

---

**IPICYT**

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

**Diseño de Absorbedores de Vibraciones con Retardos**

Tesis que presenta

**Efrén Martínez Bautista**

Para obtener el grado de

**Maestro en Control y Sistemas Dinámicos**

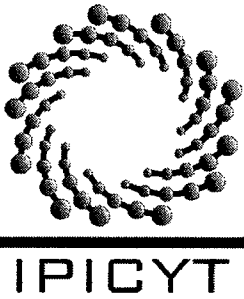
**Directores de la Tesis:**

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

Dr. Gerardo Silva Navarro

San Luis Potosí, S.L.P., a 8 de Julio del 2016





## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "*Diseño de absorbedores de vibraciones con retardos*" presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Efrén Martínez Bautista** y aprobada el **ocho de julio del dos mil dieciséis** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar**  
Codirector de la tesis

**Dr. Gerardo Silva Navarro**  
Codirector de la tesis

**Dr. Jesús Leyva Ramos**  
Jurado en el Examen

**Dr. Hugo Cabrera Ibarra**  
Jurado en el Examen

**Dr. David Antonio Lizárraga Navarro**  
Jurado en el Examen



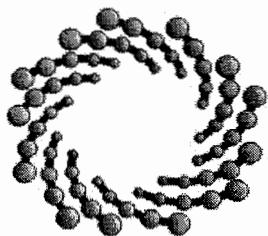


## Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar y del Dr. Gerardo Silva Navarro.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 298626 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.





**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 021 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 8 días del mes de julio del año 2016, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Jesús Leyva Ramos</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. David Antonio Lizárraga Navarro</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Gerardo Silva Navarro</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>CINVESTAV</b>
<b>Dr. Hugo Cabrera Ibarra</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Efrén Martínez Bautista**

sobre la Tesis intitulada:

*Diseño de absorbedores de vibraciones con retardos*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar**  
**Dr. Gerardo Silva Navarro (CINVESTAV)**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 13:35 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 8 días del mes de julio de 2016.

**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

**Dr. Marcial Bohilla Marín**  
Secretario Académico







# Dedicatoria

*a mis padres y hermanos por apoyarme siempre.*

*a mis sobrinos;*

*Cristian, Mishell, Joab y Patricia,*

*porque son mi motivación.*



# Agradecimientos

A mi asesor Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar, por su paciencia y por toda su dedicación en este trabajo de tesis, por la enseñanza, sus consejos y sobre todo por su amistad.

A mi asesor Dr. Gerardo Silva Navarro, por sus aportaciones en este trabajo de tesis.

A los Doctores Jesús Leyva Ramos, David Antonio Lizárraga Navarro y Hugo Cabrera Ibarra por sus comentarios y consejos en esta tesis.

Al CONACYT por la beca asignada.

Al IPICYT por la beca asignada.



## Resumen

Palabras clave: Resonador retardado, absorbedor de vibración, análisis de estabilidad.

Este trabajo de tesis se centra en el diseño de resonadores retardados (DR por sus siglas en inglés), los cuales son un método activo de control de vibración para estructuras dinámicas. El absorbedor DR consiste en un absorbedor pasivo masa-amortiguador-resorte tradicional con una retroalimentación de posición proporcional retardada adicional. El problema de diseño consiste en seleccionar el retardo y la ganancia tal que el DR se comporte como un resonador a una frecuencia deseada la cual puede ser sintonizada sólo cambiando el retardo y la ganancia de retroalimentación, la cual es una característica atractiva para la absorción de vibración de estructuras.

Se consideran los casos del DR con amortiguamiento y sin amortiguamiento. En ambos casos se obtienen las regiones de estabilidad exactas determinando explícitamente sus fronteras en contraparte con los resultados existentes que no proveen las regiones o que las determinan numéricamente. El conocimiento explícito de las fronteras nos permite proporcionar algunas condiciones sobre la frecuencia deseada para el comportamiento del DR.



## Abstract

Key words: Delayed resonator, vibration absorber, stability analysis.

This thesis focuses in the design of Delayed Resonators (DR) which is an active vibration absorption method for dynamic structures. The DR absorber consists of a conventional mass-damper-spring passive absorber with an additional delayed proportional position feedback. The design problem is to select the delay and feedback gain such that the DR absorber behaves as a resonator at a desired frequency that can be tuned by changing only the delay and feedback gain, an attractive characteristic for the vibration absorption of structures.

We consider the cases of damped and undamped DR absorbers. In both cases we derive the exact stability regions by determining explicitly their boundaries in counterpart with the existing results that either do not provide the regions or provide them in a numerical way. The explicit knowledge of the boundaries allows us to provide some conditions on the desired frequency for the DR behavior.





# Índice general

Índice general XX

Índice de figuras XXIII

<b>1. El Problema de Absorción de Vibración</b>	<b>1</b>
1.1. Sistema Masa-Resorte . . . . .	2
1.1.1. Vibración Libre . . . . .	2
1.1.2. Vibración Forzada . . . . .	3
1.2. Sistema Masa-Amortiguador-Resorte . . . . .	7
1.2.1. Vibración Libre . . . . .	7
1.2.1.1. Sistema Subamortiguado ( $\zeta < 1$ ) . . . . .	9
1.2.1.2. Sistema Críticamente Amortiguado ( $\zeta = 1$ ) . . . . .	10
1.2.1.3. Sistema Sobreamortiguado $\zeta > 1$ . . . . .	11
1.2.2. Vibración Forzada . . . . .	13
1.2.2.1. Sistema Subamortiguado ( $\zeta < 1$ ) . . . . .	13
1.3. Absorbedor Pasivo de Vibraciones . . . . .	18
1.3.1. Absorbedor Masa-Resorte . . . . .	18
1.3.2. Absorbedor Masa-Amortiguador-Resorte . . . . .	25
1.4. Absorbedor Retardado . . . . .	29
1.5. Justificación y Objetivo General . . . . .	33
<b>2. Preliminares</b>	<b>37</b>
2.1. Ecuaciones Diferenciales en Diferencia . . . . .	37
2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones . . . . .	40
2.3. Ecuaciones Diferenciales en Diferencia Lineales . . . . .	44
2.3.1. Ubicación de ceros de cuasipolinomios . . . . .	44
2.3.2. Curvas Logarítmicas y Diagramas de Potencia . . . . .	45
2.4. Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales en Diferencia Lineales . . . . .	50
2.4.1. Criterio de Mikhailov . . . . .	52
2.4.2. Método de D-Partición . . . . .	53
2.5. Resumen de capítulo . . . . .	56

<b>3. Diseño del DR sin Amortiguamiento</b>	<b>57</b>
3.1. Análisis de Estabilidad . . . . .	58
3.2. Diseño del DR . . . . .	62
3.3. Resumen de capítulo . . . . .	68
<b>4. Diseño del DR con Amortiguamiento</b>	<b>69</b>
4.1. Análisis de Estabilidad . . . . .	70
4.2. Diseño del DR . . . . .	84
4.3. Sistema Acoplado . . . . .	93
4.4. Plataforma ECP 210a . . . . .	94
4.5. Resumen de capítulo . . . . .	106
<b>5. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>107</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>108</b>

# Índice de figuras

1.1. Sistema Masa-Resorte . . . . .	2
1.2. Respuesta en el tiempo del sistema (1.2) con condiciones iniciales $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ . . . . .	4
1.3. Respuesta en el tiempo de (1.5) para $\omega \neq \omega_n$ , con condiciones iniciales $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ . . . . .	6
1.4. Respuesta en el tiempo de (1.5) para $\omega = \omega_n$ , con condiciones iniciales $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ . . . . .	6
1.5. Sistema Masa-Amortiguador-Resorte . . . . .	7
1.6. Respuesta en el tiempo de (1.18) con condiciones iniciales $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ . . . . .	10
1.7. Respuesta en el tiempo de (1.19) con condiciones iniciales $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ . . . . .	11
1.8. Respuesta en el tiempo de (1.21) con condiciones iniciales $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ . . . . .	12
1.9. Respuesta en el tiempo de (1.21) para $\omega = \omega_r$ y condiciones iniciales $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ . . . . .	17
1.10. Respuesta en el tiempo de (1.21) para $\omega \neq \omega_r$ y condiciones iniciales $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ . . . . .	17
1.11. Sistema primario con absorbedor masa-resorte. . . . .	19
1.12. Magnitud y Frecuencia Normalizada de (1.48). . . . .	24
1.13. Sistema primario con absorbedor masa-amortiguador-resorte . . . . .	26
1.14. Magnitud y Frecuencia Normalizada de (1.56). . . . .	28
1.15. Magnitud y Frecuencia Normalizada de (1.56), con $\zeta = 0$ y $\zeta = \infty$ . . . . .	29
1.16. Resonador Retardado. . . . .	30
1.17. Diagrama de bloques del DR. . . . .	31
1.18. Respuesta en el tiempo del DR para $\omega_c = 9.9$ rad/s y condiciones iniciales $x_0 = 0.01$ y $\dot{x}_0 = 0$ . . . . .	33
1.19. Respuesta en el tiempo del DR para $\omega_c = 5$ rad/s y condiciones iniciales $x_0 = 0.01$ y $\dot{x}_0 = 0$ . . . . .	34
2.1. Representación del método paso a paso . . . . .	42
2.2. Diagrama de potencias . . . . .	46
2.3. Curvas Logarítmicas . . . . .	48
2.4. Diagrama de potencias del cuasipolinomio (2.15). . . . .	49
2.5. Raíces del cuasipolinomio (2.15). . . . .	50
2.6. Curva de Mikhailov . . . . .	53
2.7. Partición del espacio de parámetros $(a, b)$ para el ejemplo (2.23). . . . .	56

3.1. Absorbedor Retardado sin amortiguamiento. . . . .	58
3.2. Región de estabilidad para el sistema (3.2). . . . .	59
3.3. Partición del espacio $(b, a^2)$ de (3.4). . . . .	61
3.4. Región de estabilidad para $h = 317.3$ ms, donde se muestra la frecuencia $\omega_c = 9.9$ rad/s. . . . .	65
3.5. Respuesta en el tiempo del DRNA para $\omega_c = 9.9$ rad/s y condiciones iniciales $x(0) = 0.01, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	65
3.6. Región de estabilidad para $h = 392.7$ ms, donde se muestra la frecuencia $\omega_c = 8$ rad/s. . . . .	66
3.7. Respuesta en el tiempo del DRNA para $\omega_c = 8$ rad/s y condiciones iniciales $x(0) = 0.01, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	67
3.8. Región de estabilidad para $h = 628.3$ ms, donde se muestra la frecuencia $\omega_c = 5$ rad/s. . . . .	67
3.9. Respuesta en el tiempo del DRNA para $\omega_c = 5$ rad/s y condiciones iniciales $x(0) = 0.01, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	68
4.1. Resonador Retardado con amortiguamiento. . . . .	70
4.2. Región de estabilidad para el sistema (4.2) con $c \geq \sqrt{2}$ . . . . .	76
4.3. Región de estabilidad para el sistema (4.2) con $c < \sqrt{2}$ . . . . .	76
4.4. Partición del espacio $(b, a^2)$ de (4.4) con $c \geq \sqrt{2}$ . . . . .	81
4.5. Partición del espacio $(b, a^2)$ de (4.4) con $c < \sqrt{2}$ . . . . .	83
4.6. Representación de $f(\gamma)$ cuando no existe solución de (4.32). . . . .	87
4.7. Región de estabilidad para $h = 178.7$ ms, donde se muestra la frecuencia $\omega_c = 9.9$ rad/s. . . . .	89
4.8. Respuesta en el tiempo del DRA para $\omega_c = 9.9$ rad/seg y condiciones iniciales $x(0) = 0.01, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	90
4.9. Región de estabilidad para $h = 365.4$ ms, donde se muestra la frecuencia $\omega_c = 8$ rad/s. . . . .	90
4.10. Respuesta en el tiempo del DRA para $\omega_c = 8$ rad/seg y condiciones iniciales $x(0) = 0.01, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	91
4.11. Región de estabilidad para $h = 615$ ms, donde se muestra la frecuencia $\omega_c = 5$ rad/s. . . . .	92
4.12. Respuesta en el tiempo del DRA para $\omega_c = 5$ rad/seg y condiciones iniciales $x(0) = 0.01, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	92
4.13. Sistema primario acoplado a un DR. . . . .	93
4.14. Plataforma ECP 210a. . . . .	95
4.15. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin absorbedor pasivo, (-)con absorbedor pasivo, para $\omega = 17.28$ rad/s y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	97
4.16. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRNA, (-)con DRNA, para $\omega = 17.28$ rad/s con $h = 181.8$ ms, $A_a = -189.8230$ N/m y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	98

4.17. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRA, (-)con DRA, para $\omega = 17.28$ rad/s con $h = 9$ ms, $A_a = 192.1322$ N/m y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	100
4.18. Respuesta en el tiempo de los absorbedores acoplados al sistema primario: (-)DRA, (- -)DRNA, para $\omega = 17.28$ rad/s y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	101
4.19. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin absorbedor pasivo, (-)con absorbedor pasivo, para $\omega = 16$ rad/s y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	102
4.20. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRNA, (-)con DRNA, para $\omega = 16$ rad/s con $196.3$ ms, $A_a = -111.9952$ N/m y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	103
4.21. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRA, (-)con DRA, para $\omega = 16$ rad/s con $h = 15$ ms, $A_a = 115.3211$ N/m y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	103
4.22. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin absorbedor pasivo, (-)con absorbedor pasivo, para $\omega = 18$ rad/s y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	104
4.23. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRNA, (-)con DRNA, para $\omega = 18$ rad/s con $h = 174.5$ ms, $A_a = -236.0408$ N/m y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	105
4.24. Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRA, (-)con DRA, para $\omega = 18$ rad/s con $h = 7.2$ ms, $A_a = 238.059$ N/m y condiciones iniciales $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . . . . .	105

# Notación

$e^{At}$	Matriz Fundamental.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}_+$	Conjunto de los números reales positivos.
$\mathbb{R}^n$	Espacio Euclidiano $n$ dimensional.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$\mathbb{C}_+$	Conjunto de los números complejos positivos.
$\mathcal{C}([-h, 0])$	Espacio de funciones continuas que mapean el intervalo $[-h, 0]$ en $\mathbb{R}^n$ .
$\Delta_C \arg F(s)$	Cambio neto del argumento de $F(s)$ a lo largo del contorno $C$ .
$\partial A$	Frontera del conjunto $A$ .

# Capítulo 1

## El Problema de Absorción de Vibración

La vibración es el movimiento repetitivo de un objeto alrededor de una posición de equilibrio. La vibración es evidente en todas partes y en muchos casos afecta a la naturaleza de los diseños de ingeniería. En los sistemas mecánicos es importante poder reducir las vibraciones presentes en el sistema, donde estas vibraciones pueden ser ocasionadas por frecuencias generadas por el mismo sistema o por frecuencias de excitación externas (perturbaciones).

El objetivo de este capítulo es presentar una breve introducción al problema de absorción de vibraciones mecánicas. Se presenta una revisión de vibraciones en un sistema mecánico de un sólo grado de libertad. Los conceptos de vibraciones son revisados mediante el análisis cualitativo de las soluciones obtenidas utilizando herramientas de análisis de sistemas dinámicos, ésta es una ligera diferencia con el estudio clásico de vibraciones donde cierta estructura de soluciones es propuesta. Finalmente, se presenta una descripción de algunos métodos existentes de absorción de vibración.

## 1.1. Sistema Masa-Resorte

### 1.1.1. Vibración Libre

Un sistema experimenta vibración libre cuando oscila sólo debido a una perturbación inicial sin que más adelante actúen fuerzas externas. En la Fig. 1.1 se muestra la representación de un sistema de un sólo grado de libertad. Si no existe ninguna fuerza externa aplicada a la masa ( $F(t) = 0$ ), el movimiento resultante de una perturbación inicial será una vibración libre.

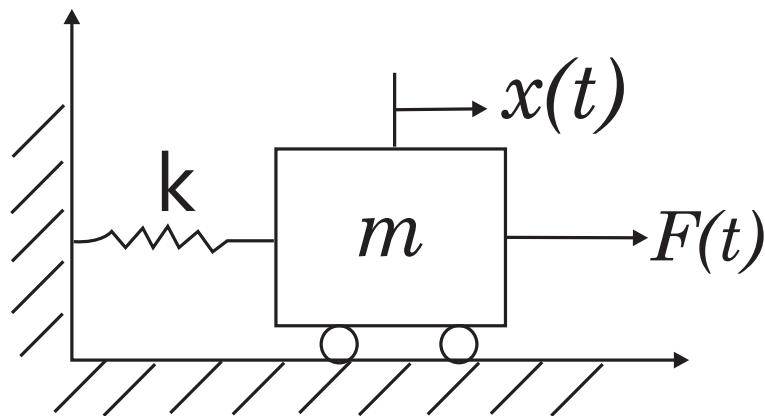


Fig. 1.1: Sistema Masa-Resorte

Si  $x = x(t)$  denota el desplazamiento de la masa  $m$  de su posición de equilibrio, entonces la ecuación de movimiento del sistema de la Fig.1.1 está dada por

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (1.1)$$

Diversos autores [6, 9, 13, 27] presentan la solución de la ecuación (1.1) utilizando el método de coeficientes constantes, sin embargo nosotros seguiremos el enfoque de matriz fundamental para la solución de la ecuación (1.1) [10, 29].



Sea  $y_1 = x$  y  $y_2 = \dot{x}$ . Entonces la ecuación (1.1) representada en forma vectorial es

$$\dot{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}}_A y, \quad (1.2)$$

donde  $y = [y_1, y_2]^T$  y  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  es la frecuencia natural del sistema (1.1). La solución de (1.2) para cualquier condición inicial  $y_0$  se puede escribir como  $y(t) = e^{At}y_0$ ,  $\forall t \geq 0$ , donde  $e^{At}$  es la matriz fundamental asociada al sistema (1.2) [10]. El polinomio característico asociado a la matriz  $A$  es

$$p(s) = \det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega_n^2 & s \end{bmatrix} = s^2 + \omega_n^2.$$

Las raíces asociadas de  $p(s)$  son  $s_{1,2} = \pm\omega_n i$ . Con estas raíces se realiza el cálculo de la matriz exponencial  $e^{At}$ , y se obtiene la siguiente expresión para las soluciones de (1.2)

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t), \quad \text{con } C_1 = y_0 \text{ y } C_2 = \frac{\dot{y}_0}{\omega_n}. \quad (1.3)$$

La Fig.1.2 muestra un ejemplo de solución de (1.3) para valores de  $m = 16 \text{ Kg}$  y  $k = 4 \text{ N/m}$ . Los valores de  $m$  y  $k$  serán utilizados en todas las simulaciones que se presentan en el capítulo 1. Dado que no hay ningún elemento que disipe energía durante el movimiento de la masa, la amplitud del movimiento permanece constante con el tiempo; es un *sistema no amortiguado*.

### 1.1.2. Vibración Forzada

Si un sistema se somete a una fuerza externa (a menudo, una fuerza repetitiva), la vibración resultante se conoce como vibración forzada. Consideremos el sistema de la

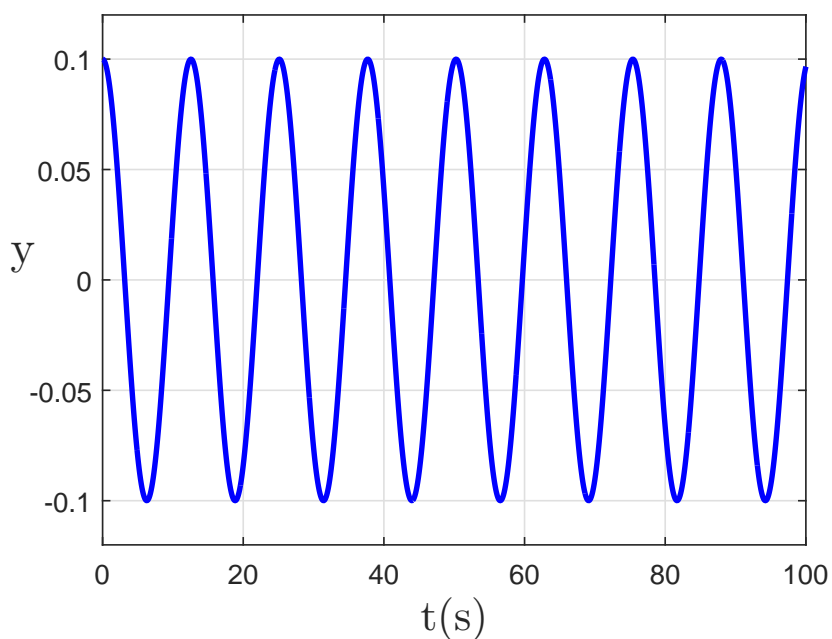


Fig. 1.2: Respuesta en el tiempo del sistema (1.2) con condiciones iniciales  $y_0 = 0.1, \dot{y}_0 = 0$ .

Fig.1.1 con una función de excitación  $F(t)$  de la siguiente forma

$$F(t) = f_0 \cos(\omega t), \quad (1.4)$$

donde  $f_0$  representa la magnitud ó amplitud máxima de la excitación y  $\omega$  denota la frecuencia de excitación. Las unidades de  $f_0$  y de  $\omega$  son respectivamente  $N$  y  $rad/seg$ . La ecuación de movimiento del sistema de la Fig.1.1 es

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = F \cos(\omega t), \quad (1.5)$$

con  $F = \frac{f_0}{m}$ . En forma vectorial se tiene

$$\dot{y} = Ay + F(t)$$

donde  $y = [y_1 \ y_2]^T = [x \ \dot{x}]^T$ ,  $A$  está definida como en (1.2) y  $F(t) = [0 \ F]^T \cos(\omega t)$ .

La solución de (1.5) para cualquier condición inicial  $y_0$  se puede escribir como

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}F(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.6)$$

Nótese que  $e^{At}$  es la matriz fundamental asociada al sistema (1.2). De (1.6) se obtiene que

$$y(t, \omega) = g_0(t) + g_1(t, \omega), \quad (1.7)$$

donde  $g_0(t)$  está dada por (1.3) y

$$g_1(t, \omega) = \frac{F}{(\omega_n^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)).$$

Consideremos el caso cuando  $\omega \rightarrow \omega_n$ . En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} y(t, \omega) &= g_0(t) + \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} g_1(t, \omega) \\ &= g_0(t) + \frac{F}{2\omega_n} t \operatorname{sen}(\omega_n t). \end{aligned} \quad (1.8)$$

De (1.8) se puede apreciar que conforme crece  $t$ , la respuesta del sistema crece sin restricciones, este incremento ocasiona que el sistema presente problemas físicos, incluso puede fallar hasta la destrucción del sistema, este fenómeno se conoce como **resonancia** [13].

La Fig.1.3 muestra un ejemplo de solución de (1.7) cuando  $\omega \neq \omega_n$ , el movimiento resultante es una oscilación rápida con una variación lenta de la amplitud y se denomina "beat"(pulso) [13]. La Fig.1.4 muestra un ejemplo de solución de (1.7) cuando  $\omega = \omega_n$ , es decir, cuando ocurre el fenómeno de resonancia, con  $f_0 = 1 \text{ N}$  y  $\omega_n = 0.5 \text{ rad/s}$ .

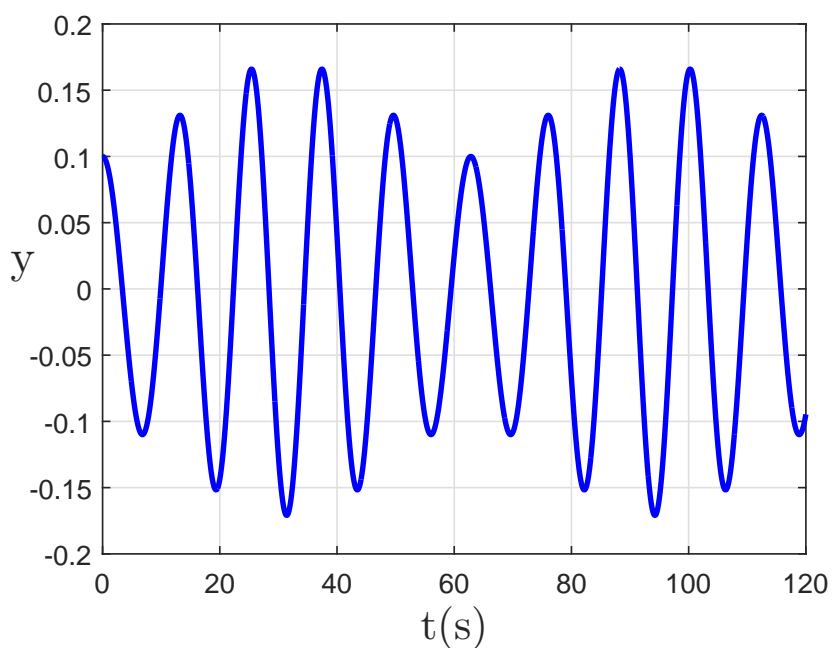


Fig. 1.3: Respuesta en el tiempo de (1.5) para  $\omega \neq \omega_n$ , con condiciones iniciales  $y_0 = 0.1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ .

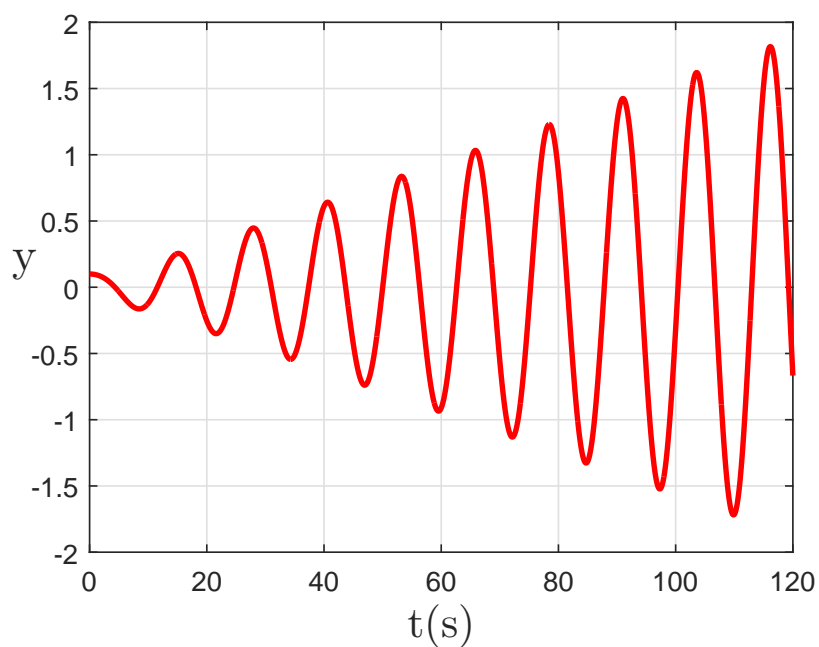


Fig. 1.4: Respuesta en el tiempo de (1.5) para  $\omega = \omega_n$ , con condiciones iniciales  $y_0 = 0.1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ .

## 1.2. Sistema Masa-Amortiguador-Resorte

### 1.2.1. Vibración Libre

La respuesta del sistema masa-resorte oscila indefinidamente. Sin embargo, la mayoría de los sistemas mecánicos no presentan este tipo de respuesta donde eventualmente el movimiento oscilatorio decae. La razón de lo anterior se debe a las fuerzas disipativas como la fricción. En la Fig. 1.5 se muestra la representación de un sistema masa-amortiguador-resorte de un sólo grado de libertad.

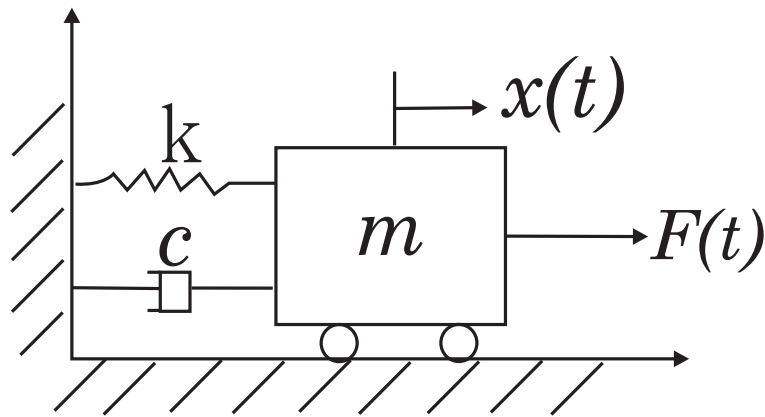


Fig. 1.5: Sistema Masa-Amortiguador-Resorte

Si no existe fuerza externa aplicada a la masa  $m$  ( $F(t) = 0$ ) y si  $x = x(t)$  denota el desplazamiento de la masa  $m$  de su posición de equilibrio, la ecuación de movimiento de la Fig. 1.5 está dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (1.9)$$

La ecuación (1.9) representada en forma vectorial es

$$\dot{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}_B y, \quad (1.10)$$

con  $y_1 = x$ ,  $y_2 = \dot{x}$  y  $y = [y_1, y_2]^T$ . La solución de (1.10) para cualquier condición inicial

## 1.2. SISTEMA MASA-AMORTIGUADOR-RESORTE

---

$y_0$  se puede escribir como  $y(t) = e^{Bt}y_0$ ,  $\forall t \geq 0$ , donde  $e^{Bt}$  es la matriz fundamental asociada al sistema 1.10 [10]. El polinomio característico asociado a la matriz B, es

$$p(s) = \det[sI - B] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{c}{m} \end{bmatrix} = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}.$$

Las raíces de  $p(s)$  son

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}. \quad (1.11)$$

**Coficiente de Amortiguamiento Crítico:** el amortiguamiento crítico  $c_c$  se define como el valor de la constante de amortiguamiento  $c$  con la cual el discriminante de (1.11) se hace 0, es decir

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n. \quad (1.12)$$

**Factor de Amortiguamiento:** para cualquier sistema amortiguado, el factor de amortiguamiento  $\zeta$  se define como el cociente entre la constante de amortiguamiento y el coeficiente de amortiguamiento crítico, es decir

$$\zeta = \frac{c}{c_c}. \quad (1.13)$$

Utilizando las ecuaciones (1.12) y (1.13), la ecuación (1.10) se puede reescribir como

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} y, \quad (1.14)$$

y las raíces asociadas (1.11) como

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}. \quad (1.15)$$

Dependiendo del valor de  $\zeta$  las raíces (1.15) serán complejas conjugadas, reales repetidas

o reales distintas.

De (1.15), cuando  $0 \leq \zeta < 1$ , se define la *frecuencia natural amortiguada*  $\omega_d$  como

$$\omega_d \triangleq \omega_n \sqrt{|\zeta^2 - 1|} \quad (1.16)$$

### 1.2.1.1. Sistema Subamortiguado ( $\zeta < 1$ )

En este caso el factor de amortiguamiento es menor que 1,  $\zeta < 1$ , el discriminante de (1.15) es negativo y las raíces asociadas al polinomio característico del sistema (1.14) son complejas conjugadas

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d i. \quad (1.17)$$

Con estas raíces se calcula la matriz exponencial  $e^{Bt}$  y se obtiene la solución de (1.10), la cual es

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_3 \cos(\omega_d t) + C_4 \text{sen}(\omega_d t)), \quad \text{con } C_3 = y_0 \text{ y } C_4 = \frac{\zeta\omega_n y_0 + \dot{y}_0}{\omega_d}. \quad (1.18)$$

El movimiento descrito por (1.18) se conoce como movimiento armónico amortiguado, es decir, un movimiento oscilatorio cuya amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo. En la Fig. 1.6 se muestra un ejemplo de este tipo de movimiento para  $m$  y  $k$  descritos anteriormente, dando un valor de  $\omega_n = 0.5 \text{ rad/s}$  y considerando  $c = 2 \text{ N s/m}$ , con este valor de  $c$  se obtiene  $\zeta = 0.1250$  y  $\omega_d = 0.4961 \text{ rad/s}$ . Es importante señalar que la frecuencia de vibración amortiguada  $\omega_d$  siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . El caso subamortiguado es muy importante en el estudio de vibraciones mecánicas, ya que, además del caso sin amortiguamiento, conduce a movimiento oscilatorio [7, 27].

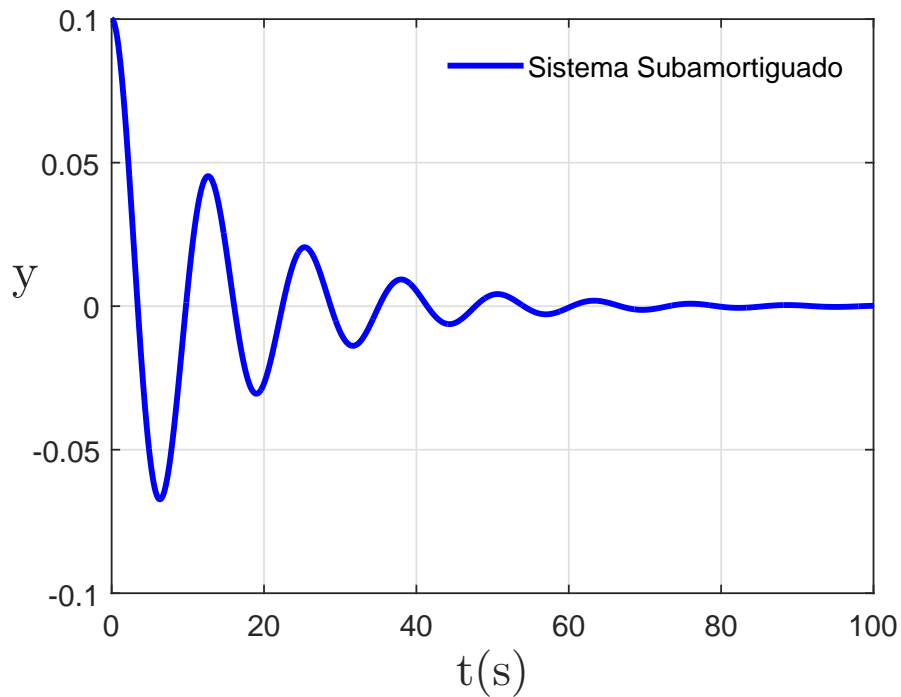


Fig. 1.6: Respuesta en el tiempo de (1.18) con condiciones iniciales  $y_0 = 0.1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ .

### 1.2.1.2. Sistema Críticamente Amortiguado ( $\zeta = 1$ )

En este caso el factor de amortiguamiento es exactamente 1,  $\zeta = 1$ , el discriminante de (1.15) es cero. Este valor de  $\zeta$  separa el movimiento oscilatorio del movimiento no oscilatorio. Las raíces (1.15), son reales repetidas, es decir

$$s_1 = -\omega_n \text{ y } s_2 = -\omega_n.$$

Con estas raíces se calcula la matriz exponencial  $e^{Bt}$  y se obtiene la solución de (1.10), la cual está descrita por

$$y(t) = e^{-t\omega_n}[C_5t + C_6], \quad \text{con } C_5 = \omega_n y_0 + \dot{y}_0 \text{ y } C_6 = y_0. \quad (1.19)$$



Los sistemas con amortiguamiento crítico tienen un movimiento libre no oscilatorio que decae exponencialmente a cero. Además, el factor de amortiguamiento  $\zeta = 1$  proporciona el movimiento exponencial decreciente más rápido posible para el sistema mecánico. En la Fig. 1.7 se ilustra un ejemplo de este tipo de movimiento considerando  $c = 16 \text{ N s/m}$ , con  $\zeta = 1$  se tiene  $\omega_d = 0$ .

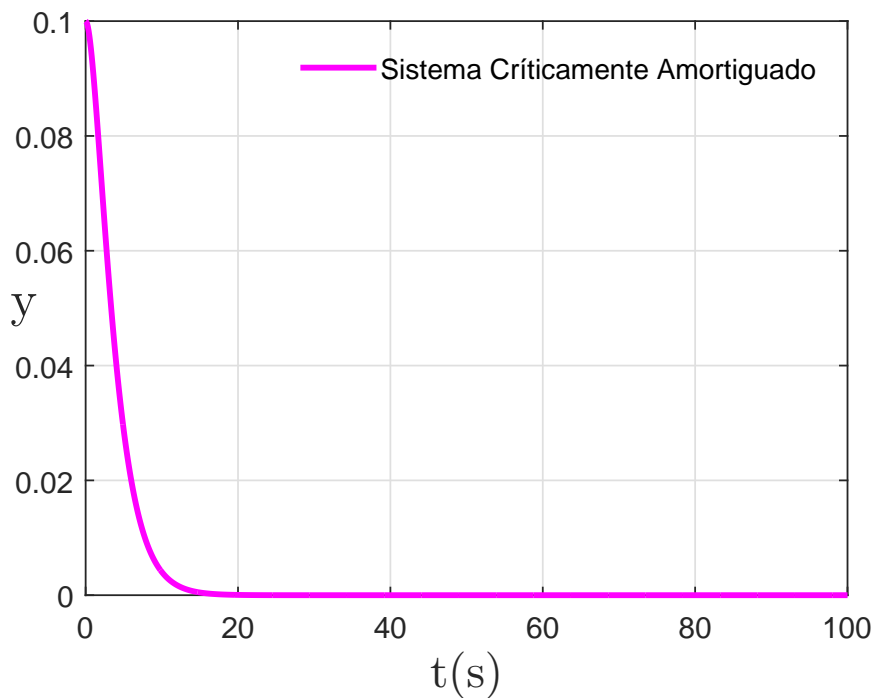


Fig. 1.7: Respuesta en el tiempo de (1.19) con condiciones iniciales  $y_0 = 0.1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ .

### 1.2.1.3. Sistema Sobreamortiguado $\zeta > 1$

En este caso el factor de amortiguamiento es mayor que 1,  $\zeta > 1$ , el discriminante de (1.15) es positivo y las raíces (1.15) son raíces reales distintas

$$s_{1,2} = -\omega_n \pm \omega_d < 0. \quad (1.20)$$

## 1.2. SISTEMA MASA-AMORTIGUADOR-RESORTE

Calculando la matriz exponencial  $e^{Bt}$  se obtiene la solución de (1.10), la cual está descrita por

$$x(t) = C_7 e^{(-\zeta\omega_n + \omega_d)t} - C_8 e^{-(\zeta\omega_n + \omega_d)t}, \quad (1.21)$$

con  $C_7 = \frac{(\zeta\omega_n + \omega_d)y_0 + y_0}{2\omega_d}$  y  $C_8 = \frac{(\zeta\omega_n - \omega_d)y_0 + \dot{y}_0}{2\omega_d}$ .

La solución (1.21) muestra que el movimiento libre del sistema es no oscilatorio y decae exponencialmente a cero. En la Fig. 1.8 se muestra un ejemplo de este tipo de movimiento con  $\omega_n = 0.5 \text{ rad/seg}$  y considerando  $c = 20 \text{ N s/m}$ , con este valor de  $c$  se tiene  $\zeta = 1.25$  y  $\omega_d = 0.3750 \text{ rad/seg}$ .

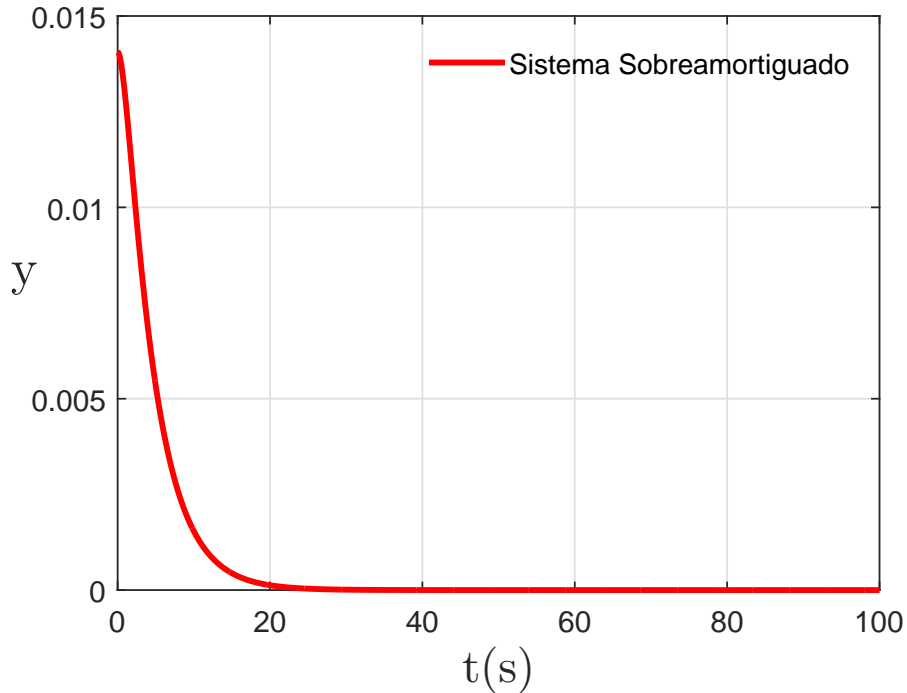


Fig. 1.8: Respuesta en el tiempo de (1.21) con condiciones iniciales  $y_0 = 0.1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$

### 1.2.2. Vibración Forzada

Considerando la función de excitación descrita por (1.4). La ecuación de movimiento del sistema de la Fig. 1.5 es

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f_0 \cos(\omega t) \quad (1.22)$$

En forma vectorial se tiene  $\dot{y} = By + F(t)$  donde  $B$  está definida como en (1.10),  $y = [y_1 \ y_2]^T = [x \ \dot{x}]^T$  y  $F(t) = [0 \ F]^T \cos(\omega t)$ , con  $F = \frac{f_0}{m}$ . La solución de (1.22) para cualquier condición inicial  $y_0$  se puede escribir como

$$y(t) = e^{Bt}y_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)}F(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.23)$$

La respuesta del sistema (1.22) dependerá del valor del coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$ . Como ya se mencionó para el estudio de las vibraciones mecánicas sólo se considera el caso cuando  $\zeta < 1$ . A continuación se estudia este caso.

#### 1.2.2.1. Sistema Subamortiguado ( $\zeta < 1$ )

De la subsección 1.2.1.1 se tiene que en este caso las raíces asociadas al polinomio característico del sistema (1.14) son complejas conjugadas dadas por la expresión (1.17). Utilizando el cálculo de  $e^{Bt}$  y la fórmula (1.23) se obtiene que la solución es

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t), \quad (1.24)$$

donde

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-\zeta\omega_n t} [C_3 \cos \omega_d t + C_4 \text{sen} \omega_d t], \\ y_2(t) &= -e^{-\zeta\omega_n t} \frac{F}{R^2} \left[ (\omega_n^2 - \omega^2) \cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} (\omega_n^2 + \omega^2) \text{sen} \omega_d t \right], \\ y_3(t) &= \frac{F}{R} (\text{sen}(\omega t + \theta)), \end{aligned}$$

## 1.2. SISTEMA MASA-AMORTIGUADOR-RESORTE

---

con  $C_3 = y_0$ ,  $C_4 = \frac{\zeta\omega_n y_0 + \dot{y}_0}{\omega_d}$ ,  $R = \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}$ ,  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{R}\right)$ . La respuesta de un sistema subamortiguado está compuesta de una respuesta transitoria y una respuesta en estado estacionario [6, 12]. La duración de la respuesta transitoria depende del factor de amortiguamiento, mientras mayor es el amortiguamiento menor es la duración de la parte transitoria.

De la ecuación (1.24) se tiene que  $y_1(t) + y_2(t)$  componen la respuesta transitoria y  $y_3(t)$  es la respuesta en estado estacionario del sistema. Es importante mencionar que en el estudio de vibraciones mecánicas los sistemas se diseñan y analizan basándose en la respuesta en estado estacionaria, sin embargo, dependiendo de la aplicación (por ejemplo terremotos, análisis satelital) es importante considerar la respuesta transitoria y conocer su amplitud [12, 13].

Para analizar la solución del sistema (1.24) conforme crece el tiempo, calculemos  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} y(t)$ , es decir el límite superior de  $y(t)$  cuando  $t \implies \infty$ . Es claro que  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ . Entonces  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} y(t) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} y_3(t) = \frac{F}{R(\omega)}$

Recordemos que en el caso no amortiguado la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  es igual a  $\omega_n$ . Sin embargo, en un sistema amortiguado éste no es el caso. Para conocer la frecuencia de resonancia es necesario analizar la respuesta en estado estacionario. Así, definamos  $D(\omega) \triangleq R^2(\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2$ . Calculemos  $D'(\omega) = 4\omega(\omega^2 - \omega_n^2 + 2\zeta^2\omega_n^2)$ . Si  $\omega \neq 0$  entonces  $D'(\omega) = 0$  si y sólo si

$$\omega^2 - \omega_n^2 + 2\zeta^2\omega_n^2 = 0 \tag{1.25}$$

Las raíces de (1.25) son

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_n^2 - 2\zeta^2\omega_n^2} = \pm\omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}. \tag{1.26}$$

Supongamos que  $1 - 2\zeta^2 > 0$  y consideremos la raíz positiva de (1.26), es decir,

$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}.$$

Calculando la segunda derivada de  $D(\omega)$  y evaluando en  $\omega = \omega_1$  tenemos que

$$D''(\omega_1) = 8\omega_n^2 (1 - 2\zeta^2) > 0.$$

Se sigue que  $D(\omega)$  tiene un mínimo global en el dominio  $\omega \in \mathbb{R}_+$  el cual ocurre en  $\omega = \omega_1$  y por lo tanto la respuesta estacionaria  $\frac{F}{R(\omega)}$  tiene un máximo global para  $\omega \in \mathbb{R}_+$  en  $\omega = \omega_1$ , cuando  $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

El mínimo global de  $D(\omega)$  es

$$\begin{aligned} D(\omega_1) &= (\omega_n^2 - \omega_n^2 (1 - 2\zeta^2))^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 (\omega_n^2 (1 - 2\zeta^2)), \\ &= 4\omega_n^4 \zeta^2 (1 - \zeta^2). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Observemos que el mínimo de  $D(\omega)$  es función de  $\zeta$ . Para analizar el comportamiento de tal mínimo en función de  $\zeta$ , definamos  $g(\zeta) \triangleq \zeta^2 (1 - \zeta^2)$ .

Se tiene que

$$g'(\zeta) = 2\zeta(1 - \zeta^2) + \zeta^2(-2\zeta) = 2\zeta(1 - 2\zeta^2) > 0,$$

lo que implica que  $g(\zeta)$  es una función creciente de  $\zeta$  en el intervalo  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  y en consecuencia  $D(\omega_1) = 4\omega_n^4 g(\zeta)$  es también una función creciente de  $\zeta$  en el intervalo  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Como  $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$ , entonces

$$D(\omega_1) < \omega_n^4, \quad \forall \zeta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (1.28)$$

Ahora, consideremos  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \zeta < 1$ . En este caso se tiene que

$$D(\omega) \geq (\omega^2 - \omega_n^2)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)\omega_n^2\omega^2 = \omega_n^4 + \omega^4, \quad \forall \zeta \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \quad (1.29)$$

De (1.28) y (1.29) se sigue que

$$\max_{\zeta \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})} D(\omega_1) < \omega_n^4 < \omega_n^4 + \omega^4 \leq \min_{\zeta \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)} D(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (1.30)$$

Así se concluye que cuando  $0 < \zeta < 1$ , la función  $D(\omega)$  tiene un mínimo global para  $\omega \in \mathbb{R}_+$  si y sólo si  $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . El mínimo ocurre en  $\omega_1$  y está dado por (1.27) el cual depende de  $\zeta$ . Se sigue que la máxima respuesta estacionaria es

$$\frac{F}{2\omega_n^2 \zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Con base en lo anterior definimos la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  como  $\omega_1$ , es decir,

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (1.31)$$

Nótese que se satisface la siguiente relación entre la frecuencia natural  $\omega_n$ , la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  dada por (1.16) y la frecuencia de resonancia dada por (1.31):

$$\omega_r \leq \omega_d \leq \omega_n,$$

y que en el caso cuando  $\zeta = 0$  se tiene que  $\omega_r \approx \omega_d \approx \omega_n$ . Para ilustrar lo anterior, consideremos los valores del ejemplo numérico de la sección 1.2.1.1, con  $f_0 = 1$ ,  $\omega_n = 0.5$  rad/s,  $\zeta = 0.1250$  y  $\omega_d = 0.4961$  rad/s. En este caso se tiene  $\omega_r = 0.4921$  rad/g. En la Fig.1.9 se ilustra un ejemplo de solución del sistema (1.24) cuando  $\omega = \omega_r$  y en la Fig.1.10 se ilustra el caso cuando  $\omega \neq \omega_r$ . Para el caso cuando  $\omega \approx \omega_r$  la respuesta estacionaria del sistema alcanza su máxima amplitud.

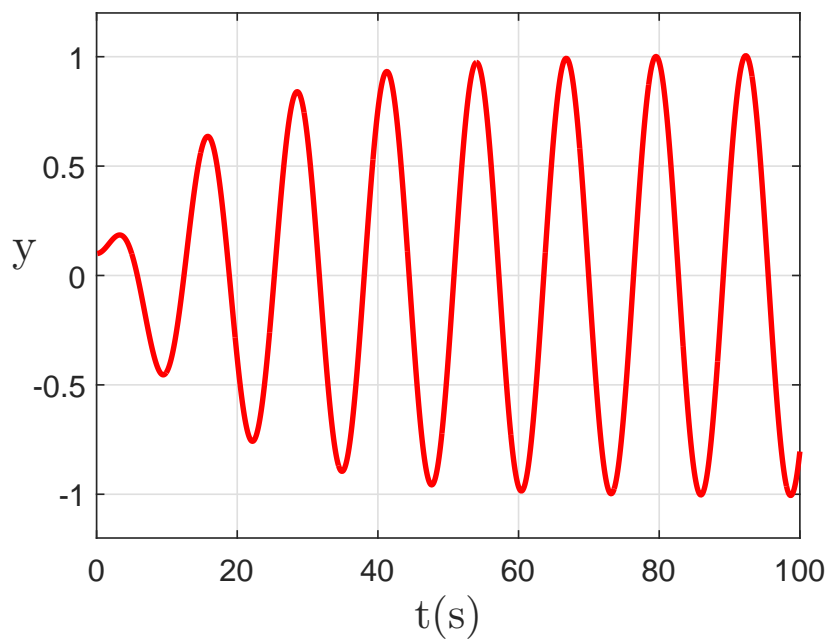


Fig. 1.9: Respuesta en el tiempo de (1.21) para  $\omega = \omega_r$  y condiciones iniciales  $y_0 = 0.1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$

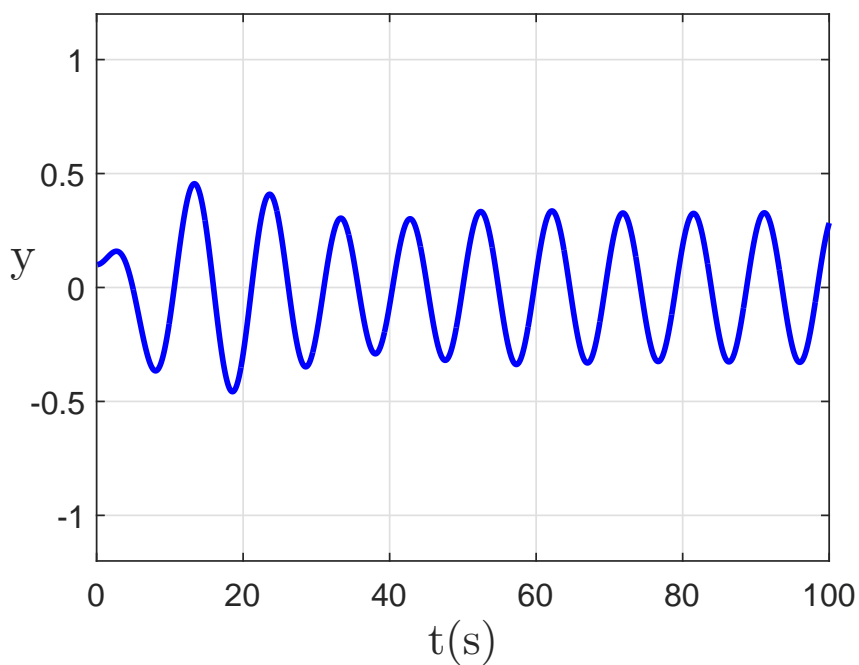


Fig. 1.10: Respuesta en el tiempo de (1.21) para  $\omega \neq \omega_r$  y condiciones iniciales  $y_0 = 0.1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$

## 1.3. Absorbedor Pasivo de Vibraciones

Las principales ideas, ecuaciones y definiciones en esta sección fueron tomadas de diferentes fuentes [12, 13, 27, 31].

Un absorbedor pasivo es un sistema masa-amortiguador-resorte que se añade a una estructura primaria con el objetivo de reducir las vibraciones presentes en el sistema, ocasionadas por frecuencias generadas por el mismo sistema o por frecuencias de excitación externas (perturbaciones) [13, 27]. El absorbedor se diseña a estas frecuencias y de este modo protege la estructura primaria. La principal modificación introducida por el absorbedor en esta sección es que aumenta el grado de libertad del sistema primario, pasando de ser un sistema de un sólo grado de libertad a ser un sistema de dos grados de libertad, lo que implica que el sistema tiene dos frecuencias naturales, las cuales juegan un papel importante a la hora de diseñar absorbedores de vibración.

### 1.3.1. Absorbedor Masa-Resorte

El absorbedor masa-resorte es un absorbedor ideal debido a que no tiene amortiguamiento. Los parámetros del absorbedor se eligen de tal manera que el movimiento del sistema primario es nulo. En la Fig. 1.11 se ilustra un absorbedor masa-resorte añadido a un sistema primario. Si  $x_p = x_p(t)$  denota el desplazamiento de la masa  $m_p$  de su posición de equilibrio, y  $x_a = x_a(t)$  denota el desplazamiento de la masa  $m_a$  de su posición de equilibrio, entonces las ecuaciones de movimiento del sistema de la Fig. 1.11 son

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p + \omega_p^2 x_p + \mu \omega_a^2 (x_p - x_a) &= F_0 \cos \omega t, \\ \ddot{x}_a + \omega_a^2 (x_a - x_p) &= 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde  $F_0 = \frac{F}{m_p}$ ,  $\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}$ ,  $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$  y  $\mu = \frac{m_a}{m_p}$ . Nótese que  $\omega_p$  es la frecuencia natural del sistema primario,  $\omega_a$  es la frecuencia natural del absorbedor y el parámetro  $\mu$  denota la razón de masas entre los sistemas primario y absorbedor.



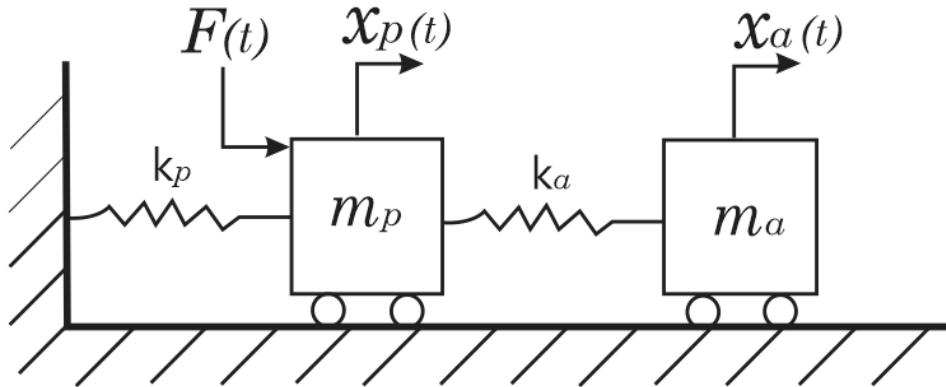


Fig. 1.11: Sistema primario con absorbedor masa-resorte.

El sistema acoplado ahora tiene dos frecuencias naturales debido a que es un sistema de dos grados de libertad. Dichas frecuencias naturales no son  $\omega_p$  y  $\omega_a$ . Para conocer las frecuencias naturales definamos  $y_1 = x_p$ ,  $y_2 = x_a$ ,  $y_3 = \dot{x}_p$  y  $y_4 = \dot{x}_a$ . Entonces la ecuación (1.32) con  $F_0 = 0$  se puede escribir en forma vectorial como:

$$\dot{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(\omega_p^2 + \mu\omega_a^2) & \mu\omega_a^2 & 0 & 0 \\ \omega_a^2 & -\omega_a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

El polinomio característico asociado a la matriz  $C$  es

$$\begin{aligned} p(s) &= \det(sI - C) = \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ (\omega_p^2 + \mu\omega_a^2) & -\mu\omega_a^2 & s & 0 \\ -\omega_a^2 & \omega_a^2 & 0 & s \end{vmatrix}, \\ &= s^4 + s^2(\omega_p^2 + \omega_a^2(1 + \mu)) + \omega_p^2\omega_a^2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Sea  $\lambda = s^2$ , entonces (1.34) se escribe como

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(\omega_p^2 + \omega_a^2(1 + \mu)) + \omega_p^2\omega_a^2. \quad (1.35)$$

Las raíces del polinomio (1.35) son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\omega_p^2 + \omega_a^2(1 + \mu)) \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_a^2(1 + \mu))^2 - 4\omega_p^2\omega_a^2}}{2}. \quad (1.36)$$

Observemos que

$$(\omega_p^2 + \omega_a^2(1 + \mu))^2 - 4\omega_p^2\omega_a^2 = (\omega_p^2 - \omega_a^2)^2 + 2\omega_a^2\mu \left( \omega_p^2 + \omega_a^2 + \frac{\omega_a^2\mu}{2} \right) > 0,$$

y entonces  $\lambda_{1,2} < 0$ . Se sigue entonces que las raíces del polinomio (1.34) son

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_1}i \quad s_{3,4} = \pm\sqrt{\lambda_2}i \quad (1.37)$$

Las raíces (1.37) determinan las frecuencias naturales del sistema acoplado, es decir,  $\omega_{n1} = \sqrt{\lambda_1}$  y  $\omega_{n2} = \sqrt{\lambda_2}$ , las cuales son distintas a  $\omega_p$  y  $\omega_a$ . Con estas raíces es posible calcular la matriz fundamental  $e^{Ct}$  y con ella las soluciones del sistema excitado (1.32). Sin embargo, presentaremos un análisis distinto que resulta más conveniente para el diseño del absorbedor pasivo. Así, consideremos nuevamente el sistema de un sólo grado de libertad presentado en la sección 1.1.2,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = F \cos(\omega t),$$

la solución de este sistema es

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) + \frac{F}{(\omega_n^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)). \quad (1.38)$$

Se plantea el problema de encontrar condiciones iniciales tales que la solución del sistema sea  $y(t) = X \cos(\omega t)$ . Observemos que la ecuación (1.38) se puede reescribir como

$$y(t) = \left( y_0 - \frac{F}{(\omega_n^2 - \omega^2)} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) + \frac{F}{(\omega_n^2 - \omega^2)} \cos(\omega t). \quad (1.39)$$

Escogiendo la condición inicial  $\dot{y}_0 = 0$  y  $y_0 = \frac{F}{(\omega_n^2 - \omega^2)}$  entonces se tiene que la solución del sistema de un sólo grado de libertad es

$$y(t) = X \cos(\omega t), \quad \text{con} \quad X = \frac{F}{(\omega_n^2 - \omega^2)}. \quad (1.40)$$

Basado en lo anterior, consideremos el sistema de dos grados de libertad (1.32) y propon- gamos las siguientes soluciones particulares

$$x_p(t) = X_p \cos \omega t, \quad (1.41)$$

$$x_a(t) = X_a \cos \omega t. \quad (1.42)$$

Para estas soluciones es necesario encontrar los valores de  $X_p$  y  $X_a$ . Sustituyendo (1.41) y (1.42) en la ecuación (1.32) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_p^2 - \omega^2 + \mu\omega_a^2 & -\mu\omega_a^2 \\ -\omega_a^2 & \omega_a^2 - \omega^2 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} X_p \\ X_a \end{bmatrix} \cos \omega t = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t. \quad (1.43)$$

De (1.43) se obtiene

$$X_p = \frac{F_0 (\omega_a - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2 + \mu\omega_a^2) (\omega_a^2 - \omega^2) - \mu\omega_a^4}, \quad (1.44)$$

### 1.3. ABSORBEDOR PASIVO DE VIBRACIONES

---

$$X_a = \frac{F_0 \omega_a^2}{(\omega_p^2 - \omega^2 + \mu \omega_a^2)(\omega_a^2 - \omega^2) - \mu \omega_a^4}. \quad (1.45)$$

Como el objetivo del absorbedor es eliminar la oscilación en la estructura primaria, es decir, que  $X_p$  sea igual a cero, entonces de la ecuación (1.44) se tiene que  $X_p = 0$  si

$$\omega^2 = \frac{k_a}{m_a} = \omega_a^2. \quad (1.46)$$

Luego entonces eligiendo  $k_a$  y  $m_a$  para satisfacer la ecuación (1.46), la respuesta estacionaria de la masa principal es cero y la respuesta estacionaria del absorbedor es

$$x_a(t) = -\frac{F}{k_a} \cos \omega t. \quad (1.47)$$

El absorbedor oscila con una amplitud  $X_a = \frac{F}{k_a}$  y la magnitud de la fuerza actuando sobre el absorbedor es  $k_a X_a = -F$ . Por lo tanto, cuando el absorbedor es sintonizado a la frecuencia de excitación la fuerza provista por el absorbedor es igual en magnitud y en dirección contraria a la fuerza de excitación. De esta manera la fuerza neta sobre la masa principal es igual a cero. Por otro lado, mientras que la fuerza aplicada sobre el sistema es absorbida por el movimiento del absorbedor, el sistema no experimenta el fenómeno de resonancia, porque la frecuencia del absorbedor  $\omega_a$  no es una frecuencia natural del sistema de dos grados de libertad.

La efectividad de los absorbedores de vibraciones dependen de varios factores, principalmente:

- a) Se debe conocer la frecuencia de excitación armónica y que ésta no se desvie mucho de su valor constante, de lo contrario el absorbedor ya no estaría sintonizado y la masa principal experimentará alguna oscilación.
- b) Si la frecuencia de excitación armónica varia mucho de su valor constante puede

ocurrir que tome el valor de alguna de las dos frecuencias naturales del sistema, lo que ocasionaría que el sistema entre en resonancia y eventualmente fallaría.

c) El diseño del resorte  $k_a$  debe ser capaz de soportar la fuerza de excitación.

El problema de evitar resonancias en el diseño de absorbedores en caso de que la frecuencia de excitación se desvíe, depende de la relación entre la masa principal y la masa del absorbedor  $\mu$ , y la razón de frecuencias, definiendo la razón de frecuencias como  $\beta = \frac{\omega}{\omega_p}$ .

La ecuación (1.44) se puede reescribir en términos  $\mu$  y  $\beta$  como

$$\frac{X_p k_p}{F} = \frac{1 - (\omega/\omega_a)^2}{[1 + \mu\beta^2 - \beta^2 (\omega/\omega_a)^2] [1 - (\omega/\omega_a)^2] - \mu\beta^2}. \quad (1.48)$$

En la Fig. 1.12 se grafica el valor absoluto de  $\left| \frac{X_p k_p}{F} \right| \geq 1$  como función de  $\frac{\omega}{\omega_a}$  para distintos valores de  $\mu$ . Si  $\left| \frac{X_p k_p}{F} \right| \geq 1$  para alguna frecuencia de excitación  $\omega$  entonces la fuerza transmitida al sistema principal es mayor a la fuerza original y el absorbedor deja de ser una mejora. El área sombreada en la Fig. 1.12 indica los valores de  $\omega/\omega_a$  de manera que  $|X_p K_p / F| < 1$ .

Recordemos del análisis del polinomio característico (1.35) que las frecuencias naturales son  $\omega_{n1} = \sqrt{\lambda_1}$  y  $\omega_{n2} = \sqrt{\lambda_2}$ . Es fácil ver que sustituyendo  $\omega = \omega_{n1}$  ó  $\omega = \omega_{n2}$  en el determinante de la matriz  $D$  en (1.43) es igual a cero o equivalentemente el denominador de (1.44) y (1.45) son cero. Así, para obtener las frecuencias  $\omega_{n1}$  y  $\omega_{n2}$  en términos de  $\mu$  y  $\beta$  reemplazamos  $\omega$  por  $\omega_n$  en el denominador de (1.48) e igualamos a cero

$$\beta^2 \left( \frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} \right)^2 - [1 + \beta^2(1 + \mu)] \frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} + 1 = 0. \quad (1.49)$$

De esta ecuación se obtienen las frecuencias naturales  $\omega_{n1}$  y  $\omega_{n2}$  dependiendo de los valores de  $\mu$  y  $\beta$ .

Es importante notar que para valores de  $\mu$  pequeños el sistema no va a tolerar mucha

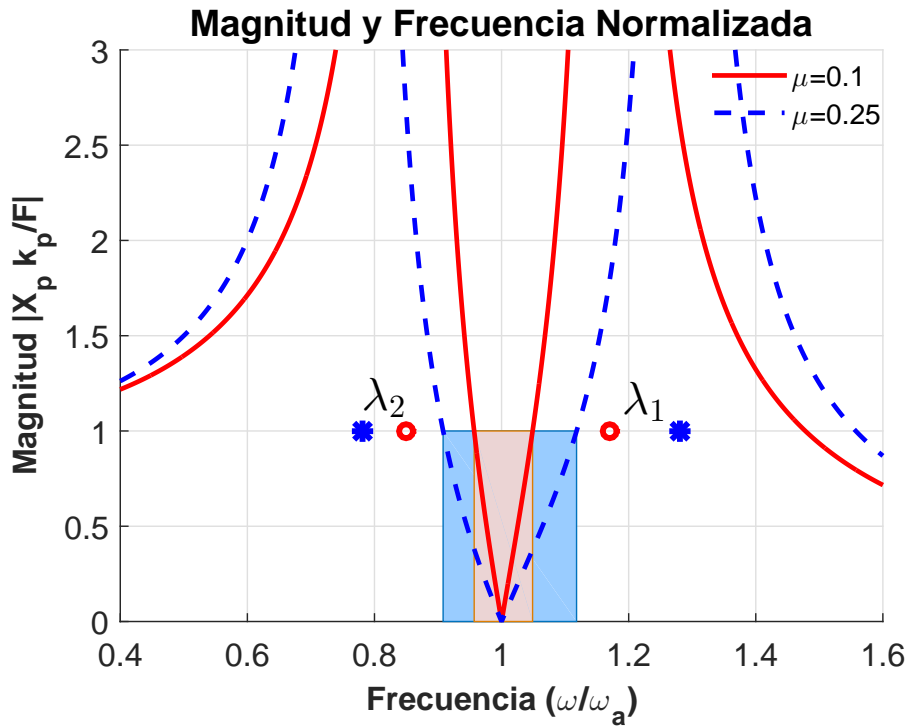


Fig. 1.12: Magnitud y Frecuencia Normalizada de (1.48).

variación de la frecuencia de excitación antes de fallar. Si  $\mu$  aumenta, las frecuencias naturales se separan y se alejan de la condición de operación  $\omega = \omega_a$  del absorbedor y así tendrá un mayor rango de operación. Como regla general se eligen valores de  $\mu$  entre 0.05 y 0.25. Por otro lado cuando la frecuencia de excitación  $\omega$  sale del rango de operación y se aproxima a alguna de las frecuencias naturales del sistema completo, el sistema correrá el riesgo de entrar en resonancia [12]. En la Tabla 1.1 se muestra los valores que están representados en la Fig. 1.12.

$\beta$	$\mu$	$\omega_{n1}$	$\omega_{n2}$	Rango de Operación
1	0.1	0.78	1.28	$0.956\omega_a < \omega < 1.048\omega_a$
1	0.25	0.85	1.17	$0.908\omega_a < \omega < 1.118\omega_a$

Tabla 1.1: Comparación para valores de  $\mu$

En conclusión, mientras que la frecuencia de excitación  $\omega$  se encuentre en el rango de operación, el sistema primario tendrá alguna protección. Por otro lado, para  $\mu$  grandes se

tendrá un mayor rango en el que puede variar  $\omega$ , en comparación de  $\mu$  pequeños que da un menor rango de operación de  $\omega$ , sin embargo, es importante mencionar que el diseño depende del sistema que se desee proteger, debido a que en sistemas primarios muy grandes es conveniente diseñar con  $\mu$  pequeños, es decir, con absorbedores pequeños, ya que si se diseña con  $\mu$  grandes, entonces el absorbedor tendría que ser grande lo cual implica un mayor costo y mayor problema a la hora de implementar.

### 1.3.2. Absorbedor Masa-Amortiguador-Resorte

Como se mencionó anteriormente el amortiguamiento está presente en los sistemas mecánicos, en muchas ocasiones el amortiguamiento es pequeño y su efecto en el comportamiento del sistema físico es prácticamente imperceptible, pero en otras ocasiones el amortiguamiento es grande y su efecto en el comportamiento del sistema es bastante significativo. El amortiguamiento disminuye la capacidad de un absorbedor de vibraciones, sin embargo, el amortiguamiento se añade en los absorbedores de vibración para prevenir resonancias y para mejorar la banda efectiva de operación del absorbedor de vibración. También se utiliza el amortiguamiento como un absorbedor de vibración, por su naturaleza de disipar energía. Estos dispositivos también son conocidos como *amortiguadores de vibraciones* [13]. En la Fig. 1.13 se ilustra un absorbedor masa-amortiguador-resorte añadido a un sistema primario. Si  $x_p = x_p(t)$  denota el desplazamiento de la masa  $m_p$  de su posición de equilibrio, y  $x_a = x_a(t)$  denota el desplazamiento de la masa  $m_a$  de su posición de equilibrio, entonces las ecuaciones de movimiento del sistema de la Fig. 1.13 son

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p + 2\zeta_p\omega_p\dot{x}_p + \omega_p^2x_p + \mu\omega_a^2(x_p - x_a) &= F_0 \cos(\omega t), \\ \ddot{x}_a + 2\zeta_a\omega_a\dot{x}_a + \omega_a^2(x_a - x_p) &= 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

donde  $F_0$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_a$  y  $\mu$ , están definidos como en la sección anterior y los factores de amortiguamiento del sistema primario y del absorbedor, definidos respectivamente como

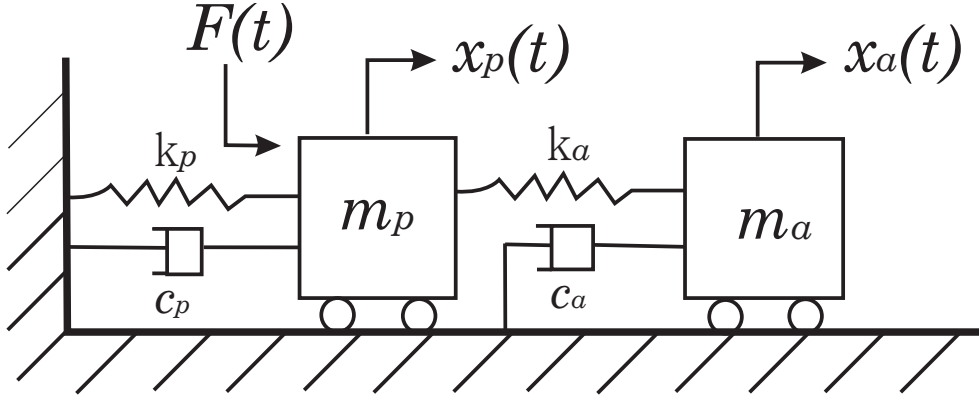


Fig. 1.13: Sistema primario con absorbedor masa-amortiguador-resorte

$$\zeta_p = \frac{c_p}{2m_p\omega_p} \text{ y } \zeta_a = \frac{c_a}{2m_a\omega_a}.$$

Para el análisis procederemos en forma similar al caso no amortiguado basado en el hecho de que es posible encontrar condiciones iniciales particulares tales que la solución de (1.50) es oscilatoria ante una excitación oscilatoria. Siguiendo el método en [13], consideremos la función de excitación  $F_0 \cos(\omega t)$  escrita como  $F_0 e^{i\omega t}$  y las soluciones particulares

$$x_p(t) = X_p e^{i\omega t} \quad (1.51)$$

$$x_a(t) = X_a e^{i\omega t}. \quad (1.52)$$

De estas ecuaciones es necesario encontrar los valores de  $X_p$  y  $X_a$ .

Sustituyendo (1.51-1.52) en (1.50) se obtiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_p^2 - \omega^2 + \mu\omega_a^2 + 2\zeta_1\omega_p\omega i & -\mu\omega_a^2 \\ -\omega_a^2 & \omega_a^2 - \omega^2 + 2\zeta_2\omega_a\omega i \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} X_p \\ X_a \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t}. \quad (1.53)$$

Las ecuaciones descritas en (1.53) se pueden estudiar para distintos casos. Si el sistema primario está fabricado de metal, la amortiguación interna es probable que sea muy



baja y es razonable considerar  $c_p = 0$  [12, 27, 31], con esta consideración el factor de amortiguamiento del sistema primario  $\zeta_p = 0$ . De (1.53) se obtiene

$$X_p = \frac{F_0 (\omega_a - \omega^2 + 2\zeta_a \omega a \omega i)}{(\omega_p^2 - \omega^2)(\omega_a^2 - \omega^2) - \mu \omega_a^2 \omega^2 + 2\zeta_a \omega_a \omega (\omega_p^2 - \omega^2 + \mu \omega_a^2) i}, \quad (1.54)$$

$$X_a = \frac{F_0 \omega_a^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)(\omega_a^2 - \omega^2) - \mu \omega_a^2 \omega^2 + 2\zeta_a \omega_a \omega (\omega_p^2 - \omega^2 + \mu \omega_a^2) i}. \quad (1.55)$$

A diferencia del caso sin amortiguamiento, la respuesta de la masa principal no puede ser cero. La deflexión máxima de la masa principal viene dada por la ecuación (1.54). Usando álgebra de números complejos, y utilizando los parámetros definidos anteriormente  $\omega_p, \omega_a, \beta, \mu$  y definiendo la relación de frecuencia forzada como  $r = \frac{\omega}{\omega_p}$  y definiendo el factor de amortiguamiento mixto  $\zeta = \frac{c_a}{2m_a \omega_p}$  la magnitud del sistema primario se puede escribir como

$$\left| \frac{X_p k_p}{F} \right| = \sqrt{\frac{(2r\zeta)^2 + (r^2 - \beta^2)^2}{(2r\zeta)^2 (r^2 - 1 + \mu r^2)^2 + [(r^2 - 1)(r^2 - \beta^2) + \mu \beta^2 r^2]^2}}. \quad (1.56)$$

La ecuación (1.56) muestra que la amplitud de vibración de la masa principal es una función de  $\mu, \beta, r$  y  $\zeta$ . La gráfica de  $\left| \frac{X_p k_p}{F_0} \right|$  contra la relación de frecuencia forzada  $r$  se muestra en la Fig. 1.14 para  $\beta = 1, \mu = 0.1$  y para diferentes valores de  $\zeta$ . Examinando la Fig. 1.14 podemos apreciar que con los valores de  $\mu$  y  $\beta$  no necesariamente obtendremos la menor amplitud conforme  $\zeta$  crezca, de hecho se tiene que  $\zeta = 0.1$  produce una menor amplitud que  $\zeta = 0.05$ , de esta manera surge la necesidad de analizar los valores de  $\mu$  y  $\beta$  para obtener una  $\zeta$  que de la menor amplitud de la masa primaria, este estudio es conocido como optimización del absorbedor amortiguado [12, 27, 31], en este trabajo no se profundizará en este tema.

Por otro lado, se tiene que cuando el factor de amortiguamiento  $\zeta = 0$  ( $c_a = 0$ ), la resonancia ocurre a las dos frecuencias naturales del sistema acoplado como ya se estudio

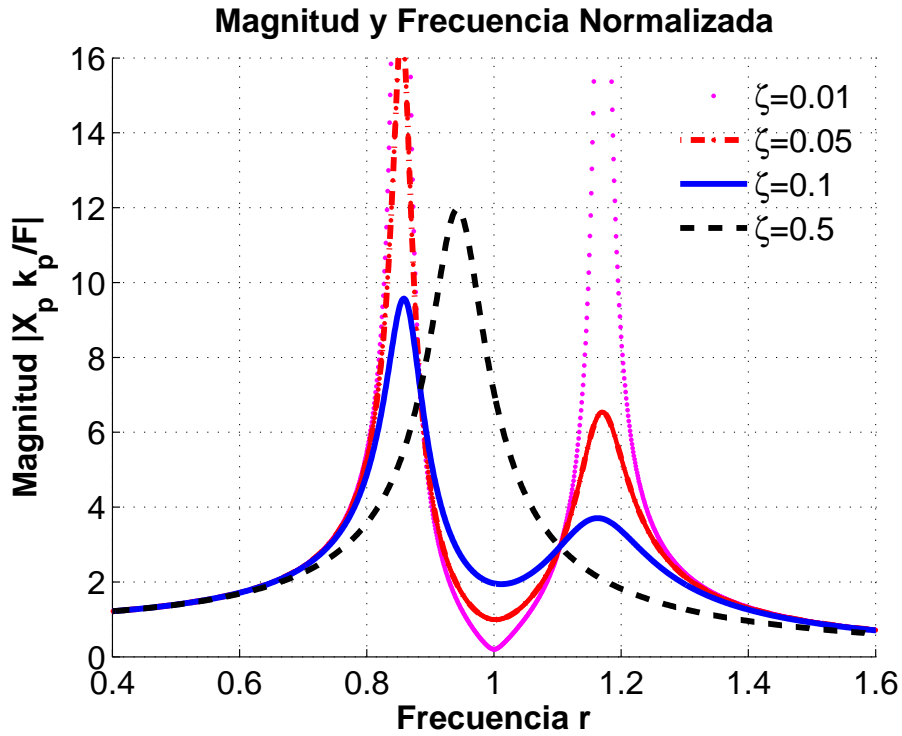


Fig. 1.14: Magnitud y Frecuencia Normalizada de (1.56).

en el caso no amortiguado. Si  $\zeta = \infty$  ( $c_a = \infty$ ), las dos masas virtualmente se unen entre sí, y el sistema se comporta como un sistema de un grado de libertad. En este caso, la resonancia ocurre con  $|X_p| \rightarrow \infty$  en

$$r = \frac{\omega}{\omega_p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} \quad (1.57)$$

En la Fig. 1.15 se grafican estos casos. En conclusión, el pico  $|X_p|$  es infinito para  $c_a = 0$  y también para  $c_a = \infty$ . En algún punto entre estos dos límites, el pico de  $|X_p|$  será mínimo. Algo importante de mencionar es que al introducir amortiguamiento en el diseño del absorbedor se ocasiona que la respuesta del sistema primario nunca pueda ser cero.

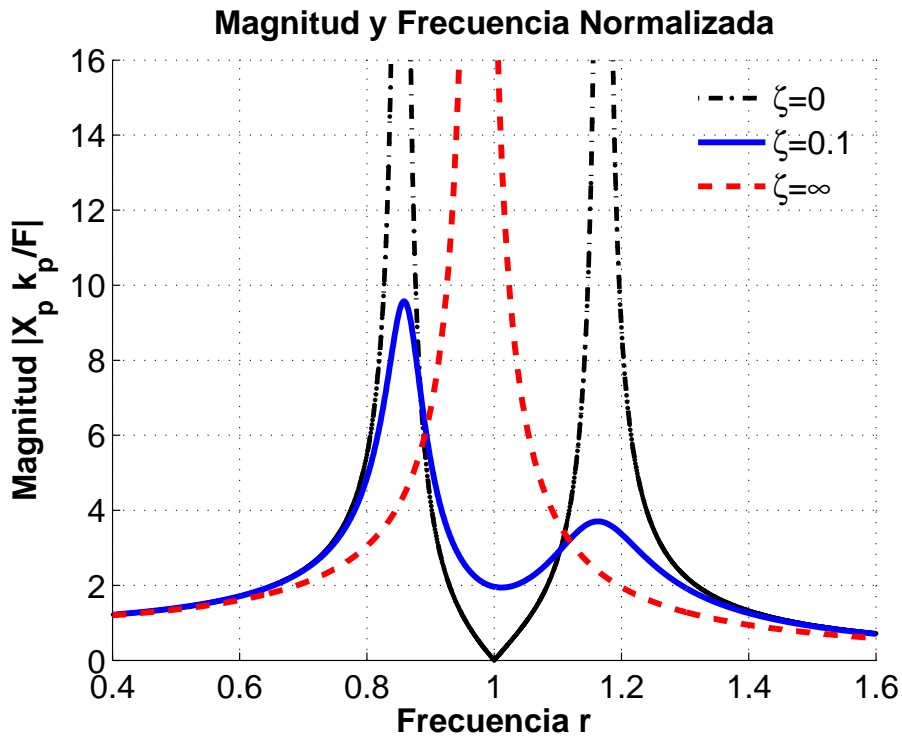


Fig. 1.15: Magnitud y Frecuencia Normalizada de (1.56), con  $\zeta = 0$  y  $\zeta = \infty$ .

## 1.4. Absorbedor Retardado

Como se ha mencionado un enfoque para absorber vibraciones de una estructura primaria consiste en acoplar un absorbedor en forma de un sistema masa-amortiguador-resorte a la estructura primaria. Mediante una sintonización apropiada del absorbedor, es decir, una adecuada selección de los valores de  $m_a$ ,  $k_a$  y  $c_a$ , es posible lograr una alta atenuación de la respuesta del sistema primario. Sin embargo, el absorbedor pasivo tiene la limitación de operar a una sola frecuencia, para solventar esta limitación se suele hacer una retroalimentación al sistema por medio de un actuador.

El sistema absorbedor pasivo y activo, también llamado absorbedor híbrido, combina la absorción pasiva o estructural, con la robustez y adaptación que otorga una ley de control activa que se usa para resintonizar al absorbedor, es decir, modificar la dinámica del absorbedor. Existen diferentes técnicas para la parte activa del absorbedor híbrido como,

por ejemplo, Control por Análisis Modal, Control Óptimo, entre otras, véase el capítulo 7 en [12] para una revisión de estos y otras técnicas de control activo de vibraciones, así como sus ventajas y desventajas.

Por otro lado, para un absorbedor pasivo y activo, la presencia de amortiguamiento impide que la respuesta del sistema primario sea cero. Lo anterior motivo a Olgac y colaboradores en [24] a proponer un absorbedor híbrido donde la parte activa consiste de una retroalimentación retardada de la posición. Este esquema de absorción se le conoce como absorbedor retardado o resonador retardado, el cual se describe a continuación.

Consideremos la estructura de la Fig. 1.16 la cual representa un sistema de un grado de libertad con una retroalimentación de fuerza adicional  $A_a x_a(t - h)$ , donde  $A_a$  es la ganancia de retroalimentación y  $h$  es un retardo de tiempo aplicado al desplazamiento  $x_a$ . En otras palabras el sistema representado en la Fig. 1.16 es un sistema de control retroalimentado involucrando retardos, vease la Fig.1.17.

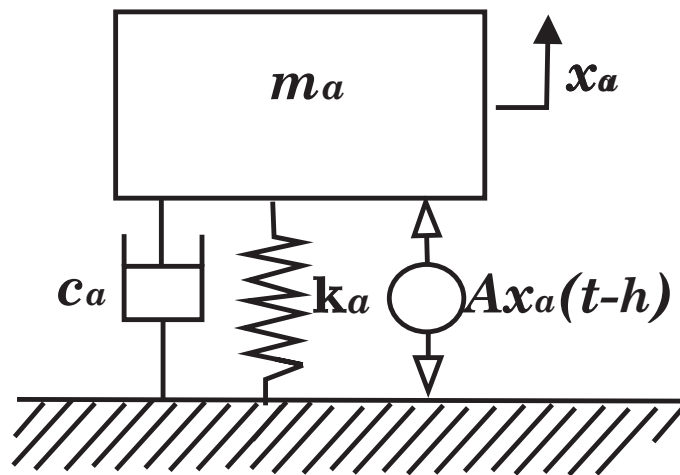


Fig. 1.16: Resonador Retardado.

El efecto de los retardos de tiempo en esquemas de control activo de vibraciones mecánicas ha sido estudiado extensamente en la literatura [1–3, 7, 24, 34]. En todos estos trabajos se tratan a los retardos de tiempo como una dinámica no deseable para eliminar y/o compensar.

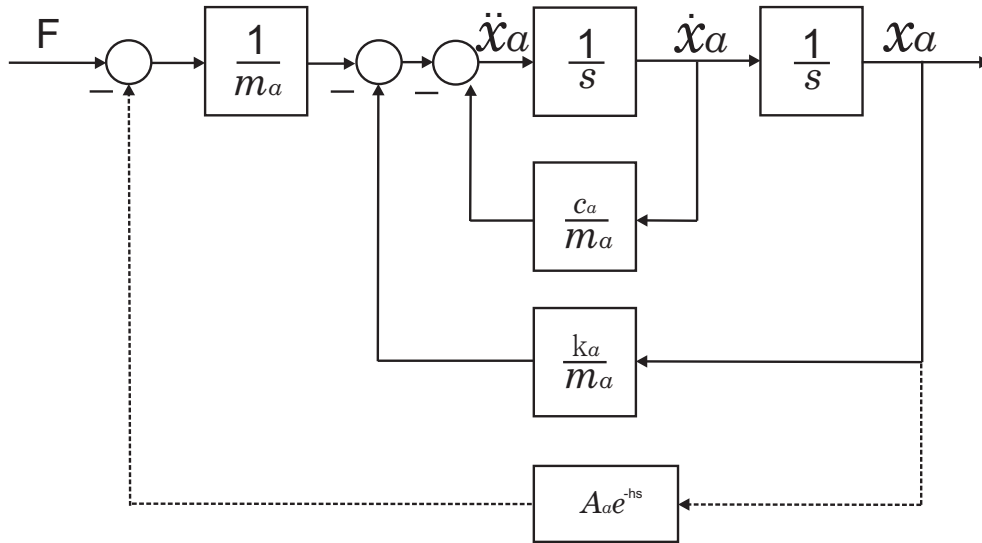


Fig. 1.17: Diagrama de bloques del DR.

En contraste, en el resonador retardado el retardo se introduce intencionalmente en el sistema para mejorar el desempeño. Específicamente, el retardo se utiliza para forzar la dinámica estable de un sistema masa-amortiguador-resorte a una dinámica similar a un sistema masa-resorte diseñado a una frecuencia natural. Debido al retardo, la función característica asociada al sistema no es un polinomio sino que ahora es un cuasipolinomio. Un cuasipolinomio es una función trascendental de variable compleja que tiene un número infinito de ceros [5].

Así, la estrategia de control consiste en seleccionar  $A_a$  y  $h$  tales que el cuasipolinomio tenga dos ceros en el eje imaginario del plano complejo mientras los otros ceros yacen en el semiplano izquierdo del plano complejo. Con esta ubicación particular de los ceros se tiene que los ceros dominantes son los ceros sobre el eje imaginario y en consecuencia el sistema es marginalmente estable y se comporta como un resonador y de ahí el nombre de resonador retardado (DR, por sus siglas en inglés).

Por lo tanto, el resonador retardado tiene la característica de un absorbedor pasivo ideal y en consecuencia es de esperar que la respuesta en estado estable de la estructura primaria pueda ser cero aún en presencia de amortiguamiento.

De manera puntual se tienen las siguientes ventajas de un DR comparadas con un absorbedor pasivo clásico.

1. El absorbedor pasivo se optimiza a través de la sintonización de  $m_a$ ,  $c_a$  y  $k_a$ , estos parámetros determinan la frecuencia de oscilación del absorbedor, la cual no puede ser modificada a menos que se modifique algún parámetro del sistema. Además, esta sintonización sólo es eficaz en un pequeño rango alrededor de su frecuencia optimizada. Por otro lado el DR se sintoniza a través de la programación de los parámetros  $h$  y  $A_a$  en tiempo real, lo que permite cambiar su frecuencia de oscilación.
2. Con un absorbedor que considera amortiguamiento la respuesta del sistema primario nunca puede ser cero, debido a la presencia de un desplazamiento de fase entre el desplazamiento del absorbedor y la perturbación de entrada, sin embargo, cuando se considera un DR la respuesta del sistema primario puede ser cero debido a que un DR se comporta como un absorbedor ideal.

En el artículo [24] se propone una parametrización de  $h$  y  $A_a$  para el funcionamiento del DR. Las parametrizaciones propuestas son las siguientes:

$$h = \left( \frac{1}{\omega_c} \right) \left[ \tan^{-1}(c_a \omega_c, m_a \omega_c^2 - k_a) + 2\pi l \right]. \quad (1.58)$$

$$A_a = \pm \sqrt{(c_a \omega_c)^2 + (k_a - m_a \omega_c^2)^2}, \quad (1.59)$$

donde  $l = 0, 1, \dots$  Para  $h$  y  $A_a$  determinados respectivamente por (1.58) y (1.59), se tiene que el DR oscila a una frecuencia  $\omega_c$  deseada.

Sin embargo, formalmente las ecuaciones (1.58) y (1.59) garantizan únicamente que el cuasipolinomio característico tenga al menos un par de ceros sobre el eje imaginario del plano complejo pero no garantiza que todas las otras raíces del cuasipolinomio se encuentren en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo. Por lo tanto, es posible

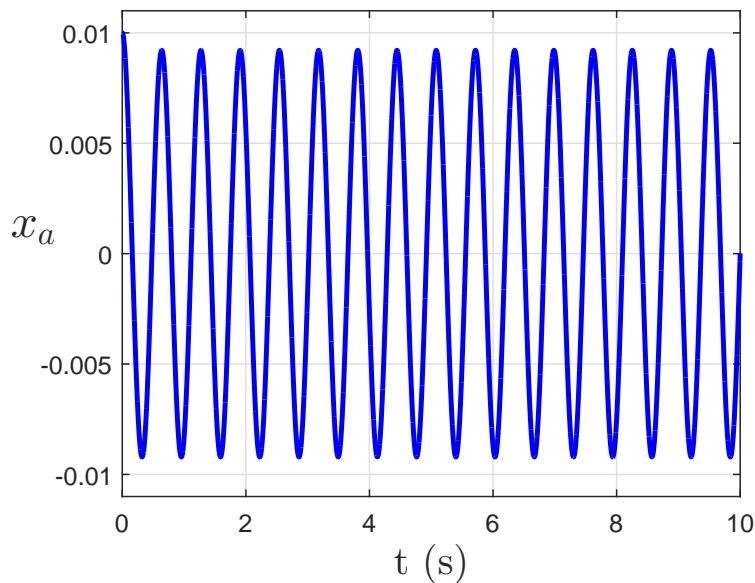


Fig. 1.18: Respuesta en el tiempo del DR para  $\omega_c = 9.9$  rad/s y condiciones iniciales  $x_0 = 0.01$  y  $\dot{x}_0 = 0$ .

que la parametrización (1.58) y (1.59) introduzca algunos ceros inestables. Por ejemplo, consideremos los siguientes parámetros  $m_a = 0.1$  Kg,  $c_a = 0.1$  Ns/m y  $k_a = 10$  N/m. Para estos valores de parámetros se obtienen de (1.58) y (1.59) el retardo  $h = 365.4$  ms y la ganancia  $A_a = 3.688$  N/m para una frecuencia  $\omega_c = 9.9$  rad/s. En la Fig.1.18 se grafica la respuesta en el tiempo del DR, en la cual se aprecia que el comportamiento del DR es oscilatorio.

Considerando los parámetros antes descritos de (1.58) y (1.59) se obtienen valores de retardo  $h = 615$  ms y de ganancia  $A_a = 7.516$  N/m para una frecuencia  $\omega_c = 5$  rad/s. En la Fig.1.19 se grafica la respuesta en el tiempo del DR, en este caso el DR es inestable.

## 1.5. Justificación y Objetivo General

En [24] se muestra que existe una frecuencia crítica,  $\omega_{critical}$ , tal que la condición  $\omega_c > \omega_{critical}$  debe satisfacerse para un correcto funcionamiento del DR. Se menciona

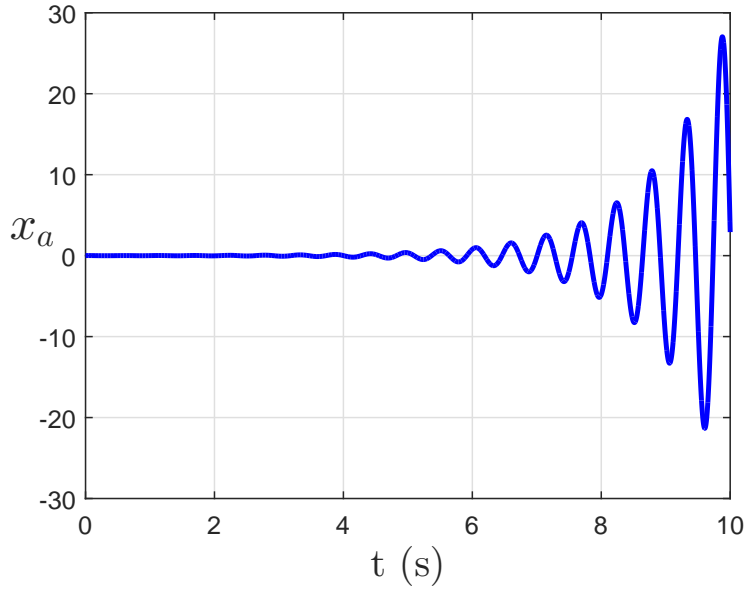


Fig. 1.19: Respuesta en el tiempo del DR para  $\omega_c = 5$  rad/s y condiciones iniciales  $x_0 = 0.01$  y  $\dot{x}_0 = 0$ .

que  $\omega_{critical}$  depende de la estructura del absorbedor pasivo, es decir, de los valores de  $m_a$ ,  $c_a$  y  $k_a$ .

Sin embargo, en [24] no se muestra como determinar explícitamente  $\omega_{critical}$ . De hecho, la existencia de  $\omega_{critical}$  se muestra mediante el estudio de la ubicación de las raíces de la función característica y un análisis de sensibilidad ante variaciones en el retardo  $h$  y la ganancia  $A_a$ .

Este enfoque basado en la ubicación de las raíces fue utilizada también en el trabajo de tesis [30]. Como se discute en [30] utilizar el enfoque de ubicación de las raíces resulta complicado debido a que existen un número infinito de raíces de la función característica y utilizar algoritmos numéricos para dicho objetivo es computacionalmente tedioso.

Existen otros trabajos de Olgac y colaboradores [20] y [14] abordando el problema pero desde el mismo punto de vista de la ubicación de las raíces. En el trabajo reciente [32] se presenta un análisis de estabilidad utilizando el método denominado CTCRS (cluster treatment of characteristic roots) introducido en [25] y se caracteriza numéricamente la



región de estabilidad del sistema completo en el plano  $(A_a, h)$ , la cual se utiliza para sintonizar el absorbedor de vibraciones. El método CTCRS también ha sido aplicado al caso de un DR con retroalimentación de aceleración en [33]. El método CTCRS requiere determinar el conjunto completo de raíces imaginarias del cuasipolinomio y no proporciona una caracterización explícita de la región de estabilidad. Basado en lo anterior, en este trabajo de tesis nos planteamos el siguiente objetivo:

*Determinar explícitamente la región de estabilidad de un sistema mecánico de un grado de libertad con retroalimentación retardada de posición y proponer un método de diseño para el DR.*

### **Organización de la tesis.**

En el Capítulo 1 se presenta la respuesta libre y la respuesta forzada de un sistema mecánico masa-resorte y un sistema masa-amortiguador-resorte, de un grado de libertad. Después se introduce el concepto de absorbedor pasivo, en el primer caso no se considera amortiguamiento y en el segundo caso sí. Finalmente, se presenta la formulación del problema de este trabajo de tesis.

En el Capítulo 2 se presentan los preliminares para sistemas con retardo de tipo retardado y la teoría para analizar la estabilidad de este tipo de sistemas utilizando un enfoque frecuencial.

En el Capítulo 3 se presentan los resultados del análisis de estabilidad del cuasipolinomio asociado al sistema de la Fig. 1.16 sin considerar amortiguamiento, además se presenta un método de diseño para este caso.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados del análisis de estabilidad del cuasipolinomio asociado al sistema de la Fig. 1.16 considerando amortiguamiento, y también se presenta un método de diseño para este caso. Además, se presentan simulaciones numéricas de un sistema primario acoplado a: absorbedor pasivo, DR sin amortiguamiento, DR con amortiguamiento, y se discute la comparación entre los métodos.

## 1.5. JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVO GENERAL

---

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan algunas conclusiones generales de esta tesis y se describe parte del trabajo futuro.

# Capítulo 2

## Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar una clase de ecuaciones diferenciales funcionales que son ecuaciones diferenciales en diferencia en particular de tipo retardadas. Se aborda el tema de existencia y unicidad de soluciones y se presenta un método frecuencial para el análisis de estabilidad de este tipo de ecuaciones, el cual será utilizado para obtener los resultados principales de la tesis.

Las principales definiciones y conceptos fueron recopilados principalmente de los libros [5, 10, 11, 15, 16, 19].

### 2.1. Ecuaciones Diferenciales en Diferencia

Muchos sistemas dinámicos pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs por sus siglas en inglés). Las ODEs describen la dinámica de los sistemas mediante la información del estado presente  $t_0$ . El caso general de un sistema descrito por ODEs es el siguiente:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \forall t \geq t_0, \quad (2.1)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa las *variables de estado* del sistema. Las ecuaciones diferenciales caracterizan la evolución de las variables de estado con respecto al tiempo, a partir

del instante  $t_0$  del sistema se puede plantear el problema de valor inicial o problema de Cauchy y de esta manera garantizar existencia y unicidad de soluciones, si se garantiza existencia y unicidad de soluciones entonces se puede describir la evolución del sistema para  $t > t_0$ , además es posible aplicar técnicas de control con la finalidad de llevar el sistema a un estado deseado.

Sin embargo, existen sistemas dinámicos que no pueden ser descritos sólo conociendo su estado presente, sino que requieren información de su estado pasado para poder describir la evolución del sistema en el tiempo. Los sistemas dinámicos que involucran retardos de tiempo pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales en diferencia [5] (DDEs, por sus siglas en inglés) o de manera más general, por ecuaciones diferenciales funcionales (FDEs por sus siglas en inglés). Como ejemplos de dichos sistemas se tienen el sistema depredador-presa, modelos de viscoelasticidad, en dinámica de poblaciones, en sistemas de transmisión de señales, en sistemas biológicos, etc, [11, 15, 16].

El estudio de ecuaciones diferenciales funcionales comenzó mucho antes de 1900, ejemplo de estos estudios se observan en los trabajos de Bernoulli, Euler, Condorcet y Volterra. Sin embargo, las formulaciones matemáticas básicas fueron desarrolladas en el siglo XX. La noción de una ecuación diferencial funcional fue introducida por Myshkis [19] en 1949 como una ecuación diferencial que involucra la función " $x(t)$ " y sus derivadas no únicamente en el argumento " $t$ " (nombrado tiempo) sino que también en varios valores de " $t$ ". La estabilidad de los sistemas dinámicos empezó a ser una materia formal de estudio con las contribuciones de Pontryagin y Bellman [5]. A lo largo de los años han aparecido diferentes técnicas y contribuciones al estudio de este tipo de sistemas con retardos, véase [26].

El problema de estabilidad en los sistemas dinámicos es un tema muy recurrente, el estudio de la estabilidad de los sistemas con retardo resulta más complicado que el estudio de los sistemas que no involucran retardo, esto debido a que los sistemas que se modelan

con FDEs, tiene una naturaleza infinito dimensional en comparación a los sistemas que se modelan con ODE, que son de dimensión finita. La presencia de retardos en el sistema puede incluir comportamientos complejos tales como oscilaciones, inestabilidad y mal desempeño, además existen casos en los que retardos "pequeños" pueden desestabilizar algunos sistemas, pero retardos "grandes" pueden estabilizar otros sistemas [22]. Por otro lado el retardo puede usarse como un parámetro de control, como es el caso en este trabajo de tesis.

Los retardos pueden aparecer en forma discreta, distribuidos o en forma discreta y distribuida. También se puede tener un único o múltiples retardos discretos, constantes, constantes por tramos o variantes en tiempo (continuos o no), retardos finitos o infinitos, etc. Una forma general de clasificar las ecuaciones diferenciales en diferencias es en los siguientes tres tipos: ecuaciones de tipo retardada, de tipo neutro y de tipo avanzada, vease [5].

Considere la siguiente ecuación:

$$a_0 \dot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t - h) + b_0 x(t) + b_1 x(t - h) = f(t), \quad (2.2)$$

la cual es de orden 1 en derivadas y en diferencias.

**Definición 2.1.1.** [5]. Una ecuación de la forma (2.2) se dice ser de tipo retardada si  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 = 0$ . Se dice ser de tipo neutro si  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 \neq 0$ . Se dice ser de tipo avanzada si  $a_0 = 0$  y  $a_1 \neq 0$ .

Si  $a_0 = a_1 = 0$  ó  $b_0 = b_1 = 0$ , entonces la ecuación se convierte en una ecuación de diferencia pura, un tipo de ecuación funcional la cual debe ser tratada con gran detalle. Si  $a_0 = b_0 = 0$  ó  $a_1 = b_1 = 0$ , se convierte en una ecuación diferencial ordinaria. Una ecuación de tipo retardada permite representar el comportamiento del sistema en el cual la tasa de cambio (derivada) de una cantidad bajo investigación depende de valores pasados y presentes de la cantidad, el término de mayor grado en la derivada se sitúa en el término

libre de retardo. Una ecuación de tipo neutro permite representar un sistema en el cual por lo general la tasa de cambio presente de una cantidad depende de la tasa de cambio pasada así como de valores pasados y presentes en la cantidad, el término de mayor grado en la derivada se sitúa en el término con retardo. Una ecuación de tipo avanzada permite representar un sistema en el cual la tasa de cambio de una cantidad depende de valores presentes y futuros de la cantidad.

El trabajo de esta tesis se enfocará en el estudio y análisis de ecuaciones de tipo retardada.

## 2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones

Para poder garantizar existencia y unicidad de solución de un sistema es necesario plantear el problema de valor inicial o problema de Cauchy, ya que este nos garantiza que existe solución a la ecuación y que esta solución es única. Considere la siguiente DDE de tipo retardada, con un sólo retardo en la variable de estado

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (2.3)$$

donde la función vectorial  $f(t, x, y)$  es continua en todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a  $x$ , el retardo  $h > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Además si  $h = 0$  la ecuación se transforma en una ecuación diferencial ordinaria.

Para poder determinar una solución de (2.3) es necesario plantear el problema de valor inicial y para esto se necesita una condición inicial dada por una función  $\varphi(t)$  definida para  $t$  en el intervalo  $[-h, 0]$ . La función inicial  $\varphi$  debe pertenecer a un espacio funcional, supongamos que  $\varphi$  pertenece al espacio de las funciones continuas,  $\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n)$ . Aquí es importante destacar que debido a que la función inicial pertenece a un espacio funcional, entonces los sistemas con retardo pertenecen al espacio infinito dimensional.

Se sigue que el problema de valor inicial de la ecuación (2.3) es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n)$ , es la función inicial.

Para  $t \in [t_0, t_0 + h]$  se tiene

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi(t-h)), \\ x(t_0) = \varphi(t_0), \end{cases} \quad (2.5)$$

Si definimos a  $f(t, x(t), \varphi(t-h)) \triangleq f_1(t, x(t))$ , entonces el sistema (2.5) puede escribirse como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x(t)), \\ x(t_0) = \varphi(t_0). \end{cases} \quad (2.6)$$

Observese que (2.6) es un problema clásico de valor inicial de ODEs. Supongamos que  $f_1$  es continua con respecto a todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a  $x$ , entonces de la teoría de ODEs se tiene que existe una única solución  $\varphi_1$  definida en  $t \in [t_0, t_0 + h]$  que pasa por  $\varphi(t_0)$  en el instante  $t_0$  y que satisface la ecuación (2.6) [10].

Para  $t \in [t_0 + h, t_0 + 2h]$ , se tiene a  $f(t, x(t), \varphi_1(t-h)) \triangleq f_2(t, x(t))$ . Y así podemos definir nuevamente el problema de valor inicial como una ODE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_2(t, x(t)), \\ x(t_0 + h) = \varphi_1(t_0 + h). \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_2(t, x(t)), \\ x(t_0 + h) = \varphi_1(t_0 + h). \end{cases} \quad (2.8)$$

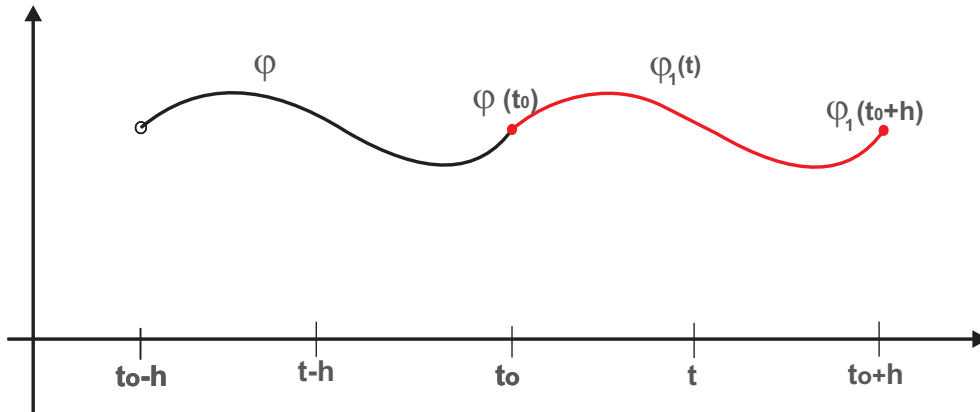


Fig. 2.1: Representación del método paso a paso

Entonces existe una única solución  $\varphi_2(t)$  definida en el intervalo  $t \in [t_0 + h, t_0 + 2h]$  que pasa por el punto  $\varphi_1(t_0 + h)$  y que satisface la ecuación (2.8). Se puede seguir construyendo la solución para intervalos de longitud  $h$ . Este método de construcción de soluciones para DDE es conocido como *método paso-a-paso* representado en la Fig. 2.1, el cual nos permite resolver el problema de valor inicial de DDEs en una serie de problemas de valor inicial para un conjunto de sistemas auxiliares de EDOs. Debido a la suposición de que  $f(t, x, y)$  es continua respecto a todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a  $x$ , independientemente de  $y$ , entonces existe *única solución* la cual coincide con  $\varphi(t)$  en el intervalo  $[t_0 - h, t_0]$ .

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar el método paso a paso,

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - h) + f(t), \quad (2.9)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f(t)$  es continua. Se plantea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - h) + f(t), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (2.10)$$

donde  $\varphi(t)$  es la condición inicial (función inicial).



Para  $t \in [0, h]$ , se tiene la solución  $x_1(t)$  que pasa por  $\varphi(0)$ ,

$$x_1(t) = e^{at} \left[ \varphi(0) + \int_0^t e^{-a\tau} (b\varphi(\tau - h) + f(\tau)) d\tau \right].$$

Para  $t \in [h, 2h]$ , se tiene la solución  $x_2(t)$  que pasa por  $x_1(h)$ ,

$$x_2(t) = e^{a(t-h)} \left[ x_1(h) + \int_h^t e^{-a(\tau-h)} (bx_1(\tau - h) + f(\tau)) d\tau \right].$$

Si se continua el proceso se obtendrá la solución  $x(t)$  definida en  $t \in [-h, \infty)$  que coincide con  $\varphi$  en el intervalo  $[-h, 0]$ .

**Lema 2.2.1.** [15]. Si  $\varphi$  es continua en  $[-h, 0]$ , entonces existe una única función  $x(t, \varphi)$  definida para toda  $t \in [-h, \infty)$  que coincide con  $\varphi$  en  $[-h, 0]$  y satisface la ecuación (2.9) para  $t \geq 0$ . Desde luego, en  $t = 0$ , la derivada de (2.9) representa la derivada por la derecha.

**Lema 2.2.2.** [15]. Si  $x(t, \varphi)$  es una solución de la ecuación (2.9) entonces se tiene que:

1.  $x(t, \varphi)$  tiene primer derivada continua para  $t > 0$  y tiene una derivada continua en  $t = 0$  si y sólo si  $\varphi(t)$  es diferenciable en  $t = 0$  con

$$\dot{\varphi}(0) = a\varphi(0) + b\varphi(-h) + f(0). \quad (2.11)$$

2. Si  $b \neq 0$  entonces  $x(t, \varphi)$  puede ser extendida como una solución de la ecuación (2.9) en el intervalo  $[-h - \epsilon, \infty)$ ,  $0 < \epsilon \leq h$ , si y sólo si  $\varphi$  tiene primera derivada continua en el intervalo  $[-\epsilon, 0]$  y (2.11) se satisface.

## 2.3. Ecuaciones Diferenciales en Diferencia Lineales

Considere la DDE lineal invariante en tiempo de tipo retardada

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^m A_k x(t - h_k), \quad (2.12)$$

donde  $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices del sistema y  $h_k \in \mathbb{R}_+$  son los retardos del sistema. La función característica asociada a (2.12) es:

$$F(s) = \det \left( sI - A_0 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-h_k s} \right).$$

### 2.3.1. Ubicación de ceros de cuasipolinomios

Un *cuasipolinomio* es una función entera, analítica para toda  $s \in \mathbb{C}$ , cuya principal característica es que tiene un número infinito de ceros. En general, tiene la siguiente estructura:

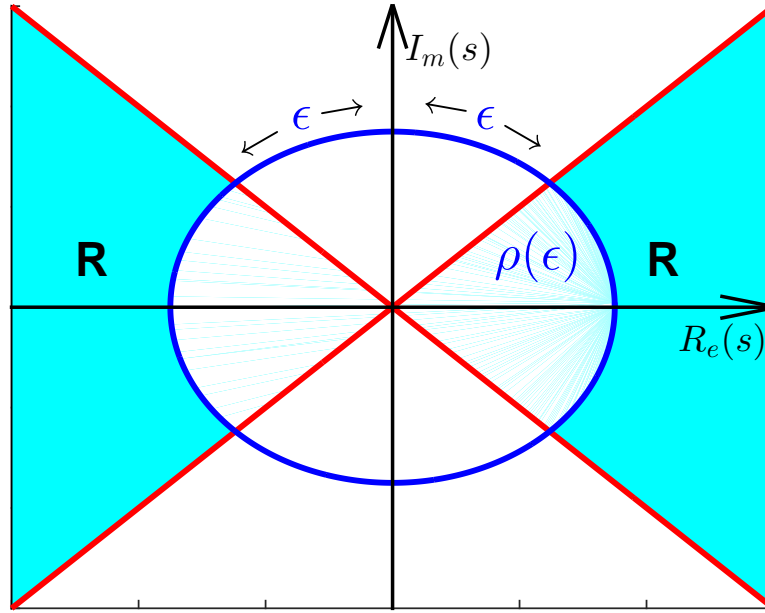
$$F(s) = \sum_{j=0}^m p_j(s) e^{\beta_j s}, \quad (2.13)$$

donde  $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m$ , son combinaciones lineales de los retardos del sistema,  $p_j(s)$  son polinomios en  $s$  con  $\deg(p_j(s)) \leq n$ , con  $n$  la dimensión del vector de estados del sistema.

**Teorema 2.3.1.** [15]. Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\zeta(\epsilon)$  tal que  $F(s)$  no tiene ceros en la región

$$R = \left\{ s \in \mathbb{C} : |s| \geq \zeta(\epsilon), \arg(s) \in \left[ -\frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{\pi}{2} - \epsilon \right] \right\}.$$

El resultado anterior muestra que las raíces de un cuasipolinomio sólo pueden encontrarse en ciertas regiones del plano complejo. Además es posible mostrar que dentro de  $R^c$ , con  $R^c$  el complemento de  $R$ , se pueden construir otras regiones donde tampoco existen raíces. En la Fig. esta representado este resultado.



### 2.3.2. Curvas Logarítmicas y Diagramas de Potencia

Para poder determinar en que regiones del plano complejo existen raíces de un cuasipolinomio, es necesario construir el diagrama de potencias asociado al cuasipolinomio. El diagrama de potencias consiste en un número finito de segmentos. Para el entendimiento de este diagrama, reescribamos a (2.13) como

$$F(s) = \sum_{\nu=0}^N a_{\nu} s^{j_{\nu}} e^{\hat{\beta}_{\nu} s}, \quad (2.14)$$

donde  $N \leq (n + 1)(m + 1)$ ,  $a_{\nu} \neq 0$ ,  $\hat{\beta}_{\nu}, j_{\nu} \in \mathbb{R}$  y  $(\hat{\beta}_{\nu}, j_{\nu}) \neq (\hat{\beta}_i, j_i)$ ,  $\forall i, \nu \in [0, N]$ . Se ubican las parejas  $(\hat{\beta}_{\nu}, j_{\nu})$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, N$  en el plano  $(\hat{\beta}_{\nu}, j_{\nu})$ , y se traza el casco convexo de estos puntos. La parte superior de este casco convexo esta conformada por un número finito de segmentos, digamos  $M$ . Para cada segmento se define un vector ortogonal de la forma  $(k_j, 1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

En la Fig.2.2 se muestra un ejemplo de diagrama de potencia con tres segmentos y con sus tres vectores ortogonales  $(k_j, 1)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Nótese que el vector asociado al segmento

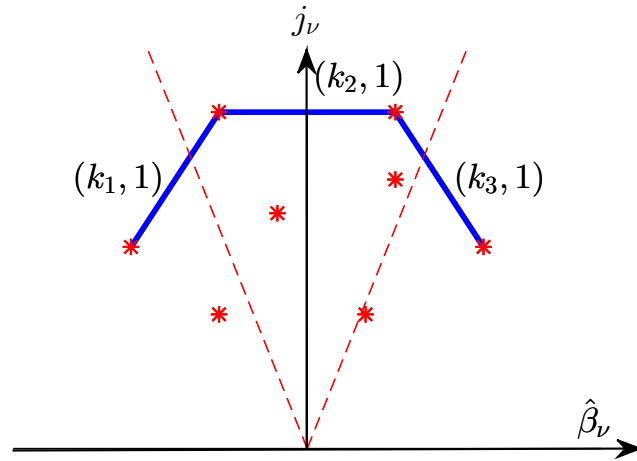


Fig. 2.2: Diagrama de potencias

Con el diagrama de potencia se definen las regiones donde no existen raíces. Para cada  $k_j$  se define una curva logarítmica sobre el plano complejo, consideremos la siguiente curva logarítmica:

$$C_j = x + iy \mid x = k_j \ln y + iy, \quad y \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Cuando existen segmentos horizontales en el diagrama de potencia, las curvas  $C_j$  degeneran en rectas verticales.

Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, definamos los sectores logarítmicos

$$S_j = \{s \in \mathbb{C} : (k_j - \epsilon) \ln y \leq \text{Re}(s) \leq (k_j + \epsilon) \ln y, \quad \text{Im}(s) = y, \quad y \geq 1\},$$

para  $j = 1, 2, \dots, M$ . Como nota adicional, siempre se escoge  $\epsilon > 0$  tal que los sectores  $S_j$  no se intersecten.

Entre dos sectores logarítmicos  $S_j$  y  $S_{j+1}$  definamos

$$V_j = \{s \in \mathbb{C} : (k_j + \epsilon) \ln y < \operatorname{Re}(s) < (k_j - \epsilon) \ln y, \operatorname{Im}(s) = y, y \geq 1\}.$$

Además definamos las regiones

$$V_0 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) < (k_1 - \epsilon) \ln y, \operatorname{Im}(s) = y, y \geq 1\},$$

$$V_{M+1} = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > (k_M + \epsilon) \ln y, \operatorname{Im}(s) = y, y \geq 1\},$$

**Teorema 2.3.2.** [15] Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\rho(\epsilon) > 0$  tal que  $F(s)$  no tiene raíces en las regiones  $V_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, M$ .

El teorema anterior muestra que para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\rho(\epsilon) > 0$  tal que todos los ceros de  $F(s)$  en el semiplano superior del plano complejo con magnitudes mayores que  $\rho(\epsilon)$  se encuentran en la unión de los sectores logarítmicos  $V_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . En la Fig.2.3 se representan las curvas logarítmicas.

Aplicando el principio del argumento (descrito en la sec 2.4.1) es posible mostrar que  $F(s)$  tiene un número infinito (contable) de ceros en cada sector logarítmico  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ .

**Nota:** Los ceros de  $F(s)$  con magnitudes grandes en el semiplano inferior del plano complejo se encuentran en la unión de los sectores logarítmicos obtenidos por la imagen reflejada de  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  con respecto al eje real. Con el diagrama de potencia se obtienen los  $k_j$ , el valor de  $k_j$  permite hacer la siguiente clasificación para cuasipolinomios escritos como (2.14):

1. Si  $k_j < 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , entonces  $F(s)$  es de tipo retardado.
2. Si existe al menos un  $k_j = 0$  y  $k_i < 0$ ,  $\forall j \neq i$ , entonces  $F(s)$  es de tipo neutro.
3. Si existe al menos un  $k_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , entonces  $F(s)$  es de tipo avanzado.

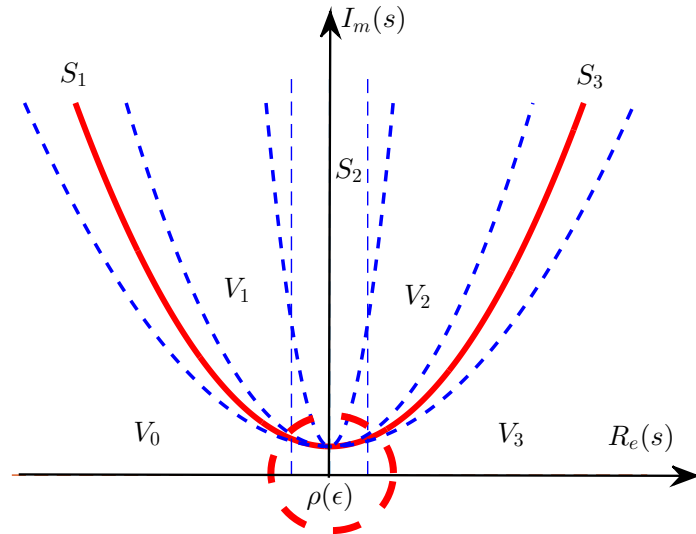


Fig. 2.3: Curvas Logarítmicas

Los cuasipolinomios de tipo avanzado no son estables. Para no tener al menos un  $k_j$ , se necesita que uno de los términos del cuasipolinomio, digamos  $a_0 s^{j_0} e^{\hat{\beta}_0 s}$ , satisfaga las siguientes condiciones:

- a)  $j_0 \geq j_\nu, \nu = 1, 2, \dots, M,$
- b)  $\hat{\beta}_0 \geq j \hat{\beta}_\nu, \nu = 1, 2, \dots, M.$

Si existe este término se llama **término principal** de  $F(s)$ .

**Lema 2.3.1.** [15] *El cuasipolinomio  $F(s)$  puede tener todas sus raíces en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo sólo si tiene término principal.*

Para ilustrar como se construye el diagrama de potencia y para ilustrar el lema anterior, consideremos el siguiente cuasipolinomio

$$F(s) = s - a - be^{-hs}, \quad (2.15)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $h > 0$ . El término principal de (2.15) es  $s$ , entonces todas las raíces

están en el semiplano izquierdo del plano complejo. Escribiendo  $F(s)$  como en (2.14), se tiene

$$F(s) = \sum_{\nu=0}^2 a_{\nu} s^{j_{\nu}} e^{\hat{\beta}_{\nu} s}, \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & \hat{\beta}_1 &= 0, & j_1 &= 1. \\ a_1 &= -a, & \hat{\beta}_2 &= 0, & j_2 &= 0. \\ a_2 &= -b, & \hat{\beta}_3 &= -h, & j_3 &= 0. \end{aligned}$$

Las parejas  $(\hat{\beta}_{\nu}, j_{\nu})$  son,  $(0, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(-h, 0)$ . En la Fig.2.4 esta representado el diagrama de potencia de estas parejas, el segmento de recta  $r_1$  forma parte del casco convexo (en este caso sólo se tiene un segmento de recta) y  $r_2$  representa el segmento de recta asociado al vector ortogonal  $(k_1, 1)$  con  $k_1 = -\frac{1}{h}$ .

En la Fig.2.5 se muestra la ubicación de las raíces para (2.15) con un valor de  $a = -5$ ,  $b = -4$  y  $h = 0.3$ , como se puede ver en la Fig.2.5 todas las raíces están en el semiplano izquierdo

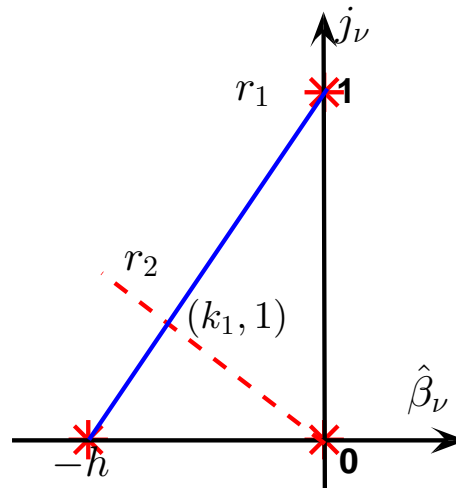


Fig. 2.4: Diagrama de potencias del cuasipolinomio (2.15).

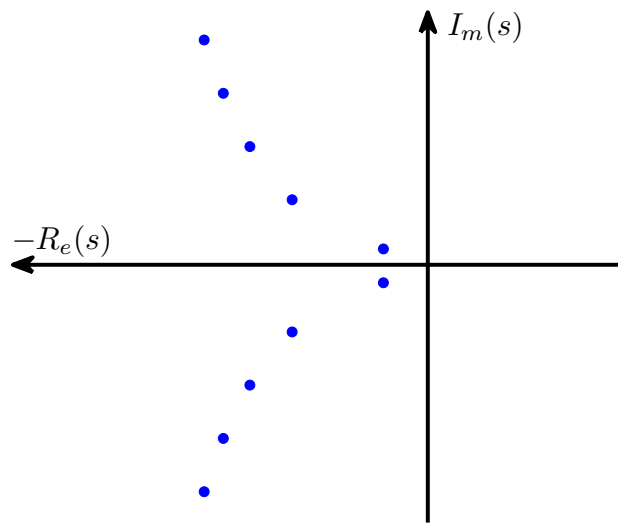


Fig. 2.5: Raíces del cuasipolinomio (2.15).

## 2.4. Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales en Diferencia Lineales

La estabilidad de los sistemas con retardo pueden ser agrupadas en dos enfoques principales:

1. Estabilidad en el Dominio Frecuencial: los métodos derivados del análisis en frecuencia para sistemas con retardos surgen como una extensión de los métodos clásicos, y se basan en la determinación de las raíces del sistema, como son la generalización del método de Hurwitz, el criterio de Nyquist, el criterio de Mikhailov, el Teorema de la Pequeña Ganancia, etc, [18].
2. Estabilidad en el Dominio Temporal: Los métodos de análisis en el dominio del tiempo para sistemas con retardos se construyen a partir de los resultados de Razumikhin [28] o Lyapunov-Krasovskii [17]. Ambos resultados se entienden como una ampliación de la Teoría de estabilidad de Lyapunov sobre sistemas convencio-



nales. La idea analógica es encontrar una cierta función (Razumikhin) o funcional (Krasovskii) candidata adecuada que permita probar la estabilidad o la verificación de algún criterio de desempeño.

En este trabajo de tesis, utilizamos el enfoque frecuencial, a continuación se definirán algunos conceptos los cuales fueron fundamentales para la realización de este trabajo. Consideremos nuevamente la ecuación (2.12), es decir,

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{k=1}^m A_kx(t - h_k), \quad h_k \geq 0.$$

La función característica asociado a este sistema es

$$F(s) = \det \left( sI - A_0 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-h_k s} \right). \quad (2.17)$$

**Definición 2.4.1.** *La función característica (2.17) se dice que es estable si*

$$F(s) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+. \quad (2.18)$$

*Se dice que (2.17) es estable independiente del retardo si (2.18) se satisface para todo  $h_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . El sistema (2.12) se dice estable si la función característica (2.17) es estable y se dice estable independiente del retardo si su función característica es estable independiente del retardo.*

Se tiene que el sistema (2.12) es estable independiente del retardo si la estabilidad persiste con respecto a todos los valores posibles del retardo. Por otro lado, si el sistema es estable sólo para un subconjunto de retardos positivos, entonces se dice que la estabilidad depende del retardo.

Al igual que los sistemas sin retardo, la estabilidad asintótica en los sistemas con retardo lineales implica estabilidad exponencial.

### 2.4.1. Criterio de Mikhailov

El criterio de Mikhailov es un método frecuencial y completamente gráfico que surgió originalmente para examinar la estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo y sin retardos, sin embargo más adelante surgió una generalización el cual permite aplicar el criterio para sistemas lineales con retardos [4]. El criterio de Mikhailov utiliza el principio del argumento de funciones analíticas en el plano complejo (estrechamente relacionado con el criterio de Nyquist) permitiendo determinar la estabilidad del sistema sin necesidad de calcular explícitamente los ceros del sistema.

**Teorema 2.4.1.** (*Principio del Argumento [8].*) Sea  $C$  un contorno cerrado simple, descrito en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj) y sea  $f$  una función analítica dentro y sobre  $C$ , excepto posiblemente en polos interiores a  $C$ . Supongamos además que  $f$  no tiene ceros sobre  $C$ . Entonces

$$\Delta_c \arg f(s) = 2\pi (N - P) \quad (2.19)$$

donde  $N$  y  $P$  son el número de ceros y el número de polos de  $F$ , contando sus multiplicidades interiores a  $C$ .

En el caso de cuasipolinomios,  $P = 0$ , entonces de (2.19) se tiene

$$\Delta_c \arg F(s) = 2\pi N. \quad (2.20)$$

Otra forma de expresar a (2.17) es como

$$F(s) = s^n + \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} A_k s^j e^{-h_k s}, \quad (2.21)$$

donde  $n$  es el grado del vector de estados.

**Teorema 2.4.2.** [4] Sea  $F(s)$  un cuasipolinomio de la forma (2.21) sin ceros en el eje

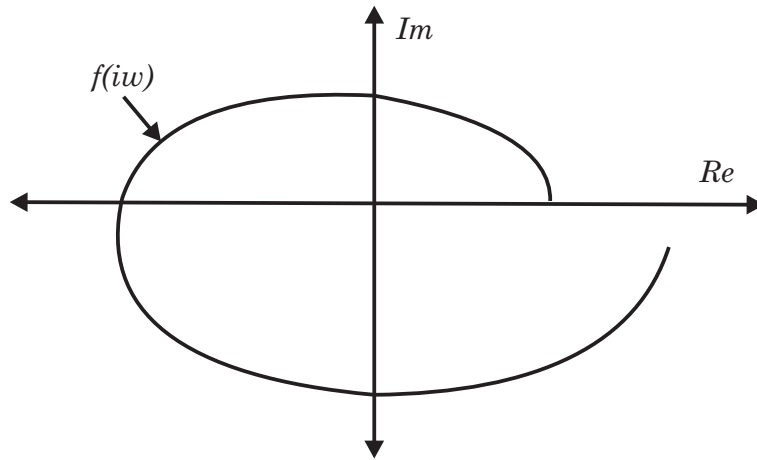


Fig. 2.6: Curva de Mikhailov

imaginario,  $F(s)$  es estable si y sólo si

$$\Delta \arg F(i\omega) \Big|_0^\infty = \frac{n\pi}{2}. \quad (2.22)$$

El teorema anterior nos permite analizar la estabilidad a través de una gráfica conocida como Hodógrafo de Mikhailov o Curva de Mikhailov, vease Fig. (2.6). Para construir el Hodógrafo de Mikhailov, se realiza un barrido de la función  $F(i\omega)$ , donde  $\omega \in [0, \infty)$  y se gráfica  $Re(F(i\omega))$  contra  $Im(F(i\omega))$ .

### 2.4.2. Método de D-Partición

Este método fue propuesto por Neimark [21] y sólo puede ser usado para dos parámetros, sirve para dividir el espacio de parámetros de un cuasipolinomio en regiones donde existe el mismo número de ceros. Cada región esta acotada por una hipersuperficie, la cual corresponde al caso cuando al menos Una de las raíces está en el eje imaginario. Dado que las raíces de  $F(s)$  dependen continuamente de los parámetros, el número de raíces con parte real positiva sólo puede cambiar cuando ciertas raíces cruzan el eje imaginario. Por lo tanto, los parámetros de cada dominio del espacio particionado corresponden

a cuasipolinomios con el mismo número de raíces con parte real positiva, contando multiplicidades. Realizando la partición el problema de estabilidad se reduce a encontrar la región donde no existen raíces con parte real positiva.

**Teorema 2.4.3.** (*Teorema de Rouché [5].*) Sean  $f(s)$  y  $g(s)$  dos funciones analíticas dentro y sobre un contorno cerrado simple  $C$  en el plano complejo  $s$ . Si

$$|g(s)| < |f(s)|, \quad \forall s \in C,$$

entonces  $f(s)$  y  $f(s) + g(s)$  tienen el mismo número de ceros (contando multiplicidades) dentro de  $C$ .

El teorema de Rouché se usa para mostrar la continuidad de las raíces de cuasipolinomios con respecto a cambios en los parámetros y el Método de D-Partición utiliza este teorema y así garantiza que en cada región se tiene el mismo número de raíces.

Para mostrar como es el funcionamiento del Método de D-Partición veamos el siguiente ejemplo,

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - h), \tag{2.23}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $h \in \mathbb{R}_+$ .

La función característica asociada a (2.23) es

$$F(s) = s - a - be^{-hs}. \tag{2.24}$$

Es importante señalar que si  $\omega = 0$ , entonces de (2.24) se obtiene la recta  $a + b = 0$ .

Supongamos que  $s = i\omega$  es una raíz de  $F(s)$ . Entonces

$$F(i\omega) = i\omega - a - be^{-i\omega h} = 0. \tag{2.25}$$

Utilizando la identidad de Euler,  $e^{-i\omega h} = \cos \omega h - i \operatorname{sen} \omega h$ , se tiene que (2.25) es

$$F(i\omega) = -a - b \cos \omega h + i(\omega + b \operatorname{sen} \omega h) = 0. \quad (2.26)$$

Separando la parte real y la parte imaginaria de (2.26) se obtiene

$$\begin{aligned} -a - b \cos \omega h &= 0, \\ \omega + b \operatorname{sen} \omega h &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

De (2.27) se obtienen las siguientes parametrizaciones:

$$a(\omega) = \frac{\omega \cos \omega h}{\operatorname{sen} \omega h}, \quad (2.28)$$

$$b(\omega) = \frac{-\omega}{\operatorname{sen} \omega h}. \quad (2.29)$$

De (2.28)-(2.29) se sigue que,  $\operatorname{sen} \omega h = 0 \Leftrightarrow \omega h = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$  Luego entonces  $\operatorname{sen} \omega h \neq 0$ ,  $\omega \in \left( \frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h} \right)$ ,  $k = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$

Realizando el barrido para toda  $\omega \in \mathbb{R}$ , las parametrizaciones descritas por (2.28) particionan el espacio de parámetros  $(a, b)$ . Las curvas que generan estas parametrizaciones son fronteras de estabilidad del quasipolinomio  $F(s)$ . Utilizando el teorema de Rouché se tiene que las raíces de  $F(s)$  son funciones continuas de los parámetros del sistema, entonces el número de raíces es constante en cada dominio separado por las curvas. Por medio del criterio de Mikahilov es posible determinar el número de raíces con parte real positiva en cada espacio particionado. En la Fig.2.7 se muestra el espacio de parámetros particionado  $(a, b)$ , la zona sombreada representa la zona estable del cuasipolinomio (2.24), mientras que para las demás zonas el cuasipolinomio (2.24) es inestable, donde  $p$  indica el número de raíces con parte real positiva. La parte de la Fig.2.7 que esta marcada con líneas representa la zona dependiente del retardo. Se tiene que si el retardo crece,  $h \rightarrow \infty$  entonces la región de estabilidad dependiente del retardo disminuye y si el retardo

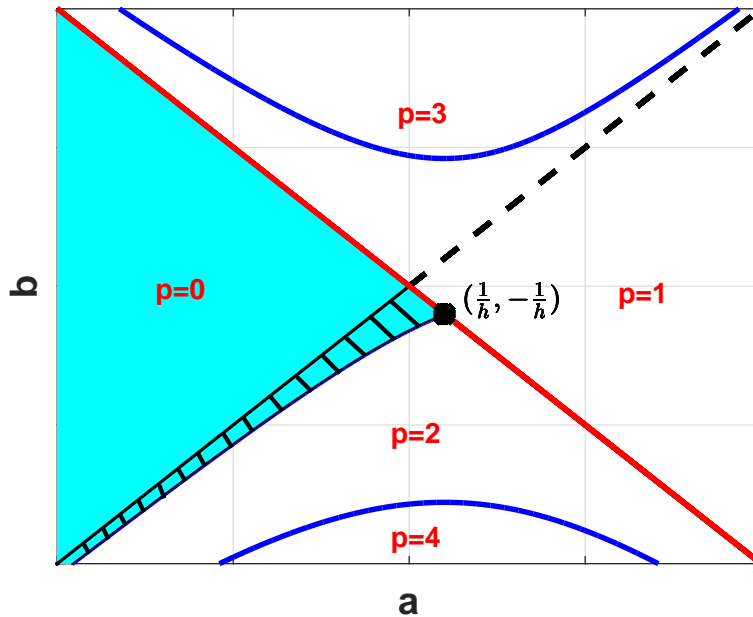


Fig. 2.7: Partición del espacio de parámetros  $(a, b)$  para el ejemplo (2.23).

disminuye,  $h \rightarrow 0$ , entonces la zona dependiente del retardo aumenta.

## 2.5. Resumen de capítulo

En este capítulo se presentó una breve introducción de los sistemas con retardo de tipo retardado. Primero se presentó la existencia y unicidad de soluciones para este tipo de sistemas. Posteriormente se presentó como se determinan los ceros de cuasipolinomios y también se presentó las curvas logarítmicas y los diagramas de potencia asociados a este tipo de sistemas. Finalmente se presentaron algunas herramientas para determinar la estabilidad de sistemas de tipo retardado, siguiendo un enfoque frecuencial, estas herramientas son el Criterio de Mikhailov y el método D-Partición. Los conceptos presentados en este capítulo son utilizados para el resultado de estabilidad que se muestran en los capítulos 3 y 4.

## Capítulo 3

### Diseño del DR sin Amortiguamiento

En el capítulo 1 se presentó y se explicó el funcionamiento de un absorbedor pasivo, particularmente en la sección 1.4.1 se presentó el caso de un absorbedor ideal, es decir, un absorbedor pasivo el cual no considera amortiguamiento. Como ya se mencionó el absorbedor pasivo sólo puede ser diseñado a una frecuencia de resonancia, es decir, si quisieramos que oscilará a otra frecuencia se tendría que modificar físicamente. En el caso de un DR, como se menciona en el capítulo 1, se tiene la gran ventaja de que su frecuencia de oscilación puede ser modificada sin necesidad de modificar su estructura física. En este capítulo se presenta los resultados de análisis de estabilidad de un DR sin considerar amortiguamiento, además se presenta un método de diseño para este DR.

Consideremos la estructura mostrada en la Fig.3.1 que describe a un DR de un grado de libertad el cual no considera amortiguamiento, es importante mencionar que el DR tiene la estructura de un absorbedor pasivo ideal y que la diferencia significativa es la presencia de la retroalimentación de fuerza adicional  $A_a x_a(t-h)$ , donde  $A_a$  es la ganancia de retroalimentación y  $h$  es el retardo de tiempo aplicado al desplazamiento  $x_a$ .

Si  $x_a$  denota el desplazamiento de la masa  $m_a$  de su posición de equilibrio, la ecuación

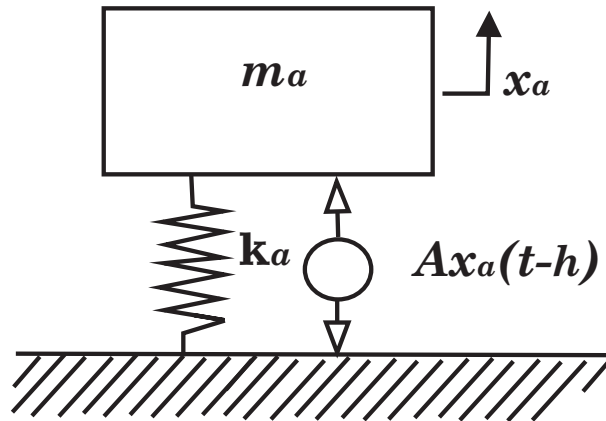


Fig. 3.1: Absorbedor Retardado sin amortiguamiento.

de movimiento del sistema de la Fig.3.1 es

$$m_a \ddot{x}_a(t) + k_a x(t) + A_a x_a(t - h) = 0. \quad (3.1)$$

Reescribamos la ecuación (3.1) como

$$\ddot{x}_a(t) + \omega_a^2 x(t) + b x_a(t - h) = 0, \quad (3.2)$$

donde  $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$  es la frecuencia natural y  $b = \frac{A_a}{m_a}$  es la ganancia de retroalimentación.

### 3.1. Análisis de Estabilidad

El cuasipolinomio característico asociado al sistema (3.2) es

$$g(s) = s^2 + \omega_a^2 + b e^{-hs}. \quad (3.3)$$

Para el análisis de estabilidad es conveniente considerar el siguiente cuasipolinomio

$$f(s) = s^2 + a^2 + b e^{-hs}, \quad (3.4)$$



donde  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $h > 0$ . Claramente el cuasipolinomio (3.3) es un caso particular del cuasipolinomio (3.4) cuando  $a^2 = \omega_a^2$ .

**Proposición 3.1.1.** *Dada cualquier  $h > 0$ , todos los ceros de  $f(s)$  tienen parte real negativa si y sólo si  $(b, a^2)$  pertenece a la región  $\Gamma$ , ver Fig. 3.2, cuya frontera en el espacio de parámetros  $(b, a^2)$  está dada por*

$$\partial\Gamma = \{(b, a^2) : b = 0\} \cup \left\{ (b, a^2) : b = \frac{1}{(-1)^{k+1}} \left[ a^2 - \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 \right], a^2 \in (a_{k-1}^2, a_k^2], k = 0, 1, \dots \right\}, \quad (3.5)$$

donde  $a_{-1}^2 = 0$  y  $a_k^2, k = 0, 1, \dots$ , están dadas por

$$a_k^2 = ((k+1)^2 + k^2) \frac{\pi^2}{2h^2}. \quad (3.6)$$

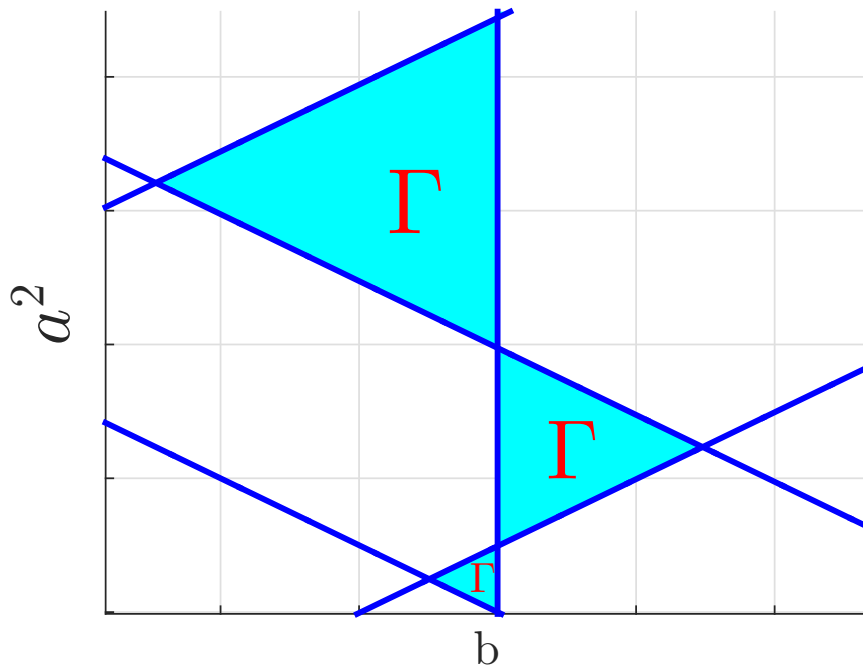


Fig. 3.2: Región de estabilidad para el sistema (3.2).

*Demostración.* Primero, observese que si  $b = 0$  entonces  $f(s) = s^2 + a^2$ , es un polinomio

de segundo orden con ceros puramente imaginarios  $s_{1,2} = \pm ai$ . Así, considere  $b \neq 0$  y suponga que  $s = i\omega$  es un cero de  $f(s)$ . Entonces

$$f(i\omega) = -\omega^2 + a^2 + be^{-i\omega h} = 0.$$

Usando la identidad de Euler  $e^{-i\omega h} = \cos(\omega h) - i \operatorname{sen}(\omega h)$  y separando la parte real e imaginaria de la ecuación anterior, se obtiene

$$-\omega^2 + a^2 + b \cos(h\omega) = 0, \tag{3.7}$$

$$-b \operatorname{sen}(h\omega) = 0. \tag{3.8}$$

La ecuación (3.8) implica que  $\operatorname{sen}(\omega h) = 0$  ó, equivalentemente,  $\omega h = k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots$  Entonces, de la ecuación (3.7) se obtiene

$$a^2 = (-1)^{k+1}b + \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2, k = 0, 1, \dots \tag{3.9}$$

La expresión (3.9) determina un conjunto infinito (contable) de rectas las cuales junto con el eje vertical  $b = 0$ , particionan el plano  $(b, a^2)$  en un conjunto de regiones conectadas, ver Fig. 3.3 .

Cada una de estas regiones tienen la propiedad que para cualquier  $(b, a^2)$  dentro de la región, la función  $f(s)$  tiene el mismo número de ceros con parte real positiva. Esta propiedad sigue de la continuidad de los ceros de  $f(s)$  con respecto a  $b$  y  $a^2$ , y que con el fin de aumentar (o disminuir) el número de ceros con parte real positiva, las rectas determinadas por (3.9) o el eje  $b = 0$  deben ser intersectados por cualquier camino continuo que va de un punto  $(b_0, a_0^2)$  en una región al punto  $(b_1, a_1^2)$  en otra región.

Usando el criterio de estabilidad de Mikhailov es posible determinar el número de ceros con parte real positiva de cada región, ver Fig.3.3, donde  $p$  indica el número de

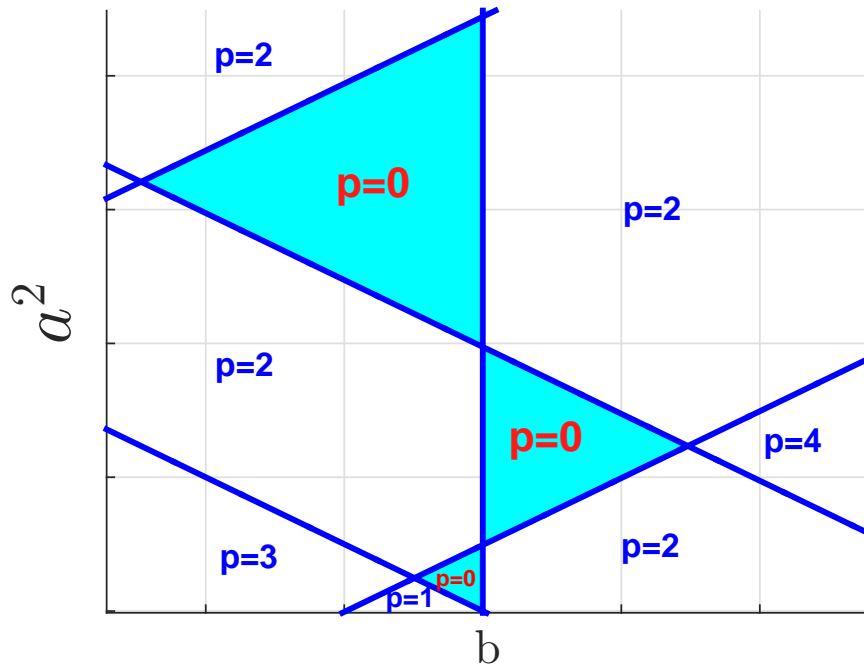


Fig. 3.3: Partición del espacio  $(b, a^2)$  de (3.4).

ceros con parte real positiva en cada región. La región con  $p = 0$  que consiste en una unión de triángulos en la Fig.3.3 es la región de estabilidad buscada y denotada por  $\Gamma$  en la Fig.3.2

La frontera de  $\Gamma$  puede determinarse explícitamente calculando los segmentos de recta que resultan de la intersección de dos rectas consecutivas, es decir, las rectas determinadas por (3.9) para  $k$  y  $k + 1$ . Cálculos sencillos muestran que los puntos de intersección  $(b_k, a_k^2)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , están dados por la siguiente expresión:

$$b_k = \frac{1}{(-1)^{k+1}} (2k + 1) \frac{\pi^2}{2h^2} \text{ y } a_k^2 = ((k + 1)^2 + k^2) \frac{\pi^2}{2h^2}. \quad (3.10)$$

Definiendo  $a_{-1}^2 = 0$ , la frontera de  $\Gamma$  es explícitamente determinada por la expresión (3.5), lo cual termina la demostración.  $\square$

### 3.2. Diseño del DR

El objetivo principal de un absorbedor es que al ser acoplado a una estructura primaria pueda absorber las energías de entrada de perturbaciones, de esta manera reduce los efectos en la estructura primaria. De acuerdo a la selección apropiada del retardo, así como de la ganancia de retroalimentación convertirán al absorbedor retardado en un resonador a la frecuencia de absorción deseada. En esta sección se presenta un método de diseño para el DR que no considera amortiguamiento, este método de diseño esta basado en los resultados del análisis anterior.

Del análisis de estabilidad se sigue que si  $(b, \omega_a^2)$  satisfacen

$$b = \frac{1}{(-1)^{k+1}} \left[ \omega_a^2 - \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 \right] \text{ y } \omega_a^2 \in (\omega_{a(k-1)}^2, \omega_{ak}^2), \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde

$$\omega_{ak}^2 = \frac{\pi^2}{2h^2} [(k+1)^2 + k^2], \quad \omega_{a(k-1)}^2 = \frac{\pi^2}{2h^2} [(k-1)^2 + k^2],$$

entonces  $g(s)$  tiene las raíces  $s = \pm \omega_a i = \pm \frac{k\pi}{h}$  y las otras raíces se encuentran en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

Para el problema de diseño del DR consideramos que  $\omega_a \in \mathbb{R}$  es dado y que  $\omega \in \mathbb{R}$  es la frecuencia deseada de oscilación. El problema consiste en calcular  $h$  y  $b$  tal que el sistema tiene un comportamiento DR.

Para  $\omega_a \in \mathbb{R}$  y para tener un comportamiento DR se debe satisfacer para algún  $k = 1, 2, \dots$ , que

$$\frac{\pi^2}{2h^2} [(k-1)^2 + k^2] < \omega_a^2 < \frac{\pi^2}{2h^2} [(k+1)^2 + k^2], \quad (3.11)$$

o equivalentemente

$$\frac{\pi^2}{2} [(k-1)^2 + k^2] < \omega_a^2 h^2 < \frac{\pi^2}{2} [(k+1)^2 + k^2].$$

### CAPÍTULO 3. DISEÑO DEL DR SIN AMORTIGUAMIENTO

---

Definamos

$$S_k \triangleq \frac{(k-1)^2 + k^2}{2k^2} \text{ y } R_k \triangleq \frac{(k+1)^2 + k^2}{2k^2}.$$

Observemos que

$$R_k = \frac{k^2 + 2k + 1 + k^2}{2k^2} = \frac{2k^2 + 2k + 1}{2k^2} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2}.$$

Se sigue que  $R_k$  es decreciente y  $R_k \rightarrow 1$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Por otro lado

$$S_k = \frac{(k-1)^2}{2k^2} + \frac{1}{2}.$$

Observemos que  $(k^2 - 1)^2 < k^4$ , y

$$\begin{aligned} (k^2 - 1)^2 &= (k^2 - 1)(k^2 - 1) = (k+1)(k-1)(k+1)(k-1), \\ &= (k+1)^2(k-1)^2. \end{aligned}$$

Se sigue que  $(k^2 + 1)^2 (k^2 - 1)^2 < k^4$ , lo que implica que  $\frac{(k^2-1)^2}{k^2} < \frac{k^2}{(k^2+1)^2}$ .

Entonces

$$S_k = \frac{(k-1)^2}{2k^2} + \frac{1}{2} < \frac{k^2}{2(k+1)^2} + \frac{1}{2} = S_k + 1.$$

Así, la secuencia  $S_k$  es creciente. Para calcular el límite de  $S_k$  observemos que  $S_k = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2}$ . Evidentemente,  $S_k \rightarrow 1$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

En conclusión se tiene que el intervalo determinado por (3.11) decrece cuando  $k$  crece y el intervalo degenera a un sólo valor, 1, cuando  $k \rightarrow \infty$ .

De lo anterior se concluye que el intervalo máximo se obtiene para  $k = 1$ . En este caso la desigualdad toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\omega^2 < \omega_a^2 < \frac{5}{2}\omega^2,$$

invirtiendo la desigualdad se sigue que

$$\omega_a \sqrt{\frac{2}{5}} < \omega < \omega_a \sqrt{2}. \quad (3.12)$$

La desigualdad (3.12) muestra que existen cotas superior e inferior para la frecuencia de operación, las cuales dependen de la estructura física del sistema, es decir, de la masa  $m_a$  y el resorte  $k_a$ . Con base en lo anterior se propone el siguiente método de diseño para el DR sin amortiguamiento (el cual denotaremos como DRNA):

1. Escoger la frecuencia deseada de oscilación  $\omega_c$  tal que la desigualdad (3.12) se satisfice.

2. Calcular 
$$h = \frac{\pi}{\omega_c}. \quad (3.13)$$

3. Calcular 
$$b = (\omega_a^2 - \omega_c^2). \quad (3.14)$$

A continuación mostraremos algunos ejemplos numéricos, ilustrando el método de diseño propuesto. Recordar que  $b = \frac{A_a}{m_a}$ , es decir los valores de ganancia  $b$  que se obtienen, no son los valores que se emplean para los ejemplos numéricos sino que los valores que se utilizan para la simulación de la respuesta en el tiempo del DRNA son los valores de  $A_a$ . Se considera  $m_a = 0.1$  kg y  $k_a = 10$  N/m. Entonces la frecuencia natural es  $\omega_a = 10$  rad/s y la desigualdad (3.12) toma la forma

$$6.3246 < \omega_c < 14.1421.$$

Escogiendo  $\omega_c = 9.9$  rad/s, el cual esta en el rango permitido, se obtiene un valor de  $h = 317.3$  ms y  $A_a = 0.199$  N/m. En la Fig.3.4 se muestra el punto correspondiente de  $\omega_c$  la cual se ubica en el espacio particionado  $(b, \omega_a^2)$  y en la Fig.3.5 se grafica la respuesta en el tiempo del DRNA. Como se esperaba la respuesta en el tiempo es oscilatoria.

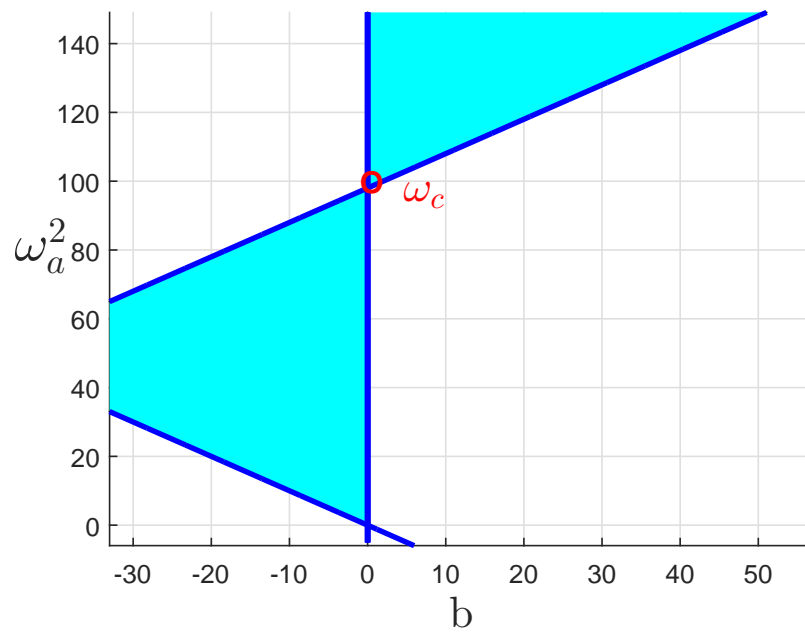


Fig. 3.4: Región de estabilidad para  $h = 317.3$  ms, donde se muestra la frecuencia  $\omega_c = 9.9$  rad/s.

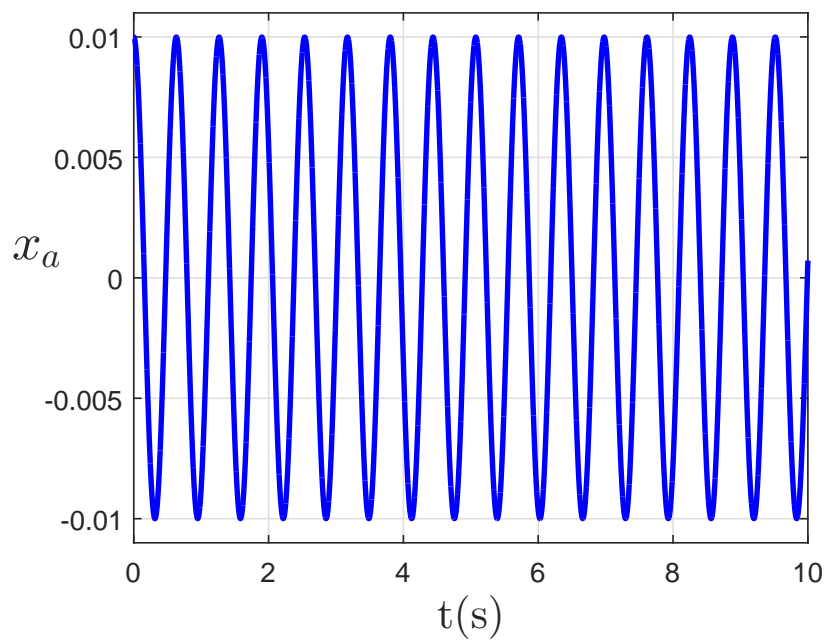


Fig. 3.5: Respuesta en el tiempo del DRNA para  $\omega_c = 9.9$  rad/s y condiciones iniciales  $x(0) = 0.01$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Como se ha mencionado la gran ventaja del DRNA es que se pueden escoger diferentes valores de  $\omega_c$  para las cuales el DRNA tendrá una respuesta oscilatoria. Consideremos ahora la frecuencia  $\omega_c = 8$  rad/s, el valor de retardo obtenido es de  $h = 392.7$  ms y una ganancia  $A_a = 3.6$  N/m. En la Fig.3.6 se muestra el punto de esta frecuencia deseada en el espacio de parámetros  $(b, \omega_a^2)$  y en la Fig.3.7 se muestra la respuesta en el tiempo del DRNA para la frecuencia  $\omega = 8$  rad/s. Una vez más el comportamiento del DRNA es oscilatorio.

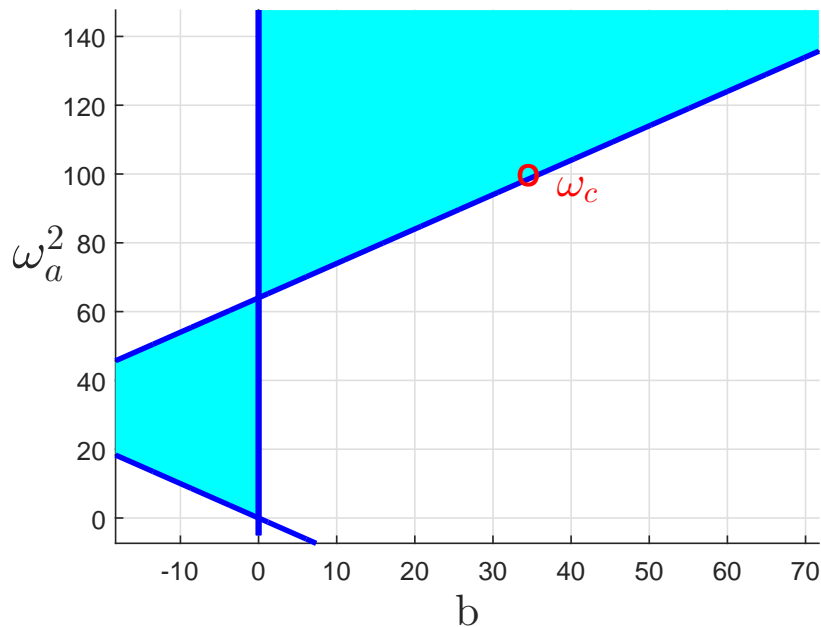


Fig. 3.6: Región de estabilidad para  $h = 392.7$  ms, donde se muestra la frecuencia  $\omega_c = 8$  rad/s.

Escogiendo la frecuencia  $\omega_r = 5$  rad/s la cual no está en el rango permitido. Los valores obtenidos por el método son,  $h = 628.3$  ms y  $A_a = 7.5$  N/m. En la Fig.3.8 se muestra el punto correspondiente a esta frecuencia en el espacio de parámetros  $(b, \omega_a^2)$ , el punto está en la zona inestable del espacio de parámetros y en la Fig.3.9 se grafica la respuesta en el tiempo del DRNA, es evidente que la respuesta es inestable.



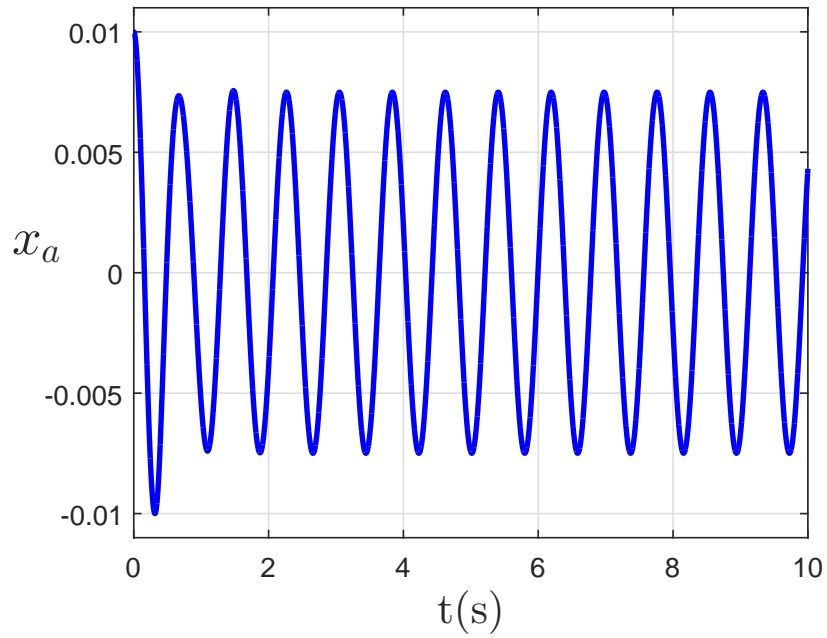


Fig. 3.7: Respuesta en el tiempo del DRNA para  $\omega_c = 8$  rad/s y condiciones iniciales  $x(0) = 0.01, \dot{x}(0) = 0$ .

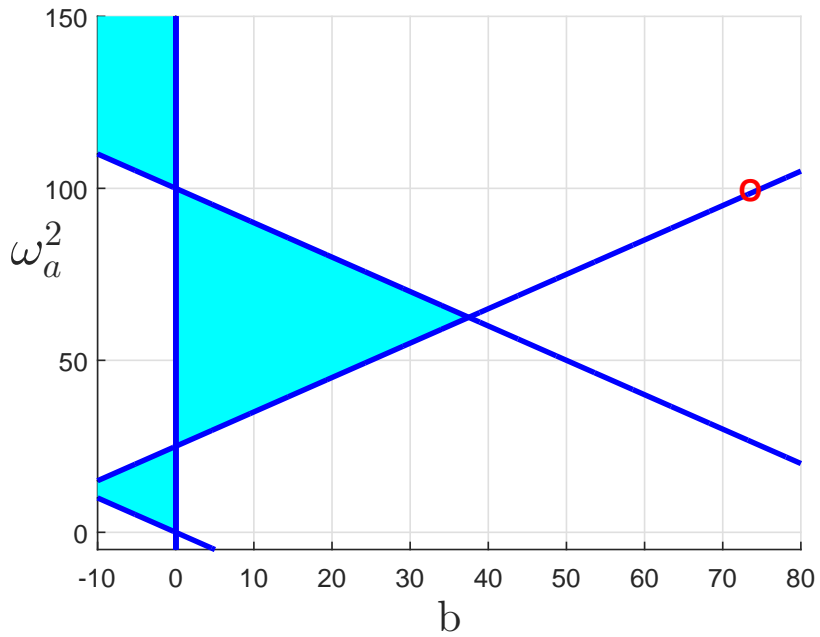


Fig. 3.8: Región de estabilidad para  $h = 628.3$  ms, donde se muestra la frecuencia  $\omega_c = 5$  rad/s.

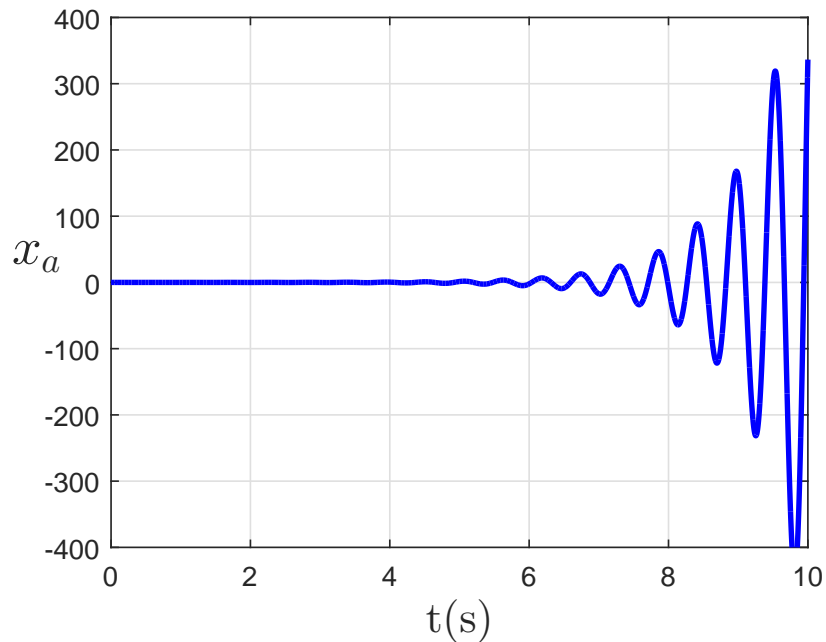


Fig. 3.9: Respuesta en el tiempo del DRNA para  $\omega_c = 5$  rad/s y condiciones iniciales  $x(0) = 0.01$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

### 3.3. Resumen de capítulo

En este capítulo se presentó el análisis de estabilidad del cuasipolinomio característico asociado a la Fig.3.1, en la cual no se considera amortiguamiento. Además se presentó la región de estabilidad de dicho sistema. También se mostró un análisis para el método de diseño del DRNA y se mostraron simulaciones de este método. Como conclusión se tiene que dado el valor de  $m_a$  y  $k_a$  se obtiene la frecuencia natural  $\omega_a$  del absorbedor y por la desigualdad (3.12) se obtiene el rango de operación de  $\omega_c$ . Los resultados obtenidos muestran un correcto funcionamiento del DRNA, sin embargo, en un sistema mecánico la suposición de considerar amortiguamiento nulo no siempre es conveniente, bajo este escenario en el siguiente capítulo se discute el comportamiento del sistema considerando amortiguamiento.

## Capítulo 4

# Diseño del DR con Amortiguamiento

En general, el amortiguamiento se encuentra en los sistemas mecánicos, si el amortiguamiento es suficientemente pequeño no afecta de manera significativa al sistema físico y puede considerarse nulo. El diseño del DR presentado en el Capítulo 4 para el análisis considera el amortiguamiento nulo, sin embargo esta consideración puede ocasionar que a la hora de implementarlo (acoplarlo) a un sistema primario no lo proteja idoneamente debido al amortiguamiento existente en el absorbedor. En este capítulo se presentan los resultados de análisis de estabilidad de un DR considerando amortiguamiento, también se presenta un método de diseño para el DR. Por otro lado, se menciona brevemente la estructura del sistema primario acoplado a un DR.

Consideremos la estructura mostrada en la Fig.4.1 de un grado de libertad, en la cual ya está representado el amortiguamiento y tiene una retroalimentación de fuerza adicional  $A_a x_a(t - h)$ , donde  $A_a$  es la ganancia de retroalimentación y  $h$  es el retardo de tiempo aplicado al desplazamiento  $x_a$ . Si  $x_a$  denota el desplazamiento de la masa  $m_a$  de su posición de equilibrio, la ecuación de movimiento del sistema de la Fig.4.1 es

$$m_a \ddot{x}_a(t) + c_a \dot{x}_a + k_a x(t) + A_a x_a(t - h) = 0 \quad (4.1)$$

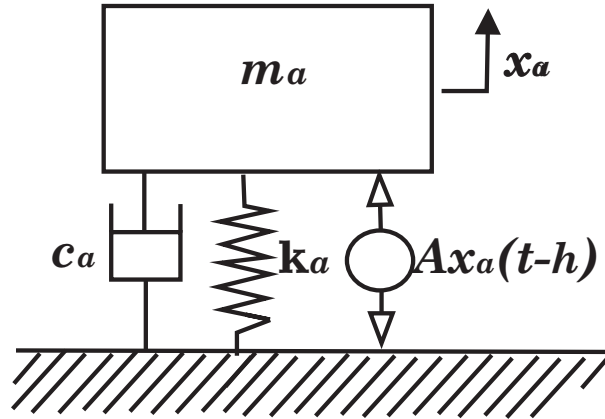


Fig. 4.1: Resonador Retardado con amortiguamiento.

Reescribamos la ecuación (4.1) como

$$\ddot{x}_a(t) + 2\zeta\omega_a \dot{x}_a + \omega_a^2 x(t) + bx_a(t-h) = 0, \quad (4.2)$$

donde  $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$  es la frecuencia natural,  $\zeta = \frac{c_a}{2m_a\omega_a}$  es el factor de amortiguamiento y  $b = \frac{A_a}{m_a}$  es la ganancia de retroalimentación.

## 4.1. Análisis de Estabilidad

El cuasipolinomio característico asociado al sistema (4.2) es

$$g(s) = s^2 + 2\zeta\omega_a s + \omega_a^2 + be^{-hs}, \quad (4.3)$$

Para el análisis de estabilidad es conveniente considerar el siguiente cuasipolinomio

$$f(s) = s^2 + cas + a^2 + be^{-hs}, \quad (4.4)$$

donde  $a, c \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$  y  $h > 0$ . El cuasipolinomio (4.3) es un caso particular del cuasipolinomio (4.4) cuando  $a^2 = \omega_a^2$  y  $c = 2\zeta$

El siguiente Lema tendrá un papel clave en el resultado de estabilidad.

**Lema 4.1.1.** Dado  $h > 0$ ,  $c > 0$  y  $\omega \geq 0$  considerar las siguientes funciones:

$$g_1(\omega, c) = n(\omega, c) - m(\omega, c), \quad g_2(\omega, c) = n(\omega, c) + m(\omega, c), \quad (4.5)$$

donde

$$n(\omega, c) = \sqrt{\frac{4}{c^2} + \left(1 - \frac{4}{c^2}\right) \cos^2(\omega h)}, \quad m(\omega, c) = \left(1 - \frac{4}{c^2}\right) \cos(\omega h),$$

Para  $k = 0, 1, \dots$ , las funciones  $g_1(\omega, c)$  y  $g_2(\omega, c)$  tienen las siguientes propiedades:

1. Si  $c \geq \sqrt{2}$  entonces.

- a)  $g_1(\omega, c) > 0, \forall \omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+1)\pi}{h}\right)$ ,
- b)  $g_2(\omega, c) > 0, \forall \omega \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$ .

2. Si  $c < \sqrt{2}$  entonces.

- a) Existe  $\omega_k^* = \omega_0 + 2k\pi \in \left(\frac{(4k+1)\pi}{2h}, \frac{(2k+1)\pi}{h}\right)$  tal que  $g_1(\omega_k^*, c) = 0$  y

$$\begin{aligned} g_1(\omega, c) &> 0, \omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \omega_k^*\right), \\ g_1(\omega, c) &< 0, \omega \in \left(\omega_k^*, \frac{(2k+1)\pi}{h}\right). \end{aligned}$$

- b) Existe  $\bar{\omega}_k = \omega_0 + k\pi \in \left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$  tal que  $g_2(\bar{\omega}_k, c) = 0$  y

$$\begin{aligned} g_2(\omega, c) &> 0, \omega \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \bar{\omega}_k\right), \\ g_2(\omega, c) &< 0, \omega \in \left(\bar{\omega}_k, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right). \end{aligned}$$

Aquí

$$\omega_0 = \frac{1}{h} \cos^{-1} \left( -\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{c^2} - 1}} \right). \quad (4.6)$$

*Demostración.* Obsérvese que debido a la periodicidad de  $\cos(\omega h)$  es suficiente probar el resultado sólo para  $k = 0$ , es decir, cuando  $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$  para  $g_1(\omega, c)$  y cuando  $\omega \in (\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h})$  para  $g_2(\omega, c)$ . Además, note que como para cualquier  $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$  se cumple que  $\cos(\omega + \frac{\pi}{h}) = -\cos(\omega)$  entonces

$$m\left(\omega + \frac{\pi}{h}, c\right) = -m(\omega, c) \text{ and } n(\omega, c) = n\left(\omega + \frac{\pi}{h}, c\right),$$

y, por tanto,

$$g_2\left(\omega + \frac{\pi}{h}, c\right) = g_1(\omega, c).$$

Así, los resultados para la función  $g_2(\omega, c)$  cuando  $\omega \in (\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h})$  se obtienen directamente de los resultados para  $g_1(\omega, c)$  cuando  $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$ .

Basado en esto, ahora nos concentraremos en demostrar los resultados para determinar el signo de  $g_1(\omega, c)$  cuando  $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$ . En primer lugar note que

$$n(\omega, c) > 0, \forall \omega \geq 0, c > 0,$$

mientras que el signo de  $m(\omega, c)$  está determinado por los signos de los factores  $1 - \frac{4}{c^2}$  (dependiendo del valor de  $c$ ) y  $\cos(\omega h)$  (dependiendo del valor de  $\omega$ ).

Ahora, con el fin de determinar el signo de  $g_1(\omega, c)$  para  $c \neq 2$  y  $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$  consideremos los siguientes casos:

1.  $c \geq 2 \iff 1 - \frac{4}{c^2} > 0$ .

Evidentemente cuando  $c = 2$  tenemos  $n(\omega, 2) = 1$  y  $m(\omega, 2) = 0$  lo que implica que  $g_1(\omega, 2) = 1 > 0$ . Ahora supongamos  $c > 2$  y consideremos los siguientes dos casos:

- 1a)  $\omega \in [\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h})$ . En este caso  $\cos(\omega h) \leq 0$  y, por tanto,  $m(\omega, c) \leq 0$ . Se sigue que  $g_1(\omega, c) > 0, \omega \in [\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h})$ .

1b)  $\omega \in (0, \frac{\pi}{2h})$ . En este caso  $\cos(\omega h) > 0$  y, por tanto,  $m(\omega, c) > 0$ . Tenemos

$$\frac{n(\omega, c)}{m(\omega, c)} = \sqrt{\frac{\frac{4}{c^2}}{(1 - \frac{4}{c^2})^2 \cos^2(\omega h)} + \frac{1}{1 - \frac{4}{c^2}}}.$$

El primer término de la suma en la raíz cuadrada es estrictamente positivo y

$\frac{1}{1 - \frac{4}{c^2}} > 1$  cuando  $c > 2$ . Por lo tanto, se cumple que

$$\frac{n(\omega, c)}{m(\omega, c)} > 1, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2h}\right),$$

lo cual implica que  $g_1(\omega, c) > 0, \omega \in (0, \frac{\pi}{2h})$ .

Concluimos que si  $c \geq 2$  entonces

$$g_1(\omega, c) > 0, \forall \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right).$$

2.  $c < 2 \iff 1 - \frac{4}{c^2} < 0$ .

2a)  $\omega \in (0, \frac{\pi}{2h}]$ . En este caso  $\cos(\omega h) \geq 0$  y  $m(\omega, c) \leq 0$ . Se sigue que  $g_1(\omega, c) > 0, \forall \omega \in (0, \frac{\pi}{2h}]$ .

2b)  $\omega \in (\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h})$ . En este caso  $-1 \leq \cos(\omega h) < 0$  y, por lo tanto,

$$\frac{2}{c} > n(\omega, c) \geq 1 \text{ y } -\left(1 - \frac{4}{c^2}\right) \geq m(\omega, c) > 0.$$

Claramente, si  $c \geq \sqrt{2}$  entonces  $1 \geq -\left(1 - \frac{4}{c^2}\right)$  y  $n(\omega, c) > m(\omega, c)$ . Por lo tanto, si  $\sqrt{2} \leq c < 2$  entonces

$$g_1(\omega, c) > 0, \forall \omega \in \left(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right).$$

Por otra parte, si  $c < \sqrt{2}$  entonces  $1 < -\left(1 - \frac{4}{c^2}\right)$  y, por lo tanto, existe al menos un  $\omega_0 \in (\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h})$  tal que  $g_1(\omega_0, c) = 0$ , y

$$g_1(\omega, c) > 0, \omega \in \left(\frac{\pi}{2h}, \omega_0\right), \quad g_1(\omega, c) < 0, \omega \in \left(\omega_0, \frac{\pi}{h}\right).$$

Con el fin de demostrar que para  $c < \sqrt{2}$  existe una única  $\omega_0 \in \left(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right)$  calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial n(\omega, c)}{\partial \omega} &= - \left( \frac{h}{\sqrt{\frac{4}{c^2} + \left(1 - \frac{4}{c^2}\right) \cos^2(\omega h)}} \right) \left(1 - \frac{4}{c^2}\right) \cos(\omega h) \sin(\omega h), \\ \frac{\partial m(\omega, c)}{\partial \omega} &= - \left(1 - \frac{4}{c^2}\right) h \sin(\omega h).\end{aligned}$$

Debido a que  $\cos(\omega h) < 0 < \sin(\omega h)$  para  $\omega \in \left(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right)$  entonces se sigue que

$$\frac{\partial n(\omega, c)}{\partial \omega} < 0 < \frac{\partial m(\omega, c)}{\partial \omega}, \forall \omega \in \left(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right).$$

Por lo tanto,  $n(\omega, c)$  es una función estrictamente decreciente y  $m(\omega, c)$  es una función estrictamente creciente cuando  $\omega$  varia en el intervalo  $\left(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right)$ .

De este hecho y la continuidad de las funciones  $n(\omega, c)$  y  $m(\omega, c)$  se sigue que si  $c < \sqrt{2}$  entonces existe una única  $\omega_0 \in \left(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right)$  satisfaciendo  $g_1(\omega_0, c) = 0$ , y

$$g_1(\omega, c) > 0, \omega \in \left(\frac{\pi}{2h}, \omega_0\right), \quad g_1(\omega, c) < 0, \omega \in \left(\omega_0, \frac{\pi}{h}\right).$$

De 2a) y 2b) concluimos que

- 1) Si  $\sqrt{2} < c < 2$  entonces  $g_1(\omega, c) > 0, \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right)$ ,
- 2) Si  $c < \sqrt{2}$  entonces  $g_1(\omega, c) > 0, \omega \in [0, \omega_0)$ ,  $g_1(\omega_0, c) = 0$  y  $g_1(\omega, c) < 0, \omega \in \left(\omega_0, \frac{\pi}{h}\right)$ .

Finalmente, cálculos sencillos muestran que la única  $\omega_0 \in \left(\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{h}\right)$  satisfaciendo  $g_1(\omega_0, c) = 0$  se da explícitamente por (4.6).

De todo el análisis anterior se llega a la conclusión del Lema. □



**Proposición 4.1.1.**

i) Dada cualquier  $h > 0$  y  $c \geq \sqrt{2}$ , todos los ceros de  $f(s)$  tienen parte real negativa si y sólo si  $(b, a^2)$  pertenece a la región  $\Phi$ , ver Fig.4.2, cuya frontera en el espacio de parámetros  $(b, a^2)$  está dada por

$$\partial\Phi = \left\{ (b(\omega), a^2(\omega)) : \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right) \right\} \cup \{ (b, a^2) : a^2 = -b \}. \quad (4.7)$$

ii) Dada cualquier  $h > 0$  y  $0 < c < \sqrt{2}$ , todos los ceros de  $f(s)$  tienen parte real negativa si y sólo si  $(b, a^2)$  pertenece a la región  $\Omega$ , ver Fig.4.3, cuya frontera en el espacio de parámetros  $(b, a^2)$  está dada por

$$\begin{aligned} \partial\Omega = & \{ (b(\omega), a^2(\omega)) : \omega \in [\omega_2^k, \omega_1^{k+2}] , k = 0, 1, \dots \} \\ & \cup \{ (b(\omega), a^2(\omega)) : \omega \in [0, \omega_1^0] \} \cup \{ (b(\omega), a^2(\omega)) : \omega \in [\tilde{\omega}, \omega_1^1] \} \\ & \cup \{ (b, a^2) : a^2 = -b, b \in (b(\tilde{\omega}), 0) \}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $b(\omega)$  y  $a^2(\omega)$  están dadas por

$$b(\omega) = -\frac{c^2\omega^2 \cos(\omega h)}{2 \operatorname{sen}^2(\omega h)} + \frac{c\omega}{2 \operatorname{sen}(\omega h)} \sqrt{\frac{c^2\omega^2 \cos^2(\omega h) + 4\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega h)}{\operatorname{sen}^2(\omega h)}}, \quad (4.9)$$

$$a^2(\omega) = \omega^2 + \frac{c^2\omega^2 \cos^2(\omega h)}{2 \operatorname{sen}^2(\omega h)} - \frac{c\omega \cos(\omega h)}{2 \operatorname{sen}(\omega h)} \sqrt{\frac{c^2\omega^2 \cos^2(\omega h) + 4\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega h)}{\operatorname{sen}^2(\omega h)}} \quad (4.10)$$

$\omega_1^k$  y  $\omega_2^k, k = 0, 1, 2, \dots$ , son las soluciones correspondientes de la ecuación

$$\| (b(\omega_1^k), a^2(\omega_1^k)) \| = \| (b(\omega_2^k), a^2(\omega_2^k)) \|, \quad (4.11)$$

para

$$\omega_1^k \in \left( k \frac{\pi}{h}, (k+1) \frac{\pi}{h} \right) \text{ y } \omega_2^k \in \left( (k+2) \frac{\pi}{h}, (k+3) \frac{\pi}{h} \right), \quad (4.12)$$

mientras que  $\tilde{\omega}$  es la solución de la ecuación  $a^2(\omega) = b(\omega)$  para  $\omega \in \left( \frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h} \right)$ .

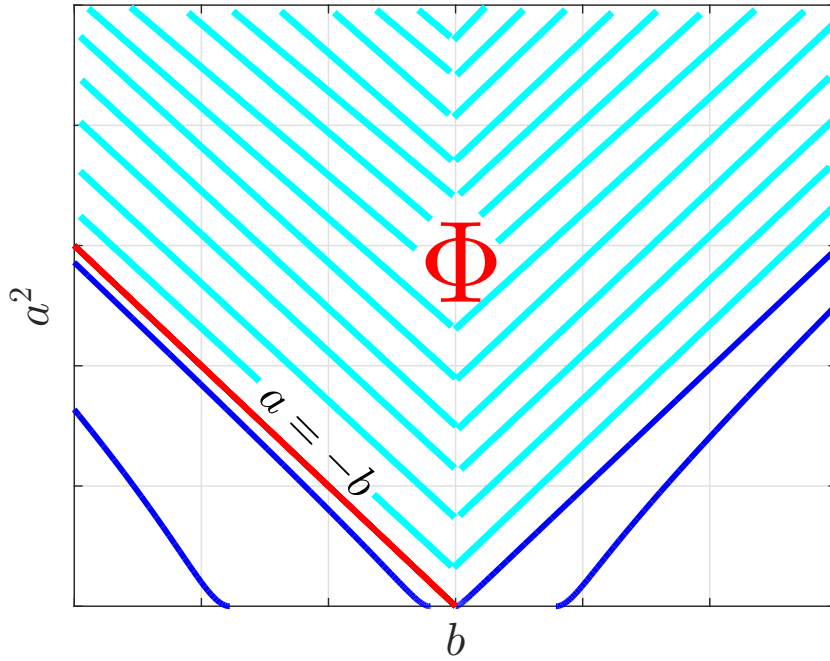


Fig. 4.2: Región de estabilidad para el sistema (4.2) con  $c \geq \sqrt{2}$ .

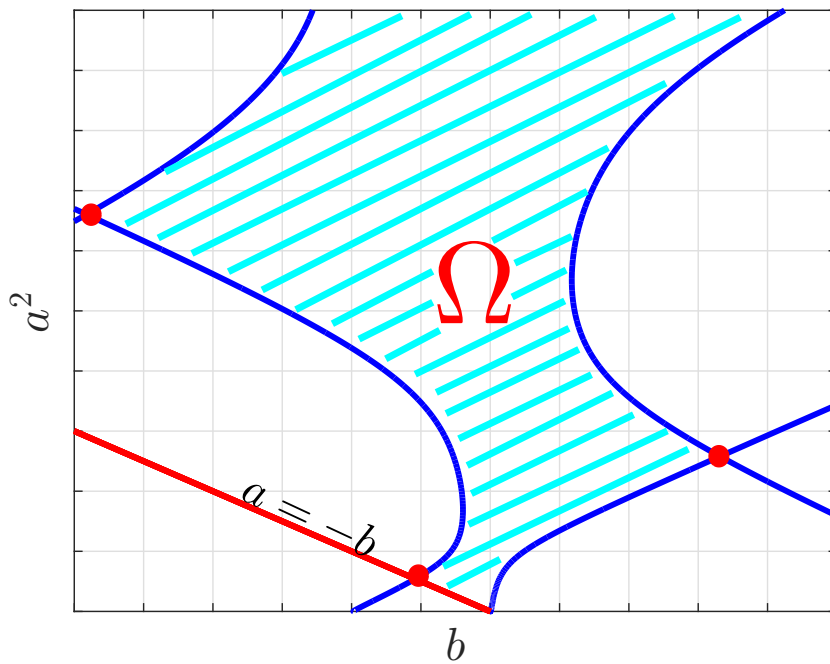


Fig. 4.3: Región de estabilidad para el sistema (4.2) con  $c < \sqrt{2}$ .

## CAPÍTULO 4. DISEÑO DEL DR CON AMORTIGUAMIENTO

---

*Demostración.* Primero, observese que  $s = 0$  es un cero de  $f(s)$  si y sólo si  $a^2 + b = 0$ .

Ahora, supongamos que  $s = i\omega, \omega \neq 0$ , es un cero de  $f(s)$ . Entonces

$$f(i\omega) = -\omega^2 + aci\omega + a^2 + be^{-hi\omega} = 0.$$

Usando la identidad de Euler  $e^{-hi\omega} = \cos(\omega h) - i \operatorname{sen}(\omega h)$  y separando la parte real e imaginaria de la ecuación anterior, se obtiene

$$-\omega^2 + a^2 + b \cos(\omega h) = 0, \quad (4.13)$$

$$ca\omega - b \operatorname{sen}(\omega h) = 0. \quad (4.14)$$

De (4.14) tenemos que

$$b = \frac{c\omega}{\operatorname{sen}(\omega h)} a. \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.13) se obtiene la ecuación cuadrática

$$a^2 + a\gamma - \omega^2 = 0, \quad (4.16)$$

donde  $\gamma = \frac{c\omega \cos(\omega h)}{\operatorname{sen}(\omega h)}$ . Para cualquier valor de  $\gamma$ , la ecuación cuadrática (4.16) siempre tiene una raíz real positiva y una raíz real negativa. La raíz positiva está dada por

$$a = \frac{1}{2} \left( -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\omega^2} \right). \quad (4.17)$$

Sustituyendo (4.17) en (4.15) y elevando al cuadrado ambos lados de (4.17) llegamos a las expresiones (4.9) y (4.10), respectivamente.

La parametrización (4.9)-(4.10) define un número contable de curvas en el espacio de parámetros  $(b, a^2)$ , donde cada una de las curvas se obtiene variando  $\omega$  en un intervalo  $(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Tenemos las siguientes propiedades para las curvas que determinan la parametrización (4.9)-(4.10):

Para cualquier  $k$  par

$$\lim_{\omega \rightarrow k\frac{\pi}{h}+} (b(\omega), a^2(\omega)) = \left( k^2 \frac{\pi^2}{h^2}, 0 \right), \quad (4.18)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow (k+1)\frac{\pi}{h}-} (b(\omega), a^2(\omega)) = (+\infty, +\infty), \quad (4.19)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow k\frac{\pi}{h}+} a^2(\omega) = - \lim_{\omega \rightarrow k\frac{\pi}{h}+} b(\omega) \cos(\omega h) + \left( k \frac{\pi}{h} \right)^2. \quad (4.20)$$

mientras que para cualquier  $k$  impar

$$\lim_{\omega \rightarrow k\frac{\pi}{h}+} (b(\omega), a^2(\omega)) = \left( -k^2 \frac{\pi^2}{h^2}, 0 \right), \quad (4.21)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow (k+1)\frac{\pi}{h}-} (b(\omega), a^2(\omega)) = (-\infty, +\infty). \quad (4.22)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow k\frac{\pi}{h}+} a^2(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow k\frac{\pi}{h}+} b(\omega) + \left( k \frac{\pi}{h} \right)^2. \quad (4.23)$$

Con el objetivo de caracterizar mejor las curvas, definamos

$$\begin{aligned} p(\omega) &\triangleq \frac{a^2(\omega)}{b(\omega)} = -\frac{1}{2} \cos(\omega h) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\omega h) \sqrt{\frac{c^2 \cos^2(\omega h) + 4 \operatorname{sen}^2(\omega h)}{c^2 \operatorname{sen}^2(\omega h)}} \\ &= -\frac{1}{2} \cos(\omega h) + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(\omega h)}{|\operatorname{sen}(\omega h)|} \sqrt{\frac{4}{c^2} + \left( 1 - \frac{4}{c^2} \right) \cos^2(\omega h)}. \end{aligned}$$

La función  $p(\omega)$  determina la pendiente del punto  $(b(\omega), a^2(\omega))$  para cualquier  $\omega$  dada. Ahora, para cualquier  $k$  par, tenemos que  $\operatorname{sen}(\omega h) > 0, \forall \omega \in (k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$  y, por lo tanto,

$$p(\omega) = -\frac{1}{2} \cos(\omega h) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{c^2} + \left( 1 - \frac{4}{c^2} \right) \cos^2(\omega h)}. \quad (4.24)$$

De (4.24) se obtiene

$$p'(\omega) = r(\omega, c) g_1(\omega, c), \quad (4.25)$$

donde  $g_1(\omega, c)$  esta dado por (4.5) en el Lema 4.1.1 y

$$r(\omega, c) = \frac{h \operatorname{sen}(\omega h)}{2\sqrt{\cos^2(\omega h) + \frac{4}{c^2} \operatorname{sen}^2(\omega h)}}.$$

Por otro lado, para cualquier  $k$  impar, tenemos que  $\operatorname{sen}(\omega h) < 0, \forall \omega \in (k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$ , y, por lo tanto,

$$p(\omega) = -\frac{1}{2} \cos(\omega h) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{c^2} + \left(1 - \frac{4}{c^2}\right) \cos^2(\omega h)}, \quad (4.26)$$

$$p'(\omega) = r(\omega, c) g_2(\omega, c), \quad (4.27)$$

donde  $g_2(\omega, c)$  esta dado por (4.5) en el Lema 4.1.1.

Con estas propiedades para las curvas, determinadas por la parametrización (4.9)-(4.10), mostraremos *i*) y *ii*) del enunciado de la proposición de un modo separado.

**Demostración de i)**  $c \geq \sqrt{2}$ .

Consideremos el caso de  $k$  par. En este caso para toda  $\omega \in (k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$  tenemos que  $r(\omega, c) > 0$  y el Lema 4.1.1 implica que  $g_1(\omega, c) > 0$ . De (4.25) se sigue que  $p'(\omega) > 0, \forall \omega \in (k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$ . Esto implica que la pendiente de las curvas definidas por la parametrización (4.9)-(4.10) es función estrictamente creciente de  $\omega$  en el intervalo  $(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$ .

Considere cualesquiera dos curvas consecutivas tomando  $k$  par, es decir, las curvas correspondientes a  $k$  y  $k+2$ . Las propiedades (4.18)-(4.20) junto con el comportamiento estrictamente creciente de las pendientes de las curvas implica que no se intersectan.

Ahora, consideremos el caso  $k$  impar. En este caso para toda  $\omega \in (k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$  tenemos que  $r(\omega, c) < 0$  y el Lema 4.1.1 implica que  $g_2(\omega, c) > 0$ . De (4.27) se sigue que  $p'(\omega) < 0, \forall \omega \in (k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$ . Esto implica que la pendiente de

las curvas definidas por la parametrización (4.9)-(4.10) es función estrictamente creciente de  $\omega$  en el intervalo  $(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$ .

Una vez más, cuando consideramos cualesquiera dos curvas consecutivas para  $k$  impar, es decir, las curvas correspondientes a  $k$  y  $k+2$ , las propiedades (4.21)-(4.23) junto con el comportamiento estrictamente decreciente de la pendiente de las curvas implica que no se intersectan. En particular, las curvas no intersectan la recta  $a^2 + b = 0$ .

De este análisis, tenemos que las curvas y la recta  $a^2 + b = 0$  particionan el espacio  $(b, a^2)$  en un conjunto infinito (contable) de regiones abiertas conectadas  $\Phi_j, j = 0, 1, \dots$ , ver Fig.4.4.

Cada una de estas regiones  $\Phi_j$  tienen la propiedad que para cualquier  $(b, a^2) \in \Phi_j$ , la función  $f(s)$  tiene el mismo número de ceros con parte real positiva. Esta propiedad sigue de la continuidad de los ceros de  $f(s)$  con respecto a  $b$  y  $a^2$ , y que con el fin de aumentar (o disminuir) el número de ceros con parte real positiva, las curvas o la recta  $a^2 + b = 0$  deben ser intersectadas por cualquier camino continuo que va de  $(b_0, a_0^2) \in \Phi_j$  a  $(b_1, a_1^2) \in \Phi_{j+1}$ .

Usando el criterio de estabilidad de Mikhailov se demuestra que para todo  $(b, a^2)$  dentro de la región abierta  $\Phi = \Phi_0$ , acotada por la curva determinada por la parametrización (4.9)-(4.10) cuando  $\omega$  varía en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{h})$  y la recta  $a^2 + b = 0$  definida por (4.7), la función  $f(s)$  no tiene ceros con parte real positiva.

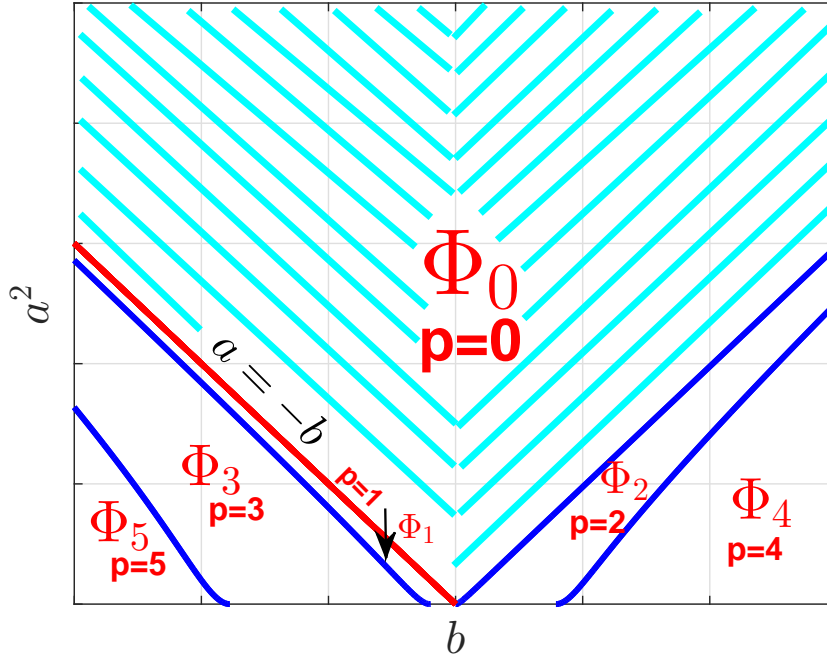


Fig. 4.4: Partición del espacio  $(b, a^2)$  de (4.4) con  $c \geq \sqrt{2}$ .

**Demostración de ii)**  $0 < c < \sqrt{2}$ .

Consideremos el caso de  $k$  par. En este caso tenemos que  $r(\omega, c) > 0, \forall \omega \in (k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$ . Del Lema 4.1.1 tenemos que existe  $\omega_k^* = \omega_0 + k\pi \in ((2k+1)\frac{\pi}{2h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$  tal que  $g_1(\omega_k^*, c) = 0, g_1(\omega, c) > 0, \omega \in (k\frac{\pi}{h}, \omega_k^*)$ , y  $g_1(\omega, c) < 0, \omega \in (\omega_k^*, (k+1)\frac{\pi}{h})$ . Se sigue de (4.25) que  $p'(\omega) > 0, \omega \in (k\frac{\pi}{h}, \omega_k^*)$ , es decir, la pendiente de la curva es estrictamente creciente cuando varía  $\omega$  en el intervalo  $(k\frac{\pi}{h}, \omega_k^*)$  y  $p'(\omega) < 0, \omega \in (\omega_k^*, (k+1)\frac{\pi}{h})$ , es decir, la pendiente de la curva es estrictamente decreciente cuando  $\omega$  varía en el intervalo  $(\omega_k^*, (k+1)\frac{\pi}{h})$ .

Considere dos curvas consecutivas para  $k$  par, es decir, las curvas correspondientes a  $k$  y  $k+2$ . Las propiedades (4.18)-(4.20) junto con el comportamiento primero creciente y después decreciente de las pendientes de las curvas implica que ellas se

intersectan.

Ahora, consideremos el caso de  $k$  impar. En este caso tenemos que  $r(\omega, c) < 0, \forall \omega \in (k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$ . Del Lema 4.1.1 tenemos que existe  $\bar{\omega}_k = \omega_0 + k\pi \in ((2k+1)\frac{\pi}{2h}, (k+1)\frac{\pi}{h})$  tal que  $g_2(\bar{\omega}_k, c) = 0, g_2(\omega, c) > 0, \omega \in (k\frac{\pi}{h}, \bar{\omega}_k)$  y  $g_2(\omega, c) < 0, \omega \in (\bar{\omega}_k, (k+1)\frac{\pi}{h})$ . Se sigue de (4.27) que  $p'(\omega) < 0, \omega \in (k\frac{\pi}{h}, \bar{\omega}_k)$ , es decir, la pendiente de la curva es estrictamente decreciente cuando  $\omega$  varia en el intervalo  $(k\frac{\pi}{h}, \bar{\omega}_k)$  y  $p'(\omega) > 0, \omega \in (\bar{\omega}_k, (k+1)\frac{\pi}{h})$ , es decir, la pendiente de la curva es estrictamente creciente cuando  $\omega$  varia en el intervalo  $(\bar{\omega}_k, (k+1)\frac{\pi}{h})$ .

Considere dos curvas consecutivas para  $k$  impar, es decir, las curvas correspondientes a  $k$  y  $k+2$ . Las propiedades (4.18)-(4.20) junto con el comportamiento primero creciente y después decreciente de las pendientes de las curvas implica que ellas se intersectan. En particular, las curvas intersectan la recta  $a^2 + b = 0$ .

De este análisis, tenemos que las curvas y la recta  $a^2 + b = 0$  particionan el espacio  $(b, a^2)$  en un conjunto infinito (contable) de regiones abiertas conectadas  $\Omega_j, j = 0, 1, \dots$ , ver Fig.4.5. Similarmente, cada una de estas regiones  $\Omega_j$  tienen la propiedad que para cualquier  $(b, a^2) \in \Omega_j$ , la función  $f(s)$  tiene el mismo número de ceros con parte real positiva.

Las intersecciones de la curva son determinadas por  $\omega_1^k, \omega_2^k, k = 0, 1, 2, \dots$ , que son las soluciones de la ecuación (4.11) en cada intervalo definido por (4.12). Tenemos las siguientes relaciones de orden en las soluciones:

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &< \omega_2^0 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots, \\ \omega_1^1 &< \omega_2^1 < \omega_1^3 < \omega_2^3 < \dots \end{aligned}$$



CAPÍTULO 4. DISEÑO DEL DR CON AMORTIGUAMIENTO

Para  $k$  impar, las intersecciones de las correspondientes curvas con la recta  $a^2 + b = 0$  pueden determinarse por la solución de la ecuación

$$a^2(\omega) + b(\omega) = 0, \omega \in \left(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h}\right).$$

Sea  $\tilde{\omega}_k \in \left(k\frac{\pi}{h}, (k+1)\frac{\pi}{h}\right)$  para  $k$  impar la correspondiente solución para la ecuación anterior. Entonces, los puntos de intersección de la curva con la recta  $a^2 + b = 0$  son determinados por  $(b(\tilde{\omega}_k), a^2(\tilde{\omega}_k))$ .

Usando el criterio de estabilidad de Mikhailov se demuestra que para todo  $(b, a^2)$  dentro de la región abierta  $\Omega = \Omega_0$ , definida por (4.8), la función  $f(s)$  no tienen ceros con parte real positiva.

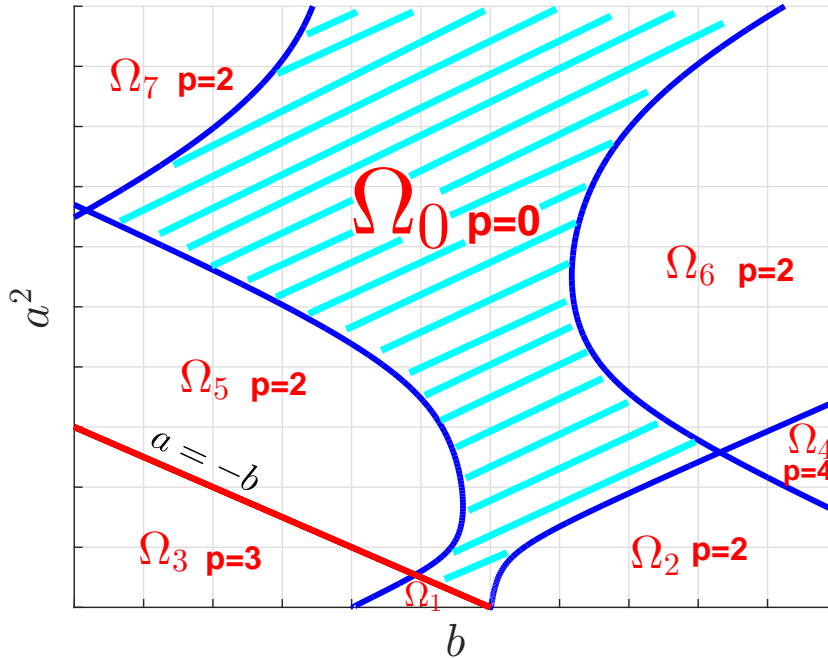


Fig. 4.5: Partición del espacio  $(b, a^2)$  de (4.4) con  $c < \sqrt{2}$ .

□

## 4.2. Diseño del DR

Como se ha mencionado a lo largo de este trabajo de tesis, el objetivo del DR es acoplarlo a un sistema primario para protegerlo ante perturbaciones. De acuerdo a la selección apropiada del retardo, así como de la ganancia de retroalimentación convertirán al DR en un resonador a una determinada frecuencia  $\omega_c$ . Dado el análisis anterior, se tienen dos regiones de estabilidad dependiendo del valor de  $c$ , debido a que  $c$  representa el amortiguamiento en el sistema, se decide proponer un método de diseño para el DR considerando el valor de  $c < \sqrt{2}$ , motivado de los estudios clásicos de absorbedores retardados [23]. De esta manera el método de diseño se centrará considerando la región de estabilidad de la Fig.4.5. Particularmente para el diseño se utilizará la primer curva de la frontera de la región de estabilidad, es decir, la determinada por la parametrización para  $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$ .

Del análisis de estabilidad para  $c < \sqrt{2}$  se tiene que si  $(b, a^2) \in \partial\Omega$  entonces el cuasipolinomio  $f(s)$  tiene un par de raíces imaginarias puras  $s = \pm\omega i$ , para algún  $\omega \in (\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$ , y las otras raíces se encuentran en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

Para el diseño del DR consideramos la primer curva determinando la frontera de  $\Omega$ , es decir, la curva determinada por la parametrización (4.9)-(4.10) para  $k = 0$ .

Las parametrizaciones para  $b(\omega)$  y  $a^2(\omega)$  satisfacen las ecuaciones

$$-\omega^2 + a^2(\omega) + b(\omega) \cos(\omega h) = 0, \quad (4.28)$$

$$c\omega a(\omega) - b(\omega) \sin(\omega h) = 0. \quad (4.29)$$

El problema de diseño consiste en: dado  $a \in \mathbb{R}$  y  $c < \sqrt{2}$  encontrar  $h$  y  $b$  tales que el sistema tiene un comportamiento DR.

De la ecuación (4.28) se tiene que

$$b(\omega) = \frac{\omega^2 - a^2}{\cos(\omega h)},$$

y de (4.29) se tiene que

$$b(\omega) = \frac{c\omega a}{\text{sen}(\omega h)}.$$

Entonces se tiene que

$$\frac{\omega^2 - a^2}{\cos(\omega h)} = \frac{c\omega a}{\text{sen}(\omega h)}$$

o equivalentemente

$$\tan(\omega h) = \frac{c\omega a}{\omega^2 - a^2}. \quad (4.30)$$

De aquí se sigue que

$$h = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left( \frac{c\omega a}{\omega^2 - a^2} \right). \quad (4.31)$$

Así, dados  $a$ ,  $c$ , y  $\omega$  la expresión (4.31) nos permite calcular  $h$  y con este valor de  $h$  podemos calcular

$$b(\omega) = \frac{c\omega a}{\text{sen}(\omega h)}.$$

Sin embargo, observemos que  $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$  y de hecho puede existir  $\omega^* \in (0, \frac{\pi}{h})$  tal que  $\omega < \omega^*$  necesita satisfacerse para tener un comportamiento DR, es decir, marginalmente estable.

Recordemos que la existencia de  $\omega^* \in (0, \frac{\pi}{h})$  esta dada para un  $h > 0$  arbitrario pero, sin embargo, esto no necesariamente es cierto para  $h$  satisfaciendo (4.31). La frecuencia  $\omega^*$  existe si y sólo si la ecuación

$$\|b(\omega_1), a^2\|^2 = \|b(\omega_2), a^2\|^2, \quad (4.32)$$

donde tiene solución para  $\omega_1 \in (0, \frac{\pi}{h})$  y  $\omega_2 \in (\frac{2\pi}{h}, \frac{3\pi}{h})$ . Observemos que

$$\|b(\omega), a^2\|^2 = b^2(\omega) + a^4 = \left( \frac{c\omega a}{\text{sen}(\omega h)} \right)^2 + a^4. \quad (4.33)$$

Ahora, de (4.30) se sigue que

$$\text{sen}(\omega h) = \frac{c\omega a}{\sqrt{c^2\omega^2 a^2 + (\omega^2 - a^2)^2}}.$$

Utilizando esta expresión en (4.33) se obtiene

$$\|b(\omega), a^2\|^2 = \omega^4 + a^2 (c^2 - 2) \omega^2 + 2a^4.$$

Entonces la ecuación (4.32) se puede reescribir como

$$\omega_1^4 + a^2 (c^2 - 2) \omega_1^2 + 2a^4 = \omega_2^4 + a^2 (c^2 - 2) \omega_2^2 + 2a^4,$$

o equivalentemente

$$\omega_1^4 + a_2^2 (c^2 - 2) \omega_1^2 = \omega_2^4 + a_2^2 (c^2 - 2) \omega_2^2, \quad (4.34)$$

donde  $\omega_1 \in (0, \frac{\pi}{h})$  y  $\omega_2 \in (\frac{2\pi}{h}, \frac{3\pi}{h})$ .

Definamos la función

$$p(\gamma) = \gamma^2 + a^2 (c^2 - 2) \gamma.$$

Se tiene que  $p(\gamma) = 0$  si y sólo si  $\gamma = 0$  y  $\gamma = a^2(2 - c^2)$  y  $p'(\gamma) = 0$  si y sólo si  $\gamma_0 = \frac{1}{2}a^2(2 - c^2)$  y  $p(\gamma_0) = -\frac{a^4(2-c^2)^2}{4} < 0$  es un mínimo global de  $p(\gamma)$ , vease la Fig.4.6.

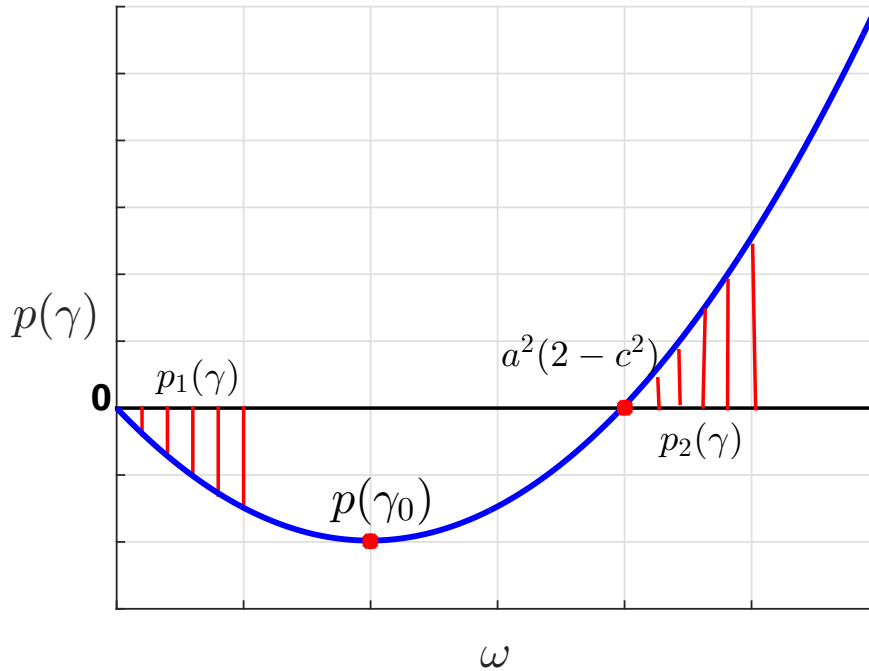


Fig. 4.6: Representación de  $f(\gamma)$  cuando no existe solución de (4.32).

El problema de encontrar solución de la ecuación (4.34) se puede entonces formular mediante la solución de

$$p(\gamma_1) = p(\gamma_2),$$

donde  $\gamma_1 \in \left(0, \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right)$  y  $\gamma_2 \in \left(\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2, \left(\frac{3\pi}{h}\right)^2\right)$ .

Es claro que si  $a^2(2 - c^2) < \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2$  entonces  $p(\gamma_1) < p(\gamma_2)$ ,  $\forall \gamma_1 \in \left(0, \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right)$ ,  $\gamma_2 \in \left(\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2, \left(\frac{3\pi}{h}\right)^2\right)$  y por lo tanto no existe solución de la ecuación (4.34) lo que implica que no existe solución de (4.32).

Se sigue que si

$$h^2 < \frac{4\pi^2}{a^2(2 - c^2)} \Leftrightarrow h < \frac{2\pi}{a\sqrt{2 - c^2}},$$

entonces no existe intersección de las curvas y en consecuencia podemos asignar una frecuencia  $\omega$  tal que  $0 < \omega < \frac{\pi}{h}$ . De aquí se sigue que dada  $\omega \in \mathbb{R}$  entonces  $h < \frac{\pi}{\omega}$ .

Combinando estas dos desigualdades para  $h$  se tiene que si  $\omega$  es tal que

$$\frac{\pi}{\omega} < \frac{2\pi}{a\sqrt{2-c^2}}, \quad (4.35)$$

entonces el comportamiento del DR es garantizado. Con  $a^2 = \omega_a^2$  y  $c = 2\zeta$ , de (4.35) se obtiene que

$$\omega > \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_a\sqrt{1-2\zeta^2} \Leftrightarrow \omega > \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_r. \quad (4.36)$$

Ahora podemos establecer el método de diseño para el DR con amortiguamiento (el cual denotaremos como DRA):

1. Escoger la frecuencia de oscilación deseada  $\omega_c$  que satisfaga la desigualdad (4.36).

2. Calcular

$$h = \frac{1}{\omega_c} \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta\omega_a\omega_c}{\omega_c^2 - \omega_a^2} \right) \quad (4.37)$$

3. Calcular

$$b = \frac{2\zeta\omega_a\omega_c}{\text{sen}(\omega_c h)} \quad (4.38)$$

A continuación mostraremos algunos ejemplos numéricos, nótese que el valor de  $b$  obtenido en el método no es el valor que se utiliza para los ejemplos numéricos, sino el valor de  $A_a = bm_a$ . Se considera  $m_a = 0.1$  kg,  $c_a = 0.1$  Ns/m y  $k_a = 10$  N/m. Entonces la frecuencia natural  $\omega_a = 10$  rad/s y  $\zeta = 0.05$ , la desigualdad (4.36) toma la siguiente forma

$$\omega_c > 7.0622. \quad (4.39)$$

Consideremos  $\omega_c = 9.9$  rad/s, el cual esta en el rango permitido, se obtiene un valor de  $h = 178.7$  ms y una ganancia  $A_a = 1.098$  N/m. En la Fig.4.7 se grafica la región de estabilidad que se genera en el espacio de parámetros  $(b, \omega_a^2)$  y en la Fig.4.8 se grafica la respuesta en el tiempo del DRA, el comportamiento del DRA es oscilatorio. Con el DRA

se pueden elegir valores de  $\omega_c$  siempre y cuando cumplan con la desigualdad (4.36) sin la necesidad de modificar la estructura física del DRA, así, consideremos una frecuencia  $\omega_c = 8$  rad/s, con esta frecuencia se obtiene un valor de  $h = 365.4$  ms y un valor de ganancia  $A_a = 3.6878$  N/m. En la Fig.4.9 se grafica la región de estabilidad y en la Fig.4.10 se grafica la respuesta en el tiempo del DRA, una vez más la respuesta en el tiempo del DRA es oscilatoria.

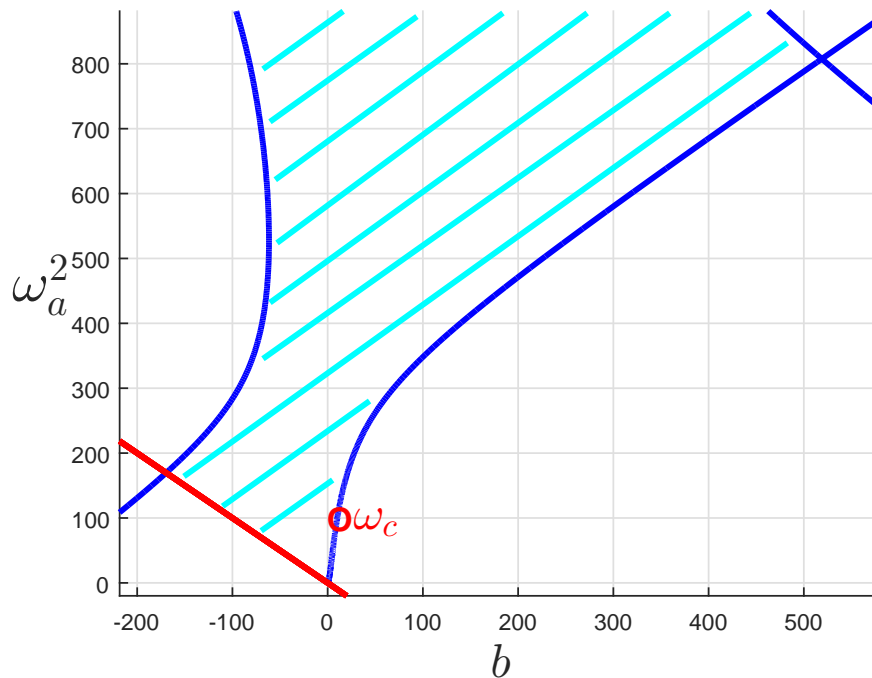


Fig. 4.7: Región de estabilidad para  $h = 178.7$  ms, donde se muestra la frecuencia  $\omega_c = 9.9$  rad/s.

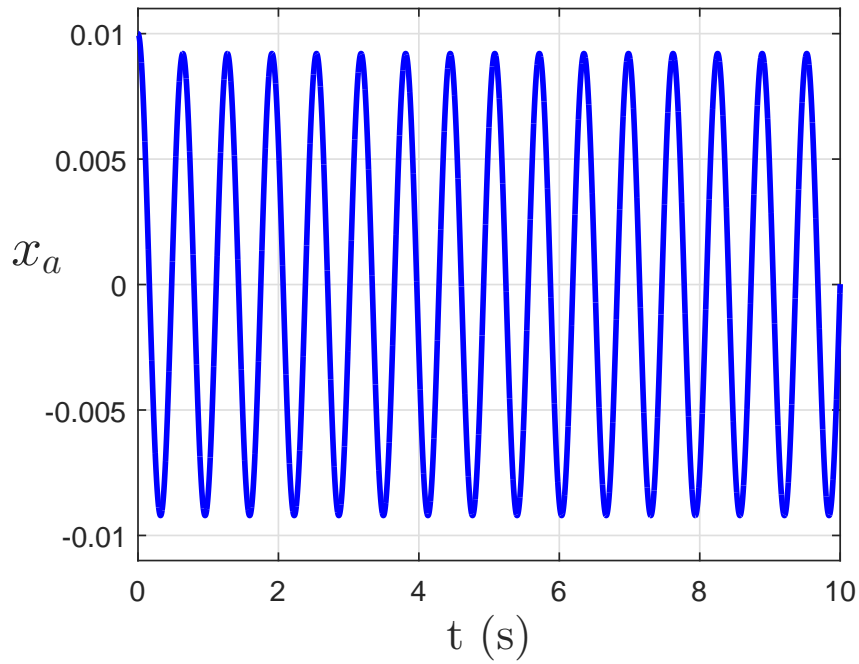


Fig. 4.8: Respuesta en el tiempo del DRA para  $\omega_c = 9.9 \text{ rad/seg}$  y condiciones iniciales  $x(0) = 0.01$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

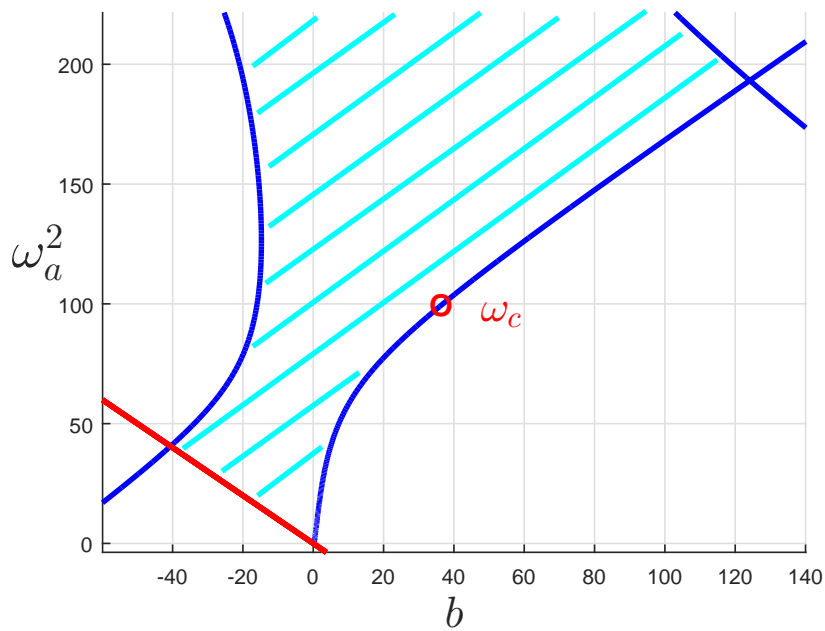


Fig. 4.9: Región de estabilidad para  $h = 365.4 \text{ ms}$ , donde se muestra la frecuencia  $\omega_c = 8 \text{ rad/s}$ .



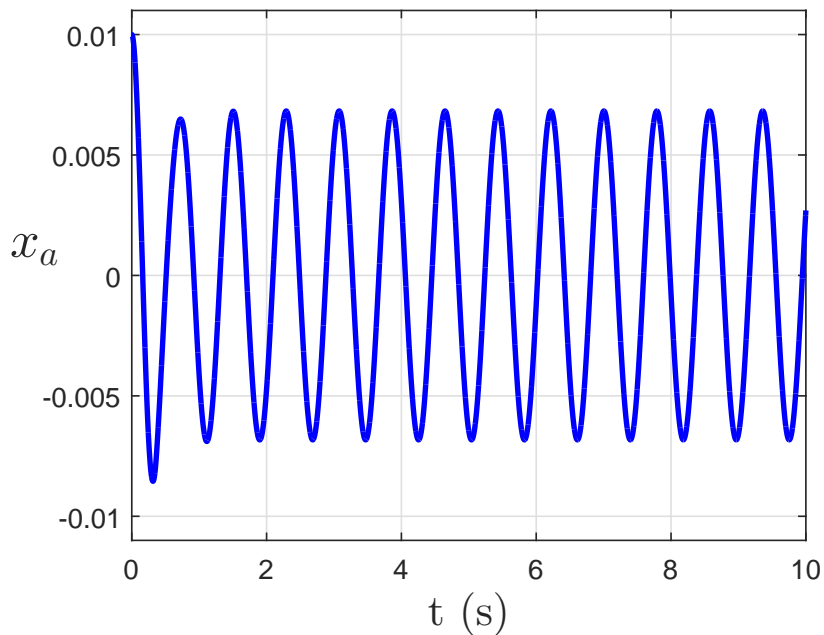


Fig. 4.10: Respuesta en el tiempo del DRA para  $\omega_c = 8 \text{ rad/seg}$  y condiciones iniciales  $x(0) = 0.01, \dot{x}(0) = 0$ .

Ahora escojamos un valor de  $\omega_c$  que no satisfaga la desigualdad (4.36), escogiendo  $\omega_c = 5 \text{ rad/s}$  se tiene que el valor de  $h = 615 \text{ ms}$  y una ganancia  $A_a = 7.5166 \text{ N/m}$ . En la Fig.4.11 se grafica la región de estabilidad que se genera en el espacio de parámetros  $(b, \omega_a^2)$ , el punto  $\omega_c$  está en la zona inestable, la Fig.4.12 muestra la respuesta en el tiempo del DRA, en esta ocasión la respuesta en el tiempo es inestable.

Como conclusión se tiene que dado los valores de  $m_a, c_a$  y  $k_a$  se obtiene el valor de la frecuencia natural  $\omega_a$  y el amortiguamiento  $\zeta$ , además eligiendo valores de  $\omega_c$  que satisfagan la desigualdad (4.36), el DRA oscilará siempre a la frecuencia  $\omega_c$  que se desee.

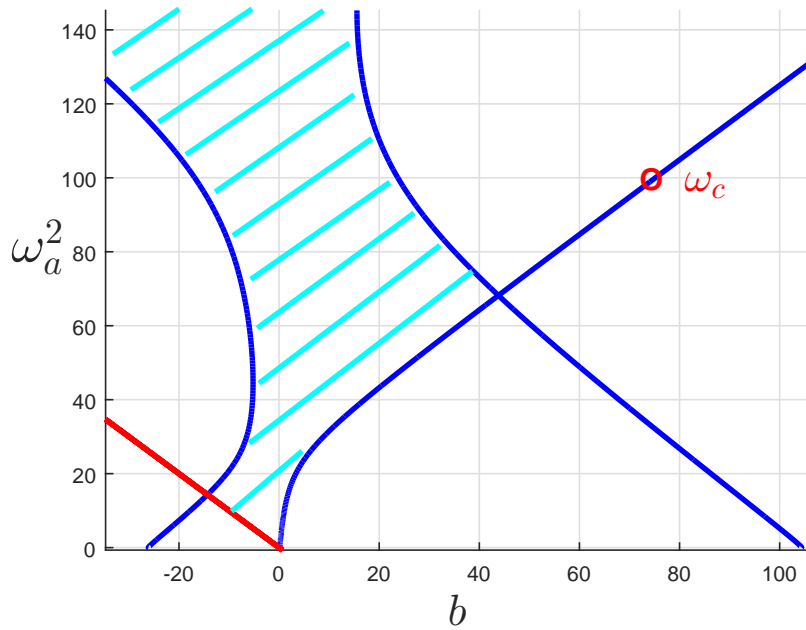


Fig. 4.11: Región de estabilidad para  $h = 615$  ms, donde se muestra la frecuencia  $\omega_c = 5$  rad/s.

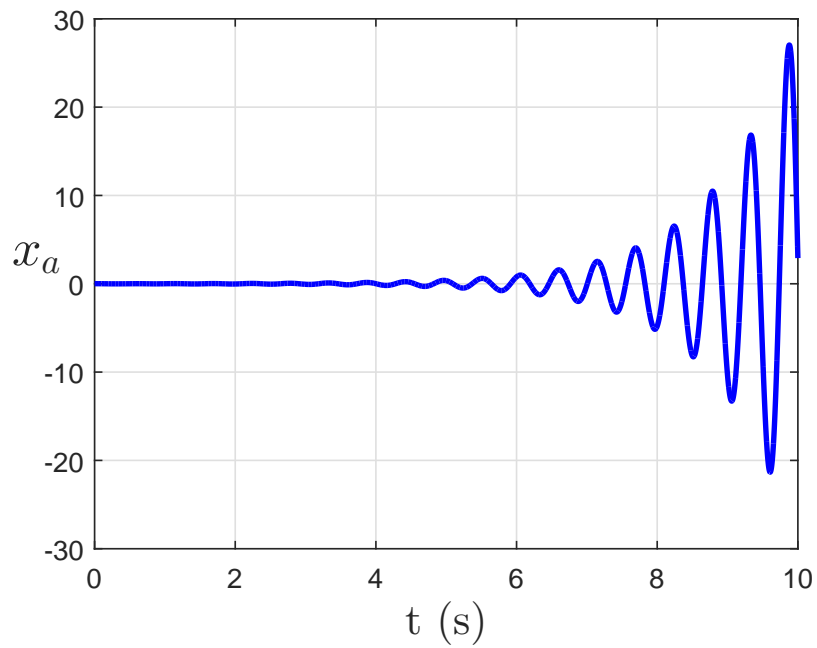


Fig. 4.12: Respuesta en el tiempo del DRA para  $\omega_c = 5$  rad/seg y condiciones iniciales  $x(0) = 0.01$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

### 4.3. Sistema Acoplado

Considere la Fig.4.13 la cual representa la estructura de un sistema primario de un grado de libertad acoplado a un DR, el acoplamiento es introducido por el resorte  $k_a$ . La estructura primaria es denotada por los parámetros con subíndice  $p$  y la estructura del resonador retardado es denotada por el subíndice  $a$ . Comúnmente el amortiguamiento del absorbedor va acoplado al sistema primario, sin embargo, consideramos esta configuración en base a la plataforma ECP 210a, la cual se describe más adelante.

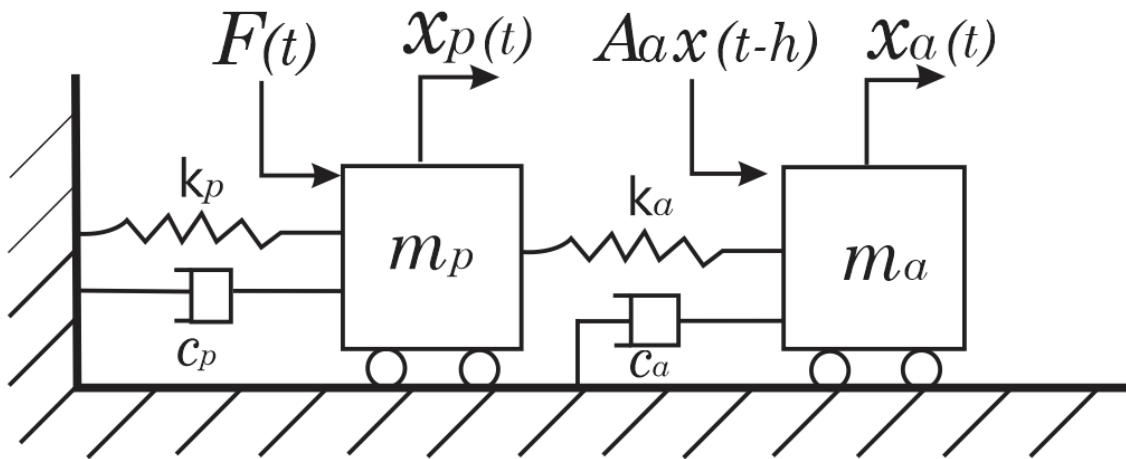


Fig. 4.13: Sistema primario acoplado a un DR.

Si  $x_p = x_p(t)$  denota el desplazamiento de la masa  $m_p$  de su posición de equilibrio y  $x_a = x_a(t)$  denota el desplazamiento de la masa  $m_a$  de su posición de equilibrio, entonces las ecuaciones de movimiento del sistema de la Fig.4.13 son

$$\ddot{x}_p + 2\zeta_p\omega_p\dot{x}_p + \omega_p^2x_p + \mu\omega_a^2(x_p - x_a) = F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (4.40)$$

$$\ddot{x}_a + 2\zeta_a\omega_a\dot{x}_a + \omega_a^2(x_a - x_p) + b x_a(t - h) = 0 \quad (4.41)$$

donde  $\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}$ ,  $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$ ,  $F_0 = \frac{F}{m_p}$  y  $b = \frac{A_a}{m_a}$ . Nótese que  $\omega_p$  es la frecuencia natural del sistema primario,  $\omega_a$  es la frecuencia natural del absorbedor y el parámetro  $\mu$  denota la

razón de masas entre los sistemas primario y absorbedor,  $\zeta_p = \frac{c_p}{2m_p\omega_p}$  denota el factor de amortiguamiento del sistema primario y  $\zeta_a = \frac{c_a}{2m_a\omega_a}$  denota el factor de amortiguamiento del absorbedor.

El cuasipolinomio que determina la estabilidad del sistema acoplado es

$$f_3(s) = f_2(s) + be^{-hs}f_1(s), \quad (4.42)$$

donde  $f_1(s)$  y  $f_2(s)$  están dadas por

$$f_1(s) = s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2 + \mu\omega_a^2, \quad (4.43)$$

$$f_2(s) = f_1(s) (s^2 + 2\zeta_a\omega_a s + \omega_a^2) - \mu\omega_a^4. \quad (4.44)$$

Analizando el cuasipolinomio (4.42) se puede encontrar los parámetros  $b$  y  $h$  que determinan la estabilidad del sistema primario acoplado al DR. **Sin embargo en este trabajo de tesis no se abordó el análisis del sistema acoplado.**

## 4.4. Plataforma ECP 210a

La plataforma experimental *EducationalControlProducts*<sup>®</sup> modelo 210a representada en la Fig.4.14 sirve para evaluar el funcionamiento de los resonadores retardados, un trabajo reportado con esta plataforma puede ser consultado en [30]. En este trabajo no se llegó a pruebas experimentales sin embargo por medio del trabajo de [30], se pretende utilizar los parámetros que fueron obtenidos a través de la plataforma y realizar algunas simulaciones con los métodos de diseño de los resonadores, tanto para el DRNA y el DRA. La plataforma consta de tres carros con masas que se deslizan sobre guías de bolas con poca fricción, las cuales se pueden acoplar elásticamente mediante diferentes resortes helicoidales de compresión. El primer carro se puede acoplar con una varilla de alumi-

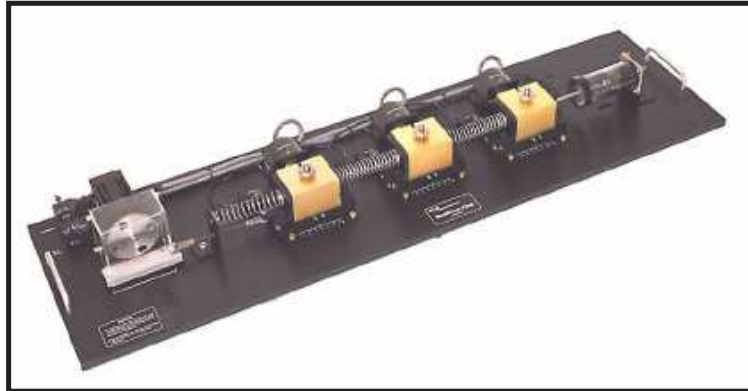


Fig. 4.14: Plataforma ECP 210a.

El sistema está basado en un motor de cd sin escobillas con un controlador de fuerza (corriente). Los tres carros están a su vez acoplados con sistemas de cables y poleas a decodificadores ópticos rotacionales de 4000 PPR en cuadraturas, con lo cual se puede medir desplazamientos con resoluciones de hasta 0.00623 mm (1604 pulsos por cada cm de carrera de los carros). El equipo cuenta con un DSP que permite frecuencias de muestreo hasta de 1.131 kHz, con lo cual es posible medir adecuadamente las señales de desplazamiento, velocidad y aceleración en los carros para cualquier configuración posible. El ancho de banda del sistema mecánico se encuentra entre 0 y 8 HZ.

Este equipo tiene la bondad de poderse reconfigurar rápidamente, ya que permite instalar masas de diferentes valores e intercambiar resortes y un amortiguador de aire ajustable.

La plataforma *ECP210a* contiene:

- 3 Decodificadores ópticos incrementales con una resolución de 4000 PPR en cuadraturas.
- 2 DACs de 16 bits con un rango de  $\pm 10$  volts (-32768,+32768 cuentas)
- Es capaz de realizar barridos frecuenciales de hasta 25 HZ.

- Tiempo de muestreo mínimo de 0.000884 s.
- Posee un controlador de tiempo real, donde prioriza principalmente dos tareas.
  1. Actualización de comandos y lazo cerrado de los servomotores (1.1Khz).
  2. Planificación de trayectorias (377 Hz).

Adicionalmente, se instaló un servomotor secundario de cd sin escobillas, el cual se utilizó para generar las perturbaciones al sistema primario.

Del trabajo de tesis [30], se obtuvieron los parámetros mostrados en la Tabla 4.1.

Sistema primario		Sistema DR	
Parámetros	Valores	Parámetros	Valores
$m_p$	2.4930 Kg	$m_a$	1.8242 Kg
$c_p$	5.203 Ns/m	$c_a$	1.7185 Ns/m
$k_p$	750 N/m	$k_a$	355 N/m
$\omega_p$	17.34 rad/s	$\omega_a$	13.95 rad/s
$\zeta_p$	0.0602	$\zeta_a$	0.0338

Tabla 4.1: Parámetros obtenidos de ECP

Con estos parámetros se determina la frecuencia de resonancia del sistema primario, la cual es

$$\omega_{rp} = 17.2819 \text{ rad/s}, \quad (4.45)$$

y la frecuencia de resonancia del absorbedor,

$$\omega_{ra} = 13.9342 \text{ rad/s}, \quad (4.46)$$

El sistema acoplado será excitado (perturbado) por la siguiente función de excitación

$$F(t) = f_0 \text{ sen } \omega t, \quad (4.47)$$

Para las simulaciones que se realizan en esta sección se toma una  $f_0 = 4 \text{ N}$ . Consideremos

primero el caso cuando el sistema primario está perturbado a su frecuencia de resonancia, es decir,  $\omega = \omega_{rp}$ .

En la Fig.4.15 se puede apreciar que la amplitud de la respuesta del sistema primario acoplado al absorbedor pasivo disminuye en comparación con la amplitud del sistema primario cuando no está acoplado. Por otro lado, a pesar de que la respuesta del sistema primario disminuye con el acoplamiento del absorbedor, la respuesta del sistema no es cero, esto debido a que en presencia de amortiguamiento la respuesta del sistema primario no puede ser cero cuando se le acopla un absorbedor pasivo.

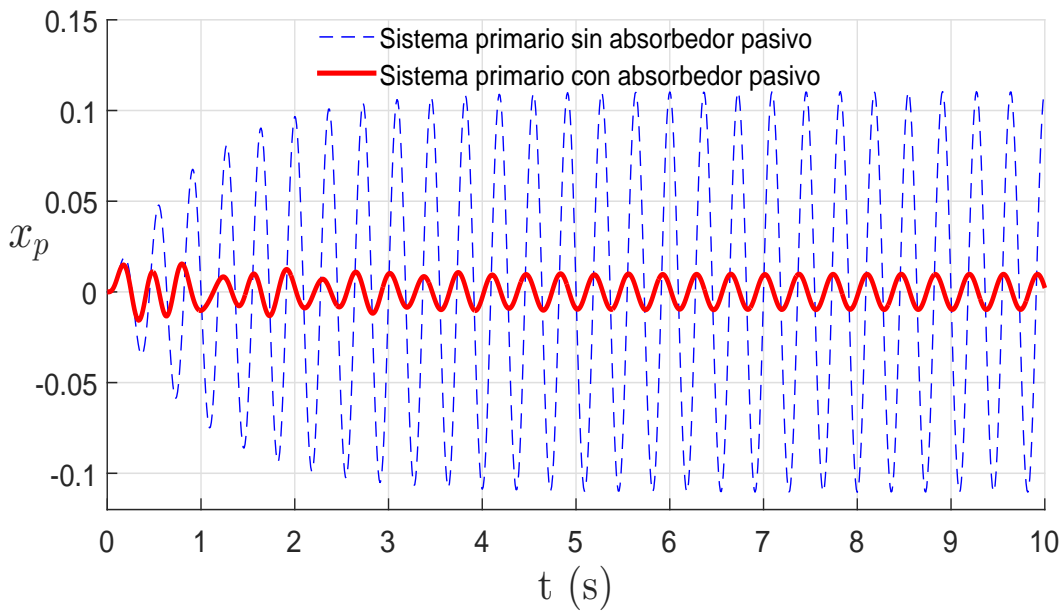


Fig. 4.15: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin absorbedor pasivo, (-)con absorbedor pasivo, para  $\omega = 17.28$  rad/s y condiciones iniciales  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ .

Ahora consideremos el sistema primario acoplado al DRNA. Del método de diseño del DRNA y utilizando los valores de la Tabla 4.1 se tiene la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}\omega_a < \omega_c < \sqrt{2}\omega_a \Rightarrow 8.8228 < \omega_c < 19.7284. \quad (4.48)$$

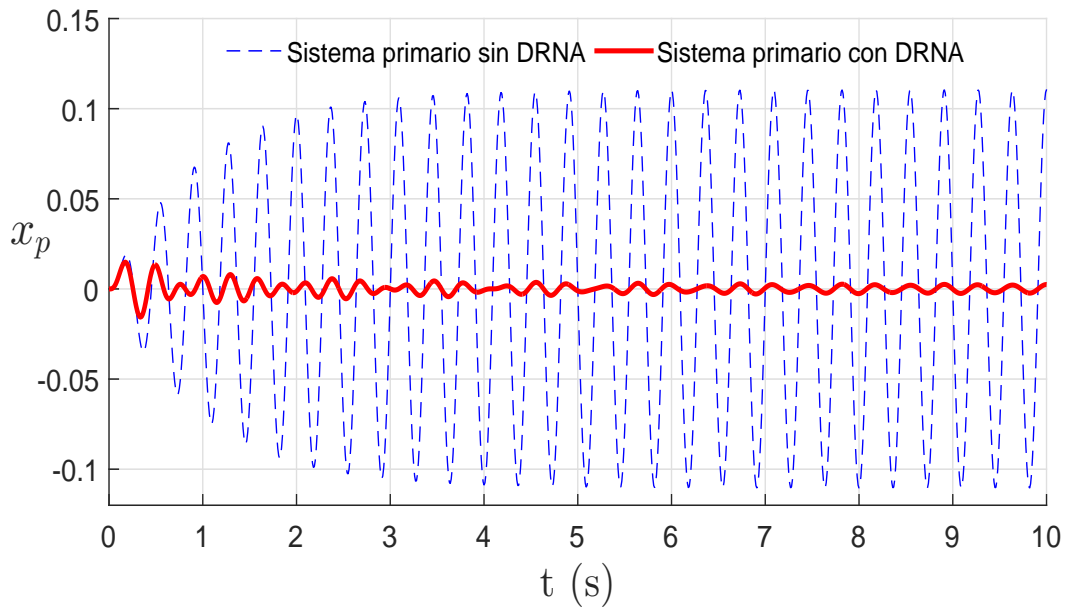


Fig. 4.16: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRNA, (—)con DRNA, para  $\omega = 17.28$  rad/s con  $h = 181.8$  ms,  $A_a = -189.8230$  N/m y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Conociendo el rango de operación del DRNA, entonces podemos escoger la frecuencia de operación del DRNA como  $\omega_c = \omega$ . Se sigue que del método de diseño los valores de  $h$  y  $A_a$  están dados por

$$h = \frac{\pi}{\omega_c} \quad \text{y} \quad A_a = (\omega_a^2 - \omega_c^2)m_a,$$

los valores obtenidos para  $\omega_c = 17.2819$  rad/s son  $h = 181.8$  ms y  $A_a = -189.8230$  N/m.

En la Fig.4.16 se aprecia que la amplitud de la respuesta del sistema primario es mínima cuando está acoplado al DRNA en comparación con la respuesta del sistema primario cuando no está acoplado la cual tiene una amplitud grande. Es importante señalar que a pesar de que la respuesta del sistema primario es mínima, aún existe una pequeña amplitud, esto es porque el método de diseño del DRNA no considera el amortiguamiento presente en el absorbedor.



Finalmente consideremos el sistema primario acoplado al DRA. Del método de diseño se tiene la siguiente desigualdad:

$$\omega_c > \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{rp} \Rightarrow \omega_c > 9.8530, \quad (4.49)$$

está desigualdad nos permite escoger la frecuencia de operación del DRA como  $\omega_c = \omega$ , se sigue que los valores de  $h$  y  $A_a$  están dados por

$$h = \frac{1}{\omega_c} \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta\omega_a\omega_c}{\omega_c^2 - \omega_a^2} \right) \quad \text{y} \quad b = \frac{2\zeta\omega_a\omega_c}{\text{sen}(\omega_c h)},$$

los valores obtenidos para  $\omega_c = 17.2819$  rad/s son  $h = 9$  ms y  $A_a = 192.1322$  N/m. En la Fig.4.17 claramente se puede apreciar que la respuesta del sistema primario acoplado al DRA es mejor que sino estuviera acoplado, además se puede apreciar que la respuesta del sistema primario acoplado tiende a cero. En este caso el acoplamiento del sistema primario con el DRA proporciona una protección óptima, esto se debe a que el método de diseño del DRA está considerando el amortiguamiento presente en el absorbedor. Como conclusión de estas simulaciones se tiene que el sistema primario acoplado al DRA tiene una mejor protección que el sistema primario acoplado al DRNA, ambos acoplamientos son mejores que el absorbedor pasivo, sin embargo, es importante mencionar que los valores obtenidos de la plataforma ECP y representados en la Tabla 4.1 son valores que se obtuvieron del sistema físico y que en principio el diseño del absorbedor pasivo no fue el óptimo, esto debido a que cuando se diseña un absorbedor pasivo por lo regular se seleccionan los parámetros  $m_a$ ,  $c_a$  y  $k_a$  tal que la frecuencia natural del absorbedor coincida con la frecuencia natural del sistema primario.

Por otro lado es importante mencionar que en general el acoplamiento del DRA al sistema primario permitirá eventualmente que la respuesta del sistema primario sea cero, en comparación con el acoplamiento del sistema primario al DRNA en el cual a pesar

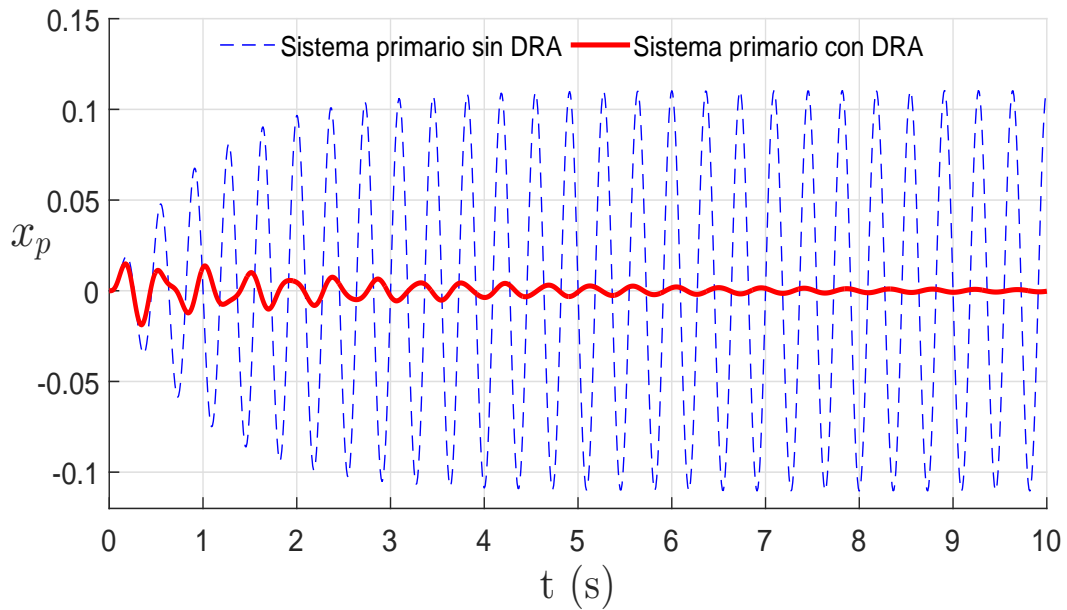


Fig. 4.17: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRA, (-)con DRA, para  $\omega = 17.28$  rad/s con  $h = 9$  ms,  $A_a = 192.1322$  N/m y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

de que la respuesta del sistema primario es pequeña, ésta no tiende a cero, esto se debe claramente a la presencia de amortiguamiento en el absorbedor y que sólo el método DRA considera este amortiguamiento.

En la Fig.4.18 se grafica la respuesta en el tiempo del DRA y del DRNA acoplado al sistema primario. Dos aspectos a notar es que los métodos de diseño propuestos nos garantizan el correcto funcionamiento de los absorbedores, es decir, que tendrán una respuesta oscilatoria como se aprecia en la Fig.4.18. Por otro lado haciendo una comparación entre el DRA y el DRNA se encuentra la diferencia que el DRA proporciona una fuerza ligeramente mayor para contrarrestar la fuerza provista por la función de excitación (4.47) al sistema primario acoplado, mientras que la fuerza provista por del DRNA es ligeramente menor, sin embargo, esta diferencia es suficiente para hacer que el DRA de mejores resultados, esto se justifica debido a que el método para el DRA esta considerando el amortiguamiento mientras que el método para el DRNA no lo considera. Además es

importante mencionar que estos resultados son obtenidos a través de simulaciones.

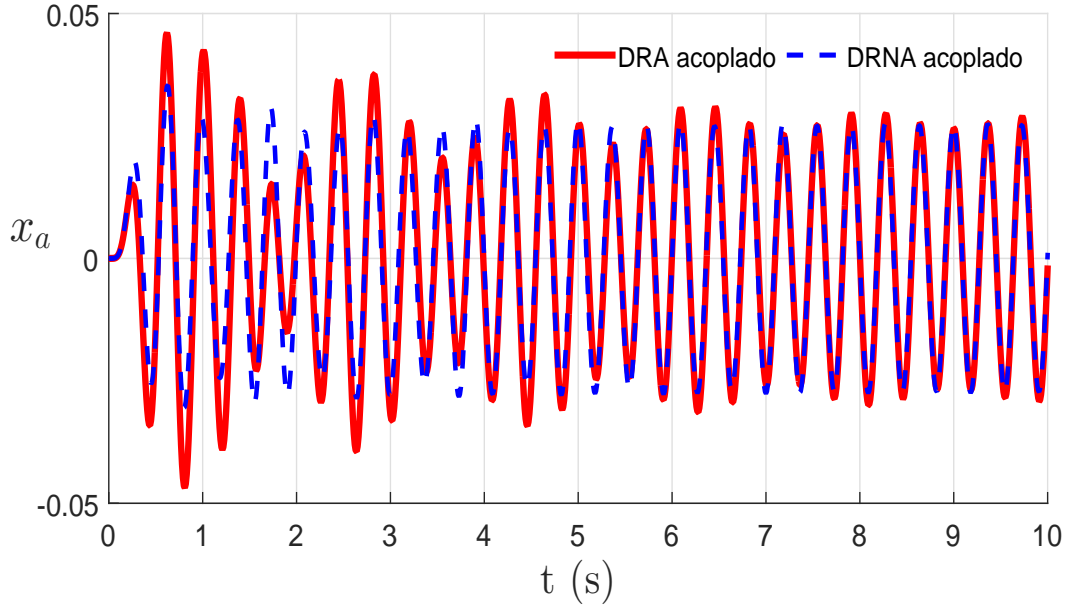


Fig. 4.18: Respuesta en el tiempo de los absorbedores acoplados al sistema primario: (-)DRA, (- -)DRNA, para  $\omega = 17.28$  rad/s y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Como ya se mencionó, la ventaja del DR es que puede modificar su frecuencia de operación sin necesidad de cambiar sus parámetros físicos  $m_a$ ,  $c_a$  y  $k_a$ , cómo sucede con el absorbido pasivo. Teniendo esto en mente ahora realizaremos una simulación considerando una frecuencia de excitación  $\omega < \omega_{rp}$ .

En la Fig.4.19 se representa la respuesta del sistema primario cuando está acoplado y cuando no está acoplado al absorbedor pasivo ante una frecuencia de excitación  $\omega = 16$  rad/s. Para el caso del DRNA la frecuencia de excitación  $\omega$  cumple con la desigualdad (4.48), así seleccionamos la frecuencia de operación del DRNA  $\omega_c = \omega$ , utilizando el método de diseño del DRNA los valores obtenidos para  $\omega_c = 16$  rad/s son  $h = 196.3$  ms y  $A_a = -111.9952$  N/m, véase la Fig.4.20. Ahora consideremos el caso del DRA, en este caso se tiene que la frecuencia de excitación  $\omega$  cumple con la desigualdad (4.49), así se considera una frecuencia de operación del DRA  $\omega_c = \omega$ , los valores obtenidos para

$\omega_c = 16$  rad/s son  $h = 15$  ms y  $A_a = 115.3211$  N/m, véase la Fig.4.21.

Realizando una comparación de estas simulaciones se tiene que una vez más cuando se acopla el DRA y el DRNA dan una mejor protección al sistema primario que si sólo se acoplara el absorbedor pasivo, en este caso, se puede apreciar que los resultados obtenidos para el DRA y el DRNA son muy parecidos, sin embargo, como ya se mencionó sólo cuando se acopla el DRA la respuesta del sistema primario tiende a cero.

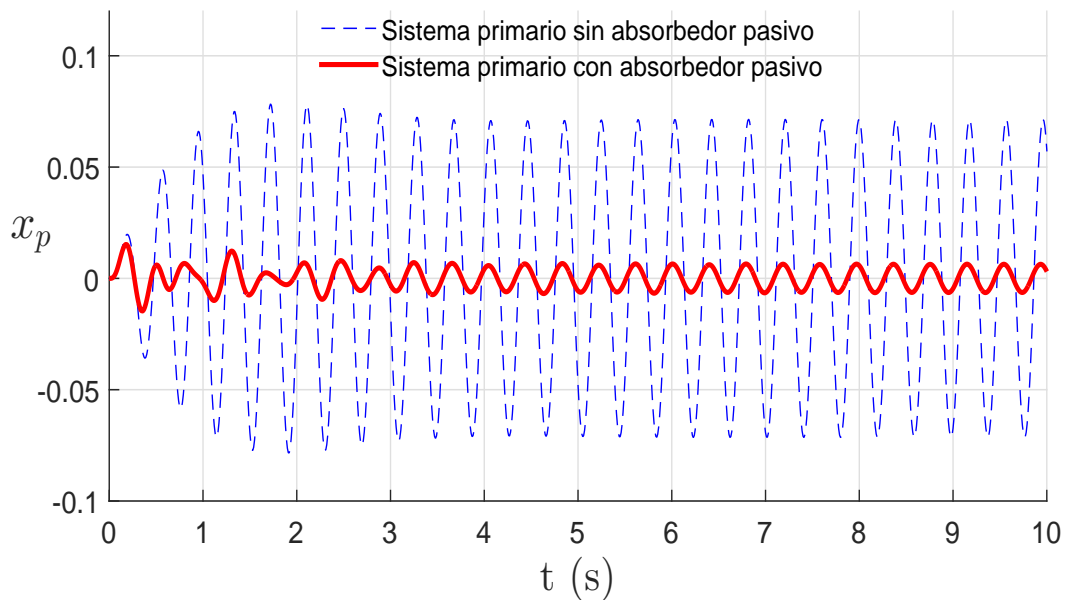


Fig. 4.19: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin absorbedor pasivo, (-)con absorbedor pasivo, para  $\omega = 16$  rad/s y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

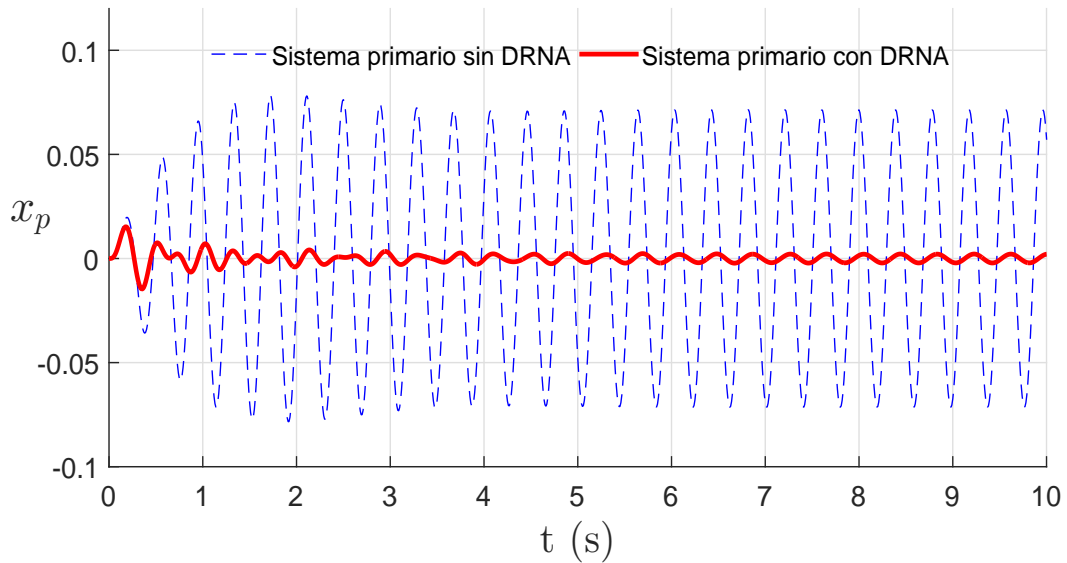


Fig. 4.20: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRNA, (-)con DRNA, para  $\omega = 16$  rad/s con 196.3 ms,  $A_a = -111.9952$  N/m y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

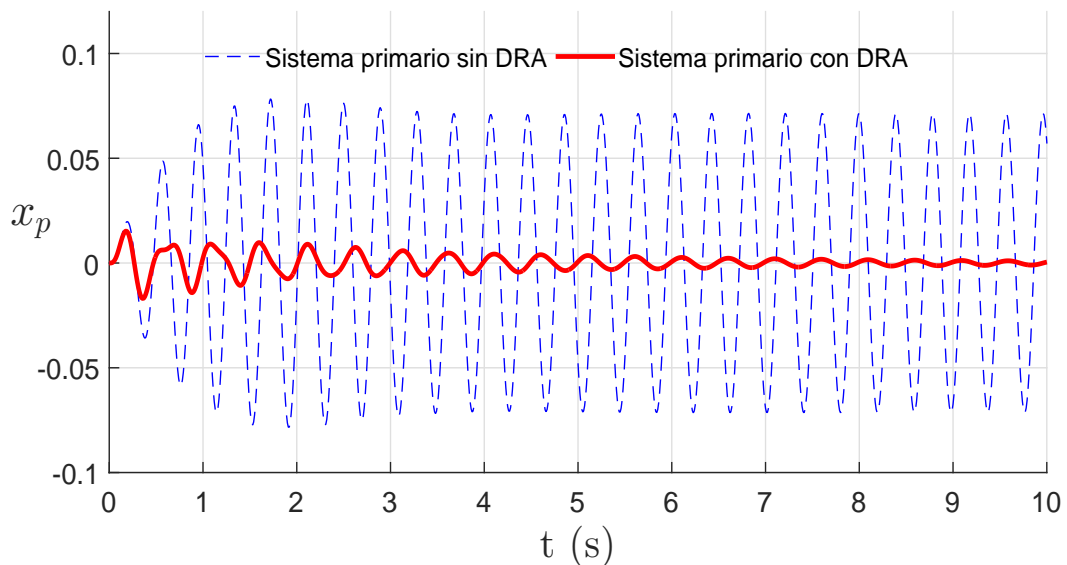


Fig. 4.21: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRA, (-)con DRA, para  $\omega = 16$  rad/s con  $h = 15$  ms,  $A_a = 115.3211$  N/m y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Finalmente consideremos una frecuencia de excitación  $\omega > \omega_{rp}$ . En la Fig.4.22 se grafica el comportamiento del sistema primario sin estar acoplado y al estar acoplado al absorbedor pasivo para una frecuencia de excitación  $\omega = 18$  rad/s. Utilizando el método de diseño del DRNA se tiene que la frecuencia de excitación  $\omega$  cumple con la desigualdad (4.48), así se considera una frecuencia de operación para el DRNA  $\omega_c = \omega$ , los valores obtenidos para  $\omega = 18$  rad/s son  $h = 174.5$  ms y  $A_a = -236.0408$  N/m, véase la Fig.4.23. Ahora se toma el método de diseño para el DRA, la frecuencia de excitación  $\omega$  cumple con la desigualdad (4.49), así se escoge la frecuencia de operación del DRA  $\omega_c = \omega$ , los valores obtenidos con este método para  $\omega_c = 18$  rad/s son  $h = 7.2$  ms y  $A_a = 238.0590$  N/m, véase la Fig.4.24.

Claramente se tiene que en estas simulaciones la respuesta del sistema primario acoplado al DRA da un mejor resultado, así podemos concluir que el DRA da mejores resultados que el DRNA y que el absorbedor pasivo.

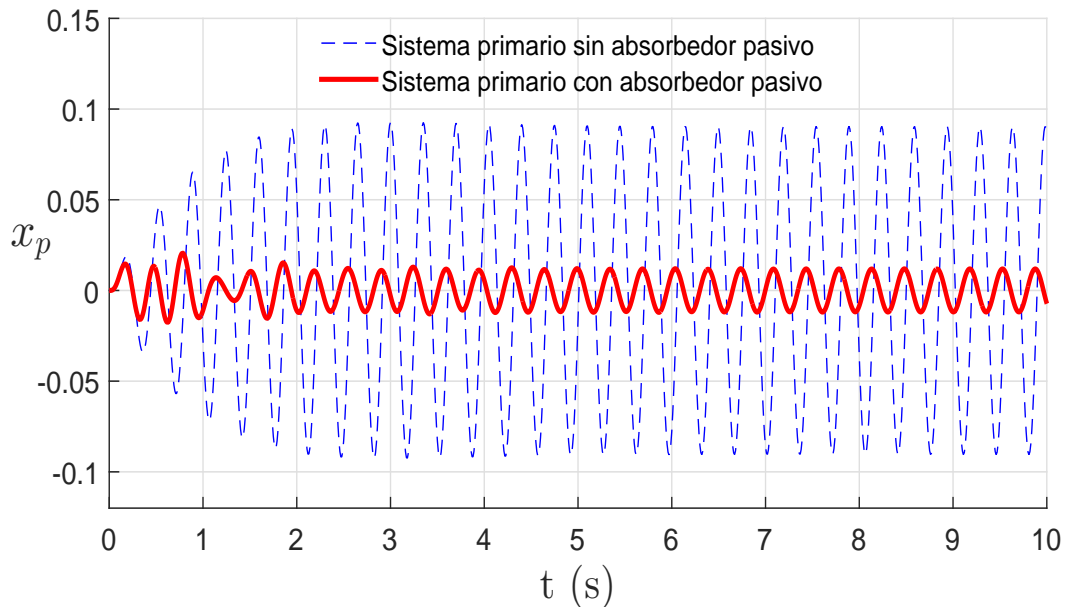


Fig. 4.22: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin absorbedor pasivo, (-)con absorbedor pasivo, para  $\omega = 18$  rad/s y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

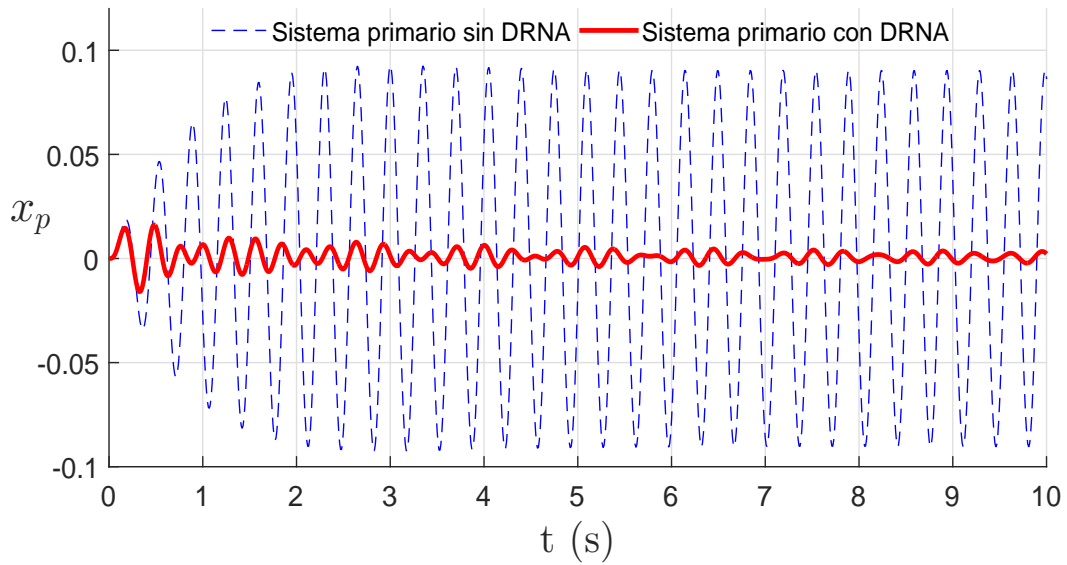


Fig. 4.23: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRNA, (-)con DRNA, para  $\omega = 18$  rad/s con  $h = 174.5$  ms,  $A_a = -236.0408$  N/m y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

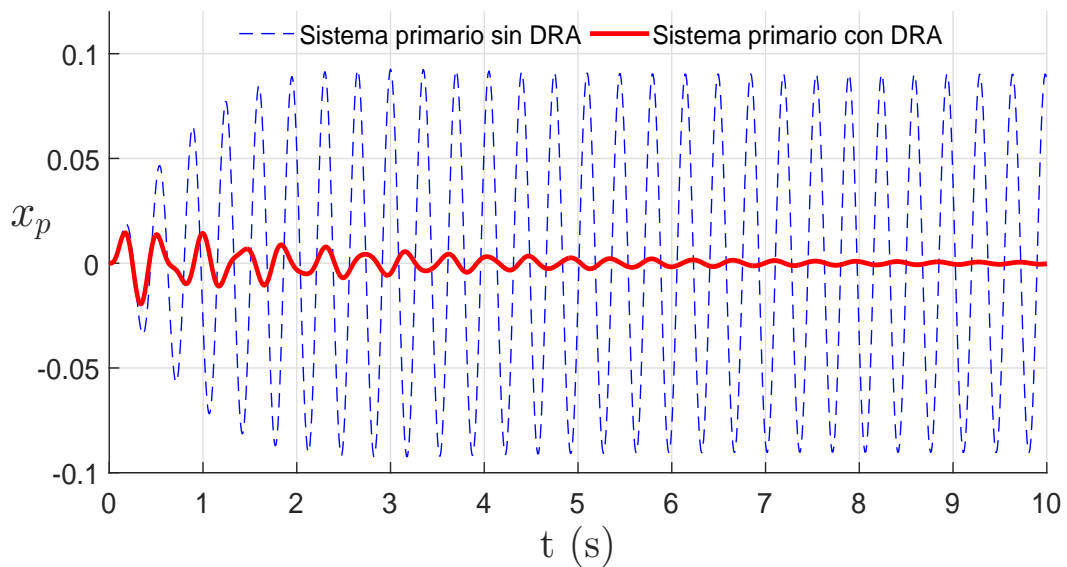


Fig. 4.24: Respuesta en el tiempo del sistema primario: (- -)sin DRA, (-)con DRA, para  $\omega = 18$  rad/s con  $h = 7.2$  ms,  $A_a = 238.059$  N/m y condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

## 4.5. Resumen de capítulo

En este capítulo se presentó el análisis de estabilidad del cuasipolinomio característico asociado a la Fig.4.1, en la cual se considera amortiguamiento, se presentaron dos regiones de estabilidad de este sistema, dependiendo del valor de  $c$ . Además se presentó un análisis para el método de diseño del DR con amortiguamiento y se mostraron simulaciones de este método. Finalmente se presentaron simulaciones de un sistema acoplado con los diferentes absorbedores; absorbedor pasivo, DRNA y DRA y se compararon los resultados obtenidos. Como conclusión general de este capítulo tenemos que el DRA da mejores resultados que el DRNA en simulaciones, sin embargo, es importante mencionar que faltó hacer pruebas experimentales para comparar estos métodos. También es importante mencionar que los valores de ganancia obtenidos, son siempre positivos para el caso del DRA en comparación con el DRNA, esto debido al diseño empleado en cada caso, mientras que para el DRNA se tomó el segmento de recta que tiene valores negativos y positivos en  $A_a$ , mientras que para el DRA se tomó la primer curva, la cual sólo toma valores positivos en  $A_a$ .



# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo de tesis se realizó el análisis de estabilidad de un sistema mecánico de un sólo grado de libertad con una retroalimentación retardada, conocido como DR. El trabajo se realizó en dos partes, primero se analizó el caso del DR sin considerar amortiguamiento y después se generalizó el análisis al caso del DR con amortiguamiento.

### **Conclusiones.**

1. Se determinó la región de estabilidad del sistema mecánico de un grado de libertad sin considerar amortiguamiento, y a partir de esta región de estabilidad se propuso un método de diseño para el DR sin amortiguamiento.
2. Se determinó la región de estabilidad del sistema mecánico de un grado de libertad considerando amortiguamiento. Al realizar el análisis de estabilidad se llegó a la conclusión de que existen dos regiones de estabilidad, dependiendo del valor del amortiguamiento. Con base a esto, se realizó el diseño de un DR considerando una de estas regiones de estabilidad, para casos con amortiguamiento pequeño, situación más común en este tipo de problemas de absorción de vibraciones.
3. Con el resultado de estabilidad se determinó una cota inferior de  $\omega_c$  para el cuál

---

el método de diseño siempre funcionará, es decir, para que el DR con amortiguamiento no sea inestable. En el trabajo de *Olgac-Hansen* se muestra que existe una  $\omega_{critica}$ , para el cual el DR con amortiguamiento empieza a ser inestable, es decir, presentan una frecuencia de corte. Sin embargo, no presentan expresiones explícitas para determinar este valor de frecuencia. En comparación con este trabajo, la cota  $\omega_c$  siempre puede ser determinada explícitamente, una vez que se seleccionan los parámetros del DR con amortiguamiento.

4. Finalmente, este trabajo de tesis muestra que el retardo, si es tratado cuidadosamente, puede ser utilizado como un parámetro de control, proporcionando beneficios al sistema, en comparación con esquemas convencionales, donde los retardos deben eliminarse o compensarse para evitar dinámicas no deseadas en el sistema.

### **Trabajo Futuro.**

1. Realizar el análisis de robustez de los parámetros  $A_a$  y  $h$  del DR considerando ambos casos, DR con amortiguamiento y DR sin amortiguamiento.
2. Hacer el análisis de estabilidad del sistema completo, es decir, cuando el DR está acoplado al sistema primario, considerando ambos casos, DR con amortiguamiento y DR sin amortiguamiento.
3. Implementar la parte experimental del DR acoplado al sistema primario y comparar los resultados obtenidos a nivel simulación con los resultados obtenidos en la plataforma experimental.
4. Hacer el análisis de estabilidad de un sistema de  $n$  grados de libertad acoplado a un DR y proponer un método de diseño para el DR.

# Bibliografía

- [1] AGARWAL, A., AND YANG., J. Effect of fixed time delay on stability and performance of actively controlled civil engineering structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 26 (1997), 1169–1185.
- [2] AGARWAL, A., AND YANG., J. Compensation for time delay for control of civil engineering structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 29 (2000), 37–62.
- [3] AK. AGARWAL, Y. F., AND BHARTIA., B. Instability due to time delay and its compensation in active control of structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 22 (1993), 221–224.
- [4] BARKER., L. *Mikhailov stability criterion for time-delayed systems*. NASA technical memorandum. National Aeronautics and Space Administration, Scientific and Technical Information Office, 1979.
- [5] BELLMAN, R., AND COOKE., K. *Differential-difference equations*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1963.
- [6] BOYCE, W., AND DIPRIMA., R. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Incorporated, 2012.

- 
- [7] CAUGHEY, T., AND O'KELLY., M. Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems. *Journal of the Acoustical Society of America* 33: (1961), 1458–1461.
- [8] CHURCHILL, R., AND BROWN., J. *Variable Compleja y Aplicaciones.*, quinta edición ed. McGraw-Hill., 1992.
- [9] DE SILVA., C. *Vibration: Fundamentals and Practice, Second Edition.* CRC Press, 2011.
- [10] HALE., J. *Ordinary Differential Equations.* Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2009.
- [11] HALE, J., AND LUNEL., S. *Introduction to Functional Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013.
- [12] INMAN., D. *Vibration with Control.* Wiley, 2006.
- [13] INMAN, D. *Engineering Vibration.* Pearson Prentice Hall, 2008.
- [14] JALILI, N., AND OLGAC., N. Multiple delayed resonator vibration absorbers for multi-degree-of-freedom mechanical structures. *Journal of Sound and Vibration* 223, 4 (1999), 567–585.
- [15] K. GU, V. K., AND CHEN., J. *Stability of Time-Delay Systems.* Control Engineering. Birkhäuser Boston, 2012.
- [16] KOLMANOVSKII, V., AND MYSHKIS., A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations.* Mathematics and Its Applications. Springer, 1999.
- [17] KRASOVSKII., V. On the applications of the second lyapunov method for equations with delay. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 20: (1956), 315–327,.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [18] LI, X., AND GAO., H. A new model transformation of discrete-time systems with time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56, 9 (2011), 2172–2178.
- [19] MYSHKIS., A. General theory of differential equations with delays. *Uspekhi Mat. Nauk* 4 (1949), 99–141.
- [20] N. OLGAC, H. I., AND VIJAYAN., S. Introduction to the dual frequency fixed delayed resonator. *Journal of S* 3, 189 (1996), 355–367.
- [21] NEIMARK., J. D-subdivision and spaces of quasi-polynomials. *Prikl. Mat. Mekh* 13:, 4 (1949), 349–380.
- [22] NICULESCU., S. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer London, 2003.
- [23] OLGAC., N. Delayed resonators as active dynamic absorbers, July 11 1995. US Patent 5,431,261.
- [24] OLGAC, N., AND HOLM-HANSEN., B. A novel active vibration absorption technique: delayed resonator. *Journal of Sound and Vibration* 176: (1994), 93–104.
- [25] OLGAC, N., AND RIFAT., S. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (lti) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 47, 5 (2002), 793–797.
- [26] PIERRE., J. Time-delay system: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica* 39, 10 (2003), 1667–1694.
- [27] RAO., S. *Mechanical Vibrations*. Prentice Hall, 2011.
- [28] RAZUMIKHIN., B. On the stability of systems with a delay. *Prikl. Matemathics and Mechanics*, 20, (4): (1956), 500–512.

- [29] RUGH., W. *Linear System Theory*. Prentice-Hall information and system sciences series. Prentice Hall, 1996.
- [30] SÁNCHEZ, R. H. *Diseño y evaluación experimental de absorbedores retardados*. Centro de Investigación y de Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2014.
- [31] STEFFEN, V., AND RADE., D. *Absorbers Vibration*. No. 9-26. Academic Press, 2001.
- [32] SUN, Y., AND XU., J. Experiments and analysis for a controlled mechanical absorber considering delay effect. *Journal of Sound and Vibration.*, 339 (2015), 25–37.
- [33] T. VYHLÍDAL, N. O., AND KUCERA., V. Delayed resonator with acceleration feedback - complete stability analysis by spectral method and vibration absorber design. *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), 6781–6795.
- [34] UDWADIA, F., AND KUMAR., R. Time delayed control of classically damped structural systems. *International Journal of Control* 60 (1994), 687–713.