

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A. C.**

**POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

**Localización de Atractores Ocultos en  
Sistemas Lineales por Partes Basados  
en la Ecuación Jerk.**

Tesis que presenta

**Daniel Alfredo Ponce Pacheco**

Para obtener el grado de

**Maestro en Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la tesis:**

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., 3 de diciembre de 2020

# Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Localización de Atractores Ocultos en Sistemas Lineales por Partes Basados en la Ecuación de Jerk** presentada para obtener el grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Daniel Alfredo Ponce Pacheco** y aprobada el **cuatro de diciembre de dos mil veinte** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

---

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez  
(Director de la tesis)

---

Dr. Eric Campos Cantón  
Sinodal

---

Dr. César Octavio Maldonado Ahumada  
Sinodal

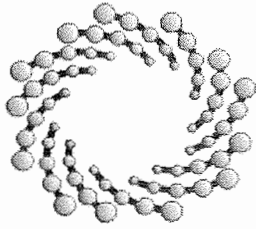
---

Dr. Adrián René Ramírez López  
Sinodal

# Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnológica con el número 931913, así como apoyos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 044 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 9 días del mes de diciembre del año 2020, se reunió a las 16:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Eric Campos Cantón</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Adrián René Ramírez López</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Daniel Alfredo Ponce Pacheco**

sobre la Tesis intitulada:

***Localización de Atractores Ocultos en Sistemas Lineales por Partes Basados en la Ecuación Jerk***

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez**


El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 18:00 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 9 días del mes de diciembre de 2020.

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

  
**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico





# Dedicatoria

*Dedicado a mi familia.*

# Agradecimientos

A Dios por todo lo que me da sin yo merecerlo, por las bendiciones y pruebas que pone en mi camino.

A mi familia por su apoyo incondicional en cada proyecto emprendido y en general en cada aspecto de mi vida.

A mi asesor, el Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez, por los conocimientos brindados así como por sus palabras de aliento y motivación.

A mis sinodales: Dr. Eric Campos Cantón, Dr. César Octavio Maldonado Ahumada, Dr. Adrián René Ramirez López por su tiempo, comentarios y observaciones para la culminación de esta tesis.

A todos mis profesores de la maestría que me enseñaron tanto de la profesión como de la vida, impulsándome siempre a seguir adelante.

A mis compañeros del IPICYT, gracias por estar a mi lado en las buenas y en las malas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para estudios de maestría.

Al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C. por permitirme realizar mis estudios de maestría y en especial a la División de Matemáticas Aplicadas por su valiosa retroalimentación.

A mis amigos y a todas aquellas personas que me han ayudado y alentado a continuar.

# Índice general

<b>Índice de Figuras</b>	<b>XII</b>
<b>Resumen</b>	<b>XIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas dinámicos . . . . .	1
1.1.1. Análisis del comportamiento asintótico . . . . .	4
1.1.2. Herramientas de estabilidad . . . . .	5
1.2. Estado del conocimiento . . . . .	11
1.3. Descripción del documento . . . . .	12
<b>2. Atractores auto-excitados y atractores ocultos</b>	<b>15</b>
2.1. Atractores auto-excitados . . . . .	15
2.2. Ejemplos de atractores en sistemas lineales por partes . . . . .	17
2.2.1. Sistema de Chua . . . . .	17
2.2.2. Sistema PWL basado en la ecuación de Jerk . . . . .	20
2.3. Sistemas tipo Lur'e . . . . .	22
2.4. Atractores ocultos . . . . .	23
2.4.1. Sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio . . . . .	23
2.4.2. Sistemas dinámicos con un punto de equilibrio estable . . . . .	24
2.4.3. Sistemas dinámicos con una línea de equilibrio . . . . .	25
2.4.4. Sistemas dinámicos con diferentes atractores ocultos . . . . .	26
2.5. Método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos . . . . .	29
2.5.1. Determinación de soluciones periódicas estables para sistemas con no linealidades escalares . . . . .	32
<b>3. Atractores ocultos en sistemas lineales por partes</b>	<b>38</b>
3.1. Construcción de contraejemplos a las conjeturas de Aizerman y Kalman . . . . .	38
3.2. Localización de atractores ocultos en el sistema de Chua . . . . .	42
3.2.1. Caso 1: Puntos de equilibrio $\tilde{x}_2$ estable, $\tilde{x}_{1,3}$ inestables . . . . .	45
3.2.2. Caso 2: Puntos de equilibrio $\tilde{x}_2$ inestable, $\tilde{x}_{1,3}$ estables . . . . .	49
3.3. Un atractor oculto en el sistema de Chua generalizado . . . . .	53

<b>4. Búsqueda de atractores ocultos en sistemas PWL basados en la ecuación de Jerk</b>	<b>59</b>
4.1. Sistema basado en la ecuación Jerk con una función escalar lineal de dos partes	61
4.1.1. Puntos de equilibrio $\tilde{x}_{1,2}$ inestables . . . . .	62
4.1.2. Puntos de equilibrio $\tilde{x}_{1,2}$ estables . . . . .	64
4.2. Sistema PWL basado en la ecuación de Jerk y no linealidad basada en el diodo de Chua . . . . .	65
4.2.1. Puntos de equilibrio $\tilde{x}_{1,3}$ inestables, $\tilde{x}_2$ estable . . . . .	66
4.2.2. Puntos de equilibrio $\tilde{x}_{1,3}$ estables, $\tilde{x}_2$ inestable . . . . .	67
4.2.3. Tres puntos de equilibrio $\tilde{x}_{1,2,3}$ estables . . . . .	69
4.2.4. Tres puntos de equilibrio $\tilde{x}_{1,2,3}$ inestables . . . . .	70
<b>5. Conclusiones</b>	<b>73</b>
5.1. Trabajo futuro . . . . .	74

# Índice de figuras

1.1.	A la izquierda un nodo estable con eigenvalores $\lambda_1 \neq \lambda_2 < 0$ ; a la derecha un nodo inestable con eigenvalores $\lambda_1 \neq \lambda_2 > 0$ . . . . .	7
1.2.	A la izquierda un nodo estrella estable con eigenvalores $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ; a la derecha un nodo estrella inestable con eigenvalores $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ . . . . .	7
1.3.	Una silla, con eigenvalores $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . . . . .	7
1.4.	A la izquierda un foco estable con eigenvalores $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ y $\alpha < 0$ ; a la derecha un foco inestable con eigenvalores $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ y $\alpha > 0$ . . . . .	8
1.5.	Un centro en el origen, con eigenvalores $\lambda = \alpha \pm \beta i$ , donde $\alpha = 0$ $\beta \in \mathbf{R}$ . . . . .	8
1.6.	El mapa de Poincaré . . . . .	9
1.7.	A la izquierda un ciclo límite estable con $P(0) = 0$ $P'(\mathbf{x}_0) < 1$ , a la derecha un ciclo límite inestable con $P(0) = 0$ $P'(\mathbf{x}_0) > 1$ . . . . .	10
2.1.	Atractor en el oscilador de Van der Pol con $\mu = 2$ , punto de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}} = (0,0)^T$ (rojo) y condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0.1, 0.1)^T$ . Éste atractor es considerado auto-excitado ya que puede ser localizado desde la una vecindad del punto de equilibrio inestable. . . . .	16
2.2.	Atractor caótico auto-excitado en el sistema de Lorenz con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0.1, 0, 0)^T$ . Los parámetros $\sigma = 10$ , $\beta = 8/3$ , $\rho = 28$ producen tres puntos de equilibrio inestables (rojo). . . . .	17
2.3.	Atractor auto-excitado de sistema (4.12) con parámetros $\alpha = 15$ , $\beta = 28$ , $\gamma = 0$ , $m_0 = -8/7$ y $m_1 = -5/7$ y condiciones iniciales $\mathbf{x}_0 = (0, -0.1, 0)^T$ . En rojo los puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (-1.5, 0, 1.5)^T$ , $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (0, 0, 0)^T$ y $\tilde{\mathbf{x}}_3 = (1.5, 0, -1.5)^T$ . . . . .	20
2.4.	Atractor de doble scroll auto-excitado del sistema (2.10) con la matriz $\mathbf{A}$ dada por la ecuación (2.12) y $\mathbf{B}$ dada por la ecuación (2.13) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0.6, 0, 0.1)^T$ . En rojo se indican los puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (0, 0, 0)^T$ y $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (0.6, 0, 0)^T$ . . . . .	21
2.5.	Sistema de tipo Lur'e: conexión en realimentación de un sistema lineal (2.14) y un elemento no lineal $\psi(\mathbf{y}(t))$ . . . . .	22
2.6.	Atractor oculto del sistema (2.17) sin puntos de equilibrio, con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (-1.6, 0.82, 1.9)^T$ . . . . .	23

2.7.	En rojo se muestra el punto de equilibrio estable $\tilde{\mathbf{x}} = (0.25, 0.0625, -0.096)^T$ . A la izquierda una trayectoria del sistema (2.18) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0.35, 0.1625, -0.096)^T$ que se dirige al equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}$ . A la derecha el atractor oculto del sistema (2.18) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$ . . . . .	25
2.8.	En rojo se muestra la línea de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}} = (0, 0, x_3^*)^T$ . A la izquierda una trayectoria del sistema (2.19) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0.5, 0.1)^T$ que converge a un punto de la línea de equilibrio. A la derecha el atractor oculto del sistema (2.19) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0.5, 0.5)^T$ . . . . .	26
2.9.	Atractor oculto del sistema (2.20) con parámetros $a = 0.005$ , $b = 0.2$ y $c = 0$ y con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T$ . . . . .	27
2.10.	En rojo el punto de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}} = (-0.25, 0, -0.02)^T$ del sistema (2.20) con parámetros $a = 0.002$ , $b = 0.2$ y $c = 0.002$ . Trayectoria del sistema (2.20) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (-0.15, 0.0, -0.02)^T$ . Atractor oculto del sistema (2.20) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T$ . . . . .	28
2.11.	En rojo la línea de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1^*, 0, 0)^T$ , a la izquierda una trayectoria del sistema (2.20) con parámetros $a = c = 0$ y $b = 0.2$ y condición inicial $\mathbf{x}_0 = (-1, 0.1, 0.1)^T$ . A la derecha el atractor caótico del sistema (2.20) con condiciones iniciales $\mathbf{x}_0 = (-1, 0.1, 0.5)^T$ . . . . .	29
3.1.	Solución periódica para el sistema (3.1) para $j = 1$ , con condiciones iniciales $\mathbf{x}_0^1 = (0, -1.7513, 0, 0)^T$ . Proyección en el plano $(x_1(t), x_2(t))$ . . . . .	40
3.2.	Calculo secuencial de una solución periódica para $j = 2, \dots, 9$ . Proyecciones en el plano $(x_1(t), x_2(t))$ . . . . .	41
3.3.	Solución periódica $\mathbf{x}^{10}(t)$ para el sistema (3.1) para $j = 10$ , condiciones iniciales $\mathbf{x}_0^{10} = (23.3012, -4.2240, 0.9856, 0.0905)^T$ . Proyección en el plano $(x_1(t), x_2(t))$ . . . . .	41
3.4.	Atractor oculto del sistema (3.1) que coexiste con el punto de equilibrio estable $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (0, 0, 0)^T$ . Proyecciones de la solución periódica $\mathbf{x}^{10}(t)$ en los planos $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , $(x_1(t), x_4(t))$ , $(x_2(t), x_3(t))$ , $(x_4(t), x_3(t))$ respectivamente. . . . .	42
3.5.	Paso 1: Oscilación inicial para el sistema (3.11) con $j = 1$ , parámetros (3.17), $\mathbf{x}_0 = (5.8576, 0.3694, -8.3686)^T$ . . . . .	46
3.6.	Transformación secuencial de la solución oscilante $\mathbf{x}^j(t)$ con el incremento del parámetro $\varepsilon_j = 0.2, \dots, 0.9$ , con $j = 2, \dots, 9$ . . . . .	47
3.7.	Atractor oculto del sistema de Chua (3.9) con el conjunto de parámetros (3.17), condiciones iniciales $\mathbf{x}_{0+}^{10} = (-3.0335, -0.9829, 4.6962)^T$ . . . . .	47
3.8.	Atractor oculto simétrico $\Gamma_-^{hid}$ del sistema de Chua (3.9), parámetros (3.17), condiciones iniciales $\mathbf{x}_{0-}^{10} = (3.0335, 0.9829, -4.6962)^T$ . . . . .	48
3.9.	Dos atractores caóticos ocultos simétricos, $\Gamma_{\pm}^{hid}$ , parámetros (3.17), condiciones iniciales $\mathbf{x}_0 = \pm(-3.0335, -0.9829, 4.6962)^T$ . . . . .	48
3.10.	Solución periódica $\mathbf{x}^1(t)$ para el primer paso del procedimiento, parámetros (3.22) y (3.24), condiciones iniciales $\mathbf{x}_0^1 = (11.7546, 9.7044, -16.7367)^T$ . . . . .	50
3.11.	Soluciones periódicas $\mathbf{x}^j(t)$ con $j = 2, \dots, 9$ , parámetros (3.22) y (3.24). . . . .	50

3.12. Ciclo límite oculto $\Gamma_{limCyc}^{hid}$ en el sistema de Chua (3.9), parámetros (3.22) y (3.24), condiciones iniciales $\mathbf{x}_0^{10} = (2.4725, -2.5339, -36.5307)^T$ . . . . .	51
3.13. La solución $\mathbf{x}^1(t)$ se dirige al origen. . . . .	51
3.14. Atractor oculto $\Gamma_{+hid}$ del sistema de Chua (3.12), $j = 10$ , con parámetros (3.22) y condición inicial $\mathbf{x}_0^{10} = (1.5187, 0.0926, -2.1682)^T$ . . . . .	52
3.15. Atractor oculto simétrico, $\Gamma_{-}^{hid}$ , del sistema de Chua (3.12), $j = 10$ , con parámetros (3.22) y condición inicial $\mathbf{x}_{0-}^{10} = (-1.5187, -0.0926, 2.1682)^T$ . . . . .	52
3.16. Atractores ocultos simétricos $\Gamma_{\pm}^{hid}$ coexisten con los puntos de equilibrio estables $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ . Las trayectorias iniciadas cerca del punto de equilibrio inestable $\tilde{\mathbf{x}}_2$ se dirigen a los puntos de equilibrio estables. . . . .	53
3.17. Gráfica de la no linealidad $\psi(x_1(t))$ (3.30). . . . .	54
3.18. Paso 1: Oscilación inicial para el sistema de Chua (3.9) con no linealidad (3.30), $\varepsilon_1 = 0.1$ . . . . .	57
3.19. Continuación numérica para el sistema de Chua con no linealidad (3.30) para $j = 2, \dots, 9$ . . . . .	57
3.20. Atractor $\Gamma$ del sistema de Chua generalizado (3.29) de condición inicial $\mathbf{x}_0^{10} = (-3.4431, -1.1884, 0.1849)^T$ . . . . .	58
3.21. Atractor auto-excitado del sistema de Chua generalizado (3.29) con condición inicial $\mathbf{x}_0 = (3.4806, 2.3188, -1.0618)^T$ . . . . .	58
4.1. Atractor con dos enroscados del sistema (4.15) con parámetros $\alpha = 1.5$ , $\beta = 1$ , $\gamma = 1$ y condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0.6, 0, 0.1)^T$ considerado auto-excitado. En rojo los puntos de equilibrio inestables $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (0, 0, 0)^T$ y $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (0.6, 0, 0)^T$ . . . . .	62
4.2. Solución oscilante $\mathbf{x}^1(t)$ del sistema (2.24) con no linealidad (4.10) y parámetros $\alpha = 1.5$ , $\beta = 1$ , $\gamma = 1$ con $\varepsilon_1 = 0.1$ , el primer paso del procedimiento multietapas con condición inicial $\mathbf{x}_0^1 = (0.3, 0, 0)^T$ . . . . .	63
4.3. Soluciones $\mathbf{x}^j(t)$ con $j = 2, \dots, 9$ , del sistema (2.24) con no linealidad (4.10) aumentando $\varepsilon_j$ en pasos de 0.1. . . . .	64
4.4. Atractor de dos enroscados auto-excitado del sistema (2.24) con no linealidad (4.10) y parámetros $\alpha = 1.5$ , $\beta = 1$ , $\gamma = 1$ con $\varepsilon_{10} = 1$ . . . . .	64
4.5. Solución $\mathbf{x}^1(t)$ del sistema (4.5) con no linealidad (4.12) y con el conjunto de parámetros (4.18) con $\varepsilon_1 = 0.1$ con condición inicial $\mathbf{x}_0^1 = (1.22309, 0, 0)^T$ . . . . .	67
4.6. Solución $\mathbf{x}^1(t)$ del sistema (4.5) con no linealidad (4.12) y con el conjunto de parámetros (4.20) con $\varepsilon_1 = 0.1$ con condición inicial $\mathbf{x}_0^1 = (8.2557, 0, 0)^T$ . . . . .	68
4.7. Soluciones $\mathbf{x}^j(t)$ con $j = 2, \dots, 9$ , del sistema (4.5) con no linealidad (4.12) y el conjunto de parámetros (4.20) aumentando $\varepsilon_j$ en pasos de 0.1. . . . .	68
4.8. solución $\mathbf{x}^{10}(t)$ , es decir, una solución periódica del sistema original (4.17) . . . . .	69
4.9. Trayectoria de iniciada desde una vecindad del punto de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_2$ . . . . .	69
4.10. Trayectoria de la solución periódica $\mathbf{x}^1(t)$ del sistema (2.24) con no linealidad (4.12) y conjunto de parámetros (4.22) con $\varepsilon_1 = 0.5$ y condición inicial $\mathbf{x}_0^1 = (22.2742, 0, 0)^T$ . Después de un proceso transitorio la solución $\mathbf{x}^1(t)$ llega a un estado de oscilación considerando un tiempo de $T = 3000$ . . . . .	71

4.11. Transformación de la solución del sistema (4.5) con la no linealidad (4.12) con $\varepsilon = 0.55, \dots, 0.95$ con pasos de 0.05 y considerando $T = 5000$ . . . . .	71
4.12. El par de atractores ocultos simétricos $\Gamma_{\pm}^{hid}$ , con condiciones iniciales $\mathbf{x}_0^{11} = \pm(-0.9488, 2.1717, -2.1652)^T$ en el sistema (4.17) . . . . .	72
4.13. Coexistencia de un atractor auto-excitado $\Gamma^{auto}$ con un par de atractores ocultos simétricos $\Gamma_{\pm}^{oculto}$ en el sistema (4.17) . . . . .	72



# Resumen

Los sistemas dinámicos no lineales pueden presentar fenómenos dinámicos conocidos como atractores los cuales atraen a las soluciones del sistema que se encuentran lo suficientemente cerca. El estado final, es decir, el atractor en el que el sistema evoluciona, depende fuertemente de las condiciones iniciales. Además, dichos sistemas son muy sensibles a los parámetros del sistema, por lo que puede producirse un cambio repentino en la estabilidad del sistema. Para comprender la dinámica de estos sistemas, se debe identificar todos los atractores posibles y sus cuencas de atracción. Las cuencas de atracción de los atractores ocultos no tocan puntos de equilibrio inestables (si existen) y se encuentran lejos de dichos puntos. La localización de los atractores ocultos no es sencilla, ya que no existen procedimientos que conduzcan a ellos desde las vecindades de puntos de equilibrio inestables. Desde el punto de vista de las aplicaciones, la identificación de atractores ocultos es un problema importante. El conocimiento sobre la aparición y las propiedades de los atractores ocultos puede aumentar la probabilidad de que el sistema permanezca en el atractor más deseable y reducir el riesgo de un salto repentino a un comportamiento no deseado.

La existencia de atractores ocultos en sistemas PWL como el circuito de Chua, el cual puede ser interpretado como tres sistemas lineales conectados en diferentes secciones del espacio de estados, motiva la búsqueda de atractores ocultos en sistemas lineales por partes. El método utilizado por Gennady A. Leonov es un acercamiento analítico-numérico efectivo para la localización de un atractor, basado en el método de la función descriptiva (DFM), el efecto de un parámetro pequeño y la continuación numérica. La idea es encontrar analíticamente una solución oscilante para el primer sistema de una secuencia de sistemas similares, y entonces, seguir numéricamente la transformación de esta solución inicial al pasar de un sistema a otro. En el presente trabajo propone aplicar el método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos en sistemas PWL basados en la ecuación Jerk con el objetivo de determinar realizaciones numéricas que conduzcan a atractores ocultos.

# Abstract

Nonlinear dynamic systems can present dynamic phenomena known as attractors which attract solutions of the system that are close enough. The final state, that is, the attractor in which the system evolves, strongly depends on the initial conditions. In addition, such systems are very sensitive to system parameters, so a sudden change in system stability can occur. To understand the dynamics of these systems, all possible attractors and their basins of attraction must be identified. The basins of attraction of the hidden attractors do not touch unstable equilibrium points (if they exist) and are far from these points. The location of the hidden attractors is not easy, since there are no procedures that lead to them from the vicinity of unstable equilibrium points. From an applications point of view, the identification of hidden attractors is a major problem. Knowing about the appearance and properties of hidden attractors can increase the likelihood that the system will stay on the most desirable attractor and reduce the risk of a sudden jump to unwanted behavior.

The existence of hidden attractors in PWL systems such as the Chua circuit, which can be interpreted as three linear systems connected in different sections of the state space, motivates the search for hidden attractors in piecewise linear systems. The method used by Gennady A. Leonov is an effective numerical-analytical approach to locating an attractor, based on the descriptive function method (DFM), the effect of a small parameter, and numerical continuation. The idea is to analytically find an oscillating solution for the first system in a sequence of similar systems, and then numerically follow the transformation of this initial solution when going from one system to another. In the present work he proposes to apply the analytical-numerical method for the location of hidden attractors in PWL systems based on the Jerk equation in order to determine numerical realizations that lead to hidden attractors.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Sistemas dinámicos

Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y cumplen cierto objetivo común. Un sistema es llamado dinámico si evoluciona en el tiempo de acuerdo con una regla bien definida que no cambia conforme el sistema evoluciona.

Tratando de precisar el concepto de sistema dinámico, podemos decir que nos permite estudiar fenómenos deterministas, es decir, situaciones que dependen de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo con leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro.

**Definición 1.1.** [1] Un *sistema dinámico* sobre  $E$  está definido por un mapa  $C^1$

$$\phi : \mathbf{R} \times E \rightarrow E$$

donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^n$ . Si para cada  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $\phi(t, x_0)$  es la solución del problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in E, \quad t \in \mathbf{R} \quad (1.1)$$

Escribiendo la solución completa para todo  $t$  comenzando en  $x \in E$  ( $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ ). Entonces, toda la solución  $\phi_t(x)$  satisface

1.  $\phi_0(x) = x$ , para toda  $x \in E$ ;
2.  $\phi_v \circ \phi_s = \phi_{v+s}(x)$ , para toda  $s, v \in \mathbf{R}$  y  $x \in E$ .

con  $\circ$  la composición de mapas.

**Definición 1.2.** [1] Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^n$  y sea  $f \in C^1(E)$ . Para  $x_0 \in E$ , con  $\phi(t, x_0)$  la solución del problema de condición inicial (1.1). Entonces el conjunto de mapeos  $\phi_t$  definido por

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$$

es llamado *el flujo de la ecuación diferencial* (1.1) o el flujo definido por la ecuación diferencial (1.1) que describe un sistema dinámico. Adicionalmente, decimos que si el punto inicial  $\mathbf{x}_0$  es como fijo, entonces el mapeo  $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0) : E \rightarrow E$  define una curva de solución o *trayectoria* del sistema (1.1) a través del punto  $\mathbf{x}_0 \in E$ .

En general, un sistema dinámico tiene dos partes: Por un lado, un *vector de estados*  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  que describen exactamente el estado de un sistema real o hipotético y cuyas componentes son las variables de estado, y por otro lado, una *función*  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  (una regla) la cual nos dice, dado el estado actual, como será el estado del sistema en el siguiente instante de tiempo, es decir, describe la evolución del sistema sobre el tiempo.

Antes de continuar daremos a algunos conceptos importantes.

**Definición 1.3.** [5] El *estado* de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de información a partir del cual es posible determinar completamente la condición del sistema en el instante de tiempo siguiente.

**Definición 1.4.** [5] Las *variables de estado* de un sistema dinámico son el número mínimo de variables que representan el estado del sistema. Si para describir el comportamiento un sistema dinámico se requieren  $n$  variables  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , entonces tales  $n$  variables son un conjunto de variables de estado, siempre es posible escoger diferentes conjuntos de variables para representar el estado del sistema.

**Definición 1.5.** [5] Un *vector de estados* es un vector  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  cuyas componentes con las  $n$  variables de estado. Así un vector de estados es un vector que determina el estado del sistema  $\mathbf{x}(t)$  para cualquier  $t \geq t_0$ , una vez que es dado el estado en  $t = t_0$  y especificada la función  $f(\mathbf{x}(t))$ .

**Definición 1.6.** [5] El *espacio de estado* es el espacio  $n$ -dimensional cuyos ejes de coordenadas consisten en las variables de estado  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . De modo que cualquier estado del sistema dinámico puede ser representado por un punto en el espacio de estados.

Geoméricamente, un sistema dinámico describe el movimiento de un punto en el espacio de estados a lo largo de curvas solución definidas por un sistema de ecuaciones diferenciales que pasa por la condición inicial.

Los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grandes clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente ( $t \in \mathbf{R}$ ) y en los que el tiempo transcurre discretamente ( $t \in \mathbf{N}$ ). En el caso de los sistemas dinámicos discretos la regla es aplicada a instantes de tiempo que forman una secuencia ordenada de puntos en lugar de  $a$  un continuo. A estos sistemas también se les llama *mapas*. Para estos sistemas, denotamos al tiempo por la letra  $k \in \mathbf{N}$ , y el sistema es especificado por las ecuaciones en diferencia

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k)) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$  y  $f$  es una función  $f : E \rightarrow E$ . Salvo que digamos lo contrario, siempre consideraremos funciones  $f$  suficientemente suaves, es decir, con derivadas continuas en todos los ordenes necesarios. Se sigue que  $\mathbf{x}(k) = f^k(\mathbf{x}_0)$ , donde  $f^k$  denota la  $k$ -ésima aplicación

de  $f$  a  $x_0$ . La ecuación (1.2) puede interpretarse de la siguiente forma: si el sistema adopta en un instante  $k$  un estado descrito como  $\mathbf{x}(k)$ , entonces en el instante  $k + 1$  el estado del sistema será  $\mathbf{x}(k + 1)$ , el cual se calcula mediante la regla  $f$ . La cual representa la ley de evolución del sistema dinámico, de modo que el estado actual se transforma en el siguiente estado que el sistema adopta.

Por otro lado, los sistemas dinámicos continuos en el tiempo, la regla que gobierna un sistema dinámico de  $n$  variables de estado esta dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).\end{aligned}$$

Así podemos definir los vectores

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, f(\mathbf{x}(t), t) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix},$$

y tenemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  es el estado del sistema,  $f$  es una función  $C^1$  y  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$  es la condición inicial de las variables de estado.

Un caso especial de (1.3) surge cuando la función  $f$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ , es decir

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)), \quad (1.4)$$

en tal caso el sistema es llamado *autónomo* o *invariante en el tiempo*. El comportamiento de un sistema autónomo es invariante a los cambios en el tiempo inicial, ya que el cambio en la variable tiempo desde  $t$  a  $\tau = t - a$  no cambia el lado derecho de la ecuación de estados. Si el sistema no es autónomo, entonces el llamado *no autónomo* o *variante en el tiempo* [7].

Los sistemas dinámicos también pueden ser clasificados en sistemas lineales y sistemas no lineales.

**Definición 1.7.** [5] Un sistema es llamado *sistema lineal* si se le puede aplicar el principio de superposición

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t)) = af(\mathbf{x}(t)) + bf(\mathbf{y}(t)), \quad a, b \in \mathbf{R} \quad (1.5)$$

El principio de superposición dice que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos diferentes funciones forzadas *entradas* es la suma de dos *sus* repuestas individuales. Por lo tanto, para un sistema lineal, la respuesta a varias entradas puede ser calculada tratando una entrada a la vez y sumando los resultados. Este principio nos permite construir soluciones a entradas compuestas como una combinación lineal de las soluciones de la ecuación diferencial a cada uno de los componentes de la entrada compuesta.

**Definición 1.8.** [5] A un sistema se le llama *sistema no lineal* si no aplica el principio de superposición.

Así que para un sistema no lineal la respuesta a una entrada compuesta por la suma de dos no puede ser calculada tratando una entrada a la vez y sumando los resultados.

El análisis más directo de un modelo dinámico es la determinación de soluciones de las ecuaciones que lo describen. A veces es posible encontrar una solución de forma analítica, pero comúnmente es necesario generar soluciones de una manera numérica por el uso de un proceso llamado *simulación*.

El estudio de sistemas dinámicos es motivado por el deseo de ir más allá de calcular soluciones de un modelo, se busca establecer relaciones estructurales entre parámetros y su influencia sobre la solución. Por lo tanto la representación de la dinámica del sistema se auxilia mucho de técnicas geométricas de visualización.

El comportamiento de las soluciones de un sistema dinámico se puede dividir en comportamiento transitorio y comportamiento asintótico. Comportamiento transitorio es el comportamiento que tiene la solución en el espacio de estados desde una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  hasta cierto estado  $\mathbf{x}(T)$ , para  $T > 0$ , en el cual esta muy cerca de su comportamiento estacionario. Por otro lado, el comportamiento asintótico es el comportamiento de la solución cuando  $t \rightarrow \infty$ , donde podemos observar dos posibles tipos de comportamiento asintótico, por un lado la solución puede escapar al infinito, o por el contrario quedarse atrapada en la vecindad y eventualmente converger a un estado estacionario del sistema dinámico.

En sistemas lineales un estado estacionario solo puede ser un punto de equilibrio; en cambio los sistemas no lineales pueden presentar puntos de equilibrio, ciclos límite y regiones del espacio de estados llamadas atractores extraños. A los estados estacionarios los podemos llamar conjuntos invariantes.

**Definición 1.9.** [2]. Un conjunto  $K$  es un *conjunto invariante* de un sistema dinámico cuando una condición inicial  $x_0 \in K$  del sistema, la trayectoria se mantiene en  $K$ .

Un punto de equilibrio es quizá el ejemplo más simple de un conjunto invariante. Si el sistema inicia en tal punto, nunca lo deja. También, si un sistema tiene muchos puntos de equilibrio, la colección  $K$  de tales puntos es un conjunto invariante.

### 1.1.1. Análisis del comportamiento asintótico

Asumiendo que el lector esta familiarizado con sistemas lineales [1], en el caso de sistemas no lineales diferentes tipos de comportamientos adicionales pueden presentarse, de modo que el análisis también es diferente. Usualmente las soluciones analíticas rara vez están disponibles para sistemas no lineales, para el análisis de su comportamiento deben ser empleados métodos más sutiles. Los objetivos del análisis sistemas no lineales, en general, no buscan soluciones detalladas ya sea en forma numérica o analítica, en su lugar buscan caracterizar algunos aspectos del comportamiento del sistema. Los siguientes son ejemplos de fenómenos dinámicos que se presentan en sistemas no lineales

**Definición 1.10.** [7]. *Escape en tiempo finito*; el estado de un sistema lineal inestable va al infinito cuando el tiempo se va a infinito; el estado de un sistema no lineal puede ir a infinito en un tiempo finito.

**Definición 1.11.** [7]. Una *solución estacionaria* o un *punto estacionario* de un campo vectorial autónomo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  es un punto  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ , para el cual  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ . También son usados las expresiones *punto de equilibrio*, *punto critico*, *punto fijo*. Un sistema lineal solo puede tener un punto de equilibrio aislado. Un sistema no lineal puede tener mas de un punto de equilibrio aislado o no tenerlos. El estado puede converger a uno de los diferentes puntos de equilibrio, dependiendo del estado inicial del sistema [7].

**Definición 1.12.** [7]. Un *ciclo límite* es una trayectoria cerrada aislada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y por lo tanto las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite. Los ciclos límite sólo pueden ocurrir en sistemas no lineales; es imposible que sucedan en sistemas lineales. Aunque un sistema lineal puede tener orbitas cerradas, éstas no son aisladas y corresponden a la dinámica causada por un punto de equilibrio tipo centro.

**Definición 1.13.** [7]. Un *atractor extraño* es aquel que tiene un movimiento aperiódico y es muy sensible a condiciones iniciales. Tal comportamiento se conoce como caos y presenta aleatoriedad, ésto implica que las predicciones a largo plazo del sistema son casi imposibles a pesar de la naturaleza determinista de las ecuaciones. En muchas ocasiones surge cuando diferentes ciclos límite y puntos de equilibrio tipo silla se encuentran en el sistema. Bajo ciertas condiciones dichos repulsores enviarán la trayectoria a infinito; sin embargo puede haber situaciones que la trayectoria se quede viajando de repulsor a repulsor, sin tender a infinito, haciendo una órbita aperiódica.

### 1.1.2. Herramientas de estabilidad

Si se tiene un sistema dinámico lineal  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ , donde  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es fácil conocer que tipo de estabilidad presenta el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  de dicho sistema; simplemente se calculan las raíces de la ecuación característica  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$  con  $a_i \in \mathbf{R}$ , donde  $\lambda \in \mathbf{C}$  son los eigenvalores del operador  $\mathbf{A}$ ; y se analiza la relación que hay entre los eigenvalores, si todos los eigenvalores tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  es estable; el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  será inestable si no es estable.

En el caso de los sistemas no lineales  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  que tengan uno o varios puntos de equilibrio aislados podemos linealizar el sistema alrededor de los puntos de equilibrio y analizando cada subsistema linealizado por separado.

Para linealizar el sistema (1.3)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

en el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$  para el cual  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ , calculamos la *matriz Jacobiana*

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{a=\tilde{\mathbf{x}}}.$$

El sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (1.6)$$

con la matriz  $\mathbf{A} = Df(\tilde{\mathbf{x}})$  es llamado la linealización de  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  en  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

**Definición 1.14.** [1]. Un punto de equilibrio es llamado un *punto de equilibrio hiperbólico* de  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  si ninguno de los eigenvalores de la matriz  $Df(\tilde{\mathbf{x}})$  tiene parte real cero.

Un punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  se llama *sumidero* si, además de ser hiperbólico, todos los eigenvalores de la matriz  $Df(\tilde{\mathbf{x}})$  tienen parte real negativa; en cambio, se llama *fuentes* si es hiperbólico y además todos los eigenvalores de  $Df(\tilde{\mathbf{x}})$  si tienen parte real positiva.

Cerca de un punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  hiperbólico, el sistema no lineal  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  tiene variedades estables e inestables  $S$  y  $U$  tangentes en  $\tilde{\mathbf{x}}$  a los eigenespacios estable e inestables  $E_s$  y  $E_u$  del sistema linealizado. Además,  $S$  y  $U$  son de las mismas dimensiones que  $E_s$  y  $E_u$ , y si  $\phi_t$  es el flujo del sistema no lineal, entonces  $S$  y  $U$  son positivamente y negativamente invariantes bajo  $\phi_t$  respectivamente.

En el caso particular de sistemas dinámicos linealizados (1.6) donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$  el comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos de equilibrio es bien conocido. Para describir las trayectorias del sistema (1.6) consideramos la matriz invertible  $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ , cuyas columnas consisten en los eigenvectores generalizados de  $\mathbf{A}$  tal que la matriz

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}. \quad (1.7)$$

Aplicando una coordenada de transformación  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$ , el sistema es transformado a la forma

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{y}(t). \quad (1.8)$$

Los posibles comportamientos del sistema (1.8) en  $\mathbf{R}^2$  son los siguientes:

- *Nodo*: Es un punto tal que en sus proximidades todas las órbitas entran a él. Este comportamiento resulta cuando

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ . Es asintóticamente estable si las órbitas están direccionadas al punto lo que sucede si  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . En cambio, si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , el nodo es inestable y las trayectorias se alejan del él, ver Figura 1.1.



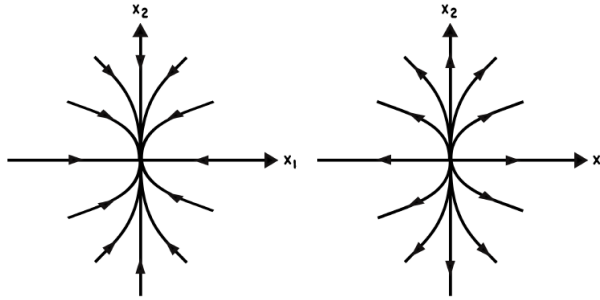


Figura 1.1: A la izquierda un nodo estable con eigenvalores  $\lambda_1 \neq \lambda_2 < 0$ ; a la derecha un nodo inestable con eigenvalores  $\lambda_1 \neq \lambda_2 > 0$

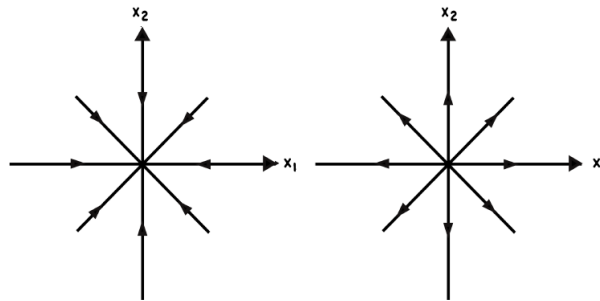


Figura 1.2: A la izquierda un nodo estrella estable con eigenvalores  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ; a la derecha un nodo estrella inestable con eigenvalores  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

- *Nodo estrella*: Es un nodo en el que la tasa de rapidez con que todas las trayectorias convergen o divergen del punto es igual. En este caso, la matriz  $\mathbf{B}$  es como en (1.9) con  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbf{R}$ , si son positivos el nodo estrella es inestable, y si son negativos es estable, ver Figura 1.2.
- *Punto silla*: Las trayectorias inicialmente tiende al punto pero después divergen de él. Este tipo de punto es inestable y se da cuando la matriz  $\mathbf{B}$  es como en (1.9) con  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , ver Figura 1.3.

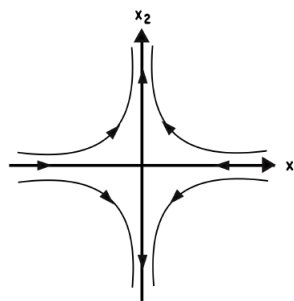


Figura 1.3: Una silla, con eigenvalores  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

- *Foco*: Consideremos la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

con  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , donde  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . En este caso la trayectoria del sistema gira al rededor del punto de equilibrio en el sentido de las manecillas del reloj si  $\beta > 0$ , y en sentido contrario si  $\beta < 0$ . Si  $\alpha < 0$ , este punto es asintóticamente estable, la trayectoria se dirige en una espiral hacia el punto de equilibrio. En cambio, cuando  $\alpha > 0$ , el punto de equilibrio es un foco inestable, las trayectorias se alejan del punto en una espiral, ver Figura 1.4.

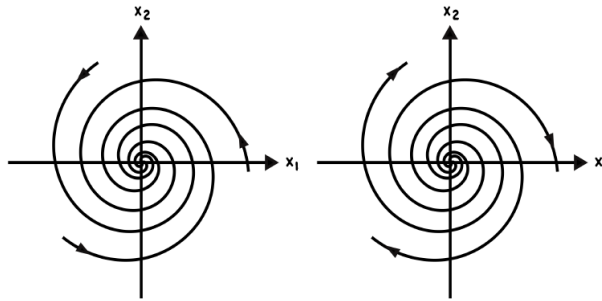


Figura 1.4: A la izquierda un foco estable con eigenvalores  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  con  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  y  $\alpha < 0$ ; a la derecha un foco inestable con eigenvalores  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  con  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  y  $\alpha > 0$

- *Centro*: Es tal que en sus proximidades todas sus órbitas son cerradas. Ninguna órbita entra y ninguna sale. Este punto es neutralmente estable y se presenta cuando la matriz  $\mathbf{B}$  es como en (1.10) con  $\alpha = 0$ , ver Figura 1.5.

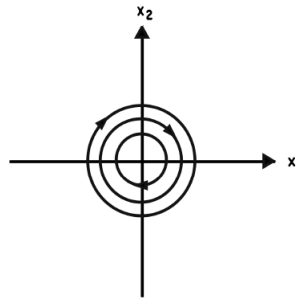


Figura 1.5: Un centro en el origen, con eigenvalores  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ , donde  $\alpha = 0$   $\beta \in \mathbf{R}$

En el caso de los ciclos límite, si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo, entonces éste es estable. El ciclo es inestable si las trayectorias vecinas se alejan del ciclo; existen casos donde se dice que el ciclo es semi-estable y se da cuando algunas trayectorias se alejan del ciclo y otras tienden a él (Figura 1.7).

Probablemente la herramienta más básica para el estudio de la estabilidad de ciclos límite es el mapa de Poincaré. La idea básica consiste en construir un hiperplano  $\Sigma$  el cual corta

transversalmente una trayectoria periódica  $\Gamma$  la cual cruzará por  $\Sigma$  cada vez que complete su periodo, siendo así como ocurre una dinámica discreta en el hiperplano  $\Sigma$  (ver Figura 1.6).

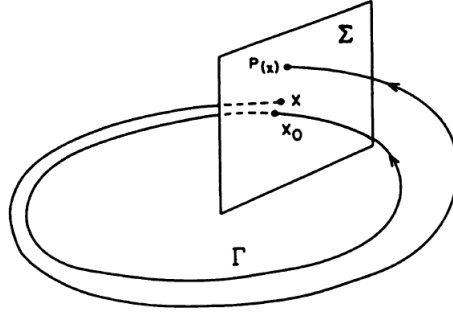


Figura 1.6: El mapa de Poincaré

**Definición 1.15.** [1]. Sea  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  una solución periódica de  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  de periodo  $T$  y sea el ciclo

$$\Gamma = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n | \mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{x}_0), \quad 0 \leq t \leq T\}.$$

Sea  $\Sigma$  el hiperplano ortogonal a  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}_0$ ; es decir, sea

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot f(\mathbf{x}_0) = 0\}.$$

Entonces para  $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Sigma$ , donde  $N$  es una vecindad  $\delta$  de  $\mathbf{x}_0$  con  $\delta > 0$ , se llama el *mapa de Poincaré* para  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}_0$  a la función

$$P(\mathbf{x}) = \phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}),$$

donde  $\tau(\mathbf{x})$  es una función definida y continuamente diferenciable para  $\mathbf{x}_0 \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  tal que  $\tau(\mathbf{x}_0) = T$  y

$$\phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma \forall \mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0).$$

La estabilidad de un ciclo límite  $\Gamma$  en  $\mathbf{R}^2$  esta determinada por la derivada del mapa de Poincaré,  $P'(\mathbf{x}_0)$ , en el punto  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ . Si  $P'(0) = 0$   $P'(\mathbf{x}_0) < 1$  entonces  $\Gamma$  es un ciclo límite estable; y si  $P'(0) = 0$   $P'(\mathbf{x}_0) > 1$ , entonces  $\Gamma$  es un ciclo límite inestable (Figura 1.7).

De hecho, las singularidades expuestas en esta sección, en sus casos estables, son considerados como atractores.

A continuación, mencionaremos lo que son los atractores auto-excitados y ocultos de acuerdo a [6].

**Definición 1.16.** Decimos que el conjunto invariante  $K$  (Definición 1.9) es *localmente atractivo* si para cierta  $\varepsilon$ -vecindad  $K(\varepsilon)$  de  $K$  se satisface la relación

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(K, x(t, x_0)) = 0, \quad \forall x_0 \in K(\varepsilon),$$

donde  $\rho(K, x)$  es la distancia desde el punto  $x$  al conjunto  $K$ , definida por

$$\rho(K, x) = \inf_{z \in K} |z - x|,$$

con  $|\cdot|$  la norma Euclidiana en  $\mathbf{R}^n$  y  $K(\varepsilon)$  es el conjunto de puntos  $x$  tales que  $\rho(K, x) < \varepsilon$ .

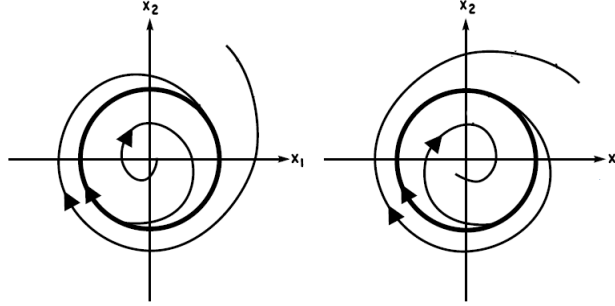


Figura 1.7: A la izquierda un ciclo límite estable con  $P(0) = 0$   $P'(x_0) < 1$ , a la derecha un ciclo límite inestable con  $P(0) = 0$   $P'(x_0) > 1$ .

**Definición 1.17.** Decimos que el conjunto invariante  $K$  es *globalmente atractivo* si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(K, x(t, x_0)) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n,$$

donde  $x(t, x_0)$  es la solución completa del sistema dinámico.

**Definición 1.18.** Decimos que  $K$  es

1. un *atractor* si es un conjunto invariante cerrado y localmente atractivo.
2. un *atractor global* si es un conjunto invariante cerrado y globalmente atractivo.

Al conjunto de puntos iniciales en el espacio de estados por los cuales la trayectoria de la solución se dirige al atractor se le llama *cuenca de atracción* o *región de atracción*.

Un ejemplo trivial de un atractor es el espacio de fase completo  $\mathbf{R}^n$ , si las trayectorias están definidas para todo  $t \geq 0$ . Esto muestra que es sensato introducir la noción de *atractor mínimo*, es decir, el conjunto invariante mínimo que posee la propiedad de atractividad. Un punto de equilibrio asintóticamente estable es un conjunto atractivo del correspondiente sistema dinámico.

En sistemas dinámicos no lineales, los atractores pueden ser considerados como *atractores auto-excitados* y *atractores ocultos*. Los atractores auto-excitados se pueden localizar numéricamente, después de un proceso transitorio una trayectoria, iniciada desde un punto de la vecindad de la variedad inestable de un punto de equilibrio, alcanza un estado de oscilación, por lo tanto se puede localizar fácilmente. En contraste, la cuenca de atracción de un *atractor oculto* no intersecta con una pequeña vecindad del equilibrio [8]. Mientras que la mayoría de los atractores conocidos en la literatura son auto-excitados, los atractores ocultos son más difíciles de establecer, pues necesario utilizar un procedimiento computacional complejo para determinar su existencia. Para la localización de atractores ocultos es necesario desarrollar procedimientos especiales, ya que no presentan comportamientos transitorios similares a los que se presentan para atractores auto-excitados que conduzca a tales atractores ocultos.

**Definición 1.19.** [38]. Un atractor es llamado *atractor auto-excitado* si su cuenca de atracción intersecta una vecindad abierta arbitrariamente pequeña de cualquier punto de equilibrio, de otra manera, es llamado *atractor oculto*.

Es importante remarcar que la cuenca de atracción de un atractor oculto no esta conectada a ningún punto de equilibrio inestable del sistema dinámico. Por ejemplo, los atractores ocultos son observados en los sistemas sin puntos de equilibrio [11],[12], con un punto de equilibrio estable [14] o con una línea de puntos de equilibrio [15],[16]. Esto mismo es observado en muchos sistemas dinámicos, como el sistema de Chua, donde varios atractores auto-excitados coexisten con atractores ocultos [34].

En este trabajo de tesis se investigan un tipo de sistemas dinámicos en tiempo continuo no lineales conocido como sistemas lineales por partes (PWL). Este tipo de sistemas están definidos por subsistemas lineales de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} A_1\mathbf{x}(t) + B_1, & \text{si } \mathbf{x}(t) \in D_1; \\ A_2\mathbf{x}(t) + B_2, & \text{si } \mathbf{x}(t) \in D_2; \\ \vdots & \vdots \\ A_n\mathbf{x}(t) + B_n, & \text{si } \mathbf{x}(t) \in D_n; \end{cases}, \quad (1.11)$$

donde  $\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es la matriz asociada al operador lineal,  $\mathbf{B}_i \in \mathbf{R}^n$  es un vector constante el cual puede ser igual a cero,  $D_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  son los dominios de cada subsistema, y se cumple que  $\bigcup_{i=0}^n D_i = \mathbf{R}^n$  y  $\bigcap_{i=0}^n D_i = \emptyset$ .

## 1.2. Estado del conocimiento

Primeramente, el problema de investigar oscilaciones ocultas surgió en la segunda parte de 16° problema de Hilbert [17], el cual plantea encontrar el número y la disposición de ciclos límite en sistemas que tengan asociados polinomios de un grado particular. Los primeros resultados no triviales fueron obtenidos en los trabajos de Bautin [18], los cuales fueron dedicados a la construcción de ciclos límite anidados en sistemas cuadráticos, esto mostró la necesidad de estudiar oscilaciones ocultas para resolver este problema.

En los 50-60's del último siglo, las investigaciones de las ampliamente conocidas *conjeturas de Markus-Yamabe* [19], *Aizerman* [20] y *Kalman* [21] sobre estabilidad absoluta han llevado el encuentro de oscilaciones ocultas en sistemas de control automático con un único punto estacionario estable. En 1961, Gubar [23] reveló un hueco en el trabajo de Kapranov [22] sobre bucles de fase bloqueadas (PLL, *phase locked-loops*) y mostró la posibilidad de la excitación de oscilaciones ocultas en PLL. Al final del último siglo, las dificultades en el análisis de oscilaciones ocultas surgieron en simulaciones de sistemas de perforación y sistemas de control de aeronaves (anti-windup) los cuales causaron choques [24].

Los trabajos de Nose [11] y Hoveer [12] en 1984-85 se centran en el estudio de sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio y sus modificaciones, donde pueden ser encontradas oscilaciones caóticas ocultas. Estos trabajos motivan a la construcción y estudio de sistemas caóticos sin puntos de equilibrio y con atractores ocultos.

Investigaciones más profundas sobre oscilaciones ocultas fueron muy alentadas por el descubrimiento de Leonov *et al.* [35] y Kuznetzov *et al.* [39], en 2010 (por primera vez), de un atractor oculto caótico en el circuito de Chua. Leonov *et al.* propusieron un algoritmo analítico-numérico para localizar una condición inicial apropiada para encontrar atractores

ocultos. También, en 2010 [37], presenta el algoritmo analítico-numérico para construir contraejemplos a la conjetura de Kalman. Después, en 2011, utilizando el mismo algoritmo, localizan atractores caóticos ocultos en el sistema clásico de Chua (ver [36]).

Por otro lado, Jafari y Sprott [16], desde 2013, han realizado una búsqueda sistemática para encontrar los sistemas caóticos en tres dimensiones más simples con no linealidades cuadráticas. Se han encontrado 17 sistemas sin puntos de equilibrio simples que muestran caos e identificado otros 23 sistemas con un punto de equilibrio estable. Del mismo modo han introducido un sistema caótico con una línea de puntos de equilibrio [25], inspirados en el caso A del sistema de Sprott [13].

Más recientemente, en 2017-2018, Pham *et al.* [27], Jafari *et al.* [28] y Nazarimehr *et al.* [29] introdujeron sistemas caóticos simples los cuales pertenece a tres de las categorías de atractores ocultos (atractores caóticos sin puntos de equilibrio, con una línea de puntos de equilibrio o con un punto de equilibrio inestable). Estos sistemas cambian sus características variando sus parámetros y nos ayudan a entender mejor a los atractores caóticos, especialmente atractores caóticos ocultos.

También, en 2016, Menacer *et al.* [30] introducen un novedoso método que revela bifurcaciones ocultas en el atractor multi-espiraes de Chua. Este método esta basado en el método analítico numérico para la localización de atractores ocultos de Loenov y Kuznetsov pero usado de forma diferente. Además, en 2017, Rocha *et al.* [31] presentan un análisis teórico de la estabilidad de un oscilador memresistivo derivado del circuito de Chua para identificar sus diferentes dinámicas. Este análisis se hace utilizando el método basado en funciones descriptivas, el cual les permite predecir puntos fijos, orbitas periódicas, dinámicas ocultas, etc.

### 1.3. Descripción del documento

Típicamente en los sistemas dinámicos, desde el clima a los mercados financieros, presentan coexistencia de atractores. El estado final, es decir, el estado del sistema para un tiempo es muy grande depende fuertemente de las condiciones iniciales y los parámetros del sistema. Para entender la dinámica de estos sistemas se tienen que identificar todos los posibles atractores y sus cuencas de atracción.

En el caso de sistemas dinámicos con múltiples atractores con cuencas muy pequeñas o atractores no identificados previamente, se puede observar un cambio repentino en las soluciones del sistema debido a que cambia a atractores inesperados a atractores inesperados (indeseados o desconocidos). Tales cambios pueden resultar en eventos catastróficos. Generalmente, para mantener al sistema en el atractor deseado primero se necesita descubrir todos los atractores coexistentes y después aplicar el esquema de control apropiado. Desde el punto de vista de aplicaciones, la identificación de atractores ocultos es un problema mayor. El conocimiento acerca del surgimiento y propiedades de atractores ocultos pueden incrementar la probabilidad de que el sistema permanezca en el atractor deseado y reducir el riesgo de un salto repentino a un comportamiento indeseado.

Contrario a los atractores auto-excitados, la localización de atractores ocultos no es di-

recta ya que no existe un proceso transitorio desde la vecindad de puntos de equilibrio inestables. Para descubrir atractores ocultos es necesario desarrollar procedimientos especiales. En la literatura, una forma de localizar atractores ocultos se basa en la linealización armónica, el método clásico del parámetro pequeño, junto con métodos numéricos de aproximación que permiten realizar la localización de un atractor por un procedimiento multipasos con el uso del método de linealización armónica como el primer paso. El procedimiento propuesto, basado en el principio de continuación, permite seguir numéricamente la transformación de una solución periódica inicial, definida analíticamente, a una solución periódica o un atractor caótico. Aquí, es importante preservar un dominio de atracción local de la solución considerada [8].

La existencia de atractores ocultos en sistemas PWL como el sistema de Chua, el cual puede ser interpretado como tres sistemas lineales conectados en diferentes secciones del espacio de estados, esto es, el sistema de Chua se convierte en tres sistemas continuamente conectados de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha(x_2(t) - x_1(t)(m_1 + 1)) - \alpha\psi(x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -(\beta x_2(t) + \gamma x_3(t)),\end{aligned}\tag{1.12}$$

donde  $\psi(x_1(t))$  caracteriza un elemento no lineal del sistema llamado *diodo de Chua* y  $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1 \in \mathbf{R}$  son parámetros del sistema, puede ser interpretado como tres sistemas lineales conmutados en diferentes secciones del espacio de estados debido a que la no linealidad  $\psi(x_1(t))$  puede ser reescrita como

$$\psi(x_1(t)) = \begin{cases} m_1 - m_0 & \text{si } x_1(t) < -1 \\ x_1(t)(m_0 - m_1) & \text{si } -1 \leq x_1(t) \leq 1, \\ m_0 - m_1 & \text{si } x_1(t) > 1 \end{cases},\tag{1.13}$$

motiva la búsqueda de atractores ocultos en sistemas lineales por partes así como los objetivos de esta tesis.

El objetivo de la tesis es determinar la existencia de atractores ocultos en sistemas lineales por partes (PWL) basados en la ecuación Jerk  $\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 3/2x(t) = 0$ , que son sistemas sencillos que presentan caos, aplicando el método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos. Se busca analizar sistemas con diferentes características, aplicando éste método analítico-numérico propuesto por Leonov, *et al.* en 2010 [35]. Partiendo del análisis de estos sistemas proponer realizaciones numéricas de sistemas que tengan atractores ocultos.

El resto de la tesis esta conformado como sigue: en el capítulo 2 se revisan algunos ejemplos de las principales familias de atractores ocultos, posteriormente es presentado el método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos propuesto por Leonov *et al.* en 2010 [35] así como su aplicación en la contrucción de contraejemplos de la conjetura de Kalman. En el capítulo 3 se aplica el método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos a sistemas lineales por partes propuestos, empezando con la localización de atractores ocultos en el sistema de Chua y, después, aplicando el método analítico numérico

para localizar atractores ocultos en un sistema lineal por partes basado en la ecuación Jerk propuesto en [40]. En el capítulo 4, se extiende la búsqueda de atractores ocultos en el caso general del sistema PWL basados en la ecuación Jerk propuesto, y además se incorpora el diodo de Chua como la parte no lineal del sistema. En éste capítulo se examinan sistemas con diferentes características dependiendo de los valores de los parámetros del sistema.



## Capítulo 2

# Atractores auto-excitados y atractores ocultos

### 2.1. Atractores auto-excitados

Como se presenta en la **Definición 1.19** del capítulo anterior, un atractor es llamado *atractor auto-excitado* si su cuenca de atracción toca una vecindad de cualquier punto de equilibrio inestable del sistema.

Los atractores de los sistemas de van der Pol, Lorenz, Rössler, Chua y muchos otros son localizados en las vecindades de puntos de equilibrio inestables. Estos atractores son llamados atractores auto-excitados y pueden ser localizados numéricamente iniciando una trayectoria desde una condición inicial en una vecindad pequeña de un punto de equilibrio y observamos como es atraída al atractor del sistema.

Para ilustrar esto se muestran un par de ejemplos de sistemas con atractores auto-excitados. Primero el oscilador de Van der Pol descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + \mu(1 - x_1^2(t))x_2(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $\mu \in \mathbf{R}$  es un parámetro del sistema, el cual tiene un único punto de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz Jacobiana del sistema en el punto de equilibrio es

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

y su correspondiente ecuación característica esta dada por

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\mu.$$

Así, si  $\mu > 0$ , el punto de equilibrio será inestable.

En la Figura 2.1 se muestra la simulación del sistema (2.1) con  $\mu = 2$ . Se observa como una trayectoria con condición inicial

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

se dirige hacia un estado de oscilación. Este ciclo límite es estable ya que las trayectorias del sistema se dirigen hacia él.

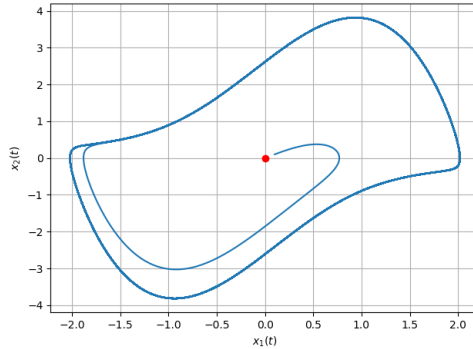


Figura 2.1: Atractor en el oscilador de Van der Pol con  $\mu = 2$ , punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}} = (0, 0)^T$  (rojo) y condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (0.1, 0.1)^T$ . Éste atractor es considerado auto-excitado ya que puede ser localizado desde la una vecindad del punto de equilibrio inestable.

Otro ejemplo de sistemas que presentan un atractor auto-excitado es el sistema de Lorenz [9] descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \sigma(x_2(t) - x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)(\rho - x_3(t)) - x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $\sigma, \beta, \rho \in \mathbf{R}$  son los parámetros del sistema.

Los puntos de equilibrio del sistema (2.2) son tres

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho-1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

y la matriz Jacobiana asociada a éste sistema es

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}}.$$

Los valores usuales de los parámetros introducidos originalmente por Lorenz son

$$\sigma = 10, \quad \beta = 8/3, \quad \rho = 28,$$

así, los puntos de equilibrio del sistema y sus correspondientes conjuntos de eigenvalores quedan como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \Lambda_1 &= \{-22.8277, 11.8277, -2.6666\} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{2,3} &= \begin{pmatrix} \pm 8.4852 \\ \pm 8.4852 \\ 27 \end{pmatrix} & \Lambda_{2,3} &= \{-13.8545, 0.0939 \pm 10.1945i\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como se observa en la Figura 2.2, los tres puntos de equilibrio inestables del sistema producen un atractor caótico con una forma de mariposa el cual consideramos un atractor auto-excitado ya que una trayectoria iniciada desde la una vecindad de uno de los puntos de equilibrio inestables llega al atractor en forma de mariposa.

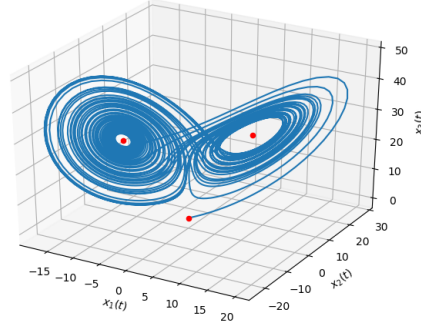


Figura 2.2: Atractor caótico auto-excitado en el sistema de Lorenz con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (0.1, 0, 0)^T$ . Los parámetros  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ ,  $\rho = 28$  producen tres puntos de equilibrio inestables (rojo).

## 2.2. Ejemplos de atractores en sistemas lineales por partes

En esta sección expondremos ejemplos de sistemas de la forma (1.11) que son conocidos como sistemas lineales por partes y que presentan atractores auto-excitados.

### 2.2.1. Sistema de Chua

El circuito de Chua, descrito por las siguientes ecuaciones [38]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \alpha(x_2(t) - x_1(t)(m_1 + 1)) - \alpha\psi(x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -(\beta x_2(t) + \gamma x_3(t)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde

$$\psi(x_1(t)) = \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|)$$

caracteriza un elemento no lineal del sistema llamado *diodo de Chua* y  $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1 \in \mathbf{R}$  son parámetros del sistema, puede ser interpretado como tres sistemas lineales conmutados en diferentes secciones del espacio de estados debido a que la no linealidad  $\psi(x_1(t))$  puede ser reescrita como

$$\psi(x_1(t)) = \begin{cases} m_1 - m_0 & \text{si } x_1(t) < -1 \\ x_1(t)(m_0 - m_1) & \text{si } -1 \leq x_1(t) \leq 1 \\ m_0 - m_1 & \text{si } x_1(t) > 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Para analizar el sistema (4.12), se examina el sistema en cada sección del espacio de estados:

Primero, si  $x_1(t) < -1$  el sistema (4.12) se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\alpha(m_1 + 1)x_1(t) + \alpha x_2(t) - \alpha(m_1 - m_0), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -(\beta x_2(t) + \gamma x_3(t)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

tiene un punto de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{m_1 - m_0}{m_1 + \frac{\beta}{\beta + \gamma}} \\ \frac{\gamma(m_1 - m_0)}{(\gamma + \beta)m_1 + \beta} \\ \frac{\beta(m_1 - m_0)}{(\gamma + \beta)m_1 + \beta} \end{pmatrix}$$

y matriz Jacobiana

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_1) = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Segundo, si  $-1 \leq x_1(t) \leq 1$  el sistema (4.12) se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\alpha(1 + m_0)x_1(t) + \alpha x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -(\beta x_2(t) + \gamma x_3(t)), \end{aligned} \quad (2.8)$$

con punto de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y matriz Jacobiana

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} -\alpha(1 + m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Por último, si  $x_1(t) > 1$  el sistema (4.12) se expresa como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t)(m_1 + 1) + \alpha x_2(t) - \alpha(m_0 - m_1), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -(\beta x_2(t) + \gamma x_3(t)),\end{aligned}\tag{2.9}$$

el punto de equilibrio es

$$\tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} \frac{m_1 - m_0}{m_1 + \frac{\beta}{\beta + \gamma}} \\ \frac{\gamma(m_1 - m_0)}{(\gamma + \beta)m_1 + \beta} \\ -\frac{\beta(m_1 - m_0)}{(\gamma + \beta)m_1 + \beta} \end{pmatrix}$$

y la matriz Jacobiana

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_3) = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Se observa que  $Df(\tilde{\mathbf{x}}_1) = Df(\tilde{\mathbf{x}}_3)$ , es decir, los puntos de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_3$  tienen la misma estabilidad además de ser simétricos.

Entonces, con el conjunto de parámetros

$$\alpha = 15, \quad \beta = 28, \quad \gamma = 0, \quad m_0 = -8/7, \quad m_1 = -5/7,$$

la ecuación característica asociada a los puntos de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

es  $\lambda^3 + 5.2857\lambda^2 + 17.2857\lambda + 119.9996 = 0$  la cual tiene como raíces el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda = \{-5.8425, 0.2784 \pm 4.5234i\},$$

y para el punto de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la ecuación característica es  $\lambda^3 - 1.1428\lambda^2 + 10.8572\lambda - 59.9984 = 0$  con el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda = \{3.3188, -1.0879 \pm 4.1103j\}.$$

En la Figura 2.3 se puede observar como una de trayectoria del sistema (4.12), que inicia en la vecindad del punto de equilibrio inestable  $\tilde{\mathbf{x}}_2$ , se dirige a un atractor considerado autoexcitado.

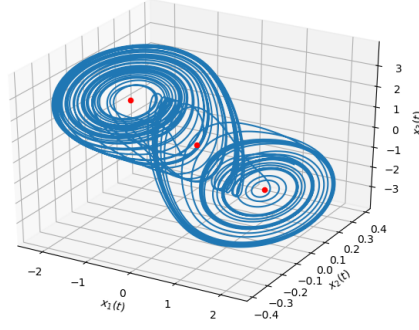


Figura 2.3: Atractor auto-excitado de sistema (4.12) con parámetros  $\alpha = 15$ ,  $\beta = 28$ ,  $\gamma = 0$ ,  $m_0 = -8/7$  y  $m_1 = -5/7$  y condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = (0, -0.1, 0)^T$ . En rojo los puntos de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (-1.5, 0, 1.5)^T$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (0, 0, 0)^T$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_3 = (1.5, 0, -1.5)^T$ .

### 2.2.2. Sistema PWL basado en la ecuación de Jerk

Siguiendo la cadena de derivadas respecto al tiempo de posición a velocidad, y de velocidad a aceleración, el Jerk se puede expresar como la segunda derivada respecto al tiempo de la velocidad y como la tercera derivada respecto al tiempo de la posición, como se muestra en la ecuación

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = f(\ddot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t))$$

Las ecuaciones diferenciales de tercer orden de la forma

$$f(\ddot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)) = 0$$

son llamadas ecuaciones Jerk. Una ecuación Jerk es equivalente a un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden, el cual se puede escribir como un sistema lineal por partes

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  es una matriz de constante y la función  $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$  es dada como

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} B_1, & \text{si } \mathbf{x}(t) \in D_1; \\ B_2, & \text{si } \mathbf{x}(t) \in D_2; \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ B_k, & \text{si } \mathbf{x}(t) \in D_k; \end{cases} \quad (2.11)$$

El vector  $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$  cambia dependiendo del dominio  $D_i \subset \mathbf{R}^3$ , con  $i = 1, \dots, k$ , en que se localice la trayectoria. El equilibrio del sistema resulta en  $\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$ .

El siguiente ejemplo involucra la matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  de la ecuación de Jerk  $\ddot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t) + 3/2\mathbf{x}(t) = 0$  [40] esta dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

y la no linealidad

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} (0, 0, 0.9)^T, & \text{si } x_1(t) \geq 0.3; \\ (0, 0, 0)^T, & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (2.13)$$

Así, el sistema (2.10) con la matriz  $\mathbf{A}$  dada por la ecuación (2.12) y  $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$  dada por la ecuación (2.13) tiene puntos de equilibrio en

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz  $\mathbf{A}$  toma la forma  $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2}$  y calculando sus raíces, el conjunto de eigenvalores del sistema resultan es

$$\Lambda = \{-1.2041, 0.1020 \pm 1.1115i\}.$$

En la Figura 2.4 se muestra una trayectoria del sistema (2.10) que inicia en una vecindad del punto de equilibrio inestable  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  y que se dirige a un atractor de doble scroll el cual es un atractor auto-excitado.

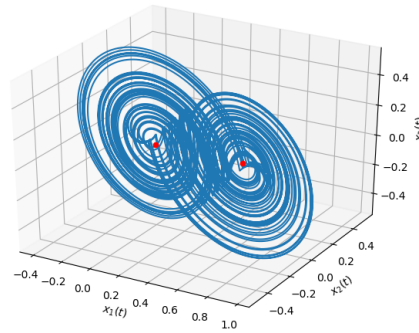


Figura 2.4: Atractor de doble scroll auto-excitado del sistema (2.10) con la matriz  $\mathbf{A}$  dada por la ecuación (2.12) y  $\mathbf{B}$  dada por la ecuación (2.13) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (0.6, 0, 0.1)^T$ . En rojo se indican los puntos de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (0, 0, 0)^T$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (0.6, 0, 0)^T$

## 2.3. Sistemas tipo Lur'e

Una amplia clase de sistemas físicos pueden ser representados como una conexión en realimentación de un sistema lineal y una función estática no lineal, tal como se muestra en la Figura 2.5. Esta clase de sistemas se denomina sistemas de tipo Lur'e [7]. Asumiendo que el sistema no está forzado, es decir, la entrada externa es cero, su descripción en el espacio de estado es

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ u(t) &= -\psi(y(t))\end{aligned}\tag{2.14}$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $u(t), y(t) \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ ,  $\psi: [0, \infty) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función lineal estática continua y  $\psi(0) = 0$ .

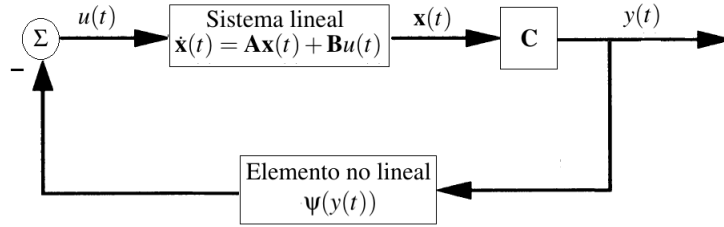


Figura 2.5: Sistema de tipo Lur'e: conexión en realimentación de un sistema lineal (2.14) y un elemento no lineal  $\psi(\mathbf{y}(t))$ .

En los trabajos [39], [38], [36] se sugieren métodos para buscar soluciones periódicas de sistemas dinámicos con no linealidades escalares y se consideran sistemas de la forma (2.10) que puede ser escritos en la forma de Lur'e (2.14).

El sistema de Chua (4.12) puede ser reescrito en la forma de Lur'e (2.14)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0 \ 0),\tag{2.15}$$

$$\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{y}(t)) = \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|).$$

Del mismo modo, el sistema (2.10) con la matriz  $\mathbf{A}$  dada por la ecuación (2.12) y  $\mathbf{B}$  dada por la ecuación (2.13) en la forma de Lur'e (2.14) tenemos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \ 0 \ 0),\tag{2.16}$$

$$\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{y}(t)) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x_1(t) \geq 0.3; \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Los sistemas reescritos en forma de Lur'e como (2.15) y (2.16) presentan los mismos atractores auto-excitados mostrados en las Figuras 2.3 y 2.4 respectivamente.



## 2.4. Atractores ocultos

De acuerdo a la definición un atractor auto-excitado tiene una cuenca de atracción asociada con un punto de equilibrio inestable, mientras un atractor oculto tiene una cuenca de atracción que no intersecta con vecindades pequeñas de cualquier punto de equilibrio. Por lo tanto, es posible verificar que sistemas con un punto de equilibrio estable [14], sistemas sin puntos de equilibrio [32], [33], o sistemas con puntos de equilibrio infinitos [25] son sistemas con atractores ocultos.

### 2.4.1. Sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio

Por definición, cualquier atractor en un sistema sin puntos de equilibrio es oculto. Consideremos el sistema propuesto por Wei [26]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= 2x_2^2(t) + x_1(t)x_3(t) - 0.35,\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^3$ , y el cual es una modificación de caso D del sistema de Sprott [13].

Resolviendo  $\dot{x}_1(t) = 0$ ,  $\dot{x}_2(t) = 0$ ,  $\dot{x}_3(t) = 0$ , se obtiene

$$\tilde{\mathbf{x}} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{0.35i} \\ 0 \\ -\sqrt{0.35i} \end{pmatrix} \notin \mathbf{R},$$

por lo tanto, el sistema (2.17) no tiene puntos de equilibrio y el atractor mostrado en la Figura 2.6 es un atractor oculto.

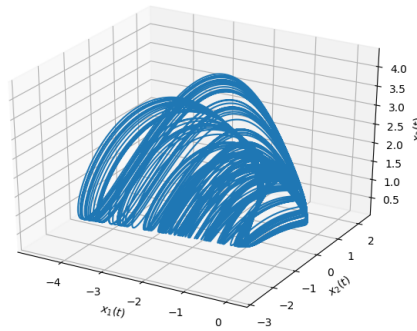


Figura 2.6: Atractor oculto del sistema (2.17) sin puntos de equilibrio, con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (-1.6, 0.82, 1.9)^T$ .

## 2.4.2. Sistemas dinámicos con un punto de equilibrio estable

Cualquier atractor oculto en un sistema con un punto de equilibrio estable es ciertamente oculto, ya que las condiciones iniciales cerca del punto de equilibrio estables converge a éste, en lugar de dirigirse al atractor.

El primer ejemplo de sistemas de esta categoría fue diseñado por Wang y Chen [14]. Ellos consideraron el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)x_3(t) + 0.006, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= 1 - 4x_1(t),\end{aligned}\tag{2.18}$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^3$ , y el cual tiene un punto de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.0625 \\ -0.096 \end{pmatrix}.$$

La matriz Jacobiana del sistema (2.18) evaluada en el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  es

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & -0.096 & 0.0625 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz  $Df(\tilde{\mathbf{x}})$  esta dado por  $\lambda^3 + \lambda^2 + 0.25\lambda + 0.298$  y calculando sus raíces obtenemos el conjunto de eigenvalores del sistema

$$\Lambda = \{-0.0196 \pm 0.5097i, -0.9606\},$$

por lo tanto, el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  es estable. En la Figura 2.7 se observa una trayectoria que converge al punto de equilibrio estable  $\tilde{\mathbf{x}}$  (izquierda) y una trayectoria con condición inicial suficientemente lejos del punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  (derecha), ésta llega a un atractor del sistema (2.18) el cual consideramos un atractor oculto.

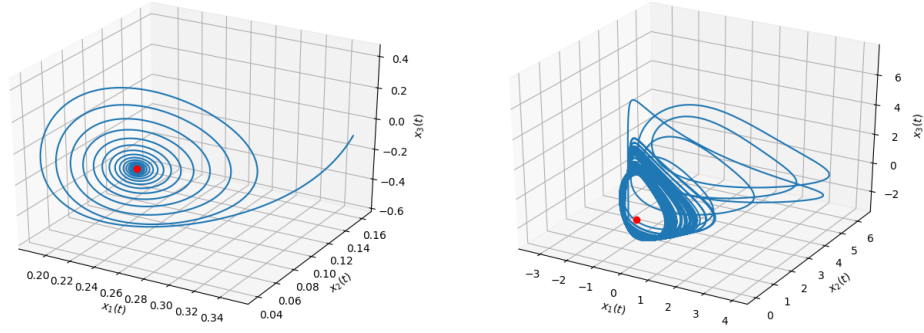


Figura 2.7: En rojo se muestra el punto de equilibrio estable  $\tilde{\mathbf{x}} = (0.25, 0.0625, -0.096)^T$ . A la izquierda una trayectoria del sistema (2.18) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (0.35, 0.1625, -0.096)^T$  que se dirige al equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$ . A la derecha el atractor oculto del sistema (2.18) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$ .

### 2.4.3. Sistemas dinámicos con una línea de equilibrio

Un atractor de un sistema con una línea de equilibrio es considerado un atractor oculto ya que existen incontables puntos de equilibrio de los cuales solo una pequeña porción toca la cuenca de atracción del atractor. Así el equilibrio del sistema no es de ayuda para encontrar el atractor porque no se sabe que parte de la línea de equilibrio sea la parte de interés.

El sistema dado por las siguientes ecuaciones [28]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + x_2(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) - 15x_1(t)x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^3$ , es un ejemplo simple de un sistema dinámico con una línea de equilibrios. El sistema (2.19) tiene una línea de puntos de equilibrio estable en

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3^* \end{pmatrix},$$

donde  $x_3^* \in \mathbf{R}$  (en otras palabras el eje  $x_3$  es la línea de equilibrio del sistema). La matriz Jacobiana del sistema evaluada en el equilibrio del sistema queda como

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x_3^* & 0 \\ -x_3^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ya así tenemos el polinomio característico  $\lambda^3 - \lambda^2 x_3^* + \lambda$  cuyas raíces conforman el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda = \left\{ 0, \frac{x_3^* \pm \sqrt{(-x_3^*)^2 - 4}}{2} \right\},$$

en otras palabras, la estabilidad del equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  depende de  $x_3^*$ .

En la Figura 2.8 se muestra una trayectoria del sistema con condición inicial

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

que se dirige al eje  $x_3$  (izquierda) y la trayectoria con condición inicial

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

que se mantiene en un atractor (derecha).

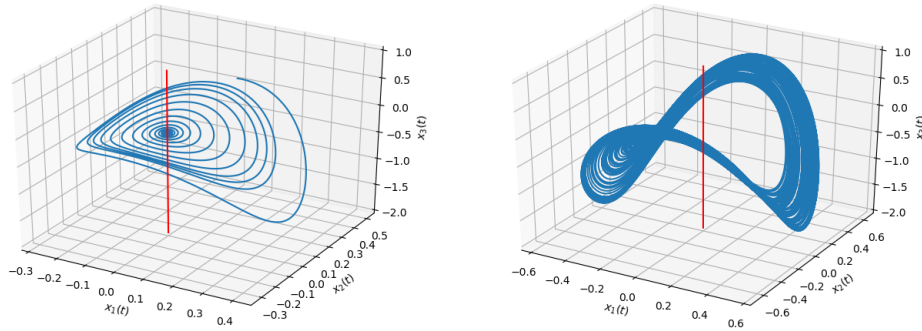


Figura 2.8: En rojo se muestra la línea de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}} = (0, 0, x_3^*)^T$ . A la izquierda una trayectoria del sistema (2.19) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (0, 0.5, 0.1)^T$  que converge a un punto de la línea de equilibrio. A la derecha el atractor oculto del sistema (2.19) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (0, 0.5, 0.5)^T$

#### 2.4.4. Sistemas dinámicos con diferentes atractores ocultos

En [27] se presenta un sistema con diferentes tipos de atractores ocultos que cambian según los valores de sus parámetros. Consideremos el sistema en tres dimensiones descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 0.4x_1(t)x_3(t) - a, \\ \dot{x}_3(t) &= 0.3x_2(t) - 0.1x_3(t) - 1.4x_2^2(t) - bx_1(t)x_2(t) - c, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^3$ ,  $a, b$  y  $c \in \mathbf{R}$  y el equilibrio del sistema es calculando por  $\dot{x}_1(t) = 0$ ,  $\dot{x}_2(t) = 0$  y  $\dot{x}_3(t) = 0$ . Por lo tanto, tenemos

$$x_2(t) = 0, \quad x_3(t) = -10c, \quad x_1(t)x_3(t) = \frac{a}{0.4}.$$

La matriz Jacobiana del sistema esta dada por

$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.4x_3 & 0 & 0.4x_1 \\ -bx_2 & 0.3 + 2.8x_2 - bx_1 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

El número de puntos de equilibrio y su estabilidad depende de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

1. **Para  $a \neq 0$  y  $c = 0$**  obtenemos

$$0 = \frac{a}{0.4},$$

por lo que el sistema (2.20) no tiene puntos de equilibrio. El sistema presenta un atractor caótico con los valores de los parámetros  $a = 0.005$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 0$  (ver Figura 2.9).

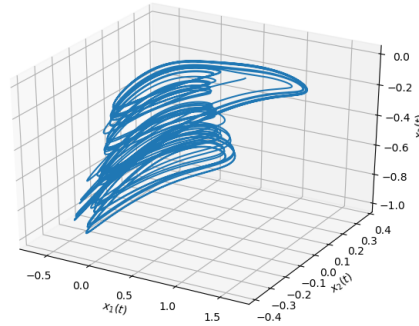


Figura 2.9: Atractor oculto del sistema (2.20) con parámetros  $a = 0.005$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 0$  y con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T$

2. **Cuando  $a \neq 0$  y  $c \neq 0$**  el sistema (2.20) tiene solo un punto de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4c} \\ 0 \\ -10c \end{pmatrix}.$$

Con parámetros  $a = 0.002$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 0.002$  el sistema tiene el punto de equilibrio en

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0 \\ -0.02 \end{pmatrix},$$

y la matriz Jacobiana evaluada en éste punto queda como

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.008 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0.35 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es  $\lambda^3 + 0.1\lambda^2 + 0.043\lambda + 0.0008$ , cuyas raíces son el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda = \{-0.0193, -0.0403 \pm 0.1995i\},$$

así el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}$  es estable.

En la Figura 2.10 se muestra a la izquierda una trayectoria con condición inicial en la vecindad del punto de equilibrio del sistema y se observa como ésta se dirige al punto de equilibrio. A la derecha una trayectoria que genera un atractor caótico con condición inicial lejos del punto de equilibrio.

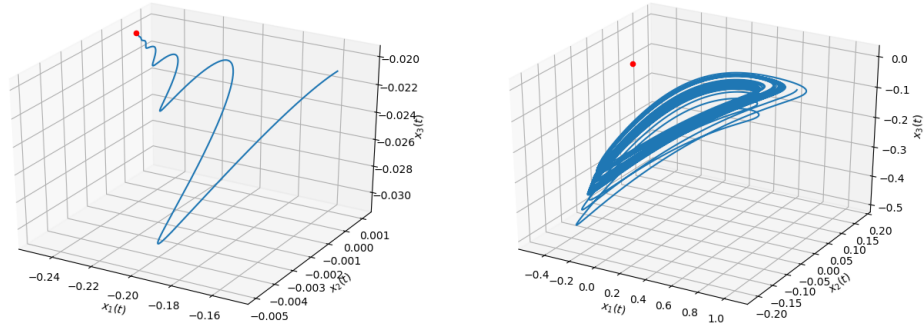


Figura 2.10: En rojo el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}} = (-0.25, 0, -0.02)^T$  del sistema (2.20) con parámetros  $a = 0.002$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 0.002$ . Trayectoria del sistema (2.20) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (-0.15, 0.0, -0.02)^T$ . Atractor oculto del sistema (2.20) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T$

3. Si  $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$  y manteniendo  $\mathbf{b} = 0.2$  el sistema (2.20) tiene un infinito número de puntos de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio está dada por

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4x_1^* \\ 0 & 0.3 - 0.2x_1^* & -0.1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica está determinada por  $\lambda^3 + 0.1\lambda^2 + (0.08(x_1^*)^2 - 0.12x_1^*)\lambda = 0$  la cual tiene raíces

$$\Lambda = \left\{ 0, \frac{-0.1 \pm \sqrt{0.01 - 0.32(x_1^*)^2 + 0.48x_1^*}}{2} \right\},$$

el sistema presenta un comportamiento periódico y caótico que se ilustra en la Figura 2.11.

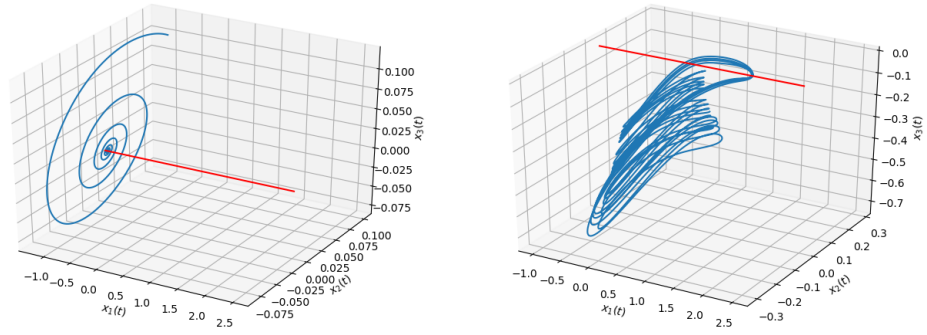


Figura 2.11: En rojo la línea de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1^*, 0, 0)^T$ , a la izquierda una trayectoria del sistema (2.20) con parámetros  $a = c = 0$  y  $b = 0.2$  y condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (-1, 0.1, 0.1)^T$ . A la derecha el atractor caótico del sistema (2.20) con condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = (-1, 0.1, 0.5)^T$

## 2.5. Método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos

Se ha encontrado que los métodos efectivos para la localización numérica de atractores ocultos en sistemas dinámicos multidimensionales son los métodos basados en la *continua-ción numérica*, la idea es construir una secuencia de sistemas similares de tal forma que sea posible obtener de forma analítica una condición inicial para el cálculo numérico de una solución oscilante (oscilación inicial) para el primer sistema (sistema inicial), y entonces seguir numéricamente la transformación de esta oscilación inicial cuando se pasa de un sistema a otro [34].

En los sistemas dinámicos, usualmente existe un parámetro  $\mu \in [a, b]$  cuya variación provoca cambios en las propiedades del sistema. Introducimos el parámetro  $\mu$  artificialmente, y consideramos su variación en el intervalo  $[a, b]$  tal que  $\mu = b$  corresponde al sistema inicial, y el parámetro  $a$  se escoge de tal forma que para  $\mu = a$  es posible calcular o localizar cierto atractor (con frecuencia este atractor tiene una forma simple, e.g., periódico). Además, se considera una secuencia  $\mu_j$ ,  $\mu_1 = a$ ,  $\mu_n = b$ ,  $\mu_j \in [a, b]$  con  $j = 1, \dots, n$ , tal que la distancia entre  $\mu_j$  y  $\mu_{j+1}$  sea suficientemente pequeña. Luego se sigue numéricamente el cambio en la estructura del atractor obtenido para  $\mu_1 = a$ . Si durante el cambio del parámetro  $\mu$  (desde  $\mu_j$  a  $\mu_{j+1}$ ) no hay pérdida en la estabilidad del atractor localizado para  $\mu = a$ , entonces, para  $\mu_n = b$  al final del procedimiento, es localizado un atractor (a menudo oculto o difícil de detectar) del sistema inicial [8].

Consideremos un sistema con una no-linealidad escalar en la forma de Lur'e (2.14)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= -\Psi(\mathbf{y}(t)), \end{aligned} \tag{2.21}$$

como se describió anteriormente.

**Paso 1** Reescribimos el sistema (2.21) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n, \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{P} = \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{q} = -\mathbf{B} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{r}^T = \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$  y  $\psi(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función escalar diferenciable por pedazos continua, y  $\psi(0) = 0$ .

**Paso 2** Introducimos un coeficiente de linealización armónica  $k$  (asumimos que  $k$  existe) de tal forma que la matriz

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P} + k\mathbf{q}\mathbf{r}^T, \quad (2.23)$$

tiene un par de eigenvalores puros imaginarios  $\pm i\omega_0$  ( $\omega_0 > 0$ ) y el resto de sus eigenvalores tienen parte real negativa y reescribimos el sistema (2.22) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad (2.24)$$

donde  $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) - k\sigma$ .

**Paso 3** Introducimos una secuencia finita de funciones  $\varphi^j(\sigma)$  con  $j = 1, \dots, m$  de tal forma que las gráficas de las funciones vecinas  $\varphi^j(\sigma)$  y  $\varphi^{j+1}(\sigma)$  cambian ligeramente unas de otras.

La clase de funciones  $\varphi^j$  más simple y natural son las siguientes funciones:  $\varphi^1(\sigma) = \varepsilon_1\varphi(\sigma)$ ,  $\varphi^2(\sigma) = \varepsilon_2\varphi(\sigma)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi^{m-1}(\sigma) = \varepsilon_{m-1}\varphi(\sigma)$ ,  $\varphi^m(\sigma) = \varepsilon_m\varphi(\sigma)$ , donde  $\varepsilon_j > 0$  es un parámetro pequeño y, por ejemplo,  $\varepsilon_j = \frac{j}{m}$  [39].

De esta manera, a partir de la versión (2.24) del sistema tenemos los siguientes sistemas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\varepsilon_j\varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)). \quad (2.25)$$

donde  $\varepsilon_j = j/m$  y  $j \in [1, m]$  con un total de 10 divisiones.

**Paso 4** Aplicamos el método de linealización armónica (método de la función descriptiva) para el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\varepsilon_1\varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad (2.26)$$

el cual esta justificado matemáticamente para sistemas con parámetros pequeños, y determinamos una solución periódica para el sistema (2.26)  $\mathbf{x}^1(t)$ .

Aquí el sistema linealizado armónico  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0\mathbf{x}(t)$  tiene un ciclo límite y  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\varepsilon_1\varphi(\sigma)$  es una perturbación del sistema linealizado armónico, con  $\varepsilon$  muy pequeño. Entonces, para la localización de un atractor en el sistema original (2.24), seguimos numéricamente la transformación de la solución periódica  $\mathbf{x}^1(t)$  (un atractor oscilante que denotamos como  $\Gamma_1$ ).

**Paso 5** Después de haber calculado la solución del sistema (2.26)  $\mathbf{x}^1(t)$ , pasamos al sistema (2.25) con  $j = 2$  calculando numéricamente la solución  $\mathbf{x}^2(t)$  tomando como condición inicial  $\mathbf{x}_0^2 \in \Gamma_1$ .

Aquí son posibles dos casos:

*Caso 1* Todos los puntos de  $\Gamma_1$  están en el dominio de atracción de un atractor oscilante  $\Gamma_2$  para el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\varepsilon_2\varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2. \quad (2.27)$$



*Caso 2* No todos los puntos de  $\Gamma_1$  están en el dominio de atracción de  $\Gamma_2$  y se observa una pérdida de estabilidad y el desvanecimiento de  $\Gamma_1$  en la solución  $\mathbf{x}^2(t)$ .

Si en el proceso de cálculo la solución  $\mathbf{x}^2(t)$  no cae a un equilibrio y no aumenta indefinidamente (siempre se debe considerar un intervalo de cálculo  $[0, T]$  suficientemente largo), entonces esta solución alcanza un atractor oscilante  $\Gamma_2$ .

**Paso 6** Luego, si existe  $\Gamma_2$ , es posible pasar al sistema (2.25) con  $j = 3$  y realizar un procedimiento similar para el cálculo de  $\Gamma_3$ , comenzando una trayectoria del sistema (2.25) con  $j = 3$  usando una condición inicial  $\mathbf{x}_0^3 = \mathbf{x}^2(T)$  y calculando la trayectoria  $\mathbf{x}^3(t)$ .

**Paso 7** Continuando este procedimiento y calculando  $\mathbf{x}^j(t)$  usando las trayectorias del sistema (2.25) con condición inicial  $\mathbf{x}_0^j = \mathbf{x}^{j-1}(T)$  o llegamos al cálculo de  $\Gamma_m$  (siendo el atractor del sistema (2.25) con  $j = m$ , es decir, el sistema original (2.24)), o bien, en cierto paso, observamos una pérdida de estabilidad (bifurcación) y la desaparición del atractor.

El método de la linealización armónica es bien conocido y frecuentemente aplicado al análisis de oscilaciones en sistemas no lineales de control automático. Este método no está estrictamente justificado y pertenece a los métodos de aproximación del análisis de sistemas de control. A continuación, recordamos una forma estándar de aplicación del método de la función descriptiva del sistema (2.22) [7].

Introducimos la función de transferencia

$$W(s) = \mathbf{r}^T (\mathbf{P} - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{q},$$

donde  $s$  es una variable compleja,  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Vamos a encontrar una oscilación armónica  $a \cos \omega_0 t$ , la cual es una aproximación a la solución del sistema (2.22):

$$\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) \approx a \cos \omega_0 t.$$

Primero definimos el coeficiente de linealización armónica  $k$  y la frecuencia  $\omega_0$ . El número  $\omega_0$  está definido por la ecuación

$$\text{Im}W(i\omega_0) = 0$$

y  $k$  está definido por la fórmula

$$k = -(\text{Re}W(i\omega_0))^{-1}.$$

Siguiendo con el método de la función descriptiva, la amplitud  $a$  se puede obtener de la ecuación

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} \psi(a \cos(\omega_0 t)) \cos(\omega_0 t) dt = ka \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos(\omega_0 t)^2 dt.$$

Por otro lado, si (2.22) es estable para cualquier  $\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = \mu(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t))$ , con  $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ , entonces de acuerdo a la conjetura de Aizerman [37] el sistema (2.22) es estable para cualquier  $\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t))$  tal que

$$\mu_1(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) < \psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) < \mu_2(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad \forall \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) \neq 0. \quad (2.28)$$

Aplicando el método de la función descriptiva a un sistema (2.22) que cumpla con la condición (2.28), se sigue que  $a = 0$ , ya que en virtud de la estabilidad  $k < \mu_1$  ó  $\mu_2 < k$ , entonces

$$k(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) < \psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) \quad \text{ó} \quad \psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) < k(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)).$$

Lo cual implica que para todo  $a \neq 0$  se satisface

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} (\psi(a \cos(\omega_0 t)) a \cos(\omega_0 t) - k(a \cos \omega_0 t)^2) dt \neq 0.$$

Entonces, conforme al método de la función descriptiva, el sistema (2.22) bajo las condiciones (2.28) no tiene soluciones periódicas.

Dados estos resultados, podemos distinguir dos casos: el caso *crítico* en el cual los sistemas de la forma (2.22) que cumplen con las condiciones (2.28) (conjeturas de Aizerman y Kalman [37]), aplicando el método de la linealización armónica y la función descriptiva, dan como resultado la no existencia de soluciones periódicas y la estabilidad global de un único punto de equilibrio estable; y el caso *no crítico* en el que el método de la linealización armónica y la función descriptiva dan una buena aproximación a soluciones periódicas de los sistemas de la forma (2.22).

### 2.5.1. Determinación de soluciones periódicas estables para sistemas con no linealidades escalares

Para determinar la condición inicial  $\mathbf{x}_0^1$  de la solución periódica de inicio, el sistema (2.26) con la no linealidad  $\phi^1(\sigma)$  es reducido por la transformación lineal no singular  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\mathbf{y}(t)$ , con  $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , a la forma

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -\omega_0 y_2(t) + b_1 \phi^1(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)), \\ \dot{y}_2(t) &= \omega_0 y_1(t) + b_2 \phi^1(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)), \\ \dot{\mathbf{y}}_3(t) &= \mathbf{A}_3 \mathbf{y}_3(t) + \mathbf{b}_3 \phi^1(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Aquí  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  son valores escalares,  $\mathbf{y}_3(t)$  es un vector de dimensión  $(n-2)$ ;  $\mathbf{b}_3$  y  $\mathbf{c}_3$  son vectores de dimensión  $(n-2)$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son números reales;  $\mathbf{A}_3$  es una matriz  $(n-2) \times (n-2)$  con todos los eigenvalores con parte real negativa. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que para la matriz  $\mathbf{A}_3$  existe un número positivo  $d > 0$  tal que

$$\mathbf{y}_3^T(t) (\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3^T) \mathbf{y}_3(t) \leq -2d |\mathbf{y}_3(t)|^2, \quad \forall \mathbf{y}_3(t) \in \mathbf{R}^{n-2}. \quad (2.30)$$

Presentamos la función de transferencia del sistema (2.26)

$$W_1(s) = \mathbf{r}^T (\mathbf{P}_0 - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{q} = \frac{\eta s + \theta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{R(s)}{Q(s)}, \quad (2.31)$$

donde  $\eta, \theta \in \mathbf{R}$ ,  $Q(s)$  es un polinomio estable de grado  $(n-2)$ ,  $R(s)$  es un polinomio de grado menor a  $(n-2)$ . Suponga que los polinomios  $R(s)$  y  $Q(s)$  no tienen raíces en común;

y la función de transferencia del sistema (2.29)

$$W_2(s) = \frac{-b_1s + b_2\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \mathbf{c}_3^T (\mathbf{A}_3 - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{b}_3. \quad (2.32)$$

Por equivalencia de los sistemas (2.26) y (2.29) las funciones de transferencia de estos sistemas coinciden. Esto implica las relaciones

$$\eta = -b_1, \quad \theta = b_2\omega_0, \quad \mathbf{c}_3^T \mathbf{b}_3 + b_1 = \mathbf{r}^T \mathbf{q}, \quad \frac{R(s)}{Q(s)} = \mathbf{c}_3^T (\mathbf{A}_3 - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{b}_3. \quad (2.33)$$

### Caso no crítico

En el primer paso del algoritmo, consideramos el sistema (2.29) con la no linealidad  $\varphi^1(\sigma) = \varepsilon_1 \varphi(\sigma)$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -\omega_0 y_2(t) + b_1 \varepsilon_1 \varphi(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)), \\ \dot{y}_2(t) &= \omega_0 y_1(t) + b_2 \varepsilon_1 \varphi(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)), \\ \dot{\mathbf{y}}_3(t) &= \mathbf{A}_3 \mathbf{y}_3(t) + \mathbf{b}_3 \varepsilon_1 \varphi(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)), \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde  $\varphi(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t))$  es una función diferenciable por partes con puntos de discontinuidad  $v_i$ .

Consideramos el siguiente conjunto en el espacio de estados del sistema (2.34)

$$\Omega = \{y_1 \in [a_1, a_2], y_2 = 0, |\mathbf{y}_3| \leq D\varepsilon\},$$

donde  $a_1, a_2$  son números positivos, mientras que  $D > 0$  es tal que si para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño la desigualdad

$$|\mathbf{y}_3(0)| \leq D\varepsilon$$

se satisface, entonces

$$|\mathbf{y}_3(T)| \leq D\varepsilon.$$

Aquí  $T$  es el tiempo de retorno de las trayectorias del sistema (2.34) en el mapeo de Poincaré  $F$  de le conjunto  $\Omega$ :

$$F \begin{Bmatrix} \|y_1(0)\| \\ 0 \\ \|\mathbf{y}_3(0)\| \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \|y_1(T)\| \\ 0 \\ \|\mathbf{y}_3(T)\| \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

Así  $T > 0$  para el cual

$$y_1(T) > 0, \quad y_2(T) = 0,$$

y las relaciones

$$y_1(t) > 0, \quad y_2(t) = 0, \quad \forall t \in (0, T)$$

no se satisfacen.

Introducimos la función descriptiva

$$\Phi(a) = \int_0^{2\pi/\omega_0} \varphi(a \cos(\omega_0 t)) \cos(\omega_0 t) dt. \quad (2.36)$$

**Teorema 2.1.** [8] Si  $a_{1,2} \neq |v_i|$  y si se satisfacen las desigualdades

$$b_1\Phi(a_1) > 0, \quad b_1\Phi(a_2) < 0, \quad (2.37)$$

entonces para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, el mapeo de Poincaré (2.35) del conjunto  $\Omega$  es mapeado en si mismo:  $F\Omega \subset \Omega$ .

La existencia de la derivada de la función descriptiva (2.36) resulta en el siguiente

**Teorema 2.2.** [8] Suponiendo que existe  $a_0 > 0$  tal que las condiciones

$$\Phi(a_0) = 0, \quad b_1 \left. \frac{d\Phi(a)}{da} \right|_{a=a_0} < 0 \quad (2.38)$$

son satisfechas. Entonces para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño el sistema (2.34) tiene una solución periódica de la forma

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos(\omega_0 t) y_1(0) + O(\varepsilon), \\ y_2(t) &= \sin(\omega_0 t) y_1(0) + O(\varepsilon), \\ \mathbf{y}_3(t) &= \exp(\mathbf{A}_3 t) y_3(0) + \mathbf{O}_{\mathbf{n}-2}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.39)$$

con condición inicial

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} a_0 + O(\varepsilon) \\ 0 \\ \mathbf{O}_{\mathbf{n}-2}(\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

y con período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} + O(\varepsilon).$$

Aquí  $\mathbf{O}_{\mathbf{n}-2}(\varepsilon)$  es un vector de dimensión  $(n-2)$  tal que todas sus componentes son términos de orden superior  $O(\varepsilon)$ .

Como se mostró anteriormente, la condición (2.38) no se puede satisfacer en el caso crítico cuando las condiciones de las conjeturas de Aizerman y Kalman se cumplen, sin embargo existen contraejemplos a estas conjeturas.

### Caso crítico

Como observamos en el caso crítico, donde se satisfacen las condiciones (2.28) de la conjetura de Aizerman, el método de la función descriptiva arroja resultados incorrectos. Pero es posible modificarlo para no linealidades de tipos especiales.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -\omega_0 y_2(t) + b_1 \varphi^1(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)), \\ \dot{y}_2(t) &= \omega_0 y_1(t) + b_2 \varphi^1(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)), \\ \dot{\mathbf{y}}_3(t) &= \mathbf{A}_3 \mathbf{y}_3(t) + \mathbf{b}_3 \varphi^1(y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde la no linealidad  $\varphi^1(\sigma)$ , con  $\sigma = y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t)$ , es de la siguiente forma especial

$$\varphi^1(\sigma) = \begin{cases} \varphi_1(\sigma), & \forall |\sigma| \leq \varepsilon, \\ \varepsilon^3 \varphi_2(\sigma), & \forall |\sigma| > \varepsilon. \end{cases} \quad (2.42)$$

Aquí  $\varphi_1(\sigma)$  es una función diferenciable por partes y  $\varphi_2(\sigma)$  es una función diferenciable, para las cuales las siguientes condiciones son validas

$$|\varphi_1(\sigma)| \leq \mu |\sigma|, \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (b_2(\mathbf{c}_3^T \mathbf{b}_3 + b_1) \varphi_1(\sigma) + b_1 \omega_0 \sigma) \varphi_2(\sigma) d\sigma = L\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad (2.43)$$

donde  $\mu > 0$  y  $L \in \mathbf{R}$ . Además, sin perdida de generalidad, se puede asumir que

$$\varphi_2(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \quad (2.44)$$

Tales condiciones son validas, por ejemplo, para la función

$$\varphi^j(\mathbf{c}^T \mathbf{y}(t)) = \begin{cases} M\varepsilon_j^3, & \forall \mathbf{c}^T \mathbf{y}(t) > \varepsilon_j \\ \mu \mathbf{c}^T \mathbf{y}(t), & \forall \mathbf{c}^T \mathbf{y}(t) \in [-\varepsilon_j, \varepsilon_j] \\ -M\varepsilon_j^3, & \forall \mathbf{c}^T \mathbf{y}(t) < -\varepsilon_j, \end{cases} \quad \text{con } M > 0, \quad j = 1. \quad (2.45)$$

Consideremos el siguiente conjunto en el espacio de estados del sistema (2.41)

$$\Omega = \{y_1 + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3 = 0, y_2 \in [-a_1, -a_2], |\mathbf{y}_3| \leq D\varepsilon^2\}.$$

Aquí  $a_{1,2} > 0$  y  $D > 0$  es tal que si para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño la desigualdad

$$|\mathbf{y}_3(0)| \leq D\varepsilon^2$$

se satisface, entonces

$$|\mathbf{y}_3(T)| \leq D\varepsilon^2.$$

Las soluciones del sistema (2.41) con condición inicial en  $\Omega$  se pueden representar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -\sin(\omega_0 t) y_2(0), \\ y_2(t) &= \cos(\omega_0 t) y_2(0), \quad t \in [0, T]. \\ \mathbf{y}_3(t) &= \exp(\mathbf{A}_3 t) \mathbf{y}_3(0) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Consideremos un mapeo de Poincaré  $F$  del conjunto  $\Omega$  para las trayectorias del sistema (2.41):

$$F \begin{pmatrix} \|y_1(0)\| \\ \|y_2(0)\| \\ \|\mathbf{y}_3(0)\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|y_1(T)\| \\ \|y_2(T)\| \\ \|\mathbf{y}_3(T)\| \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Aquí  $T > 0$  es tal que

$$y_1(T) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(T) = 0, \quad y_2(T) < 0$$

y las relaciones

$$y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t) = 0, \quad y_2(t) < 0, \quad \forall t \in (0, T)$$

no se satisfacen. Introducimos la función descriptiva

$$\Phi(a) = \int_0^{2\pi/\omega_0} \varphi(a \sin(\omega_0 t)) \sin(\omega_0 t) dt. \quad (2.48)$$

**Teorema 2.3.** [8] Si las desigualdades

$$b_1 \Phi(a_2) > -\frac{2}{\omega_0^2 a_2^2} L, \quad b_1 \Phi(a_1) < -\frac{2}{\omega_0^2 a_1^2} L \quad (2.49)$$

son validas, entonces para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, el mapeo de Poincaré (2.47) desde el conjunto  $\Omega$  es mapeado en si mismo:  $F\Omega \subset \Omega$ .

Entonces, bajo estas condiciones, el sistema (2.41) tiene una solución periódica con condición inicial desde  $\Omega$ . Esta solución es estable en el sentido en que la vecindad de  $\Omega$  es mapeada en si misma:  $F\Omega \subset \Omega$ .

**Teorema 2.4.** [8] Suponiendo que existe un número  $a_0 > 0$ ,  $-a_0 \neq \mathbf{v}_i$  tal que las condiciones

$$b_1 \Phi(a_0) = -\frac{2}{\omega_0^2 a_0^2} L, \quad b_1 \left. \frac{d\Phi(a)}{da} \right|_{a=a_0} < \frac{4}{\omega_0^2 a_0^3} L \quad (2.50)$$

son satisfechas. Entonces para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, el sistema (2.41) tiene una solución periódica de la forma (2.46) con condición inicial

$$\begin{aligned} y_1(0) &= O(\varepsilon^2), \\ y_2(0) &= -a_0 + O(\varepsilon), \\ \mathbf{y}_3(0) &= \mathbf{O}_{\mathbf{n}-2}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.51)$$

y con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} + O(\varepsilon^2).$$

**Corolario 2.5.** [8] De la no linealidad (2.45), obtenemos

$$L = \frac{2}{3} (b_2 (\mathbf{c}_3^T \mathbf{b}_3 + b_1) \mu + b_1 \omega_0) \mu, \quad \Phi(a_0) = M \frac{4}{\omega_0}$$

y la relación (2.51) resulta en

$$\begin{aligned} y_1(0) &= O(\varepsilon^2), \\ y_2(0) &= -\sqrt{\frac{\mu(\mu b_2 \omega_0 (\mathbf{c}_3^T \mathbf{b}_3 + b_1) + b_1 \omega_0^2)}{-3\omega_0^2 M b_1}} + O(\varepsilon) \\ \mathbf{y}_3(0) &= \mathbf{O}_{\mathbf{n}-2}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Finalmente, para regresar a las coordenadas del sistema original (2.26), obtenemos las relaciones entre las condiciones iniciales de los sistemas (2.26) y (2.29)

$$\mathbf{x}_0^1 = \mathbf{S} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Continuando con el método analítico numérico para la localización de atractores ocultos, después de obtener las condiciones iniciales (2.53) calculamos la solución  $\mathbf{x}^1(t)$  del primer paso del procedimiento multietapas, si en el calculo numérico la solución tiende a una solución oscilante, entonces podemos continuar con el procedimiento calculando  $\mathbf{x}^j(t)$  usando las trayectorias del sistema (2.25) con condición inicial  $\mathbf{x}_0^j = \mathbf{x}^{j-1}(T)$ .

Ya se han revisado las definiciones de atractores auto-excitados y atractores ocultos y, después de analizar algunos ejemplos de sistemas dinámicos no lineales que presentan atractores ocultos, se ha presentado un método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos.

A continuación se aplicará este método analítico-numérico en sistemas lineales por partes, en un caso crítico (contraejemplo de las conjeturas de Aizerman y Kalman) y en un caso no crítico (localización de un atractor oculto en el sistema de Chua) y posteriormente se aplicará el método en la búsqueda de atractores ocultos en sistemas PWL basados en la ecuación de Jerk.

# Capítulo 3

## Atractores ocultos en sistemas lineales por partes

### 3.1. Construcción de contraejemplos a las conjeturas de Aizerman y Kalman

Los siguientes resultados fueron extraídos de [37].

Para la ilustración de la aplicación del algoritmo analítico-numérico en un caso crítico, consideremos al sistema de cuarto orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - 10f(\sigma), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 10.1f(\sigma), \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) &= -x_3(t) - x_4(t) + f(\sigma), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $\sigma = x_1(t) - 10.1x_3(t) - 0.1x_4(t)$  y con la no linealidad  $f(\sigma)$  de la forma (2.45)

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1, & \forall \sigma > 1 \\ \sigma, & \forall \sigma \in [-1, 1] \\ -1, & \forall \sigma < -1. \end{cases} \tag{3.2}$$

El sistema (3.1) tiene tres puntos de equilibrio en

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}(t) = \pm \begin{pmatrix} 10.1 \\ -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las respectivas matrices Jacobianas del sistema en las diferentes secciones del espacio de estados son



$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Df(\tilde{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} -10 & -1 & 101 & 1 \\ -9.1 & 0 & 102.01 & 1.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -11.1 & -1.1 \end{pmatrix},$$

así, los puntos de equilibrio tienen sus correspondientes conjuntos de eigenvalores

$$\Lambda_{1,3} = \left\{ \begin{array}{c} \pm i \\ -0.5 \pm 0.866i \end{array} \right\}, \quad \Lambda_2 = \left\{ \begin{array}{c} -9.8966 \\ -1.1979 \\ -0.0027 \pm 0.2904i \end{array} \right\}.$$

Ahora aplicaremos la metodología presentada anteriormente para buscar oscilaciones ocultas.

**Paso 1** Reescribimos el sistema (3.1) en la forma de Lur'e (2.22)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^4, \quad (3.3)$$

donde, para el sistema (3.1) tenemos

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10.1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}.$$

$$\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = f(\sigma) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) = \sigma.$$

**Paso 2** Para este paso debemos observar que la matriz  $\mathbf{P}$  tiene el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda_{\mathbf{P}_0} = \left\{ \begin{array}{c} \pm i \\ -0.5 \pm 0.866i \end{array} \right\},$$

de este modo omitimos introducir un coeficiente de linealización armónica. Entonces, reescribiendo el sistema en la forma (2.24) tenemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad (3.4)$$

donde,  $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma)$  y  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$ , con  $\omega_0 = 1$ .

**Paso 3** Para este caso la secuencia de funciones  $\varphi^j(\sigma)$ ,  $j = 1, \dots, m$  la conseguimos introduciendo el parámetro  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño de la siguiente manera

$$\varphi^j(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = \begin{cases} \varepsilon_j^3, & \forall \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) > \varepsilon_j \\ \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t), & \forall \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) \in [-\varepsilon_j, \varepsilon_j], \\ \varepsilon_j^3, & \forall \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) < -\varepsilon_j, \end{cases} \quad \varepsilon_j = \frac{j}{m} \quad (3.5)$$

obteniendo el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\varphi^j(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)). \quad (3.6)$$

**Paso 4** Observemos que haciendo  $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ , con  $\mu \in (0, 9.9)$ , de acuerdo a la conjetura de Aizerman, el sistema (3.1) es asintóticamente estable. Entonces, bajo estas condiciones, no es posible determinar soluciones periódicas para el sistema (3.1) utilizando el método de la función descriptiva haciendo de este caso un *caso crítico*.

Ahora, de acuerdo a (2.52) es posible calcular las siguientes condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.7513 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

las cuales nos conducen a la solución periódica  $\mathbf{x}^1(t)$  del sistema (3.6) con  $j = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$  para el primer paso del procedimiento (ver Figura 3.1).

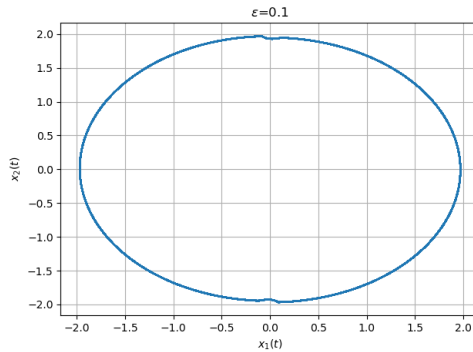


Figura 3.1: Solución periódica para el sistema (3.1) para  $j = 1$ , con condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0^1 = (0, -1.7513, 0, 0)^T$ . Proyección en el plano  $(x_1(t), x_2(t))$ .

**Paso 5** Una vez que calculamos la trayectoria  $\mathbf{x}^1(t)$  del sistema (3.6) con  $j = 1$ . El último punto  $\mathbf{x}^1(T)$  de la trayectoria calculada es tomado como condición inicial para el cálculo de la solución periódica  $\mathbf{x}^2(t)$  para el sistema (3.6) con  $j = 2$ .

**Paso 6** Continuando con el procedimiento calculamos  $\mathbf{x}^j(t)$  con  $j = 2, \dots, 9$  usando las trayectorias del sistema (3.6) con condición inicial  $\mathbf{x}_0^j = \mathbf{x}^{j-1}(T)$ . En la Figura 3.2 observamos el cálculo numérico de la solución periódica  $\mathbf{x}^j(t)$  del sistema (3.6) para  $j = 2, \dots, 9$ .

**Paso 7** Finalmente, en la Figura 3.3 se observa la solución periódica  $\mathbf{x}^{10}(t)$  para el sistema (3.1) para  $j = 10$  y con condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_0^{10} = \begin{pmatrix} 23.3012 \\ -4.2240 \\ 0.9856 \\ 0.0905 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

La solución periódica  $\mathbf{x}^{10}(t)$  es considerado un atractor oculto ya que coexiste con el punto de equilibrio estable  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  y, como podemos observar en la Figura 3.4, las soluciones iniciadas en las vecindades de los puntos de equilibrio inestables  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$  se dirigen al origen. También, en la Figura 3.4 se presentan diferentes proyecciones de la solución periódica  $\mathbf{x}^{10}(t)$  en

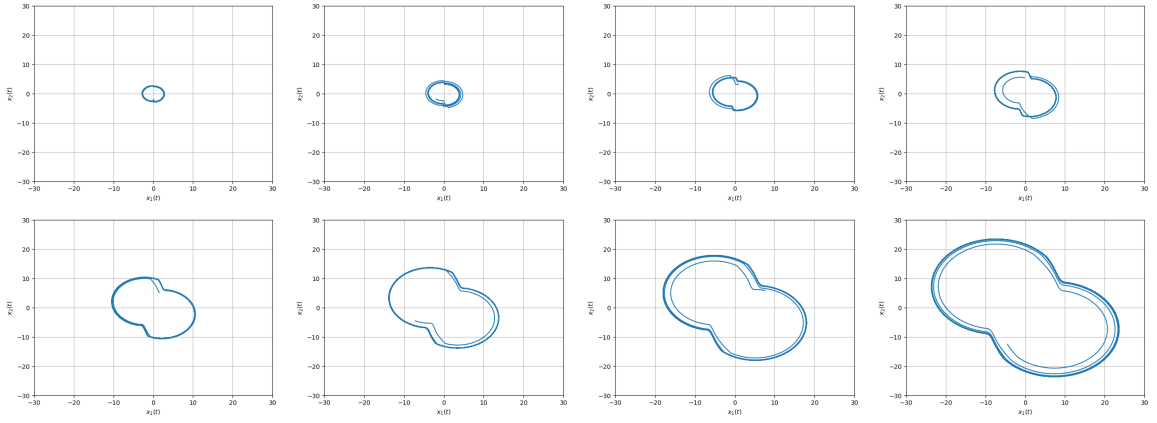


Figura 3.2: Cálculo secuencial de una solución periódica para  $j = 2, \dots, 9$ . Proyecciones en el plano  $(x_1(t), x_2(t))$ .

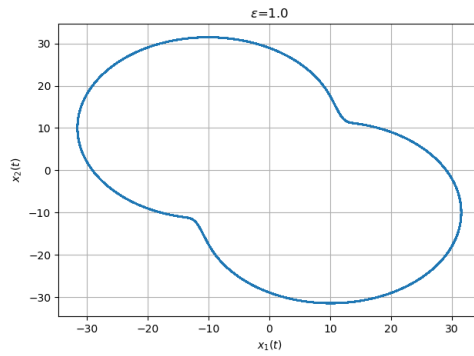


Figura 3.3: Solución periódica  $\mathbf{x}^{10}(t)$  para el sistema (3.1) para  $j = 10$ , condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0^{10} = (23.3012, -4.2240, 0.9856, 0.0905)^T$ . Proyección en el plano  $(x_1(t), x_2(t))$ .

las cuales vemos como la solución se mantiene a pesar de la presencia del punto de equilibrio estable.

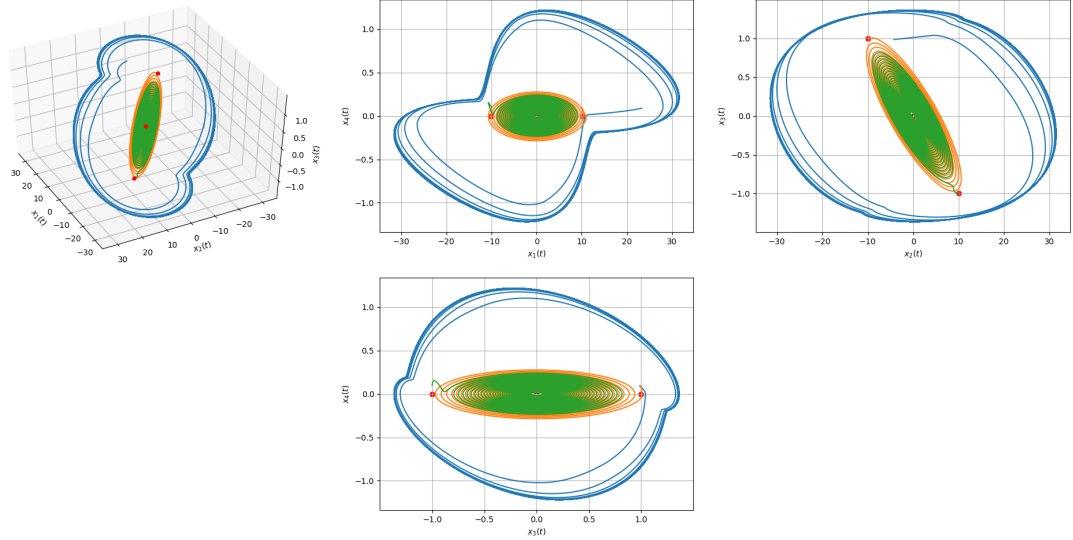


Figura 3.4: Atractor oculto del sistema (3.1) que coexiste con el punto de equilibrio estable  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (0, 0, 0)^T$ . Proyecciones de la solución periódica  $\mathbf{x}^{10}(t)$  en los planos  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ ,  $(x_1(t), x_4(t))$ ,  $(x_2(t), x_3(t))$ ,  $(x_4(t), x_3(t))$  respectivamente.

## 3.2. Localización de atractores ocultos en el sistema de Chua

Los siguientes resultados fueron extraídos de [8], [36], [38], [39].

Ahora aplicaremos el algoritmo presentado anteriormente al análisis del sistema de Chua:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha(x_2(t) - x_1(t)(m_1 + 1)) - \alpha f(x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -(\beta x_2(t) + \gamma x_3(t)).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Aquí la función

$$f(x_1(t)) = \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|)$$

caracteriza un elemento no lineal del sistema llamado *diodo de Chua*;  $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1 \in \mathbf{R}$  son parámetros del sistema.

**Paso 1** Reescribimos el sistema de Chua en la forma Lur'e (2.22)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^3.\tag{3.10}$$

Aquí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = f(x_1(t)).$$

**Paso 2** Introducimos el coeficiente  $k$  representando el sistema (3.10) como (2.24)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{q} \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad (3.11)$$

donde

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P} + k \mathbf{q} \mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1 + k) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{1,2}^{\mathbf{P}_0} = \pm i \omega_0, \quad \lambda_3^{\mathbf{P}_0} = -d,$$

$$\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) - k \sigma = (m_0 - m_1) \text{sat}(\sigma) - k \sigma.$$

**Paso 3** Introducimos la secuencia de funciones  $\varphi^j(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = \varepsilon_j \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t))$  con  $j = 1, \dots, 10$  y donde

$$\varepsilon_j = \frac{j}{m}, \quad m = 10$$

De esta manera tenemos reescrito el sistema (3.11) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{q} \varepsilon_j \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad (3.12)$$

**Paso 4** Para aplicar el método de la función descriptiva aplicamos la transformación lineal no singular  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{S} \mathbf{y}(t)$  reduciendo el sistema (3.12), con  $\varepsilon_1$  suficientemente pequeño, a la forma (2.29)

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{b} \varepsilon_1 \varphi(\mathbf{c}^T \mathbf{y}(t)), \quad (3.13)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}.$$

La función de transferencia  $W_{\mathbf{A}}(s)$  del sistema (3.13) puede ser representado como

$$W_{\mathbf{A}}(s) = \frac{-b_1 s + b_2 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{h}{s + d}.$$

Además, usando la equivalencia de las funciones de transferencia del sistema (3.11) y (3.13), se puede obtener

$$W_{\mathbf{A}}(s) = \mathbf{r}^T (\mathbf{P}_0 - s \mathbf{I})^{-1} \mathbf{q}.$$

Esto implica las siguientes relaciones [36]

$$k = \frac{-\alpha(m_1 + m_1 \gamma + \gamma) + \omega_0^2 - \gamma - \beta}{\alpha(1 + \gamma)},$$

$$d = \frac{\alpha + \omega_0^2 - \beta + 1 + \gamma + \gamma^2}{1 + \gamma},$$

$$h = \frac{\alpha(\gamma + \beta - (1 + \gamma)d + d^2)}{\omega_0^2 + d^2},$$

$$b_1 = \frac{\alpha(\gamma + \beta - \omega_0^2 - (1 + \gamma)d)}{\omega_0^2 + d^2},$$

$$b_2 = \frac{\alpha((1 + \gamma - d)\omega_0^2 + (\gamma + \beta)d)}{\omega_0(\omega_0^2 + d^2)}.$$

Para la matriz  $\mathbf{S}$  las siguientes relaciones son validas:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{S}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}, \quad \mathbf{c}^T = \mathbf{r}^T\mathbf{S}. \quad (3.14)$$

Habiendo resuelto estas ecuaciones matriciales (3.14), se puede obtener la matriz de transformación

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix},$$

donde

$$s_{11} = 1, \quad s_{12} = 0, \quad s_{13} = -h,$$

$$s_{21} = m_1 + 1 + k, \quad s_{22} = -\frac{\omega_0^2}{\alpha},$$

$$s_{23} = -\frac{h(\alpha(m_1 + 1 + k) - d)}{\alpha}, \quad s_{31} = \frac{\alpha(m_1 + k) - \omega_0^2}{\alpha},$$

$$s_{32} = -\frac{\alpha(\beta + \gamma)(m_1 + k) + \alpha\beta - \gamma\omega_0^2}{\alpha\omega_0},$$

$$s_{33} = h\frac{\alpha(m_1 + k)(d - 1) + d(1 + \alpha - d)}{\alpha}.$$

Usando el Teorema 2.2 se obtienen las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_0^1 = \mathbf{S}\mathbf{y}(0) = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0s_{11} \\ a_0s_{21} \\ a_0s_{31} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Regresando a la denotación del sistema de Chua, para la determinación de condiciones iniciales de una solución inicial para el procedimiento multietapas, se obtienen

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0(m_1 + 1 + k) \\ a_0\frac{\alpha(m_1 + k) - \omega_0^2}{\alpha} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Para continuar con el método aplicaremos los resultados anteriores en la búsqueda de atractores ocultos en el sistema de Chua (3.9) usando dos conjuntos de parámetros con los cuales el sistema presenta dos diferentes configuraciones de estabilidad de sus puntos de equilibrio. Primero revisaremos el caso en el que el sistema tiene los puntos de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  estable,  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$  inestables; y segundo  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  inestable,  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$  estables.

### 3.2.1. Caso 1: Puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_2$ estable, $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ inestables

En esta sección aplicaremos un conjunto de parámetros al sistema de Chua (3.9) con los cuales los puntos de equilibrio simétricos  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$  son inestables mientras que el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  es estable.

Ahora, consideremos el sistema (3.9) con los parámetros [38]

$$\alpha = 8.4562, \quad \beta = 12.0732, \quad \gamma = 0.0052, \quad m_0 = -0.1768, \quad m_1 = -1.1468. \quad (3.17)$$

Notemos que para los valores de los parámetros considerados (3.17) hay tres equilibrios en el sistema: el equilibrio cero

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con la matriz Jacobiana

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} -6.9611 & 8.4562 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -12.0732 & -0.0052 \end{pmatrix},$$

y el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda_2 = \{-7.9587, -0.0038 \pm 3.2494i\},$$

es un foco-nodo estable y dos equilibrios simétricos

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = \pm \begin{pmatrix} -6.5883 \\ -0.0028 \\ 6.5854 \end{pmatrix}$$

con la matriz Jacobiana

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}) = \begin{pmatrix} 1.2413 & 8.4562 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -12.0732 & -0.0052 \end{pmatrix},$$

y el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda_{1,3} = \{2.2193, -0.9915 \pm 2.4067i\},$$

son foco-silla con variedades inestables de una dimensión.[38]

Ahora, aplicamos el procedimiento anterior para la localización de atractores ocultos al sistema de Chua con los parámetros (3.17). Para este propósito, calculamos una frecuencia inicial y un coeficiente armónico de linealización

$$\omega_0 = 2.0392, \quad k = 0.2098 \quad (3.18)$$

Asumiendo  $a \geq 1$  la función descriptiva y su derivada para el sistema de Chua puede ser reescrita como sigue:

$$\Phi(a) = 2(m_0 - m_1) \left[ \frac{\pi a}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} - a \arccos \left( \frac{1}{a} \right) \right] - \pi a k,$$

$$\frac{d\Phi(a)}{da} = 2(m_0 - m_1) \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} - \arccos \left( \frac{1}{a} \right) \right] - \pi k,$$

Continuando con el **Paso 4**, por los parámetros (3.17) y (3.18) se obtiene la amplitud inicial  $a_0 = 5.8576$  que satisface las condiciones del Teorema 2.2. Así, por (3.16) las condiciones iniciales para la oscilación son las que siguen

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} 5.8576 \\ 0.3694 \\ -8.3686 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

para el primer paso del procedimiento para la construcción de soluciones. Para el valor del parámetro  $\varepsilon_1 = 0.1$ , después del proceso transitorio, el procedimiento computacional alcanza la oscilación inicial  $\mathbf{x}^1(t)$  (Figura 3.5).

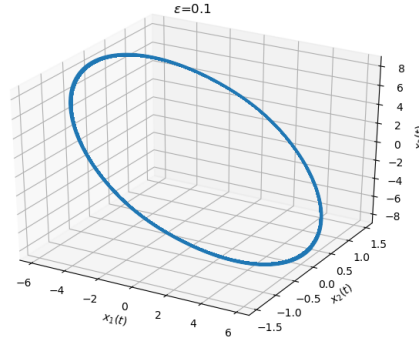


Figura 3.5: Paso 1: Oscilación inicial para el sistema (3.11) con  $j = 1$ , parámetros (3.17),  $\mathbf{x}_0 = (5.8576, 0.3694, -8.3686)^T$

**Paso 5** Habiendo calculado la solución periódica  $\mathbf{x}^1(t)$ , damos el siguiente paso calculando la solución  $\mathbf{x}^2(t)$  del sistema (3.12). En el primer cuadro de la Figura 3.6 podemos observar como la solución  $\mathbf{x}^2(t)$  es periódica, lo que nos permite continuar con el procedimiento.

**Paso 6** Con el incremento del parámetro  $\varepsilon_j$ , podemos observar la transformación secuencial de  $\mathbf{x}^j(t)$ , con  $j = 2, \dots, 9$ , usando el procedimiento de continuación numérica (Figura 3.6).

**Paso 7** Finalmente se calcula el conjunto  $\Gamma_{hidden}$  siendo la solución  $\mathbf{x}^{10}(t)$  del sistema (3.12) con  $j = 10$ , es decir, el sistema de Chua (3.9) (Figura 3.7)

$$\mathbf{x}_{0+}^{10} = \begin{pmatrix} -3.0335 \\ -0.9829 \\ 4.6962 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$



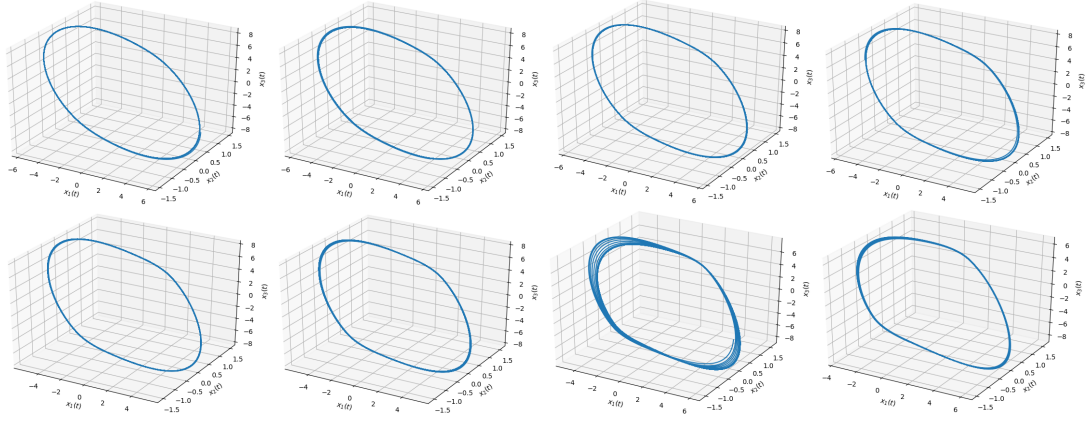


Figura 3.6: Transformación secuencial de la solución oscilante  $\mathbf{x}^j(t)$  con el incremento del parámetro  $\epsilon_j = 0.2, \dots, 0.9$ , con  $j = 2, \dots, 9$ .

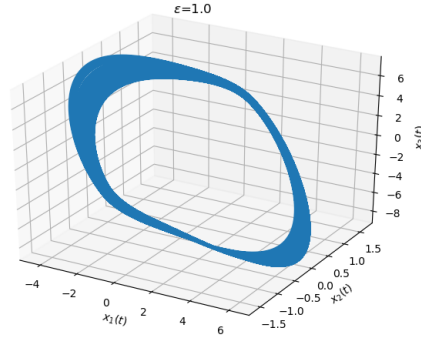


Figura 3.7: Atractor oculto del sistema de Chua (3.9) con el conjunto de parámetros (3.17), condiciones iniciales  $\mathbf{x}_{0+}^{10} = (-3.0335, -0.9829, 4.6962)^T$ .

Cabe señalar que aquí la disminución del paso de integración, el incremento del tiempo de integración, y el calculo de diferentes trayectorias del sistema original con condición inicial desde una vecindad pequeña de  $\Gamma_{hidden}$  lleva a la localización del mismo conjunto  $\Gamma_{hidden}$  [36].

Resulta que para este caso, esto es suficiente para la localización de dos atractores caóticos ocultos simétricos  $\Gamma_{\pm}^{hid}$  en el sistema de Chua (Figura 3.8). Esto es debido a que los puntos de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ , son simétricos y además comparten estabilidad, es decir,  $Df(\tilde{\mathbf{x}}_1) = Df(\tilde{\mathbf{x}}_3)$  y por lo tanto los sus correspondientes conjuntos de eigenvalores  $\Lambda_1 = \Lambda_3$ ; esto dota al sistema de Chua una simetría en su estabilidad. Para el atractor  $\Gamma_{-}^{hid}$  se debe tomar la condición inicial simétrica (Figura 3.8) [38].

$$\mathbf{x}_{0-}^{10} = \begin{pmatrix} 3.0335 \\ 0.9829 \\ -4.6962. \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

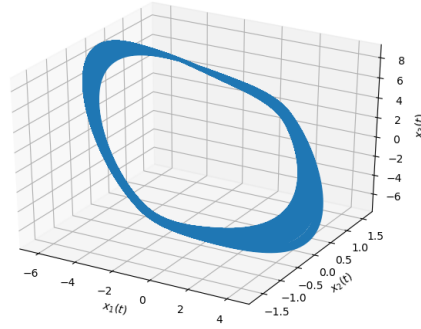


Figura 3.8: Atractor oculto simétrico  $\Gamma_-^{hid}$  del sistema de Chua (3.9), parámetros (3.17), condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0^- = (3.0335, 0.9829, -4.6962)^T$ .

Consideramos al par de atractores simétricos  $\Gamma_{\pm}^{hid}$  como ocultos debido a que se mantienen a pesar de la presencia del punto de equilibrio estable  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  y las soluciones iniciadas cerca de los puntos de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ . En la Figura 3.9 observamos como los atractores simétricos  $\Gamma_{\pm}^{hid}$  coexisten con trayectorias que se son iniciadas desde las vecindades de los puntos de equilibrio inestables  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$  hacia el punto de equilibrio estables  $\tilde{\mathbf{x}}_2$ .

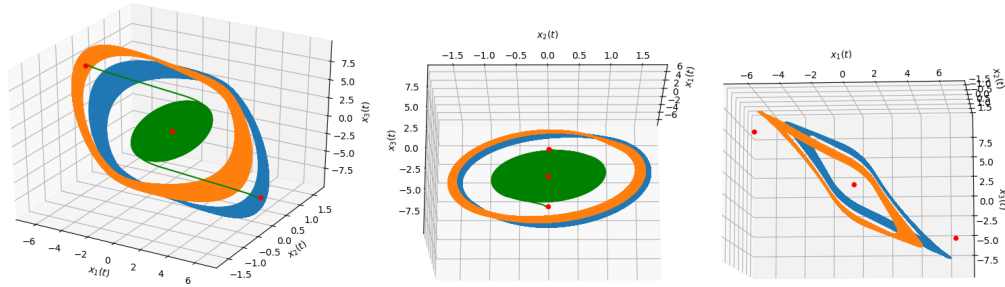


Figura 3.9: Dos atractores caóticos ocultos simétricos,  $\Gamma_{\pm}^{hid}$ , parámetros (3.17), condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = \pm(-3.0335, -0.9829, 4.6962)^T$ .

Hasta aquí se dan por finalizados los pasos del método analítico numérico para la búsqueda de atractores ocultos en el sistema de Chua (3.9) con el conjunto de parámetros (3.17). En la siguiente sección continuaremos el método analítico numérico para la búsqueda de atractores ocultos en el sistema de Chua (3.9) desde el paso al que llegamos en la **Sección 3.2**.

### 3.2.2. Caso 2: Puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_2$ inestable, $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ estables

En un segundo caso aplicaremos un conjunto de parámetros al sistema de Chua (3.9) con los cuales los puntos de equilibrio simétricos  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$  son estables mientras que el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  es inestable.

Consideremos otros valores de parámetros para el sistema (3.9)

$$\alpha = 8.4, \quad \beta = 12, \quad \gamma = -0.005, \quad m_0 = -1.2, \quad m_1 = -0.05. \quad (3.22)$$

Notemos que para los valores de los parámetros (3.22) el equilibrio cero

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con la matriz Jacobiana

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} 1.68 & 8.40 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -12 & 0.005 \end{pmatrix},$$

y el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda_2 = \{2.7112, -1.0131 \pm 2.5279i\},$$

es un foco silla con una variedad unidimensional inestable y dos equilibrios simétricos

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = \pm \begin{pmatrix} -1.2099 \\ 0.0005 \\ 1.2104 \end{pmatrix}$$

con la matriz Jacobiana

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}) = \begin{pmatrix} -7.98 & 8.40 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -12 & 0.005 \end{pmatrix},$$

y el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda_{1,3} = \{-8.8892, -0.0428 \pm 3.2819i\},$$

son focos nodos estables.

Continuando con el método, con estos parámetros, es posible calcular dos frecuencias iniciales y dos coeficientes de armonización:

$$\omega_{01} = 3.2396, \quad k_1 = -0.1244 \quad (3.23)$$

y

$$\omega_{02} = 2.0260, \quad k_2 = -0.8890. \quad (3.24)$$

Para finalizar el **Paso 4**, con los parámetros (3.22) y (3.23) y por (3.16) tenemos las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} 11.7546 \\ 9.7044 \\ -16.7367 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Con las condiciones iniciales (3.25) es posible llegar a una solución oscilante para el primer paso del procedimiento multietapas (Figura 3.10).

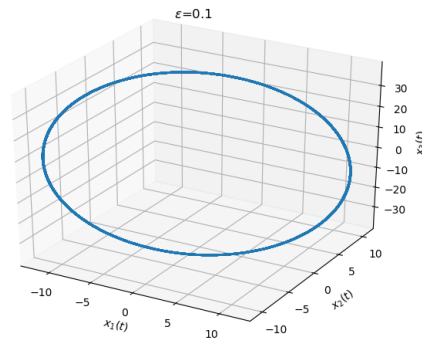


Figura 3.10: Solución periódica  $\mathbf{x}^1(t)$  para el primer paso del procedimiento, parámetros (3.22) y (3.24), condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0^1 = (11.7546, 9.7044, -16.7367)^T$ .

**Paso 5** Después de observar que la solución periódica  $\mathbf{x}^1(t)$  se mantiene después de un intervalo de tiempo suficientemente largo, calculamos la solución  $\mathbf{x}^2(t)$  y observamos que de igual forma se mantiene lo que nos permite continuar con el procedimiento.

**Paso 6** Continuando con el procedimiento, se observa que la solución oscilante se mantiene durante todo el procedimiento. En la Figura 3.11 se muestra como las soluciones  $\mathbf{x}^j(t)$ ,  $j = 2, \dots, 9$ , son periódicas, lo que nos permite ir avanzando en los diferentes pasos.

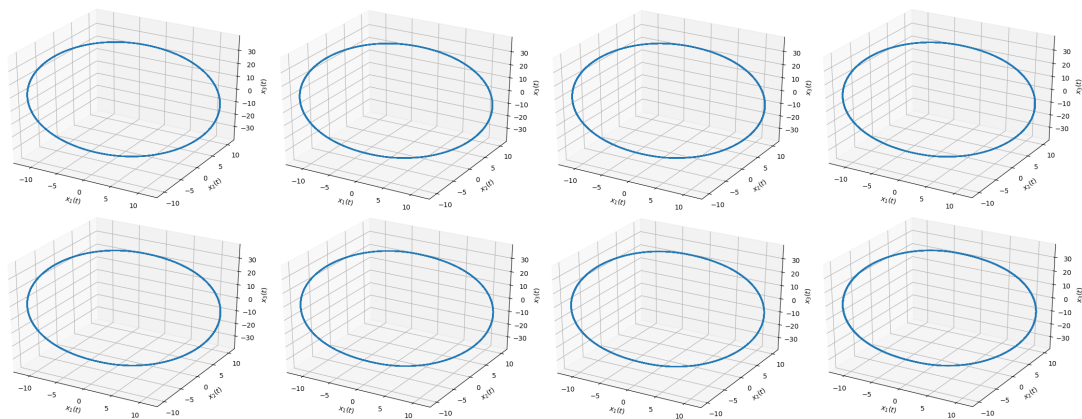


Figura 3.11: Soluciones periódicas  $\mathbf{x}^j(t)$  con  $j = 2, \dots, 9$ , parámetros (3.22) y (3.24).

**Paso 7** Finalmente, para el último paso del procedimiento, cuando  $\varepsilon = 1$ , tenemos un

ciclo límite estable, condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_0^{10} = \begin{pmatrix} 2.4725 \\ -2.5339 \\ -36.5307 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

el cual consideramos como un atractor oculto  $\Gamma_{limCyc}^{hid}$  para el sistema de Chua (3.9) (Figura 3.12).

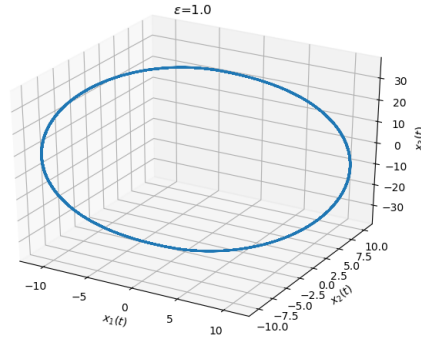


Figura 3.12: Ciclo límite oculto  $\Gamma_{limCyc}^{hid}$  en el sistema de Chua (3.9), parámetros (3.22) y (3.24), condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0^{10} = (2.4725, -2.5339, -36.5307)^T$ .

Por otro lado, para los parámetros (3.22) y (3.24), continuamos con el **Paso 4** y por (3.16) las condiciones iniciales para la oscilación son

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} 1.5187 \\ 0.0926 \\ -2.1682 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Usando las condiciones iniciales (3.27) en el sistema (3.12) con  $j = 1$ , es decir,  $\varepsilon = 0.1$  la solución  $\mathbf{x}^1$  se dirige al origen (ver Figura 3.13), el cual, en este paso es estable por el efecto de la no linealidad  $\varphi^1(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t))$ .

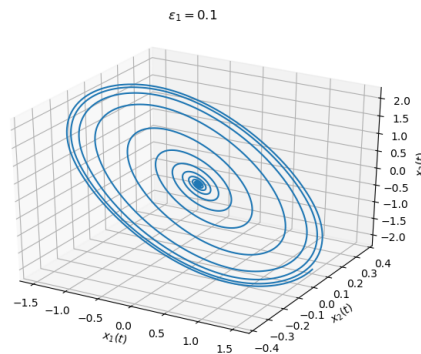


Figura 3.13: La solución  $\mathbf{x}^1(t)$  se dirige al origen.

De esta manera, no es posible continuar con el método analítico numérico para la localización de atractores ocultos con esta configuración en el sistema de Chua (3.9). Sin embargo, es posible utilizar las condiciones iniciales (3.27) para el sistema (3.12) con  $j = 10$  para localizar un atractor  $\Gamma_+^{hid}$  como lo observamos en la Figura 3.14.

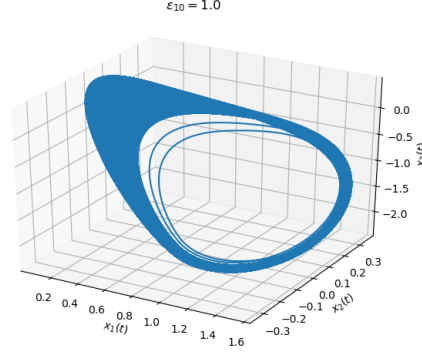


Figura 3.14: Atractor oculto  $\Gamma_+^{hid}$  del sistema de Chua (3.12),  $j = 10$ , con parámetros (3.22) y condición inicial  $\mathbf{x}_0^{10} = (1.5187, 0.0926, -2.1682)^T$ .

También, por la naturaleza simétrica del sistema de Chua (3.9), es posible localizar un atractor oculto simétrico  $\Gamma_-^{hid}$  (Figura 3.15) usando las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_{0-}^{10} = \begin{pmatrix} -1.5187 \\ -0.0926 \\ 2.1682 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

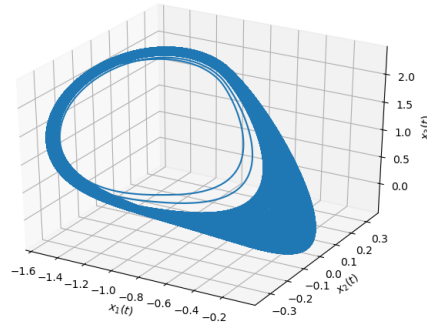


Figura 3.15: Atractor oculto simétrico,  $\Gamma_-^{hid}$ , del sistema de Chua (3.12),  $j = 10$ , con parámetros (3.22) y condición inicial  $\mathbf{x}_{0-}^{10} = (-1.5187, -0.0926, 2.1682)^T$ .

Así, con esta configuración, a pesar de los atractores triviales, es decir los puntos de equilibrio simétricos  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ , para el sistema (3.9) y los parámetros (3.22) se obtiene la coexistencia de un atractor periódico oculto  $\Gamma_{limCyc}^{hid}$  (ciclo límite estable) y dos atractores ocultos simétricos  $\Gamma_{\pm}^{hid}$  [38] (ver Figura 3.16).

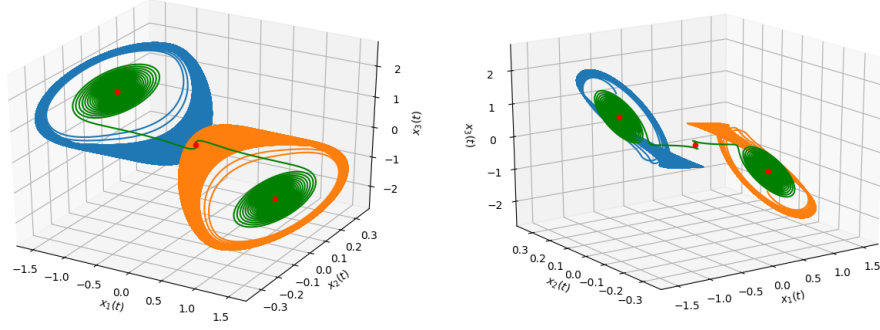


Figura 3.16: Atractores ocultos simétricos  $\Gamma_{\pm}^{hid}$  coexisten con los puntos de equilibrio estables  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ . Las trayectorias iniciadas cerca del punto de equilibrio inestable  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  se dirigen a los puntos de equilibrio estables.

### 3.3. Un atractor oculto en el sistema de Chua generalizado

Ahora, si consideramos el sistema de Chua generalizado (3.29)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha(x_2(t) - x_1(t)(m_1 + 1)) - \alpha f(x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -(\beta x_2(t) + \gamma x_3(t)),\end{aligned}\tag{3.29}$$

donde el elemento no lineal esta dado por

$$f(x_1(t)) = g(x_1(t)) + \frac{1}{2}(s - m_0)(|x_1(t) + \delta_0| - |x_1(t) - \delta_0|)\tag{3.30}$$

donde  $\delta_0$  y  $s$  son parámetros que determinan la estabilidad del equilibrio cero.

La función

$$g(x_1(t)) = \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|)\tag{3.31}$$

representa el *diodo de Chua* (ver Figura 3.17).

Ahora aplicamos el método analítico numérico para buscar atractores ocultos en el sistema de Chua generalizado (3.29) que describimos anteriormente.

**Paso 1** Reescribimos el sistema (3.29) en la forma Lur'e (2.22)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^3.\tag{3.32}$$

Aquí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = f(x_1(t)).$$

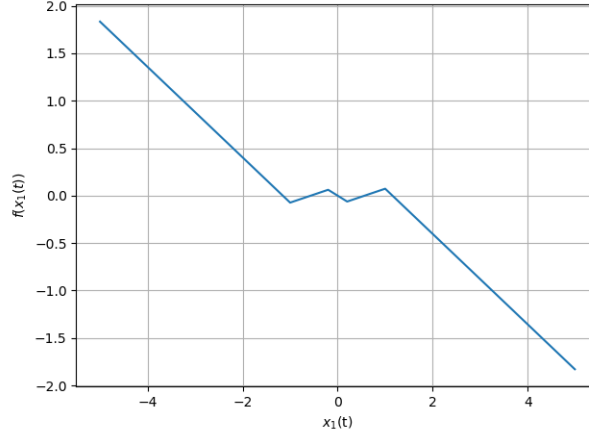


Figura 3.17: Gráfica de la no linealidad  $\psi(x_1(t))$  (3.30).

**Paso 2** Introducimos el coeficiente de linealización armónica  $k$  y representamos el sistema (3.32) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{q} \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad (3.33)$$

donde

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P} + k \mathbf{q} \mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} -\alpha(1+k) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{1,2}^{\mathbf{P}_0} = \pm i \omega_0, \quad \lambda_3^{\mathbf{P}_0} = -d,$$

$$\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) - k\sigma = (m_0 - m_1) \text{sat}(\sigma) - k\sigma.$$

**Paso 3** Introducimos la secuencia de funciones  $\varphi^j(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = \varepsilon_j \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t))$  con  $j = 1, \dots, 10$  y donde

$$\varepsilon_j = \frac{j}{m}, \quad m = 10$$

De esta manera tenemos reescrito el sistema (3.11) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{q} \varepsilon_j \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad (3.34)$$

**Paso 4** Para aplicar el método de la función descriptiva hacemos una transformación lineal no singular  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{S} \mathbf{y}(t)$  el sistema (3.34) es reducido a la forma

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{b} \varepsilon_1 \varphi(\mathbf{c}^T \mathbf{y}(t)), \quad (3.35)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}.$$

La función de transferencia  $W_{\mathbf{A}}(s)$  del sistema (3.35) puede ser representado como

$$W_{\mathbf{A}}(s) = \frac{-b_1 s + b_2 \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{h}{s + d}.$$



Además, usando la equivalencia de las funciones de transferencia del sistema (3.34) y (3.35), se puede obtener

$$W_A(s) = \mathbf{r}^T (\mathbf{P}_0 - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{q}.$$

Esto implica las siguientes relaciones [36]

$$\begin{aligned} k &= \frac{-\alpha\gamma + \omega_0^2 - \gamma - \beta}{\alpha(1 + \gamma)}, \\ d &= \frac{\alpha + \omega_0^2 - \beta + 1 + \gamma + \gamma^2}{1 + \gamma}, \\ h &= \frac{\alpha(\gamma + \beta - (1 + \gamma)d + d^2)}{\omega_0^2 + d^2}, \\ b_1 &= \frac{\alpha(\gamma + \beta - \omega_0^2 - (1 + \gamma)d)}{\omega_0^2 + d^2}, \\ b_2 &= \frac{\alpha((1 + \gamma - d)\omega_0^2 + (\gamma + \beta)d)}{\omega_0(\omega_0^2 + d^2)}. \end{aligned}$$

Para la matriz  $\mathbf{S}$  las siguientes relaciones son validas:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}_0 \mathbf{S}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}, \quad \mathbf{c}^T = \mathbf{r}^T \mathbf{S}. \quad (3.36)$$

Habiendo resuelto estas ecuaciones matriciales (3.36), se puede obtener la matriz de transformación

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} s_{11} &= 1, & s_{12} &= 0, & s_{13} &= -h, \\ s_{21} &= 1 + k, & s_{22} &= -\frac{\omega_0}{\alpha}, \\ s_{23} &= \frac{h(d - k\alpha - \alpha)}{\alpha}, & s_{31} &= \frac{\alpha k - \omega_0^2}{\alpha}, \\ s_{32} &= -\frac{\alpha\beta + k\alpha\beta + k\alpha\gamma - \gamma\omega_0^2}{\alpha\omega_0}, \\ s_{33} &= -\frac{h(d^2 - (1 + \alpha + k\alpha)d + k\alpha)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Usando el Teorema 2.2 se obtienen las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_0^1 = \mathbf{S} \mathbf{y}(0) = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 s_{11} \\ a_0 s_{21} \\ a_0 s_{31} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Regresando a la denotación del sistema de Chua, para la determinación de condiciones iniciales de una solución inicial para el procedimiento multietapas, se obtienen

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0(1+k) \\ \frac{k\alpha - \omega_0^2}{\alpha} \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Para continuar con el procedimiento, consideramos el siguiente conjunto de parámetros

$$\begin{aligned} s = -0.31, \quad \delta_0 = 0.2, \quad m_0 = 0.1691, \quad m_1 = -0.4768, \\ \alpha = -1.398, \quad \beta = -0.0136, \quad \gamma = -0.0297. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Observemos que con el conjunto de parámetros (3.39), el sistema tiene cinco puntos de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{2,4} = \pm \begin{pmatrix} 0.1983 \\ 0.1360 \\ -0.0623 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{1,5} = \pm \begin{pmatrix} 3.3807 \\ 2.3189 \\ -1.0618 \end{pmatrix},$$

y sus respectivos conjuntos de eigenvalores son

$$\begin{aligned} \Lambda_3 = \{-0.0025 \pm 0.647i, -0.00059\}, \quad \Lambda_{2,4} = \{0.8874, -0.3248, 0.1014\}, \\ \Lambda_{1,5} = \{-0.127 \pm 0.7954i, 0.0151\}. \end{aligned}$$

Primero, calculamos el coeficiente de linealización armónica y el valor de la frecuencia inicial

$$\omega_0 = -0.6436, \quad k = -0.03067. \quad (3.40)$$

Luego por (3.38) y con los parámetros (3.39) y (3.40) se obtienen las condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} -1.1061 \\ -0.7669 \\ 0.0115 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

para el primer paso del procedimiento de construcción de soluciones. Para  $\varepsilon_1 = 0.1$  después del proceso transitorio el procedimiento computacional llega a una solución periódica  $\mathbf{x}^1(t)$  (Figura 3.18).

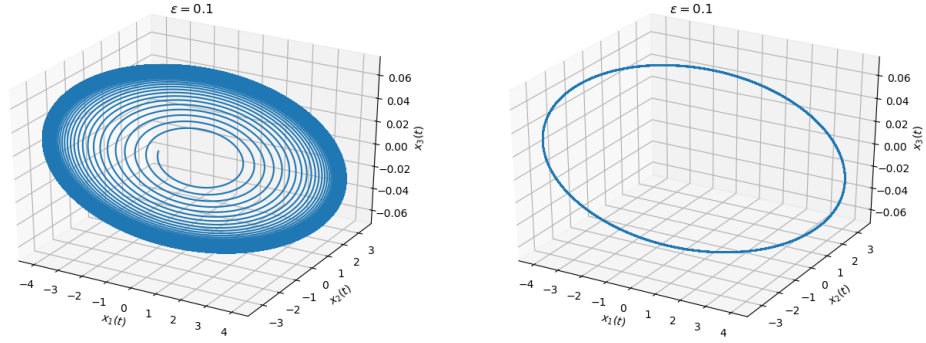


Figura 3.18: Paso 1: Oscilación inicial para el sistema de Chua (3.9) con no linealidad (3.30),  $\epsilon_1 = 0.1$ .

**Paso 5** Ya que observamos el comportamiento periódico de la solución  $\mathbf{x}^1(t)$ , podemos continuar con el siguiente paso el procedimiento, calcular la solución  $\mathbf{x}^2(t)$  para el sistema (3.34) con  $j = 2$  la cual mantiene el comportamiento periódico (ver Figura 3.19).

**Paso 6** Incrementando el parámetro  $\epsilon_j$ ,  $j = 3, \dots, 9$  esta solución periódica  $\mathbf{x}^j(t)$  se transforma a un atractor caótico de tipo doble desplazamiento (Figura 3.19).

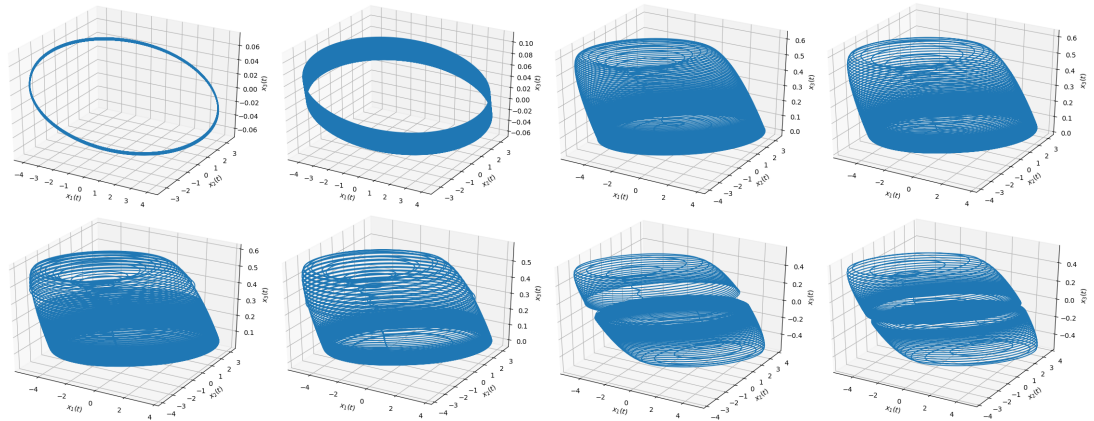


Figura 3.19: Continuación numérica para el sistema de Chua con no linealidad (3.30) para  $j = 2, \dots, 9$

**Paso 7** En la Figura 3.20 observamos un atractor  $\Gamma$  del sistema de Chua generalizado (3.29) y condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_0^{10} = \begin{pmatrix} -3.4431 \\ -1.1884 \\ 0.1849 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

a pesar de la existencia del equilibrio estable cero, el procedimiento descrito permite ir a un atractor oculto por medio de aproximaciones secuenciales [39].

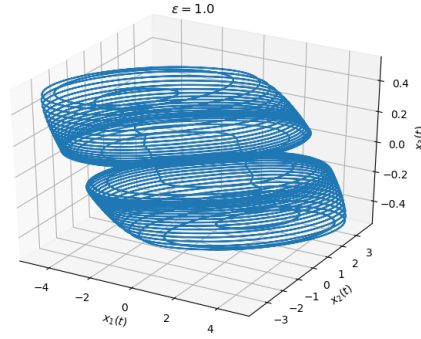


Figura 3.20: Atractor  $\Gamma$  del sistema de Chua generalizado (3.29) de condición inicial  $\mathbf{x}_0^{10} = (-3.4431, -1.1884, 0.1849)^T$

Sin embargo, en nuestras simulaciones podemos observar que una trayectoria iniciada desde una vecindad de un punto de equilibrio inestable se dirige hacia el atractor localizado por medio del método analítico-numérico, por lo tanto, este atractor es considerado un atractor auto-excitado (ver Figura 3.21).

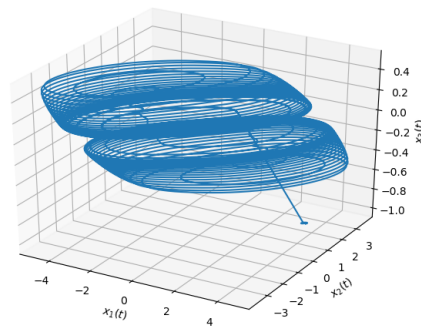


Figura 3.21: Atractor auto-excitado del sistema de Chua generalizado (3.29) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (3.4806, 2.3188, -1.0618)^T$ .

En esta sección hemos podido observar el efecto que los parámetros tienen sobre el sistema de Chua, al variar los parámetros se modifica la estabilidad de los puntos de equilibrio y así podemos observar diferentes configuraciones en las que podemos encontrar diferentes atractores ocultos.

En la siguiente capítulo aplicaremos el método analítico-numérico para localizar posibles atractores ocultos en sistemas lineales por parte basados en la ecuación de Jerk.

## Capítulo 4

# Búsqueda de atractores ocultos en sistemas PWL basados en la ecuación de Jerk

En esta capítulo vamos a aplicar el método analítico-numérico en la búsqueda de atractores ocultos en sistemas PWL basados en la ecuación Jerk [40]

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \beta x(t) + \alpha x(t) + f(\cdot) = 0, \quad (4.1)$$

la cual en su representación en el espacio de estados es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -\alpha x_1(t) - \beta x_2(t) - \gamma x_3(t) - f(x_1(t)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

y donde,  $f(x_1(t))$  es el elemento no lineal del sistema (4.2).

**Paso 1** Para aplicar el método reescribimos el sistema (4.2) en la forma Lur'e

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^3 \quad (4.3)$$

donde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = f(x_1(t))$$

**Paso 2** Ahora, introducimos un coeficiente  $k$  y representamos (4.3) de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{q}\varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) \quad (4.4)$$

donde

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P} + k\mathbf{q}\mathbf{r}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha - k & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = \psi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) - k\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)$$

y  $\lambda_{1,2}^{\mathbf{P}_0} = \pm i\omega_0$ ,  $\lambda_3^{\mathbf{P}_0} = -d < 0$ .

**Paso 3** Introducimos la secuencia de funciones  $\varphi^j(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)) = \varepsilon_j \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t))$  con  $j = 1, \dots, 10$  y donde

$$\varepsilon_j = \frac{j}{m}, \quad m = 10$$

De esta manera tenemos reescrito el sistema (4.3) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{q} \varepsilon_j \varphi(\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t)), \quad (4.5)$$

**Paso 4** Siguiendo el método de la función descriptiva, escribimos la función de transferencia del sistema (4.5)

$$W_{\mathbf{P}_0}(s) = \mathbf{r}^T (\mathbf{P}_0 - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{q} = \frac{1}{s^3 + \gamma s^2 + \beta s + \alpha + k} \quad (4.6)$$

donde  $s$  es una variable compleja y  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Usamos el método de la función descriptiva para definir el coeficiente de linealización armónica  $k$  y la frecuencia inicial  $\omega_0$  resolviendo [7]

$$\text{Im}W(i\omega_0) = 0, \quad k = -(\text{Re}W(i\omega_0))^{-1} \quad (4.7)$$

Así, podemos calcular

$$\omega_0 = \sqrt{\beta}, \quad k = \beta\gamma - \alpha, \quad (4.8)$$

para la linealización armónica del sistema (4.5).

La amplitud  $a$  puede ser obtenida de la ecuación

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \int_0^{2\pi/\omega_0} (\varphi(a \cos(\omega_0 t)) \cos(\omega_0 t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_0} (\psi(a \cos(\omega_0 t)) \cos(\omega_0 t) - ka(\cos(\omega_0 t))^2) dt = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

En las siguientes secciones se realizará la búsqueda de atractores ocultos en el sistema (4.2) considerando dos no linealidades diferentes, en un primer caso consideramos

$$\Psi_1(x_1(t)) = \begin{cases} -0.9, & \text{si } x_1(t) \geq 0.3; \\ 0.0, & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (4.10)$$

siendo este un caso general del sistema (2.12) analizado en la **Sección 2.2.2**.

Podemos escribir la función descriptiva de la no linealidad (4.10) como

$$\Phi_1(a) = \frac{1.8}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{0.09}{a^2}} - \frac{k}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{0.3}{a}\right) + \frac{0.3}{a} \sqrt{1 - \frac{0.09}{a^2}} \right). \quad (4.11)$$

Por último consideramos

$$\Psi_2(x_1(t)) = \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|), \quad (4.12)$$

que representa un elemento no lineal del clásico sistema de Chua llamado diodo de Chua, que, de acuerdo a [38], asumiendo  $a \geq 1$ , la función descriptiva (2.36) para esta función se puede escribir como

$$\Phi_2(a) = 2(m_0 - m_1) \left[ \frac{\pi a}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} - a \arccos\left(\frac{1}{a}\right) \right] - \pi a k. \quad (4.13)$$

Utilizando la función descriptiva (4.9) y la ecuación (4.7), buscando las soluciones  $\omega_0 > 0$  y  $a_0 > 0$ , respectivamente, entonces el sistema (2.24) probablemente tiene una solución periódica  $\mathbf{x}(t)$  para la cual  $\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) \approx a \cos(\omega_0 t)$  con amplitud cercana a  $a_0$  [7]. Si la solución periódica es estable, en el sentido de que todas las soluciones con condición inicial cercana a la solución periódica permanecen cercanas conforme crece el tiempo, podemos tomar como condición inicial

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

para el primer paso del procedimiento multietapas para la localización de oscilaciones ocultas con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.

## 4.1. Sistema basado en la ecuación Jerk con una función escalar lineal de dos partes

En esta sección continuaremos la búsqueda de atractores ocultos en el sistema (4.2) con la no linealidad (4.10) de tal forma que tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -\alpha x_1(t) - \beta x_2(t) - \gamma x_3(t) - \psi_1(x_1(t)), \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde

$$\psi_1(x_1(t)) = \begin{cases} -0.9, & \text{si } x_1(t) \geq 0.3; \\ 0.0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

El sistema (4.15) tiene puntos de equilibrio en

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0.9/\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y una matriz Jacobiana

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

cuyo polinomio característico toma la forma  $\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha = 0$  y aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz tenemos que las siguientes condiciones de estabilidad

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta\gamma > \alpha.$$

En las siguientes secciones aplicaremos los resultados anteriores al sistema (4.15) con dos conjuntos de parámetros con los cuales cambia la estabilidad de los puntos de equilibrio. Primero revisaremos el caso en el que el sistema presenta dos puntos de equilibrio inestables, tal y como lo estudiamos en la **Sección 2.2.2**. Después cambiaremos la configuración del sistema a una en la cual se presentan dos puntos de equilibrio estables.

#### 4.1.1. Puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_{1,2}$ inestables

Escogiendo el conjunto de parámetros

$$\alpha = 1.5, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1,$$

tenemos el sistema como lo vimos anteriormente en la **Sección 2.2.2** con dos puntos de equilibrio inestables en

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda = \{-1.2041, 0.1020 \pm 1.1115i\}.$$

Con esta configuración el sistema (4.15) presenta un atractor con dos enroscados el cual puede ser localizado iniciando una trayectoria desde la vecindad de uno de los puntos de equilibrio inestables (ver Figura 4.1).

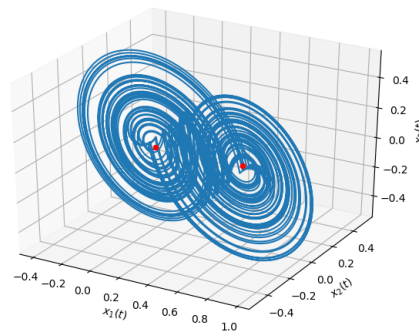


Figura 4.1: Atractor con dos enroscados del sistema (4.15) con parámetros  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  y condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (0.6, 0, 0.1)^T$  considerado auto-excitado. En rojo los puntos de equilibrio inestables  $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (0, 0, 0)^T$  y  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (0.6, 0, 0)^T$



Continuando con el **Paso 4**, siguiendo el método de la función descriptiva, podemos calcular un coeficiente de linealización armónica, una frecuencia inicial y a partir de (4.11) podemos calcular una amplitud inicial

$$k = -0.5, \quad \omega_0 = 1, \quad a_0 = 0.3$$

respectivamente.

Entonces, podemos usar como condición inicial

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

para el cálculo de la solución oscilante  $\mathbf{x}^1(t)$  como el primer paso del procedimiento multi-etapas considerando  $\varepsilon_1 = 0.1$  (ver Figura 4.2).

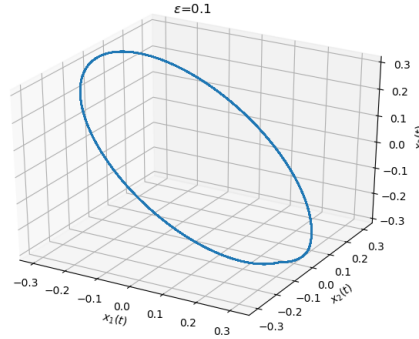


Figura 4.2: Solución oscilante  $\mathbf{x}^1(t)$  del sistema (2.24) con no linealidad (4.10) y parámetros  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  con  $\varepsilon_1 = 0.1$ , el primer paso del procedimiento multietapas con condición inicial  $\mathbf{x}_0^1 = (0.3, 0, 0)^T$

**Paso 5** Continuando con el procedimiento, calculamos  $\mathbf{x}^2(t)$  y en la Figura 4.3 observamos que la solución se mantiene periódica.

**Paso 6** Continuando con el procedimiento, calculando las soluciones  $\mathbf{x}^j(t)$  con  $j = 3, \dots, 9$ , del sistema (2.24) aumentando  $\varepsilon_j$  en pasos de 0.1 (ver Figura 4.3).

**Paso 7** Finalmente, podemos observar que las soluciones terminan por caer en el atractor de dos enroscados auto-excitado (ver Figura 4.4).

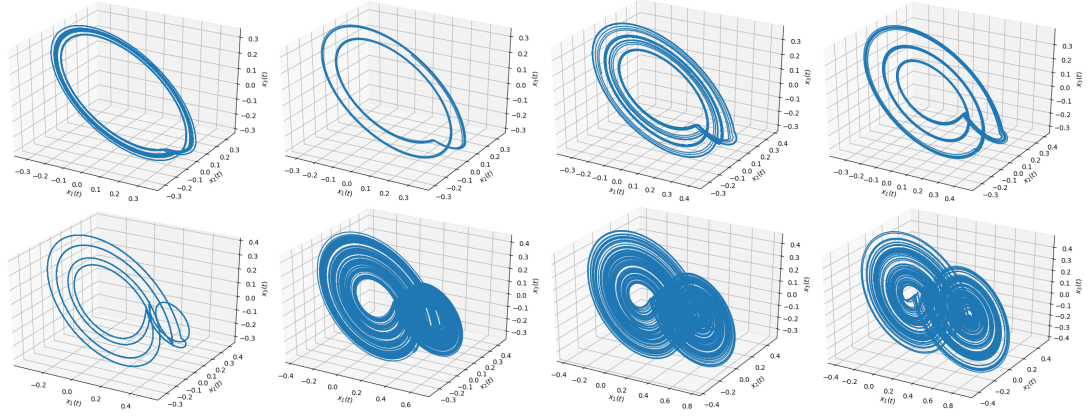


Figura 4.3: Soluciones  $\mathbf{x}^j(t)$  con  $j = 2, \dots, 9$ , del sistema (2.24) con no linealidad (4.10) aumentando  $\epsilon_j$  en pasos de 0.1.

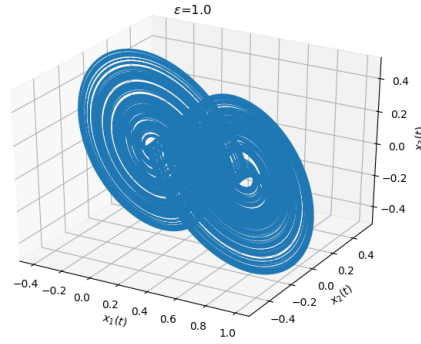


Figura 4.4: Atractor de dos enroscados auto-excitado del sistema (2.24) con no linealidad (4.10) y parámetros  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  con  $\epsilon_{10} = 1$ .

#### 4.1.2. Puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_{1,2}$ estables

Para este caso vamos a considerar el conjunto de parámetros

$$\alpha = 0.5, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1,$$

con los cuales el sistema (4.15) tiene dos puntos de equilibrio ubicados en

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda = \{-0.6477, -0.1761 \pm 0.8607i\}.$$

Aplicando el método tenemos un coeficiente de linealización armónica y una frecuencia inicial

$$k = 0.5, \quad \omega_0 = 1.0,$$

Continuamos el procedimiento en el **Paso 4**, aplicando el método de la función descriptiva, no es posible calcular  $a_0$  que sea solución de (4.11), así que no podemos calcular una solución oscilante para el sistema (2.24) con no linealidad (4.10) con este conjunto de parámetros y  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, es así que no podemos aproximar una solución  $\mathbf{x}^1(t)$  que sea periódica por medio de este método.

## 4.2. Sistema PWL basado en la ecuación de Jerk y no linealidad basada en el diodo de Chua

En esta sección intentaremos aplicar el método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\alpha x_1(t) - \beta x_2(t) - \gamma x_3(t) - \psi_2(x_1(t)) \\ \psi_2(x_1(t)) &= \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1 \in \mathbf{R}$  son parámetros. La función  $\psi(x_1(t))$  representa un elemento no lineal del clásico sistema de Chua llamado diodo de Chua [38].

El sistema (4.17) tiene tres puntos de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = \pm \begin{pmatrix} \frac{m_1 - m_0}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

los cuales tienen matrices Jacobianas

$$Df(\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad Df(\tilde{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha - m_0 + m_1 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix},$$

los cuales cambian de estabilidad de acuerdo a diferentes valores de los parámetros. El polinomio característico para los puntos  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$  es  $\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha = 0$ , siendo así que comparten la estabilidad, y para el punto  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  es de la forma  $\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha + m_0 - m_1 = 0$ .

Aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz tenemos que las siguientes condiciones de estabilidad para los puntos de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta\gamma > \alpha,$$

mientras que para el punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  las condiciones de estabilidad son

$$\alpha + m_0 - m_1 > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad \beta\gamma > \alpha + m_0 - m_1,$$

así podemos cambiar la estabilidad del punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  variando los valores de los parámetros  $m_0$  y  $m_1$ .

A continuación se presentan diferentes conjuntos de parámetros para diferentes configuraciones del sistema (4.17) con los cuales se aplicarán los resultados anteriores en la búsqueda de atractores ocultos.

#### 4.2.1. Puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ inestables, $\tilde{\mathbf{x}}_2$ estable

Primero consideramos el conjunto de parámetros

$$\alpha = 1.5, \quad \beta = 0.5, \quad \gamma = 1, \quad m_0 = 0.1, \quad m_1 = 1.2 \quad (4.18)$$

con los cuales el sistema (4.17) tiene puntos de equilibrio

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = \pm \begin{pmatrix} 0.7333 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tienen el conjunto de eigenvalores

$$\Lambda_{1,3} = \{0.2022 \pm 1.0134i, -1.4044\}, \quad \Lambda_2 = \{-0.0368 \pm 0.6560i, -0.9263\}$$

respectivamente.

Ahora, continuamos el **Paso 4**, aplicando el método analítico-numérico intentaremos definir una condición inicial para una solución periódica para el sistema (4.5), con el conjunto de parámetros (4.18) y  $\varepsilon_1 = 0.1$ . Primero obtenemos un coeficiente de linealización armónica y una frecuencia inicial

$$k = -1, \quad \omega_0 = 0.7071,$$

y a partir de la función descriptiva (4.13), calculamos numéricamente una amplitud inicial

$$a_0 = 1.22309$$

.

Sin embargo, iniciando la solución  $\mathbf{x}^1(t)$  utilizando la condición inicial

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} 1.22309 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

podemos observar como la solución oscila hacia el punto de equilibrio estable  $\tilde{\mathbf{x}}_2$ , determinando así que la posible oscilación del sistema (4.5), con el conjunto de parámetros (4.18) y  $\varepsilon_1 = 0.1$  es inestable (ver Figura 4.5), por lo cual no es posible continuar con el procedimiento y localizar un atractor oculto para este caso.

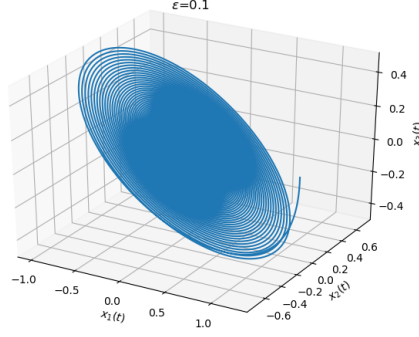


Figura 4.5: Solución  $\mathbf{x}^1(t)$  del sistema (4.5) con no linealidad (4.12) y con el conjunto de parámetros (4.18) con  $\epsilon_1 = 0.1$  con condición inicial  $\mathbf{x}_0^1 = (1.22309, 0, 0)^T$

#### 4.2.2. Puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_{1,3}$ estables, $\tilde{\mathbf{x}}_2$ inestable

Variando el conjunto de parámetros podemos cambiar la estabilidad de los puntos de equilibrio. Ahora, consideramos el conjunto de parámetros

$$\alpha = 0.5, \quad \beta = 1.5, \quad \gamma = 1, \quad m_0 = 1.5, \quad m_1 = -5 \quad (4.20)$$

con los cuales los puntos de equilibrio quedan ubicados en

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = \pm \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

los cuales tienen respectivamente los siguientes conjuntos de eigenvalores

$$\Lambda_{1,3} = \{-0.3966, -0.3016 \pm 1.0815i\}, \quad \Lambda_2 = \{-2.0, 0.5 \pm 1.8027i\}.$$

Continuando con el **Paso 4**, para el conjunto de parámetros (4.20) calculamos un coeficiente de linealización armónica, una frecuencia inicial y una amplitud inicial

$$k = -0.5819, \quad \omega_0 = 0.7492, \quad a_0 = 8.2557,$$

para iniciar la búsqueda de una oscilación oculta usando el punto

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} 8.2557 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como condición inicial de la solución  $\mathbf{x}^1(t)$  para el sistema (4.5) y la no linealidad (4.12), la cual es una oscilación estable (ver Figura 4.6).

**Paso 5** Continuando con el procedimiento, calculamos  $\mathbf{x}^2(t)$  y en la Figura 4.3 observamos que la solución se mantiene periódica.

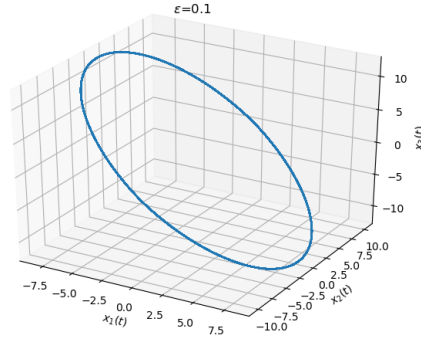


Figura 4.6: Solución  $\mathbf{x}^1(t)$  del sistema (4.5) con no linealidad (4.12) y con el conjunto de parámetros (4.20) con  $\epsilon_1 = 0.1$  con condición inicial  $\mathbf{x}_0^1 = (8.2557, 0, 0)^T$

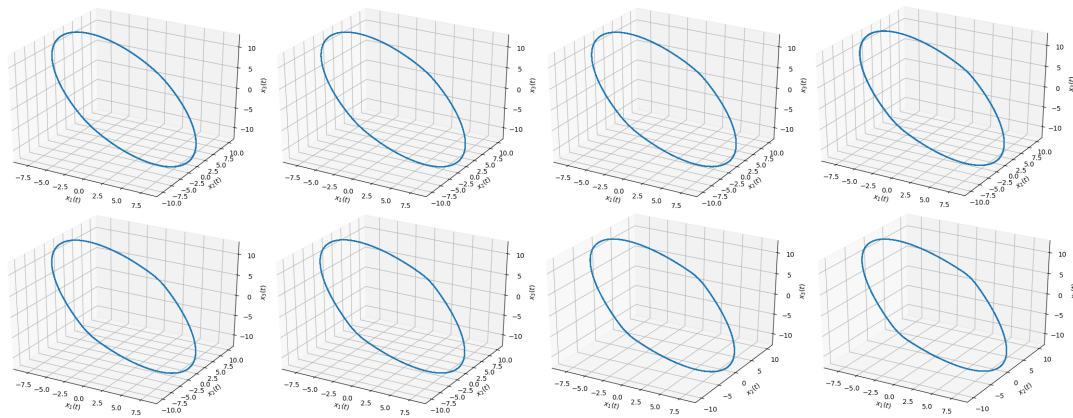


Figura 4.7: Soluciones  $\mathbf{x}^j(t)$  con  $j = 2, \dots, 9$ , del sistema (4.5) con no linealidad (4.12) y el conjunto de parámetros (4.20) aumentando  $\epsilon_j$  en pasos de 0.1.

**Paso 6** Continuando con el procedimiento, en la Figura 4.7 podemos observar como la oscilación se mantiene en cada uno de los pasos del sistema (4.5) con  $j = 2, \dots, 9$  variando  $\epsilon_j$  en pasos de 0.1.

**Paso 7** Finalmente, las soluciones  $\mathbf{x}^j(t)$  son periódicas durante todo el procedimiento hasta llegar a la solución  $\mathbf{x}^{10}(t)$ , es decir, una solución periódica del sistema original (4.17) (ver Figura 4.8).

Sin embargo, si una solución del sistema original (4.17) es iniciada desde la vecindad del punto de equilibrio inestable  $\bar{\mathbf{x}}_2$  podemos observar que la trayectoria se dirige a la oscilación observada en el procedimiento multietapas del sistema (4.5) con no linealidad (4.12) con  $\epsilon_{10} = 1$ . Por lo tanto, la solución oscilatoria a la que se llega después del aplicar el método analítico-numérico para este caso es considerado una oscilación auto-excitada (ver Figura 4.9).

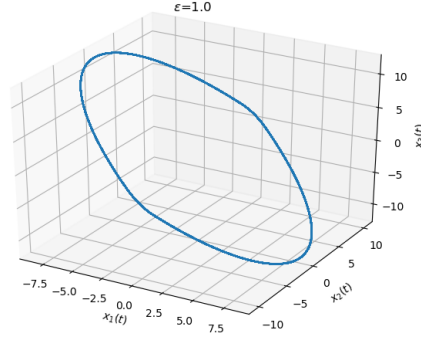


Figura 4.8: solución  $\mathbf{x}^{10}(t)$ , es decir, una solución periódica del sistema original (4.17)

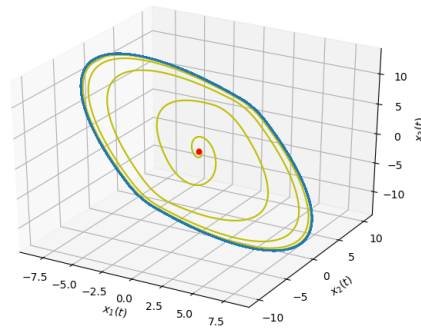


Figura 4.9: Trayectoria de iniciada desde una vecindad del punto de equilibrio  $\tilde{\mathbf{x}}_2$ .

### 4.2.3. Tres puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_{1,2,3}$ estables

Ahora, escogemos el conjunto de parámetros

$$\alpha = 0.5, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad m_0 = 0.2, \quad m_1 = 0.4, \quad (4.21)$$

que ubican a los puntos de equilibrio en

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = \pm \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con los respectivos conjuntos de eigenvalores

$$\Lambda_{1,3} = \{-0.6477, -0.1761 \pm 0.8607i\}, \quad \Lambda_2 = \{-0.3941, -0.3029 \pm 0.8181j\}.$$

Calculamos un coeficiente de linealización armónica y una frecuencia inicial

$$k = -0.7054, \quad \omega_0 = 0.7492,$$

sin embargo, continuando con el **Paso 4**, no es posible calcular una amplitud inicial  $a_0$  tal que sea solución de (4.13), así no podemos calcular una posible solución  $\mathbf{x}^1(t)$  que sea oscilante para el primer paso del procedimiento con este conjunto de parámetros utilizando el método analítico-numérico basado en el método de la función descriptiva.

#### 4.2.4. Tres puntos de equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}_{1,2,3}$ inestables

Consideremos el sistema (4.17) con el conjunto de parámetros

$$\alpha = 0.7, \quad \beta = 0.5, \quad \gamma = 1.0, \quad m_0 = 1.5, \quad m_1 = 5. \quad (4.22)$$

Los puntos de equilibrio se localizan en

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = \pm \begin{pmatrix} 5.0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyos conjuntos de eigenvalores son

$$\Lambda_{1,3} = \{0.0573 \pm 0.7903i, -1.1147\}, \quad \Lambda_2 = \{1.0525, -1.0262 \pm 1.2677i\}$$

respectivamente.

Con el conjunto de parámetros (4.22) es posible calcular un coeficiente de linealización armónica, una frecuencia inicial  $y$ , continuando con el **Paso 4**, una amplitud inicial

$$k = -0.1999, \quad \omega_0 = 0.7071, \quad a_0 = 22.2742.$$

Con  $\varepsilon_1 > 0$  suficientemente pequeño, podemos usar la condición inicial

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} 22.2742 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para el primer paso del procedimiento multipasos para la construcción de la solución. En nuestros experimentos damos el primer paso del procedimiento con  $\varepsilon_1 = 0.5$ . Así, para el primer paso la solución  $\mathbf{x}^1(t)$  es periódica (ver Figura 4.10). Después, del primer paso, la simulación termina en el punto  $\mathbf{x}^1(T) = (-2.4611, -1.4972, -0.2248)^T$  con  $T = 3000$ .

**Paso 5** En este paso calculamos  $\mathbf{x}^2(t)$ , usando  $T = 5000$  para este paso, tomando  $\mathbf{x}_0^2 = \mathbf{x}^1(T)$  y en la Figura 4.11 observamos que la solución se mantiene periódica.

**Paso 6** Continuando con el procedimiento, considerando  $T = 5000$  para los pasos siguientes, tomando  $\mathbf{x}_0^j = \mathbf{x}^{j-1}(T)$  como condición inicial para el siguiente paso, incrementando  $\varepsilon_j$  en pasos de 0.05, podemos observar la transformación de la solución periódica (ver Figura 4.11). Es importante resaltar que si incrementamos  $\varepsilon_j$  en pasos más grandes ó si utilizamos tiempos diferentes es fácil perder la ruta hacia el atractor oscilante oculto  $\Gamma^{hid}$ .

**Paso 7** Finalmente, después de seguir la transformación de la solución  $\mathbf{x}^j(t)$  llegamos a un atractor oscilante  $\Gamma^{hid}$  (ver Figura 4.12) del sistema (2.24), con  $\varepsilon_{11} = 1.0$  (es decir, el sistema original (4.17)). También, dada la naturaleza simétrica del sistema, podemos localizar un atractor oculto simétrico  $\Gamma_-^{hid}$  usando las condiciones iniciales simétricas

$$\mathbf{x}_0^{11} = \pm \begin{pmatrix} 0.0923 \\ -0.3479 \\ -0.6032 \end{pmatrix}.$$



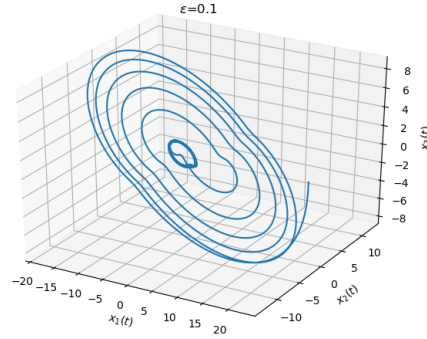


Figura 4.10: Trayectoria de la solución periódica  $\mathbf{x}^1(t)$  del sistema (2.24) con no linealidad (4.12) y conjunto de parámetros (4.22) con  $\varepsilon_1 = 0.5$  y condición inicial  $\mathbf{x}_0^1 = (22.2742, 0, 0)^T$ . Después de un proceso transitorio la solución  $\mathbf{x}^1(t)$  llega a un estado de oscilación considerando un tiempo de  $T = 3000$ .

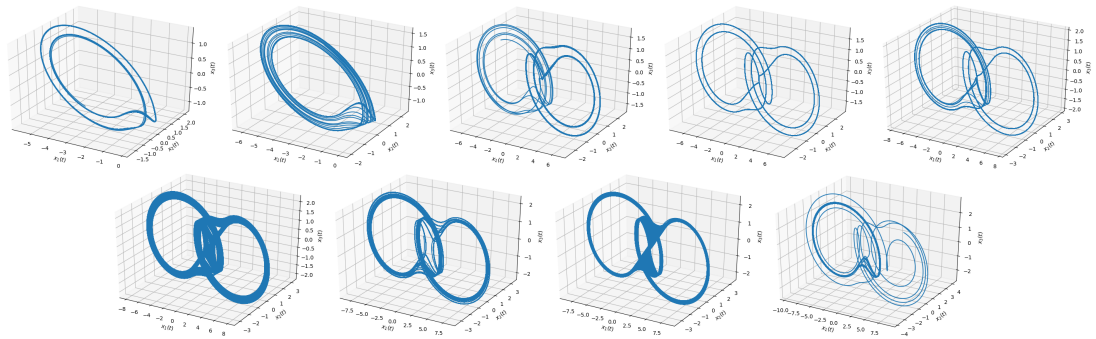


Figura 4.11: Transformación de la solución del sistema (4.5) con la no linealidad (4.12) con  $\varepsilon = 0.55, \dots, 0.95$  con pasos de 0.05 y considerando  $T = 5000$ .

Debemos observar que los atractores simétricos  $\Gamma_{\pm}^{hid}$  son considerados ocultos no son localizados iniciando trayectorias desde las vecindades de los punto de equilibrio inestables  $\tilde{\mathbf{x}}_{1,2,3}$ , de hecho, con esta acción, podemos llegar a un atractor auto-excitado como se muestra en la Figura 4.13.

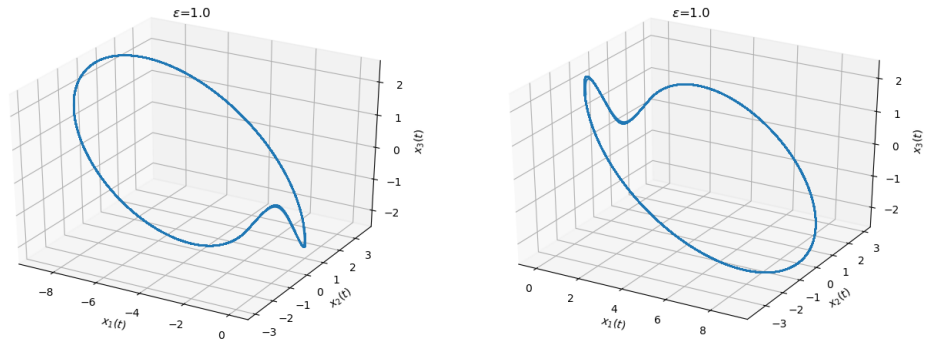


Figura 4.12: El par de atractores ocultos simétricos  $\Gamma_{\pm}^{hid}$ , con condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0^{11} = \pm(-0.9488, 2.1717, -2.1652)^T$  en el sistema (4.17)

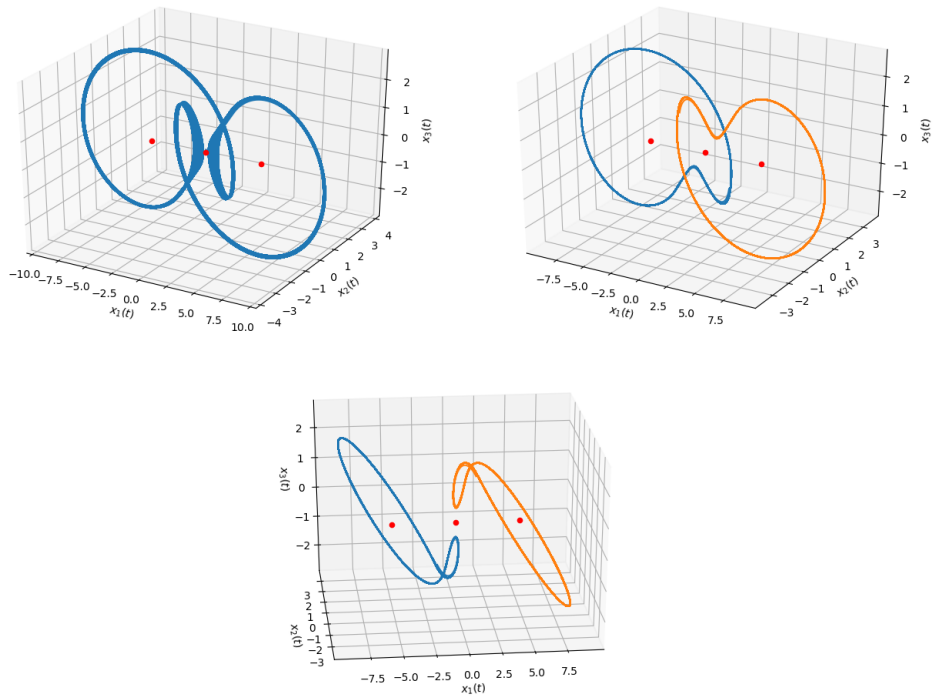


Figura 4.13: Coexistencia de un atractor auto-excitado  $\Gamma^{auto}$  con un par de atractores ocultos simétricos  $\Gamma_{\pm}^{oculto}$  en el sistema (4.17)

# Capítulo 5

## Conclusiones

El objeto de este trabajo de tesis es aplicar el método analítico-numérico para la localización de atractores ocultos propuesto por G. A. Leonov y N. V. Kuznetsov a sistemas PWL basados en la ecuación de Jerk. Este método está basado en una linealización armónica, la función descriptiva para describir la no linealidad, considerando que es una perturbación dada por un parámetro pequeño, y la continuación numérica hasta llegar al sistema original.

En este trabajo se usó la definición de *atractor oculto*, el cual tiene una cuenca de atracción que no intersecta con una vecindad arbitrariamente pequeña de algún punto de equilibrio inestable del sistema, por otra parte un atractor es llamado *auto-excitado* si su cuenca de atracción toca una vecindad de cualquier punto de equilibrio inestable del sistema, además se mostraron ejemplos que ilustran cada tipo de atractor.

El método propuesto por Leonov y Kuznetsov consiste en reescribir el sistema bajo estudio en la forma de Lur'e; después, introducimos una retroalimentación lineal con un coeficiente de linealización armónica, con el cual inducimos a la parte lineal del sistema a oscilar. Enseguida la parte no lineal de sistema se multiplica por un parámetro pequeño como una perturbación a la parte lineal del sistema original, esta perturbación, cuando el parámetro crece hasta uno, nos regresa el sistema original. Para el primer paso cuando el parámetro está en su valor mínimo utilizamos el método de la función descriptiva para establecer cuando el sistema en lazo cerrado va a oscilar. Si es posible inducir una solución oscilante en este primer sistema, se continúa de manera iterativa haciendo el parámetro cada vez más grande hasta llegar a la unidad. Durante este proceso de continuación numérica pueden ocurrir dos cosas, para cada sistema en el proceso iterativo se puede mantener la oscilación o bien desaparecer o volverse inestable. En el caso en que las oscilaciones se preservan hasta recuperar el sistema original encontramos un atractor que podría ser oculto, solo falta verificar que no intersecte con una vecindad de un punto de equilibrio.

Como ilustración del método analítico-numérico descrito arriba se presentó una forma de construir contraejemplos para la conjetura de Kalman; así como su aplicación para encontrar atractores ocultos en diferentes configuraciones del sistema de Chua. Cabe remarcar que en estos ejemplos se pudo observar la coexistencia de atractores en un mismo sistema.

La contribución principal de este trabajo es la aplicación del método analítico-numérico para localizar atractores ocultos en sistemas lineales de dos y tres partes. Utilizamos distintos

conjuntos de parámetros así como diferentes configuraciones en este tipo de sistemas.

En la mayoría de los casos considerados no se cumplían las condiciones necesarias para aplicar el método ya sea porque no se cumplían las condiciones de la función descriptiva o porque en las soluciones oscilantes en los subsistemas que se iteraban se perdía estabilidad en alguno de los pasos. Por otra parte encontramos casos en los que la solución oscilante localizada al final del procedimiento resultaba ser un atractor auto-excitado.

Los atractores ocultos localizados fueron para el sistema PWL basado en la ecuación de Jerk con no linealidad de tres partes donde el conjunto de parámetros da como resultado tres puntos de equilibrio inestables. Para este sistema encontramos un par de atractores ocultos simétricos que coexisten con un atractor auto-excitado. Cabe señalar que la localización de los atractores ocultos simétricos es un proceso que requiere delicadeza ya que es sensible a los intervalos de tiempo utilizados en las simulaciones y a los incrementos de tamaño de los pasos, por lo tanto, utilizamos un tiempo de simulación superior a 5000 unidades e incrementos en el valor del parámetro iguales o mayores a 0.05, los cuales fueron determinados a prueba y error.

El método propuesto no siempre es exitoso, si bien la idea general es clara, es necesario tomar consideraciones. Por ejemplo, a veces no es necesario cambiar variables para localizar soluciones estables en los subsistemas. Es importante remarcar que también la parte analítica del método utiliza la función descriptiva, sin embargo, este es un método aproximado que no necesariamente garantiza resultados para parámetros más grandes, por lo tanto, las soluciones durante la continuación numérica no tienen una base analítica y pueden volverse inestables aun cuando las condiciones se cumplieron para el primer subsistema. De modo que el hecho de que nuestro método no nos permita identificar un atractor oculto en un sistema no quiere decir que no los tenga.

## **5.1. Trabajo futuro**

Como trabajo futuro esta aplicar el método analítico-numérico en su caso crítico, buscando atractores ocultos en las configuraciones de los sistemas en donde no es posible aproximar soluciones periódicas utilizando el método de la función descriptiva. Esto puede conducir a la localización de atractores ocultos en los casos donde no se han localizado y por ende no se tienen contemplados en su estudio.

Otro punto es considerar, en la búsqueda de atractores ocultos, es aplicar el método analítico-numérico utilizado en esta tesis, con las modificaciones necesarias, o utilizando otros algoritmos que se ajusten mejor a diferentes tipos de sistemas, como sistemas con otro tipo de no linealidades, por ejemplo, utilizar no linealidades con no continuidad o no linealidades no escalares.

# Bibliografía

- [1] Perko, L. (2000) **Differential Equations and Dynamical Systems**, Springer, New York.
- [2] Luenberger, D. G. (1979) **Introduction to Dynamic Systems**, Stanford University.
- [3] Scheinerman, E. R. (1996) **Invitation to Dynamical Systems**, Dover Publications Inc., New York.
- [4] Starke, J.; Sørensen, M. P.; Hjorth, P.; Møller, J. K.; Christiansen, L. E.; Madsen, H. (2010) **An Introduction to Mathematical Modelling, Nonlinear Dynamics, Stochastic and Complex Systems**, Edition: 0.03, MMC summer school.
- [5] Ogata, K. (2010) **Modern Control Engineering**, Prentice Hall, New Jersey.
- [6] Leonov, G. A. (2008) **Strange Attractors and Classical Stability Theory**, St. Petersburg University Press, St Petersburg.
- [7] Khalil, H. K. (2002) **Nonlinear Systems**, Prentice Hall, New Jersey.
- [8] Kuznetsov, N. V.; Leonov, G. A. (2013) **Hidden attractors in dynamical systems, from hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden attractor in Chua circuits**, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23, 1-69.
- [9] Lorenz, E. N. (1963) **Deterministic nonperiodic flow**, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- [10] van der Pol, B. (1926) **On relaxation-oscillations**, *Philos. Mag. J. Sci.*, 7, 978-992.
- [11] Nose, S. (1984) **A molecular dynamics method for simulations in the canonical ensemble**, *Mol. Phys* 52, 255-268.
- [12] Hoover, W. (1985) **Canonical dynamics: Equilibrium phase-space distributions**, *Phys. Rev. A* 31, 1695.
- [13] Sprott, J. C. (1994) **Some simple chaotic flows**, *Phys. Rev. E*, 50, R647,
- [14] Wang, X.; Chen, G. (2014) **A chaotic system with only one stable equilibrium**, *Commun. Nonlinear Sci. 17*, 1264.

- [15] Wang, X.; Chen, G. (2013) **Constructing a chaotic system with any number of equilibria**, *Nonlinear Dynam.* 71, 429-436.
- [16] Molaie, M.; Jafari, S.; Sprott, J.; Golpayegani, S. (2013) **Simple chaotic flows with one stable equilibrium**, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 23, 1350188 (7 pages).
- [17] Hilbert, D. (1901-1902) **Mathematical problems**, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 437-479..
- [18] Bautin, N. (1939) **On the number of limit cycles generated on varying the coefficients from a focus or centre type equilibrium state**, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 24, 668.
- [19] Markus, L.; Yamabe, H. (1960) **Global stability criteria for differential systems**, *Osaka Math. J.*, 12, 305-317.
- [20] Aizerman, M. A. (1949) **On a problem concerning the stability in the large of dynamical systems**, *Uspekhi Mat. Nauk*, 4, 187-188.
- [21] Kalman, R. E. (1957) **Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems**, *Trans. ASME*, 79, 553-566.
- [22] Kapranov, M. (1956) **Locking band for phase-locked loop**, *Radiofizika* 2, 37-52.
- [23] Gubar, N. A. (1961) **Investigation of a piecewise linear dynamical system with three parameters**, *J. Appl. Math. Mech.*, 25, 1011-1023.
- [24] Lauvdal, T.; Murray, R.; Fossen, T. (1997) **Stabilization of integrator chains in the presence of magnitude and rate saturations: A gain scheduling approach**, *Proc. IEEE Control and Decision Conf.*, 4, 4404-4005.
- [25] Jafari, S.; Sprott, J. C. (2013) **Simple chaotic flows with a line equilibrium**, *Chaos Solit. Fract.* 57, 79-84.
- [26] Wei, Z. (2011) **Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria**, *Phys. Lett. A*, 376, 102-108.
- [27] Pham, V.-T.; Jafari, S.; Volos, C.; Kapitaniak, T. (2017) **Different Families of Hidden Attractors in a New Chaotic System with Variable Equilibrium**, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27, 1750138 (10 pages).
- [28] Jafari, M. A.; Mliki, E.; Akgul, A.; Pham, V.-T.; Kingni, S. T.; Wang, X.; Jafari, S. (2017) **Chameleon: the most hidden chaotic flow**, *Nonlinear Dyn*, 88, 2303-2317.
- [29] Nazarimehr, F.; Rajagopal, K.; Kengne, J.; Jafari, S.; Pham, V.-T. (2018) **A new four-dimensional system containing chaotic or hyper-chaotic attractors with no equilibrium, a line of equilibria and unstable equilibria**, *Chaos, Solitons and Fractals*, 111, 108-118.

- [30] Menacer, T.; Lozi, L.; Chua, L. (2016) **Hidden Bifurcations in the Multispiral Chua Attractor**, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26, 1630039 (26 pages).
- [31] Rocha, R.; Ruthiramoorthy, J.; Kathamuthu, T. (2017) **Memristive oscillator based on Chua's circuit: stability analysis and hidden dynamics**, *Springer*, 88, 2577-2587.
- [32] Zhou, W.; Wang, G.; Shen, Y.; Yuan, F.; Yu, S. (2018) **Hidden Coexisting Attractors in a Chaotic System Without Equilibrium Point**, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 28, 1830033 (13 pages).
- [33] Jafari, S.; Sprott, J. C.; Golpayegani, S. M. R. H. (2013) **Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria**, *Phys. Lett. A*, 377, 699-702.
- [34] Dudkowskia, D.; Jafari, S.; Kapitaniak, T.; Kuznetsov, N. V.; Leonov, G. A.; Prasad, A. (2016) **Hidden attractors in dynamical systems**, *Physics Reports*, 637, 1-50.
- [35] Leonov, G. A.; Vagaitsev, V. I.; Kuznetsov, N. V. (2010) **Algorithm for localizing Chua attractors based on the harmonic linearization method**, *Dokl. Math.*, 82, 693-696.
- [36] Leonov, G. A.; Kuznetsov, N. V.; Vagaitsev, V. I. (2011) **Localization of hidden Chua's attractors**, *Physics Letters A*, 375, 2230-2233.
- [37] Kuznetsov, N. V.; Leonov, G. A.; Bragin, V. O. (2010) **Algorithm for constructing counterexamples to the Kalman problem**, *Doklady Mathematics*, 82, 540-542.
- [38] Kuznetsov, N. V.; Kuznetsova, O. A.; Leonov, G. A.; Mokaev, T. N.; Stankevich, N. V. (2017) **Hidden attractors localization in Chua circuit via the describing function method**, *International Federation of Automatic Control*, 50, 2651-2656.
- [39] Kuznetsov, N. V.; Leonov, G. A.; Vagaitsev, V. I. (2010) **Analytical-numerical method for attractor localization of generalized Chua's system**, *IFAC*, 43, 29-33.
- [40] Ontañón-García, L. J.; Lozoya-Ponce, R. E. (2017) **Analog Electronic Implementation of Unstable Dissipative Systems of Type I with Multi-Scrolls Displaced Along Space**, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27, 1750093 (15 pages).