempeño ante entradas que son uniformemente acotadas. Estos autores introducen el concepto  $\mathcal{L}_\infty$  como el de garantizar la estabilidad y además un desempeño de la salida  $\|y\| \leq \gamma_s \|w\|$  y no de todo el estado como lo hace  $\mathcal{H}_\infty$ . Establecen que para sistemas inciertos no lineales caracterizados por una descripción politópica de la forma (3.4), las condiciones de estabilidad y desempeño se reducen a la resolución de LMI's.

**Observación 3.2.** *En la literatura se pueden encontrar resultados acerca de la estabilidad robusta para sistemas lineales de la forma (3.4) (ver por ejemplo [56] y [57]). En estos trabajos se diseñan acciones de control que se aplican a todo momento y consisten de una retroalimentación de estados. Dada la importancia de estos resultados para el problema de volcadura y derrape lateral, en esta sección se extenderán estos resultados de estabilidad robusta ante incertidumbre paramétrica al caso de retroalimentación de salida bajo un enfoque de acotamiento ulterior. En la Sección 3.3 se extienden los resultados de estabilidad robusta ante incertidumbre paramétrica al caso de sistemas conmutados politópicos con retroalimentación de salida bajo un enfoque de acotamiento ulterior. En la Sección 3.4 se extienden los resultados de estabilidad robusta ante incertidumbre paramétrica al caso de sistemas conmutados politópicos con retroalimentación de salida bajo un enfoque de acotamiento ulterior con uno o más modos evolucionando en lazo abierto.*

Para la obtención de los resultados de esta Tesis, se utilizará retroalimentación de salida ya que en el caso del vehículo existen variables no medibles como el ángulo de deriva lateral.

Con este fin considere el sistema politópico:

$$\dot{x} = A(\theta)x + B_v(\theta)v + B_w(\theta)w \quad (3.5)$$

$$y = Cx \quad (3.6)$$

$$z = D(\theta)x + E(\theta)w \quad (3.7)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ , es el vector de estado del sistema,  $v \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $w \in \mathbb{R}^l$  es un vector que representa las perturbaciones exógenas,  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $z \in \mathbb{R}^d$  son salidas del sistema,  $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_v(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B_w(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\theta$  es un vector de incertidumbre que es elemento del simplejo ( $\theta(t) \in \Theta$ ) para todo tiempo, a partir de las Ecuaciones (3.5)-(3.7) y en lo que sigue se omite la dependencia en tiempo de  $\theta$  por legibilidad. Considere también la ley de retroalimentación de salida:

$$v(t) = Ky = LCx \quad (3.8)$$

**Observación 3.3.** Observe que en el sistema anterior existen dos tipos de salidas, la salida (3.6) es la que se usará para retroalimentación, mientras que la salida (3.7) es la que se requiere estabilizar. Esto es, nos interesa resolver el problema de estabilidad cuando se utilizan diferentes salidas para retroalimentación y para estabilización (o control). Una salida para estabilización o control es una porción del estado al que se desea estabilizar. Una salida para retroalimentación es una porción del estado que se mide y que se utiliza para diseñar la ley de control.

Con la finalidad de encontrar  $L$  que estabilice al sistema politópico incierto (3.5)-(3.7), de [48], así como de los Teoremas B1 y B2, un análisis de Lyapunov puede ser usado para establecer un resultado de acotamiento de las trayectorias del sistema (3.5)-(3.8) como se muestra en el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.** Considere el Sistema (3.5)-(3.6) con una retroalimentación de salida (3.8). Sea  $P \succ 0, P = P'$  y  $L$  matrices que minimizan:

$$\sum \lambda \left( PA^{[j]} + A^{[j]'} P + PB_v^{[j]} LC + C' L' B_v^{[j]'} P + \gamma_{1,max} \mathbb{I}_{n \times n} \right) \quad (3.9)$$

sujeto a

$$\|L\| \leq L_{max} \quad (3.10)$$

$$\lambda_{max} \left( PA^{[j]} + A^{[j]'} P + PB_v^{[j]} LC + C' L' B_v^{[j]'} P + \gamma_{1,max} \mathbb{I}_{n \times n} \right) < 0 \quad (3.11)$$

para algún  $\gamma_{1,max} > 0$  y para todo  $j = 1 \dots v$ , entonces las soluciones del sistema (3.5)-(3.6) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas en el conjunto  $\Omega_\gamma = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_\gamma\}$  para todo  $\theta \in \Theta$ , con

$$c_\gamma = \frac{2B_m \|P\| w_{max}}{\gamma_{1,max}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \quad (3.12)$$

donde  $\lambda_{max}, \lambda_{min}$  denotan los valores propios máximo y mínimo respectivamente,  $w_{max} = \sup(\|w(t)\|) \forall t$  y

$$B_m = \max_{j \in \{1, \dots, v\}} \left( \|B_w^{[j]}\| \right). \quad (3.13)$$

*Demostración.* Considere una función escalar  $V = x'Px$  con  $P = P', P \succ 0$  (definida positiva). La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias el sistema (3.5)-(3.8) es:

$$\dot{V} = x' \left( PA(\theta) + A'(\theta)P \right) x + x' \left( PB_v(\theta)LC + C'L'B_v'(\theta)P \right) x + 2B_w'(\theta)Pxw. \quad (3.14)$$

para todo  $\theta \in \Theta$ . La ecuación anterior puede modificarse usando el resultado de [48], de manera que sólo se toman en cuenta los vértices para asegurar la estabilidad para todo  $\theta \in \Theta$  con variación arbitraria; esto es

$$\dot{V} = x' \left( PA^{[j]} + A^{[j]'}P \right) x + x' \left( PB_v^{[j]}LC + C'L'B_v'^{[j]}P \right) x + 2B_w'^{[j]}Pxw < 0 \quad (3.15)$$

para  $j = 1 \dots v$ , es decir para todos los vértices del conjunto  $\Theta$ . En (3.15) se pretende encontrar  $L$  tal que la desigualdad satisfaga:

$$\dot{V} \leq x' \left( PA^{[j]} + A^{[j]'}P \right) x + x' \left( PB_v^{[j]}LC + C'L'B_v'^{[j]}P \right) x + 2B_m \|P\| \|x\| w_{max} < 0. \quad (3.16)$$

Considere por el momento sólo el término  $2B_m \|P\| \|x\| w_{max}$ . Es claro que como la norma euclidiana es una función que es cero si su argumento es cero y positiva definida si su argumento no es cero, entonces existe un número  $\gamma_1 > 0$  suficientemente grande tal que  $\gamma_0 \|x\| \leq \gamma_1 \|x\|^2 = \gamma_1 x' \mathbb{I}_{n \times n} x$  para algún  $\gamma_0 > 0$ . Por lo que podemos reescribir la Expresión (3.16) como:

$$\dot{V} \leq x' \left( PA^{[j]} + A^{[j]'}P \right) x + x' \left( PB_v^{[j]}LC + C'L'B_v'^{[j]}P \right) x + \gamma_1 x' \mathbb{I}_{n \times n} x \quad (3.17)$$

$$\dot{V} \leq x' \left( PA^{[j]} + A^{[j]'}P + PB_v^{[j]}LC + C'L'B_v'^{[j]}P + \gamma_1 \mathbb{I}_{n \times n} \right) x \quad (3.18)$$

Para asegurar que (3.18) sea menor a cero debe cumplirse:

$$PA^{[j]} + A^{[j]'}P + PB_v^{[j]}LC + C'L'B_v'^{[j]}P + \gamma_1 \mathbb{I}_{n \times n} \prec 0 \quad (3.19)$$

para todo  $j = 1 \dots v$  y  $\gamma_1$  se le conoce como margen de estabilidad. Sea  $S = P^{-1}$  y  $M = LCS$ , multiplicando (3.19) por la izquierda y por la derecha por  $S$  y luego substituyendo  $M$  se obtiene:

$$A^{[j]}S + SA^{[j]'} + B_v^{[j]}M + M'B_v'^{[j]} + \gamma_1 SS \prec 0. \quad (3.20)$$

Note que en la ecuación anterior se tienen varias incógnitas: las asociadas con las entradas de  $S$ ,  $M$  y con  $\gamma_1$ . Además note que la desigualdad:

$$\gamma_0 \|x\| \leq \gamma_1 \|x\|^2 \quad (3.21)$$

no puede satisfacerse para todo  $\|x\|$  con  $\gamma_1$  finita. Esto es fácil de ver si se reescribe (3.21) como sigue:

$$\frac{\gamma_0}{\|x\|} \leq \gamma_1 \quad (3.22)$$

si  $\|x\|$  es muy cercano a cero el valor de  $\gamma_1$  es muy grande. Debido a lo anterior, la Desigualdad (3.20) no puede satisfacerse para un  $S$  finito si la ganancia del control es finita y limitada. En otras palabras si:

$$A^{[j]}S + SA^{[j]'} + B_v^{[j]}M + M'B_v^{[j]'} \prec 0 \quad (3.23)$$

se satisface entonces siempre es posible encontrar una  $S$  que satisfaga (3.20), pero si la ganancia del control es limitada, el margen de estabilidad máximo asociado a (3.23) ya está fijo, por lo que siempre existe una vecindad alrededor de cero tal que (3.20) no se satisface. En consecuencia, es necesario calcular:

1. El valor  $\gamma_{1,max}$  tal que (3.20) se satisfaga, dada una limitación de ganancia del controlador.
2. El valor  $c_\gamma$  tal que las soluciones que inicien en  $\Omega_\gamma = \{x \mid \|x\| < c_\gamma\}$  permanecen en él para todo tiempo futuro.

**Observación 3.4.** *Note que existe un vértice  $j = j_m$  tal que el eigenvalor de  $A^{[j_m]}S + A^{[j_m]'}S + B_v^{[j_m]}M + M'B_v^{[j_m]}'$  es más grande que los eigenvalores de todos los vértices (el más cercano a cero). Es decir, el vértice  $j_m$  es el peor escenario de tasa de convergencia de la trayectoria del sistema. Note que la tasa de convergencia depende del tamaño de los eigenvalores. Ya que (3.23) es negativa definida, sus valores propios son reales negativos, siendo el más grande, el modo más lento de convergencia. Note además que si la ganancia no está acotada, el valor propio más grande se puede asignar arbitrariamente; sin embargo, en otras circunstancias existirá un valor propio mínimo al que pueda asignarse.*

Con el fin de encontrar el  $\gamma_{1,max}$  que satisfaga (3.20) con una limitación de ganancia del controlador  $\|L\| \leq L_{max}$  y tomando en cuenta la Observación 3.4, considere el siguiente algoritmo que representa una búsqueda de  $\gamma_{1,max}$  por aproximaciones sucesivas a partir de un margen de estabilidad nulo.

**Algoritmo 3.1.** *Algoritmo para el cálculo de  $\gamma_{1,max}$*

1. Ponga  $\gamma_1 = 0$  (i.e. asuma margen de estabilidad nulo).
2. Obtenga una matriz  $S$  para todo  $j = 1 \dots v$  de la siguiente LMI:

$$A^{[j]}S + SA^{[j]'} \prec 0. \quad (3.24)$$

3. Resuelva con  $P = S^{-1}$  obtenido del Paso 2 el siguiente



**Problema 3.1.** Encontrar  $L$  que minimice:

$$\sum \lambda \left( PA^{[j]} + A^{[j]'} P + PB_v^{[j]} LC + C' L' B_v^{[j]'} P + \gamma_1 \mathbb{I}_{n \times n} \right)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} & \|L\| \leq L_{max} \\ & \lambda_{max} \left( PA^{[j]} + A^{[j]'} P + PB_v^{[j]} LC + C' L' B_v^{[j]'} P + \gamma_1 \mathbb{I}_{n \times n} \right) < 0 \end{aligned}$$

4. Si existe solución al Problema 3.1 incremente el valor de  $\gamma_1$  y regrese al Paso 3, si no finalice y  $\gamma_{1,max} = \gamma_1$ , donde  $\gamma_{1,max}$  es el valor máximo de  $\gamma_1$  que satisface el Problema 3.1.

Por otro lado, para el cálculo de  $c_\gamma$  considere el Teorema B2 en el cuál si se establece la existencia de una función definida positiva tal que

$$\begin{aligned} & \alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x), \forall \|x\| \geq \mu_s \geq 0 \end{aligned}$$

entonces:

$$\|x(t)\| < \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu_s)), \forall t \geq t_0 + T_s. \quad (3.25)$$

En este caso  $\lambda_{min}(P)\|x\|^2 \leq V \leq \lambda_{max}(P)\|x\|^2$ , esto es:

$$\alpha_1(\|x\|) = \lambda_{min}(P)\|x\|^2 \quad (3.26)$$

$$\alpha_2(\|x\|) = \lambda_{max}(P)\|x\|^2. \quad (3.27)$$

Aún mas,

$$\dot{V} \leq 0, \forall \|x\| \geq \mu_s \geq 0. \quad (3.28)$$

Con el fin de calcular  $\mu_s$  considere la desigualdad (3.21) con  $\gamma_1 = \gamma_{1,max}$ :

$$2B_m \|P\| w_{max} \|x\| \leq \gamma_{1,max} \|x\|^2 \quad (3.29)$$

$$\frac{2B_m \|P\| w_{max}}{\gamma_{1,max}} \leq \|x\| \quad (3.30)$$

De tal forma que  $\dot{V} < 0$  sólo cuando (3.30) se satisface, esto es:

$$\mu_s \leq \frac{2B_m \|P\| w_{max}}{\gamma_{1,max}}. \quad (3.31)$$

Por lo que sustituyendo este valor en la Ecuación (3.25) se obtiene:

$$\|x(t)\| \leq \frac{2B_m \|P\| w_{max}}{\gamma_{1,max}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} = c_\gamma \quad (3.32)$$

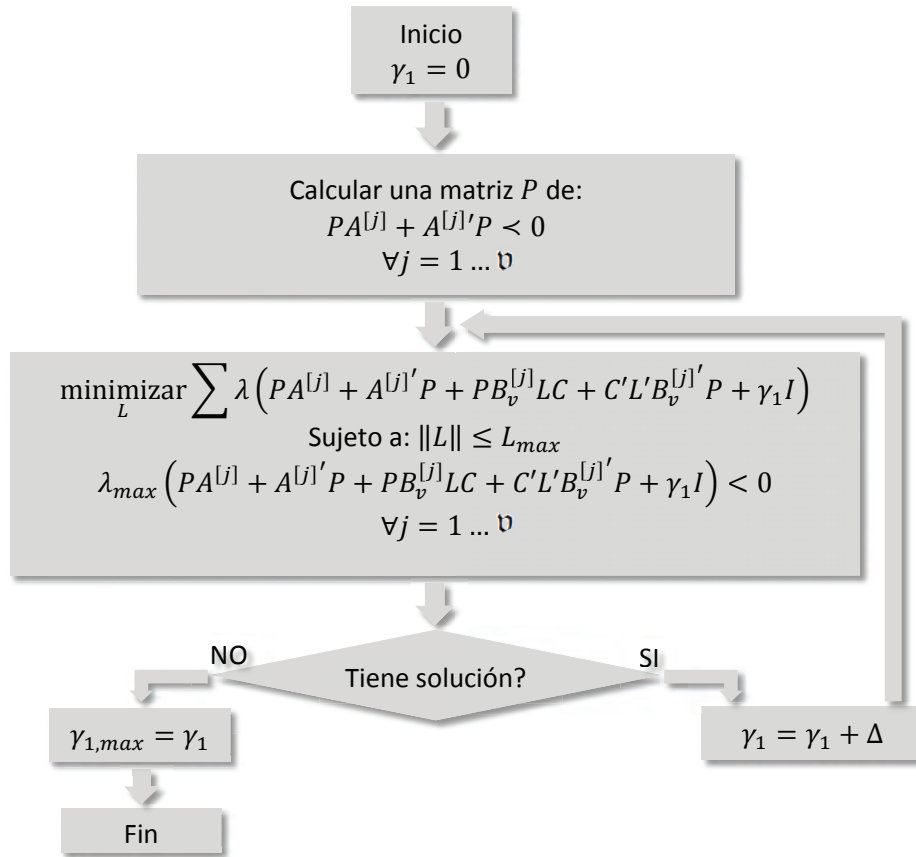


Figura 3.1.: Algoritmo para el cálculo de  $\gamma_{1,max}$

En consecuencia, por virtud del Teorema B2 las trayectorias que inician fuera del conjunto  $\Omega_\gamma = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_\gamma\}$  convergen hacia  $\Omega_\gamma$  y una vez que ingresan permanecerán dentro de para todo tiempo posterior. Esto es, dados los cálculos anteriores de  $\gamma_{1,max}$ ,  $c_\gamma$  y el Teorema B2 del Capítulo 2 es posible concluir que las trayectorias del Sistema (3.5)-(3.8) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas en el conjunto  $\Omega_\gamma$ .  $\square$

Note que el teorema converso de Lyapunov establece que si el origen del sistema lineal  $\dot{x} = A(t)x$  es estable, entonces existe una  $P$  tal que  $PA(t) + A(t)'P \prec 0$ . Este resultado en el caso de sistemas politópicos equivale a requerir que  $PA^{[j]} + A^{[j]}'P \prec 0$ . El conocer de antemano la estabilidad del sistema no perturbado, nos permite establecer la existencia de  $P$ . En particular si no existe  $P$  tal que  $PA^{[j]} + A^{[j]}'P \prec 0$ , el teorema anterior no puede usarse y ello implicaría que pueden existir condiciones de incertidumbre que derivan en un comportamiento inestable del sistema. El algoritmo para la estimación de  $\gamma_{1,max}$  puede visualizarse en la Figura 3.1; además en la Figura 3.2 se ilustra la trayectoria que converge al conjunto invariante.

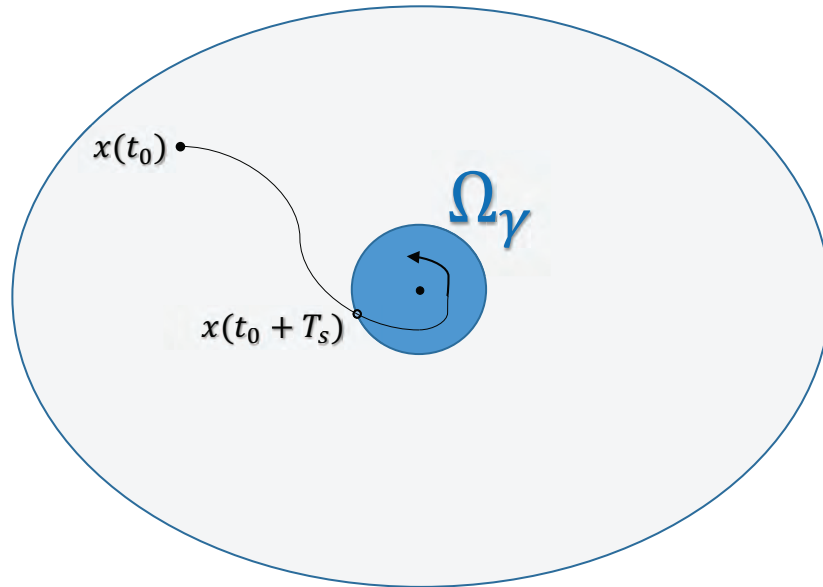


Figura 3.2.: Ilustración del conjunto invariante al cual las trayectorias convergen en lazo cerrado

### 3.3. Control robusto dependiente de la salida para sistemas politópicos conmutados

Existen trabajos relevantes relativos al estudio de la estabilidad robusta de sistemas politópicos y/o conmutados con retroalimentación de estado [58], [59], [60], [61] *et. al.* En estos trabajos no se realiza síntesis de control.

En la literatura también se han presentado resultados relevantes sobre la obtención de controladores lineales que estabilizan a un sistema incierto no conmutado con perturbaciones exógenas. En [62] se presenta una metodología para la síntesis de controladores con retroalimentación de estados para una clase de sistemas conmutados lineales, utilizando una función de Lyapunov por pedazos que es cuadrática. El resultado utiliza el Lema de proyección recíproca para establecer el resultado de estabilidad utilizando controladores lineales por pedazos.

En [63] se estudia la estabilización de sistemas lineales por pedazos con incertidumbre aditiva por medio de funciones de Lyapunov por pedazos. El esquema propuesto utiliza un punto de vista  $\mathcal{H}_\infty$  para establecer estabilidad de un sistema con perturbaciones  $\mathcal{L}_2$  integrables. Se muestra que las leyes de control pueden obtenerse utilizando software para la resolución de LMI's. Sin embargo no se estudia de manera explícita el caso de variación de parámetros en tiempo.

En la sección anterior se hizo una extensión de los trabajos de [56] y [57] para el caso de retroalimentación de salida. En esta sección mostraremos una extensión de estos resultados al caso de sistemas conmutados con retroalimentación de salida; con este fin considere la ley de retroalimentación (3.8) para el sistema (2.37)-(2.39) y la parametrización de la salida dada por (3.6). Se requiere encontrar  $L$  que estabilice al sistema politópico conmutado incierto (2.37)-(2.39). De

[48], así como de los Teoremas B1 y B2 del Capítulo 2 el análisis de Lyapunov puede ser usado para establecer un resultado de acotamiento de las trayectorias del sistema (2.37)-(2.39) como se muestra en el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.** *Considere el Sistema (2.37)-(2.39) con la retroalimentación de salida por pedazos:*

$$v_i(t) = K_i y = L_i C x. \quad (3.33)$$

Sea  $P \succ 0, P = P'$  y  $L_i$  matrices que minimizan:

$$\sum \lambda \left( P A_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + P B_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P + \gamma_{1,i} \mathbb{I}_{n \times n} \right) \quad (3.34)$$

para cada  $i \in Z$  donde cada  $i$ -ésima minimización está sujeta a

$$\|L_i\| \leq L_{max} \quad (3.35)$$

$$\lambda_{max} \left( P A_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + P B_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P + \gamma_{1,i} \mathbb{I}_{n \times n} \right) < 0 \quad (3.36)$$

para valores  $\gamma_{1,i} > 0$  para cada  $i \in Z$  y para todo  $j = 1 \dots v$ , entonces las soluciones del sistema (2.37)-(2.39) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas en el conjunto  $\Omega_{\gamma,c} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{\gamma,c}\}$  para todo  $\theta \in \Theta$  con

$$c_{\gamma,c} = \frac{2B_{mc} \|P\| w_{max}}{\gamma_{1,mc}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \quad (3.37)$$

$$\gamma_{1,mc} = \min_{i \in Z} (\gamma_{1,i}) \quad (3.38)$$

donde  $w_{max} = \sup(\|w(t)\|) \forall t$  y

$$B_{mc} = \max_{j \in \{1, \dots, v\}, i \in Z} \left( \|B_{w,i}^{[j]}\| \right). \quad (3.39)$$

*Demostración.* Considere la función candidata de Lyapunov  $V = x' P x$  con  $P = P', P \succ 0$  (definida positiva) común a todos los subsistemas. La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias el sistema (2.37)-(2.39) es:

$$\dot{V} = x' \left( P A_i(\theta) + A_i'(\theta) P \right) x + x' \left( P B_{v,i}(\theta) L_i C + C' L_i' B_{v,i}'(\theta) P \right) x + 2B_{w,i}'(\theta) P x w. \quad (3.40)$$

para  $i \in Z$  y  $\theta \in \Theta$ . Observe que  $A_i(\theta)$  es la matriz politópica del modo conmutado  $i$ . Esto es, ahora se tiene una descripción de matrices politópicas por pedazos. De [48], la estabilidad en el

sentido de Lyapunov es asegurada si:

$$\dot{V} = x' \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P \right) x + x' \left( PB_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P \right) x + 2B_{w,i}^{[j]'} P x w < 0 \quad (3.41)$$

para todo  $i \in Z$  y para todo  $j = 1 \dots v$ , es decir para todos los vértices del conjunto  $\Theta$  y para todo subsistema.

Considerando que  $w_{max} = \sup(\|w(t)\|) \forall t$ , es la cota máxima de perturbación, se tiene:

$$\dot{V} \leq x' \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P \right) x + x' \left( PB_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P \right) x + 2B_{mc} \|P\| \|x\| w_{max} < 0 \quad (3.42)$$

donde:

$$B_{mc} = \max_{j \in \{1, \dots, v\}, i \in Z} \left( \|B_{w,i}^{[j]}\| \right). \quad (3.43)$$

Considere por el momento sólo el término  $2B_{mc} \|P\| \|x\| w_{max}$ . Es claro que como la norma euclidiana es una función que es cero si su argumento es cero y positiva definida si su argumento no es cero, entonces existe un número  $\gamma_{1,i} > 0$  tal que  $\gamma_{0,c} \|x\| \leq \gamma_{1,i} \|x\|^2 = \gamma_{1,i} x' \mathbb{I}_{n \times n} x$  para  $\gamma_{0,c} = 2B_{mc} \|P\| w_{max} > 0$ . Note que debido a que  $\gamma_{0,c}$  no depende de  $i$ , se puede proponer un  $\gamma_{1,c}$  que no dependa de  $i$ . Sin embargo por razones que quedarán claras más adelante, se propone que dependa de  $i$  para simplificar la notación. Por lo que podemos reescribir la Expresión (3.42) como:

$$\dot{V} \leq x' \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P \right) x + x' \left( PB_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P \right) x + \gamma_{1,i} x' \mathbb{I}_{n \times n} x \quad (3.44)$$

$$\dot{V} \leq x' \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + PB_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P + \gamma_{1,i} \mathbb{I}_{n \times n} \right) x \quad (3.45)$$

Para asegurar que (3.45) sea menor a cero debe cumplirse:

$$PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + PB_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P + \gamma_{1,i} \mathbb{I}_{n \times n} \prec 0 \quad (3.46)$$

para todo  $i \in Z$  y para todo  $j = 1 \dots v$  y donde a  $\gamma_{1,i}$  se le conoce como margen de estabilidad. Sea  $S = P^{-1}$  y  $M_i = L_i C S$ , multiplicando (3.46) por la izquierda y por la derecha por  $S$  y luego substituyendo  $M_i$  se obtiene:

$$A_i^{[j]} S + S A_i^{[j]'} + B_{v,i}^{[j]} M_i + M_i' B_{v,i}^{[j]'} + \gamma_{1,i} S S \prec 0 \quad (3.47)$$

Note que en la expresión anterior se tienen varias incógnitas: las asociadas con las entradas de  $S$ ,  $M$  y con  $\gamma_{1,i}$ . Además note que la desigualdad:

$$\gamma_{0,c} \|x\| \leq \gamma_{1,i} \|x\|^2 \quad (3.48)$$

no puede satisfacerse para todo  $\|x\|$  con  $\gamma_{1,i}$  finita. Esto es fácil de ver si se reescribe (3.48) como sigue:

$$\frac{\gamma_{0,c}}{\|x\|} \leq \gamma_{1,i} \quad (3.49)$$

si  $\|x\|$  es muy cercano a cero el valor de  $\gamma_{1,i}$  es muy grande. Debido a lo anterior la Desigualdad (3.47) no puede satisfacerse para un  $S$  finito si la ganancia del control es finita y limitada. En otras palabras si:

$$A_i^{[j]}S + SA_i^{[j]'} + B_{v,i}^{[j]}M_i + M_i' B_{v,i}^{[j]'} \prec 0 \quad (3.50)$$

se satisface entonces siempre es posible encontrar una  $S$  que satisfaga (3.47), pero si la ganancia del control es limitada el margen de estabilidad máximo asociado a (3.50) ya está fijo, por lo que siempre existe una vecindad alrededor de cero tal que (3.47) no se satisface. En consecuencia, es necesario calcular:

1. El valor  $\gamma_{1,mc}$  tal que (3.47) se satisfaga, dada una limitación de ganancia de los controladores  $\|L_i\| \leq L_{max}$ .
2. El valor  $c_{\gamma,c}$  tal que las soluciones que inicien en  $\Omega_{\gamma,c} = \{x \mid \|x\| < c_{\gamma,c}\}$  permanecen en él para todo tiempo futuro.

Con el fin de encontrar el  $\gamma_{1,mc}$  que satisfaga (3.47) con una limitación de ganancia de los controladores  $\|L_i\| \leq L_{max}$ , considere el siguiente algoritmo.

**Algoritmo 3.2.** Algoritmo para el cálculo de  $\gamma_{1,mc}$

1. Obtenga una matriz  $S$  de la siguiente LMI para todo  $j = 1 \dots v$  y para todo  $i \in Z$ :

$$A_i^{[j]}S + SA_i^{[j]'} \prec 0. \quad (3.51)$$

2. Ponga  $i = 1$ .
3. Ponga  $\gamma_{1,i} = 0$  (i.e. asuma margen de estabilidad nulo).
4. Resuelva con  $P = S^{-1}$  obtenido del Paso 1, el siguiente

**Problema 3.2.** Encontrar  $L_i$  que minimiza:

$$\sum \lambda \left( PA_i^{[j]} + A^{[j]'}P + PB_{v,i}^{[j]}L_iC + C'L_i'B_{v,i}^{[j]'}P + \gamma_{1,i}\mathbb{I}_{n \times n} \right)$$

sujeto a

$$\|L_i\| \leq L_{max}$$

$$\lambda_{max} \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'}P + PB_{v,i}^{[j]}L_iC + C'L_i'B_{v,i}^{[j]'}P + \gamma_{1,i}\mathbb{I}_{n \times n} \right) < 0.$$

5. Si existe solución al Problema 3.2 incremente el valor de  $\gamma_{1,i}$  y regrese al Paso 4, si no continúe al paso siguiente.
6. Incremente el valor de  $i$ , es decir  $i = i + 1$ .

7. Si  $i \in Z$  regrese al Paso 3, si no calcule:

$$\gamma_{1,mc} = \min_{i \in Z} (\gamma_{1,i}). \quad (3.52)$$

8. Fin

**Observación 3.5.** Observe que en la Ecuación (3.52) es el mínimo y no el máximo, el que constituye el peor caso de margen de estabilidad. Márgenes de estabilidad pequeños resultan en conjuntos invariantes más grandes y visceversa.

Por otro lado, para el cálculo de  $c_{\gamma,c}$  considere el Teorema B2 en el cuál si se establece la existencia de una función definida positiva tal que

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) &\leq -W(x), \forall \|x\| \geq \mu_s \geq 0 \end{aligned}$$

entonces:

$$\|x(t)\| < \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu_s)), \forall t \geq t_0 + T_s. \quad (3.53)$$

En este caso  $\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2$ , esto es:

$$\alpha_1(\|x\|) = \lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \quad (3.54)$$

$$\alpha_2(\|x\|) = \lambda_{\max}(P)\|x\|^2. \quad (3.55)$$

Aún mas,

$$\dot{V} \leq 0, \forall \|x\| \geq \mu_s \geq 0. \quad (3.56)$$

Con el fin de calcular  $\mu_s$  considere la desigualdad (3.48), es claro que esta desigualdad se sigue satisfaciendo con  $\gamma_{1,i} = \gamma_{1,mc}$  y  $\gamma_{0,c}$ :

$$2B_{mc} \|P\| w_{max} \|x\| \leq \gamma_{1,mc} \|x\|^2 \quad (3.57)$$

$$\frac{2B_{mc} \|P\| w_{max}}{\gamma_{1,mc}} \leq \|x\| \quad (3.58)$$

De tal forma que  $\dot{V} < 0$  sólo cuando (3.58) se satisface, esto es:

$$\mu_s \leq \frac{2B_{mc} \|P\| w_{max}}{\gamma_{1,mc}}. \quad (3.59)$$

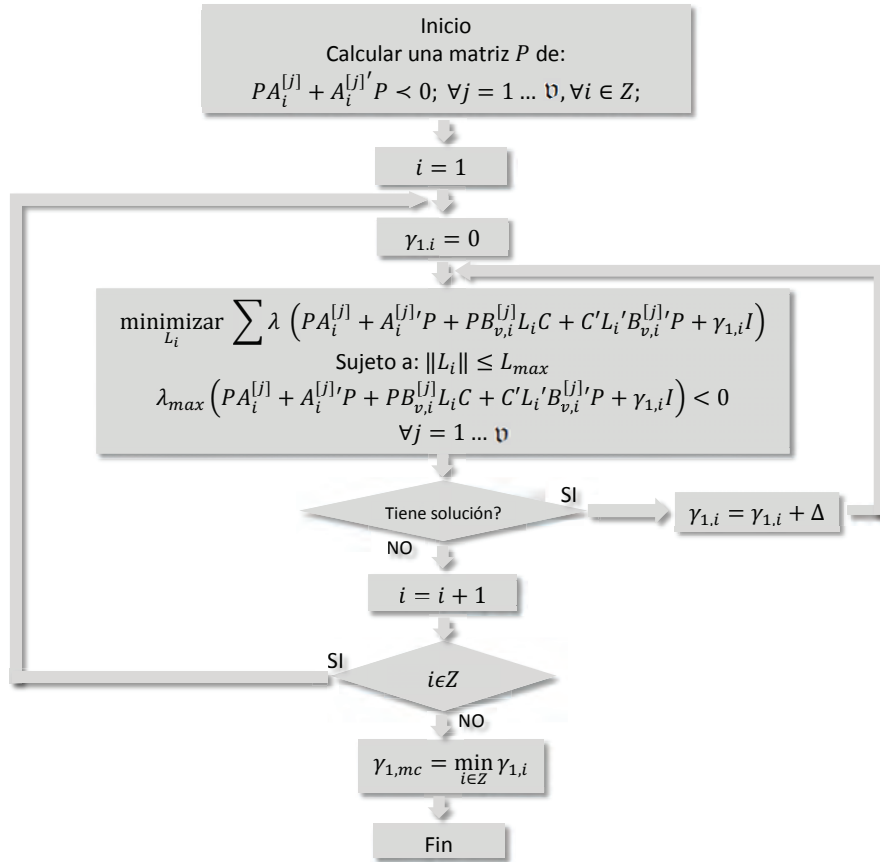


Figura 3.3.: Algoritmo para el cálculo de  $\gamma_{1,mc}$

Por lo que sustituyendo este valor en la Ecuación (3.53) se obtiene:

$$\|x(t)\| \leq \frac{2B_{mc} \|P\| w_{max}}{\gamma_{1,mc}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} = c_{\gamma,c} \quad (3.60)$$

En consecuencia, por virtud del Teorema B2 las trayectorias que inician fuera del conjunto  $\Omega_{\gamma,c} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{\gamma,c}\}$  convergen hacia  $\Omega_{\gamma,c}$  y una vez que ingresan permanecerán dentro de para todo tiempo posterior. En vista de la Observación 3.5 el conjunto dado por la Ecuación (3.60) es el conjunto invariante más grande para todo escenario de incertidumbre y para todo modo. Esto es, dados los cálculos anteriores de  $\gamma_{1,mc}$ ,  $c_{\gamma,c}$  y el Teorema B2 del Capítulo 2, así como porque  $V = x'Px$  es una función de Lyapunov común es posible concluir que las trayectorias del Sistema (2.37)-(2.39) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas en el conjunto  $\Omega_{\gamma,c}$  bajo cualquier conmutación.  $\square$



**Observación 3.6.** *El conjunto invariante  $\Omega_{\gamma,c}$  del Teorema 3.2 es de hecho el conjunto invariante más grande de todos los modos de operación del sistema conmutado bajo el peor escenario de incertidumbre.*

El algoritmo en la prueba del Teorema 3.2 puede visualizarse en la Figura 3.3. En la prueba de este Teorema se utilizó una función de Lyapunov común para garantizar acotamiento de las soluciones independientemente de la conmutación, en donde todos los subsistemas usaban ganancias de control para modificar la tasa de convergencia al conjunto invariante. En la siguiente sección se analizará el caso especial en donde sólo una parte de los modos conmutados tienen esta propiedad; mientras que en otros no es posible (*i.e.* modos sin retroalimentación).

Por otro lado, note que proveería de mayor flexibilidad al sistema en lazo cerrado utilizar valores  $L_{max,i}$  particulares a cada modo; en los algoritmos propuestos no existe dificultad adicional alguna asociada a utilizar diferentes cotas de ganancia para cada modo, por lo que esta extensión podría hacerse sin modificar sustancialmente el algoritmo. Sin embargo, observe que para el diseño del sistema de seguridad activa antivuelco y antiderrape en la Tesis, la variación de este valor podría mejorar en el desempeño sólo cuando estas cotas sean más grandes, pues lo que se busca es obtener la mayor tasa de convergencia en cada modo para evitar el riesgo.

### **3.4. Control robusto dependiente de la salida para sistemas politópicos conmutados con subsistemas en lazo abierto**

En esta sección se requiere encontrar  $v_i$  de la forma (3.33) con  $\|L_i\| \leq L_{max}$  que maximicen cada margen de estabilidad del sistema politópico conmutado incierto (2.37)-(2.39) para un conjunto de subsistemas  $Z_{lc}$  que excluye a un conjunto no vacío de subsistemas que sólo pueden evolucionar en lazo abierto  $Z_{la}$ , es decir cuando:

$$Z = Z_{lc} \cup Z_{la} \tag{3.61}$$

se cumple para todo tiempo. Cada subsistema de  $Z$  se considera estable en lazo abierto y se busca aumentar la tasa de convergencia de los subsistemas  $Z_{lc}$  bajo algún criterio de conmutación.

**Observación 3.7.** *Una estructura de sistema conmutado como la presentada en esta sección es de interés para el diseño de un sistema de seguridad activa antivuelco y antiderrape, pues se busca permitir la evolución a lazo abierto mientras no exista este riesgo. Si el conductor ejecuta una maniobra perturba al sistema en lazo abierto. Si la magnitud de la perturbación es suficientemente grande, la norma del estado puede crecer a un valor tal que el índice de volcadura/derrape lateral indique un riesgo. En este caso, se busca conmutar a un modo en lazo cerrado cuya acción de control provoque una disminución del Índice de Volcadura/Derrape hasta un valor seguro. Note que el hecho de que sea detectada una volcadura o derrape, no equivale a que el subsistema activo sea inestable, si no que su conjunto invariante es más grande.*

En el Capítulo 5 se muestra la obtención de un modelo del vehículo de 4 ruedas que es estable cuando no es perturbado en lazo abierto; note que si no lo fuera, el vehículo volcaría cuando circulara en línea recta. El modelo presentado es válido mientras no ocurra una pérdida de sustentación de alguna de las ruedas a lo que llamaremos fase de volcadura o ocurra algún derrape lateral<sup>1</sup> a lo que llamaremos fase de derrape lateral; si el vehículo se encuentra en fase de volcadura o derrape lateral, deben obtenerse modelos para el vehículo en fase de volcadura o en fase de derrape lateral para luego realizar alguna acción correctiva. Debido a que una acción de control basada en frenado o tracción/propulsión diferencial no tiene efecto sobre el vehículo en fase de volcadura o derrape lateral por la pérdida de adherencia en las ruedas y a que no se pudieron encontrar actuadores de control eficientes que sean capaces de terminar con la fase de derrape lateral y volcadura del vehículo, en esta Tesis se considera que el vehículo no está en ningún instante en fase de volcadura o derrape y en su lugar se previene que el vehículo entre en cualquiera de estas fases.

Considerando la estructura conmutada del sistema de seguridad activa vehicular antivuelco y antiderrape lateral descrita, en este punto se busca encontrar  $L_i$  que estabilicen los modos  $Z_{lc}$  sistema politópico conmutado incierto (2.37)-(2.39). De [48], así como de los Teoremas B1 y B2 del Capítulo 2 el análisis de Lyapunov, con una función cuadrática común, pueden ser usados para establecer un resultado de acotamiento de las trayectorias del sistema (2.37)-(2.39) como se muestra en el siguiente teorema:

---

<sup>1</sup>En el Capítulo 6 se establece lo que es un derrape lateral y como se cuantifica en un vehículo de 4 ruedas

**Teorema 3.3.** *Considere el sistema en lazo abierto*

$$\dot{x} = A_i(\theta(t))x + B_{w,i}(\theta(t))w \quad (3.62)$$

$$y = Cx \quad (3.63)$$

$$z = D_i(\theta(t))x + E_i(\theta(t))w \quad (3.64)$$

y el sistema en lazo cerrado (2.37)-(2.39) cuyos modos evolucionan en  $Z_{1a}$ ,  $Z_{1c}$  respectivamente. Si se puede encontrar una matriz  $P \succ 0, P = P'$  tal que

$$PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P \prec 0 \quad (3.65)$$

para cada  $i \in Z$  y para cada  $j = 1, \dots, \mathfrak{v}$ , y controladores (3.33) vectores  $L_i$  tales que minimizan:

$$\sum \lambda \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + PB_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P + \mathfrak{v}_{1,i} \mathbb{I}_{n \times n} \right) \quad (3.66)$$

para cada  $i \in Z_{1c}$  y para cada  $j = 1, \dots, \mathfrak{v}$ , donde la  $i$ -ésima minimización está sujeta a

$$\|L_i\| \leq L_{max} \quad (3.67)$$

$$\lambda_{max} \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + PB_{v,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{v,i}^{[j]'} P + \mathfrak{v}_{1,i} \mathbb{I}_{n \times n} \right) < 0 \quad (3.68)$$

para  $\mathfrak{v}_{1,i} > 0$ , para cada  $i \in Z_{1c}$  y para todo  $j = 1 \dots \mathfrak{v}$ , entonces las soluciones del sistema (2.37)-(2.39) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas para conmutación arbitraria en el conjunto  $\Omega_{\mathfrak{v},c} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{\mathfrak{v},c}\}$  para todo  $\theta \in \Theta$  con

$$c_{\mathfrak{v},c} = \frac{2B_{mc} \|P\| w_{max}}{\mathfrak{v}_{1,mc}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}, \quad \mathfrak{v}_{1,mc} = \min_{i \in Z} (\mathfrak{v}_{1,i}) \quad (3.69)$$

donde  $w_{max} = \sup(\|w(t)\|) \forall t$  y

$$B_{mc} = \max_{j \in \{1, \dots, \mathfrak{v}\}, i \in Z} \left( \|B_{w,i}^{[j]}\| \right). \quad (3.70)$$

Aún más, cuando se conmuta solamente entre modos en lazo cerrado, las trayectorias están acotadas por un conjunto más pequeño dado por:

$$c_{\mathfrak{v},lc} = \frac{2B_{mlc} \|P\| w_{max}}{\mathfrak{v}_{1,mlc}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}, \quad \mathfrak{v}_{1,mlc} = \min_{i \in Z_{1c}} (\mathfrak{v}_{1,i}) \quad (3.71)$$

$$B_{mlc} = \max_{j \in \{1, \dots, \mathfrak{v}\}, i \in Z_{1c}} \left( \|B_{w,i}^{[j]}\| \right). \quad (3.72)$$

*Demostración.* Considere la función candidata de Lyapunov  $V = x'Px$  con  $P = P', P \succ 0$  (definida positiva) común a todos los subsistemas. La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias del sistema (3.62)-(3.64) es:

$$\dot{V} = x' \left( PA_i(\theta) + A_i'(\theta)P \right) x + 2B_{w,i}'(\theta)Pxw. \quad (3.73)$$

para  $i \in Z_{la}$  y  $\theta \in \Theta$ . De [48], la estabilidad en el sentido de Lyapunov es asegurada si:

$$\dot{V} = x' \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P \right) x + 2B_{w,i}^{[j]'} Pxw < 0 \quad (3.74)$$

para todo  $i \in Z_{la}$  y para todo  $j = 1 \dots v$ , es decir para todos los vértices del conjunto  $\Theta$  y para todo subsistema en lazo abierto. Considerando que  $w_{max} = \sup(\|w(t)\|) \forall t$ , es la cota máxima de perturbación, se tiene:

$$\dot{V} \leq x' \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P \right) x + 2B_{mc} \|P\| \|x\| w_{max} < 0 \quad (3.75)$$

donde:

$$B_{mc} = \max_{j \in \{1, \dots, v\}, i \in Z_{la}} \left( \|B_{w,i}^{[j]}\| \right). \quad (3.76)$$

Análogamente a las secciones anteriores existe un número  $v_{0,la} > 0$  para todos los modos en lazo abierto y para todos los vértices tal que  $v_{0,la} \|x\| \leq v_{1,la} \|x\|^2 = v_{1,la} x' \mathbb{I}_{n \times n} x$  con  $v_{0,la} = 2B_{mc} \|P\| w_{max} > 0$ . Por lo que podemos reescribir la Expresión (3.74) como:

$$\dot{V} \leq x' \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P \right) x + v_{1,la} x' \mathbb{I}_{n \times n} x \quad (3.77)$$

$$\dot{V} \leq x' \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + v_{1,la} \mathbb{I}_{n \times n} \right) x \quad (3.78)$$

Para asegurar que (3.78) sea menor a cero debe cumplirse:

$$PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + v_{1,la} \mathbb{I}_{n \times n} \prec 0 \quad (3.79)$$

para todo  $i \in Z$  y para todo  $j = 1 \dots v$  y donde a  $v_{1,la}$  se le conoce como margen de estabilidad. Note que en la ecuación anterior se tienen varias incógnitas: las asociadas con las entradas de  $P$  y con  $v_{1,la}$ . Además note que la desigualdad:

$$v_{0,la} \|x\| \leq v_{1,la} \|x\|^2 \quad (3.80)$$

puede satisfacerse para todo  $\|x\| \neq 0$  con  $v_{1,la}$  finita pues cada  $A_i^{[j]}$  es Hurwitz; es decir siempre (excepto en  $\|x\| = 0$ ) podemos encontrar una matriz  $P$  que satisface 3.79 y que existirá un vértice  $j = j_m$  y un subsistema  $i_m \in Z$  tal que el eigenvalor de  $PA_{i_m}^{[j_m]} + A_{i_m}^{[j_m]'} P + v_{1,la} \mathbb{I}_{n \times n}$  es más grande que los eigenvalores de todos los vértices. Es decir, el vértice  $j_m$  del subsistema  $i_m$  es el peor escenario de convergencia. Note además que la tasa de convergencia depende del tamaño de los eigenvalores.

En vista de la Relación (3.80) existe un conjunto invariante al cuál las trayectorias convergen dado por:  $\Omega_{v,la} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{v,la}\}$  con

$$c_{v,la} = \frac{2B_{mla} \|P\| w_{max}}{v_{1,la}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \quad (3.81)$$

$$v_{1,la} = \min_{i \in Z_{la}} (v_{1,la}) \quad (3.82)$$

y

$$B_{mla} = \max_{j \in \{1, \dots, v\}, i \in Z_{la}} \left( \|B_{w,i}^{[j]}\| \right). \quad (3.83)$$

Ahora considere la misma función de Lyapunov  $V = x'Px$  sólo para los subsistemas en lazo cerrado  $i \in Z_{lc}$ . Usando el Teorema 3.2 es posible concluir que las trayectorias están acotadas por:

$$c_{v,lc} = \frac{2B_{mlc} \|P\| w_{max}}{v_{1,mlc}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \quad (3.84)$$

con

$$v_{1,mlc} = \min_{i \in Z_{lc}} (v_{1,i}) \quad (3.85)$$

y

$$B_{mlc} = \max_{j \in \{1, \dots, v\}, i \in Z_{lc}} \left( \|B_{w,i}^{[j]}\| \right). \quad (3.86)$$

Note que el radio del conjunto invariante  $\Omega_{v,la} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{v,la}\}$  es más grande que el radio de  $\Omega_{v,lc} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{v,lc}\}$  dado que  $v_{1,mlc}$  es a lo menos  $v_{1,la}$ . Esto es  $v_{1,la} \geq v_{1,mlc}$ , dado que la acción de los controladores aumentan este valor como se muestra en el algoritmo de la Figura 3.4, que es la que se propone para maximizar el margen de estabilidad. En otras palabras, cuando los modos evolucionan tanto en lazo cerrado como en lazo abierto, las trayectorias convergen a  $\Omega_{v,c} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{v,c}\}$  con

$$c_{v,c} = \frac{2B_{mc} \|P\| w_{max}}{v_{1,mc}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \quad (3.87)$$

$$v_{1,mc} = \min_{i \in Z} (v_{1,i}) \quad (3.88)$$

donde  $w_{max} = \sup(\|w(t)\|) \forall t$  y

$$B_{mc} = \max_{j \in \{1, \dots, v\}, i \in Z} \left( \|B_{w,i}^{[j]}\| \right). \quad (3.89)$$

Por lo que utilizando este valor se obtiene:

$$\|x(t)\| \leq \frac{2B_{mc} \|P\| w_{max}}{v_{1,mc}} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} = c_{v,c} \quad (3.90)$$

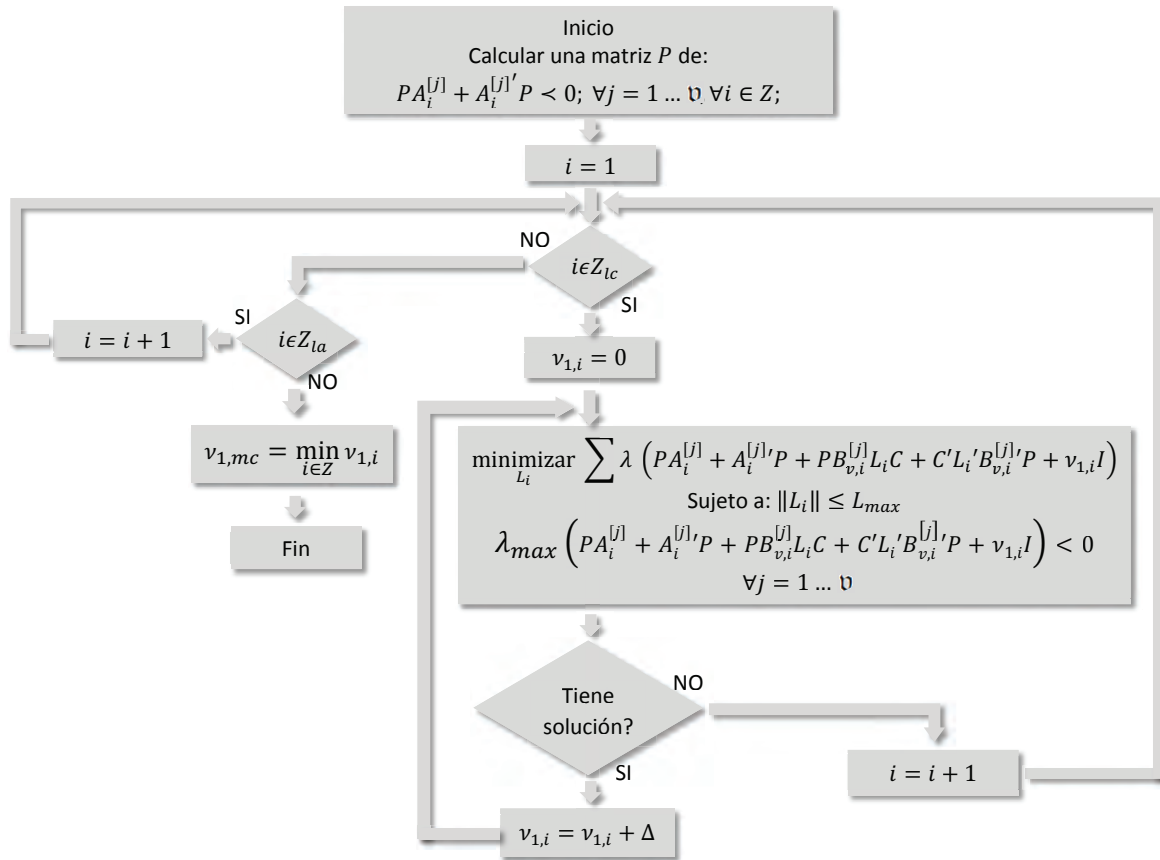


Figura 3.4.: Algoritmo para el cálculo de  $v_{1,mc}$  con modos en lazo abierto

En consecuencia, por virtud del Teorema B2 las trayectorias que inician fuera del conjunto  $\Omega_{v,c} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{v,c}\}$  convergen hacia  $\Omega_{v,c}$  y una vez que ingresan permanecerán dentro de para todo tiempo posterior. El conjunto dado por la Ecuación 3.90 es el conjunto invariante más grande para todo escenario de incertidumbre y para todo modo tanto en lazo cerrado como abierto. Esto es, dados los cálculos anteriores de  $v_{1,mc}$ ,  $c_{v,c}$  y el Teorema B2 del Capítulo 2, así como porque  $V = x'Px$  es una función de Lyapunov común es posible concluir que las trayectorias del Sistema (2.37)-(2.39) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas en el conjunto  $\Omega_{v,c}$  bajo cualquier conmutación.  $\square$

El algoritmo para la estimación de  $v_{1,mc}$  puede visualizarse en la Figura 3.4.

**Observación 3.8.** Note que dado que los conjuntos  $\Omega_{v,la} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{v,la}\}$ ,  $\Omega_{v,lc} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{v,lc}\}$  son invariantes en lazo abierto y cerrado respectivamente, cualquier superficie de conmutación

$$\|x(t)\| = c_{con} \quad (3.91)$$

con  $c_{v,lc} \leq c_{con} \leq c_{v,la}$  entre los modos en lazo cerrado y abierto, forma un conjunto invariante  $\Omega_{con} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{con}\}$ . En la siguiente sección se ocupa esta información junto con el resultado del Teorema 3.3 para derivar las propiedades de estabilidad de una ley de conmutación que depende de la predicción de una salida pero que puede ser vista como una del tipo (3.91).

### 3.5. Comentarios finales del capítulo

En esta sección se presentaron tres extensiones de los resultados de [56] y [57] para sistemas que tienen perturbaciones exógenas. Uno que extiende los resultados para retroalimentación de salida, otro que los extiende a sistemas conmutados, con retroalimentación de salida y finalmente otro que extiende los resultados para sistemas cuya estructura no permite tener todos los subsistemas en lazo cerrado. En los enfoques se utilizan herramientas tipo Lyapunov para derivar la estabilidad y calcular el margen de estabilidad que será función de la cota de las perturbaciones. Se propone la resolución de un problema de optimización para garantizar una tasa de convergencia mínima en lazo cerrado para poder reducir el conjunto invariante al cuál convergen las trayectorias. Este resultado se utiliza luego para establecer conjuntos invariantes en lazo cerrado y abierto. En capítulos posteriores se utilizan estos resultados para la obtención de controladores para un sistema de seguridad activa vehicular que mitiga el riesgo de volcadura y derrape.

## 4. Estabilidad de sistemas conmutados con leyes de conmutación predictivas

*En este capítulo se analiza el problema del diseño de leyes de conmutación predictivas estabilizantes para sistemas lineales conmutados con incertidumbre y sujetos a una perturbación exógena; en particular el objetivo de este capítulo es el de establecer las condiciones de estabilidad conmutada así como, las ventajas de los criterios predictivos de conmutación.*

### 4.1. Ley de conmutación predictiva dependiente de la salida

Como se ha mencionado en secciones previas, la conmutación dependiente de la salida consiste en una ley de conmutación determinada por la función

$$\zeta = \tilde{g}(z, w) \quad (4.1)$$

donde  $\zeta \in Z = 1 \dots M$ . En particular, dado que en aplicaciones vehiculares el riesgo de volcadura depende de las acciones del conductor, éstas deben de ser tomadas en cuenta para detonar la acción de control cuando hay riesgo de volcadura o derrape lateral. Debido a lo anterior la función  $\tilde{g}$  es también función de  $w$ .

En este capítulo se propone una ley de conmutación predictiva; es decir, buscamos anticipar la dinámica del vehículo perturbada por  $w$  hasta un horizonte de predicción  $T$  y en caso de riesgo de volcadura o derrape se detona la acción de control y manteniéndose en lazo abierto si no existe tal riesgo. En otras palabras, en un sistema de seguridad activa vehicular se busca aplicar una acción de control de manera selectiva si un riesgo predicho existe y permitir la evolución de la dinámica en lazo abierto en otras circunstancias.

Con base en lo anterior podemos escribir una ley de conmutación predictiva dependiente de la salida y la perturbación como sigue:

$$\zeta(t) = \hat{g}(z(t_p), w(t_p)) \quad (4.2)$$

con  $t_p \in [t, t + T]$  donde  $T > 0$  es el tiempo que se desea predecir u horizonte de predicción. Para poder evaluar  $\zeta(t)$  por medio de (4.2) se utiliza la dinámica del sistema (2.5)-(2.7) con el objeto de estimar el comportamiento futuro de la trayectoria del sistema a lazo abierto  $z(t + T)$ . Para poder integrar (2.5)-(2.7) a futuro, es requerido el conocimiento a priori del comportamiento de la perturbación  $w$  para todo instante en el intervalo  $(t, t + T]$ . Note que como se busca la estimación a futuro mientras la trayectoria evoluciona en un subsistema a lazo abierto,  $v = 0$ .



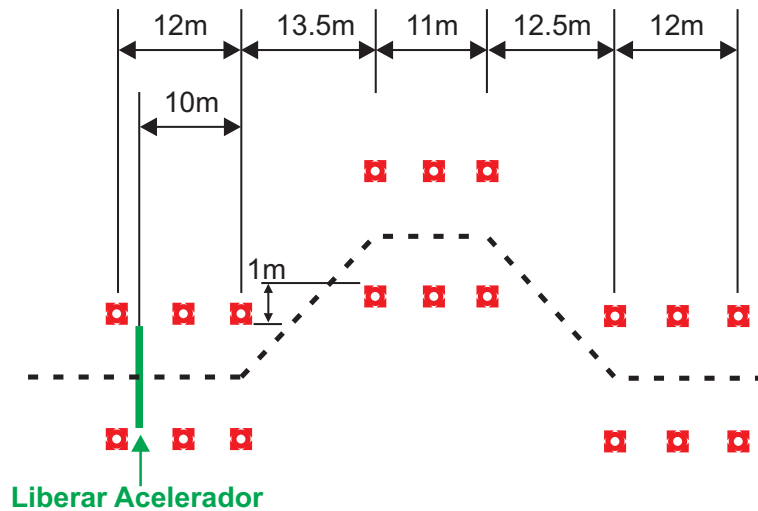


Figura 4.1.: Descripción del procedimiento de prueba ISO 3888-2 "Prueba del Alce"

La estrategia de la estimación de  $w$  debe ser simple en el sentido de consumir los menores recursos de procesamiento numérico posibles pues de lo contrario, el costo de la estimación computacional de la perturbación puede aumentar considerablemente la complejidad y la latencia<sup>1</sup> del control. En esta Tesis se propone el modelado del comportamiento del conductor como un sistema lineal dinámico, por lo que se usa conocimiento previo de su comportamiento con fines de predicción. De esta forma no se requiere el conocimiento a priori de la geometría del camino, ni de los obstáculos en él. El orden del modelo dinámico del conductor podrá ser fijado con base en un muestreo de su comportamiento y un criterio de desempeño. En este trabajo se consideran dinámicas de primero, segundo y tercer orden con la finalidad de mantener la simplicidad del cálculo en el algoritmo y se realiza un análisis numérico del error de estimación y de la latencia del algoritmo.

Con el fin de evaluar la confiabilidad de los modelos del conductor propuestos se utiliza una maniobra conocida como "Prueba del Alce" o "Maniobra de Cambio de Carril" y que se ha estandarizado en la norma ISO 3888-2 (vea Figura 4.1). Esta maniobra consiste en una línea de entrada a una velocidad de al menos  $60\text{km/h}$  y una línea de salida, entre las cuales existe un obstáculo que se debe esquivar. Estas pruebas usualmente se repiten a diferentes velocidades, incrementando la velocidad gradualmente hasta que el vehículo presenta derrape, volcadura o impacte alguno de los obstáculos dispuestos. En la Figura 4.1 se muestran las dimensiones del recorrido de referencia.

El desempeño del modelo del conductor se evalúa proponiendo un criterio funcional llamado Índice de Desempeño, denotado como  $e_m$  y que es dependiente del error cuadrático total del

<sup>1</sup>En esta Tesis se denomina latencia al tiempo que transcurre entre el inicio del cálculo de la estimación de  $w$  a futuro y la obtención de dicha estimación hasta cierto intervalo fijo.

Orden del modelo	Índice de desempeño
1	416.24
2	535.24
3	901.36

Tabla 4.1.: Índice de desempeño (4.3) como función del orden del modelo del conductor para una maniobra de ISO 3888-2.

modelo y la latencia del algoritmo, definido por la ecuación siguiente:

$$e_m = \sum_{n=1}^{M_T} \sum_{m=1}^{M_p} [w(m + N_n) - \widehat{w}(m)]^2 + k_{op} \eta_n^2 \quad (4.3)$$

donde  $w(m + N_n) - \widehat{w}(m)$  es el error entre el estado del modelo y el comportamiento medido pero atrasado (memorizado) hasta un horizonte  $T_n = t_s N_n$ ,  $t_s$  es el tiempo de muestreo. Además en la Ecuación (4.3), el tiempo  $T_m = M_p t_s$  es mayor al horizonte de predicción más grande  $M_T t_s$ ,  $k_{op}$  es un factor de penalización de los ciclos requeridos para el cálculo de  $\sum_{m=1}^{M_p} [w(m + N_n) - \widehat{w}(m)]^2$  hasta el tiempo  $T_m$  y  $\eta$  es el número de operaciones realizadas para el cálculo del índice para cada horizonte de tiempo. El índice de desempeño (4.3) toma en cuenta el error y la latencia del algoritmo en un conjunto de horizontes de tiempo  $T_n$  donde  $n = \{1, 2, \dots, M_T\}$ . Esto se hace así, con el fin de tomar en cuenta el desempeño del algoritmo de estimación en un intervalo de horizontes de tiempo, más que en un sólo valor de éstos.

La Ecuación (4.3) se ha descrito utilizando directamente un tiempo discreto y no el continuo, con el fin de esclarecer su implementación. Los valores continuos que son alimentados al modelo del vehículo pueden formarse a partir de los valores discretos de la estimación usando funciones constantes por pedazos, se decidió abordar la estimación del error del modelo del conductor desde un punto de vista discreto con el fin de poner en una perspectiva más clara el efecto de la latencia del algoritmo en la evaluación de su desempeño.

En la Figura 4.2 se presenta la evolución de la maniobra establecida en la Norma ISO 3888-2 a lo largo del tiempo, así como las predicciones de los modelos de orden uno, dos y tres para un vehículo SUV Cherokee modelo 2000 con  $T = 0.5s$ . Las simulaciones se obtuvieron por medio del software CarSim y el ambiente Simulink de Matlab. En esta figura es posible observar que al aumentar el orden del modelo del conductor, es posible también predecir con mayor antelación la maniobra; sin embargo la predicción se vuelve más errática y conlleva mayor latencia, lo que afecta adversamente su desempeño como puede observarse en la Tabla 4.1 calculada para  $k_{op} = 2$ .

En la Figura 4.3 presenta la evolución del Índice de Volcadura para las mismas condiciones de la Figura 4.2 para modelos de chofer de orden uno, dos y tres. Note como desde esta perspectiva gráfica, el modelo de primer orden es el que mejor predicción provee, siendo capaz de predecir la duración total más precisa del efecto de la maniobra. Con base en los resultados anteriores, es posible concluir que el modelo de primer orden es el que resulta más conveniente tanto para la efectividad de la predicción como para conservar la simplicidad del algoritmo. Debido a lo

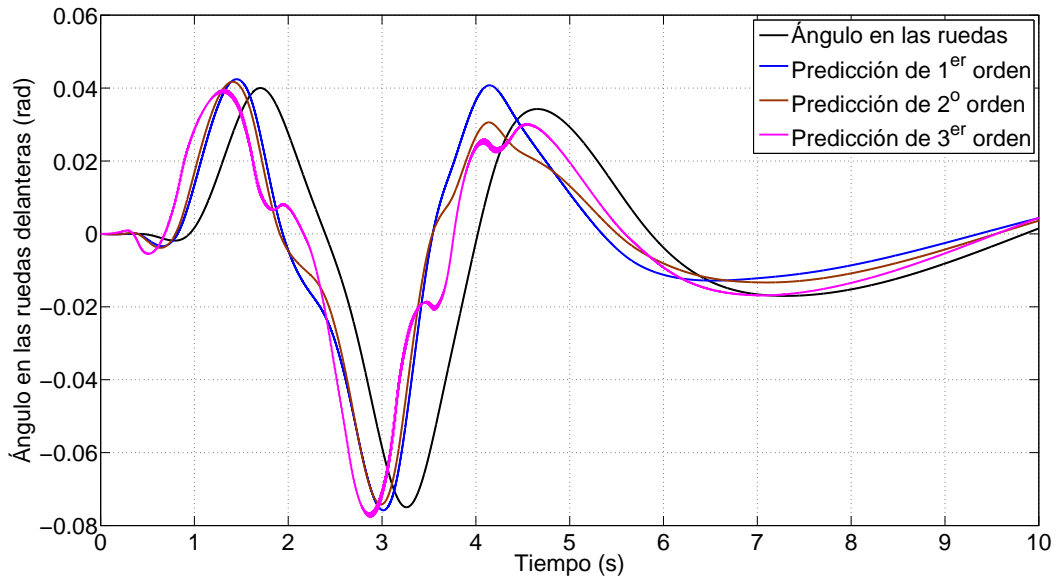


Figura 4.2.: Comparativa de la respuesta de modelos de chofer de orden uno, dos y tres para la prueba ISO 3888-2 aplicada a un vehículo SUV Cherokee 2000

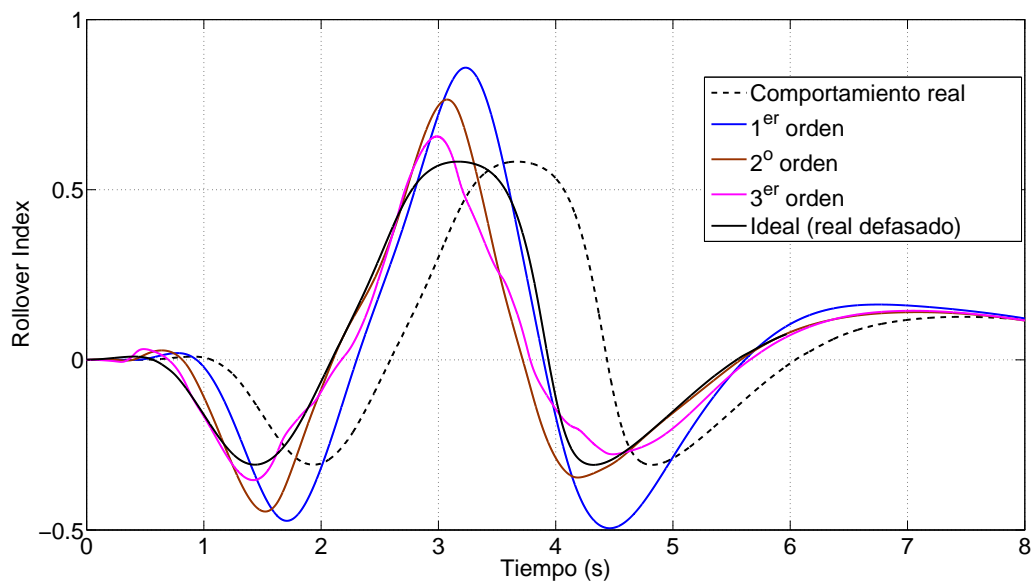


Figura 4.3.: Comparativa de la predicción de la salida RI con modelos de chofer de orden uno, dos y tres para la prueba ISO 3888-2 aplicada a un vehículo SUV Cherokee 2000

anterior, en esta Tesis se selecciona un modelo lineal de primer orden para la estimación de la perturbación con  $w \in \mathbb{R}$  a un horizonte de predicción  $T$ :

$$\dot{w} = k_T(w(t) - w(t - T)) \quad (4.4)$$

donde  $k_T$  es una constante positiva que se sintoniza para obtener el mejor Índice de Desempeño. En [41] se puede encontrar una discusión acerca del comportamiento dinámico de éstos y otros modelos de chofer.

**Observación 4.1.** *En la Tesis se considera que la perturbación exógena  $w$  es desconocida pero acotada cuando se diseñan los controladores y se estudia la estabilidad del sistema. Esto se hizo así, puesto que se desea que la tarea de diseño pueda hacerse fuera de línea; además note que sólo es necesario conocer el valor más grande de esta perturbación para obtener un resultado de estabilidad. Por otro lado, la implementación en línea requiere el conocimiento de  $w$  para estimar el riesgo de volcadura/derrape y para detonar la conmutación del control que previene el incremento de este riesgo.*

## 4.2. Control conmutado por una ley de conmutación predictiva para sistemas inciertos

Considere el sistema politópico conmutado incierto (2.37)-(2.39), con un subsistema que se desea evolucione en lazo abierto y un subsistema en lazo cerrado acorde al diseño de un sistema de seguridad activa vehicular. En esta sección buscamos condiciones para que el siguiente objetivo:

$$\|z(t)\| \leq z_{ref} \quad (4.5)$$

se cumpla para todo  $t \geq 0$  donde  $0 < z_{ref} < z_{max}$  y  $z_{max}$  constituye un riesgo inminente de volcadura y/o derrape lateral, en el Capítulo 6 se mostrará la metodología de estimación de esta variable.

Suponga que existe una matriz  $P$  y controladores

$$v_i(t) = L_i Cx \quad (4.6)$$

como se describe en el Capítulo 3, de manera que las trayectorias del Sistema (2.37)-(2.39) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas con conmutación arbitraria en el conjunto  $\Omega_{con} = \{x(t) \mid \|x(t)\| < c_{con}\}$  con  $c_{v,lc} \leq c_{con} \leq c_{v,la}$  (vea Observación 3.8).

En lo que sigue se establecerá una estrategia de conmutación y condiciones tales que  $\Omega_{con}$  coincida con un conjunto  $\Omega_{ref} = \{\|x(t)\| \mid \|z\| \leq z_{ref}\}$  de manera que las trayectorias del sistema

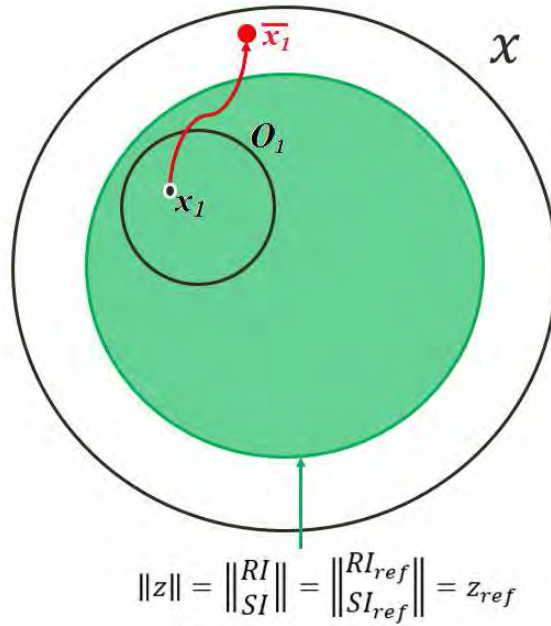


Figura 4.4.: Ilustración del efecto de la predicción.

(2.37)-(2.39) sean Uniformemente Ulteriormente Acotadas en un conjunto de estados que no representen una condición de riesgo  $\|z\| < z_{ref}$ .

**Observación 4.2.** Una manera de definir una ley de conmutación estabilizante puede ser conmutar una vez que  $\|z(t)\| = z_{ref}$ , en este caso podría ocuparse el resultado de estabilidad del Teorema 3.3 para garantizar que las trayectorias nunca entran en riesgo de volcadura o derrape lateral, siempre y cuando  $\Omega_{con} \supseteq \Omega_{ref}$ . Sin embargo, en este caso se esperaría a que el vehículo llegue a una condición crítica de operación para aplicar la Ley de Retroalimentación de Salida (4.6), por lo que otra opción para mejorar el desempeño sería conmutar con base en la predicción de riesgo. El resultado del Teorema 3.3 podría usarse también para derivar las propiedades de estabilidad del sistema, ya que el Teorema 3.3 utiliza un enfoque de función de Lyapunov común, por lo que se puede utilizar un criterio de conmutación arbitrario siempre que se conmute antes de que  $\|x(t)\| = c_{con}$ .

En este trabajo, se utiliza una predicción de la perturbación  $w$  a un horizonte de predicción  $T$ , es decir  $w(t+T)$ , para predecir el valor de la salida  $z(t+T)$  y determinar si existe un riesgo a futuro. En la Figura 4.4 se ilustra de manera gráfica el comportamiento que tiene una estrategia de conmutación predictiva como la descrita. La bola  $O_1$  corresponde a el modo activo con un

estado actual dibujado como el punto  $x_1$ . Se dibuja una bola sombreada que indica que en cualquier punto de su interior no hay riesgo. Esta bola sombreada se obtiene estableciendo umbrales de referencia para los indicadores de riesgo RI y SI (que constituyen la salida  $z$ ). En todo punto de la bola  $O_1$  no existe riesgo puesto que se encuentra en el interior de una región sombreada. Por ejemplo en el punto  $x_1$  no existe riesgo presente. Suponga que se puede realizar la predicción del estado y que esta predicción se realiza a partir de  $x_1$  hasta el estado predicho  $\bar{x}_1$  que está fuera de la bola sombreada, es decir la predicción indica que habrá un riesgo. Debido a que se predice un riesgo la conmutación a lazo cerrado es efectuada para mitigar el riesgo de manera eficaz.

Note que en una estrategia de conmutación predictiva como la descrita, se requieren dos criterios de conmutación. Un criterio que decida cuál es la descripción más adecuada de la dinámica del sistema y otro criterio predictivo que decide si el modo o subsistema debe evolucionar en lazo abierto o en lazo cerrado.

**Observación 4.3.** *La conmutación propuesta en esta Tesis se realiza en dos niveles. El primer nivel es un criterio de elección de modo que determina la descripción dinámica más adecuada, es decir se encarga de establecer como activo al modo/subsistema que tenga la descripción más exacta respecto a la real. El segundo nivel es un criterio que establece si es necesario aplicar un controlador al modo activo y está dado de la siguiente manera:*

$$i = \begin{cases} \text{Modo en lazo abierto} , & \text{si } \|z(t_p)\| \leq z_{ref} \wedge \exists t_r \geq t_p \\ \text{Modo en lazo cerrado} , & \text{si } \|z(t_p)\| > z_{ref} \end{cases} \quad (4.7)$$

donde  $t_p \in [t, t + T]$  y  $t_r$  es un tiempo de residencia mínimo que se usa para evitar el castañeo o chattering en la superficie de conmutación que fija  $\|z(t_p)\| \leq z_{ref}$ .

Aunque no se pudo encontrar en la literatura un criterio de elección de modo sustentado en algún análisis matemático, ni algún criterio para la elección de la cantidad de modos de operación que mejoren el desempeño, se logró establecer que una única linealización representa el peor escenario de desempeño de la estrategia de control presentada en esta Tesis, y el desempeño mejora realizando linealizaciones en varios puntos de operación dependientes de la velocidad del vehículo. En la Sección 7.3 se ilustra el criterio de elección de modo descrito en este párrafo así como también se ilustra como una sola descripción lineal es menos exacta que varias descripciones lineales y el desempeño de la estrategia propuesta en esta Tesis mejora utilizando más de una descripción lineal.

Note además que se puede elegir el criterio de conmutación de manera arbitraria, siempre y cuando se cumplan las condiciones del Teorema 3.3 para el caso de un sistema conmutado politópico con modos en lazo abierto; por lo tanto, el criterio en dos niveles descrito no afecta las propiedades de estabilidad si se cumplen las condiciones del Teorema 3.3.

A continuación se establecen las condiciones de estabilidad de la Ley de Conmutación (4.7).

**Teorema 4.1.** *Asuma las consideraciones del Teorema 3.3. La Ley de Conmutación (4.7) estabiliza al Sistema Conmutado (3.62)-(3.64), (2.37)-(2.39) en  $\Omega_{ref} = \{\|x(t)\| \|z\| \leq z_{ref}\}$  con la Ley de Conmutación (4.7), si se puede encontrar una matriz  $P \succ 0, P = P'$  tal que (3.65) y (3.66) se satisfacen con (3.68), y si*

$$c_{v,lc} \leq c_{con} = \frac{z_{ref} - (E_m + D_m B_m \frac{p}{q}) w_{max}}{D_m p e^{-qT}} < c_{v,la} \quad (4.8)$$

donde

$$B_m = \max_{\theta \in \mathfrak{D}, i \in Z} (\|B_{w,i}(\theta)\|) = \max_{\forall t} (\|B_{w,i}(t)\|) \quad (4.9)$$

$$D_m = \max_{\theta \in \mathfrak{D}, i \in Z} (\|D_i(\theta)\|) = \max_{\forall t} (\|D_i(t)\|) \quad (4.10)$$

$$E_m = \max_{\theta \in \mathfrak{D}, i \in Z} (\|E_i(\theta)\|) = \max_{\forall t} (\|E_i(t)\|) \quad (4.11)$$

$\|\Phi_i(0,t)\| \leq p e^{-qt}$ ,  $\forall i \in Z_{la}$  con  $\Phi_i(0,t)$  la matriz de transición de estados,  $c_{v,lc}$  está dado por (4.13) y  $c_{v,la}$  está dado por

$$c_{v,la} = \frac{2B_{mla} \|P\| w_{max}}{v_{1,mla}} \sqrt{\frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}} \quad (4.12)$$

$$v_{1,mla} = \min_{i \in Z_{la}} (v_{1,i}) \quad (4.13)$$

$$B_{mla} = \max_{j \in \{1, \dots, v\}, i \in Z_{la}} (\|B_{w,i}^{[j]}\|) \quad (4.14)$$

*Demostración.* Para probar el resultado del Teorema 4.1 primero se probará que la Ley de Conmutación (4.7) en el tiempo presente hace al sistema (3.62)-(3.64), (2.37)-(2.39) estable, luego se mostrará que con la predicción también es estable.

Del Teorema 3.3 y la Observación 3.8 es posible concluir que cualquier superficie  $\|x\| \leq c_{con}$  que satisfaga

$$c_{v,lc} \leq c_{con} \leq c_{v,la} \quad (4.15)$$

define un conjunto invariante. En lo siguiente probaremos que la Ley de Conmutación (4.7) define una superficie que cumple con (4.15) y que además asegura que  $\|z\| \leq z_{ref}$ . Con este fin, considere la evolución del sistema en lazo abierto con una perturbación dada por  $w_{max}$  y con un

tiempo inicial  $t_0 = 0$  esto es

$$z(t) = D_i(t)\Phi_i(0,t)x_0 + E_i(t)w(t) + D_i(t) \int_0^t \Phi_i(\tau,t)B_{w,i}(\tau)w_{max}d\tau \quad (4.16)$$

donde  $\Phi_i(0,t)$  denota la matriz de transición de estados ([64]) del  $i$ -ésimo subsistema en el intervalo  $[0,t]$ . Calculando la norma de (4.16) tenemos que:

$$\|z(t)\| \leq \|D_i(t)\|\|\Phi_i(0,t)\|\|x_0\| + \|E_i(t)\|\|w(t)\| + \|D_i(t)\| \left\| \int_0^t \Phi_i(\tau,t)B_{w,i}(\tau)w_{max}d\tau \right\| \quad (4.17)$$

Considere (4.9)-(4.11) entonces se tiene que:

$$\|z(t)\| \leq D_m\|\Phi_i(0,t)\|\varepsilon + E_mw_{max} + D_mB_mw_{max} \left\| \int_0^t \Phi_i(\tau,t)d\tau \right\| \quad (4.18)$$

donde  $\|x_0\| \leq \varepsilon$ . Note que  $\|\Phi_i(0,t)\| \leq pe^{-qt}$ ,  $\forall i \in Z_{la}$  y  $\|\Phi_i(0,t)\| \leq re^{-st}$ ,  $\forall i \in Z_{lc}$  para algunas constantes  $p, q, r, s > 0$ . Por lo que (4.18) puede reescribirse para su evolución en lazo abierto como:

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq D_mpe^{-qt}\varepsilon + E_mw_{max} + D_mB_mw_{max} \int_0^t pe^{-q(t-\tau)}d\tau \\ &= D_mpe^{-qt}\varepsilon + E_mw_{max} + D_mB_mw_{max} \frac{p}{q}(1 - e^{-qt}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\leq D_mpe^{-qt}\varepsilon + E_mw_{max} + D_mB_mw_{max} \frac{p}{q} \leq \rho_1 \leq z_{ref} \quad (4.20)$$

De (4.20), el valor de  $\varepsilon$  que satisface (4.20) en la igualdad para todo  $t$ , está dado por:

$$\varepsilon = \frac{z_{ref} - \left(E_m + D_mB_m \frac{p}{q}\right)w_{max}}{D_m p} \quad (4.21)$$

Si  $\varepsilon$  satisface (4.8) por virtud del Teorema 3.3 y la Observación 3.8 es posible concluir que las trayectorias de (3.62)-(3.64), (2.37)-(2.39) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas en  $\Omega_{ref} = \{\|x(t)\|\|z\| \leq z_{ref}\}$  con la Ley de Conmutación (4.7) en tiempo presente (sin predicción de  $w$  o  $z$ ). Observe que el uso de un tiempo de residencia mínimo  $t_r$  en lazo cerrado no afecta las propiedades de estabilidad.

Ahora considere la evolución del sistema predicha a un horizonte de tiempo  $T$ , que de manera análoga a (4.19) toma la forma

$$\begin{aligned} \|z(t+T)\| &\leq D_mpe^{-q(t+T)}\varepsilon + E_mw_{max} + D_mB_mw_{max} \int_0^{t+T} pe^{-q(t+T-\tau)}d\tau \\ &= D_mpe^{-q(t+T)}\varepsilon + E_mw_{max} + D_mB_mw_{max} \frac{p}{q}(1 - e^{-q(t+T)}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\leq D_mpe^{-q(T)}\varepsilon + E_mw_{max} + D_mB_mw_{max} \frac{p}{q} \leq \rho_2 \leq z_{ref} \quad (4.23)$$



El valor de  $\varepsilon$  que satisface (4.23) en la igualdad está dado por:

$$c_{con} = \varepsilon_T = \frac{z_{ref} - \left( E_m + D_m B_m \frac{p}{q} \right) w_{max}}{D_m p e^{-qT}} \quad (4.24)$$

Si  $\varepsilon_T$  satisface (4.8) por virtud del Teorema 3.3 y la Observación 3.8 es posible concluir que las trayectorias de (3.62)-(3.64), (2.37)-(2.39) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas en  $\Omega_{ref} = \{ \|x(t)\| \|z\| \leq z_{ref} \}$  con la Ley de Conmutación (4.7). Note que la cota  $\rho_2$  es más pequeño o igual a  $\rho_1$  por lo que el riesgo de volcadura es menor, lo que resulta en un mejor desempeño, es decir con la predicción se aumenta el margen de estabilidad. Observe que el uso de un tiempo de residencia mínimo  $t_r$  en lazo cerrado no afecta las propiedades de estabilidad.

□

### 4.3. Comentarios finales del capítulo

En este capítulo se obtiene una ley de conmutación predictiva dependiente de las perturbaciones, la salida  $z$  y del tiempo para un sistema conmutado politópico. Las condiciones de estabilidad para la conmutación propuesta se derivan del Teorema 3.3 del Capítulo 3.

## 5. Modelo dinámico de un vehículo de 4 ruedas.

*En esta sección se deriva un modelo no lineal de la dinámica del vehículo de cuatro ruedas que toma en cuenta la geometría del vehículo, su suspensión, fuerzas exógenas así como el tipo de terreno y llanta para el propósito de estimar el riesgo de volcadura y derrape lateral. Con base en este modelo no lineal y en la expresiones de las cotas de las incertidumbres, se deriva un modelo lineal conmutado politópico.*

### 5.1. Dinámica traslacional

Para el modelado de un vehículo de 4 ruedas, en la actualidad existen dos enfoques que son muy utilizados. El primero es utilizando métodos de teoría física como el de Euler o Lagrange y de esta manera se obtienen modelos muy precisos, sin embargo las ecuaciones pierden su referencia a cantidades físicas debido a que los cálculos son realizados para sistemas coordenados generalizados [65].

El segundo enfoque es utilizar las leyes de Newton en los diferentes sistemas coordenados de la dinámica del vehículo. Bajo este enfoque se determina el modelo del vehículo en esta Tesis y está inspirado en los trabajos de [65], [66] y [67]. Se denota con subíndices algunas variables y parámetros de un vehículo de 4 ruedas como sigue:  $gh \in \{FL, FR, RL, RR\}$ , donde  $g \in \{F, R\}$  se refiere la rueda frontal o posterior respectivamente, y  $h \in \{L, R\}$  se refiere a la rueda derecha o izquierda respectivamente. Se asume que el chasis del vehículo se comporta como un cuerpo rígido con un centro de gravedad ( $CoG$ ). En esta Tesis se consideran 6 ejes coordenados, 4 con origen en el centro de cada rueda con ejes  $X_{Wgh}, Y_{Wgh}, Z_{Wgh}$  y fijo a cada rueda, el segundo con origen en el centro de gravedad con ejes  $X_{CoG}, Y_{CoG}, Z_{CoG}$  y el tercero fijo (respecto a los dos anteriores) en algún lugar a nivel del camino con ejes en donde se encuentra el centro de gravedad de la masa amortiguada por la acción de la suspensión  $X_{In}, Y_{In}, Z_{In}$ . (Ver Figura 5.1). Estos sistemas serán denotados como sigue:

- $\Sigma_{CoG}$  Sistema coordenado de la masa amortiguada con origen en el centro de gravedad.
- $\Sigma_{Wgh}$  Sistema coordenado para cada una de las las ruedas con origen en el centro de cada rueda y fijo a cada rueda.
- $\Sigma_{In}$  Sistema coordenado inercial.

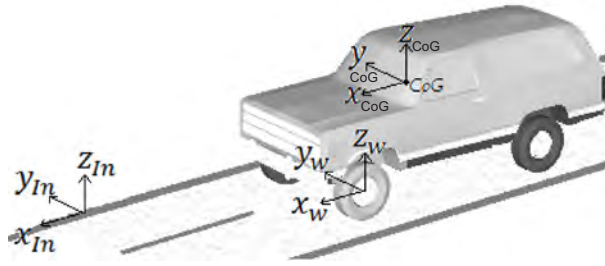


Figura 5.1.: Sistemas coordenados utilizados para la descripción de la dinámica del vehículo.

Con el término masa amortiguada o masa del centro de gravedad  $m_{CoG}$ , se entiende como la porción de la masa total del vehículo que se encuentre conectada a la suspensión que da lugar al peso amortiguado. Al resto de la masa total menos la masa amortiguada se le llama en esta Tesis masa no amortiguada  $m_u$  y es la suma de las masas de las llantas, rines, balatas, y todos los componentes de la suspensión incluyendo amortiguadores y resortes.

Se puede definir de manera simple los grados de libertad de un sistema dinámico, como el número de movimientos independientes que un objeto puede ejecutar en un espacio tridimensional. Los grados de libertad de  $m_{CoG}$  están conformados por tres desplazamientos longitudinales del chasis a lo largo de cada coordenada de  $\Sigma_{CoG}$ , y tres ángulos de rotación con respecto a cada eje coordinado. Estos ángulos son medidos alrededor de cada uno de los ejes  $X, Y, Z$  llamados alabeo o roll y se denota como  $\phi$ , cabeceo o pitch denotado como  $\chi$  y giro o yaw denotado como  $\psi$ . En la Tabla 5.1 se presenta la nomenclatura utilizada.

El  $CoG$  tiene el origen en el centro de gravedad del vehículo y todo movimiento de la masa amortiguada estará referenciado al sistema coordinado  $\Sigma_{CoG}$ . El sistema inercial  $\Sigma_{In}$  se considera fijo durante el movimiento del vehículo a diferencia del resto de sistemas coordinados, y se encuentra a una distancia suficiente del  $CoG$  y a nivel del suelo. Entre el suelo y cualquiera de las llantas en contacto con el suelo, existe una superficie de contacto con centroide denotado como  $P_{cgh}$ .

Considerando de existe siempre adherencia entre las llantas y el suelo, la fuerzas que interaccionan en el  $CoG$  son la siguientes:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{CoG} \\ \ddot{y}_{CoG} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_{CoG}} \begin{bmatrix} \sum F_{X_{gh}} + F_{Xv} + mg\chi_{Road} + F_R \\ \sum F_{Y_{gh}} + F_{Yv} - mg\phi_{Road} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde  $F_{X_{gh}}, F_{Y_{gh}}$  son las fuerzas en los puntos de contacto de cada rueda,  $F_{Xv}, F_{Yv}$  es la fuerza del viento en sus componentes  $X, Y$  respectivamente,  $\chi_{Road}$  es la pendiente del camino,  $\phi_{Road}$  es el peralte del camino y  $F_R$  es la resistencia de rodamiento.

Las fuerzas del viento se pueden aproximar por [65]:

$$F_{Xv} = -c_{ax} A_F \frac{\rho_v}{2} (v_x - v_{wx} \cos\psi - v_{wy} \sin\psi)^2 \quad (5.2)$$

$$F_{Yv} = -c_{ay} A_L \frac{\rho_v}{2} (v_y + v_{wx} \sin\psi - v_{wy} \cos\psi)^2 \text{sign}(-v_{wx} \sin\psi + v_{wy} \cos\psi) \quad (5.3)$$

Tabla 5.1.: Nomenclatura

$\alpha_{gh}$	Ángulo de Deriva Lateral en la Rueda.
$\beta$	Ángulo de Deriva Lateral del Chasis.
$\delta_{wL}, \delta_{wR}$	Ángulo en la Rueda Frontal Izquierda, Derecha.
$\psi$	Ángulo de giro o Yaw.
$\chi$	Ángulo de Cabeceo o Pitch.
$\phi$	Ángulo de Alabeo o Roll.
$\varphi_{Road}$	Ángulo de peralte del Camino.
$\chi_{Road}$	Ángulo de Pendiente del Camino.
$a_x, a_y$	Aceleración Longitudinal, Lateral del COG.
$b$	Distancia entre las Ruedas Frontales (Ancho del Chasis).
$c_\chi, c_\phi$	Coefficiente de Amortiguamiento del amortiguador.
$F_{Sgh}$	Fuerza Lateral en el Centro de la Rueda.
$F_{Zgh}$	Fuerza Vertical en el Punto de Contacto.
$F_{Xgh}, F_{Ygh}$	Fuerza Longitudinal, Lateral en el Punto de Contacto.
$F_{Lgh}$	Fuerza de Aceleración/Frenado en la rueda.
$g$	Gravedad.
$h$	Altura del CoG respecto al suelo.
$J_\psi$	Momento de Inercia Alrededor del eje $Z_{CoG}$ .
$J_\phi$	Momento de Inercia Alrededor del eje $X_{CoG}$ .
$k_0, k_1, k_2, k_3$	Constantes de la Llanta.
$k_\phi, k_\chi$	Constante de rigidez del resorte, respecto al alabeo, cabeceo.
$l$	Largo del chasis, de eje frontal a eje posterior.
$l_v, l_h$	Distancia del CoG al eje frontal, posterior.
$m$	Masa Total del Vehículo.
$m_{CoG}$	Masa Amortiguada.
$m_u$	Masa No Amortiguada.
$\mu$	Coefficiente de fricción suelo-llanta.

donde  $c_{ax}, c_{ay}, \rho_v$  son constantes, el área frontal es  $A_F$  y lateral  $A_L$ ,  $v_{wx}, v_{wy}$  es la velocidad del viento en su componente  $x, y$  respectivamente.

**Observación 5.1.** Debido a que el área frontal  $A_F$  y lateral  $A_L$  de un vehículo de 4 ruedas regularmente es pequeña y la velocidad del viento es regularmente baja, en esta Tesis las fuerzas del viento se consideran despreciables para el problema de derrape y volcadura lateral.

La resistencia de rodamiento es ocasionada por propiedades adhesivas de la llanta con el suelo, y es una fuerza que se opone a la fuerza de tracción/propulsión.

**Observación 5.2.** *En esta Tesis se considera que la resistencia de rodamiento es compensada por la tracción/propulsión del vehículo.*

La pendiente y el peralte del camino son valor que tiene limitaciones dadas por la normatividad de cada país y regularmente son ángulos pequeños. Estos ángulos tiene un efecto en la dinámica del ángulo de alabeo que consiste en el levantamiento del centro de gravedad del vehículo. Entre más alto es el centro de gravedad el riesgo de volcadura es mayor.

**Observación 5.3.** *En esta Tesis se considerará en secciones posteriores que la altura del centro de gravedad es un parámetro que está sujeto a variaciones para el diseño de controladores antivuelco y antiderrape lateral, por lo que el efecto de la pendiente y peralte en el derrape/volcadura se considera que esta incluido en cambios de la altura del centro de gravedad.*

Bajo las consideraciones anteriores y con la finalidad de representar la dinámica de vuelco y derrape lateral, se tiene que la dinámica (5.1) se puede aproximar por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{CoG} \\ \ddot{y}_{CoG} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_{CoG}} \begin{bmatrix} \sum F_{Xgh} \\ \sum F_{Ygh} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Las fuerzas en los puntos de contacto de cada rueda se calculan en la siguiente sección. A continuación se realiza una transformación para poder representar el Modelo (5.4) con variables de estado internas. Esto se hace de esta manera, debido a que sólo es necesario el uso de variables internas como la velocidad, ángulo de deriva y ángulos de Euler para describir la dinámica del vehículo y para evaluar el riesgo de volcadura/derrape y por tanto las restricciones no-holonómas no se tomaron en cuenta.

**Observación 5.4.** Para esta aplicación, la descripción del posicionamiento cartesiano o navegación no es necesaria, ya que para estimar y mitigar el riesgo de derrape/volcadura, se usan variables de la descripción dinámica del vehículo como su orientación, su velocidad rotacional y la magnitud de su velocidad traslacional. Lo anterior debido a que los índices de volcadura y derrape están relacionados con las fuerzas a las que se somete el chasis y éstas pueden estudiarse de manera independiente a la navegación del vehículo. En otras palabras, la descripción de la volcadura y el derrape de un vehículo son independientes de la descripción de la navegación del vehículo.

Cabe mencionar que el proceso de navegación lo resuelve el conductor, el cual da como entrada el ángulo de las llantas que si se toma en cuenta en el modelo. Si el problema a resolver fuera el de seguimiento de trayectorias, tales restricciones no-holonómicas serían evidentes en el modelo matemático que representara la dinámica del vehículo.

Con la observación anterior en mente, note que mientras el vehículo está en movimiento, las propiedades elásticas de la llanta permiten la existencia de ángulos  $\alpha_{gh}$  (ángulo de deriva lateral de la llanta) entre  $X_{wgh}$  y la dirección de  $P_{cgh}$ . Cada ángulo de deriva en cada llanta contribuye a un ángulo de deriva del chasis ( $\beta$ ) que es la diferencia entre el ángulo (respecto a  $X_{In}$ ) de un eje longitudinal y fijo al chasis y la dirección del  $CoG$ . Si consideramos que a media/alta velocidad sólo son posibles ángulos pequeños en la dirección, entonces  $\delta_{wFL} \approx \delta_{wFR} = \delta$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 F_{XFL} &= F_{LFL} - F_{SFL}\delta & ; & & F_{YFL} &= F_{LFL}\delta + F_{SFL} \\
 F_{XFR} &= F_{LFR} - F_{SFR}\delta & ; & & F_{YFR} &= F_{LFR}\delta + F_{SFR} \\
 F_{XRL} &= F_{LRL} & ; & & F_{YRL} &= F_{SRL} \\
 F_{XRR} &= F_{LRR} & ; & & F_{YRR} &= F_{SRR}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

En (5.5), las fuerzas longitudinales en el centro de la rueda  $F_{Lgh}$  son calculadas como el par de frenado/aceleración de la rueda multiplicado por el radio de la rueda, es decir  $F_{Lgh} = \mathcal{T}_{gh}r_{wgh}$ . En la literatura existen varios estudios acerca de la determinación de una expresión matemática que reproduzca fielmente la dinámica de las fuerzas laterales en el centro de la llanta  $F_{Sgh}$ . Frecuentemente las fuerzas  $F_{Sgh}$  son aproximadas como función de  $\alpha_{gh}$ . En este capítulo se considera la aproximación propuesta en [65] debido representa una buena aproximación a datos experimentales. Además, la aproximación de [65] es mucho mas simple en comparación con la aproximación de [68]. La aproximación de [65] es:

$$F_{Sgh} = k_0 \left( k_1 - \frac{F_{Zgh}}{k_2} \right) F_{Zgh} \arctan k_3 \alpha_{gh} \tag{5.6}$$

donde  $k_a > 0, a = 0, \dots, 3$  son funciones que dependen de las características de la llanta y el camino. Para estimar  $\alpha_{gh}$  considere la descripción de la Figura 5.2. Se asume que el origen de

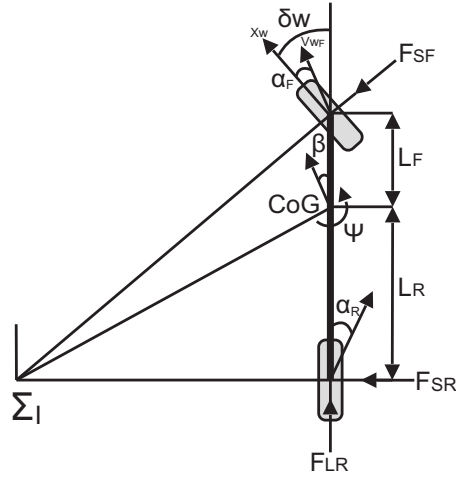


Figura 5.2.: Modelo de bicicleta.

$\Sigma_{In}$  se encuentra suficientemente lejano del  $CoG$  tal que el desplazamiento de  $CoG$  en el eje  $Z_{In}$  puede ser despreciado. Además la velocidad de la rueda delantera es  $v_{wF} \approx v_{CoG}$ , donde  $v_{CoG}$  es la magnitud de la velocidad del  $CoG$ , por lo que se tiene:

$$v_{wF} \sin(\delta - \alpha_F) = l_v \dot{\psi} + v_{CoG} \sin \beta \quad (5.7)$$

$$v_{wF} \cos(\delta - \alpha_F) = v_{CoG} \cos \beta \quad (5.8)$$

Dividiendo (5.7) entre (5.8) y asumiendo que los ángulos  $\alpha_F, \beta$  son pequeños y que  $v_{CoG} > 0$ , se tiene que  $\sin \beta \approx \beta$ ,  $\cos \beta \approx 1$ ,  $\tan \alpha_F \approx \alpha_F$  se tiene que:

$$\alpha_F = \delta - \beta - \frac{l_v \dot{\psi}}{v_{CoG}} \quad (5.9)$$

$$\alpha_R = -\beta + \frac{l_h \dot{\psi}}{v_{CoG}} \quad (5.10)$$

Por otro lado la dinámica traslacional del punto de vista de  $\Sigma_{In}$  es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{In} \\ \dot{y}_{In} \end{bmatrix} = v_{CoG} \begin{bmatrix} \cos(\beta + \psi) \\ \sin(\beta + \psi) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Diferenciando respecto al tiempo (5.11) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{In} \\ \ddot{y}_{In} \end{bmatrix} = v_{CoG} (\dot{\beta} + \dot{\psi}) \begin{bmatrix} -\sin(\beta + \psi) \\ \cos(\beta + \psi) \end{bmatrix} + \dot{v}_{CoG} \begin{bmatrix} \cos(\beta + \psi) \\ \sin(\beta + \psi) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Transformando (5.12) al sistema coordenado  $\Sigma_{CoG}$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{CoG} \\ \ddot{y}_{CoG} \end{bmatrix} = v_{CoG} (\dot{\beta} + \dot{\psi}) \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} + \dot{v}_{CoG} \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\dot{v}_{CoG} = \frac{\sum F_{Xgh}}{m_{CoG}} + \frac{\beta(\sum F_{Ygh})}{m_{CoG}} \quad (5.14)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\sum F_{Ygh}}{v_{CoG}m_{CoG}} - \frac{\beta\sum F_{Xgh}}{v_{CoG}m_{CoG}} - \dot{\psi} \quad (5.15)$$

Substituyendo (5.6) en (5.5) y a su vez en (5.14) y (5.15) se obtienen las expresiones que constituyen la ecuaciones de la dinámica traslacional:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CoG} = & \frac{\sum F_{Lgh}}{m_{CoG}} - \frac{\delta f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})}{m_{CoG}} + \frac{\beta \delta (F_{LFL} + F_{LFR})}{m_{CoG}} \\ & + \beta \frac{f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) + f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR})}{m_{CoG}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & \frac{\delta F_{LFL} + \delta F_{LFR} + f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) + f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR}) - \beta \sum F_{Lgh}}{v_{CoG}m_{CoG}} \\ & + \frac{\beta \delta f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})}{v_{CoG}m_{CoG}} - \dot{\psi} \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1(\delta, \beta, \psi) &= \arctan \left( k_3 \left( \delta - \beta - \frac{l_v \dot{\psi}}{v_{CoG}} \right) \right) \\ f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) &= k_0 \left[ \left( k_1 - \frac{F_{ZFL}}{k_2} \right) F_{ZFL} + \left( k_1 - \frac{F_{ZFR}}{k_2} \right) F_{ZFR} \right] \\ f_3(\beta, \psi) &= \arctan \left( k_3 \left( -\beta + \frac{l_h \dot{\psi}}{v_{CoG}} \right) \right) \\ f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR}) &= k_0 \left[ \left( k_1 - \frac{F_{ZRL}}{k_2} \right) F_{ZRL} + \left( k_1 - \frac{F_{ZRR}}{k_2} \right) F_{ZRR} \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

En la Sección 5.3 se determinan las fuerzas  $F_{Zgh}$  con base en un análisis de dinámica rotacional del chasis.

## 5.2. Dinámica rotacional

Como primer paso en la derivación de la dinámica rotacional, se calculará el ángulo de giro del chasis el cual es resultado del balance de pares:

$$J_Z \ddot{\psi} = (F_{YFR} + F_{YFL}) l_v - (F_{YRR} + F_{YRL}) l_h (F_{XRR} + F_{XFR} - F_{XFL} - F_{XRL}) \frac{b}{2} \quad (5.19)$$



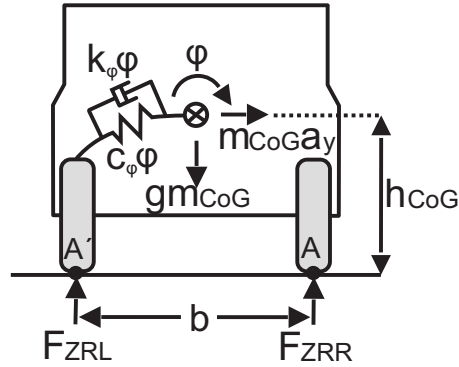


Figura 5.3.: Fuerzas verticales en los puntos de contacto (vista posterior).

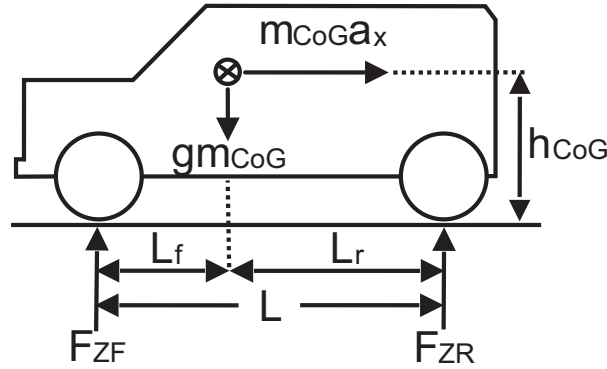


Figura 5.4.: Fuerzas verticales en los puntos de contacto (vista lateral).

Substituyendo (5.6) en (5.5) y a su vez en (5.19) se obtiene la dinámica de giro:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & \frac{l_v}{J_Z} (\delta F_{LFL} + \delta F_{LFR} + f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})) - \frac{l_v}{J_Z} f_3(\beta, \psi) f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR}) \\ & + \frac{b}{2J_Z} F_{LFR} + \frac{b}{2J_Z} F_{LRR} - \frac{b}{2J_Z} (F_{LRL} + F_{LFL} - \delta f_1(\delta, \beta, \psi) f_5(F_{ZFL}, F_{ZFR})) \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde  $f_1(\delta, \beta, \psi)$ ,  $f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})$ ,  $f_3(\beta, \psi)$ ,  $f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR})$  están dadas por (5.18) y

$$f_5(F_{ZFL}, F_{ZFR}) = k_0 \left[ \left( k_1 - \frac{F_{ZFL}}{k_2} \right) F_{ZFL} - \left( k_1 - \frac{F_{ZFR}}{k_2} \right) F_{ZFR} \right] \quad (5.21)$$

Para calcular la dinámica de alabeo, la suspensión es idealizada como un resorte de torsión y un amortiguador de torsión distribuidos alrededor de un eje longitudinal imaginario que atraviesa el chasis y pasa por el CoG (ver Figura 5.3). Con base en lo anterior, el balance de pares es:

$$J_\phi \ddot{\phi} = m_{CoG} a_y h - k_\phi \phi + m_{CoG} g h \phi - c_\phi \dot{\phi} \quad (5.22)$$

y siguiendo un procedimiento similar para la dinámica de cabeceo se tiene

$$J_\chi \ddot{\chi} = m_{CoG} a_x h - k_\chi \chi + m_{CoG} g h \chi - c_\chi \dot{\chi} \quad (5.23)$$

donde  $a_y$  es la aceleración lateral del chasis y  $a_x$  es la aceleración longitudinal del chasis. Utilizando (5.4), la aceleración  $a_y$  puede ser aproximada como:

$$a_y \approx \ddot{y}_{CoG} = \frac{\sum F_{Ygh}}{m_{CoG}} \quad (5.24)$$

además note que

$$a_x \approx \ddot{x}_{CoG} = \frac{\sum F_{Xgh}}{m_{CoG}} \quad (5.25)$$

de tal forma que substituyendo (5.24) en (5.22) se obtiene:

$$J_\phi \ddot{\phi} = h \sum F_{Ygh} - mgh\phi_{Road} - k_\phi \phi + m_{CoG}gh\phi - c_\phi \dot{\phi} \quad (5.26)$$

Substituyendo (5.6) en (5.5) y a su vez en (5.26) se obtiene la dinámica de alabeo:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \frac{h}{J_\phi} (\delta F_{LFL} + \delta F_{LFR} + f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) + f_3(\beta, \psi) f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR})) \\ & - \frac{mgh\phi_{Road}}{J_\phi} - \frac{k_\phi}{J_\phi} \phi - \frac{c_\phi}{J_\phi} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde  $f_1(\delta, \beta, \psi)$ ,  $f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})$ ,  $f_3(\beta, \psi)$ ,  $f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR})$  estan dadas por (5.18).

**Observación 5.5.** *En la literatura se ha reportado ([31], [18], [14] entre otros) que  $\psi$  y  $\chi$  no tienen un efecto considerable en la volcadura. Por otro lado, el ángulo de cabeceo  $\chi$  tiene un efecto sobre la dinámica del ángulo de alabeo que consiste en el levantamiento del centro de gravedad del vehículo, es decir entre más alto es el centro de gravedad el riesgo de volcadura es mayor (ver Capítulo 6). En esta Tesis se considera que la altura del centro de gravedad es un parámetro incierto que está sujeto a variaciones para el diseño de controladores antivuelco y antiderrape lateral, por lo que el efecto del ángulo de cabeceo en el derrape/volcadura está incluido en cambios de la altura del centro de gravedad. Por otro lado, la dinámica del cabeceo se omite a continuación debido a que esta Tesis no tiene como objetivo de control estabilizar la actitud del chasis alrededor del eje  $Y_{CoG}$ .*

En la Sección 5.3 se determinan las fuerzas  $F_{Zgh}$  con base en un análisis de dinámica rotacional del chasis.

### 5.3. Modelo completo

En las secciones anteriores se determina la dinámica traslacional y rotacional de un vehículo de 4 ruedas, sin embargo note que existe dependencia de las fuerzas verticales en los puntos de

contacto en las funciones  $f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})$  y  $f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR})$ . Para obtener las mencionadas fuerzas, considere [65] la Figura 5.3, realizando un balance de momentos en el punto A se tiene:

$$F_{ZFL} = m_{CoG} \left( \frac{gl_h}{l} - \frac{ha_x}{l} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{ha_y}{bg} \right) + \frac{m_u l_h g}{2l} \quad (5.28)$$

$$F_{ZFR} = m_{CoG} \left( \frac{gl_h}{l} - \frac{ha_x}{l} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{ha_y}{bg} \right) + \frac{m_u l_h g}{2l} \quad (5.29)$$

$$F_{ZRL} = m_{CoG} \left( \frac{gl_v}{l} + \frac{ha_x}{l} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{ha_y}{bg} \right) + \frac{m_u l_v g}{2l} \quad (5.30)$$

$$F_{ZRR} = m_{CoG} \left( \frac{gl_v}{l} + \frac{ha_x}{l} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{ha_y}{bg} \right) + \frac{m_u l_v g}{2l} \quad (5.31)$$

Para eliminar la dependencia de la aceleración del chasis de (5.28)-(5.31), se utiliza la expresión (5.23),

$$a_x \approx \frac{k_\chi \chi}{m_{CoG} h} \quad (5.32)$$

$$a_y \approx \frac{k_\phi \phi}{m_{CoG} h} \quad (5.33)$$

Substituyendo las Ecuaciones (5.32) y (5.33) en (5.28)-(5.31) se obtiene:

$$F_{ZFL} = \frac{l_h g m}{2l} - \frac{l_h k_\phi \phi}{lb} - \frac{k_\chi \chi}{2l} + \frac{k_\chi k_\phi \phi \chi}{l b g m_{CoG}} \quad (5.34)$$

$$F_{ZFR} = \frac{l_h g m}{2l} + \frac{l_h k_\phi \phi}{lb} - \frac{k_\chi \chi}{2l} - \frac{k_\chi k_\phi \phi \chi}{l b g m_{CoG}} \quad (5.35)$$

$$F_{ZRL} = \frac{l_v g m}{2l} - \frac{l_v k_\phi \phi}{lb} + \frac{k_\chi \chi}{2l} - \frac{k_\chi k_\phi \phi \chi}{l b g m_{CoG}} \quad (5.36)$$

$$F_{ZRR} = \frac{l_v g m}{2l} + \frac{l_v k_\phi \phi}{lb} + \frac{k_\chi \chi}{2l} - \frac{k_\chi k_\phi \phi \chi}{l b g m_{CoG}} \quad (5.37)$$

**Observación 5.6.** La dinámica del cabeceo se omite a continuación debido a que esta Tesis no tiene como objetivo de control estabilizar el ángulo del chasis alrededor del eje  $Y_{CoG}$ .

Con base en la observación anterior, las Ecuaciones (5.34)-(5.37) pueden aproximarse como:

$$F_{ZFL} = \frac{l_h gm}{2l} - \frac{l_h k_\phi \Phi}{lb} \quad (5.38)$$

$$F_{ZFR} = \frac{l_h gm}{2l} + \frac{l_h k_\phi \Phi}{lb} \quad (5.39)$$

$$F_{ZRL} = \frac{l_v gm}{2l} - \frac{l_v k_\phi \Phi}{lb} \quad (5.40)$$

$$F_{ZRR} = \frac{l_v gm}{2l} + \frac{l_v k_\phi \Phi}{lb} \quad (5.41)$$

Del desarrollo de la dinámica traslacional (5.16)-(5.17), rotacional (5.20), (5.27) y de la dinámica vertical (5.38)-(5.41), considerando nuevamente que la dinámica del cabeceo no tiene un efecto significativo en la dinámica lateral del chasis, y que la fuerza gravitacional del peralte está incluida en la del ángulo de alabeo se tiene que el modelo completo queda denotado como:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CoG} = & \frac{\sum F_{Lgh}}{m_{CoG}} - \frac{\delta f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})}{m_{CoG}} + \frac{\beta \delta (F_{LFL} + F_{LFR})}{m_{CoG}} \\ & + \beta \frac{f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) + f_3(\beta, \psi) f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR})}{m_{CoG}} \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & \frac{\delta F_{LFL} + \delta F_{LFR} + f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) + f_3(\beta, \psi) f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR}) - \beta \sum F_{Lgh}}{v_{CoG} m_{CoG}} \\ & + \frac{\beta \delta f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})}{v_{CoG} m_{CoG}} - \dot{\psi} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \frac{h}{J_\phi} (\delta F_{LFL} + \delta F_{LFR} + f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) + f_3(\beta, \psi) f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR})) \\ & - \frac{mgh\Phi_{Road}}{J_\phi} - \frac{k_\phi}{J_\phi} \phi - \frac{c_\phi}{J_\phi} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & \frac{l_v}{J_Z} (\delta F_{LFL} + \delta F_{LFR} + f_1(\delta, \beta, \psi) f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR})) - \frac{l_v}{J_Z} f_3(\beta, \psi) f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR}) \\ & + \frac{b}{2J_Z} F_{LFR} + \frac{b}{2J_Z} F_{LRR} - \frac{b}{2J_Z} (F_{LRL} + F_{LFL} - \delta f_1(\delta, \beta, \psi) f_5(F_{ZFL}, F_{ZFR})) \end{aligned} \quad (5.45)$$

donde:

$$\begin{aligned}
f_1(\delta, \beta, \psi) &= \arctan \left( k_3 \left( \delta - \beta - \frac{l_v \dot{\psi}}{v_{CoG}} \right) \right) \\
f_2(F_{ZFL}, F_{ZFR}) &= k_0 \left[ \left( k_1 - \frac{F_{ZFL}}{k_2} \right) F_{ZFL} + \left( k_1 - \frac{F_{ZFR}}{k_2} \right) F_{ZFR} \right] \\
f_3(\beta, \psi) &= \arctan \left( k_3 \left( -\beta + \frac{l_h \dot{\psi}}{v_{CoG}} \right) \right) \\
f_4(F_{ZRL}, F_{ZRR}) &= k_0 \left[ \left( k_1 - \frac{F_{ZRL}}{k_2} \right) F_{ZRL} + \left( k_1 - \frac{F_{ZRR}}{k_2} \right) F_{ZRR} \right] \\
f_5(F_{ZFL}, F_{ZFR}) &= k_0 \left[ \left( k_1 - \frac{F_{ZFL}}{k_2} \right) F_{ZFL} - \left( k_1 - \frac{F_{ZFR}}{k_2} \right) F_{ZFR} \right]
\end{aligned}$$

$$F_{ZFL} = \frac{l_h g m}{2l} - \frac{l_h k_\phi \Phi}{lb} \quad (5.46)$$

$$F_{ZFR} = \frac{l_h g m}{2l} + \frac{l_h k_\phi \Phi}{lb} \quad (5.47)$$

$$F_{ZRL} = \frac{l_v g m}{2l} - \frac{l_v k_\phi \Phi}{lb} \quad (5.48)$$

$$F_{ZRR} = \frac{l_v g m}{2l} + \frac{l_v k_\phi \Phi}{lb} \quad (5.49)$$

En (5.45) las entradas de control son  $F_L = [F_{LFL}, F_{LFR}, F_{LRL}, F_{LRR}]$ ,  $\delta$  es una perturbación exógena y está constituida por el ángulo en las ruedas frontales proporcionado por el chofer por medio del volante de la dirección. En la siguiente sección se derivará un modelo lineal politópico del vehículo con base en el modelo no lineal dado en las Ecuaciones (5.42)-(5.45).

En el Capítulo 6 se obtiene una estimación del riesgo de derrape lateral llamado Skid Index (SI), que puede ser calculado por medio de una función dependiente del estado del sistema que representa la dinámica del vehículo. De manera análoga se obtiene la estimación del riesgo de volcadura RI, que también puede ser calculado por medio de una función dependiente del estado del sistema que representa la dinámica del vehículo.

Note que para la obtención del sistema dinámico que representa la no linealidad de la dinámica del vehículo (5.42)-(5.45)), se realizaron varias simplificaciones y/o consideraciones. Entre ellas, tres que son relevantes para el desarrollo de la Tesis se ilustran en la Figura 5.5. En esta figura hay una bola negra con su frontera dibujada en línea punteada, en cualquier punto de su interior  $|SI| < 1$  y por lo tanto no puede haber derrape lateral. De manera análoga en el interior de la bola negra con frontera dibujada en línea sólida, no puede haber una volcadura porque  $|RI| < 1$ . Es claro que en el interior de la intersección de estas dos bolas no hay riesgo de derrape lateral ni de volcadura y en cualquier otro punto ocurre: un riesgo inminente, una volcadura o un derrape lateral. Por tanto, el modelo es válido sólo en la región donde no hay riesgo de volcadura ni de derrape lateral, es decir en el interior de la intersección de las bolas negras. Usualmente se

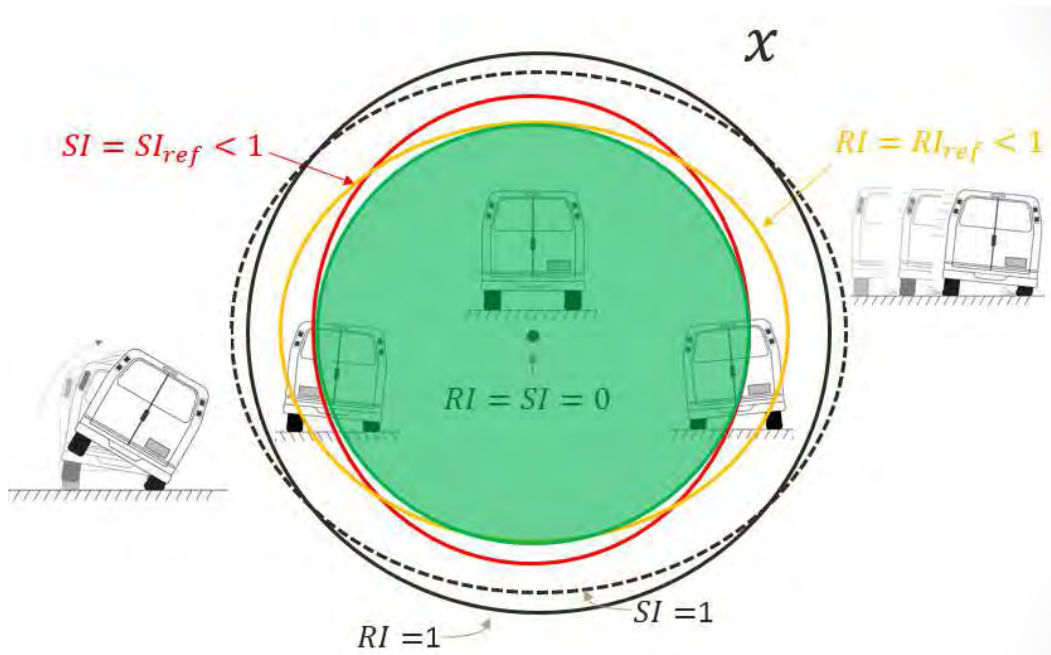


Figura 5.5.: Ilustración de la región de validez del modelo, y de la región de no riesgo. El modelo es válido siempre y cuando no ocurra una pérdida de adherencia en la llanta, es decir como el interior de la bola negra más pequeña. La región verde ilustra la región donde el SI y el RI tienen valores considerados seguros.

establecen valores recomendados para los indicadores de riesgo (por ejemplo por la legislación vigente de algunos países) de manera que se obtiene una región recomendada que se dibuja como la región sombreada en la figura. La región segura se encuentra en el interior de la intersección de las bolas obtenidas con umbrales recomendados para RI y SI.

#### 5.4. Modelo politópico conmutado del vehículo

Debido a que una descripción no lineal compleja como (5.42)-(5.45) puede complicar la tarea de diseño de una ley de control para mitigar el riesgo de volcadura y derrape, se prefiere una representación lineal por pedazos en particular como un sistema politópico conmutada.

**Observación 5.7.** *Una de las motivaciones principales para derivar un modelo lineal para el vehículo es la de contar con un modelo tratable para el diseño de controladores. Debido a que un sólo modelo lineal no puede reflejar la complejidad del sistema no lineal, se propone el uso de modelos lineales por pedazos cuya descripción dependa de múltiples puntos de operación. Por otro lado, dado que cualquier modelo está sujeto a la existencia de incertidumbre paramétrica, en esta Tesis se hace uso de una descripción politópica que junto con una descripción por pedazos pueda reflejar no solamente las no linealidades del sistema, sino también, cualquier error de modelado. Esta descripción constituye una solución para reflejar las complejidades del problema de modelado del vehículo con el uso de modelos simples; sin embargo, se paga el precio en la complejidad de la ley de control. Los resultados de los Capítulos 3-4 se usarán para solucionar este problema.*

En esta sección se obtiene una representación politópica del vehículo, con este fin primero se deriva un modelo lineal en un punto de operación, luego con base en las cotas de las incertidumbres de los parámetros se define el modelo lineal politópico y finalmente, mediante la repetición de este procedimiento en un número definido de puntos de operación, se obtiene un modelo conmutado lineal politópico.

**Observación 5.8.** *La dinámica de la velocidad del modelo no lineal refleja básicamente los transitorios del proceso de aceleración o dotación de potencia del motor ante la inercia de la masa del vehículo. Sin embargo se sabe que lo que es verdaderamente relevante para fines de estimación del riesgo de derrape/volcadura, es la velocidad del vehículo y no su dinámica transitoria producto principalmente de la potencia del motor. Debido a lo anterior, la dinámica de esta variable no es necesaria para la descripción del sistema, dados los fines de esta Tesis.*

Considere el vehículo a velocidad constante  $v_{CoG} = v$ , la linealización del sistema (5.42)-(5.45) en un punto de operación  $p_L = \left( \left[ \overline{v_{CoG}}, \overline{\beta}, \overline{\phi}, \overline{\psi}, \overline{\psi} \right], \overline{F_Z}, \overline{\delta} \right)$  con  $\overline{v_{CoG}} = v, \overline{\beta} = 0, \overline{\phi} = 0, \overline{\psi} = 0, \overline{\psi} = 0, \overline{F_Z} = \mathbb{O}_4, \overline{\delta} = 0$ , puede encontrarse por medio de la Ecuación (2.21):

$$\dot{x} = Ax + B_\delta \delta + \overline{B}_u \overline{u} \quad (5.50)$$

con

$$x = \begin{bmatrix} \beta \\ \psi \\ \phi \\ \varphi \end{bmatrix}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2\sigma}{m_{CoG}v} & \frac{2\rho - m_{CoG}v^2}{m_{CoG}v^2} & 0 & 0 \\ \frac{2\rho}{J_z} & -\frac{2\kappa}{J_z v} & 0 & 0 \\ h\frac{2\sigma}{J_\phi} & h\frac{2\rho}{J_\phi v} & -\frac{c_\phi}{J_\phi} & -\frac{k_\phi}{J_\phi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_\delta = \begin{bmatrix} \frac{2c_v}{m_{CoG}v} \\ -\frac{2\rho}{J_z} \\ -\frac{2c_v h}{J_\phi} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{2J_z} & \frac{b}{2J_z} & -\frac{b}{2J_z} & \frac{b}{2J_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = \begin{bmatrix} F_{LFL} \\ F_{LFR} \\ F_{LRL} \\ F_{LRR} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \sigma &\triangleq c_v + c_h \\ \rho &\triangleq c_h L_h - c_v L_v \\ \kappa &\triangleq c_h L_h^2 + c_v L_v^2 \end{aligned}$$

donde  $F_{Lgh} > 0$  es una fuerza de tracción/propulsión y  $F_{Lgh} < 0$  una fuerza de frenado en la rueda respectiva. Note que la dinámica del ángulo de giro del chasis  $\psi$  se omite debido a que en esta Tesis no buscamos resolver un problema de orientación del chasis, si no evitar la volcadura y el derrape lateral; en la Sección 6 se establecen ecuaciones para el cálculo del riesgo de volcadura y derrape lateral que dependen unicamente de  $\beta, \psi, \phi$  y  $\varphi$ .

Con la finalidad de definir una acción de control de frenado diferencial y tracción/propulsión de manera simultánea considere:

$$F_{LFR} + F_{LRR} \triangleq -(F_{LFL} + F_{LRL}) \triangleq u \quad (5.51)$$

Note que la definición (5.51) implica una acción diferencial de frenado/aceleración en donde las fuerzas de frenado/aceleración de lado derecho son iguales en magnitud que las del lado izquierdo pero de signo opuesto. En otras palabras mientras en el lado derecho se frena, en el otro se proporciona tracción/propulsión. Esta combinación de actuación proporciona un mayor par para compensar la dinámica rotacional del vehículo. Esta acción de control sobre las ruedas es posible gracias a que los vehículos convencionales de 4 ruedas cuentan con un dispositivo mecánico llamado mecanismo diferencial. El mecanismo diferencial en vehículos de tracción delantera (FWD) o de propulsión trasera (RWD) permite frenar la(s) rueda(s) de un costado del vehículo mientras se provee de tracción o propulsión al vehículo con la(s) rueda(s) del costado



contrario.

Durante el viraje de un vehículo en condiciones normales (sin deslizamiento o derrape de las ruedas) cada rueda gira a una velocidad distinta. Las ruedas en un costado rotan a una velocidad significativamente diferente que las del costado contrario, es por ello que los vehículos cuentan con este mecanismo diferencial, el cual se encarga de permitir esta diferencia de velocidad. El mecanismo diferencial usualmente consiste de un engrane planetario tal que la velocidad angular de la flecha proveniente del motor (de la transmisión para ser específico) es el promedio de las velocidades angulares de las ruedas frontales en vehículos con FWD o traseras en vehículos con RWD. Se puede proveer de tracción o propulsión al vehículo mientras simultáneamente se aplica un frenado diferencial, ya que el mecanismo diferencial se encarga de transmitir la mayor proporción de fuerza de tracción/propulsión a la rueda que menor oposición presente; es decir, a la rueda que no está siendo frenada (ver [69] para una explicación detallada del mecanismo diferencial). Note que los sistemas ABS y TCS sólo previenen derrape longitudinal en la rueda en la dirección de  $X_{Wgh}$ .

Utilizando la acción de control (5.51) en el sistema lineal (5.50) se obtiene:

$$\dot{x} = Ax + B_\delta \delta + B_u u \quad (5.52)$$

con

$$B_u = \left[ 0, \frac{b}{J_z}, 0, 0 \right]'$$

con  $u \in \mathbb{R}$ .

El modelo lineal (5.52) ha sido obtenido como una aproximación de la dinámica no lineal (5.45) en el punto de operación dependiente de la rapidez de desplazamiento  $p_L$ . Se pueden obtener diferentes aproximaciones lineales para varios puntos de operación con lo que el modelo resultante sería lineal por pedazos. Por ejemplo, sea  $\mathcal{D}$  el dominio de operación de (5.52) donde el modelo es válido (existe adherencia de las llantas con el suelo). El dominio de operación se puede dividir en un número finito  $M$  de subconjuntos o subdominios, tal que a cada subdominio  $\mathcal{D}_i$  le corresponderá una descripción lineal  $i \in G = \{1, \dots, M\}$  de la siguiente manera:

Considere el criterio de elección de modo

$$i = \begin{cases} 1, & \text{si } v_{CoG} \in [v_0, v_1) \\ 2, & \text{si } v_{CoG} \in [v_1, v_2) \\ \vdots & \\ M, & \text{si } v_{CoG} \in [v_{M-1}, v_M) \end{cases} \quad (5.53)$$

con  $v_0 < v_1 < \dots < v_M$ . Los puntos de operación se pueden elegir como:

$$\begin{aligned} p_1 &= \left( \left[ v_{L1}, \bar{\beta}, \bar{\phi}, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\psi} \right], \bar{F}_Z, \bar{\delta} \right) \text{ con } v_{L1} = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{2} \\ p_2 &= \left( \left[ v_{L2}, \bar{\beta}, \bar{\phi}, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\psi} \right], \bar{F}_Z, \bar{\delta} \right) \text{ con } v_{L2} = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2} \\ &\vdots \\ p_M &= \left( \left[ v_{LM}, \bar{\beta}, \bar{\phi}, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\psi} \right], \bar{F}_Z, \bar{\delta} \right) \text{ con } v_{LM} = v_{M-1} + \frac{v_M - v_{M-1}}{2}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

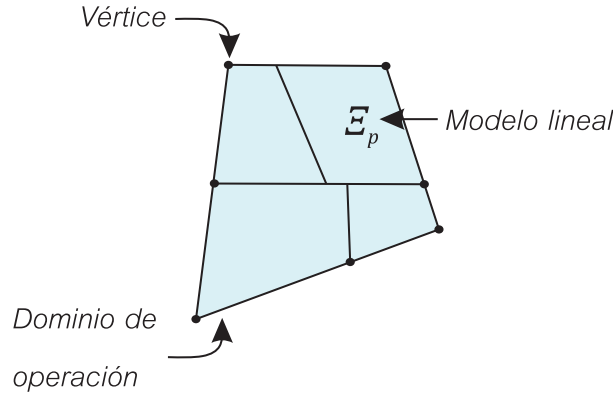


Figura 5.6.: Ilustración del dominio de operación  $\mathcal{D}$ .

donde  $\bar{\beta} = 0, \bar{\phi} = 0, \bar{\varphi} = 0, \bar{\psi} = 0, \bar{\Psi} = 0, \bar{F}_Z = \mathbb{O}_4, \bar{\delta} = 0$  y el rango de variación del parámetro velocidad ( $v$ ) será  $v_0 \leq v \leq v_1$  para el modo 1,  $v_1 \leq v \leq v_2$  para el modo 2, ...,  $v_{M-1} \leq v \leq v_M$  para el modo  $M$ .

Una vez definida la partición del dominio de operación y el criterio de elección de modo se obtiene el siguiente sistema:

$$\dot{x} = A_i x + B_{\delta,i} \delta + B_{u,i} u \quad (5.55)$$

La división del dominio de operación (5.53) es sólo uno de varios posibles criterios para la definición de subconjuntos de operación. Se ha elegido este por ser físicamente significativo (depende de la velocidad) y porque no se requiere de grandes recursos computacionales para su cálculo.

Por otro lado, note que se puede considerar además de la velocidad otros parámetros como inciertos, siempre que su variación ocurra dentro de un conjunto convexo y cerrado, de tal forma que no solamente pequeñas desviaciones del punto de operación sean permitidas si no también grandes desviaciones. Utilizando las Definiciones 2.1 y 2.2 es posible construir un modelo politópico conmutado que representa la dinámica del vehículo que es perturbada por el comando al volante del chofer y con incertidumbre en los parámetros:

$$\dot{x} = A_i(\theta) x + B_{\delta,i}(\theta) \delta + B_{u,i}(\theta) u \quad (5.56)$$

donde  $A_i(\theta) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, B_{\delta,i}(\theta) \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, B_{u,i}(\theta) \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  son matrices politópicas y  $u, \delta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , son funciones lineales por pedazos del tiempo. Según las Definiciones 2.1 y 2.2, los parámetros de las matrices politópicas pueden variar dentro de rangos cerrados y acotados, donde cada extremo es caracterizado por el simplejo.

A manera de ejemplo, considere los parámetros inciertos  $c_v, h$ , y  $v_{CoG}$  en el dominio  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ . La matriz de parámetros  $A_i(\theta)$  puede ser expresada como una función convexa de los vértices del vector de parámetros:

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_v] \quad (5.57)$$

donde  $v$  es el número de vértices. Debido a que  $c_v, h$ , y  $v_{CoG}$  son parámetros inciertos, cada  $A_i(\theta)$  tiene 6 entradas inciertas con respectivos valores de acotamiento máximo y mínimo y se tienen

$2^6$  vértices; por lo tanto la matriz de estados puede verse como:

$$A_i(\theta) = \sum_{p=1}^{64} \theta_p A_{i,p} \quad (5.58)$$

donde cada vértice está dado por todas las combinaciones de los acotamientos inferiores y superiores de las entradas de la matriz; esto es:

$$A_{i,1} = \begin{bmatrix} \underline{a_{11,i}} & \underline{a_{12,i}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{21,i}} & \underline{a_{22,i}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{31,i}} & \underline{a_{32,i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{i,2} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11,i}} & \overline{a_{12,i}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{21,i}} & \overline{a_{22,i}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{31,i}} & \overline{a_{32,i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{i,3} = \begin{bmatrix} \underline{a_{11,i}} & \overline{a_{12,i}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{21,i}} & \underline{a_{22,i}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{31,i}} & \underline{a_{32,i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{i,4} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11,i}} & \overline{a_{12,i}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{21,i}} & \underline{a_{22,i}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{31,i}} & \underline{a_{32,i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$A_{i,63} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11,i}} & \overline{a_{12,i}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{21,i}} & \overline{a_{22,i}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{31,i}} & \overline{a_{32,i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{i,64} = \begin{bmatrix} \underline{a_{11,i}} & \underline{a_{12,i}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{21,i}} & \underline{a_{22,i}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{31,i}} & \underline{a_{32,i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con

$$\underline{a_{11,i}} = -\frac{2(c_{v,i} + c_{h,i})}{m_{CoG} \underline{v}_i},$$

$$\overline{a_{11,i}} = -\frac{2(\overline{c}_{v,i} + c_{h,i})}{m_{CoG} \underline{v}_i},$$

$$\underline{a_{12,i}} = \frac{2(c_{h,i} L_{h,i} - \overline{c}_{v,i} L_{v,i})}{m_{CoG} \underline{v}_i^2} - 1,$$

$$\overline{a_{12,i}} = \frac{2(c_{h,i} L_{h,i} - c_{v,i} L_{v,i})}{m_{CoG} \underline{v}_i^2} - 1,$$

$$\underline{a_{21,i}} = \frac{2(c_{h,i} L_{h,i} - \overline{c}_{v,i} L_{v,i})}{J_{z,i}},$$

$$\overline{a_{21,i}} = \frac{2(c_{h,i} L_{h,i} - c_{v,i} L_{v,i})}{J_{z,i}},$$

$$\begin{aligned}
\underline{a_{22,i}} &= -\frac{2(c_{h,i}L_{h,i}^2 + \overline{c_{v,i}}L_{v,i}^2)}{J_{z,i}\underline{v}_i}, \\
\overline{a_{22,i}} &= -\frac{2(c_{h,i}L_{h,i}^2 + \underline{c_{v,i}}L_{v,i}^2)}{J_{z,i}\overline{v}_i}, \\
\underline{a_{31,i}} &= -\frac{2\overline{h}_i\sigma}{J_{\phi,i}}, \\
\overline{a_{31,i}} &= -\frac{2h_i\sigma}{J_{\phi,i}}, \\
\underline{a_{32,i}} &= \frac{2\overline{h}_i(c_{h,i}L_{h,i} - \overline{c_{v,i}}L_{v,i})}{J_{\phi,i}\underline{v}_i}, \\
\overline{a_{32,i}} &= \frac{2h_i(c_{h,i}L_{h,i} - \underline{c_{v,i}}L_{v,i})}{J_{\phi,i}\overline{v}_i};
\end{aligned}$$

Para el vector  $B_{\delta}(\theta)$  y abusando de la notación ( $\theta$  ya se uso para definir las matrices politópicas  $A_i$ ):

$$B_{\delta}(\theta) = \sum_{i_B=1}^8 \theta_{i_B} B_{\delta,i_B} \quad (5.59)$$

donde:

$$\begin{aligned}
B_{\delta,1} &= \begin{bmatrix} \underline{b_{\delta,1}} & \underline{b_{\delta,2}} & \underline{b_{\delta,3}} & 0 \end{bmatrix}', B_{\delta,2} = \begin{bmatrix} \overline{b_{\delta,1}} & \underline{b_{\delta,2}} & \underline{b_{\delta,3}} & 0 \end{bmatrix}', \\
B_{\delta,3} &= \begin{bmatrix} \underline{b_{\delta,1}} & \overline{b_{\delta,2}} & \underline{b_{\delta,3}} & 0 \end{bmatrix}', B_{\delta,4} = \begin{bmatrix} \overline{b_{\delta,1}} & \overline{b_{\delta,2}} & \underline{b_{\delta,3}} & 0 \end{bmatrix}', \\
B_{\delta,5} &= \begin{bmatrix} \underline{b_{\delta,1}} & \underline{b_{\delta,2}} & \overline{b_{\delta,3}} & 0 \end{bmatrix}', B_{\delta,6} = \begin{bmatrix} \overline{b_{\delta,1}} & \underline{b_{\delta,2}} & \overline{b_{\delta,3}} & 0 \end{bmatrix}', \\
B_{\delta,7} &= \begin{bmatrix} \underline{b_{\delta,1}} & \overline{b_{\delta,2}} & \overline{b_{\delta,3}} & 0 \end{bmatrix}', B_{\delta,8} = \begin{bmatrix} \overline{b_{\delta,1}} & \overline{b_{\delta,2}} & \overline{b_{\delta,3}} & 0 \end{bmatrix}',
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\underline{b_{\delta,1}} &= \frac{2\underline{c}_v}{m_{CoG}\underline{v}}, \quad \overline{b_{\delta,1}} = \frac{2\overline{c}_v}{m_{CoG}\overline{v}}, \quad \underline{b_{\delta,2}} = \frac{2L_v}{J_z}, \\
\overline{b_{\delta,2}} &= \frac{2\overline{c}_v L_v}{J_z}, \quad \underline{b_{\delta,3}} = \frac{2\underline{c}_v \underline{h}}{J_{\phi}}, \quad \overline{b_{\delta,3}} = \frac{2\overline{c}_v \overline{h}}{J_{\phi}};
\end{aligned}$$

$$B_u(\theta) = B_u. \quad (5.60)$$

Note que  $B_u$  no depende de los parámetros considerados inciertos en este ejemplo  $c_v, v, h$ . Además el número total de vértices del sistema politópico será  $2^{\{\text{número de entradas inciertas en el sistema}\}}$  ya que se deben evaluar todas las posibles combinaciones de vértices de todas las matrices y vectores asociados.

## 5.5. Observaciones respecto a la implementación

En esta sección se discuten algunas ideas acerca de cómo puede implementarse la estrategia de mitigación de riesgo propuesta en esta Tesis.

Considere un vehículo de 4 ruedas con sistema de frenado antibloqueo (ABS). El sistema ABS incluye en el sistema hidráulico de frenado del vehículo, dos o más electroválvulas. Estas válvulas se utilizan para liberar presión hidráulica en la línea de la rueda que presenta un bloqueo. La implementación de los comandos de frenado de la estrategia de control de esta Tesis, consiste en agregar un pistón o válvula que actúe sobre el servo del freno haciendo las veces de la acción de frenado del conductor. Se requiere intervenir en modo OR la acción de las electroválvulas del sistema ABS que liberan la presión en la línea hidráulica de cada rueda. Note que de esta forma no existe una intrusión al sistema ABS y puede seguir operando de manera normal. Si el comando de frenado diferencial del sistema de seguridad activa antiderrape y antivuelco induce una fuerza de frenado que no puede ser transmitida al suelo (en suelo mojado por ejemplo), el sistema ABS se encarga de liberar la presión y evitar que las llantas pierdan adherencia con el suelo. Note que la implementación del ABS depende del fabricante y pueden requerirse válvulas adicionales.

Los vehículos convencionales modernos incluyen comúnmente lo que se conoce como acelerador electrónico (Throttle by wire) que consiste en un potenciómetro que envía un voltaje a la computadora del vehículo (ECU) del vehículo. Dependiendo de que tanto es presionado el pedal del acelerador es el nivel de voltaje enviado y la computadora traduce esta señal a impulsos de inyección de una mezcla de combustible/aire al motor en el caso de vehículos convencionales o a impulsos eléctricos en el caso de vehículos propulsados por motores eléctricos. La implementación de los comandos de tracción/propulsión de la estrategia de control de esta Tesis, consiste en intervenir la señal del potenciómetro cuando sea detectado un riesgo de manera que la señal provenga del comando del sistema de seguridad activa antiderrape y antivuelco.

Por otro lado, la implementación de la estrategia de control de esta Tesis, requiere del conocimiento de la velocidad de los ángulos de giro y alabeo del chasis, del ángulo del volante y de la velocidad del vehículo por lo que se propone su medición; en algunos vehículos ya se cuenta con alguna de esta información y es necesario obtenerla, por ejemplo la velocidad del vehículo se puede obtener de la computadora del vehículo o estimarla a partir del velocímetro.

El diseño de la electrónica del dispositivo debe cumplir con las reglas establecidas en los estándares que dependen de cada país. Adicionalmente puede requerirse un control de tracción/propulsión que evitará que la(s) rueda(s) con tracción/propulsión pierda(n) adherencia con el suelo durante la tracción/propulsión.

## 5.6. Comentarios finales del capítulo

En este capítulo se obtuvo una representación politópica conmutada, perturbada por el comando al volante del chofer y que toma en cuenta incertidumbre paramétrica de un vehículo de 4 ruedas

que tiene el propósito de reproducir el riesgo de volcadura y derrape lateral. Este modelo se obtuvo a partir de una representación lineal del sistema en diferentes dominios de operación a los cuáles se les asocia un sólo punto de operación y un conjunto de vértices dados por todas las combinaciones de cotas de la incertidumbre. Esta representación será útil para la obtención de un controlador robusto que previene el riesgo de volcadura y derrape lateral. En el siguiente capítulo se introducirá una medida de riesgo de volcadura y derrape lateral.

## 6. Detección integral del riesgo de volcadura y derrape lateral

*En esta sección se presenta la obtención de la métrica de riesgo de derrape, de manera análoga y simultánea con el riesgo de vuelco. Además se establece el resultado de estabilidad del control antivelco y antiderrape lateral para vehículos de 4 ruedas.*

### 6.1. Riesgo de volcadura

En la Sección 1 se presentó una métrica del riesgo de vuelco por medio de la Ecuación (1.1) que involucra las fuerzas verticales en los puntos de contacto. En [31] se determina una expresión de  $RI$ , derivada de la Ecuación (1.1), pero en función de la velocidad angular de alabeo así como el ángulo de alabeo, y que puede detectar la fase transitoria de la volcadura. Su derivación es simple y se adapta a la estructura del modelo lineal politópico conmutado del vehículo obtenido en el Capítulo 5. Esta expresión tiene la ventaja de que no es necesario medir las fuerzas verticales en los puntos de contacto suelo llanta (complicado de medir) y que toma solo mediciones que pueden provenir de un giroscopio.

Retomando la Ecuación (1.1) y substituyendo las fuerzas verticales en los puntos de contacto (5.46)-(5.49) se obtiene una aproximación del Rollover Index que depende no solamente del ángulo de alabeo si no también de la velocidad del ángulo de alabeo:

$$RI = -\frac{2}{mgb}(c\dot{\phi} + k\phi) \quad (6.1)$$

De tal forma que  $RI$  puede ser escrito en función del estado del modelo linealizado (5.50) en un punto el operación dependiente de la velocidad  $v$  que representa la dinámica del vehículo como:

$$RI = Cx = \left[ 0, \quad 0, \quad -\frac{2c}{mgb}, \quad -\frac{2k}{mgb} \right] x \quad (6.2)$$

Si el vector  $C$  tiene en sus entradas algún parámetro que varía en un rango cerrado y acotado, el  $RI$  se puede escribir como función de un vector politópico y del estado  $RI = C(\theta)x$ .

### 6.2. Riesgo de derrape lateral

La fuerza de adhesión de las llantas al suelo previene que el vehículo se deslice o derrape lateralmente en una curva. La fuerza de adhesión es tangencial a la trayectoria del punto de

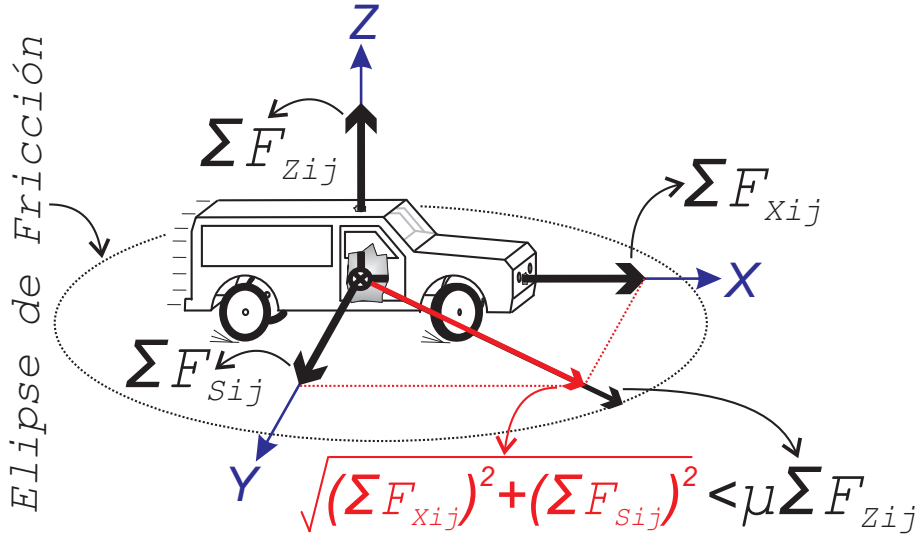


Figura 6.1.: Diagrama esquemático de la elipse de fricción.

contacto suelo llanta  $P_{C_{gh}}$  y cuando ocurre un derrape lateral, la fuerza resultante de las fuerzas longitudinales y laterales en el punto de contacto no puede ser transmitida al suelo debido a la pérdida de adhesión. En la literatura este fenómeno ha sido idealizado utilizando la llamada *elipse de fricción*, que a grandes rasgos establece que si la suma vectorial de las fuerzas longitudinales y laterales permanece dentro de la elipse, entonces esta suma de fuerzas puede ser transmitida hacia el suelo y no puede ocurrir un derrape lateral (ver [65]). Con base en esta representación, cada magnitud de la suma vectorial que está dentro de la elipse es considerada segura, es decir no hay riesgo de derrape (ver Figura 6.1). Una representación matemática de esta elipse es:

$$\sqrt{(ma_x)^2 + \left(\sum_{gh} F_{Sgh}\right)^2} \leq \lambda \mu \sum_{gh} F_{Zgh}, \quad (6.3)$$

donde  $\lambda \geq 1$  es un coeficiente que depende de las propiedades adhesivas de la llanta.  $\lambda$  puede ser obtenido experimentalmente o puede ser considerado de manera conservadora como  $\lambda = 1$  (*i.e.* la llanta no presenta características de adhesividad). Asuma que  $ma_x \approx m\dot{v}_{CoG} = \sum_{gh} F_{Lgh}$  y  $\sum_{gh} F_{Zgh} \approx mg$ , entonces la Desigualdad (6.3) puede ser escrita como:

$$\frac{\sqrt{(\sum_{gh} F_{Lgh})^2 + (\sum_{gh} F_{Sgh})^2}}{\lambda \mu mg} \leq 1. \quad (6.4)$$

Esto es, el lado izquierdo de la desigualdad (6.4) puede ser usado para medir el riesgo de derrape tal que si es mayor o igual a la unidad, el vehículo presenta un riesgo inminente de derrape. Para preservar el signo de las fuerzas laterales e identificar la dirección del derrape la Expresión (6.4) es modificada como sigue:

$$\Gamma_{SI} \triangleq \text{sgn}\left(\sum_{gh} F_{Sgh}\right) \frac{\sqrt{(\sum_{gh} F_{Lgh})^2 + (\sum_{gh} F_{Sgh})^2}}{\lambda \mu mg} \quad (6.5)$$



**Observación 6.1.** En esta sección se determinó un criterio de estimación del riesgo de derrape lateral, que cuantifica el riesgo de pérdida de adherencia de las ruedas con el suelo durante un viraje. Este criterio está dado por la siguiente desigualdad:

$$-1 \leq \Gamma_{SI} \leq 1 \quad (6.6)$$

donde

$$\Gamma_{SI} \triangleq \operatorname{sgn} \left( \sum_{gh} F_{Sgh} \right) \frac{\sqrt{(\sum_{gh} F_{Lgh})^2 + (\sum_{gh} F_{Sgh})^2}}{\lambda \mu mg}. \quad (6.7)$$

Entre más cercano sea  $\Gamma_{SI}$  a la unidad, mayor es el riesgo de derrape lateral hacia la izquierda y entre más cercano sea  $\Gamma_{SI}$  a  $-1$ , mayor es el riesgo de derrape lateral hacia la derecha.

Substituyendo las fuerzas longitudinales (5.51) en (6.7) se obtiene:

$$-1 \leq \Gamma_{SI} \triangleq \frac{\sum_{gh} F_{Sgh}}{\lambda \mu mg} \leq 1. \quad (6.8)$$

Utilizando aproximaciones lineales de las fuerzas laterales (ver [65]) en función de los ángulos de deriva lateral de las llantas ( $\alpha_{gh}$ )

$$F_{SFL} = F_{SFR} = c_v \alpha_F = c_v \left( \delta - \beta - \frac{l_v \Psi}{v} \right) \quad (6.9)$$

$$F_{SRL} = F_{SRR} = c_h \alpha_R = c_h \left( -\beta - \frac{l_h \Psi}{v} \right) \quad (6.10)$$

$$(6.11)$$

se tiene:

$$\sum_{gh} F_{Sgh} = 2c_v \delta - 2(c_v + c_h) \beta + \frac{2}{v} (c_h L_h - c_v L_v) \Psi, \quad (6.12)$$

y la siguiente expresión se verifica fácilmente:

$$SI = \left[ \begin{array}{ccc} -2\sigma & 2\rho & 0 \\ \lambda \mu mg & \lambda \mu mg v & 0 \end{array} \right] x + \frac{2c_v \delta}{\lambda \mu mg}. \quad (6.13)$$

Las constantes  $c_v, c_h$  deben ser adaptadas para ángulos de deriva lateral de las llantas grandes (ver [65]) de manera que para tener un diseño preciso de controladores deben considerarse como parámetros inciertos. En la Sección 7 se realiza un análisis de sensibilidad a éste y otros parámetros para determinar que tan sensible es la dinámica del vehículo a este parámetro; se determina

que  $c_v$  es el parámetro más sensitivo y se diseñan controladores con base en el rango de variación de este y otros parámetros.

La Ecuación (6.13) constituye un Índice de Derrape (SI: Skid Index) que puede ser usado con propósitos de control. Note que valores SI cercanos a la unidad equivalen a un alto riesgo de derrape lateral hacia la izquierda y valores cercanos a la unidad con signo negativo equivalen a un alto riesgo de derrape hacia la derecha.

Note que  $SI$  puede ser escrito en función del estado del modelo linealizado (5.50) en un punto el operación dependiente de la velocidad  $v$  que representa la dinámica del vehículo.

### 6.3. Valoración del riesgo ante incertidumbre paramétrica

La medida del riesgo constituido por el SI y el RI, se establece como salida del sistema (5.52) como sigue:

$$z = \begin{bmatrix} RI \\ SI \end{bmatrix} = Dx + E\delta \quad (6.14)$$

donde:

$$D = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-c}{bmg} & \frac{-k}{bmg} \\ \frac{-\sigma}{\lambda\mu mg} & \frac{\rho}{\lambda\mu mg v} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_v}{\lambda\mu mg} \end{bmatrix}$$

Considerando el sistema politópico incierto, la salida del sistema puede representarse como:

$$z = D_i(\theta)x + E_i(\theta)\delta \quad (6.15)$$

donde las matrices  $D_i(\theta)$ ,  $E_i(\theta)$  pueden obtenerse como en el Capítulo 5 dadas las cotas de incertidumbre de los parámetros. Note que existirá un vértice y un subsistema tal que  $\|z\|$  será mayor, de manera que se puede evaluar de manera conservadora el riesgo en ese vértice y subsistema. Por otro lado, dado que la derivación del SI se ha hecho a partir de un acotamiento superior de las fuerzas en la elipse, el coeficiente de fricción se considera constante, constituyendo éste el peor escenario. Lo anterior, permite contar con un índice conservativo que permita la detección del derrape siempre que exista. Vale la pena observar que los controladores de la estrategia de mitigación de riesgo de derrape lateral y volcadura propuesta, no parten del conocimiento de este valor, sino que se considera desconocido.

### 6.4. Ejemplos de evaluación del riesgo

Para validar el desempeño o capacidad del SI para medir el riesgo de derrape, se efectuaron simulaciones en CarSim. CarSim es un software de simulación y análisis del comportamiento dinámico de vehículos de ruedas y ha sido reconocido, premiado (ver por ejemplo [74]) y utilizado por diversas instancias gubernamentales (ver por ejemplo[70],[71]), comerciales (ver por

ejemplo [73]) y académicas (ver por ejemplo [13], [17], [18], [72] et. al.).

Para realizar las simulaciones se utilizaron 3 modelos diferentes de vehículos, un Mercedes Benz SUV Clase-E, un Porsche Carrera 911 GT, y un vehículo utilitario Mitsubishi U62T. Estos vehículos constituyen por un lado ejemplos de vehículos con alto riesgo de volcadura (Mercedes Benz SUV Clase-E, Mitsubishi U62T) y de un alto riesgo de derrape (Porsche Carrera 911 GT, Mitsubishi U62T). En la Figura 6.3 se muestra el comportamiento de la dinámica lateral para una maniobra agresiva de cambio de carril para el vehículo Clase-E. El cálculo del SI por el CarSim se calcula con la Ecuación no lineal (6.7) ya que las fuerzas se obtienen de manera directa en la simulación. Se utiliza una velocidad inicial  $v_{CoG} = 120 \text{ km/h}$  y un coeficiente de fricción fijo  $\mu = 0.85$  sin ninguna acción de frenado. Note que el SI es menor que  $-1$  en el segundo  $1.7s$  tal que el vehículo derrapa lateralmente pero no se pierde la adherencia en todas las ruedas. Sin embargo a partir del segundo  $3.2s$  SI se calcula mayor que la unidad, lo que implica que el vehículo derrapa lateralmente, la adherencia se pierde en las 4 ruedas de tal forma que el comando en la dirección ya no tiene efecto, y finalmente el vehículo realiza un giro de  $180$  grados mientras derrapa lateralmente.

La misma maniobra ( $\delta(t)$ ) bajo las mismas condiciones iniciales de velocidad y coeficiente de fricción son evaluadas para los vehículos Porsche y Mitsubishi; el comportamiento de SI y la dinámica de Yaw se muestran en las Figuras 6.4 y 6.5 respectivamente. Note que para tal perturbación  $\delta$ , el Porsche pierde adherencia y gira a partir del segundo  $1.2s$  ya que la dinámica lateral de giro (Yaw) es muy sensible a cambios pequeños en  $\delta$ . El cálculo del Skid Index es menor que  $-1$  a partir del instante  $1.2s$ , mostrando una buena capacidad para determinar el riesgo de derrape. En el caso del U67T, el riesgo de derrape es medido atinadamente mayor que uno a partir del segundo  $3.1s$ , posteriormente el vehículo derrapa y vuelca.

La respuesta de CarSim es utilizada para caracterizar el comportamiento lineal del vehículo mientras se desarrolla una maniobra de cambio de carril con velocidad inicial de  $120 \text{ km/h}$  para una maniobra diferente tal que ninguno de los 3 vehículos presenta un riesgo de derrape. Se utilizaron los parámetros del modelo lineal mostrados en la Tabla 6.1 y obtenidos de CarSim a excepción de los parámetros de la suspensión y la llanta que fueron sintonizados para obtener la mejor aproximación lineal respecto a la no lineal obtenida con CarSim. En la Figura 6.6 se presenta la comparativa del comportamiento lineal contra el obtenido por CarSim con (6.7). Como se puede observar la aproximación lineal es aceptablemente buena.

Para mostrar el desempeño o capacidad del RI para medir el riesgo de volcadura considere el mismo vehículo Mercedes Benz SUV Clase-E con los mismos parámetros a excepción de la altura del centro de gravedad que se modifica a  $h = 1.2m$  y la misma maniobra de las simulaciones anteriores. En la Figura 6.7 se muestra de manera comparativa la maniobra, el ángulo de alabeo y el Índice de Volcadura, note como este último tiene un valor de uno a partir del segundo  $3.1$  indicando que hay un alto riesgo de vuelco. El ángulo de alabeo tiene una dinámica que corresponde al comportamiento que el Índice de Volcadura calcula y ocurre un ángulo de  $20$  grados aproximadamente en el segundo  $3.5$  el cuál es un ángulo muy pronunciado. Note como el alabeo finalmente diverge indicando una volcadura de manera que el RI presenta una muy buena estimación del riesgo de volcadura.

En secciones anteriores se menciona que los problemas de derrape lateral y volcadura son problemas íntimamente relacionados. Para ver esto considere los valores del riesgo de volcadura (1.1) y de derrape lateral (6.7) muestreados cada  $0.001s$  para una maniobra ISO 3888-2, en lazo abierto y con la información proporcionada por CarSim/Simulink. Las muestras conforman vectores  $\widehat{RI}, \widehat{SI}$  para los cuáles se calcula su correlación estadística de Pearson [[79]]:

$$\mathfrak{C}_{\widehat{RI}, \widehat{SI}} = \frac{cov(\widehat{RI}, \widehat{SI})}{sdev(\widehat{RI}) sdev(\widehat{SI})} \quad (6.16)$$

donde  $cov(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$  denota la covarianza entre los vectores  $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2$  y  $sdev(\mathfrak{V}_1)$  denota la desviación estándar de las entradas del vector  $\mathfrak{V}_1$ . Las correlaciones estadísticas para los vehículos Mercedes Benz SUV Clase-E, Porsche GT y Mitsubishi U67 es  $\mathfrak{C}_{\widehat{RI}, \widehat{SI}} = 0.99$  en promedio. Esto indica que  $SI$  y  $RI$  son cuantificaciones de riesgo correlacionadas.

Mientras  $SI$  y  $RI$  son cuantificaciones de riesgo íntimamente relacionadas, la diferencia entre la magnitud de  $RI, SI$  depende del ángulo de las ruedas, del tipo de llanta, de las características del vehículo y de las características del camino. Es decir dependiendo de estos parámetros, el vehículo será más propenso a derraparse lateralmente o a volcarse ante una maniobra agresiva. Sin embargo, mantener  $|SI|$  por debajo de un umbral de referencia ( $|SI| \leq SI_{ref}$ ) indica que no hay riesgo de derrape lateral, pero ello no implica ni es equivalente a que el vehículo no corra el riesgo de volcarse ( $|RI| \leq RI_{ref}$ ) y viceversa; de manera que la mitigación de ambos es un requisito si se desea diseñar un dispositivo de seguridad activa que sea antivuelco y antiderrape lateral. En otras palabras:

**Observación 6.2.** *Un dispositivo de seguridad activa que evita el derrape lateral no necesariamente mitigará el riesgo de volcadura y viceversa. A pesar de ser problemas íntimamente relacionados no son equivalentes y puede existir un alto riesgo de volcadura al mismo tiempo que no exista riesgo de derrape lateral, o puede existir un alto riesgo de derrape lateral mientras no exista riesgo de volcadura.*

## 6.5. Prueba de estabilidad del sistema de seguridad activa

En esta sección se obtiene el diseño de un controlador conmutado con base en los resultados del Capítulo 3, así como las condiciones bajo las cuáles se evita la volcadura y el derrape lateral aplicando los resultados de los Capítulos 3 y 4.

En (3.8) se utiliza una retroalimentación de la salida dada por (3.6); para el caso particular del vehículo se considerará que la retroalimentación consiste de la velocidad del ángulo de giro y de

la velocidad del ángulo de alabeo, de tal manera que:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

con vectores de ganancia  $L = [\cdot, l_1, l_2, \cdot]$ ,  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 6.1.** *Considere el modelo politópico del vehículo de la Ecuación (5.56) con evolución en lazo abierto:*

$$\dot{x} = A_i(\theta(t))x + B_{\delta,i}(\theta(t))\delta \quad (6.18)$$

$$y = Cx \quad (6.19)$$

$$z = D_i(\theta(t))x + E_i(\theta(t))\delta \quad (6.20)$$

*y el sistema que representa el modelo politópico del vehículo de la Ecuación (5.56) con evolución en lazo cerrado:*

$$\dot{x} = A_i(\theta(t))x + B_{\delta,i}(\theta(t))\delta + B_{u,i}(\theta(t))u \quad (6.21)$$

$$y = Cx \quad (6.22)$$

$$z = D_i(\theta(t))x + E_i(\theta(t))\delta \quad (6.23)$$

$$u_i(t) = K_i y = L_i Cx. \quad (6.24)$$

*cuyos modos evolucionan en  $Z_{1a}$ ,  $Z_{1c}$  respectivamente. Si se puede encontrar una matriz  $P \succ 0$ ,  $P = P'$  tal que*

$$PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P \prec 0 \quad (6.25)$$

*para cada  $i \in Z$  y para cada  $j = 1, \dots, \mathfrak{v}$ , y controladores  $u_i(t)$  como en (6.24) con escalares  $l_{1,i}, l_{2,i}$  tales que minimizan:*

$$\sum \lambda \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + PB_{u,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{u,i}^{[j]'} P + \mathfrak{v}_{1,i} I \right) \quad (6.26)$$

*para cada  $i \in Z_{1c}$  y para cada  $j = 1, \dots, \mathfrak{v}$ , donde la  $i$ -ésima minimización está sujeta a*

$$\|L_i\| \leq L_{max} \quad (6.27)$$

$$\lambda_{max} \left( PA_i^{[j]} + A_i^{[j]'} P + PB_{u,i}^{[j]} L_i C + C' L_i' B_{u,i}^{[j]'} P + \mathfrak{v}_{1,i} I \right) < 0 \quad (6.28)$$

Tabla 6.1.: Parámetros de los Vehículos

	E-Class	911	U67T	(Unidades)
$c$	35000	30000	35000	$N \cdot m \cdot s/rad$
$c_v$	26250	75000	29250	$N/rad$
$c_h$	28250	150000	28250	$N/rad$
$h$	0.72	0.39	0.72	$m$
$J_z$	2687.7	1270	2687.7	$kg \cdot m^2$
$J_\phi$	894.4	614	894.6	$kg \cdot m^2$
$k$	120000	200000	120000	$n \cdot m/rad$
$L_v$	1.180	1.525	1.180	$m$
$L_h$	1.77	0.825	1.77	$m$
$m$	1590	1278	1590	$kg$
$b$	1.575	1.72	1.575	$m$
$\lambda$	1	1	1	1

para valores  $v_{1,i} > 0$ , para cada  $i \in Z_{lc}$  y para todo  $j = 1 \dots v$ , entonces las soluciones del sistema (2.37)-(2.39) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas en el conjunto  $\Omega_{ref} = \{\|x(t)\| \|z\| \leq z_{ref}\}$  con la Ley de Conmutación (4.7) para todo  $\theta \in \Theta$ , con  $z = [RI, SI]'$  si

$$c_{v,lc} \leq c_{con} = \frac{z_{ref} - \left(E_m + D_m B_m \frac{p}{q}\right) w_{max}}{D_m p} < c_{v,la} \quad (6.29)$$

con  $c_{v,lc}$ ,  $c_{v,la}$ ,  $B_m$ ,  $D_m$ ,  $E_m$  como en el Teorema 4.1.

*Demostración.* La prueba es directa del Teorema 3.3 y del Teorema 4.1. □

En la Figura 6.2 se muestra un diagrama a bloques de la estrategia de control propuesta.

## 6.6. Comentarios finales del capítulo

En este capítulo se obtuvo una métrica del riesgo de derrape, y expresión matemática simple para el cálculo del mismo. Se realizaron validaciones con software comercial para tres vehículos de 4 ruedas de características totalmente distintas. El SI presenta una muy buena estimación del riesgo de derrape lateral. En conjunto con el RI, la estimación de SI presentan una métrica muy completa del riesgo de derrape/volcadura que es útil para diseño de control. Se aplicaron de manera analítica los resultados de capítulos anteriores para la obtención de los controladores y condiciones para el acotamiento del estado y obtener consecuentemente un régimen de manejo del vehículo seguro .

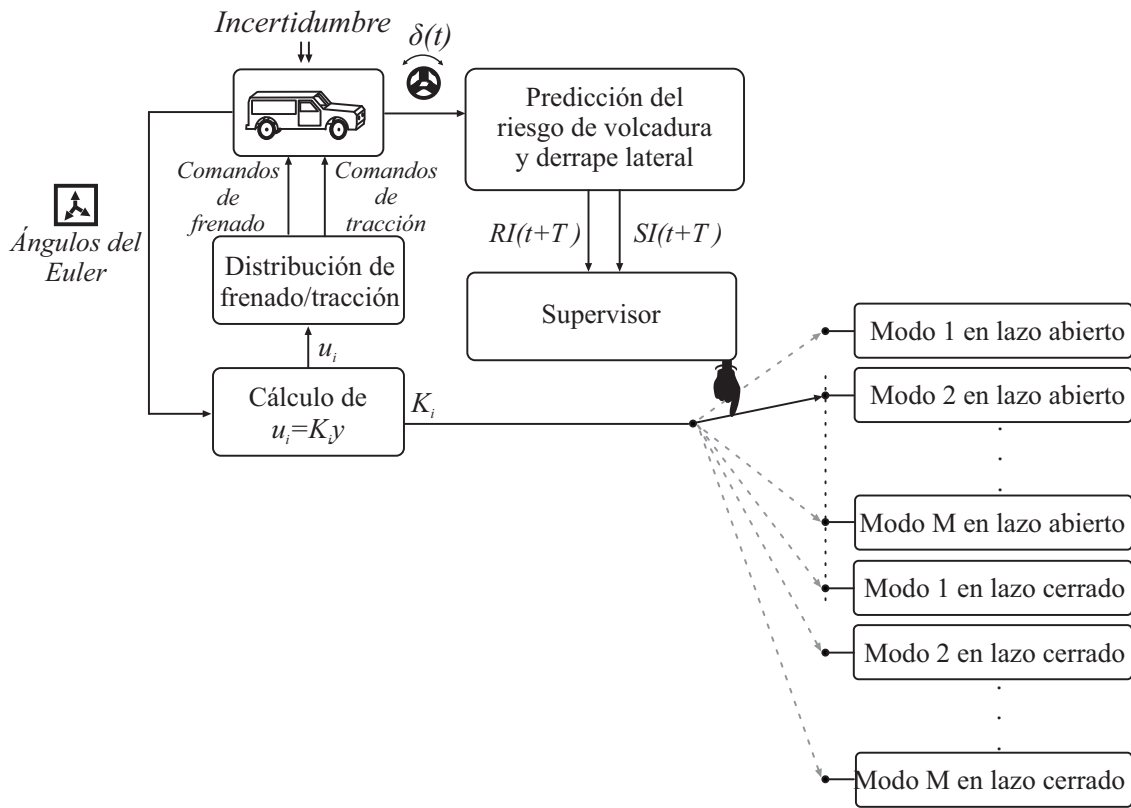


Figura 6.2.: Diagrama a bloques de la estrategia de control.

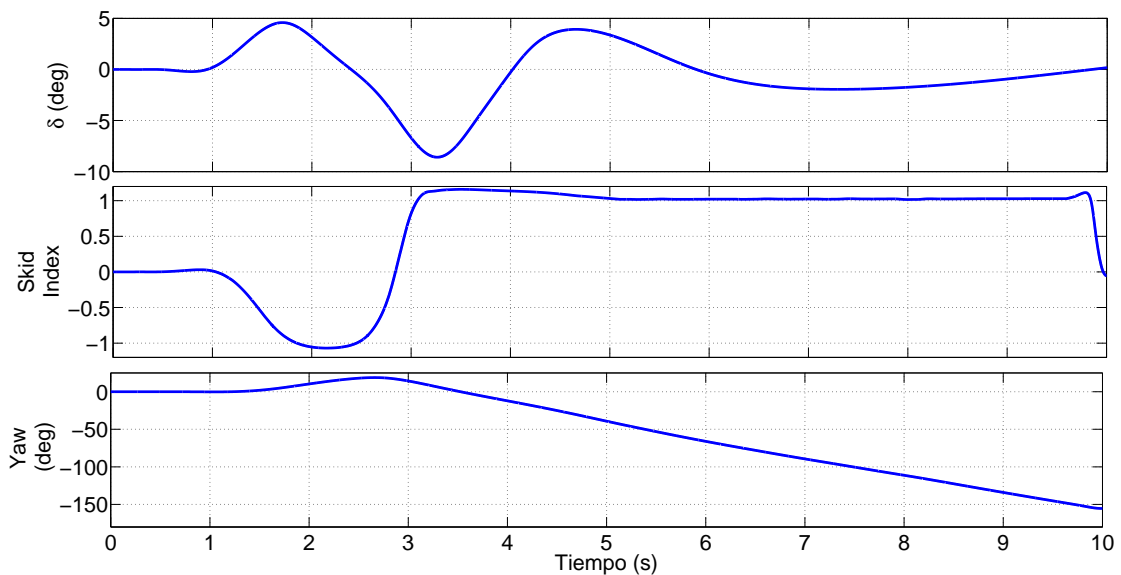


Figura 6.3.: Skid Index para una maniobra agresiva en un vehículo Clase-E.

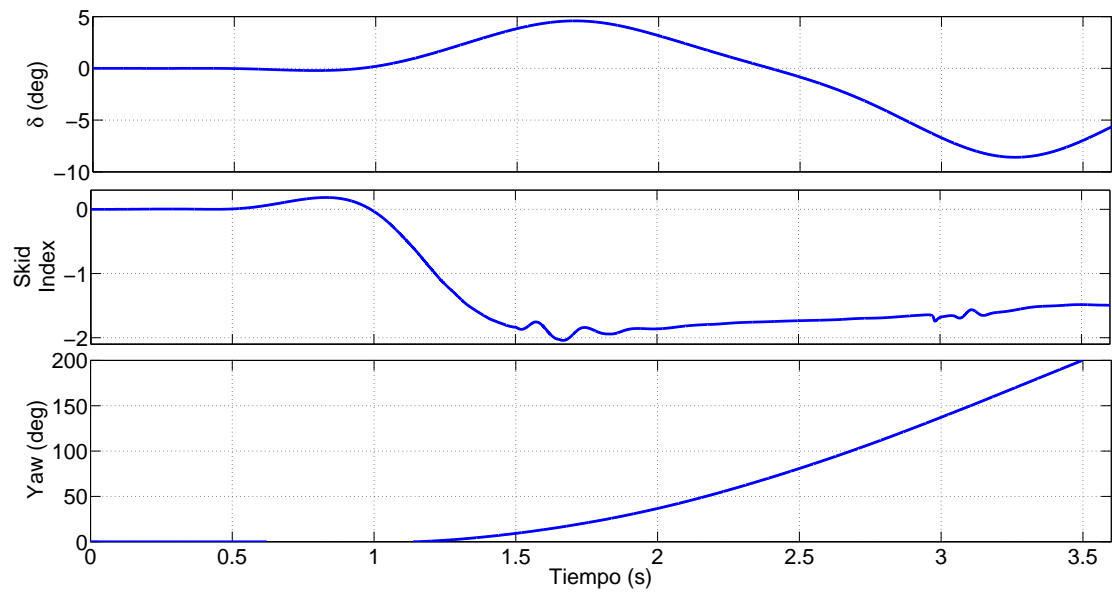


Figura 6.4.: Skid Index para una maniobra agresiva en un vehículo Porsche 911.

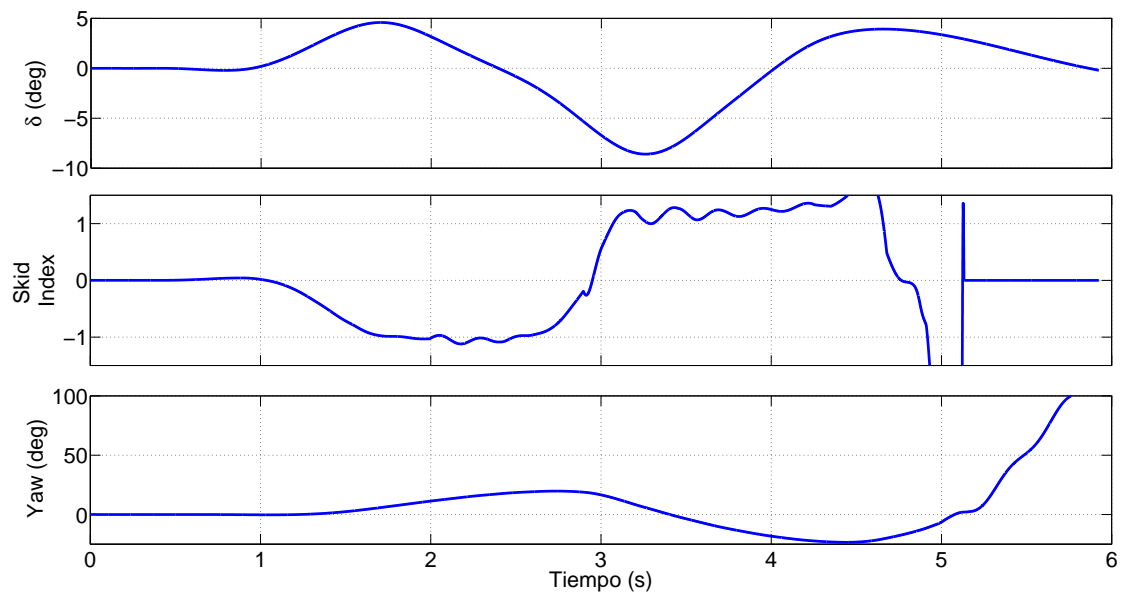


Figura 6.5.: Skid Index para una maniobra agresiva en un vehículo U67T.



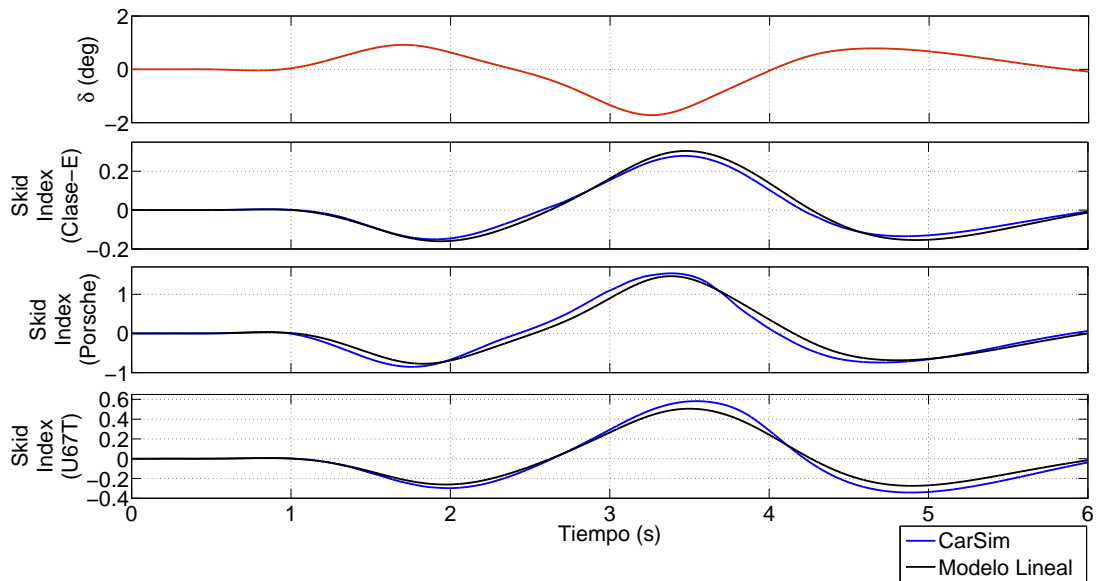


Figura 6.6.: Aproximación lineal del Skid Index sin derrape lateral.

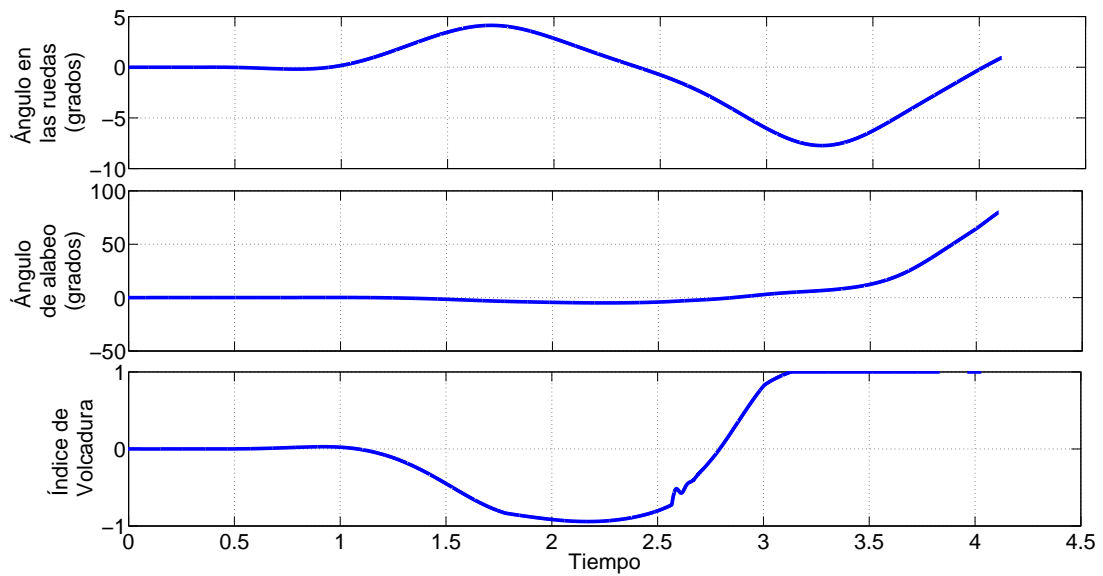


Figura 6.7.: Rollover Index para una maniobra agresiva en un vehículo Clase-E con alto centro de gravedad.



## 7. Ejemplo de estudio

*En este capítulo se ilustran los resultados obtenidos en los Capítulos 3, 4, 5 y 6 en la resolución del problema de volcadura/derrape en vehículos de 4 ruedas.*

### 7.1. Modelo politópico de un vehículo de 4 ruedas

Con fines ilustrativos, a continuación se deriva el modelo lineal politópico conmutado de un vehículo SUV Clase-E. Sólo se considera un modo a lazo abierto y un modo a lazo cerrado debido a que es el peor escenario de operación; es decir, se podría tener un mejor desempeño del controlador y mayores márgenes de estabilidad. En la siguiente sección se ilustra por medio de simulaciones, cómo el desempeño mejora aumentando el número de linealizaciones. Debido a que en esta sección hay solamente un subsistema, el subíndice  $i$  será omitido con fines de legibilidad.

Los modelos numéricos de otros vehículos incluyendo los mencionados en la Sección 6.4 pueden ser obtenidos de manera análoga siguiendo el siguiente procedimiento.

Primeramente, la elección de los parámetros inciertos se derivan a partir de un análisis de sensibilidad, con el fin de revelar cuales son los parámetros que tienen mayor efecto en el riesgo de vuelco y derrape lateral. La linealización se realiza en un punto de operación dependiente de la velocidad del vehículo con  $v_{CoG} = v = 120km/h$ .

Uno de los métodos más simples para determinar la sensibilidad a un parámetro en particular de un sistema dinámico, es calcular su salida para una señal de perturbación del conductor estándar y un conjunto de valores del parámetro. La sensibilidad se calculó en esta Tesis a partir de incrementos en los parámetros con pasos fijos de 0.05% desde una cota inferior hasta una cota superior ( $\pm 5\%$ ). El Índice de Sensibilidad ( $I_s$ ) está definido como [75]:

$$I_s = \frac{\hat{z}_{max} - \hat{z}_{min}}{\hat{z}_{max}} \cdot 100 \quad (7.1)$$

donde  $\hat{z}_{max} = \max\{z_{max}(\rho_{lower}), z_{max}(\rho_{lower} + 0.05\rho_{lower}), z_{max}(\rho_{lower} + 0.1\rho_{lower}), \dots, z(\rho_{upper})\}$ , donde  $z_{max}(\cdot) = \max(\|z(\tau)\|), \forall t \in [0, \tau]$  con  $z$  la salida del sistema (5.52) calculada como en (6.14), y  $\rho_{lower}$  y  $\rho_{upper}$  son las cotas mínima y máxima del parámetro. Por otro lado,  $\hat{z}_{min} = \min\{z_{max}(\rho_{lower}), z_{max}(\rho_{lower} + 0.05\rho_{lower}), z_{max}(\rho_{lower} + 0.1\rho_{lower}), \dots, z(\rho_{upper})\}$ . Los parámetros nominales se toman de la Tabla 6.1, y la velocidad se considera en el rango de  $[40, 120]km/h$ . Como se mencionó en la sección anterior, los parámetros nominales son obtenidos de CarSim.

En la Tabla 7.1 se muestran los índices de sensibilidad para cada parámetro en el caso de un

vehículo Mercedes Benz Clase-E modelo 2002. Los parámetros más sensibles son  $c_v$  (relacionado con las llantas delanteras),  $h$  (Altura del CoG),  $L_v$  y  $L_h$  (distancia del CoG al eje frontal y posterior respectivamente) y la velocidad del vehículo  $v_{CoG}$ . Se fijan  $L_h$  y  $L_v$  ya que no se consideran cambios abruptos en la posición longitudinal del centro de gravedad sólo con fines ilustrativos de este ejemplo de diseño.

Para el diseño de los controladores y con fines ilustrativos, dos casos se discuten:

1. Una descripción única con un sólo dominio de operación (condiciones de estabilidad más restrictivas, Sección 7.2))
2. Una descripción con múltiple con varias linealizaciones (ver Sección 7.3).

El objetivo de analizar estos casos es por un lado, ilustrar la factibilidad de la existencia de una sola función de Lyapunov por virtud del algoritmo de la Figura 3.4; y por el otro, ilustrar cómo el desempeño en lazo cerrado puede mejorarse al usar varios subdominios de operación. En el caso 1, se considera que la velocidad del vehículo se encuentra en el rango de 40 a 120km/h, ya que a velocidades inferiores no puede ocurrir un riesgo con el coeficiente de fricción utilizado. La altura del centro de gravedad se considerará con un rango de variación de 0.72 a 1.2 metros en los casos de la SUV y el vehículo de carga, y de 0.39 a 0.5 metros en el deportivo; estos rangos fueron obtenidos de acuerdo a limitaciones de la capacidad de carga y simulaciones. Para la rigidez de la llanta se eligió un rango arbitrario de variación del 40%. El rango de variación de la rigidez de la llanta puede ser calculado con base en la variación de diversos parámetros como temperatura, presión de aire, tipo de llanta, entre otros por medio de la aproximación de Pacejka.

Debido a que se tiene un subsistema en lazo abierto y un subsistema en lazo cerrado, se puede omitir el subíndice de subsistema  $i$  para las matrices del sistema politópico conmutado (5.56), la salida politópica conmutada (6.15) y sus entradas asociadas; se tiene entonces que las matrices  $A(\theta), B_\delta(\theta), C(\theta), D(\theta)$  pueden ser representadas como funciones del vector de parámetros:

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{64}] \quad (7.2)$$

como se describe a continuación:

$$A(\theta) = \sum_{p=1}^{64} \theta_p A_p \quad (7.3)$$

donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} \underline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & 0 & 0 \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$A_{62} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{31}} & \overline{a_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{63} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{31}} & \overline{a_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{64} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & 0 & 0 \\ \overline{a_{31}} & \overline{a_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y para el caso del Mercedes Benz Clase-E 2002 se tiene que

$$\begin{aligned} \underline{a_{11}} &= -\frac{2(c_v + c_h)}{m_{CoG}\bar{v}} = 1.8584, & \overline{a_{11}} &= -\frac{2(\bar{c}_v + c_h)}{m_{CoG}\underline{v}} = 6.7641, \\ \underline{a_{12}} &= \frac{2(c_h L_h - \bar{c}_v L_v)}{m_{CoG}\bar{v}^2} - 1 = -0.9854, & \overline{a_{12}} &= \frac{2(c_h L_h - c_v L_v)}{m_{CoG}\underline{v}^2} - 1 = -0.7430, \\ \underline{a_{21}} &= \frac{2(c_h L_h - \bar{c}_v L_v)}{J_z} = 9.5491, & \overline{a_{21}} &= \frac{2(c_h L_h - c_v L_v)}{J_z} = 18.7688, \\ \underline{a_{22}} &= -\frac{2(c_h L_h^2 + \bar{c}_v L_v^2)}{J_z \bar{v}} = -8.8647, & \overline{a_{22}} &= -\frac{2(c_h L_h^2 + c_v L_v^2)}{J_z \underline{v}} = -2.6285, \\ \underline{a_{31}} &= -\frac{2\bar{h}(\bar{c}_v + c_h)}{J_\phi} = -160.3309, & \overline{a_{31}} &= -\frac{2\bar{h}(c_v + c_h)}{J_\phi} = -79.2934, \\ \underline{a_{32}} &= \frac{2\bar{h}(c_h L_h - \bar{c}_v L_v)}{J_\phi \bar{v}} = 1.8595, & \overline{a_{32}} &= \frac{2\bar{h}(c_h L_h - c_v L_v)}{J_\phi \underline{v}} = 2.0304. \end{aligned}$$

$$B_\delta(\theta) = \sum_{i=1}^8 \theta_i B_{\delta,i} \quad (7.4)$$

donde:

$$B_{\delta,1} = \begin{bmatrix} \underline{b_{\delta,1}} \\ \underline{b_{\delta,2}} \\ \underline{b_{\delta,3}} \\ 0 \end{bmatrix}, B_{\delta,2} = \begin{bmatrix} \overline{b_{\delta,1}} \\ \overline{b_{\delta,2}} \\ \overline{b_{\delta,3}} \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, B_{\delta,8} = \begin{bmatrix} \underline{b_{\delta,1}} \\ \underline{b_{\delta,2}} \\ \underline{b_{\delta,3}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

con:

$$\begin{aligned} \underline{b_{\delta,1}} &= \frac{2c_v}{m_{CoG}\bar{v}} = 0.7925, & \overline{b_{\delta,1}} &= \frac{2\bar{c}_v}{m_{CoG}\underline{v}} = 3.5660, \\ \underline{b_{\delta,2}} &= \frac{2c_v L_v - 2c_h L_h}{J_z} = -18.7688, & \overline{b_{\delta,2}} &= \frac{2\bar{c}_v L_v - 2c_h L_h}{J_z} = -9.5491, \end{aligned}$$

$$\underline{b_{\delta,3}} = -\frac{2\bar{c}_v\bar{h}}{J_\phi} = -84.5259 \quad , \quad \bar{b}_{\delta,3} = -\frac{2c_v h}{J_\phi} = -33.8104$$

y finalmente, en virtud de que  $B_u$  no depende de  $c_v$ ,  $h$ , ni  $v_{CoG}$  se tiene que:

$$B_u(\theta) = B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ b/J_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.8600 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 7.2. Diseño del controlador antivuelco y antiderrape con una sola linealización.

Considere los tres vehículos mencionados en la Sección 6.4 con los parámetros nominales de la Tabla 6.1. Una matriz  $P$  que satisface (3.51) para el sistema dinámico del vehículo Clase-E presentado en este capítulo es:

$$P_E = \begin{bmatrix} 1.2074 & 0.0877 & -0.0158 & 0.5077 \\ 0.0877 & 0.1205 & -0.0012 & -0.0818 \\ -0.0158 & -0.0012 & 0.0129 & 0.0030 \\ 0.5077 & -0.0818 & 0.0030 & 2.2723 \end{bmatrix} ,$$

para el vehículo Porsche 911:

$$P_P = \begin{bmatrix} 0.9504 & -0.0113 & -0.0340 & 0.9213 \\ -0.0113 & 0.0391 & -0.0004 & -0.0603 \\ -0.0340 & -0.0004 & 0.0103 & 0.0015 \\ 0.9213 & -0.0603 & 0.0015 & 3.4186 \end{bmatrix} ,$$

y para el Mitsubishi U67T:

$$P_U = \begin{bmatrix} 2.3972 & 0.1216 & -0.0420 & 0.6834 \\ 0.1216 & 0.1826 & -0.0035 & -0.1494 \\ -0.0420 & -0.0035 & 0.0194 & 0.0048 \\ 0.6834 & -0.1494 & 0.0048 & 2.1442 \end{bmatrix} .$$

La limitación de ganancia  $L_{max}$  se elige por aproximación tal que bajo una maniobra estándar ISO 3888-2 se tiene  $|u| \leq \mu mg$ . Se elige además  $z_{ref} = 1$ . Los valores de las cotas para el caso del Mercedes Clase E son:

$$c_{v_{lc},E} = 0.2775 \quad (7.5)$$

$$c_{v_{la},E} = 0.4445 \quad (7.6)$$

$$c_{con,E} = 0.3154 \quad (7.7)$$

$$T = 0.5 \quad (7.8)$$

$$w_{max,E} = \delta_{max,E} = 0.6980 \quad (7.9)$$

Para el Porsche 911:

$$c_{v_{lc},P} = 0.5239 \quad (7.10)$$

$$c_{v_{la},P} = 0.9215 \quad (7.11)$$

$$c_{con,P} = 0.8154 \quad (7.12)$$

$$T = 0.5 \quad (7.13)$$

$$w_{max,P} = \delta_{max,P} = 0.4210 \quad (7.14)$$

Y para el Mitsubishi U67T:

$$c_{v_{lc},U} = 0.3855 \quad (7.15)$$

$$c_{v_{la},U} = 0.6988 \quad (7.16)$$

$$c_{con,U} = 0.5205 \quad (7.17)$$

$$T = 0.5 \quad (7.18)$$

$$w_{max,U} = \delta_{max,U} = 0.5197 \quad (7.19)$$

El vector de ganancia obtenido por medio del Teorema 3.3 y el algoritmo de la Figura 3.4 para el vehículo Mercedes Benz Clase-E es:

$$L_E = [ 0 \quad -30899.29 \quad 251.97 \quad 0 ],$$

para el vehículo 911 de Porsche:

$$L_P = [ 0 \quad -25255.95 \quad 205.70 \quad 0 ],$$

y para el vehículo U67T de Mitsubishi:

$$L_U = [ 0 \quad -6028.61 \quad 120.035 \quad 0 ].$$

Con fines de realizar la predicción, se utiliza el Modelo de Chofer (4.4) con  $t_s = 0.001s$  pues provee de una predicción adecuada para tal horizonte de predicción y no representa un cálculo muy complejo de acuerdo al criterio (4.3).

### 7.3. Diseño del controlador antivuelco y antiderrape con varias linealizaciones.

Como se mencionó al inicio de este capítulo, en esta sección se ilustra como el margen de estabilidad y el desempeño mejoran aumentando el número de linealizaciones. El autor de la Tesis no pudo encontrar en la literatura un criterio sustentado en algún análisis matemático, para realizar la elección de los puntos de operación ni para la elección de la cantidad de modos de operación

que mejoren el desempeño. Sin embargo, se logró establecer que una única linealización representa el peor escenario de desempeño de la estrategia de control presentada en esta Tesis, y el desempeño mejora realizando linealizaciones en varios puntos de operación dependientes de la velocidad del vehículo.

### 7.3.1. Diseño del controlador antivuelco y antiderrape con dos linealizaciones

Con la finalidad de realizar linealizaciones dependientes de la velocidad del vehículo, considere el rango de variación de la velocidad del vehículo de la misma manera que se realizó en las secciones anteriores, es decir  $v_{CoG} \in [40, 120]km/h$  pero dividido en dos partes. La primera linealización se realiza en  $v_{CoG} = 60km/h$  e incluye la variación paramétrica de la velocidad  $v_{CoG} \in [40, 80]km/h$  y la segunda linealización se realiza en  $v_{CoG} = 100km/h$  e incluye la variación paramétrica de la velocidad  $v_{CoG} \in [80, 120]km/h$ .

Note que ahora el criterio de conmutación se debe realizar en dos niveles, el primero que llamaremos criterio de elección de modo y está dado como sigue:

$$i = \begin{cases} 1, & v_{CoG} \in [40, 80) \\ 2, & v_{CoG} \in [80, 120) \end{cases}, \text{ si } i \in M = \{1, 2\} \quad (7.20)$$

mientras el criterio de conmutación que determina si el modo activo opera en lazo abierto o en lazo cerrado es:

$$i = \begin{cases} \text{Modo en lazo abierto,} & \text{si } \|z(t_p)\| \leq z_{ref} \wedge t_r \geq t_p \\ \text{Modo en lazo cerrado,} & \text{si } \|z(t_p)\| > z_{ref} \end{cases} \quad (7.21)$$

Siguiendo el procedimiento numérico descrito en la Sección 7.1 para cada modo, y por medio del algoritmo del Teorema 3.3 para el caso del vehículo Clase E se obtienen los siguientes vectores de ganancia:

$$L_{EII,1} = [ 0 \quad -20648.29 \quad 276.97 \quad 0 ]$$

$$L_{EII,2} = [ 0 \quad -32189.94 \quad 131.25 \quad 0 ]$$

### 7.3.2. Diseño del controlador antivuelco y antiderrape con cuatro linealizaciones

Ahora considere el rango de variación de la velocidad del vehículo dividido en cuatro partes. La primera linealización se realiza en  $v_{CoG} = 50km/h$  e incluye la variación paramétrica de la velocidad  $v_{CoG} \in [40, 60]km/h$ . La segunda linealización se realiza en  $v_{CoG} = 70km/h$  e incluye la variación paramétrica de la velocidad  $v_{CoG} \in [60, 80]km/h$ . La tercera linealización se realiza en  $v_{CoG} = 90km/h$  e incluye la variación paramétrica de la velocidad  $v_{CoG} \in [80, 100]km/h$ . La cuarta linealización se realiza en  $v_{CoG} = 110km/h$  e incluye la variación paramétrica de la



velocidad  $v_{CoG} \in [100, 120] km/h$ .

Ahora el criterio de elección de modo está dado como sigue:

$$i = \begin{cases} 1, & v_{CoG} \in [40, 60) \\ 2, & v_{CoG} \in [60, 80) \\ 3, & v_{CoG} \in [80, 100) \\ 4, & v_{CoG} \in [100, 120) \end{cases}, \text{ si } i \in M = \{1, 2, 3, 4\} \quad (7.22)$$

mientras el criterio de conmutación sigue siendo 7.21. Utilizando el algoritmo del Teorema 3.3 para el caso del vehículo Clase E se obtienen los siguientes vectores de ganancia:

$$\begin{aligned} L_{EIV,1} &= [ 0 \quad -19875.64 \quad 254.54 \quad 0 ], \\ L_{EIV,2} &= [ 0 \quad -24556.21 \quad 199.11 \quad 0 ], \\ L_{EIV,3} &= [ 0 \quad -28256.54 \quad 152.32 \quad 0 ], \\ L_{EIV,4} &= [ 0 \quad -31845.46 \quad 130.91 \quad 0 ]. \end{aligned}$$

## 7.4. Simulaciones numéricas

A continuación se presentan resultados relevantes en forma de simulaciones numéricas representadas en tendencias.

Primero se presentan simulaciones concernientes a la predicción de la dinámica del sistema que se utilizará con fines de conmutación. En la Figura 7.1 se muestra la predicción de la salida (Ecuación (6.15)) en lazo abierto y el peor escenario de incertidumbre para una maniobra de cambio de carril estándar, y es comparada con la dinámica calculada por un modelo no lineal que es generado por CarSim (con (1.1) y (6.7)). Note cómo la tendencia en color azul ilustra un desempeño muy semejante al real, pero que es predicho medio segundo. Esta predicción será útil para realizar la estrategia de conmutación predictiva.

A continuación se muestran simulaciones que buscan ilustrar el beneficio en la salida  $z$  de realizar varias linealizaciones en puntos de operación dependientes de la velocidad. En la Figura 7.2 es posible visualizar el criterio de elección de modos de manera conjunta con los desempeños del Skid Index en el caso de 1, 2 o 4 linealizaciones. Note como el desempeño mejora gradualmente aumentando el número de linealizaciones, esto es logrado debido a que cada controlador es diseñado con base en un modelo que es más exacto para reproducir la dinámica real de manera que el margen de estabilidad mejora como se muestra en la Tabla 7.2; en esta tabla se indican los valores de los márgenes de estabilidad obtenidos para los diferentes casos de número de linealizaciones efectuadas con una matriz  $P$  común y se puede ver como el mejor margen aumenta conforme el número de linealizaciones aumenta. Note que el criterio de elección del modo es muy simple y depende de la velocidad del vehículo.

Ahora se presentan simulaciones en el peor caso de linealizaciones que es una, para mostrar el efecto en la salida  $z$  cuando no se realiza predicción y/o tracción diferencial. En la Figura 7.3, se realiza una comparativa del comportamiento de la salida obtenida con el modelo no lineal generado por CarSim, para una maniobra de cambio de carril a lazo abierto, contra

- El controlador conmutado, aplicando sólo frenado diferencial, es decir sin tracción diferencial y sin predicción.
- El controlador conmutado propuesto, aplicando sólo frenado diferencial sin tracción diferencial con una predicción hasta un horizonte  $T = 0.5s$ .
- El controlador conmutado propuesto, aplicando frenado diferencial y tracción diferencial con una predicción hasta un horizonte  $T = 0.5s$

Note como el desempeño mejora en el orden de la lista anterior. Esta simulación se realizó puesto que en la práctica, la Ecuación (5.51) tal vez no se pueda lograr para valores grandes de  $u$ , ya que el par motor máximo de vehículos convencionales no lo permite. En esta simulación CarSim incluye de manera precisa el efecto de la limitación del par motor del vehículo, así como también efectos de retardo en los actuadores; a pesar de estos inconvenientes la mejoría en el desempeño es notable. En la Figura 7.4 se muestra la salida de control respectiva a esta simulación, note como el esfuerzo de frenado es menor cuando la tracción es utilizada.

A continuación se ilustra el comportamiento de la dinámica del sistema en el peor caso de linealizaciones que es una, mostrado en la Figura 5.5 de la siguiente manera: considere ahora la maniobra de cambio de carril mostrada en la Figura 7.5. Tal maniobra es seleccionada y evaluada en el vehículo Clase E, de tal forma que  $|\delta| > \delta_{max,E}$  y de igual manera para los otros dos vehículos; en los tres vehículos induce un riesgo inminente en lazo abierto que corresponde a una trayectoria fuera de la región sombreada en la Figura 5.5. En la Figura 7.6 se ilustra el riesgo inducido por la maniobra de la Figura 7.5 para el vehículo Clase E, y de manera respectiva en la Figura 7.7 para el Porsche y en la Figura 7.8 para el utilitario. Note como en los 3 vehículos el riesgo ha disminuido considerablemente y se evita la volcadura/derrape lateral. En la Figura 7.9 se muestra como cada vehículo presenta un giro abrupto (derrape lateral) en lazo abierto y como en lazo cerrado se logra mitigar el riesgo a pesar de que  $|\delta| > \delta_{max}$ .

## 7.5. Comentarios finales del capítulo

En este capítulo se ejemplifica la construcción del modelo politópico de un vehículo Mercedes Benz Clase-E, esta construcción puede extenderse de manera sencilla a diferentes linealizaciones en diversos puntos de operación del vehículo. Por otro lado, el diseño del modelo politópico conmutado para otros vehículos de 4 ruedas puede ser realizado siguiendo el mismo procedimiento ejemplificado. El diseño de los controladores antivuelco y antiderrape lateral se realiza fuera de línea, y se ejemplifica con el vehículo Mercedes Benz Clase-E y tres parámetros inciertos que resultan ser los más sensitivos que no son factores de diseño del vehículo.

En esta Sección se presentan diversas simulaciones representativas que ilustran la eficacia de la estrategia propuesta, para mitigar la volcadura y el derrape lateral. Se eligieron vehículos de propósitos muy distintos y el resultado sigue siendo mitigar el riesgo de volcadura/derrape lateral, y debido a su sencillez puede ser implementado en un dispositivo electrónico con bajo costo de producción.

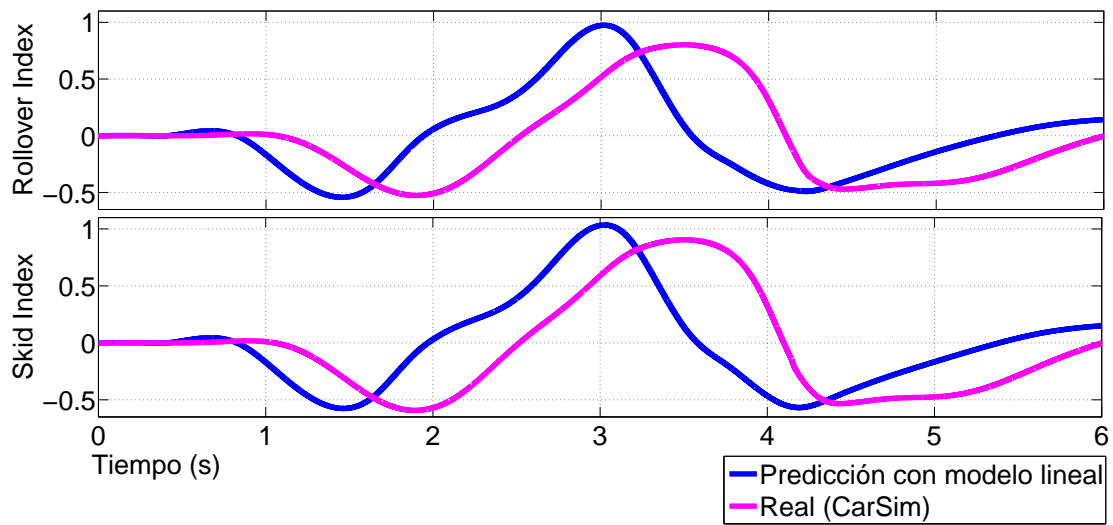


Figura 7.1.: Predicción de la salida del sistema para una maniobra de cambio de carril en Mercedes Benz Clase-E.

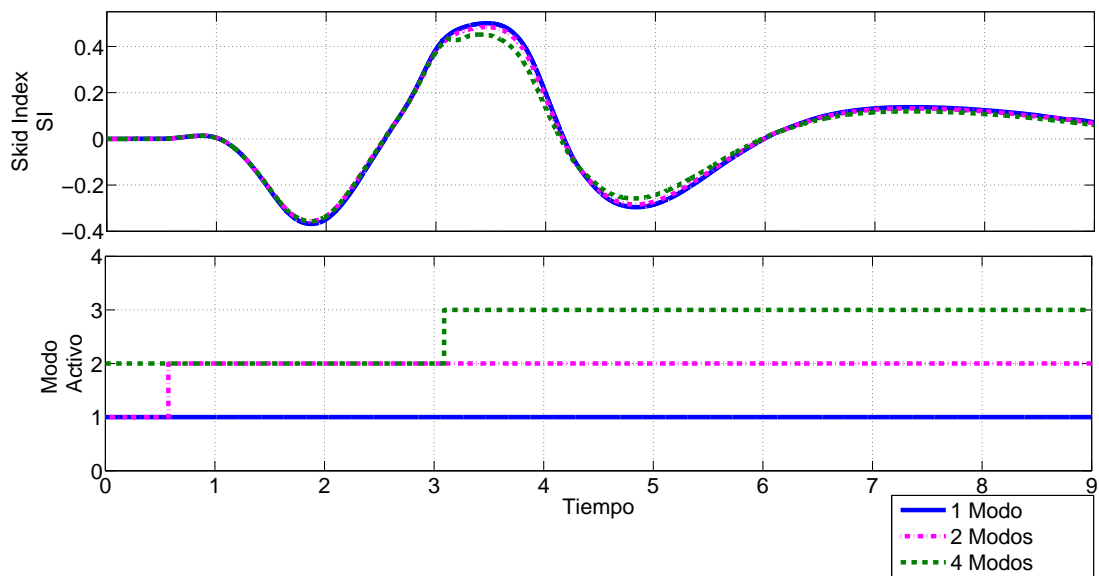


Figura 7.2.: Comparativa de desempeño de la estrategia de control con una sola linealización y con varias linealizaciones para un vehículo Mercedes Benz Clase-E.

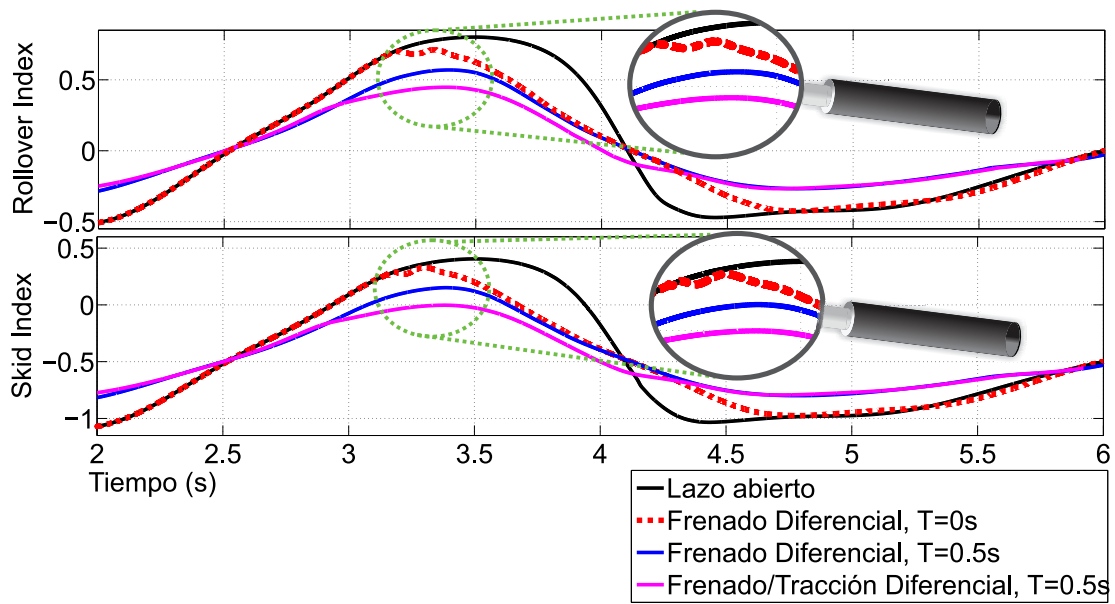


Figura 7.3.: Comparativa de desempeño para diferentes escenarios del controlador, con maniobra de cambio de carril en Mercedes Benz Clase-E.

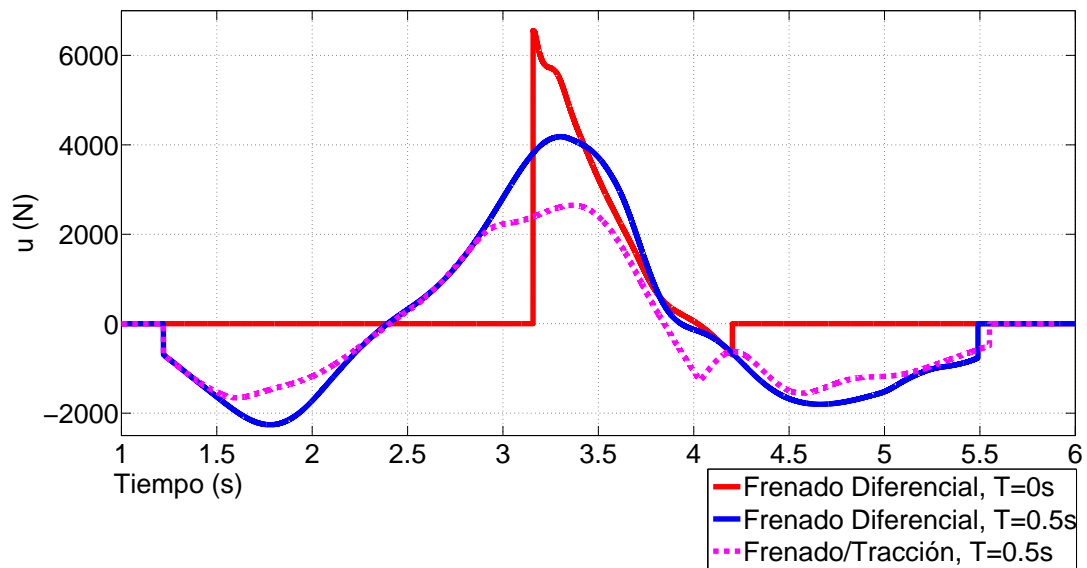


Figura 7.4.: Comparativa de las acciones de control para diferentes escenarios del controlador, con maniobra de cambio de carril en Mercedes Benz Clase-E.

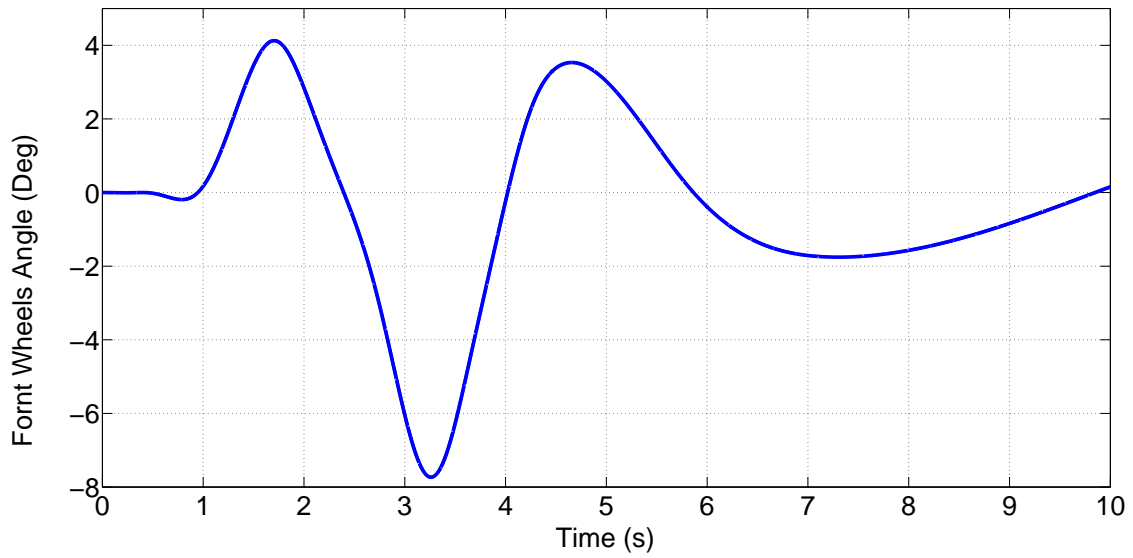


Figura 7.5.: Maniobra de cambio de carril que produce un riesgo de vuelco/derrape para varios vehículos.

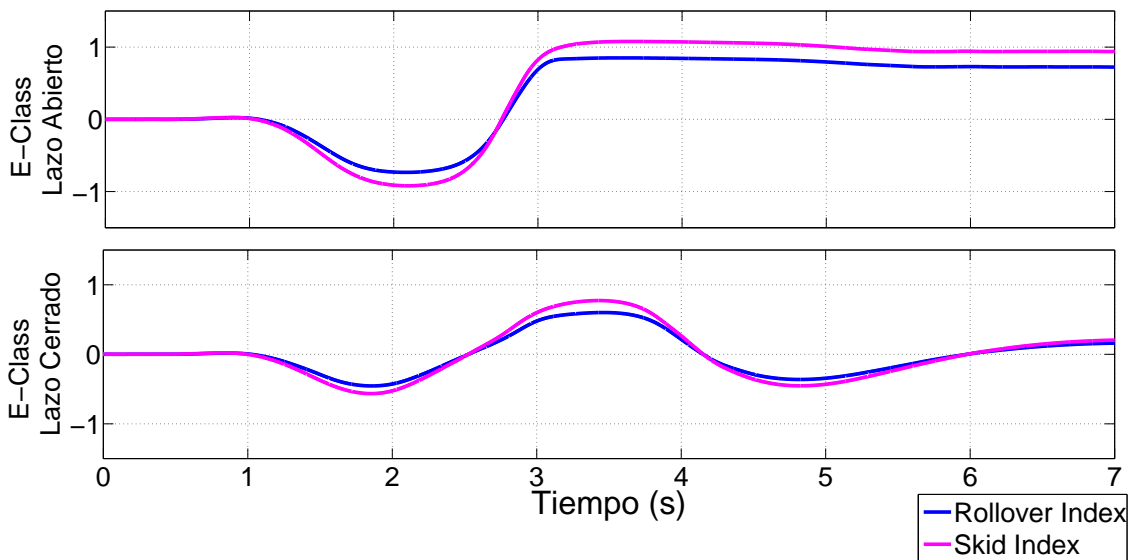


Figura 7.6.: RI y SI para una maniobra de cambio de carril que produce un riesgo de vuelco/derrape en lazo abierto, para un Mercedes Benz Clase E.

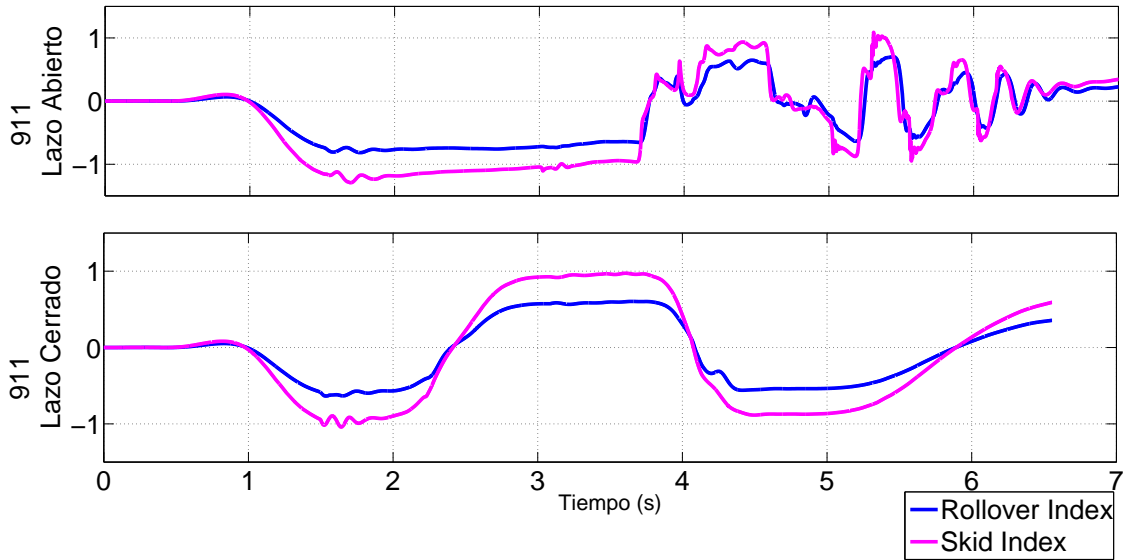


Figura 7.7.: RI y SI para una maniobra de cambio de carril que produce un riesgo de vuelco/derrape en lazo abierto, para un Porsche GT.

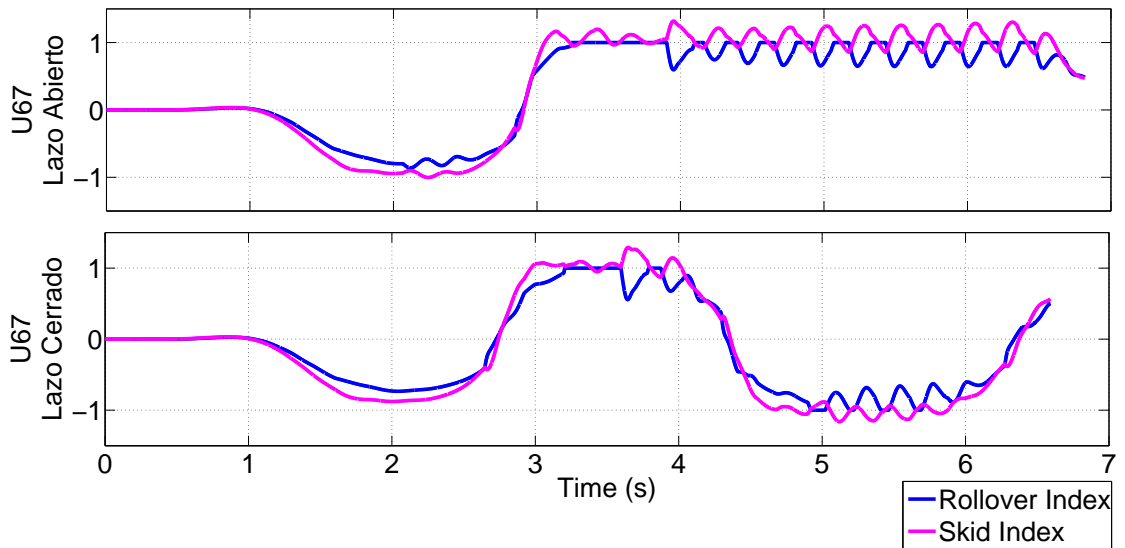


Figura 7.8.: RI y SI para una maniobra de cambio de carril que produce un riesgo de vuelco/derrape en lazo abierto, para un Mitsubishi U67.

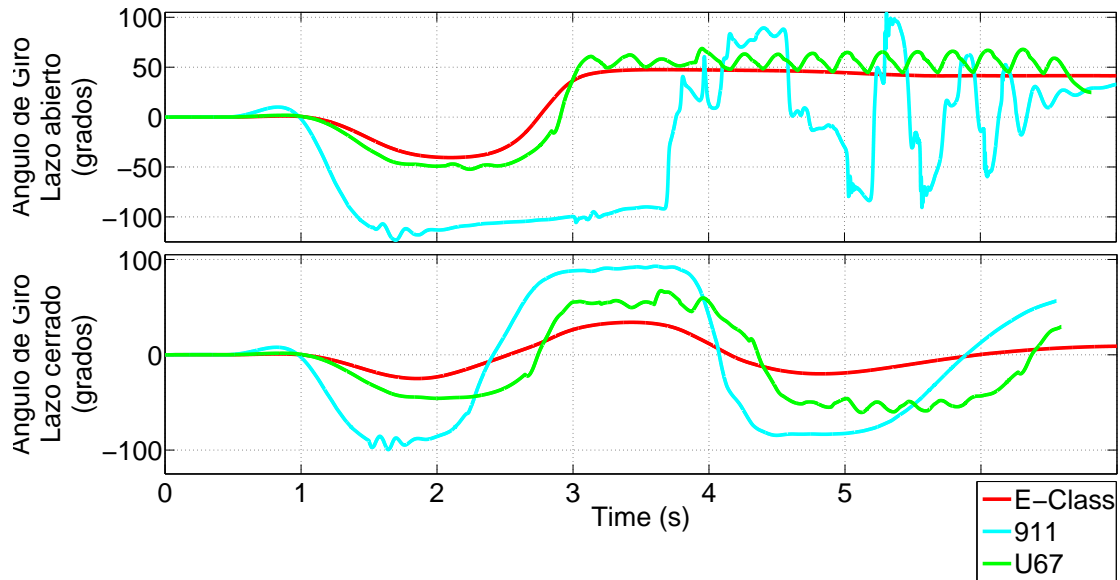


Figura 7.9.: Comparativa de ángulo de giro lazo abierto vs lazo cerrado.

Tabla 7.1.: Índice de Sensibilidad

Parámetro	$I_s$
$c_v$	11.65 %
$h$	10.88 %
$L_h$	9.01 %
$L_v$	6.84 %
$v$	6.76 %
$m$	5.37 %
$c_h$	5.06 %
$c$	1.83 %
$J_x$	1.12 %
$k$	0.62 %
$J_z$	0.2 %

Tabla 7.2.: Comparativa de margenes de estabilidad obtenidos con varias linealizaciones

No. de linealizaciones	Una	Dos	Cuatro	Ocho
Velocidad				
120km/h	49.55	49.55	49.55	49.55
110km/h	-	-	-	53.6
100km/h	-	-	56.7	56.7
90km/h	-	-	-	58.5
80km/h	-	60.2	60.2	60.2
70km/h	-	-	-	61.6
60km/h	-	-	63.0	63.0
50km/h	-	-	-	64.1



## 8. Conclusiones

### 8.1. Conclusiones de la tesis

En esta Tesis se propone el cálculo de un nuevo índice para la estimación del riesgo de derrape lateral llamado Skid Index (SI), que puede calcularse de manera conjunta con el ya conocido Rollover Index (RI) que provee la estimación de riesgo de volcadura. Se muestra en simulaciones la eficacia de la estimación de riesgo de derrape lateral y volcadura y se establece una correlación entre el riesgo de derrape lateral y la volcadura mostrando que son problemas muy relacionados pero no equivalentes.

Por otro lado, se obtuvo un modelo matemático no lineal que representa la dinámica de un vehículo de 4 ruedas, que es adecuado para el cálculo del SI y del RI. Este modelo tiene como entrada de control acciones de frenado/aceleración diferencial y fue validado por medio del uso de software comercial especializado en la simulación de la dinámica de vehículos. Se obtuvo además, un modelo conmutado politópico que es útil para reproducir de manera precisa la dinámica del modelo no lineal y para representar de manera explícita la variación en los parámetros. El modelo conmutado politópico construido, es útil para el diseño de controladores que nos permiten mitigar el riesgo de volcadura y derrape lateral y realizar un análisis de estabilidad.

La estabilidad es analizada desde un enfoque de acotamiento uniforme ulterior de las soluciones del sistema, y se establecen condiciones para que el confinamiento obtenido sea dentro en un conjunto de estados en el cual no hay riesgo de volcadura ni derrape lateral. Además, se dan condiciones para que el acotamiento uniforme ulterior se pueda asegurar a pesar de que la ganancia de control está limitada y existe incertidumbre en los parámetros.

El diseño de los controladores es numérico y se basa en la resolución de LMI's; se realiza fuera de línea y su diseño no involucra el conocimiento exacto de los valores de los parámetros si no únicamente de sus cotas de variación.

Además, en este trabajo se propone una conmutación predictiva de los comandos del chofer vistos como una perturbación exógena al sistema conmutado politópico. Esta conmutación predictiva hace uso de una dinámica lineal para emular las decisiones de conducción humanas con base en su comportamiento pasado. El controlador propuesto se basa en un modelo de vehículo lineal por pedazos, un horizonte de tiempo de predicción, una estimación predictiva de la dirección y una estimación predictiva de la trayectoria del sistema. Una característica de la estrategia propuesta es su sencillez. Las simulaciones numéricas permiten mostrar el rendimiento de la estimación, así como de la estrategia de control propuesta.

Se analiza la estabilidad del sistema conmutado bajo un esquema de conmutación predictivo de

la perturbación y se establecen las condiciones para que el sistema en lazo cerrado sea estable. Esto se logra usando una función de Lyapunov común y el cálculo de un margen de estabilidad en lazo cerrado. Este margen de estabilidad es usado para dar una interpretación en términos de conjuntos a la ley de conmutación predictiva.

Modelos de chofer que proporcionan una buena predicción a horizontes más grandes en comparación con el utilizado en esta Tesis pueden ser utilizados. El análisis realizado en esta Tesis muestra que hay un beneficio al usar modelos de chofer precisos a horizontes de predicción grandes. El beneficio es que se puede introducir una perturbación de mayor magnitud sin perder la propiedad de acotamiento uniforme ulterior en una región que no es de riesgo.

A diferencia de otros esquemas de control antivuelco, en la propuesta de este trabajo se considera de forma integral la mitigación del riesgo de derrape lateral y de volcadura. Además el derrape lateral es una causa de volcadura lanzada y de otros tipos de accidentes vehiculares. Finalmente, en el esquema propuesto, no se aplica frenado diferencial hasta que una situación de riesgo es inminente de manera que su implementación es viable; además se propone una solución al problema de la mitigación de riesgo de volcadura y derrape lateral, que es de bajo costo de producción al utilizar sólo frenado ABS y tracción/propulsión TCS disponible en la mayoría de los vehículos de producción actual y posiblemente algunos sensores que son de bajo costo.

## 8.2. Trabajo futuro

Debido a que amplios márgenes de incertidumbre producirán resultados conservadores en el controlador debido a la dificultad de obtener una función de Lyapunov común, resulta interesante pensar en extender este resultado a alguno menos conservador. Esto tal vez pueda lograrse por medio del uso de múltiples funciones de Lyapunov.

Por otro lado y de acuerdo al estudio realizado en esta Tesis, es posible la construcción de un prototipo electrónico que puede ser probado en una fase inicial con equipamiento (HIL) que se encarga de emular la operación del vehículo y puede ser interconectado con el prototipo; o en su defecto con un vehículo a escala operado por control remoto. En una segunda fase será posible evaluar el prototipo experimentalmente en un vehículo de 4 ruedas.

Debido a que el modelo del vehículo obtenido es válido cuando existe adherencia de todas las llantas con el suelo, podría extenderse el estudio de esta Tesis en el sentido de incluir submodelos al sistema conmutado politópico del vehículo que representen la dinámica del vehículo en fase de derrape/volcadura para buscar establecer alguna estrategia que termine con la fase de derrape/volcadura de manera efectiva.

## 8.3. Publicaciones

De esta tesis resultaron los siguientes documentos:

- Artículos de Revista

- Martin R. Licea, I. Cervantes, “Robust Switched Predictive Braking Control for Rollover Prevention in Wheeled Vehicles”, International Journal of Mathematical Problems in Engineering, Volumen 2014. (Aceptado para publicación el cual ya se encuentra publicado en línea en [http://www.hindawi.com/journals/mpe/2014/356250/.](http://www.hindawi.com/journals/mpe/2014/356250/) )
  - Martin R. Licea, I. Cervantes, “Rollover/Skid Evaluation and Prevention for Wheeled Vehicles : A Robust Switched Polytopic Approach”, sometido a IET Control Theory and Applications
- Artículos de Congreso
    - Internacionales
      - Martin R. Licea, I. Cervantes “On the Predictive Rollover Detection in Wheeled Vehicles”. En Proc. of IEEE Industrial Electronics Society 38th Annual Conference, Montreal, Canada. Del 25-28 de Octubre del 2012, Pp. 2410-2415.
    - Nacionales
      - Martín R. Licea, I. Cervantes “Control predictivo conmutado robusto de frenado en vehículos de 4 ruedas”. En el Congreso Nacional edición 2013 de la Asociación de México de Control Automático (AMCA) que se llevó a en el mes de Octubre del 2013 en la ciudad y Puerto de Ensenada, Baja California.

# Anexos

En este capítulo se presentan las diferentes nociones que serán usadas a lo largo de este documento.

## A. Definiciones

**Definición A1.** [76] (Conjunto) *Un conjunto es una colección de objetos (denominados elementos o miembros del conjunto) considerados como una sola entidad.*

**Definición A2.** [76] (Ecuación) *Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.*

**Definición A3.** [77] (Función) *Dados dos conjuntos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , una función  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  (aplicación o mapeo) entre ellos es una correspondencia que asocia con cada elemento de  $a_f \in \mathcal{A}$  un único elemento  $\mathcal{F}(a_f)$  de  $\mathcal{B}$ .*

**Definición A4.** [77] (Espacio métrico) *Sea un conjunto  $\mathcal{A}$  del cuál  $x, y$  son elementos. Una función  $d_e : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface:*

- $d_e(x, y) \geq 0$  (No negatividad o axioma de separación)
- $d_e(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$  (Axioma de coincidencia)
- $d_e(x, y) = d(y, x)$  (Simetría)
- $d_e(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Sub aditividad o desigualdad del triángulo)

*es llamada métrica para  $\mathcal{A}$ . Un conjunto  $\mathcal{A}$  con alguna métrica en particular  $d_e$  es llamado espacio métrico y se denota como  $(\mathcal{A}, d_e)$ .*

**Definición A5.** [77] (Espacio topológico) *Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{U}$  una colección de subconjuntos de  $X$  que satisfacen:*

1.  $\emptyset \in \mathcal{U}, X \in \mathcal{U}$
2. La intersección de dos miembros de  $\mathcal{U}$  está dentro de  $\mathcal{U}$
3. La unión de cualquier número de miembros de  $\mathcal{U}$  está dentro de  $\mathcal{U}$

La colección  $\mathcal{U}$  de subconjuntos de  $X$  es llamada topología para  $X$ . El conjunto  $X$  junto con  $\mathcal{U}$  es llamado espacio topológico y se denota  $(X, \mathcal{U})$ . Cualquier espacio métrico da lugar a un espacio topológico.

**Definición A6.** [77] (Subconjunto abierto) Un subconjunto  $\mathcal{U}$  de un espacio métrico  $\mathcal{A}$  se dice abierto si para todo  $x \in \mathcal{U}$  existe un  $\varepsilon_x > 0$  tal que si  $y \in \mathcal{A}$  y  $d_e(y, x) < \varepsilon_x$  entonces  $y \in \mathcal{U}$ .

**Definición A7.** [77] (Subconjunto cerrado) Un subconjunto  $C$  de un espacio métrico  $\mathcal{A}$  se dice cerrado si y solo si  $\mathcal{A} - C$  es abierto, donde  $\mathcal{A} - C$  denota al conjunto de los elementos de  $X$  que no pertenecen a  $C$ .

**Definición A8.** [77] (Vecindad) Sea  $\mathcal{A}$  un espacio métrico. Un subconjunto  $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}$  con  $x \in \mathbb{N}$  es llamado vecindad de  $x$  si existe un conjunto abierto  $\mathcal{U}$  con  $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{N}$ .

**Definición A9.** [77] (Bola abierta) Sea  $(M_e, d_e)$  un espacio métrico. Se define la bola abierta de radio  $\varepsilon$  centrada en un punto  $x$  como:

$$\mathcal{B}_\varepsilon(x) \triangleq \{z_e \in M_e \mid d(x, z_e) < \varepsilon\}$$

**Definición A10.** [77] (Interior de un conjunto) El interior de un conjunto  $\mathcal{A}_e$  ( $\text{Int}(\mathcal{A}_e)$ ), es el conjunto de todos los puntos interiores a  $\mathcal{A}_e$ , un punto interior  $a_e$  a  $\mathcal{A}_e$  es aquel en el que el conjunto  $\mathcal{A}_e$  es un entorno del punto  $a_e$ , y un entorno de  $a_e$  es un subconjunto abierto que incluye a  $a_e$ .

**Definición A11.** [77] (Punto aislado) Un punto  $x$  de un conjunto  $S$  se llama un punto aislado de  $S$  si existe una vecindad de  $x$  que no contiene otro punto de  $S$ .

**Definición A12.** [78] (Continuidad de una función) Asuma que  $A$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función definida en  $A$  con valores en  $\mathbb{R}^m$ . Sea  $x_0 \in A$ . Entonces  $f$  es continua en  $x_0$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $x \in A$  y  $d(x, x_0) < \delta$  implica que  $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

**Definición A13.** [78] (Norma euclidiana de una matriz) Sea  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  con  $n, m \in \mathbb{N}_+$  donde  $\mathbb{N}_+$  es el conjunto de los números naturales positivos y  $\mathcal{M}_{i,j}$  son las entradas de la matriz  $\mathcal{M}$ , la norma euclidiana de  $\mathcal{M}$  se denota como  $\|\mathcal{M}\|$  y se calcula:

$$\|\mathcal{M}\| = \sqrt{\sum_i^n \sum_j^m \mathcal{M}_{i,j}^2}$$

**Definición A14.** [46] (Función Lipschitz) Considere una función  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si satisface:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \tag{A.1}$$

para todo  $x, y$  y alguna constante  $L > 0$  en una vecindad de  $x_0$  entonces se dice que  $f(x)$  es una función Lipschitz en esa vecindad.

**Definición A15.** [46] (Función uniformemente Lipschitz) Considere una función  $f(t, x)$  con  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si satisface:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad (\text{A.2})$$

para todo  $(t, x)$  y  $(t, y)$  y alguna constante  $L > 0$  en una vecindad de  $(t_0, x_0)$  entonces se dice que  $f(t, x)$  es una función uniformemente Lipschitz respecto de la variable  $x$  en esa vecindad.

**Definición A16.** [46] (Sistema autónomo) Un sistema dinámico es autónomo si está representado por una o varias ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas o no forzadas de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A.3})$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función localmente Lipschitz en  $D \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición A17.** [46] (Punto de equilibrio) Un punto de equilibrio de (A.3) se define como cualquier vector  $\bar{x}$  tal que  $f(\bar{x}) = 0$  para (A.3).

**Definición A18.** [46] (Estabilidad) El punto de equilibrio  $x$  de A.3 es:

- Estable, si para cada  $\epsilon_s > 0$  existe un  $\delta_s(\epsilon_s) > 0$  tal que:

$$\|x(0)\| < \delta_s \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon_s, \forall t \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

- Inestable si no es estable.
- Asintóticamente estable si es estable y  $\delta_s$  puede ser elegido tal que

$$\|x(0)\| < \delta_s \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (\text{A.5})$$

**Definición A19.** [46] (Sistema No Autónomo) Un sistema dinámico es no autónomo si está representado por una o varias ecuaciones diferenciales ordinarias no autónomas o forzadas de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (\text{A.6})$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua por pedazos en  $t$  y uniformemente Lipschitz en  $x$  y  $D \in \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene al origen.

**Definición A20.** [46] (Estabilidad Uniforme) Las soluciones de (A.6) son:

- Uniformemente acotadas, si existe una constante positiva  $c_s$  que no depende de  $t_0$ , y para cada  $a_s \in (0, c_s)$  existe un  $b_s = b_s(a_s) > 0$  que no depende de  $t_0$  tal que:

$$\|x(t_0)\| < a_s \Rightarrow \|x(t)\| \leq b_s, \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

- Globalmente uniformemente acotadas si (A.7) se cumple para  $a_s$  arbitrariamente grande.

- *Uniformemente Ulteriormente Acotadas con cota ulterior  $d_s$  si existen constantes positivas  $d_s$  y  $c_s$  independientes de  $t_0$  y para cada  $a_s \in (0, c_s)$  existe un  $T_s = T(a_s, d_s) \geq 0$  independiente de  $t_0$  tal que:*

$$\|x(t_0)\| < a_s \Rightarrow \|x(t)\| \leq d_s, \forall t \geq t_0 + T_s. \quad (\text{A.8})$$

- *Globalmente Uniformemente Ulteriormente Acotadas si (A.8) se cumple para  $a_s$  arbitrariamente grande.*

## B. Teoremas

**Teorema B1.** [46] *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para (A.3) y  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que:*

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
- $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$

*entonces  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable.*

**Teorema B2.** [46] *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto que incluye al origen y  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que:*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x), \forall \|x\| \geq \mu_s \geq 0 \quad (\text{A.10})$$

*$\forall t > 0$  y  $\forall x \in D$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\mathcal{K}$  y  $W$  es una función positiva definida. Tome un  $r_s > 0$  tal que  $\mathcal{B}_{r_s}(0) \subset D$  y suponga que:*

$$\mu_s < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r_s)) \quad (\text{A.11})$$

*entonces existe una función  $\beta_s$  clase  $\mathcal{KL}$  y para cada condición inicial  $x(t_0)$  que satisfice  $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r_s))$  existe un  $T_s(x(t_0), \mu_s) > 0$  tal que la solución de (A.6) satisfice:*

$$\|x(t)\| \leq \beta_s(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T_s \quad (\text{A.12})$$

$$\|x(t)\| < \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu_s)), \forall t \geq t_0 + T_s \quad (\text{A.13})$$

*y por tanto las soluciones del sistema (A.6) son Uniformemente Ulteriormente Acotadas con cota ulterior  $d_s = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu_s))$ . Si  $D = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  es clase  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (A.12) y (A.13) se cumplen para cualquier condición inicial sin restricción sobre que tan grande es  $\mu_s$  y por tanto las soluciones del sistema (A.6) son Globalmente Uniformemente Ulteriormente Acotadas con cota ulterior  $d_s$ .*

# Bibliografía

- [1] National Highway Traffic Safety Administration, U.S. Department of Transportation, Abril 2014, “TRAFFIC SAFETY FACTS, 2012 Data: Passenger Vehicles”. Disponible en línea.
- [2] Usa Today, “Few SUVs feature anti-rollover system”, 2002. Disponible en línea.
- [3] National Highway Traffic Safety Administration, U.S. Department of Transportation, “NHTSA 5-Star Safety Ratings”. Disponible en línea.
- [4] National Highway Traffic Safety Administration, U.S. Department of Transportation, Marzo 2007, “An Analysis of Motor Vehicle Rollover Crashes and Injury Outcome”. Disponible en línea.
- [5] National Highway Traffic Safety Administration, U.S. Transportation Secretary, “DOT announces proposal to add rollover ratings to auto safety consumer information program,” NHTSA Now, vol. 6, no. 7, Mayo 2000. Disponible en línea.
- [6] J. Pearson, “Vehicle Weights and Dimensions Limits Within the NAFTA Partnership,” Secretary, Task Force on VW&D Policy, Febrero 2002.
- [7] B. Chiuan, Chen, H. Peng, “Rollover warning of articulated vehicles based on a time to rollover metric”, *ASME International Congress and Exposition*, Knoxville, TN, 1999.
- [8] J. S. Shamma, “Robust Control Theory”, *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications, An Overview of LPV Systems*, First Edition, Springer New York, 2012.
- [9] H. Horisberger, P. R. Belanger, “Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, no. 5, Octubre 2003.
- [10] B. Abdallah, M. A. Hammami, J. Kallel, “Robust stability of uncertain piecewise-linear systems: LMI approach”, *Springer Nonlinear Dynamics*, vol. 63, no. 1-2, Enero 2011.
- [11] S. Takano, M. Nagai, “Dynamics control of large vehicles for rollover prevention”, *Proceedings of the IEEE International Vehicle Electronics Conference*, Tottori, Japón, 2001, pp. 85-89.
- [12] A. Hac, “Rollover Stability Index Including Effects of Suspension Design,” SAE Technical Paper Series, Delphi Automotive Systems, Marzo 2002.



- [13] R. J. Whitehead, "A study of the properties that influence vehicle rollover propensity", Masters of Science Thesis, Auburn University, 2005.
- [14] M.H. Kim, Jun-Ho, J. H. Lee, M. C. Jeon, "Development of rollover criteria based on simple physical model of rollover event", *International journal of automotive technology*, vol. 7, no. 1, pp. 51-59, Febrero 2006.
- [15] N. Bouton, C. Aubiere, R. Lenain, B. Thuilot, J.C. Fauroux, "A rollover indicator based on the prediction of the load transfer in presence of sliding: application to an All Terrain Vehicle", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Roma, Italia, 2007, pp. 1158-1163.
- [16] V. Tsourapas, D. Piyabongkarn, A. C. Williams, Rajesh Rajamani, "New Method of Identifying Real-Time Predictive Lateral Load Transfer Ratio for Rollover Prevention Systems", *American Control Conference*, St. Louis, MO, EUA, 2009, pp 439-444.
- [17] G. Phanomchoeng, R. Rajamani, "New Rollover Index for the Detection of Tripped and Untripped Rollovers", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 10, 2013.
- [18] G. Phanomchoeng, R. Rajamani, "Real-Time Estimation of Rollover Index for Tripped Rollovers with a Novel Unknown Inputs Nonlinear Observer", *2012 Conference on American Control*, Montréal, Canada, 2012, pp. 2090-2095.
- [19] S. Xiaowen, J. Li, and A. Xu, "Development of a Refined Rollover Model That Recognizes the Effects of Suspension and Tire Deformation", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 60, no. 10, 2013, Hindawi Publishing Corporation.
- [20] N. Bouton, R. Lenain, B. Thuilot, P. Martinet, "An active anti-rollover device based on Predictive Functional Control: application to an All-Terrain Vehicle", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Kobe, Japan, 2009, pp. 1309-1314.
- [21] M. Amodeo, A. Ferrara, R. Terzaghi, C. Vecchio, "Wheel Slip Control via Second-Order Sliding-Mode Generation", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 11, no. 1, 2010.
- [22] R. Ghandour, A. Victorino, A. Charara, D. Lechner, "Risk indicators anticipation based on the vehicle dynamics anticipation to avoid accidents", *Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, Alcala de Henares, España, 2012, pp. 93-98.
- [23] V. Cerone, M. Milanese, D. Regruto, "Yaw Stability Control Design Through a Mixed-Sensitivity Approach", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, no. 5, 2009.
- [24] S. Sakai, H. Sado, Y. Hori, "New skid avoidance method for electric vehicle with independently controlled 4 in-wheel motors", *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Bled, Eslovenia, 1999, pp. 934-939.

- [25] H. C. Choi, S. K. Hong, "Hybrid control for longitudinal speed and traction of vehicles", *IEEE 2002 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society*, Sevilla, España, 2002, pp. 1675-1680.
- [26] J. Kang, J. Yoo, K. Yi, "Driving Control Algorithm for Maneuverability, Lateral Stability, and Rollover Prevention of 4WD Electric Vehicles With Independently Driven Front and Rear Wheels", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 60, no. 7, 2011.
- [27] S. Yim, "Design of a Preview Controller for Vehicle Rollover Prevention", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 60, no. 9, 2011.
- [28] S. C. Peters, J. E. Bobrow, K. Iagnemma, "Stabilizing a Vehicle near Rollover: An Analogy to Cart-Pole Stabilization", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Anchorage Convention District, Alaska, EUA, 2010, pp 5194-5200.
- [29] H. Imine, L. M. Fridman, T. Madani, "Steering Control for Rollover Avoidance of Heavy Vehicles", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 61, no. 8, 2012.
- [30] S. Solmaz, "Switched stable control design methodology applied to vehicle rollover prevention based on switched suspension settings", *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, no. 9, 2011.
- [31] S. Solmaz, M. Corless, R. Shorten, "A methodology for the design of robust rollover prevention controllers for automotive vehicles: Part 1-Differential braking", *45th IEEE Conference on Decision and Control, Automation and Systems Engineering*, San Diego, CA, 2006, pp. 1739-1744.
- [32] Z. Tianjun, W. Bingsheng, Z. Changfu, "The design of rollover prevention system in heavy vehicles based on an robust method", *2nd International Conference on Power Electronics and Intelligent Transportation System*, Shenzhen, China, 2009, pp. 98-101.
- [33] M. Akar, A. D. Dere, "A Switching Rollover Controller Coupled With Closed-Loop Adaptive Vehicle Parameter Identification", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. PP, no. 69, 2014.
- [34] C. Larish, D. Piyabongkarn, V. Tsourapas and R. Rajamani, "A new predictive lateral transfer ratio for rollover prediction Systems", *IEEE Transactions on vehicular technology*, vol. 62. no. 7, 2013.
- [35] S. Lee, F. Yakub, M. Kasahara, Y. Mori, Ohtsuka Toshiyuki, "Rollover prevention with Predictive Control of differential braking and rear wheel steering", *6th IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*, Manila, Filipinas, 2013, pp. 144-149.
- [36] J. Pathompong, O. Toshiyuki, "Stabilization of vehicle rollover by nonlinear model predictive control", *Proceedings of SICE Annual Conference*, Nagoya, Japan, 2013, pp. 1568-1573.

- [37] N. J. L. Noxon, “A model predictive control approach to roll stability of a scaled crash avoidance vehicle”, *A Thesis presented to The Faculty of California Polytechnic State University*, San Luis Obispo , 2012.
- [38] B. Ding, F. Xue, “Improving control performance of robust MPC by iterative optimization”, *CCDC '09. Chinese Control and Decision Conference, 2009.*, Guilin ,China, 2009, pp. 2807-2812.
- [39] R. Scattolini, P. Colaneri, “Hierarchical model predictive control”, *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control* , New Orleans, LA, 2007, pp. 4803-4808.
- [40] NHTSA Denies Firestone Request For Ford Explorer Investigation. Docket 91-68. No. 1. Office of Vehicle Safety Standards, Septiembre, 13 pp. NHTSA. 1993. Disponible en línea..
- [41] M. R. Licea, I. Cervantes, “On the predictive rollover detection in wheeled vehicles”, *38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, Montreal, Canadá, 2012, pp. 2410-2415.
- [42] Martin R. Licea, I. Cervantes, “Robust Switched Predictive Braking Control for Rollover Prevention in Wheeled Vehicles”, *International Journal of Mathematical Problems in Engineering*, Volumen 2014, línea.
- [43] Martin R. Licea, I. Cervantes, “Rollover/Skid Evaluation and Prevention for Wheeled Vehicles : A Robust Switched Polytopic Approach”, en proceso de someter a *IET Control Theory and Applications*.
- [44] Z. Sun, S. S. Ge, “Stability of switched systems”, “Stability Theory of Switched Dynamical Systems”, Primera edición, London, Springer-Verlag, 2011.
- [45] D. Liberzon, “Teoría de estabilidad de sistemas conmutados”, “Switching in Systems and Control”, Primera edición, Boston, Birkhliuser, 2003.
- [46] H. Khalil, “Teoría de control no lineal”, “Nonlinear control”, Tercera edición, Prentice Hall, 2002.
- [47] W. Rudin, “Análisis matemático”, “Principles of Mathematical Analysis”, Tercera Edición, McGraw-Hill, 1976.
- [48] S. Boyd, E. Feron, L. El Ghaoui, Venkataramanan Balakrishnan “Teoría de estabilidad robusta”, “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, Primera edición, Philadelphia, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 15, 1994.
- [49] M. Morari, E. Zafiriou, “Control Robusto”, “Robust Process Control”, Primera Edición, Prentice Hall, 1989.
- [50] K. Zhou, J. Doyle, “Control Robusto”, “Essentials of Robust Control”, Primera Edición, Prentice Hall, 1999.

- [51] F. Lin, "Control Robusto", "Robust Control Design, An Optimal Control Approach", Primera Edición, John Wiley & Sons Ltd, 2007.
- [52] P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali, "Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, Marzo 1996.
- [53] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, A. Vicino, "Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions", *Automatica*, vol. 43, no. 2, Febrero 2007.
- [54] R. Oliveira, P. Peres, "LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions", *Elsevier Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 1, Enero 2006.
- [55] G. Becker, A. Packard, D. Philbrick, G. Balas, "Control of Parametrically-Dependent Linear Systems: A Single Quadratic Lyapunov Approach", *American Control Conference*, San Francisco, California, 1993, pp. 2795 - 2799.
- [56] T. Pancake, M. Corless, M. Brockman, "Analysis and control of polytopic uncertain/nonlinear systems in the presence of bounded disturbance inputs", *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, Chicago, IL, 2000, pp. 159-163.
- [57] A.G. Soldatos, M. Corless, "Stabilizing Uncertain Systems with Bounded Control", *Proceedings of the 3rd Workshop on Control Mechanics in Honor of the 65th Birthday of George Leitmann*, University of Southern, California, 1991, pp. 415-428.
- [58] M. Johansson, A. Rantzer, "Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, no. 4, Febrero 1998.
- [59] Z. G. Li, C. Y. Wen, Y. C. Soh, "Robust Stability of Switched Linear Systems With Polytopic Uncertainty", *IEEE 22nd International Symposium on Intelligent Control*, Singapore, 2007, pp. 94-99.
- [60] Y. Wang, Z. Yao, Z. Zuo, H. Zhao, "Delay-dependent Lyapunov function approach to robust stability analysis for switched linear time-delay systems with polytopic uncertainties", *7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Chongqing, 2008, pp. 4103 - 4108.
- [61] J. Xu, L. Xie, "Homogeneous Polynomial Lyapunov Functions for Piecewise Affine Systems", *American Control Conference*, Portland, Oregon, pp. 581 - 586.
- [62] D. Ding, G. Yang, "State-feedback control design for continuous-time piecewise linear systems: An LMI approach", *American Control Conference*, Seattle, WA, Filipinas, 2013, pp. 144-149.

- [63] G. Feng, “Controller Design and Analysis of Uncertain Piecewise-Linear Systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 49, no. 2, Febrero 2002.
- [64] N.U. Ahmed, *Elements of Finite-Dimensional Systems and Control Theory*, Vol. 37, Pitman SPAM, Longman Sci. Tech. Publ, New York, 1988.
- [65] U. Kiencke, “Modelado automotriz”, “Automotive Control Systems For Engine, Driveline, and Vehicle”, Segunda Edición, Springer, 2005.
- [66] T. D. Gillespie, “Modelado automotriz”, “Fundamentals of vehicle dynamics”, Primera Edición, Society of Automotive Engineers (SAE), 1992.
- [67] S. M. Savaresi, Mara Tanelli, “Modelado automotriz”, “Active Braking Control Systems Design for Vehicles”, Primera Edición, Springer, 2010.
- [68] H. Pacejka, “Modelado automotriz”, “Tire and Vehicle Dynamics”, Tercera Edición, Butterworth-Heinemann, 2012.
- [69] M. J. Nunney, “Modelado automotriz”, *Light and Heavy Vehicle Technology*, Cuarta Edición, Elseiver, 2007.
- [70] P. Weissler, “SEMA task force ensuring aftermarket parts maintain ESC performance”, *SAE International*, Vol. 9088, no. 1, Noviembre 2010, disponible en línea en <http://www.sae.org/mags/AEI/9088>.
- [71] P. Kerrigan, “Down the road”, *U.S. Military Training Technology*, Vol. 15, no.2 , Abril 2010, disponible en línea..
- [72] S. Brennan, “Higway medians”, *Vehicle Dynamics International*, Vol. 7, no. 4, Abril 2008, disponible en línea.
- [73] R. Mousseau, T. Klingler, “Chassis control simulation processes”, *Automotive Testing Technology International*, 10 years special number, Report 2008, disponible en línea.
- [74] J. Challen, “Dynamics Development of the Year”, *Automotive Testing Technology International*, 2007 Awards Special Issue, Noviembre 2007, disponible línea.
- [75] Hoffman, Gardner, “Evaluation of Uncertainties in Environmental Radiological Assessment Models”, *U.S. Nuclear Regulatory Commission*, Washington, DC., Reporte No. NUREG/CR-3332, 1983.
- [76] T. M. Apostol, “Análisis matemático”, “Análisis matemático”, Segunda Edición, Reverté, 2006.
- [77] C. Kosniowski, “Topología”, “A First Course in Algebraic Topology”, Primera Edición, Cambridge University Press, 1980.

- [78] W. Rudin, “Análisis funcional”, “Functional Analysis”, Tercera Edición, McGraw-Hill, 2006.
- [79] L. Calmorin, “Estadística”, “Statistics in Education and the Sciences”, Primera Edición, Rex Book Store Inc., 1997.