Una aproximación algebraica de observabilidad para un sistema de diabetes mínimo

G. Solís-Perales, R. Aguilar-López, R. Femat, and R. Martínez-Guerra

[1] Departamento de Electrónica, CUCEI, U. de G.,
Av. Revolución 1500, Guadalajara Jalisco, México
[2] Departamento de Biotecnología y Bioingeniería, CINVESTAV-IPN
[3] Laboratorio para la Biodinámica y Sistemas Alineales, Div. de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales, IPICYT, San Luis Potosí, México
[4] Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN.

Abstract. La observabilidad de estados mediante la disponibilidad de un conjunto de entradas y salidas medibles es un tema que, en concepto, es relativamente simple y como es sabido, para sistemas lineales está satisfactoriamente estudiado. Sin embargo para sistemas no lineales, la determinación de la observabilidad se dificulta dada la complejidad implícita de este tipo de sistemas. Esta complejidad puede deberse a retardos, sistemas de alto orden y respuestas inesperadas a acciones de control. Sin embargo, la evaluacin de observabilidad es fundamental para el diseo de estimadores de estados, de incertidumbres, fallas y parámetros, con fines de monitoreo, identificación y control de sistemas. En el presente trabajo se emplean conceptos del álgebra diferencial, para demostrar, que cierta clase de modelo mínimo de diabetes puede clasificarse como sistema diferencialmente plano y que la estimacin de concentraciones de insulina a través de mediciones de glucosa en sangre es teóricamente factible empleando esta metodología alterna, lo cual la convierte en relevante para la estudios de ingeniería biomédica.
Keywords: Observabilidad Algebraica, Sistemas Biomedicos.

1 Introducción

En una gran variedad de aplicaciones en ingeniería no se dispone de las mediciones del vector completo de estados, debido a que la instrumentación puede ser excesivamente costosa o, inclusive, que no existan sensores para su determinación, lo que limitaría en primera instancia las tareas de monitoreo y control de procesos. Con el fin de resolver esta situacin se han desarrollado metodologías que han permitido inferir u observar estados a partir de mediciones disponibles en el proceso. Sin embargo, antes de proceder a diseñar una metodología de observación, se debe de verificar si efectivamente las variables de estado del proceso bajo estudio son observables dado el conjunto de mediciones disponibles. Las metodologías para verificar esta condición se conocen como criterios o pruebas de observabilidad.

En el caso de sistemas no lineales se tienen criterios basados en aplicar criterios algebraicos de observabilidad lineal a los sistemas linealizados por series de

M.I. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 413-421

Taylor [1], sin embargo estos criterios solo presentan validez local. También se han presentado criterios de observabilidad para sistemas no lineales utilizando herramientas de geometría diferencial, pero el demostrar que los difeomorfismos empleados en este tipo de técnica son inyectivos es una tarea difícil de realizar. A principios de los años noventas se empiezan a introducir herramientas de álgebra diferencial dentro de la teoría de control para sistemas lineales y no lineales [?],[2]; una de las principales características de este enfoque es que evitan ecuaciones implícitas, siendo esto una ventaja al tratar cierto tipo de sistemas y que los resultados obtenidos, principalmente en el área de criterios de observabilidad son más generales, es decir, válidos en los dominios de los campos diferenciales que describen a los sistemas dinámicos.

En el presente trabajo se presentaran varias definiciones, en el marco del álgebra diferencial, relacionadas con extensiones de campos diferenciales, sistemas dinámicos, sistemas diferencialmente planos, defectos algebraicos que permiten caracterizar cierta clase de sistemas no lineales, mediante un criterio de observabilidad algebraica. Se muestra como caso de aplicación, un modelo matemático mínimo de diabetes que se compone de tres estados que representan el balance de masa para glucosa en sangre, el balance de masa para la desaparición de glucosa por efecto de la insulina y el balance de masa para la insulina en sangre considerando como salida medible la concentracin de glucosa en sangre. Se muestra que para esta clase de sistema los estados que son algebraicamente medibles ya que se pueden expresar de manera explícita como una función de las entradas y salidas medibles y un número finito de sus derivadas. Por lo tanto los estados medibles de este sistema son observables en el sentido algebraico.

2 Metodología

Para determinar las condiciones de observabilidad para sistemas Liouvillianos, se deben introducir las siguientes definiciones:

Definición 1. Una extensión de campos diferenciales H/k está dada por dos campos diferenciales H y k, tal que: i) k es un subcampo de H; ii) el operador derivada definido en k es una restricción de H en k del operador derivada definido en H.

Definición 2. Una dinámica es definida como una extensin diferencial-algebraica, generada de forma finita $H/k < u >$ del campo diferencial $k < u >$, donde $k < u >$ denota al campo diferencial generado por k y elementos de un conjunto finito $u =< u_1, u_2, \dots, u_n >$ de cantidades diferenciales.

Definición 3. Una dinmica se dice diferencialmente plana si y solamente si, sin la necesidad de la integracin de cualquier ecuación diferencial, el vector de estados y el vector de entradas pueden ser explícitamente expresados en términos de las salidas denominadas planas y un número finito de sus derivadas temporales.

Definición 4. El número entero de variables, la cuales no pueden ser expresadas en términos de las salidas y un número finito de sus derivadas en tiempo, es conocido como el defecto del sistema no plano.

Definición 5. Un sistema no diferencialmente plano se dice que es Liouvilliano si las variables que no pertenecen al subsistema plano pueden ser expresadas mediante una integral de los elementos del subsistema plano o por una exponencial de una integral elemental de elementos del subsistema plano.

Definición 6. Sea u, y un subconjunto del campo diferencial H de la dinámica dada por $H/k < u >$. Se dice que un elemento $x \in H$ es observable respecto u, y si éste es diferencialmente algebraico sobre $k < u, y >$, de lo cual se desprende que un estado x se dice observable si y solo si es observable con respecto a u, y. Una dinámica $H/k < u >$ se dice que es algebraicamente observable si y solamente si cualquier estado tiene esta propiedad.

3 Ejemplo de aplicación.

El tratamiento para regular los niveles de glucosa en pacientes diabéticos dependientes de insulina requiere de el monitoreo adecuado de la glucosa en sangre (considerada como la salida medible del sistema) de la insulina en sangre y la insulina empleada para la metabolización de la glucosa, sin embargo, varias de estas variables, en particular las dos últimas son difíciles de medir con la tecnología de sensores disponibles para que no causen molestias considerables a los pacientes bajo tratamiento. En base a lo anterior se ha buscado desarrollar técnicas de monitoreo minimamente invasivas que por un lado permitan medir la concentración de glucosa en el fluido intersticial de la piel o en el subcutis y este sistema acoplado a un estimador (observador de estados vía software) permita inferir las otras concentraciones de insulina interés. Para proceder a desarrollar este tipo de tecnologías es necesario determinar las caractersticas de observabilidad de este tipo de sistemas. Para lograr lo anterior, se propone el empleo de técnicas algebraico diferenciales que permiten obtener resultados más generales que los métodos estándar basados en la matriz de observabilidad correspondiente. Por lo anterior se emplea en este trabajo el modelo mínimo de Bergman reportado previamente en [3], en el cual se pretende evaluar las características de observabilidad de este modelo en particular considerando mediciones de glucosa en sangre. El modelo esta dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

- Balance de Masa para glucosa (G):

$$\dot{G} = -P_1(G - G_b) - GX \tag{1}$$

• Balance de masa para la desaparición de glucose por efecto de la insulina (X):

$$\dot{X} = -P_2X + P_3(I - I_b) \tag{2}$$

• Balance de masa para la insulina en sangre (I):

$$\dot{I} = -n(I_3 - I_b) + \gamma(G - h)t \tag{3}$$

• Salida medible:

$$y = G_1 \tag{4}$$

A partir de las definiciones $D1$ a $D3$, las ecuaciones $(1) - (3)$ pueden ser definidas como un sistema dinmico. Ahora, a partir de las definiciones D4- D6 y después de efectuar manipulaciones algebraicas de las ecuaciones de estados (1)-(3) se obtiene lo siguiente:

• Concentración de glucosa:

$$G_1 = y \tag{5}$$

• Desaparición de glucosa por efecto de la insulina:

$$X = y^{-1}(\dot{y} + P_1(y - G_b)) \tag{6}$$

• Insulina en sangre:

$$I = P^{-1}(-y^{-1}(\ddot{y} + P_1\dot{y}) + y^{-2}(\dot{y} + P_1(y - G_b)) - P_2y^{-1}(\dot{y} + P_1(y - G_b)) + I_B \tag{7}$$

Como se puede observar $H = k(G, X, I)$, $k = \Re$, la salida plana es $y = G$, con lo que se puede concluir que el modelo mínimo de Bergman es un modelo plano no lineal, en donde las variables de estado X y I son observables a partir de mediciones de glucosa.

4 Diseño de un observador para el modelo mínimo

En base a lo descrito anteriormente, proponemos un observador para el sistema (1) – (4)

Proposición 7. La siguiente estructura de sistema dinámico es un observador de orden complete del sistema (1) – (4), con el vector de estados $x = (G, X, I)$

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + k_1 C(x - \hat{x}) + k_2 C(x - \hat{x})^w \tag{8}$$

*Prueba.*Definiendo el error de observación como $e = x - \hat{x}$ la correspondiente dinámica del error es

$$\dot{e} = \Delta\Phi(e) + k_1 Ce + k_2 Ce^w \tag{9}$$

Suposición 1.- La diferencia entre los campos vectoriales $\Delta\Phi = f(x) - f(\hat{x})$ es Lipchitz acotada, $|\Delta\Phi| \leq \Lambda|e|$, por lo tanto

$$|\dot{e}| = \Lambda|e| + k_1 C|e| + k_2 C|e^w| = (\Lambda + k_1 C)|e| + k_2 C|e^w| \tag{10}$$

Consideremos un elemento escalar del vector 4 y empleando la igualdad $|e| = Sign(e)e$, obtenemos la siguiente ecuacin

$$Sign(\dot{e}_i)e_i \leq (\Lambda + k_1 C)Sign(e_i)e_i + (k_2 C)_i Sign(e_i^w)e_i^w \tag{11}$$

o de otra manera

$$\dot{e}_i \leq \frac{(\Lambda + k_1 C)_i Sign(e_i)}{Sign(\dot{e}_i)} e_i + \frac{(k_2 C)_i Sign(e_i^w)}{Sign(\dot{e}_i)} e_i^w \tag{12}$$

Ahora si $Sign(\dot{e}_i) > 0$ y definiendo $\pi_{1,i} = \frac{(\Lambda + k_1 C)_i Sign(e_i)}{Sign(\dot{e}_i)}$ y $\pi_{2,i} = \frac{(k_2 C)_i Sign(e_i^w)}{Sign(\dot{e}_i)}$, se obtiene que $\dot{e}_i - \pi_{1,i} e_i \leq \pi_{2,i} e_i^w$. Para resolver la desigualdad, consideramos el cambio de variable $\gamma_i = e_i^{1-w}$ con $w > 1$, así, si $e_i = 0 \Rightarrow \gamma_i = 0$ y si $e_i \neq 0 \Rightarrow \gamma_i \neq 0$, es decir en ambos casos $\gamma_i > 0$ siempre que w sea impar cuando $e_i < 0$.

Luego considerando $e_i \neq 0$ con $w \in Z^+$, $w > 1$ un nmero impar. Por lo tanto, la siguiente desigualdad diferencial es obtenida

$$\dot{\gamma_i} - (1 - w)\pi_{1,i}\gamma_i \geq (1 - w)\pi_{2,i} \tag{13}$$

Resolviendo la desigualdad encontramos

$$\gamma_i \geq \gamma_{0,i} e^{-(w-1)\pi_{1,i}t} + \frac{\pi_{2,i}}{\pi_{1,i}}(1 - e^{-(w-1)\pi_{1,i}t}) \tag{14}$$

es claro que para cuando $t \to \infty$ la solución es $\gamma_i \geq \frac{\pi_{2,i}}{\pi_{1,i}}$. Finalmente en términos del error de observación encontramos que

$$e_i \leq \left(\frac{\pi_{1,i}}{\pi_{2,i}}\right)^{\frac{1}{w-1}} = \left(\frac{(\Lambda + k_1 C)_i Sign(e_i)}{(k_2 C)_i Sign(e_i^w)}\right)^{\frac{1}{w-1}} \tag{15}$$

Observación 8. Note que el error de estimación puede ser reducido tanto como sea deseado, considerando $k_2 C$ suficientemente grande o k_1 suficientemente pequeo, además, como w se incrementa el error disminuye según la ecuación 4.

Ahora, aplicaremos este resultado al sistema dado por $(1) - (4)$. Primeramente, el sistema requiere de una seal de excitación, la cual está provista por la ingesta diaria. De esta manera consideramos que se tiene un periodo de 24 hrs.

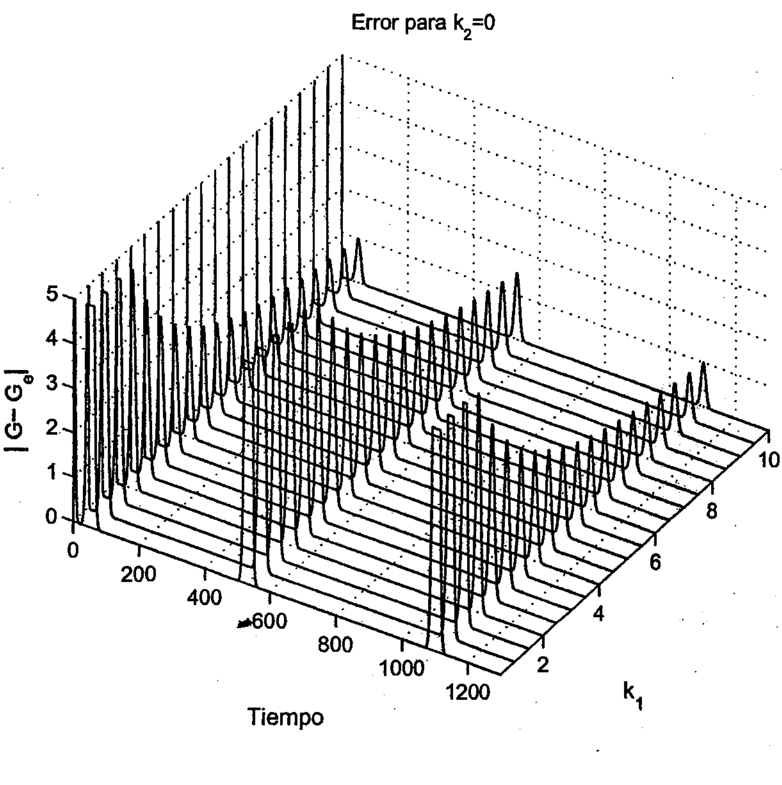

Fig. 1. Comportamiento del error de estimación conforme se incrementa el valor de k_1.

En base a la proposición, proponemos el siguiente estimador de orden completo para obtener un valor estimado de las variables del modelo

$$\begin{aligned} \dot{G}_e &= -P_1(G_e - G_b) - G_e X_e + k_1(G - G_e) + k_2(G - G_e)^3 \\ \dot{X}_e &= -P_2 X_e + P_3(I_e - I_b) + k_1(X - X_e) + k_2(X - X_e)^3 \\ \dot{I}_e &= -n(I_e - I_b) + \gamma(G_e - h)t + k_1(I - I_e) + k_2(I - I_e)^3 \end{aligned} \tag{16}$$

Consideramos dos casos, el primero para cuando $k_2 = 0$ es decir, sin el término polinomial, de donde el comportamiento del error es como se ilustra en la Figura 1

Se puede observar que el comportamiento es decreciente conforme el valor de la gananca k_1 se incrementa desde $k_1 = 0.5$ hasta $k_1 = 10$. Luego, para el caso en que $k_1 = 0$ y $k_2 = [0.5, 10]$, encontramos el comportamiento para el error ilustrado en la Figura 2.

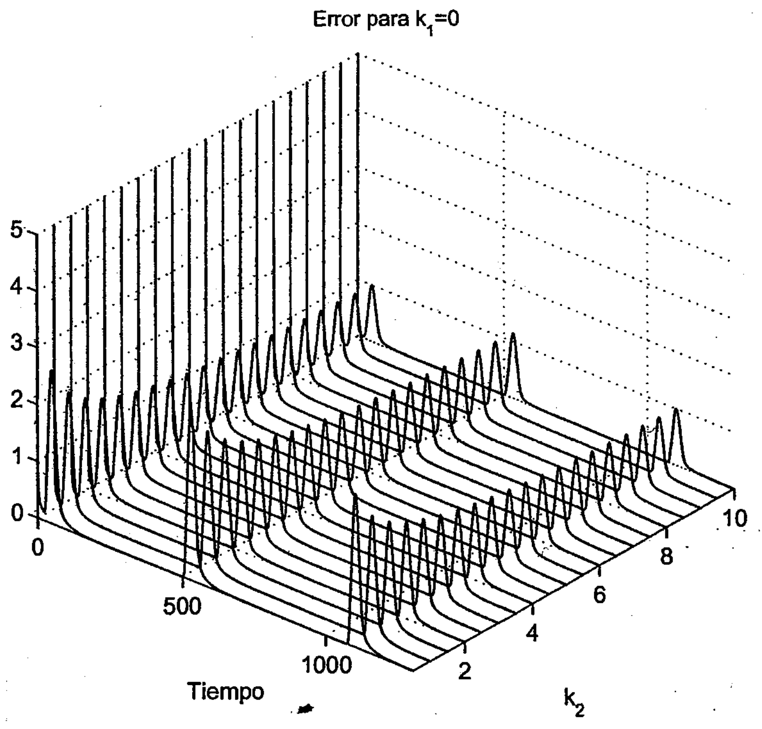

Fig. 2: Comportamiento del error de estimacin conforme se incrementa el valor de k_1.

Para los dos casos consideramos $w = 3$, ya que para valores pares de w el estimador diverge. Un punto interesante que es claro, es que el nuevo término reduce considerablemente la magnitud del error con bajos valores de ganancias, como se puede observar en la Figura 3.

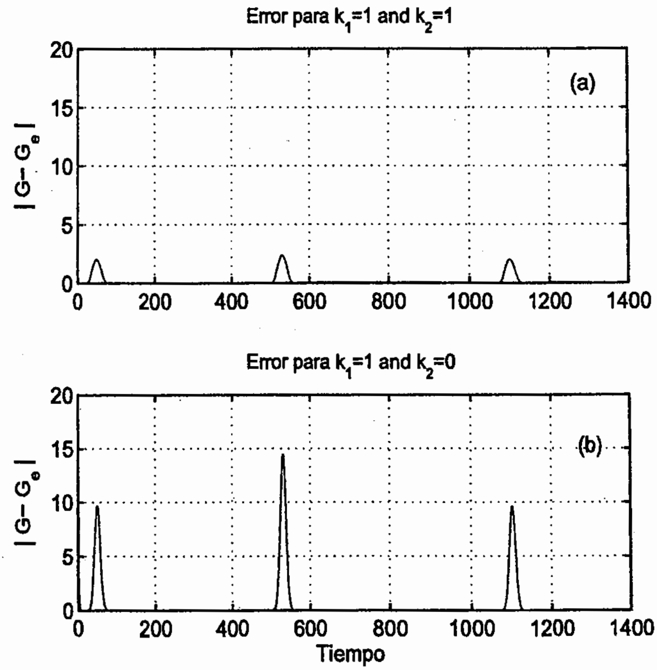

Fig. 3. Comportamiento del error (a) $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, (b) $k_1 = 1$, $k_2 = 0$.

5 Resultados y discusión

Como se observa, y en base a las definiciones previamente dadas, el modelo matemático mínimo de diabetes de Bergman se puede definir como un sistema diferencialmente plano, ya que todos sus estados pueden ser expresados como una dinámica sin la necesidad de la integración de cualquier ecuación diferencial, el vector de estados y el vector de entradas pueden ser explócitamente expresados en términos de las salidas denominadas planas y un número finito de sus derivadas temporales. En base a los resultados presentados se concluye que el sistema es observable.

References

1. S. Diop, M. Fliess, Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories, *Proc. IEEE CDC* Brighton, UK, (1991) 714-719.
   fliescol:95 M. Fliess, J. Lvine, P.H. Martn, P. Rouchn, Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples, *Int. J. Control* 61, (1995) 1327-1361.
2. A. Chelouah, Extension of differential flat fields and Liouvillian systems, *Proc. 36th IEEE CDC*, San Diego, USA, (1997) 4268-4273.
3. K. Parisa y Y.B. Shtessel, Blood glucose regulation using higher-order sliding mode control, *Int. J. Robust Nonlinear Control* 18 (2008) 557-569.