

INSTITUTO POTOSINO
DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Análisis de estabilidad de controladores PD-AQM
en modelos con retardo de redes TCP**

Tesis que presenta

MCS.D. Adrián Karin Puerto Piña

Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

San Luis Potosí, S.L.P., 12 de julio del 2021.

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Análisis de estabilidad de controladores PD-AQM en modelos con retardo de redes TCP** presentada para obtener el Grado de **Doctor en Control y Sistemas Dinámicos** fue elaborada por **Adrián Karin Puerto Piña** y aprobada el **12 de julio de 2021** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
Director de tesis

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Jurado en el examen

Dr. Cesar Fernando Mendez Barrios
Jurado en el examen

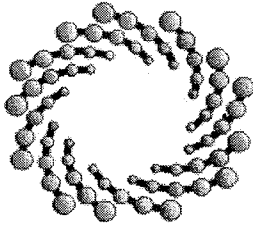
Dr. Adrián René Ramirez López
Jurado en el examen

Dr. Tonámetl Sánchez Ramirez
Jurado en el examen

Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 298078 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 018 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 12 días del mes de julio del año 2021, se reunió a las 17:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Presidente	IPICYT
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	Secretario	IPICYT
Dr. Adrián René Ramírez López	Sinodal	IPICYT
Dr. César Fernando Méndez Barrios	Sinodal externo	UASLP
Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Adrián Karin Puerto Piña

sobre la Tesis intitulada:

Análisis de estabilidad de controladores PD-AQM en modelos con retardo de redes TCP

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

El Jurado, después de deliberar, determinó

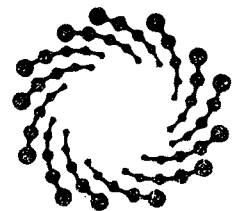
APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 20:45 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 12 días del mes de julio de 2021.


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado



IPICYT
SECRETARÍA ACADÉMICA
INSTITUTO POTOSINO DE
INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
Y TECNOLÓGICA. A.C.

Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar por su apoyo, paciencia y consejos que contribuyeron a mi formación tanto académica como personal.

A los doctores Juan Gonzalo Barajas Ramírez, Cesar Fernando Mendez Barrios, Adrián René Ramirez López y Tonámetl Sánchez Ramirez por aceptar ser mis sinodales, por sus valiosos comentarios y aportaciones a esta tesis.

A CONACyT por la beca de doctorado y a mis profesores de la división de Control y Sistemas Dinámicos del IPICYT.

Muy especialmente a mi familia y a Giovanna Díaz por apoyarme durante tanto tiempo.

Índice general

1. Introducción y formulación del problema	1
1.1. Red de computadoras y el Internet	1
1.2. Congestión en Internet	3
1.3. Control de congestión	5
1.4. Redes TCP/AQM como sistemas de control	7
1.5. Controladores PD como estrategias AQM	11
1.6. Objetivos principales	14
2. Preliminares	16
2.1. Sistemas dinámicos con retardos	16
2.2. EDFs de tipo retardado	18
2.2.1. Soluciones	19
2.2.2. Existencia y unicidad	21
2.2.3. Propiedades de continuidad	23
2.2.4. Conceptos de estabilidad	25
2.2.5. Estabilidad de EDFRs lineales.	26
2.2.6. Estabilidad de EDFRs no lineales.	33
2.3. EDFs de tipo neutro	38
2.4. Estabilidad robusta	40
3. Naturaleza neutra del controlador PD-AQM en modelos TCP	42
3.1. Modificación del controlador PD-AQM	42
3.2. Transformación de un sistema de tipo neutro a un sistema de tipo retardado	44
3.3. Transformaciones de escalamiento en tiempo y estado	47
4. Análisis de estabilidad lineal	49
4.1. Región de estabilidad	49
4.2. Propiedades geométricas de la región de estabilidad	54

5. Análisis de estabilidad no lineal	67
5.1. Condiciones suficientes de estabilidad	67
5.2. Región de atracción y región de estabilidad	74
6. Análisis de estabilidad robusta	76
6.1. Formulación del problema de estabilidad robusta	76
6.2. Condiciones no lineales de estabilidad robusta	78
6.3. Condiciones lineales de estabilidad robusta	80
7. Ejemplo numérico	83
8. Conclusiones y trabajo a futuro	90
9. Publicaciones	93
10. Bibliografía	94

Índice de figuras

1.1.	Estructura básica de una red de computadoras.	2
1.2.	Esquema básico Emisor-Receptor en internet.	3
1.3.	Fases del algoritmo de Jacobson.	5
1.4.	Diagrama TCP/AQM.	7
1.5.	Diagrama de bloques para una red TCP/AQM.	10
2.1.	Construcción paso a paso de la solución $x(t, t_0, \varphi)$	21
2.2.	Ubicación de las raíces del cuasipolinomio (2.12).	28
2.3.	Hodógrafo de Mikhailov para el cuasipolinomio (2.12)	30
2.4.	Partición del espacio de coeficientes para el cuasipolinomio (2.17).	33
4.1.	Región de estabilidad $\Gamma_{(n,\tau,c)}$	52
4.2.	Primeras 5 regiones que particionan el espacio de ganancias (K_p, K_d)	53
4.3.	Solución numérica para (4.8) con parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14).	57
4.4.	Solución numérica para (4.6), con parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14).	59
4.5.	Solución numérica para (4.13) con parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14).	60
4.6.	Regiones de estabilidad con parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14).	66
7.1.	Regiones de estabilidad lineal $\Gamma_{(n_1,\tau_2,c_2)}$ y no lineal determinadas por (7.1).	84
7.2.	Respuesta $q(t)$ del controlador $PD1$	86
7.3.	Respuesta $w(t)$ del controlador $PD1$	87
7.4.	Función $p(t)$ para el controlador $PD1$	88
7.5.	Respuesta $q(t)$ del controlador $PD2$	88
7.6.	Respuesta $w(t)$ del controlador $PD2$	89
7.7.	Función $p(t)$ para el controlador $PD2$	89

Índice de tablas

7.1. Puntos de equilibrio para PD1 y PD2	86
--	----

Notación

\mathbb{R}	Conjunto de los número reales.
\mathbb{R}^n	Espacio Euclidiano n dimensional.
\mathbb{C}	Conjunto de los número complejos.
$\overline{\mathbb{C}}_+$	Semiplano derecho cerrado del plano complejo.
$\mathcal{C} \triangleq \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de las funciones continuas que mapean el intervalo $[-\tau, 0]$ en \mathbb{R}^n .
$\mathcal{C}^1 \triangleq \mathcal{C}^1([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de las funciones continuas una vez diferenciables que mapean el intervalo $[-\tau, 0]$ en \mathbb{R}^n .
$\mathcal{PC} \triangleq \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de las funciones continuas a pedazos que mapean el intervalo $[-\tau, 0]$ en \mathbb{R}^n .
$\mathcal{PC}^1 \triangleq \mathcal{PC}^1([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de las funciones continuas a pedazos una vez diferenciables que mapean el intervalo $[-\tau, 0]$ en \mathbb{R}^n .
$ a $	Valor absoluto de un escalar $a \in \mathbb{R}$.
$\ x\ $	Norma Euclideana de un vector $x \in \mathbb{R}^n$.
$\ \varphi\ _h$	Norma de convergencia uniforme, $\ \varphi\ _h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \ \varphi(\theta)\ $.
I	Matriz identidad de dimensión $n \times n$.
$0_{n \times n}$	Matriz 0 de dimensión $n \times n$.
M^{-1}	Matriz inversa de la matriz F .
M^T	Matriz transpuesta de la matriz M .
$\det(M)$	Determinante de la matriz M .
$\lambda_{\min}(M), \lambda_{\max}(M),$	Valor propio mínimo y máximo de la matriz M , respectivamente.
$\partial\Gamma$	Frontera de un conjunto Γ .
0_h	Función trivial, $0_h(\theta) = 0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in [-h, 0]$.

Resumen

Esta tesis se enfoca en el análisis de estabilidad local de modelos no lineales con retardo de redes Transmission Control Protocol/Active Queue Management (TCP/AQM) mediante el uso de un controlador Proporcional-Derivativo (PD) como estrategia AQM. Específicamente, se obtiene el conjunto completo de controladores PD que estabilizan exponencialmente el sistema lineal con retardo correspondiente. Las condiciones suficientes de estabilidad no lineal para la estabilidad asintótica local del punto de equilibrio se derivan mediante el enfoque funcional de Lyapunov-Krasovskii. También se aborda el problema de robustez ante incertidumbre en los parámetros de la red. Los resultados se ilustran mediante algunos ejemplos numéricos.

Abstract

This thesis focuses on the local stability analysis of nonlinear delay models of transmission control protocol/active queue management (TCP/AQM) networks by using a Proportional-Derivative (PD) controller as AQM strategy. More precisely, we derive the complete set of PD controllers that exponentially stabilizes the corresponding linear delay system. Nonlinear sufficient stability conditions for the local asymptotic stability of the equilibrium are derived by means of the Lyapunov-Krasovskii functional approach. The robustness issue to uncertainty in the network parameters is also addressed. The results are illustrated by means of some numerical examples.

Capítulo 1

Introducción y formulación del problema

En este capítulo se discuten brevemente los temas que motivan el problema tratado en este trabajo de investigación. Se presentan la historia y el funcionamiento del internet, así como el problema de congestión durante el proceso de comunicación y los métodos que existen actualmente para tratarlo. El estado del arte acerca del análisis de las redes TCP/AQM como sistemas de control retroalimentado es discutido brevemente. También se presentan la formulación del problema a resolver y los trabajos existentes en la literatura donde se proponen controladores PD como estrategias AQM. Por último se presentan los objetivos principales de este trabajo de tesis. En cada sección se proporcionan referencias en las cuales se tratan a profundidad los temas presentados.

1.1. Red de computadoras y el Internet

Una red de computadoras (también llamada red informática) es un conjunto de equipos, nodos y software conectados entre sí por medio de dispositivos físicos o inalámbricos (enrutadores) que envían y reciben impulsos eléctricos, ondas electromagnéticas o cualquier otro medio para el transporte de datos, con la finalidad de compartir información, recursos y ofrecer servicios. El objetivo principal para la creación de una red de computadoras es la comunicación a distancia entre las computadoras. Un ejemplo es el Internet, el cual es una gran red de millones de computadoras ubicadas en distintos puntos del planeta interconectados básicamente para compartir información y recursos. La estructura y el modo de funcionamiento de las redes informáticas actuales están definidos en varios estándares, siendo el más importante y extendido de todos ellos el protocolo TCP (Transmission Control Protocol) / IP (Internet Protocol). En la Fig. 1.1

se observa la estructura básica de una pequeña red informática.

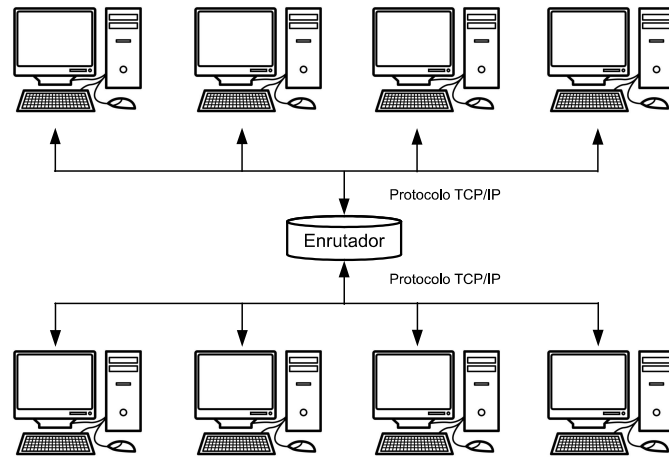


Figura 1.1: Estructura básica de una red de computadoras.

El Internet es un sistema de computadoras interconectadas entre sí que se utiliza para el intercambio de información entre usuarios a nivel mundial. Inició como un proyecto de investigación de ARPA (Advanced Research Projects Agency), cuya idea principal era crear un sistema de computación capaz de seguir operando aunque una parte de este fuera dañado. Esta red se creó en 1969 bajo el nombre de ARPANET (Advanced Research Projects Agency Network), contaba con cuatro ordenadores distribuidos entre distintas universidades que conectaban a investigadores, científicos y académicos de Estados Unidos, siendo la Universidad de California en los Ángeles (UCLA) el primer nodo instalado. El Internet ofrece la infraestructura de transporte para una amplia gama de servicios; por ejemplo, el correo electrónico, la telefonías, la radio y la televisión. También es sede de la World Wide Web (www), una red virtual de documentos de hipertexto interconectados. Actualmente, es la red de comunicación más importante, ya que cuenta con millones de computadoras y otros dispositivos electrónicos conectados a ella.

En términos generales, el internet funciona a través de conexiones *Emisor-Receptor* donde el proceso de transmisión de información es controlado por un conjunto de normas definidas por el protocolo TCP/IP. Estas conexiones en su forma básica están compuestas por dos computadoras, una que envía información (emisor) y otra que la recibe esta información (receptor). En la Fig. 1.2 se presenta un esquema básico de este tipo de conexión. Los medios físicos a través de los cuales se transporta la información hacia la computadora de destino se conocen como canales de conexión. El Internet es una red de redes y generalmente la información atraviesa cierta cantidad de redes antes

de llegar a su destino; una forma de representar todos los elementos que conforman el internet es a través de la "nube", que se observa en la Fig. 1.2. En el emisor la información es fragmentada en pequeños paquetes de datos para poder ser enviada a través de los canales de conexión y cuando todos los paquetes llegan al receptor este se encarga de unirlos para obtener la información original completa. Las computadoras envían y reciben estos paquetes a cierta tasa de transmisión que depende de su capacidad de procesamiento. El TCP instalado en las computadoras se encarga de fragmentar y unir los paquetes; también se encarga de detectar posibles errores durante el trayecto y etiquetar cada paquete con información necesaria para su futuro ensamblado. El IP se encarga de anexar a los paquetes la dirección IP de destino, que es única en cada computadora, para asegurar que los paquetes lleguen al receptor indicado.

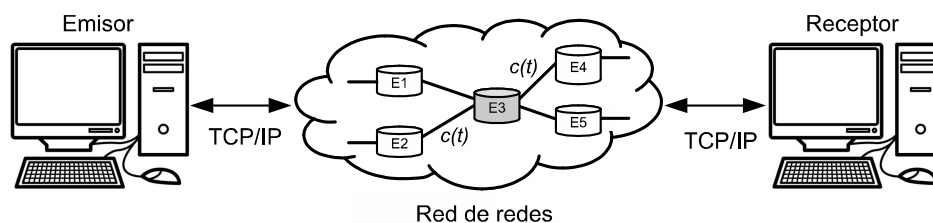


Figura 1.2: Esquema básico Emisor-Receptor en internet.

1.2. Congestión en Internet

En Internet existe una gran cantidad de usuarios compartiendo información, por lo tanto, más de una conexión emisor-receptor comparten los canales de conexión. El tráfico de información en internet es controlado por dispositivos electrónicos llamados enrutadores y por los algoritmos implementados en el TCP de las computadoras. Los enrutadores son parte fundamental de una red y su función principal es determinar la ruta que debe tomar cada paquete de información hacia su destino. La tasa de transmisión (paquetes/segundo) con la cual el enrutador transmite los paquetes por un canal de conexión depende de la capacidad de procesamiento de cada enrutador y se conoce como capacidad de transmisión $c(t)$ o ancho de banda del enlace. Durante el proceso de transmisión de información, los paquetes tienen que cruzar por una serie de enrutadores antes de llegar a su destino, como se observa en la Fig. 1.2.

Los paquetes que llegan a los enrutadores son almacenados en la memoria temporal o buffer. Esta acumulación de paquetes en el buffer se conoce como la *cola* en el enrutador.

La capacidad de procesamiento del enrutador y el estado del tráfico de paquetes en la red determinan el tiempo que son almacenados antes de que se les asigne una ruta disponible hacia sus destinos. Cada computadora tiene una tasa de transmisión propia y cuando se comparten los enlaces, la tasa de transmisión de paquetes que llegan al enrutador es la suma de todas. El congestionamiento se ocasiona debido a que los paquetes se transmiten a través de enlaces que tienen un ancho de banda finito, y por tanto, si el tráfico no es controlado adecuadamente entonces estos enlaces pueden alcanzar su capacidad de transmisión máxima; cuando un enlace alcanza su capacidad máxima no se pueden transmitir más paquetes a través de él y se dice que el enlace está congestionado.

Considere la Fig. 1.2 y suponga que en cierto momento los enlaces del enrutador E3 se encuentran congestionados, es decir, E3 es un cuello de botella dentro de la red. Lo anterior implica que la capacidad de transmisión $c(t)$ ha sido superada por la capacidad de transmisión total de las computadoras que comparten los canales de conexión. La congestión en los enlaces provoca que se formen colas muy grandes dentro de E3 y en los enrutadores que se encuentran en los extremos, debido a que los paquetes que llegan no pueden ser transmitidos a través de un enlace congestionado. Si persiste la congestión, los paquetes pueden tardar mucho tiempo almacenados antes de ser transmitidos. El tiempo de espera de los paquetes dentro del enrutador ocasiona retrasos en el proceso de transmisión de información que se reflejan directamente en la *Calidad del Servicio* (QoS, por sus siglas en inglés) ofrecido por los proveedores de internet. El QoS se define como el rendimiento promedio de una red de telefonía o de computadoras, particularmente el rendimiento visto por los usuarios de la red. Cuantitativamente mide la calidad de varios aspectos relacionados con el servicio de red, tales como tasas de errores, ancho de banda, rendimiento, retraso en la transmisión, disponibilidad, etc. Los retrasos provocados por el congestionamiento se observan por ejemplo cuando las páginas en Internet tardan en cargar o cuando las imágenes en los videos se congelan.

Adicionalmente, las otras conexiones que comparten el enlace congestionado siguen activas y transmitiendo información a través de los canales de conexión. Evidentemente el buffer es finito, así si el congestionamiento en el enlace permanece el tiempo suficiente, el buffer llegará a su capacidad máxima de almacenamiento, como consecuencia los paquetes que lleguen ya no podrán ser almacenados y serán descartados. Este descarte de paquetes se conoce como colapso congestivo y puede llevar a la pérdida de información, que es una de las consecuencias más graves del congestionamiento en una red de información; este problema se observó por primera vez en el ARPANET en octubre de 1986.

Por otro lado, con el crecimiento exponencial de la tecnología en los últimos años, se han generado diversas clases de aplicaciones utilizando el internet que demandan diferentes anchos de banda y alto rendimiento en la calidad del servicio; especialmente las aplicaciones en tiempo real; por ejemplo, las videollamadas, redes sociales, teleoperaciones, telecirugías, transmisiones en vivo, entre otras. Actualmente, cumplir con los requerimientos del QoS representa uno de los principales problemas relacionados con internet y el control de congestión proporciona una solución satisfactoria.

Se recomienda consultar [7], [15], [27] y [38] para una información más detallada sobre la estructura de internet, su funcionamiento, el problema de congestión y el protocolo TCP/IP.

1.3. Control de congestión

El llamado **algoritmo de Jacobson** [14] fue la primera solución propuesta en 1988 para tratar el problema de congestión y aún hasta nuestros días, con algunas modificaciones, sigue siendo utilizado en las redes de computadoras. El algoritmo se implementó en el TCP de las computadoras con el objetivo de prevenir el congestionamiento. La idea básica es ajustar la tasa de envío dependiendo de un estimado del nivel de congestión en la red y funciona a través de dos etapas: la **fase de inicio lento** y la **fase de prevención de congestión**.

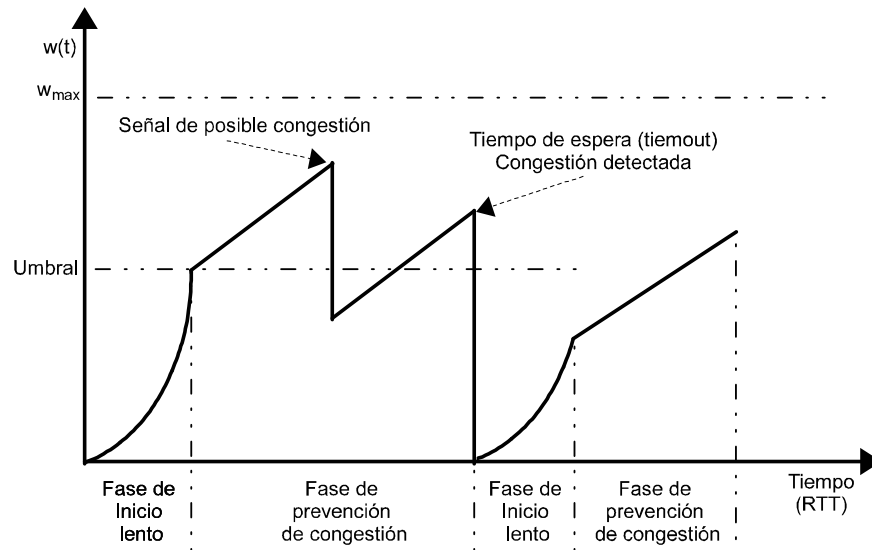


Figura 1.3: Fases del algoritmo de Jacobson.

En la Fig. 1.3 se ilustra el proceso de transmisión de información bajo el algoritmo de

Jacobson, véase [33]. Durante el tiempo que tarda la conexión, la información es enviada a través de un conjunto de paquetes ennumerados denominado *ventana de transmisión*; cada paquete que pertenece al conjunto va marcado con cierta información, dentro de la cuál se encuentra un acuse de recibido (ACK, por sus siglas en inglés) que el receptor debe responder cuando el paquete llegue. Se le denomina *round-trip time* (RTT) a la cantidad de tiempo que transcurre entre el instante que el emisor transmite una ventana de transmisión y el instante de llegada del conjunto de ACKs.

En la fase de inicio lento, generalmente de corta duración, la ventana de transmisión crece exponencialmente después de cada RTT hasta que alcanza un tamaño denominado Umbral, después del cual comienza la fase de prevención, que es la que prevalece por más tiempo durante la conexión. En la fase de prevención de congestión, la ventana tiene un crecimiento lineal hasta llegar al tamaño de ventana máximo w_{\max} . Si algún ACK no es recibido después de un RTT se activa una estrategia de detección de congestión conocida como *tiempo de espera* y el emisor reenvía el mismo paquete con la siguiente ventana de transmisión reducida a la mitad. Debido a que la fase de prevención consta de dos acciones, un incremento lineal y un decremento multiplicativo, a este algoritmo se le conoce como algoritmo AIMD (Additive Increase, Multiplicative Decrease). Cuando un paquete se reenvía tres veces o el *tiempo de espera* se agota, entonces se activa el estado de congestión y el proceso de transmisión se reinicia desde la fase de inicio lento, como se observa en la Fig. 1.3. Se puede consultar [4] y [33] para una explicación más detallada. Esta solución funcionó en las primeras redes, pero el crecimiento exponencial, tanto de las redes como en la demanda de recursos de las nuevas aplicaciones, propiciaron que este algoritmo fuese insuficiente para evitar la congestión.

En el TCP del emisor, el algoritmo de Jacobson funciona con base a la información que llega desde el receptor para detectar la congestión, sin tomar en cuenta lo que está ocurriendo dentro de la red. Para solucionar esta desventaja, la propuesta en la literatura fue implementar inteligencia en los enlaces a través de algoritmos denominados *Administrador de Colas Activas* (AQM, Active Queue Management), que se programan dentro del software de los enrutadores y la primera implementación fue llamada *Detección Temprana Aleatoria* (RED, Random Early Detection) [8].

Las estrategias AQM tienen como objetivo principal regular la longitud promedio de la cola en el buffer y así minimizar el riesgo de congestión [1]. En la Fig. 1.4 se presenta el proceso de transmisión de información a través de un sólo enrutador que tiene implementado una estrategia AQM. Para lograr su objetivo principal, un esquema AQM indica al receptor sobre el estado de la red y la posible existencia de congestión a través de una función de marcado de paquetes $p(t)$ que depende del tamaño de la cola

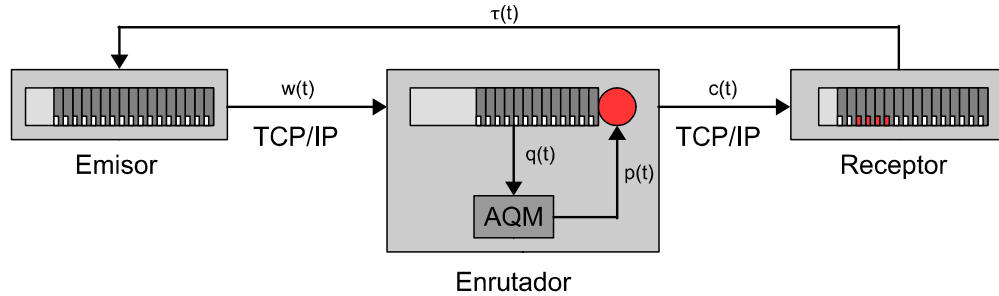


Figura 1.4: Diagrama TCP/AQM.

$q(t)$ en el enrutador, como se observa en la Fig. 1.4. Esta información llega al receptor por medio de los ACK's recibidos junto con la última ventana de transmisión $w(t)$ enviada, es decir, un RTT (denotado $\tau(t)$) de tiempo atrás, lo que le permite ajustar el tamaño de la próxima ventana con base a las señales de congestión dentro de la red.

El sistema de red TCP/AQM combinado tiene como objetivos principales lograr una utilización eficiente de los recursos de la red, minimizar el riesgo de pérdida de información y proporcionar un funcionamiento estable y robusto en la Calidad Del Servicio.

1.4. Redes TCP/AQM como sistemas de control

El desarrollo de modelos matemáticos que describen aproximadamente el comportamiento de redes TCP/AQM han permitido estudiar el problema de congestión en Internet desde la perspectiva de sistemas de control retroalimentados. En [20] se presenta un panorama general sobre el control de congestión en internet y en [35] uno de los primeros trabajos matemáticos sobre el tema. En [23] se desarrolla un modelo matemático estocástico que, a través de un análisis de flujo de fluidos, representa de manera aproximada la dinámica del comportamiento del TCP. El modelo es estocástico debido a que en una red la cantidad y el momento en el que se conectan o desconectan las computadoras es de manera aleatoria. En [24], se presenta una aproximación determinista de dicho modelo; también se agrega el comportamiento de una estrategia AQM dentro del modelo a través de una ecuación diferencial que describe la dinámica de la cola en el enrutador. Como se muestra en los resultados del artículo, con las consideraciones anteriores es posible capturar la dinámica de una red TCP/AQM. La aproximación se aplica para el caso de flujos TCP homogéneos pero puede ser extendido para flujos heterogéneos y contempla el caso de una red de ℓ cantidad de enrutadores y

n cantidad de flujos. En este modelo se supone el tráfico de información como un flujo de paquetes relacionado a los principales parámetros de la red: el tamaño de ventana, el RTT, el promedio de la longitud de cola en el enrutador y la capacidad de transmisión del enlace. En [13] se presenta una simplificación al modelo propuesto en [24], en el cual se ignoran el tiempo de espera y la fase de inicio lento del TCP. Los resultados presentados en [13] y [12] corroboran que este modelo simplificado captura la dinámica de una red TCP/AQM con n fuentes TCP homogéneas y un enrutador congestionado. Este modelo se representa por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, no lineales y con retardos:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau(t)} - \frac{w(t)w(t-\tau(t))}{2\tau(t-\tau(t))}p(t-\tau(t)), \quad \forall t \geq 0, \\ \dot{q}(t) = \frac{n(t)}{\tau(t)}w(t) - c(t), \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} w(t) &= \text{promedio del tamaño de ventana (paquetes)}. \\ q(t) &= \text{promedio del tamaño de la cola (paquetes)}. \\ p(t) &= \text{estrategia AQM}. \\ n(t) &= \text{número de flujos TCP}. \\ c(t) &= \text{ancho de banda (paquetes/segundos)}. \\ \tau(t) &= \frac{q(t)}{c} + \tau_p = \text{RTT (segundos)}. \\ \tau_p &= \text{retardo de propagación en la red}. \end{aligned}$$

El tamaño promedio de la cola $q(t)$ y el tamaño de ventana $w(t)$ son valores positivos y acotados, es decir, $q(t) \in [0, q_{\max}]$ y $w(t) \in [0, w_{\max}]$; donde q_{\max} y w_{\max} son definidos por la capacidad del enrutador y el flujo TCP respectivamente. La función $p(t)$ toma valores solo en el intervalo $[0, 1]$ y depende de la estrategia AQM utilizada. El retardo de propagación τ_p es el tiempo que tardan los paquetes en trasladarse de un nodo a otro dentro de la red. Debido a que la velocidad que alcanzan los paquetes en los canales de transmisión son muy grandes, por ejemplo en la fibra óptica es aproximadamente 2×10^8 paquetes/segundos, el retardo de propagación τ_p se puede considerar como constante.

La primera ecuación diferencial del modelo (1.1) describe la dinámica AIMD del algoritmo de Jacobson: donde el primer término del lado derecho corresponde al incremento aditivo de la ventana y el segundo término del lado derecho al decremento multiplicativo. La segunda ecuación describe la dinámica del promedio de la cola en el

enrutador congestionado, que es inducida por la velocidad de llegada de los paquetes y la capacidad de transmisión del enlace. Por otro lado, es importante mencionar que el modelo (1.1) no considera la etapa de inicio lento, véase Fig. 1.3. Desde la perspectiva de sistemas de control la función de marcado de paquetes $p(t)$ es la variable de control, el promedio de la cola $q(t)$ es la variable a controlar y el lazo de retroalimentación está dado por el intercambio de información entre los flujos TCP (conexión emisor-receptor). Es importante señalar que el sistema presenta retardos tanto en la entrada de control como en el estado y ambos son ocasionados por la naturaleza propia de la red. En la Fig. 1.4 se presenta un esquema del funcionamiento de una red TCP/AQM como la que describe el modelo (1.1).

Siguiendo con el enfoque en [13] se asume que el número de flujos TCP, el ancho de banda del enlace y el RTT son constantes, es decir, $n(t) = n$, $c(t) = c$ y $\tau(t) = \tau$. La suposición en el RTT se puede considerar como una buena aproximación cuando el retardo de cola es mucho más pequeño que el retardo de propagación, es decir, $\tau_p \gg \frac{q(t)}{c}$, lo cual ocurre cuando la capacidad del enlace es suficientemente grande. Lo anterior es un argumento válido gracias al aumento exponencial de la tecnología tanto en el hardware de los enrutadores como en la capacidad de las redes.

De la discusión anterior sobre los parámetros de red se sigue que el modelo (1.1) se puede aproximar por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w(t)w(t-\tau)}{2\tau}p(t-\tau), \quad \forall t \geq 0, \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau}w(t) - c, \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

En [13] se utiliza el modelo (1.2) para analizar y diseñar el esquema de control RED. En la Fig. 1.5 se presenta el diagrama de bloques construido en [13] para representar el sistema (1.2).

Observemos que para un equilibrio deseado q_d el único punto de equilibrio (w_0, q_0, p_0) del sistema (1.2) está definido como

$$w_0 = \frac{\tau c}{n}, q_0 = q_d \text{ y } p_0 = \frac{2}{w_0^2}.$$

Con el objetivo de abordar las no linealidades del sistema, en [11] y [22] se propone

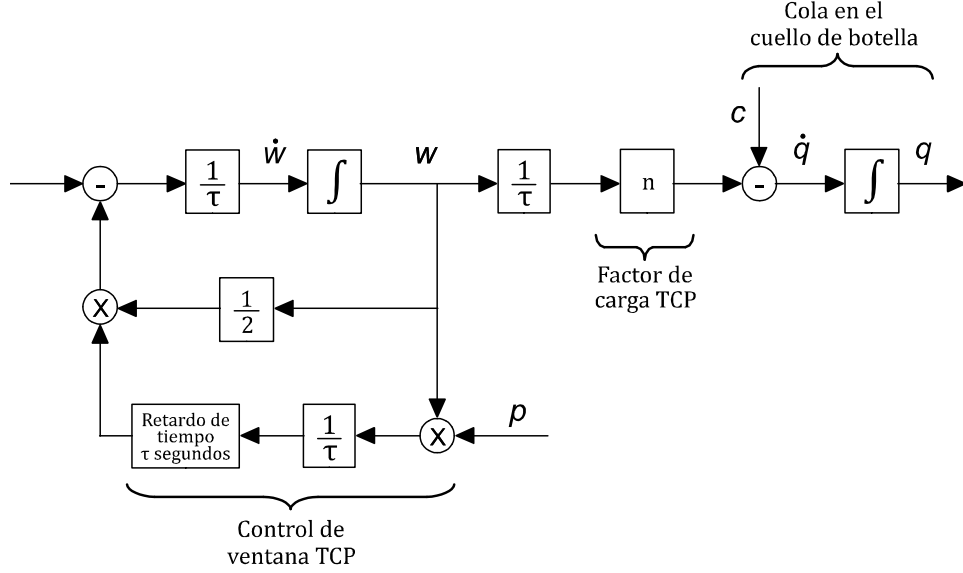


Figura 1.5: Diagrama de bloques para una red TCP/AQM.

considerar el modelo simplificado

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau} p(t - \tau), \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau} w(t) - c, \end{cases} \quad (1.3)$$

el cual es una buena aproximación del sistema (1.2) alrededor del punto de equilibrio cuando $w_0 \gg 1$, véase [22] para una justificación matemática formal. Aunque la condición $w_0 \gg 1$ impone una restricción sobre los parámetros de red para poder considerar (1.3) como una buena aproximación del sistema (1.2), en [11] y [22] se argumenta que esta condición se satisface para el rango típico de parámetros que surgen en la práctica.

En [12] se analiza la estrategia RED y adicionalmente se proponen los controladores *Proporcional* (P) y *Proporcional Integral* (PI) como estrategias AQM. Para estos dos últimos se proporcionan condiciones suficientes de estabilidad y se analiza la robustez ante variaciones en los parámetros. Los autores validan sus resultados utilizando simulaciones NS (Network Simulator) bajo distintos escenarios. El NS es un simulador de eventos discretos orientado a estudiar el comportamiento dinámico de los flujos de información y el control de congestión en esquemas de redes de datos. Este simulador es ampliamente utilizado en la investigación científica y tecnológica de redes. El software permite emular las acciones de varios protocolos de control de flujo (tales como el TCP) en un escenario que permite especificar tanto la topología de la red así como los parámetros de la red (número de sesiones, número de paquetes eliminados y retransmi-

tidos, el retardo de la cola, etc.). Además, el simulador cuenta con un animador de red (NAM) el cual es una interfaz gráfica que permite crear y simular los protocolos de red en una forma sencilla y funcional. El NS es un software libre accesible desde internet en la página www.nsnam.org y se ofrece en dos versiones ns-2 y ns-3.

Siguiendo con el enfoque que estudia el tráfico de datos en Internet como sistemas de control, en el estado del arte podemos encontrar trabajos que proponen otros controladores derivados de la teoría de control automático como estrategias AQM, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio temporal, entre los que se encuentran los controladores Proporcional (P) [11], [22], Proporcional Integral (PI) [21], Proporcional Derivativo (PD) [2], [17] [6], Proporcional Integral Derivativo (PID) [42], H^∞ [43], control por modos deslizantes [44], control predictivo [40], entre otros.

1.5. Controladores PD como estrategias AQM

En la literatura se ha discutido que a pesar de la existencia de técnicas de control modernas, la mayoría de los procesos industriales en la actualidad utilizan controladores clásicos (P, PI, PD, PID) como ley de control, véase [34] para más información. Esto se debe principalmente a la practicidad en la sintonización de estos controladores y a la dificultad de la implementación de las técnicas más sofisticadas. Es bien sabido que los controladores clásicos tienen un gran potencial para satisfacer los requerimientos de desempeño de una gran cantidad de procesos industriales.

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, el desarrollo de modelos matemáticos como (1.1) ha permitido el diseño de esquemas AQM basados en controladores clásicos. Sin embargo, todos estos diseños se basan en condiciones suficientes de estabilidad. Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial para la linealización del modelo (1.2) con estrategias AQM basadas en controladores PI y P son obtenidas en [21] y [22], respectivamente. En estos trabajos se considera el modelo (1.2) y se aborda el problema empleando técnicas lineales y no lineales para sistemas con retardo. Las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad proporcionan el conjunto completo de controladores P y PI que estabilizan el sistema lineal. El problema de robustez, tanto en los parámetros del sistema como en los coeficientes del controlador PI, se aborda en [21] y [22].

A continuación se discuten brevemente los trabajos en los cuales se proponen estrategias AQM que toman como estructura básica el controlador PD. Primeramente, en [37] se propone una estrategia AQM llamada PD-RED, la cual combina el principio de un controlador PD con la estrategia RED. En la referencia se presentan resultados vía

simulaciones NS que muestran que bajo condiciones iguales en los parámetros de red el rendimiento del PD-RED es mejor que el rendimiento de la estrategia RED adaptable. En [36] se desarrolla un controlador PD como estrategia AQM. A través de numerosos resultados de simulación NS se demuestra que este esquema AQM es efectivo y robusto frente a fluctuaciones de carga de tráfico como; por ejemplo, los incrementos repentinos en la tasa de transmisión de las conexiones HTTP, conocidos como Bursty Connections en la literatura de computación. Las pruebas de simulación son para un único enlace congestionado y se enfocan en la estabilización de la longitud de cola a un valor objetivo como una medida clave de rendimiento. Se argumenta que si se puede controlar la cola para permanecer (casi) fijo a cualquier objetivo dado, entonces es posible lograr un alto rendimiento y baja fluctuación. El beneficio de baja fluctuación es que permite al sistema cumplir con los requisitos QoS para servicios en tiempo real, especialmente cuando se logra el objetivo dado para la cola, independientemente de las condiciones del tráfico. Después, estos resultados se comparan vía simulación NS con las estrategias AQM RED dinámico, RED adaptable y el controlador PI-AQM; la topología de red en las simulaciones es la misma para todos y es para un único enlace congestionado. El resultado es favorable para un controlador PD-AQM ya que muestra mejores resultados en las especificaciones de control como la velocidad de convergencia y la longitud de la cola más cercana a la especificada. Es importante mencionar que en [36] y [37] los resultados presentados se basan sólo en simulaciones NS sin presentar detalles sobre el diseño del controlador y el análisis de estabilidad para el sistema en lazo cerrado. Por otro lado, en [19] se aborda el problema de estabilidad para el controlador PD-AQM propuesto en [36] y se proporciona un método de diseño. Este trabajo aborda el problema desde la perspectiva de control en el dominio frecuencial para sistemas con retardos y se presentan resultados vía simulación NS.

Por otro lado, en [17] se realiza un análisis en variables de estado, donde el sistema (1.1) es linealizado y se le aplica una retroalimentación de estados estática. De este análisis se concluye que una estructura de control PD es la retroalimentación de estado natural para controlar completamente la dinámica TCP; la justificación matemática es presentada en el artículo, en pocas palabras el principal razonamiento sobre esto es que el tamaño de las ventanas $w(t)$ y la longitud de la cola $q(t)$ son las variables de estado del sistema (1.2) y, por lo tanto, necesitan estar en una retroalimentación de estado para controlar completamente la dinámica del TCP. Ahora, dado que la segunda ecuación de (1.2) expresa la dinámica de la cola en función del tamaño de la ventana, entonces parece que se puede usar $q(t)$ en lugar de $w(t)$, lo que conduce a una estructura de control tipo PD. También se desarrolla una técnica de sintonización para obtener un

controlador PD-AQM estable, la cual se obtiene utilizando una estrategia de control óptimo minimizando una función lineal cuadrática de costo de las variables de estado y control.

En [41] presentan el algoritmo llamado NPD-RED, el cual se obtiene después de una modificación al controlador tipo PD-AQM presentado en [37]. Por medio de simulaciones NS muestran que este esquema en conjunto con su método de sintonización es efectivo y garantiza la estabilidad de la dinámica en la cola. También muestran comparaciones de rendimiento con los esquemas RED, PI-RED, RED adaptable y PD-RED; en estas comparaciones vía NS se concluye que el esquema NPD-RED tiene un mejor rendimiento.

En [2] se propone un controlador de retroalimentación de estados tipo PD como estrategia AQM para el sistema (1.1). Aquí se argumenta que en las redes reales la información sobre el tamaño de ventana $w(t)$ es de difícil acceso para los enrutadores. Es bien sabido que para una retroalimentación de estados es necesario medir todas las variables de estado, si no es posible, entonces se diseñan observadores. Una justificación para usar un control PD en el sistema (1.1) es evitar el uso de un observador para $w(t)$. El controlador propuesto se sintoniza a través de desigualdades lineales matriciales (LMI, Linear Matrix Inequalities). Se realizan ejemplos de simulación NS con la finalidad de comparar los esquemas de control PI y RED. El resultado muestra que el control PD tiene mejor desempeño para estos ejemplos.

Finalmente, en [6] se propone un esquema AQM llamado Novel-PD y una guía de sintonización para que este sea estable. Usando simulaciones NS se muestra que este esquema estabiliza de manera eficiente el tamaño de la cola alrededor de un objetivo dado, evita una subutilización del enlace y presenta mejor desempeño que las estrategias PD, RED, PI y REM.

Es importante señalar que a diferencia de los trabajos mencionados anteriormente, donde solo se proporcionan condiciones suficientes de estabilidad exponencial, en [28] se definen condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial para la linealización del sistema

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau}p(t - \tau), \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau}w(t) - c, \end{cases} \quad (1.4)$$

en lazo cerrado con el controlador PD

$$p(t) = K_p q(t) + K_d \dot{q}(t). \quad (1.5)$$

Adicionalmente, se proporciona un algoritmo que permite diseñar controladores PD

estables y robustos ante variaciones en sus ganancias proporcional K_p y derivativa K_d . Sin embargo, aunque es posible diseñar controladores PD (1.5) estabilizantes, este controlador en lazo cerrado tiene un problema para regular hacia un objetivo de control deseado q_d . El punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (1.4)-(1.5) está definido como

$$(w_e, q_e) = \left(\frac{c\tau}{n}, \frac{2n^2}{K_p(c\tau)^2} \right), \quad (1.6)$$

de donde se sigue que el equilibrio q_e depende de la ganancia proporcional K_p del controlador. Lo anterior es un problema cuando se quiere regular la cola $q(t)$ a un valor deseado q_d , debido a que dados los parámetros (n, τ, c) del sistema (1.4)-(1.5)), sólo existe un valor de ganancia, digamos K_p^* , que permite regular a un valor deseado $q_d = q_e = \frac{2n^2}{K_p^*(c\tau)^2}$. Este problema representa una desventaja para los controladores PD-AQM estabilizantes ante otros controladores, por ejemplo, el PI-AQM que regula a un valor deseado para distintos valores de sus ganancias. Es importante mencionar que esta dependencia del equilibrio q_e de la ganancia K_p también se observa en [22] donde se estudia la estabilidad del controlador P-AQM.

Por otro lado, uno de los principales objetivos de una estrategia AQM es proporcionar un funcionamiento estable y robusto en el QoS. Este funcionamiento se deteriora principalmente debido a retrasos en el proceso de transmisión de información, que se originan a causa de problemas en las tasas de errores, ancho de banda, rendimiento, retraso en la transmisión, disponibilidad, etc. Para abordar este problema desde una óptica de control, es posible realizar un análisis de la estabilidad del controlador ante variaciones en los parámetros también llamado análisis de estabilidad robusta. Condiciones de estabilidad robusta se proporcionan en [22] y [21] para el caso P y PI, respectivamente. En la literatura no existe un análisis similar para el caso PD-AQM.

1.6. Objetivos principales

Por un lado, de la revisión anterior sobre la literatura de los controladores PD-AQM, se tiene que la estrategia AQM diseñada con base a un controlador PD es el controlador que aparece de forma natural para controlar completamente la dinámica del sistema TCP/AQM, véase [17]. Adicionalmente, las estrategias PD-AQM presentadas en la literatura proporcionan buenos resultados en escenarios de simulación donde se aproxima el comportamiento real de redes TCP/AQM.

Por otro lado, se tiene que la mayoría de las técnicas de sintonización reportadas para el PD-AQM se basan en condiciones suficientes de estabilidad exponencial o en

técnicas heurísticas. Además, no se encuentra un análisis de estabilidad no lineal del modelo con retardos (1.1) en lazo cerrado con un control PD-AQM y tampoco un análisis de la estabilidad de este control ante variaciones en los parámetros de red.

Por lo tanto, sin tomar en consideración las ventajas (aumento en la velocidad de respuesta) o los inconvenientes (error de estado estable) de un control PD, se concluye que las propiedades de estabilidad de este tipo de control como estrategia AQM no han sido suficientemente investigadas en la literatura.

La discusión anterior sobre el control PD-AQM motiva este trabajo de investigación doctoral, para el cual se proponen los siguientes objetivos de investigación:

- *Modificar el controlador PD-AQM (1.5) para eliminar la dependencia en el equilibrio de la ganancia proporcional de este controlador en lazo cerrado con el modelo de red TCP/AQM (1.4).*
- *Realizar un análisis de estabilidad lineal y obtener las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial.*
- *Realizar un análisis no lineal de los equilibrios y definir condiciones suficientes de estabilidad asintótica local.*
- *Definir las condiciones que proporcionan controladores robustos ante perturbaciones en los parámetros de red.*

Algunos resultados preliminares sobre la estabilidad lineal de los controladores PD-AQM y el análisis de robustez ante variaciones en los parámetros del sistema en lazo cerrado se presentan en [28], [29], [30] y [31].

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas utilizadas para desarrollar esta tesis de doctorado. Las condiciones de estabilidad para los sistemas lineales con retardos son abordadas, así como algunos de los criterios para determinarla. Se discute brevemente el enfoque de Lyapunov-Krasovskii utilizado para analizar la estabilidad de sistemas no lineales con retardos. También se define el problema de análisis de estabilidad ante perturbaciones en los parámetros del sistema. Si se desea realizar un estudio más detallado de los sistemas con retardos y su estabilidad se recomiendan las referencias [9], [10], [16] y [18].

2.1. Sistemas dinámicos con retardos

El estudio de sistemas dinámicos nos permite desarrollar modelos matemáticos que son capaces de aproximar el comportamiento de una gran cantidad de sistemas y/o fenómenos reales. Este comportamiento se observa a través de una o más variables involucradas en el sistema, por ejemplo, la magnitud de la corriente y voltaje en un sistema eléctrico, la posición, velocidad y aceleración de un servomotor, la temperatura de los hornos eléctricos en sistemas de fundición, entre otros muchos ejemplos. Las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (EDOs) son la principal herramienta matemática que nos permite modelar los sistemas dinámicos reales. Por otro lado, el desarrollo de la ingeniería de control ha permitido manipular estos modelos matemáticos (si son controlables) para llevarlos a un estado deseado. Esta manipulación se logra a través de una ley de control que se diseña con base a las especificaciones requeridas para el estado esperado del sistema, por ejemplo, para caso de los hornos de fundición la ley de control se diseña para aumentar o disminuir la magnitud del calor (usando una resistencia eléctrica) con el objetivo de mantener la temperatura del horno a un valor

requerido en su funcionamiento.

Un requisito fundamental en la etapa de análisis y diseño de controladores es conocer el estado $x(t)$ del sistema en el instante inicial t_0 . Lo anterior resulta de gran importancia en la teoría de EDOs, ya que conocer el estado $x(t_0)$ permite plantear adecuadamente el problema de valor inicial y así garantizar existencia y unicidad de soluciones. Si es posible garantizar existencia y unicidad de soluciones entonces es posible garantizar la existencia del algún comportamiento del sistema para el tiempo $t \geq t_0$, y así aplicar herramientas de control con la finalidad de llevar al sistema hacia un estado deseado.

En caso general, el problema de valor inicial de para una EDO se escribe como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \geq t_0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y la función continua $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definida para $t > 0$ y es localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento.

Por otro lado, existen sistemas en los que conocer el estado $x(t_0)$ no es suficiente para conocer su comportamiento futuro; este tipo de sistemas depende de su comportamiento en un intervalo de tiempo previo al estado $x(t_0)$, es decir, su comportamiento para $t \geq t_0$ depende de su comportamiento en el intervalo $[t_0 - h, t_0]$, con $h > 0$. Esta dependencia del pasado puede ser debida a la naturaleza intrínseca del sistema o es inducida por la interconexión de subsistemas como; por ejemplo, dispositivos donde intervienen tiempos de cómputo, retardos de comunicación en el intercambio de datos, etc.

Los sistemas que dependen de la información del pasado en su comportamiento futuro son llamados *sistemas dinámicos con retardos*. Dentro de este tipo de sistemas se encuentran modelos de congestión en internet, predador-presa, viscoelasticidad, entre otros; en [9] y [18] se describen algunos de estos modelos y otros con más detalle. Este campo de investigación tiene sus orígenes en el siglo XVIII con los trabajos de matemáticos como Euler, Boltzmann, Volterra, D'Alembert o Condorcet y recibió especial atención a principios del siglo XX en trabajos dedicados al modelado de procesos biológicos, ecológicos y de aplicaciones prácticas de la ingeniería [9]. La estabilidad de los sistemas con retardos empezó a ser una materia formal de estudio en la década de 1940 con las contribuciones de Pontryagin y Bellman [3].

La investigación y proliferación de nuevas técnicas y resultados para los sistemas dinámicos con retardos han aumentado considerablemente en los últimos años. Basta con una mirada rápida a la gran cantidad de artículos en revistas, talleres organizados y

artículos publicados en conferencias internacionales para observar la escala y magnitud del progreso en este campo de investigación [32].

En general, el estudio de sistemas con retardos resulta más complicado que su similar para sistemas sin retardos. El análisis se complica debido a que este tipo de sistemas son modelados con *Ecuaciones Diferenciales Funcionales* (EDFs), que tienen una naturaleza infinito dimensional a diferencia de las EDOs que son de dimensión finita. Desde la perspectiva de ingeniería de control, los retardos pueden afectar a la entrada, la salida o el estado interno del sistema y deben ser considerados tanto en el análisis de estabilidad como en el diseño de controladores. Generalmente estos sistemas presentan una notoria sensibilidad a los retardos, es decir, su presencia puede ocasionar inestabilidad en una respuesta del sistema en lazo cerrado que se esperaba estable para todo tiempo $t \geq t_0$; esta sensibilidad aumenta si el sistema a controlar es inestable. Un ejemplo es el control retroalimentado clásico, donde la presencia de retardos contribuye a reducir el margen de fase y por ende una disminución en el margen de ganancia, en otras palabras, puede existir inestabilidad en la salida [26]. Esta sensibilidad implica que sea necesario realizar un análisis de la dinámica inducida por los retardos. Por otro lado, el uso de leyes de control que incluyen retardos puede contribuir a mejorar los resultados esperados en un sistema que por naturaleza propia es libre de ellos. Algunos ejemplos son el uso de retardos para reducir armónicos en los convertidores electrónicos o los resonadores retardados para el problema de absorción de vibraciones. Actualmente, el análisis del efecto ocasionado por la presencia de retardos en los sistemas dinámicos representa una prolífica línea de investigación de la que se derivan numerosas contribuciones en la literatura moderna de ingeniería de control [26].

2.2. EDFs de tipo retardado

En general, el análisis de sistemas con retardos es más complicado que los sistemas sin retardos. Esto se ilustra con la necesidad de definir una función inicial $x(t) = \varphi(t)$ en lugar de un condición inicial $x(t_0) = x_0$ para poder construir una solución de este tipo de sistemas.

Una de las herramientas utilizada para modelar los sistemas con retardos son las *Ecuaciones diferenciales en diferencias de tipo retardado* (EDDR). La característica principal de este tipo de ecuaciones es que la derivada depende tanto de los estados presentes y pasados del sistema. Estas ecuaciones se definen como

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (2.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y el retardo de tiempo $h > 0$. La función vectorial $f(t, x, y)$ está definida para $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, y se considera una función continua en todas las variables, y Lipchitz con respecto al segundo argumento.

2.2.1. Soluciones

Análogamente al caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, resulta fundamental garantizar existencia y unicidad de soluciones en una EDDR. Es bien sabido que para que exista una solución particular de un sistema sin retardo el problema de Cauchy incluye una condición inicial, definida como el estado de la variable $x(t)$ en el instante t_0 , con lo cual el problema se plantea como (2.1).

Como ya se mencionó al inicio del capítulo, este no es el caso cuando se quiere definir una solución para una EDDR. El conocimiento de x_0 y t_0 no es suficiente para definir el valor de la derivada de $x(t)$ en $t = t_0$. Para definir una solución de una EDDR, necesitamos seleccionar un instante $t_0 \geq 0$ y una función inicial $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$. El problema de valor inicial para el sistema (2.2) se formula como sigue. Dado un instante de tiempo inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial φ , encontrar una solución $x(t, t_0, \varphi)$ del sistema que satisface la condición

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]. \quad (2.3)$$

La función inicial φ pertenece a cierto espacio funcional. Puede ser el espacio de las funciones continuas, denotado como \mathcal{C} , el espacio de las funciones continuas a pedazos \mathcal{PC} o algún otro tipo de espacio funcional. El espacio es determinado por el problema específico bajo investigación.

La norma euclídeana es usada para los vectores y su correspondiente norma inducida para las matrices. El espacio funcional \mathcal{PC} cuenta con la norma supremo

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|. \quad (2.4)$$

Es importante resaltar que por un lado el hecho que la función inicial pertenezca a un espacio funcional da lugar a la interpretación de los sistemas con retardo como una clase particular de sistemas infinito dimensional, y por otro lado, las trayectorias solución de un sistema con retardo pertenecen \mathbb{R}^n ; por lo tanto, hasta cierto punto, estos sistemas también pueden ser tratados como sistemas en el espacio finito dimensional [16].

Otra diferencia se presenta en la construcción de las soluciones; para ejemplificar lo anterior considere el siguiente proceso de solución del sistema (2.2). El enfoque presentado a continuación se conoce como **método paso a paso**, véase [3].

Para $t \in [t_0, t_0 + h]$, observemos que $x(t - h) = \varphi(t - t_0 - h)$ y por lo tanto el sistema toma la forma del siguiente sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi(t - t_0 - h)), \quad t \in [t_0, t_0 + h].$$

Ahora el problema se reduce a buscar la solución del sistema que satisface la condición inicial $x(t_0) = \varphi(0)$. Si existe esta solución digamos $\tilde{x}(t)$ y puede ser definida para todo el intervalo $[t_0, t_0 + h]$, entonces podemos abordar el problema de encontrar la solución en el siguiente intervalo, es decir, $[t_0 + h, t_0 + 2h]$. Aquí $t - h \in [t_0, t_0 + h]$ y el estado con retardo $x(t - h)$ ya está definido por el paso anterior y por lo tanto, $x(t - h) = \tilde{x}(t - h)$. De lo anterior se sigue que para este nuevo intervalo el sistema (2.2) es nuevamente un sistema sin retardo de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{x}(t - t_0 - h)), \quad t \in [t_0 + h, t_0 + 2h],$$

y ahora nos ocuparemos de encontrar la solución al problema de valor inicial $x(t_0 + h) = \tilde{x}(t_0 + h)$.

Aplicando el método paso a paso la tarea de encontrar o definir una solución para el problema de valor inicial (2.2)-(2.3) se reduce a solucionar una serie de problemas de valor inicial para un conjunto de sistemas auxiliares de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Es posible seguir construyendo la solución para k intervalos de h . Aplicando este método podemos reducir el cálculo de la solución del problema de valor inicial (2.2)-(2.3) en una serie de problemas de valor inicial para un conjunto de sistemas auxiliares de EDOs. En la Fig. 2.1 se ilustra una representación gráfica de la construcción de una solución a través de este método.

Dentro de la teoría de sistemas dinámicos el concepto de **estado del sistema** ocupa un papel central. En general, se dice que el estado del sistema en un instante de tiempo dado $t_1 \geq t_0$ debe incluir la información mínima que nos permita continuar o conocer la dinámica para $t \geq t_1$. Si adoptamos este punto de vista, entonces el estado debe ser definido de la misma manera como se define el problema de valor inicial.

La definición de condiciones iniciales y el método de construcción de soluciones paso a paso presentados anteriormente demuestran que necesitamos conocer $x(t_1 + \theta)$ para $\theta \in [-h, 0]$ si queremos continuar con la construcción de la solución para $t \geq t_1$. Por lo

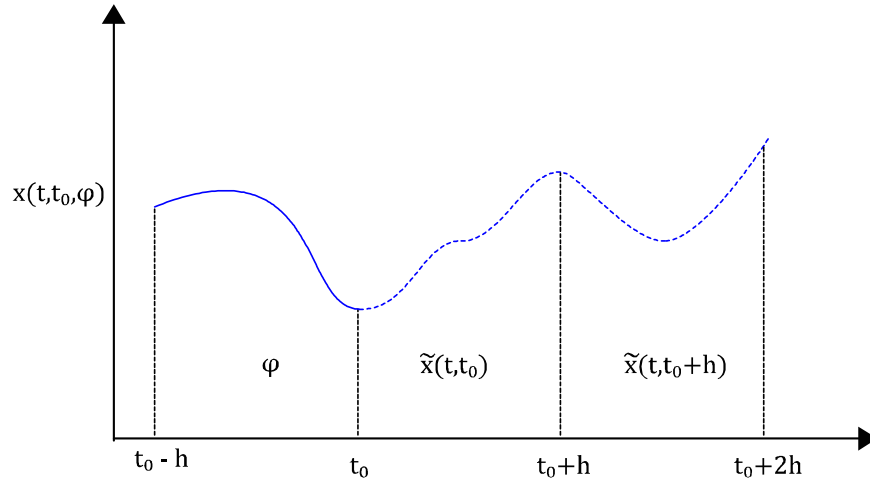


Figura 2.1: Construcción paso a paso de la solución $x(t, t_0, \varphi)$.

tanto, a lo largo de una solución del sistema (2.2) el estado del sistema en un instante de tiempo $t \geq t_0$ se define como el segmento de la solución en el intervalo $[t - h, t]$. Usaremos la siguiente notación para definir el estado del sistema

$$x_t : \theta \rightarrow x(t + \theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

En caso de que la condición inicial (t_0, φ) debe indicarse explícitamente usaremos las notación $x_t(t_0, \varphi)$.

2.2.2. Existencia y unicidad

La dinámica de un sistema con retardos puede depender no solo del estado pasado como ocurre en el sistema (2.2), también es posible que dependa del estado completo del sistema. Un ejemplo de lo anterior se presenta en el sistema

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 g(t, x(t + \theta)) d\theta.$$

Aquí, el lado derecho del sistema depende de los valores de $x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Lo anterior significa que el lado derecho del sistema ya no es más una función si no una funcional definida en algún espacio funcional particular. Considere la siguiente definición.

Definición 1 ([16]) Dada la funcional

$$F : \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

se dice que la funcional es *continua* en el punto $\varphi_0 \in \mathcal{PC}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\varphi \in \mathcal{PC}$ la desigualdad $\|\varphi - \varphi_0\|_h < \delta$ implica que

$$\|F(\varphi) - F(\varphi_0)\| < \varepsilon.$$

La funcional F se dice *continua* en el conjunto $\Phi \subset \mathcal{PC}$ si es continua en cada punto del conjunto.

Ahora considere la funcional

$$f : [0, \infty) \times \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

La funcional f define el sistema con retardos de tipo retardado

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{2.5}$$

La ecuación (2.5) se conoce como *Ecuación Diferencial Funcional de tipo Retardado (EDFR)*. En este trabajo, consideramos el siguiente teorema para la existencia y unicidad de soluciones del sistema (2.5).

Teorema 1 ([16]) Dado el sistema con retardos (2.5) donde la funcional

$$f : [0, \infty) \times \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

satisface las siguientes condiciones

(i). Para toda $H > 0$ existe $M(H) > 0$ tal que

$$\|f(t, \varphi)\| \leq M(H), \quad (t, \varphi) \in [0, \infty) \times \mathcal{PC} \quad \text{y} \quad \|\varphi\|_h \leq H.$$

(ii). La funcional $f(t, \varphi)$ es continua en el conjunto $[0, \infty) \times \mathcal{PC}$ con respecto a ambos argumentos.

(iii). La funcional $f(t, \varphi)$ satisface la condición de Lipschitz con respecto al segundo argumento, i.e., para cualquier $H > 0$ existe una constante de

Lipschitz $L(H) > 0$ tal que la desigualdad

$$\|f(t, \varphi^{(1)}) - f(t, \varphi^{(2)})\| \leq L(H) \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_h,$$

se mantiene para $t \geq 0$, $\varphi^{(k)} \in \mathcal{PC}^1$ y $\|\varphi^{(k)}\| \leq H$, $k = 1, 2$.

Entonces para $t_0 \geq 0$ dado y una función inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$ existe $\tau > 0$ tal que el sistema admite una única solución $x(t)$ para el problema de valor inicial (2.3) y esta solución está definida en el segmento $[t_0 - h, t_0 + \tau]$.

Para cada solución existe un intervalo máximo $[t_0, t_0 + T]$ sobre el cual la solución está definida. A continuación se presentan condiciones bajo las cuales cualquier solución del sistema (2.5) está definida en $[t_0, \infty)$.

Teorema 2 ([16]) *Considere que el sistema (2.5) satisface las condiciones del Teorema 1. Adicionalmente supongamos que $f(t, \varphi)$ satisface la desigualdad*

$$\|f(t, \varphi)\| \leq \eta(\|\varphi\|), \quad t \geq 0, \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$$

donde la función $\eta(r)$, $r \in [0, \infty)$ es continua, no decreciente y es tal que para cualquier $r_0 \geq 0$ la siguiente condición se mantiene:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r_0}^R \frac{dr}{\eta(r)} = \infty.$$

Entonces cualquier solución $x(t, t_0, \varphi)$ del sistema está definida en $[0, \infty)$.

2.2.3. Propiedades de continuidad

En esta sección se presentan las propiedades de continuidad de las soluciones $x(t, t_0, \varphi)$ del sistema (2.5) con respecto a las condiciones iniciales y con respecto a perturbaciones del sistema. Ambas propiedades son consecuencias directas del siguiente teorema.

Teorema 3 ([16]) *Suponga que $f(t, \varphi)$ satisface las condiciones del Teorema 1. Sea $x(t, t_0, \varphi)$ una solución del sistema (2.5) tal que*

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]. \quad (2.6)$$

Dado el sistema perturbado

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t), \quad (2.7)$$

donde la funcional $g(t, y_t)$ es continua en el conjunto $[0, \infty) \times \mathcal{PC}$, satisface la condición de Lipschitz con respecto al segundo argumento y

$$\|g(t, \varphi)\| \leq m, \quad t \geq 0, \varphi \in \mathcal{PC},$$

sea $y(t, t_0, \psi)$ una solución del sistema perturbado bajo condición inicial

$$x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]. \quad (2.8)$$

Si las soluciones son definidas para $t \in [t_0 - h, t_0 + T]$ y si H es tal que

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq H, \quad \|y(t, t_0, \psi)\| \leq H, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + T],$$

entonces la desigualdad

$$\begin{aligned} \|x(t, t_0, \varphi) - y(t, t_0, \psi)\| &\leq \|x_t(t_0, \varphi) - y_t(t_0, \psi)\|, \\ &\leq \left(\|\psi - \varphi\| + \frac{m}{L(H)} \right) e^{L(H)(t-t_0)}, \end{aligned}$$

se mantiene para $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Corolario 1 ([16]) Sea $g(t, \varphi) \equiv 0$; entonces $m = 0$ y ambas $x(t, t_0, \varphi)$ y $y(t, t_0, \psi)$ son soluciones del sistema (2.5). Supongamos que estas soluciones están definidas para $t \in [t_0, t_0 + T]$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\psi - \varphi\| < \delta$, entonces la siguiente desigualdad se mantiene:

$$\|x(t, t_0, \varphi) - x(t, t_0, \psi)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

En otras palabras, $x(t, t_0, \varphi)$ depende continuamente de la función inicial φ .

Corolario 2 ([16]) Sea $\psi(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$; lo anterior significa que las soluciones $x(t, t_0, \varphi)$ y $y(t, t_0, \psi)$ tienen las mismas condiciones iniciales. Supongamos que

estas soluciones están definidas para $t \in [t_0, t_0 + T]$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $m < \delta$, entonces

$$\|x(t, t_0, \varphi) - y(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Esto significa que $x(t, t_0, \varphi)$ depende continuamente del lado derecho del sistema (2.5).

2.2.4. Conceptos de estabilidad

Al igual que con los sistemas dinámicos modelados con ODEs, un tema muy importante para los sistemas dinámicos con retardos es el análisis de estabilidad de las soluciones del sistema estudiado. Este análisis puede ser realizado para el caso lineal y el caso no lineal, con enfoques temporales o enfoques frecuenciales. Para este tipo de sistemas existen dos conceptos de estabilidad: estabilidad dependiente del retardo y la estabilidad independiente del retardo. El análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos con retardos es muy amplio, y el objetivo de este capítulo es presentar de forma breve las herramientas matemáticas utilizadas para abordar el objetivo planteado. Se recomiendan [9] y [16] para un estudio más profundo del tema. A continuación se presentan las definiciones básicas para el análisis de estabilidad de la EDFRs.

A partir de este momento supondremos que el sistema satisface las condiciones del **Teorema 1**. Adicionalmente, supondremos que admite la solución trivial, es decir, $f(t, 0_h) \equiv 0$, para $t \geq 0$. Aquí 0_h representa la solución trivial $0_h : \theta \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in [-h, 0]$. De hecho, si es deseable estudiar la estabilidad de una solución no trivial $y(t, \varphi)$, es posible recurrir a la transformación de variable $z(t) = x(t) - y(t)$, de modo que el nuevo sistema

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t),$$

tenga la solución trivial $z(t) = 0$.

A continuación se presentan las definiciones de estabilidad y estabilidad asintótica para la solución trivial de una EDFR.

Definición 2 ([16]) *La solución trivial del sistema (2.5) se dice estable si para cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que para toda función inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$, $\|\varphi\| < \delta$, se satisface la siguiente desigualdad:*

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.9}$$

Si $\delta(\epsilon, t_0)$ se puede elegir independientemente de t_0 , entonces la solución trivial se dice uniformemente estable.

Observación 1 ([16]) El valor de $\delta(\epsilon, t_0)$ siempre es menor o igual que ϵ .

Definición 3 ([16]) La solución trivial del sistema (2.5) se dice asintóticamente estable si para cualquier $\epsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\Delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que para toda función inicial $\varphi \in \mathcal{PC}$, con $\|\varphi\| < \Delta(\epsilon, t_0)$, se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \epsilon$, para $\forall t \geq t_0$.
2. $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ cuando $t - t_0 \rightarrow \infty$.

Si $\Delta(\epsilon, t_0)$ se puede elegir independientemente de t_0 y existe $H_1 > 0$ tal que $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ cuando $t - t_0 \rightarrow \infty$, uniformemente con respecto a $t_0 \geq 0$, y $\varphi \in \mathcal{PC}$, con $\|\varphi\|_h < H_1$, entonces la solución trivial se dice uniformemente asintóticamente estable.

El conjunto de funciones iniciales φ para las cuales

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \varphi) = 0,$$

se conoce como *región de atracción* para la solución trivial dado un tiempo inicial t_0 .

2.2.5. Estabilidad de EDFRs lineales.

Los criterios de estabilidad basados en una representación en el dominio de la frecuencia son herramientas tradicionales en el estudio de sistemas dinámicos. Los ejemplos clásicos de criterios de estabilidad en el dominio de la frecuencia incluyen resultados como la prueba de Nyquist y el método del lugar de las raíces. Las EDFRs lineales invariantes en tiempo (LTI, por sus siglas en inglés) también se pueden estudiar usando métodos frecuenciales.

A continuación se presentan brevemente las definiciones y herramientas en el dominio de la frecuencia usadas en este trabajo para el análisis de sistemas LTI.

Función característica

Es bien sabido que para el caso de los sistemas lineales invariantes en tiempo modelados con ODEs, la estabilidad depende de la ubicación de las raíces de su polinomio característico asociado. Más aún, si es posible garantizar que todas las raíces o ceros del *polinomio característico* pertenecen al semi izquierdo abierto del plano complejo, entonces dichos sistemas son exponencialmente estables. Para el caso de sistemas con retardos LTI existe un resultado similar.

La estructura general de una EDR lineal invariante en tiempo se escribe como

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^m A_k x(t - h_k), \quad h_k \geq 0, \quad (2.10)$$

donde $A_0, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices del sistema y $h_k \geq 0$ son los retardos satisfaciendo $h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_m$.

La **función característica** asociada al sistema (2.10) es

$$f(s) = \det \left(sI - A_0 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-h_k s} \right). \quad (2.11)$$

La función característica (2.11) pertenece a un grupo de funciones llamadas **polinomios exponenciales o cuasipolinomios**. Un **cuasipolinomio** es una función de variable compleja entera, es decir, que es analítica en todo el plano complejo, cuya principal característica es que posee un número infinito de raíces.

Es posible mostrar que las raíces de un cuasipolinomio solo existen en ciertas regiones del plano complejo, más aún, se puede mostrar que tienen un número infinito (contable) de raíces sobre curvas logarítmicas que tienden a infinito. La cantidad y dirección de estas ramas de raíces dependen de las potencias de los polinomios y las exponenciales presentes en $f(s)$.

Para ilustrar el proceso de obtención de la función característica de un sistema con retardos considere el siguiente ejemplo. La función característica $f(s)$ asociada al sistema (2.10) está definida como

$$f(s) = s^2 + as + bse^{-sh} + c + de^{-sh}. \quad (2.12)$$

En la Fig. 2.2 se muestra la ubicación de algunas de las raíces del cuasipolinomio (2.12) para $a = 2.3669$, $b = 0.9241$, $c = 0$, $d = 4.1600$ y $h = 0.3250$. En esta figura se observan curvas logarítmicas de raíces que tienden al infinito.

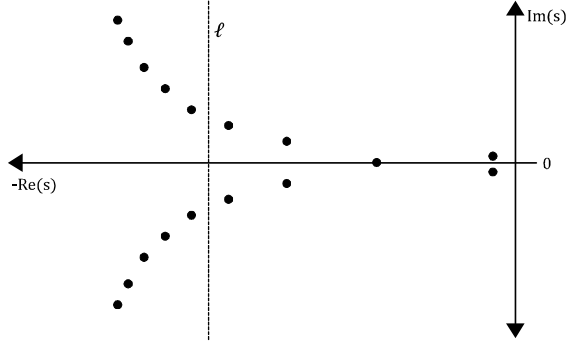


Figura 2.2: Ubicación de las raíces del cuasipolinomio (2.12).

Es importante señalar que en el caso retardado a la derecha de cualquier línea vertical ℓ existe un número finito de raíces, como se observa en la Fig. 2.2. Esta propiedad de los cuasipolinomios asociados a EDFRs resulta muy importante para el análisis de estabilidad. Esta característica es propia de los sistemas retardados, los cuasipolinomios de tipo pueden tener una o más raíces sobre el eje imaginario con lo cual se complica el análisis.

El cuasipolinomio (2.11) se puede reescribir como

$$f(s) = \sum_{i=0}^m p_i(s) e^{-h_i s}, \quad (2.13)$$

donde $p_i(s)$ son polinomios definidos como

$$p_i(s) = a_{0i}s^n + a_{1i}s^{n-1} + \dots + a_{ni}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Si se cumple que

$$\deg(p_0) \geq \deg(p_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

entonces se dice que el cuasipolinomio tiene un término principal. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $a_{00} \neq 0$ y entonces $a_{00}s^n e^{-h_0 s}$ es el término principal de $f(s)$.

Lema 1 ([9]) *El cuasipolinomio (2.13) puede tener todos sus ceros en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo solo si tiene término principal.*

Definición 4 ([9]) *La función característica (2.13), se dice estable si*

$$f(s) \neq 0, \quad \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_+. \quad (2.14)$$

Se dice que es estable independiente del retardo si (2.14) se mantiene para todo $h_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m$. El sistema (2.10) se dice estable si su función característica (2.13) es estable, y se dice que el sistema (2.10) es estable independiente del retardo si (2.14) es estable independiente del retardo.

De acuerdo a la definición anterior, el cuasipolinomio (2.12) para $a = 2.3669, b = 0.9241, c = 0, d = 4.1600$ y $h = 0.3250$, cuya ubicación de sus raíces se observa en la Fig. 2.2, es estable.

En las siguientes subsecciones se discuten algunas de las herramientas matemáticas usadas para determinar la estabilidad del sistema LTI (2.10).

Criterio de Mikhailov

Existen varias pruebas en el dominio frecuencial usados para determinar la estabilidad de los sistemas con retardos, véase [9]. Un ejemplo es el criterio de Mikhailov, el cual utiliza el principio del argumento para funciones analíticas sobre el plano complejo.

Teorema 4 (Principio del argumento [3]) *Sea C un contorno cerrado sin cruces (simple), descrito en el sentido positivo (contrario al reloj), y sea g una función analítica dentro y sobre C , excepto posiblemente en polos interiores a C . Supongamos además que g no tiene ceros sobre C . Entonces*

$$\Delta_C \arg g(s) = 2\pi (N - P),$$

donde N y P son el número de ceros y el número de polos de g , contando sus multiplicidades, interiores a C .

La idea principal del criterio de estabilidad de Mikhailov es usar el resultado anterior para garantizar la inexistencia de raíces de polinomios en el semiplano derecho del plano complejo. Es posible seguir la misma idea para cuasipolinomios, ya que también son funciones analíticas.

Teorema 5 (Criterio de Mikhailov [18]) *El cuasipolinomio (2.13) sin ceros en el eje imaginario, es estable si y solo si*

$$\Delta \arg F(j\omega) \Big|_0^{+\infty} = \frac{n\pi}{2}. \quad (2.15)$$

El teorema anterior permite analizar la estabilidad de una forma visual a través de una gráfica conocida como Hodógrafo de Mikhailov. Para construir esta gráfica realizamos un barrido para $\omega \in [0, \infty)$ y graficamos $\text{Re}(F(i\omega))$ contra $\text{Im}(F(i\omega))$. Este barrido debe ser lo suficientemente grande hasta que ya no exista contribución en el cambio total del argumento del cuasipolinomio y así poder verificar si cumple la condición (2.15).

En la Fig. 2.3 se muestra el hodógrafo de Mikhailov del cuasipolinomio (2.12) para $a = 2.3669$, $b = 0.9241$, $c = 0$, $d = 4.1600$ y $h = 0.3250$.

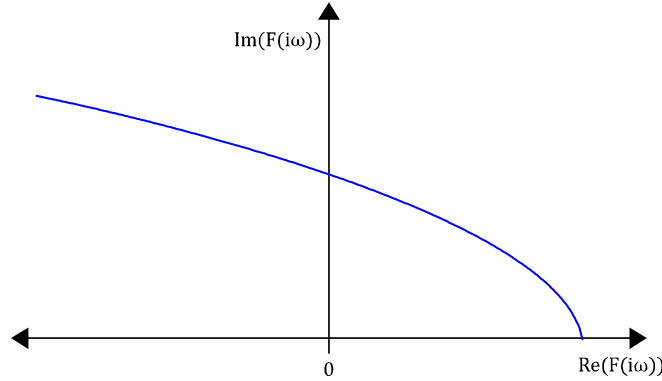


Figura 2.3: Hodógrafo de Mikhailov para el cuasipolinomio (2.12)

Método de D-descomposición

Así como el Hodógrafo de Mikhailov utiliza un barrido en frecuencia para construir una gráfica que nos permite determinar la estabilidad de (2.10), el Método de D-descomposición lo utiliza para dividir el espacio de coeficientes del cuasipolinomio en regiones donde existan el mismo número de ceros. Con esta partición el problema de estabilidad se reduce a encontrar la región en la cual no existen raíces con parte real positiva. Este problema se resuelve aplicando el criterio de Mikhailov y nos permite determinar de manera numérica la región de estabilidad de un cuasipolinomio. Es importante señalar que esta región de estabilidad está definida en el espacio de los coeficientes del cuasipolinomio estudiado. Antes de analizar este método es importante garantizar la existencia de una región con el mismo número de raíces.

Teorema 6 (Teorema de Rouché [3]) Sean $g(s)$ y $h(s)$ dos funciones analíticas dentro y sobre un contorno cerrado simple C en el plano complejo. Si

$$|g(s)| < |h(s)|, \quad \forall s \in C.$$

entonces $h(s)$ y $h(s) + g(s)$ tienen el mismo número de ceros (contando multiplicidades) dentro de C .

Considere la siguiente familia de cuasipolinomios:

$$q(s, \lambda_1, \lambda_2) = q_0(s) + \lambda_1 q_1(s) + \lambda_2 q_2(s), \quad (2.16)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $q_j(s)$, $j = 0, 1, 2$ son cuasipolinomios con término principal.

Además supongamos que para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $q_0(s, 0, 0) = q_0(s)$ es un cuasipolinomio estable. Sea s_0 una raíz de $q_0(s)$, es decir, $q(s_0, 0, 0) = q_0(s) = 0$ y construyamos

$$B_\delta(s_0) = \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| < \delta\}.$$

Sean γ_0, γ_1 y γ_2 tales que

$$\min_{|s-s_0|=\delta} |q_0(s)| = \gamma_0, \quad \max_{|s-s_0|=\delta} |q_1(s)| = \gamma_1 \text{ y } \max_{|s-s_0|=\delta} |q_2(s)| = \gamma_2.$$

Tenemos que

$$\max_{|s-s_0|=\delta} |\lambda_1 q_1(s) + \lambda_2 q_2(s)| \leq |\lambda_1| \gamma_1 + |\lambda_2| \gamma_2.$$

Dado $\epsilon > 0$ sean (λ_1, λ_2) tales que $\|(\lambda_1, \lambda_2)\| < \epsilon$ y $|\lambda_1| \gamma_1 + |\lambda_2| \gamma_2 < \gamma_0$. Se sigue que

$$\max |\lambda_1 q_1(s) + \lambda_2 q_2(s)| < \min |q_0(s)|, \quad \forall s \in \partial B_\delta(s_0).$$

Del teorema de Rouché se tiene que $q_0(s)$ y $q_0(s) + \lambda_1 q_1(s) + \lambda_2 q_2(s)$ tienen el mismo número de ceros dentro de $B_\delta(s_0)$. Es decir, dada una ϵ -vecindad en el espacio de parámetros (λ_1, λ_2) entonces existe una bola de radio δ centrada en la raíz s_0 , tal que una variación de los parámetros dentro de esta ϵ -vecindad implica la existencia de una nueva raíz, digamos s_1 , contenida dentro de la bola de radio δ . En otras palabras, los ceros de $q(s, \lambda_1, \lambda_2)$ son funciones continuas de los parámetros λ_1, λ_2 .

El método de D-descomposición fue propuesto por Neimark [25], consiste en particionar el espacio de coeficientes G en regiones donde existan el mismo número de ceros con parte real positiva; estas regiones se forman a través de un mapeo $M : \omega \rightarrow G$ que representa la curva sobre la cual los coeficientes aportan raíces puramente imaginarias

y otra curva para los coeficientes que aportan raíces en cero. La parametrización $M(\omega)$ permite obtener gráficamente las regiones con el mismo número de raíces con parte real positiva.

Para ilustrar lo anterior, considere el cuasipolinomio (2.16). Sea $s = i\omega$ una raíz de $q(s, \lambda_1, \lambda_2)$, para algún $\omega \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$q(i\omega, \lambda_1, \lambda_2) = q_0(i\omega) + \lambda_1 q_1(i\omega) + \lambda_2 q_2(i\omega) = 0,$$

y por el álgebra de los números complejos tenemos

$$\operatorname{Re} \{q_0(i\omega) + \lambda_1 q_1(i\omega) + \lambda_2 q_2(i\omega)\} = 0,$$

$$\operatorname{Im} \{q_0(i\omega) + \lambda_1 q_1(i\omega) + \lambda_2 q_2(i\omega)\} = 0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior para λ_1 y λ_2 obtenemos $\lambda_1 = \theta_1(\omega)$ y $\lambda_2 = \theta_2(\omega)$ donde θ_1 y θ_2 son funciones escalares. Definamos la parametrización

$$M(\omega) \triangleq (\theta_1(\omega), \theta_2(\omega)).$$

Realizando un barrido de ω en el intervalo $[0, \infty)$ se obtiene una curva en el plano (λ_1, λ_2) , la cual particiona dicho plano en regiones con el mismo número de raíces con parte real positiva.

Para ejemplificar este método, considere el cuasipolinomio

$$F(s) = s - a - be^{-hs}, \tag{2.17}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Sea $s = i\omega$ una raíz de (2.17), entonces tenemos

$$\operatorname{Re} \{i\omega - a - be^{-hi\omega}\} = 0,$$

$$\operatorname{Im} \{i\omega - a - be^{-hi\omega}\} = 0.$$

Usando la fórmula de Euler $e^{-hi\omega} = \cos(h\omega) - i \sin(h\omega)$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$a - b \cos(h\omega) = 0,$$

$$\omega + b \sin(h\omega) = 0.$$

De la solución del sistema de ecuaciones anterior obtenemos la parametrización

$$M(\omega) \triangleq (a(\omega), b(\omega)) = \left(\frac{\omega \cos(h\omega)}{\sin(h\omega)}, \frac{\omega}{\sin(h\omega)} \right). \quad (2.18)$$

Observemos que en este caso la parametrización no está definida en $\omega = 0$, por lo tanto, el barrido de frecuencia para que $\sin(h\omega) \neq 0$ se define en intervalos de la forma $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h} \right)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

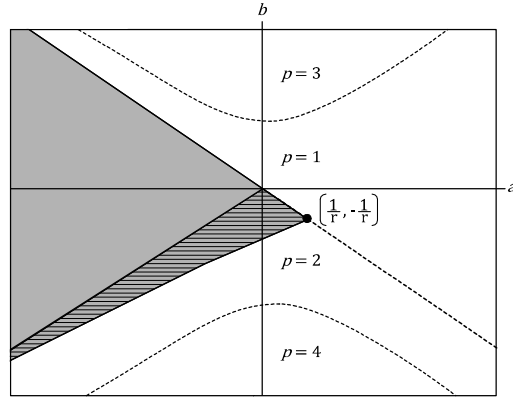


Figura 2.4: Partición del espacio de coeficientes para el cuasipolinomio (2.17).

En este caso la parametrización (2.18) representa la curva sobre la cual el cuasipolinomio (2.17) tienen raíces imaginarias. Ahora supongamos que $s = 0$, entonces se sigue que (2.17) tiene raíces en cero cuando $a = -b$.

En la Fig. 2.4 se muestran las particiones del espacio de coeficientes (a, b) . El área sombreada es la región de estabilidad del cuasipolinomio (2.17). También se pueden observar las regiones en las cuales existen 1, 2, 3 y 4 raíces con parte real positiva, definidas como $p = 1, p = 2, p = 3$ y $p = 4$, respectivamente. Como se explica anteriormente, estas particiones son delimitadas por los coeficientes para los cuales el sistema (2.17) tiene un par de raíces sobre el eje imaginario y los coeficientes que aportan raíces en cero. La parte de la región de estabilidad marcada con líneas horizontales es la que corresponde a la estabilidad dependiente del retardo. Se observa que si $h \rightarrow \infty$ entonces la región de estabilidad dependiente del retardo disminuye y si $h \rightarrow 0$ entonces aumenta.

2.2.6. Estabilidad de EDFRs no lineales.

Es bien sabido que la teoría de Lyapunov es ampliamente utilizada para estudiar la estabilidad de los sistemas dinámicos sin retardos, tanto lineales como no lineales. En

este sección se presentan las definiciones y teoremas básicos de este método en el caso de las EDRFs no lineales.

La teoría de Lyapunov en el caso de sistemas sin retardos involucra la construcción de funciones $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, cuya principal condición es que son definidas positivas. A groso modo, la teoría de Lyapunov utiliza estas funciones V para medir en cierta forma la desviación del estado $x(t)$ con respecto a la solución trivial, y con esta información nos permite analizar el comportamiento de los sistemas dinámicos sin la necesidad de construir una solución explícita para la ecuación diferencial que lo modela.

Ahora vamos a utilizar la teoría de Lyapunov clásica (definido para ODEs) para analizar sistemas con retardos. Considere la siguiente ecuación lineal

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t-h), \quad t \geq 0. \quad (2.19)$$

Dado que la ecuación es lineal, es posible utilizar la función candidata de Lyapunov $V(x) = x^2$. Calculando la derivada a lo largo de las soluciones de la ecuación obtenemos

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = 2x(t)[ax(t) + bx(t-h)] = 2ax^2(t) + 2bx(t)x(t-h). \quad (2.20)$$

Para el caso $b = 0$ la ecuación es una ODE sin retardo y la derivada temporal es definida negativa si se satisface que $a < 0$. Por lo tanto, de la teoría de estabilidad de Lyapunov se sigue que el sistema lineal (2.19) es asintóticamente estable.

Ahora supongamos que $b \neq 0$ y ,por lo tanto, estamos en el caso de una EDRF. Aquí, la derivada a lo largo de las soluciones incluye dos términos y a pesar que es posible garantizar que el primer término es negativo si $a < 0$, no podemos definir el signo del término $2bx(t)x(t-h)$. Esta diferencia implica que se requieren ciertas modificaciones a la teoría de Lyapunov clásica para poder aplicarla a sistemas con retardos.

Para el análisis de estabilidad de los sistemas con retardos utilizando la teoría de Lyapunov existen dos enfoques:

- **Lyapunov-Razumikhin.**- Se utilizan funciones de Lyapunov clásicas que dependen del estado instantáneo $x(t)$, y una condición adicional que nos permite comparar los valores $x(t)$ y $x(t-h)$ y proporciona condiciones de negatividad para la derivada temporal de las funciones a lo largo de las soluciones del sistema.
- **Lyapunov-Krasovskii.**- En este enfoque no se utilizan las funciones de Lyapunov clásicas en su lugar se utilizan *funcionales* que dependen del estado natural del sistema x_t .

En esta tesis de doctorado se utiliza el enfoque de Lyapunov-Krasovskii para analizar la estabilidad asintótica local del sistema estudiado.

Enfoque Lyapunov-Krasovskii

Consideraremos las condiciones del **Teorema 1** para la existencia y unicidad de soluciones del sistema (2.5).

Definición 5 ([16]) *La funcional $v(t, \varphi)$, $v : \mathbb{R} \times \mathcal{PC} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice definida positiva si existe $H > 0$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen.*

1. *La funcional está definida para $t \geq 0$ y cualquier $\varphi \in \mathcal{PC}$ con $\|\varphi\| \leq H$.*
2. *$v(t, 0_h) = 0$, $t \geq 0$.*
3. *Existe una función $v_1(x)$ definida positiva tal que*

$$v_1(\varphi(0)) \leq v(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad y \varphi \in \mathcal{PC}, \quad \|\varphi\|_h \leq H.$$

4. *Para cualquier $t_0 \geq 0$ dado, la funcional $v(t_0, \varphi)$ es continua para φ en el punto 0_h , es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\|\varphi\|_h \leq \delta$ implica que*

$$|v(t_0, \varphi) - v(t_0, 0_h)| = v(t_0, \varphi) < \varepsilon.$$

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes de estabilidad asintótica uniforme para la solución trivial del sistema (2.5).

Teorema 7 ([16]) *La solución trivial del sistema (2.5) es uniformemente asintóticamente estable si existen dos funcionales definidas positivas $v(t, \varphi)$ y $v_2(\varphi)$, y una función definida positiva $w(x)$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. *$v(t, \varphi) \leq v_2(\varphi)$, para $t \geq 0$, y $\varphi \in \mathcal{PC}$, con $\|\varphi\|_h \leq H$.*
2. *El valor de la funcional a lo largo de las soluciones del sistema es diferenciable para t , y su derivada temporal satisface la siguiente desigualdad.*

$$\frac{dv(t, x_t)}{dt} \leq -w(x(t)).$$

Para ilustrar la aplicación del teorema anterior consideremos el sistema lineal

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad (2.21)$$

donde A_0 y A_1 son matrices $n \times n$ dadas y $h > 0$. La condición inicial se define como ya hemos presentado

$$x_0 = \varphi.$$

Consideremos la funcional

$$V(t, \varphi) = \varphi^T(0) P \varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) S \varphi(\theta) d\theta, \quad (2.22)$$

donde P y S son matrices simétricas y definidas positivas. De la desigualdad de Rayleigh

$$\lambda_{\min}(P) \|\varphi(0)\|^2 \leq \varphi^T(0) P \varphi(0),$$

de donde se sigue que

$$\varepsilon \|\varphi(0)\|^2 \leq \lambda_{\min}(P) \|\varphi(0)\|^2 \leq \varphi^T(0) P \varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) S \varphi(\theta) d\theta,$$

y por tanto podemos concluir

$$V(\varphi) \geq \varepsilon \|\varphi(0)\|^2,$$

para $\varepsilon \leq \lambda_{\min}(P)$. Como las otras condiciones de la **Definición 5** también son satisfechas por (2.22), se sigue que es una **funcional de Lyapunov-Krasovskii** candidata para el sistema (2.21).

Por otro lado, dado que V es una funcional de φ

$$\begin{aligned} \varphi^T(0) P \varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) S \varphi(\theta) d\theta &\leq \lambda_{\max}(P) \|\varphi(0)\|^2 + \int_{-h}^0 \lambda_{\max}(S) \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \\ &\leq \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|_h^2 + \int_{-h}^0 \lambda_{\max}(S) \|\varphi\|_h^2 d\theta \\ &\leq \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|_h^2 + h \lambda_{\max}(S) \|\varphi\|_h^2 \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$V(x_t) \leq K \|\varphi\|^2, \quad (2.23)$$

para

$$K \geq \lambda_{\max}(P) \|\varphi\|_h^2 + h\lambda_{\max}(S) \|\varphi\|_h^2.$$

La funcional (2.22) a lo largo de las soluciones del sistema se escribe como

$$V(x_t) = x^T(t) P x(t) + \int_{-h}^0 x^T(t + \xi) S x(t + \xi) d\xi.$$

Calculando

$$\frac{dV(x_t)}{dt} = \frac{d}{dt} (x^T(t) P x(t)) + \frac{d}{dt} \left(\int_{-h}^0 x^T(t + \xi) S x(t + \xi) d\xi \right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^T(t) P x(t)) &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= [A_0 x(t) + A_1 x(t-h)]^T P x(t) + x^T(t) P [A_0 x(t) + A_1 x(t-h)]. \end{aligned}$$

Para el término integral consideremos el siguiente cambio de variable, sea $\alpha = t + \xi$, obtenemos

$$\int_{-h}^0 x^T(t + \xi) S x(t + \xi) d\xi = \int_{t-h}^t x^T(\alpha) S x(\alpha) d\alpha, \quad t \geq 0,$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{t-h}^t x^T(\alpha) S x(\alpha) d\alpha \right) = x^T(t) S x(t) - x^T(t-h) S x(t-h).$$

Así, la derivada a lo largo de las soluciones es

$$\dot{V}(x_t) = x^T(t) [A_0^T P + P A_0 + S] x(t) + 2x^T(t) P A_1 x(t-h) - x^T(t-h) S x(t-h).$$

Lo anterior se puede reescribir como

$$\dot{V}(x_t) = - \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h) \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix},$$

$$\text{donde } M = \begin{bmatrix} [P A_0 + A_0^T P + S] & P A_1 \\ A_1^T P & -S \end{bmatrix}.$$

Si $M > 0$ entonces

$$\dot{V}(x_t) \leq -\varepsilon \|x(t)\|^2, \forall t \geq 0, \quad (2.24)$$

donde

$$\varepsilon \leq \lambda_{\min}(M).$$

De las desigualdades (2.24) y (2.23) se concluye lo siguiente.

Proposición 1 *El sistema (2.21) es asintóticamente estable si existen matrices reales y simétricas P, S , tales que*

$$P > 0 \quad y \quad M > 0. \quad (2.25)$$

2.3. EDFs de tipo neutro

El sistema de control estudiado en este trabajo de tesis se modela usando una *Ecuación Diferencial Funcional de Tipo Neutro (EDFN)*, que es otra clasificación de las ecuaciones diferenciales funcionales. Sin embargo, el desarrollo de este trabajo se enfoca en una EDFR no lineal con un sólo retardo invariante en tiempo, motivo por el cual en la primera parte de este capítulo se presentan algunas definiciones para este tipo de ecuaciones. En la presente sección se presentan algunas definiciones y teoremas para las EDFNs con el objetivo de resaltar las principales diferencias con respecto a las EDFRs. Desde la perspectiva matemática, el análisis de las EDFNs resulta más complejo que el análisis de las EDFRs. En [3], [9], [10], [16] y [18] se presentan teoremas generales de existencia y unicidad de soluciones para las EDFs de tipo neutro, se recomienda consultar estas referencias para un estudio más detallado.

Es importante mencionar que en una EDFR, la derivada de mayor orden no contiene ninguna variable retrasada. Cuando lo anterior no se satisface, entonces tenemos una *EDFN*. Una EDFN permite representar un sistema en el que la derivada presente de una variable de estado $x(t)$ depende de los valores pasados de la derivada $\dot{x}(t-h)$ y de los valores pasados $x(t-h)$ y presentes de $x(t)$.

Un sistema con retardos de tipo neutro se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Dx(t-h)] = f(t, x_t). \quad (2.26)$$

Aquí la funcional $f(t, \varphi)$ es definida para $t \in [0, \infty)$ y $\varphi \in \mathcal{PC}^1$, donde

$$f : [0, \infty) \times \mathcal{PC}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

y es continua para ambos argumentos. La matriz $D^{n \times n}$ es dada y el retardo $h > 0$.

Una EDFN lineal e invariante en el tiempo se escribe como

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^m A_k x(t - h_k) + \sum_{k=1}^m B_k \dot{x}(t - h_k), \quad h_k \geq 0. \quad (2.27)$$

donde $A_0, A_k, B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices del sistema y $h_k \geq 0$ son los retardos. La función característica asociada al sistema (2.10) es

$$F(s) = \det \left(s \left(I - \sum_{k=1}^m B_k e^{-h_k s} \right) - A_0 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-h_k s} \right). \quad (2.28)$$

Definición 6 ([9]) *La función característica (2.28), se dice estable si existe $\alpha < 0$ tal que*

$$F(s) \neq 0, \quad \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_{\alpha+}, \quad (2.29)$$

donde $\bar{\mathbb{C}}_{\alpha+} := \{s : \operatorname{Re}(s) > \alpha\}$. *Se dice que es estable independiente del retardo si (2.29) se mantiene para todo $h_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m$. El sistema neutro (2.27) se dice estable si su función característica (2.28) es estable, y es estable independiente del retardo si (2.29) es estable independiente del retardo.*

Note que en el caso de sistemas neutros la condición (2.29) es más fuerte que la condición (2.14) para sistemas de tipo retardado. Esto es debido a que en sistemas neutros pueden existir raíces del cuasipolinomio (2.28) en franjas verticales del plano complejo que pueden contener el eje imaginario.

Para el análisis de estabilidad no lineal usando el enfoque Lyapunov-Krasovskii tenemos que la funcional definida positiva requiere una condición más fuerte.

Definición 7 ([16]) *La funcional $v(t, \varphi)$ se dice definida positiva si existe $H > 0$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen.*

1. *La funcional está definida para $t \geq 0$ y cualquier $\varphi \in \mathcal{PC}^1$ con $\|\varphi\| \leq H$.*

2. *$v(t, 0_h) = 0, t \geq 0$.*

3. *Existe una función $v_1(x)$ definida positiva tal que*

$$v_1([\varphi(0) - D\varphi(-h)]) \leq v(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad y \varphi \in \mathcal{PC}^1 \text{ con } \|\varphi\| \leq H.$$

4. *Para cualquier $t_0 \geq 0$ dado, la funcional $v(t_0, \varphi)$ es continua para φ en el punto 0_h , es decir,*

para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\|\varphi\| \leq \delta$ implica que

$$|v(t_0, \varphi) - v(t_0, 0_h)| = v(t_0, \varphi) < \epsilon.$$

A continuación se presenta el teorema de estabilidad asintótica para el caso de sistemas neutros.

Teorema 8 ([16]) *La solución trivial del sistema (2.26) es asintóticamente estable si existe un funcional definida positiva y una función definida positiva tal que a lo largo de las soluciones del sistema la funcional es diferenciable y su derivada temporal satisface la desigualdad*

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -w(x(t) - Dx(t-h)).$$

Como se observa las condiciones de estabilidad son más fuertes que las utilizadas en las EDFRs.

2.4. Estabilidad robusta

En la sección anterior se presentaron los conceptos de la estabilidad para los sistemas dinámicos con retardos y algunos métodos para garantizarla. Una observación importante del capítulo anterior es que para poder estudiar y garantizar la estabilidad de un sistema dinámico, con retardos o sin ellos, lo primero que tenemos que suponer es que se conocen exactamente los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema bajo estudio, por ejemplo, los escalares a, b para el sistema (2.19) y las matrices A_0, A_1 para el sistema (2.21). Sin embargo, en la mayoría de los casos reales no es posible conocer exactamente estos coeficientes. Lo anterior se puede ocasionar debido a incertidumbres en las mediciones de las variables durante el proceso de modelado matemático, a perturbaciones externas, a variaciones intrínsecas de los parámetros dentro del sistema, entre otras posibles causas.

Las incertidumbres en los parámetros representan un problema para la estabilidad de los sistemas dinámicos, dado que las soluciones son funciones de los parámetros. Por ejemplo, es bien sabido que la estabilidad de los sistemas de control lineales depende de la ubicación de las raíces de sus polinomios (o cuasipolinomios) característicos, y por consiguiente depende directamente de los coeficientes de estos. El problema se evidencia

cuando las variaciones en los parámetros son suficientemente grandes como para que el sistema pierda la propiedad de estabilidad.

Los parámetros del sistema están en función tanto de los parámetros de la planta a controlar como de los parámetros del controlador, y por lo tanto, las variaciones de estos últimos también pueden generar inestabilidad. Ambos parámetros son de naturaleza distinta, por un lado la planta contiene parámetros intrínsecos que están sujetos a variaciones incontrolables que dependen de las condiciones físicas de operación. Por otro lado, los parámetros del controlador son calculados en la etapa de diseño a través de cualquier método de sintonización y normalmente se les supone fijos, es decir, sin variaciones. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que estos parámetros pueden variar debido a las condiciones físicas de los materiales con los cuales se construyen los controladores, a errores de redondeo durante la etapa de diseño e implementación, errores de calculo debidos a la aproximación de los algoritmos utilizados, etc.

Existen distintas técnicas para estudiar este problema, que en la literatura se conocen como análisis de estabilidad ante variaciones en los parámetros [5] o análisis de estabilidad robusta.

Para explicar el problema de estabilidad robusta considere la ecuación

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0) x(t) + (A_1 + \Delta A_1) x(t - \hat{h}) + (A_2 + \Delta A_2) u(t - \hat{h}), \quad (2.30)$$

donde $\hat{h} = h + \Delta h$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $A_2 \in \mathbb{R}^n$.

Suponga que en el sistema (2.30) se tiene que $\Delta A_0 = \Delta A_1 = 0$ y que el sistema es estable para el control $A_2 u(t - h)$. El problema de robustez ante variaciones en los parámetros del sistema consiste en estudiar que tanto pueden crecer $\|\Delta A_0\|$, $\|\Delta A_1\|$ y Δh antes de que el sistema (2.30) sea inestable. Es importante señalar que a diferencias de los sistemas sin retardo, en un sistema escrito como (2.30) es necesario estudiar la robustez con respecto al retardo.

En este trabajo de tesis se estudia la robustez de un sistema de control ante variaciones en los principales parámetros del sistema.

Capítulo 3

Naturaleza neutra del controlador PD-AQM en modelos TCP

En este capítulo se revisan algunos resultados previos reportados en [28] sobre el controlador PD como estrategia AQM, los cuales motivan la modificación de la estructura del controlador PD-AQM. Después, se muestra que el modelo del sistema de red TCP en lazo cerrado con el controlador PD-AQM es un sistema de tipo neutro, también se presenta una transformación que permite obtener un sistema en lazo cerrado de tipo retardado. Finalmente, se revisan las propiedades de transformación en tiempo y estado del sistema retardado.

3.1. Modificación del controlador PD-AQM

Como ya se mencionó en el capítulo 2, en [28] se definen condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial para la linealización del sistema

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau}p(t - \tau), \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau}w(t) - c, \end{cases} \quad (3.1)$$

en lazo cerrado con el controlador

$$p(t) = K_p q(t) + K_d \dot{q}(t). \quad (3.2)$$

El punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (3.1)-(3.2) está definido como

$$(w_e, q_e) = \left(\frac{c\tau}{n}, \frac{2n^2}{K_p(c\tau)^2} \right). \quad (3.3)$$

Como se puede observar, dados los parámetros (n, τ, c) del sistema (3.1)-(3.2), sólo existe un valor de ganancia, digamos K_p^* , que permite regular a un valor deseado

$$q_d = q_e = \frac{2n^2}{K_p^* (c\tau)^2}.$$

Esta dependencia del equilibrio q_e de la ganancia K_p también se observa en [22] donde se estudia la estabilidad del controlador P-AQM. Específicamente, considere el controlador P-AQM

$$p(t) = K_p q(t) \tag{3.4}$$

El punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (3.1)-(3.4) coincide exactamente con el definido como (3.3).

Así, ahora consideremos el control PD-AQM

$$p(t) = K_p (q(t) - q_d) + K_d \dot{q}(t) + p_0, \tag{3.5}$$

con $q_d > 0$ y $p_0 = \frac{2n^2}{(c\tau)^2}$. El sistema en lazo cerrado (3.1)-(3.5) está definido como

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau} [K_p (q(t - \tau) - q_d) + K_d \dot{q}(t - \tau) + p_0], \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau} w(t) - c, \end{cases} \tag{3.6}$$

que tiene un único punto de equilibrio definido como

$$(w_e, q_e) = \left(\frac{c\tau}{n}, q_d \right). \tag{3.7}$$

Lo anterior muestra que al agregar la constante p_0 en (3.5) se resuelve el problema de la dependencia de K_p en el equilibrio del sistema (3.1)-(3.5). Por otro lado, observemos que si en (3.5) definimos $K_d = 0$, obtenemos un controlador tipo P-AQM cuyo punto de equilibrio coincide exactamente con el punto de equilibrio (3.7), es decir, esta modificación también resuelve el problema de la dependencia de K_p en el equilibrio observada en [22].

Desde el punto de vista de sistemas de control, el promedio de la cola $q(t)$ es la variable a controlar y la variable de control es la función de marcado de paquetes $p(t)$. Adicionalmente, se puede consultar [39] para la discusión acerca de aplicar una retroalimentación tipo *PD* a un sistema con retardos en la entrada de control.

Por otro lado, observemos que el sistema (3.6) es de tipo *neutro*, dado que la derivada de orden mayor incluye un retardo. A pesar de este hecho, todos los trabajos existentes

en el diseño de esquemas de PD-AQM consideran un sistema con retardos en lazo cerrado de tipo retardado, ver por ejemplo [2] y [17].

3.2. Transformación de un sistema de tipo neutro a un sistema de tipo retardado

Si diferenciamos la segunda ecuación de (3.6) obtenemos

$$\ddot{q}(t) = \frac{n}{\tau^2} - \frac{w^2(t)n}{2\tau^2} [K_p(q(t-\tau) - q_d) + K_d\dot{q}(t-\tau) + p_0].$$

De la segunda ecuación de (3.6) se tiene que

$$(\dot{q}(t) + c) \frac{\tau}{n} = w(t),$$

con lo cual tenemos

$$\ddot{q}(t) = \frac{n}{\tau^2} - \frac{1}{2n} (\dot{q}(t) + c)^2 (K_p(q(t-\tau) - q_d) + K_d\dot{q}(t-\tau) + p_0), \quad (3.8)$$

un sistema de tipo *retardado* definido en la variable $q(t)$.

En [2] y [17] el sistema (3.8) se considera equivalente al sistema neutro (3.6) y se utiliza para el diseño de los valores de las ganancias del controlador *PD*. Formalmente hablando, el proceso de convertir las dinámicas acopladas de $w(t)$ y $q(t)$ en (3.6) a una sola dinámica para $q(t)$ representa una transformación especial del sistema que, ante un controlador tipo *PD*, sólo es válida para funciones iniciales particulares, las cuales se presentan a continuación.

Primeramente vamos a revisar el problema de valor inicial para los sistemas de tipo neutro (3.6) y de tipo retardado (3.8).

Por un lado, tenemos que para definir una solución del sistema de tipo neutro (3.6) necesitamos definir unas funciones iniciales

$$\begin{aligned} w(0) &= \varphi_w(0) = \varphi_w \\ q(t) &= \varphi_q(t), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \quad \varphi_q \in \mathcal{C}^1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

Entonces, sean $q(t, \varphi_q, \varphi_w)$ y $w(t, \varphi_q, \varphi_w)$ las soluciones de (3.6) correspondientes a las funciones iniciales φ_q y φ_w .

Por otro lado, para definir una solución del sistema de tipo retardado (3.8) nece-

sitamos conocer una función diferenciable en el intervalo $[-\tau, 0]$ para $q(t)$, entonces sea

$$q(t) = \psi(t), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \quad \psi \in \mathcal{C}^1, \quad (3.10)$$

Además consideremos que ψ satisface

$$\psi = \varphi_q \text{ y } \dot{\psi}(0) = \frac{n}{\tau} \varphi_w - c, \quad (3.11)$$

y sea $q(t, \psi)$ la correspondiente solución del sistema (3.8).

Lema 2 $q(t, \varphi_q, \varphi_w) = q(t, \psi)$.

Demostración. Primeramente mostraremos que $q(t, \varphi_q, \varphi_w)$ es solución del sistema (3.8). Observemos que dado que la función $q(t, \varphi_q, \varphi_w)$ satisface el sistema (3.6) se sigue que

$$\dot{q}(t, \varphi_q, \varphi_w) = \frac{n}{\tau} w(t) - c, \quad t \geq 0,$$

y dado que $w(t)$ es diferenciable, entonces

$$\ddot{q}(t, \varphi_q, \varphi_w) = \frac{n}{\tau^2} - \frac{1}{2n} (\dot{q}(t) + c)^2 (K_p (q(t - \tau) - q_d) + K_d \dot{q}(t - \tau) + p_0), \quad t \geq 0,$$

por lo tanto, se sigue que $q(t, \varphi_q, \varphi_w)$ satisface el sistema (3.8) para $t \geq 0$. Por definición φ_q coincide con ψ . La segunda ecuación de (3.6) implica que

$$\dot{\varphi}_q(0) = \dot{q}(0) = \frac{n}{\tau} w(0) - c = \dot{\psi}(0).$$

De lo anterior se sigue que las condiciones iniciales del problema de valor inicial (3.8)-(3.10) coinciden con las funciones iniciales definidas para la función $q(t, \varphi_q, \varphi_w)$, usada como solución de (3.8).

Ahora mostraremos que la función $q(t, \psi)$ es solución del sistema (3.6). Dado que $q(t, \psi)$ está definida como la solución de problema de valor inicial (3.8)-(3.10), entonces $q(t, \psi)$ es dos veces diferenciable para $t \geq 0$. Definamos la función

$$w(t) = \frac{\tau}{n} (\dot{q}(t, \psi) + c). \quad (3.12)$$

Debido a que $q(t, \psi)$ es dos veces diferenciable para $t \geq 0$ entonces $w(t)$ es diferenciable para $t \geq 0$, y por tanto

$$\dot{w}(t) = \frac{\tau}{n} \ddot{q}(t, \psi).$$

Sustituyendo en el lado derecho de (3.8) obtenemos que

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= \frac{\tau}{n} \left[\frac{n}{\tau^2} - \frac{1}{2n} (\dot{q}(t) + c)^2 (K_p (q(t - \tau) - q_d) + K_d \dot{q}(t - \tau) + p_0) \right], \\ \dot{w}(t) &= \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau} [K_p (q(t - \tau) - q_d) + K_d \dot{q}(t - \tau) + p_0].\end{aligned}$$

Por lo tanto, $w(t)$ definida como (3.12) satisface la primera ecuación de (3.6).

Por otro lado, de (3.12) tenemos que

$$\dot{q}(t, \psi) = \frac{n}{\tau} w(t) - c,$$

es decir, $\dot{q}(t, \psi)$ satisface la segunda ecuación de (3.6).

Nuevamente, por definición φ_q coincide con ψ . De (3.12) se obtiene la función inicial para $w(t)$, es decir,

$$\varphi_w(0) = w(0) = \frac{n}{\tau} (\dot{\psi}(0) + c) = \frac{n}{\tau} (\dot{\varphi}_q(0) + c).$$

lo que implica que

$$\varphi_w \left(\frac{n}{\tau} \right) - c = \dot{\varphi}_q(0).$$

■

El **Lema 2** muestra que bajo la restricción (3.11) sobre las funciones iniciales, el sistema de tipo neutro (3.6) es equivalente al sistema de tipo retardado (3.8) como se propone en [17] y [2], pero sin una justificación formal.

Después del análisis anterior sobre las condiciones iniciales, tiene sentido revisar si la restricción (3.11) se satisface en un escenario real de redes TCP/AQM. Primeramente, recordemos que el protocolo de control de transmisión (TCP) consiste en las fases: *inicio lento y prevención de congestión*, y que el sistema (1.1), y por lo tanto el sistema (3.6), solo modelan la fase de evitación de congestión. Esto implica que las condiciones iniciales para el sistema (3.6) están definidas durante la fase de inicio lento del TCP.

En [35] se muestra que la dinámica de la longitud de la cola en el enrutador es la misma en ambas fases del TCP, esto significa que la siguiente ecuación se satisface

$$\dot{q}(\bar{t}) = \frac{n}{\tau} w(\bar{t}) - c,$$

donde \bar{t} denota la variable de tiempo para ambas fases del algoritmo TCP. Lo anterior implica que la restricción (3.11) sobre las funciones iniciales siempre se satisface.

3.3. Transformaciones de escalamiento en tiempo y estado

Consideremos los siguientes transformaciones:

$$t^{(New)} = \frac{t^{(Old)}}{\tau}, \text{ y } \tilde{q}(t^{(New)}) = \frac{q(t^{(Old)})}{n}, \quad (3.13)$$

Estas transformaciones de tiempo y estado son propuestas en [22] con la finalidad de simplificar el análisis de estabilidad de los controladores P-AQM. En este trabajo también las considereramos y usamos para nuestra investigación de estabilidad sobre los controladores PD-AQM. Antes de aplicar estas transformaciones al sistema (3.8) observemos que de las definiciones (3.13) tenemos que si definimos $t^{(New)} \triangleq f_1(t)$ entonces:

1. si $t = t^{(Old)}$ entonces $f_1(t) = \frac{1}{\tau}t^{(Old)} = t^{(New)}$
2. si $t = (t^{(Old)} - \tau)$ entonces $f_1(t) = \frac{1}{\tau}(t^{(Old)} - \tau) \triangleq t^{(New)} - 1$

Primeramente derivamos $\tilde{q}(t^{(New)})$ con respecto a $t^{(New)}$:

$$\dot{\tilde{q}}(t^{(New)}) = \dot{q}(t^{(Old)}) \left(\frac{\tau}{n} \right). \quad (3.14)$$

Ahora derivamos $\ddot{\tilde{q}}(t^{(New)})$ con respecto a $t^{(New)}$:

$$\ddot{\tilde{q}}(t^{(New)}) = \ddot{q}(t^{(Old)}) \left(\frac{\tau^2}{n} \right). \quad (3.15)$$

Por otro lado, observemos que

$$q(t^{(Old)}) = \tilde{q}(t^{(New)})n \Rightarrow q(t^{(Old)} - \tau) = \tilde{q}(t^{(New)} - 1)n$$

y

$$\dot{q}(t^{(Old)}) = \dot{\tilde{q}}(t^{(New)}) \left(\frac{\tau}{n} \right) \Rightarrow \dot{q}(t^{(Old)} - \tau) = \dot{\tilde{q}}(t^{(New)} - 1) \left(\frac{\tau}{n} \right)$$

Considerando las expresiones anteriores y sustituyendolas en el sistema (3.8), obtenemos

$$\ddot{\tilde{q}}(t^{(New)}) = 1 - 0.5 \left(\dot{\tilde{q}}(t^{(New)}) + w_0 \right)^2 \left(K_p (n\tilde{q}(t^{(New)} - 1) - q_d) + \frac{nK_d}{\tau} \dot{\tilde{q}}(t^{(New)} - 1) + p_0 \right).$$

Con la finalidad de simplificar la notación usaremos $(t^{(New)}) = t$ y entonces consideremos el sistema escalado

$$\ddot{\tilde{q}}(t) = 1 - 0.5 \left(\dot{\tilde{q}}(t) + w_0 \right)^2 \left(K_p (n\tilde{q}(t-1) - q_d) + \frac{K_d n}{\tau} \dot{\tilde{q}}(t-1) + p_0 \right). \quad (3.16)$$

El único punto de equilibrio de (3.16)

$$\tilde{q}_e = \frac{q_d}{n}. \quad (3.17)$$

Consideremos la siguiente variable de desviación

$$y(t) = \tilde{q}(t) - \tilde{q}_e.$$

Derivando

$$\dot{y}(t) = \dot{\tilde{q}}(t),$$

y

$$\ddot{y}(t) = \ddot{\tilde{q}}(t) = 1 - 0.5 \left(\dot{\tilde{q}}(t) + w_0 \right)^2 \left(K_p (n\tilde{q}(t-1) - q_d) + \frac{K_d n}{\tau} \dot{\tilde{q}}(t-1) + p_0 \right).$$

Sustituyendo $y(t)$ y $\dot{y}(t)$ obtenemos el modelo no lineal

$$\ddot{y}(t) = 1 - 0.5 (\dot{y}(t) + w_0)^2 \left(nK_p y(t-1) + \frac{n}{\tau} K_d \dot{y}(t-1) + p_0 \right), \quad (3.18)$$

con solución trivial. A partir de este momento usaremos el sistema (3.18) para investigar la estabilidad asintótica lineal del punto de equilibrio del sistema (1.3) en lazo cerrado con el controlador tipo PD (3.5).

Capítulo 4

Análisis de estabilidad lineal

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del análisis lineal de este trabajo de investigación. Primero, se definen las condiciones para obtener la región de estabilidad de la linealización del sistema en lazo cerrado. Finalmente, se realiza un análisis de las propiedades geométricas de dicha región y su comportamiento ante variaciones en los principales parámetros de red.

4.1. Región de estabilidad

En esta sección utilizaremos las técnicas para estudiar la estabilidad lineal del sistema (3.18), presentadas en los preliminares.

Para obtener la linealización del sistema alrededor del origen calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial \dot{y}(t)} \Big|_{(0,0)} &= -\frac{2n}{\tau c}, \\ \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial \dot{y}(t-1)} \Big|_{(0,0)} &= -\frac{\tau c^2}{2n} K_d, \\ \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial y(t)} \Big|_{(0,0)} &= 0, \\ \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial y(t-1)} \Big|_{(0,0)} &= -\frac{(\tau c)^2}{2n} K_p.\end{aligned}$$

El modelo lineal alrededor del equilibrio (3.17) es

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2n}{\tau c} \dot{y}(t) - \left(\frac{(\tau c)^2}{2n} \right) K_p y(t-1) - \left(\frac{\tau c^2}{2n} \right) K_d \dot{y}(t-1). \quad (4.1)$$

La función característica asociada al sistema (4.1) es

$$f(s) = s^2 + \frac{2n}{\tau c} s + \frac{\tau c^2}{2n} K_d s e^{-s} + \frac{(\tau c)^2}{2n} K_p e^{-s}. \quad (4.2)$$

Como ya se presentó en la sección de preliminares, el sistema (4.1) es exponencialmente estable si y sólo si la función característica (4.2) no tiene ceros con parte real no negativa. El siguiente resultado proporciona la caracterización completa de las ganancias del controlador (K_p, K_d) para las cuales el sistema (4.1) es exponencialmente estable.

Proposición 2 *Dados (n, τ, c) , el sistema (4.1) es exponencialmente estable sí y sólo sí las ganancias K_p y K_d del controlador (3.5) pertenecen a $\Gamma_{(n, \tau, c)}$, véase Fig 4.1, cuya frontera está definida como*

$$\begin{aligned} \partial\Gamma_{(n, \tau, c)} = & \{(K_p(\omega, n, \tau, c), K_d(\omega, n, \tau, c)) : \omega \in (0, \bar{\omega})\} \cup \\ & \{(K_p, K_d) : K_p = 0, K_d \in [K_d(0, n, \tau, c), K_d(\bar{\omega}, n, \tau, c)]\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde

$$K_p(\omega, n, \tau, c) = \frac{2n}{(\tau c)^2} \left(\frac{2n}{\tau c} \omega \sin(\omega) + \omega^2 \cos(\omega) \right), \quad (4.4)$$

$$K_d(\omega, n, \tau, c) = \frac{2n}{\tau c^2} \left(\omega \sin(\omega) - \frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) \right), \quad (4.5)$$

y $\bar{\omega}$ es solución de la ecuación:

$$-\frac{c\tau\omega}{2n} = \tan(\omega), \quad (4.6)$$

para $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Demostración. Primeramente, observemos que como $n, \tau, c > 0$ entonces $s = 0$ es un cero de $f(s)$ si y sólo sí $K_p = 0$. A continuación aplicaremos el método D-particiones.

Supongamos que (4.2) tiene un cero imaginario puro $s = i\omega \neq 0$, i.e.,

$$-\omega^2 + \left(\frac{2n}{\tau c}\right) (i\omega) + \left(\frac{\tau c^2}{2n}\right) K_d (i\omega) e^{-i\omega} + \left(\frac{(\tau c)^2}{2n}\right) K_p e^{-i\omega} = 0.$$

Mediante el uso de la fórmula de Euler $e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i \sin(\omega)$ tenemos

$$-\omega^2 + K_d b \omega \sin(\omega) + K_p c \cos(\omega) + i(K_d b \omega \cos(\omega) + a\omega - K_p c \sin(\omega)) = 0, \quad (4.7)$$

con $a = \left(\frac{2n}{\tau c}\right)$, $b = \left(\frac{\tau c^2}{2n}\right)$ y $c = \left(\frac{(\tau c)^2}{2n}\right)$.

Separando la parte real e imaginaria de la ecuación (4.7) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\omega^2 + K_d b \omega \sin(\omega) + K_p c \cos(\omega) &= 0, \\ K_d b \omega \cos(\omega) + a \omega - K_p c \sin(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo para K_p y K_d , obtenemos la parametrización (4.4)-(4.5). La parametrización (4.4) y (4.5) define una curva continua en el espacio de las ganancias (K_p, K_d) del controlador, cuando ω varía de 0 a ∞ . La curva y el eje de coordenadas K_d dividen el plano en un conjunto infinito (contable) de regiones abiertas Ω_j , $j = 1, 2, \dots$, véase Fig. 4.2, donde se muestran las primeras 5 regiones Ω_j . Cada una de estas regiones Ω_j tiene la propiedad que para cada pareja $(K_p, K_d) \in \Omega_j$, la función $f(s)$ tiene el mismo número de ceros con parte real positiva. Esta propiedad se sigue de la continuidad de los ceros de $f(s)$ con respecto a K_p y K_d , la cual implica que para aumentar o disminuir dicho número de raíces con parte real positiva, la curva o el eje K_d deben ser intersecadas por cualquier camino continuo que va desde la región $(K_{p0}, K_{d0}) \in \Omega_j$ hacia la región $(K_{p1}, K_{d1}) \in \Omega_{j+1}$.

Para determinar explícitamente las regiones Ω_j , $j = 1, 2, \dots$, se necesita calcular las intersecciones de la curva con el eje K_d . Estas intersecciones se pueden determinar calculando la solución para ω de la ecuación $K_p(\omega) = 0$, donde $K_p(\omega)$ está dada por la parametrización (4.4). Observemos que $K_p(\omega) = 0$ implica que

$$\frac{2n}{(\tau c)^2} \left(\left(\frac{2n}{\tau c} \right) \omega \sin(\omega) + \omega^2 \cos(\omega) \right) = 0,$$

de donde se obtiene la ecuación (4.6). Lo anterior implica que $K_p(\omega) = 0$ tiene solución en $\omega = 0$ y las soluciones de la ecuación (4.6). Dado que la ecuación (4.6) es trascendental se puede buscar una solución numérica. Estas soluciones pueden ser obtenidas usando las gráficas de las funciones $\tan(\omega)$ y $-\frac{\omega \tau c}{2n}$. Dado que $-\frac{\omega \tau c}{2n} < 0$ y $\tan(\omega) < 0$ se satisfacen sí y sólo sí $\omega \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+2)\frac{\pi}{2} \right)$, $k = 0, 1, \dots$, se sigue que la ecuación (4.6) tiene un número infinito de soluciones $\bar{\omega}_k$, $k = 0, 1, \dots$, las cuales satisfacen

$$\bar{\omega}_k \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+2)\frac{\pi}{2} \right), k = 0, 1, \dots$$

Las fronteras de cada una de las regiones Ω_j , $j = 1, 2, \dots$, se pueden determinar explícitamente con los segmentos de la curva (4.4)-(4.5) determinados por estas $\bar{\omega}_k$, $k =$

0, 1, ..., y el eje K_d .

Usando el criterio de Mikhailov se puede mostrar que para toda pareja (K_p, K_d) dentro de la región Ω_0 , cuya frontera está dada por la curva (4.4)-(4.5) en el intervalo $\omega \in (0, \bar{\omega}_0)$ y el segmento $[K_d(0), K_d(\bar{\omega}_0)]$ del eje coordenado K_d , la función no tiene ceros con partes reales no negativos, con lo cual se termina la demostración. ■

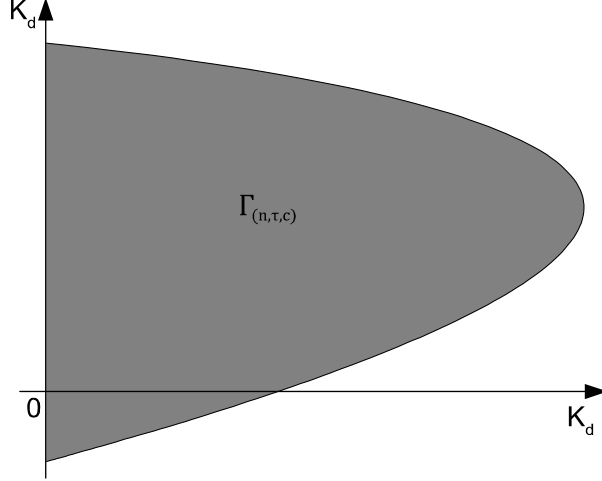


Figura 4.1: Región de estabilidad $\Gamma_{(n,\tau,c)}$.

La **Proposición 2** define las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial para el sistema (4.1), en contraparte de los resultados actuales que sólo proporcionan condiciones suficientes. Desde la perspectiva de control, la región $\Gamma_{(n,\tau,c)}$ es el conjunto completo de controladores PD que estabilizan exponencialmente el sistema (4.1). Con el conjunto $\Gamma_{(n,\tau,c)}$ el trabajo de diseño se focaliza en la búsqueda de los controladores que mejor satisfagan las necesidades de control requeridas por los diseñadores. Lo anterior se debe a que la región de estabilidad $\Gamma_{(n,\tau,c)}$ está definida en el espacio de las ganancias del controlador. Es importante observar que la parametrización (4.4)-(4.5) coincide con la parametrización obtenida en [28], y por lo tanto, también coincide la forma de las regiones de estabilidad.

Por otro lado, en [22] se definen las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial para los controladores P-AQM. Un controlador P-AQM se puede obtener a partir del controlador PD-AQM si en (3.5) tenemos $K_d = 0$. Si consideramos esta suposición en la **Proposición 2** se obtiene el siguiente resultado.

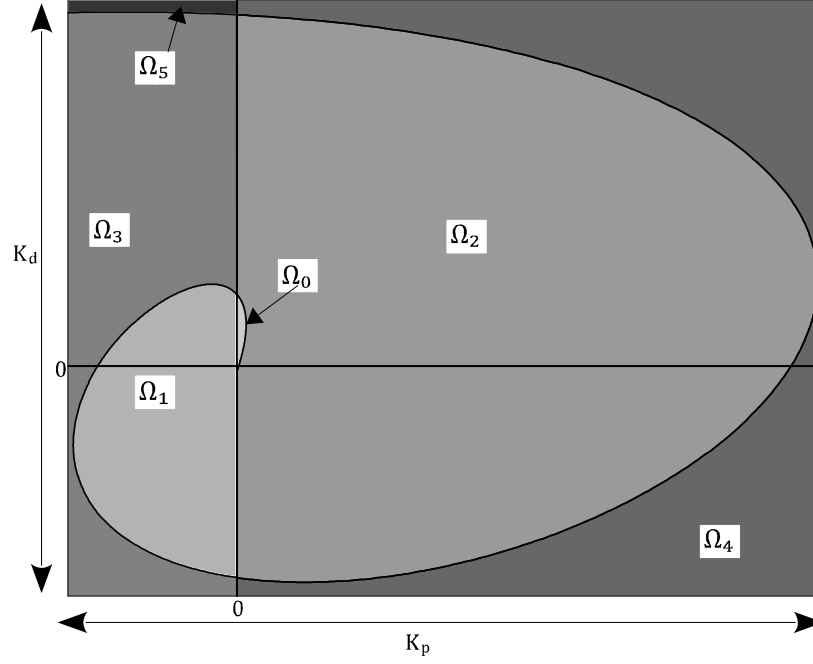


Figura 4.2: Primeras 5 regiones que particionan el espacio de ganancias (K_p, K_d) .

Corolario 3 *Dados los parámetros de red (n, τ, c) , el sistema lineal (4.1) con $K_d = 0$ es exponencialmente estable sí y sólo sí*

$$0 < K_p < \frac{4n^2}{(\tau c)^3} \frac{\tilde{\omega}}{\sin(\tilde{\omega})},$$

donde $\tilde{\omega}$ es la solución de la ecuación

$$\tan(\omega) = \frac{2n}{(\tau c)\omega}, \quad (4.8)$$

para $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Demostración. De la parametrización (4.4) y (4.5) se sigue que $K_d(\omega, n, \tau, c) = 0$ sí y sólo sí la ecuación (4.8) se satisface. Esta ecuación trascendental tiene una única solución $\tilde{\omega}$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, véase Fig. 4.3. Lo anterior implica que

$$K_d(\tilde{\omega}, n, \tau, c) = \frac{2n}{\tau c^2} \left(\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}) - \frac{2n}{\tau c} \cos(\tilde{\omega}) \right) = 0$$

Por otro lado, para este $\tilde{\omega}$ también existe

$$K_p(\tilde{\omega}, n, \tau, c) = \frac{4n^2}{(\tau c)^3} \frac{\tilde{\omega}}{\sin(\tilde{\omega})} \left(\sin^2(\tilde{\omega}) + \left(\frac{\tau c}{2n} \right) \cos(\tilde{\omega}) \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}) \right), \quad (4.9)$$

y tomando en cuenta que de (4.9) se obtiene $\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}) = \cos(\tilde{\omega}) \left(\frac{2n}{\tau c} \right)$, entonces

$$K_p(\tilde{\omega}) = \frac{4n^2}{(\tau c)^3} \frac{\tilde{\omega}}{\sin(\tilde{\omega})}.$$

Se sigue que una condición necesaria y suficiente para la estabilidad exponencial del sistema (4.1), con $K_d = 0$, es $0 < K_p < K_p(\tilde{\omega}, n, \tau, c)$ con lo cual se termina la prueba.

■

El **Corolario 3** coincide con el resultado del **Teorema 1** de [22]. Por lo tanto, la **Proposición 2** generaliza los resultados de la estabilidad exponencial presentados en [22].

4.2. Propiedades geométricas de la región de estabilidad

En esta sección vamos a presentar las propiedades de la región de estabilidad que permiten estudiar la estabilidad robusta de los controladores PD, presentada en la sección 5. Con el objetivo de simplificar la notación definamos $\rho = (n, \tau, c)$, para escribir $K_p(\omega, n, \tau, c)$, $K_d(\omega, n, \tau, c)$ y $\Gamma_{(n, \tau, c)}$ como $K_p(\omega, \rho)$, $K_d(\omega, \rho)$ y Γ_ρ , respectivamente.

Lema 3 *La función continua $K_d(\omega, \rho)$ satisface:*

1) $K_d(\omega, \rho) < 0$ en el intervalo $\omega \in [0, \tilde{\omega})$,

$K_d(\omega, \rho) = 0$ para $\omega = \tilde{\omega}$ y

$K_d(\omega, \rho) > 0$ con $\omega \in (\tilde{\omega}, \bar{\omega}]$.

2) $K_d(\omega, \rho)$ es estrictamente creciente para ω en el intervalo $(0, \bar{\omega})$.

Demostración.

1) De la prueba del **Corolario 3** tenemos que

$$K_d(\tilde{\omega}, \rho) = 0 \text{ para } \tilde{\omega} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Por otro lado, de la Fig. 4.3 se sigue que

$$\frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) > \omega \sin(\omega), \quad \forall \omega \in [0, \tilde{\omega}),$$

y como $\cos(\omega) > 0$ para este mismo intervalo, se sigue que

$$K_d(\omega, \rho) < 0, \quad \forall \omega \in [0, \tilde{\omega}).$$

También de la Fig. 4.3 se tiene que

$$\frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) < \omega \sin(\omega), \quad \forall \omega \in \left(\tilde{\omega}, \frac{\pi}{2}\right),$$

y como $\cos(\omega) > 0$, se concluye que

$$K_d(\omega, \rho) > 0, \quad \forall \omega \in \left(\tilde{\omega}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ahora, para $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \bar{\omega}\right)$ se tiene que $\sin(\omega) > 0$ y $\cos(\omega) < 0$, por lo tanto, de la expresión (4.5) se sigue que

$$K_d(\omega, \rho) > 0, \quad \forall \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \bar{\omega}\right).$$

Finalmente, es claro que $K_d\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right) > 0$ con lo que se termina la prueba.

2) Calculamos la derivada

$$\frac{d}{d\omega} (K_d(\omega, \rho)) = \left(\frac{2n}{\tau c^2}\right) \left(\omega \cos(\omega) + \frac{2n}{\tau c} \sin(\omega) + \sin(\omega)\right).$$

Definamos

$$m(\omega, \rho) = \omega \cos(\omega) + \frac{2n}{\tau c} \sin(\omega). \quad (4.10)$$

Observemos que $m\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right) = \frac{2n}{\tau c} > 0$.

Para $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, reescribamos $m(\omega, \rho)$ como

$$m(\omega, \rho) = \frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) \left(\frac{\tau c \omega}{2n} + \tan(\omega) \right).$$

Los siguientes hechos se satisfacen:

Cuando $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ se cumple que $\cos(\omega) > 0$ y $\tan(\omega) > 0$ lo que implica

$$m(\omega, \rho) > 0 \text{ para } \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.11)$$

Cuando $\omega \in (\frac{\pi}{2}, \bar{\omega})$, de la Fig. 4.4 se sigue $\tan(\omega) < -\frac{\tau c \omega}{2n}$, y como $\cos(\omega) < 0$ se tiene

$$\left(\frac{2n}{\tau c}\right) \sin(\omega) > -\omega \cos(\omega) > 0,$$

por lo tanto, de la expresión (4.10) se concluye que

$$m(\omega, \rho) > 0 \text{ para } \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \bar{\omega}\right). \quad (4.12)$$

Tomando en cuenta (4.11), (4.12) y el hecho que $\sin(\omega) > 0, \forall \omega \in (0, \bar{\omega})$, se concluye que $\frac{d}{d\omega} (K_d(\omega, \rho_0)) > 0$ para $\omega \in (0, \bar{\omega})$, con lo que se concluye la prueba.

■

Lema 4 *La función continua $K_p(\omega, \rho)$ satisface:*

- 1) $K_p(\omega, \rho) > 0, \forall \omega \in (0, \bar{\omega})$.
- 2) $K_p(\omega, \rho)$ tiene un máximo local en $\omega_m \in (\tilde{\omega}, \bar{\omega})$, donde ω_m es la solución de la ecuación

$$\frac{\left(\frac{2n}{\tau c} + 2\right) \omega}{\left(\omega^2 - \frac{2n}{\tau c}\right)} = \tan(\omega), \quad \forall \omega \in (\tilde{\omega}, \bar{\omega}). \quad (4.13)$$

Demostración.

- 1) Para este punto observemos que $K_p(\omega, \rho)$ se puede reescribir como

$$K_p(\omega, \rho) = \frac{2n\omega}{(\tau c)^2} m(\omega),$$

donde $m(\omega)$ se define en (4.10). Como $m(\omega) > 0, \forall \omega \in (0, \bar{\omega})$ se tiene que

$$K_p(\omega, \rho) > 0, \forall \omega \in (0, \bar{\omega}).$$

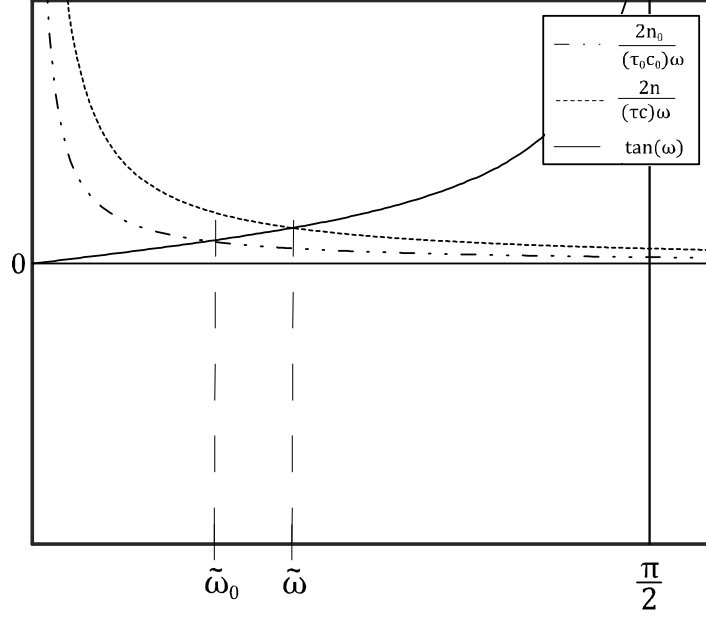


Figura 4.3: Solución numérica para (4.8) con parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14).

2) Calculamos la derivada

$$\frac{d}{d\omega} (K_p(\omega, \rho)) = \frac{2n}{(\tau c)^2} \left(\left(\frac{2n}{\tau c} + 2 \right) \omega \cos(\omega) + \left(\frac{2n}{\tau c} - \omega^2 \right) \sin(\omega) \right).$$

Observemos que $\frac{d}{d\omega} (K_p(\omega, \rho)) \neq 0$ para $\omega^2 = \frac{2n}{\tau c}$ y $\cos(\omega) = 0$, por lo tanto, la expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{d}{d\omega} (K_p(\omega, \rho)) = \frac{2n}{(\tau c)^2} \left(\omega^2 - \frac{2n}{\tau c} \right) \cos(\omega) (n(\omega) - \tan(\omega)),$$

con

$$n(\omega) = \frac{\left(\frac{2n}{\tau c} + 2 \right) \omega}{\left(\omega^2 - \frac{2n}{\tau c} \right)}.$$

De la nueva expresión se observa que $\frac{d}{d\omega} (K_p(\omega, \rho)) = 0$ sí y sólo sí $n(\omega) = \tan(\omega)$. El comportamiento de la función $n(\omega)$ se muestra en la Fig. 4.5, de donde se sigue que la ecuación $n(\omega) = \tan(\omega)$ tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, a nosotros nos interesa estudiar la primera solución, es decir, la solución que se encuentra en el intervalo $(0, \bar{\omega})$.

Primeramente observemos que $n(\omega)$ no está definida en $\omega = \sqrt{\frac{2n}{\tau c}}$. Por otro lado,

observemos que

$$w_0 = \frac{\tau c}{n} \geq 1 \text{ implica que } \sqrt{\frac{2n}{\tau c}} \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2},$$

por lo tanto, existe una solución $\omega_m \in \left(\sqrt{\frac{2n}{\tau c}}, \frac{\pi}{2}\right)$ para la ecuación $n(\omega) = \tan(\omega)$. De la Fig. 4.5 se tiene que

a) para $\omega \in \left(\sqrt{\frac{2n}{\tau c}}, \omega_m\right)$ se tiene que $n(\omega) > \tan(\omega)$.

b) para $\omega \in \left(\omega_m, \frac{\pi}{2}\right)$ se tiene que $n(\omega) < \tan(\omega)$.

Del punto a) se concluye que

$$\frac{d}{d\omega} (K_p(\omega, \rho)) > 0 \text{ cuando } \omega \in \left(\sqrt{\frac{2n}{\tau c}}, \omega_m\right),$$

y del punto b) se tiene que

$$\frac{d}{d\omega} (K_p(\omega, \rho)) < 0 \text{ cuando } \omega \in \left(\omega_m, \frac{\pi}{2}\right).$$

De todo lo anterior se concluye que $K_p(\omega, \rho)$ tiene un máximo local en ω_m .

Ahora vamos a mostrar el hecho que $\omega_m \in (\tilde{\omega}, \bar{\omega})$. Claramente, $\omega_m < \bar{\omega}$ dado que $\bar{\omega} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Para mostrar que $\omega_m > \tilde{\omega}$ supongamos que $\omega_m \leq \tilde{\omega}$. Debido a que $\tan(\omega)$ es una función estrictamente creciente de ω entonces

$$\tan(\omega_m) \leq \tan(\tilde{\omega}).$$

Observemos que dado que $\frac{2n}{\tau c} > 0$ entonces la desigualdad

$$n(\omega_m) = \frac{\left(\frac{2n}{\tau c} + 2\right) \omega_m}{\left(\omega_m^2 - \frac{2n}{\tau c}\right)} \geq \frac{2\omega_m}{\omega_m^2} = \frac{2}{\omega_m}$$

Por otro lado, de $w_0 = \frac{\tau c}{n} \geq 1$ implica que $2 > 2\frac{n}{\tau c}$, y por lo tanto,

$$\frac{2n}{(\tau c) \tilde{\omega}} < \frac{2}{\tilde{\omega}}.$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{2}{\omega_m} \leq n(\omega_m) = \tan(\omega_m) \leq \tan(\tilde{\omega}) = \frac{2n}{(\tau c) \tilde{\omega}} < \frac{2}{\tilde{\omega}}.$$

La desigualdad $\frac{2}{\omega_m} < \frac{2}{\tilde{\omega}}$ implica que $\omega_m > \tilde{\omega}$ lo cual contradice la suposición que $\omega_m \leq \tilde{\omega}$, la contradicción muestra lo que se quería.

■

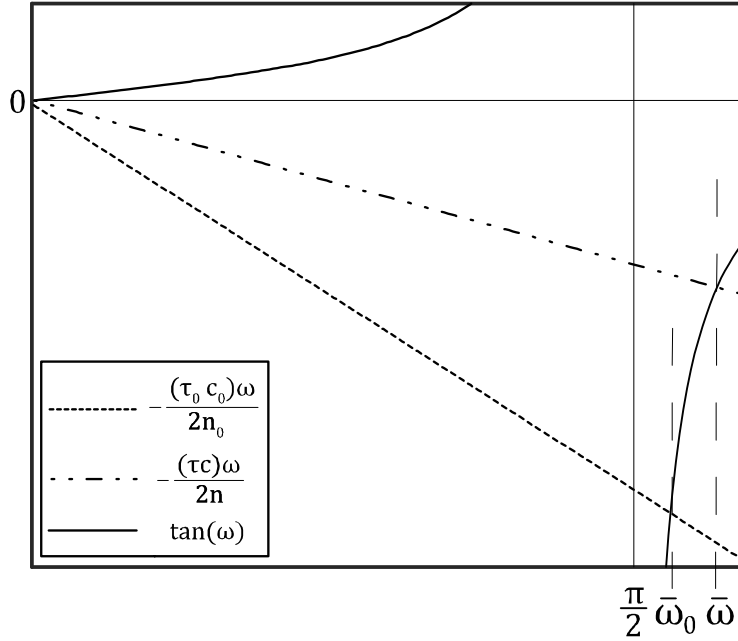


Figura 4.4: Solución numérica para (4.6), con parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14).

Observación 2 *La región de estabilidad es convexa. De la parametrización (4.4) y (4.5) tenemos*

$$K_p(\omega, \rho) = \frac{2n}{(\tau c)^2 \sin(\omega)} \left[\frac{2n}{\tau c} \omega + \frac{\tau c^2}{2n} \omega \cos(\omega) K_d(\omega, \rho) \right].$$

De las propiedades de las funciones $K_p(\omega, \rho)$ y $K_d(\omega, \rho)$ definidas en los Lemas 3 y 4 se sigue que la región de estabilidad Γ_ρ es un conjunto convexo.

Las propiedades anteriores nos proporcionan el comportamiento de la parametrización (4.4) y (4.5), y por tanto, el comportamiento de la región de estabilidad Γ_ρ como función de ω .

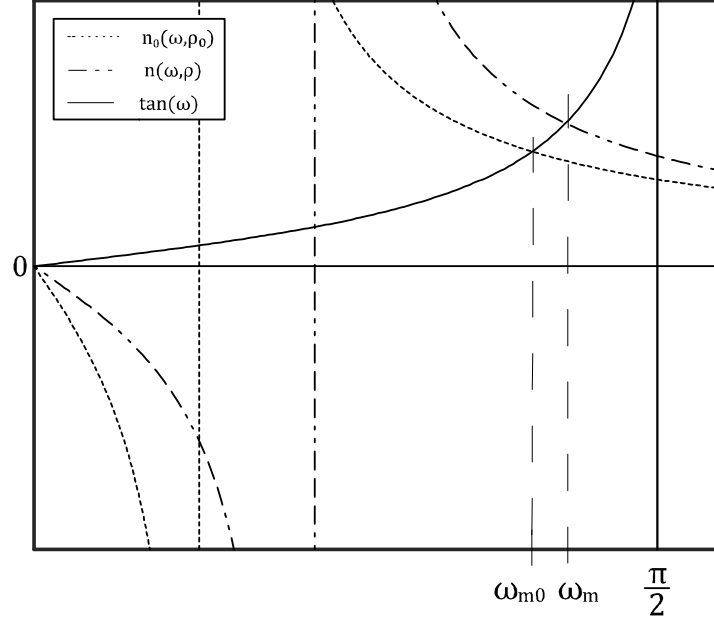


Figura 4.5: Solución numérica para (4.13) con parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14).

Ahora nos interesa estudiar algunas de las propiedades de Γ_ρ con respecto a las variaciones de los parámetros de red, es decir, el comportamiento de Γ_ρ como función de (n, τ, c) . Para ello, consideremos 2 conjuntos de parámetros: $\rho = (n, \tau, c)$ y $\rho_0 = (n_0, \tau_0, c_0)$ satisfaciendo la siguiente condición:

$$n \geq n_0, \tau \leq \tau_0 \text{ y } c \leq c_0. \quad (4.14)$$

Sean $\bar{\omega}_0, \omega_{m0}$ y $\tilde{\omega}_0$ las soluciones de las ecuaciones (4.6), (4.8), y (4.13) correspondientes a los parámetros ρ_0 , respectivamente. De forma similar, sean $\bar{\omega}, \omega_m$ y $\tilde{\omega}$ las soluciones de las ecuaciones (4.6), (4.8), y (4.13) correspondientes a los parámetros ρ , respectivamente.

Observación 3 Para los parámetros de red ρ y ρ_0 satisfaciendo (4.14) las siguientes desigualdades se matienen:

$$\tilde{\omega}_0 \leq \tilde{\omega}, \omega_{m0} \leq \omega_m \text{ y } \bar{\omega}_0 \leq \bar{\omega}. \quad (4.15)$$

El resultado se puede comprobar graficando las funciones (4.6), (4.8), y (4.13) para los parámetros ρ_0 y ρ , satisfaciendo (4.6), véase las figuras 4.3, 4.4 y 4.5.

Lema 5 *Dados los parámetros ρ y ρ_0 satisfaciendo (4.14) se tienen los siguientes hechos:*

- 1) $K_d(\omega, \rho) < K_d(\omega, \rho_0) \leq 0, \forall \omega \in [0, \tilde{\omega}_0]$.
- 2) $0 < K_d(\omega, \rho_0) < K_d(\omega, \rho), \forall \omega \in (\tilde{\omega}_0, \bar{\omega}_0]$.
- 3) $0 \leq K_p(\omega, \rho_0) < K_p(\omega, \rho), \forall \omega \in (0, \bar{\omega}_0)$.

Demostración.

- 1) De la información del **Lema 3** y $\tilde{\omega}_0 \leq \tilde{\omega}$ se sigue que

$$K_d(\omega, \rho_0) \leq 0 \text{ y } K_d(\omega, \rho) \leq 0 \text{ para } \omega \in (0, \tilde{\omega}_0].$$

Lo anterior implica que,

$$\omega \sin(\omega) - \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \cos(\omega) < 0 \text{ y } \omega \sin(\omega) - \frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) < 0.$$

De la condición (4.14) se tiene que

$$\frac{n}{\tau c} \geq \frac{n_0}{\tau_0 c_0} > 0,$$

y tomando en cuenta que $\cos(\omega) > 0$ para $\omega \in (0, \tilde{\omega}_0]$ tenemos que

$$0 > \frac{2n_0}{\tau_0 c_0^2} \left(\omega \sin(\omega) - \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \cos(\omega) \right) \geq \frac{2n}{\tau c^2} \left(\omega \sin(\omega) - \frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) \right), \quad \omega \in (0, \tilde{\omega}_0),$$

por lo tanto

$$K_d(\omega, \rho) < K_d(\omega, \rho_0) \leq 0, \forall \omega \in (0, \tilde{\omega}_0].$$

- 2) De la información del **Lema 3**, $\tilde{\omega}_0 \leq \tilde{\omega}$ y $\bar{\omega}_0 \leq \bar{\omega}$ se sigue que

$$K_d(\omega, \rho_0) > 0 \text{ y } K_d(\omega, \rho) > 0 \text{ para } \omega \in (\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}).$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} K_d(\omega, \rho_0) > 0 &\Rightarrow \omega \sin(\omega) - \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \cos(\omega) > 0 \Rightarrow \omega \sin(\omega) > \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \cos(\omega) \\ K_d(\omega, \rho) > 0 &\Rightarrow \omega \sin(\omega) - \frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) > 0 \Rightarrow \omega \sin(\omega) > \frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) \end{aligned}$$

Considerando lo anterior y la desigualdad $\frac{n_0}{\tau_0 c_0} \leq \frac{n}{\tau c}$

$$\begin{aligned} \omega \sin(\omega) - \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \cos(\omega) &> \omega \sin(\omega) - \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \cos(\omega) > 0 \\ \frac{2n}{\tau c^2} \left(\omega \sin(\omega) - \frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) \right) &> \frac{2n_0}{\tau_0 c_0^2} \left(\omega \sin(\omega) - \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \cos(\omega) \right) > 0, \omega \in (\tilde{\omega}_0, \bar{\omega}_0], \end{aligned}$$

se concluye que

$$K_d(\omega, \rho) > K_d(\omega, \rho_0) > 0, \forall \omega \in (\tilde{\omega}_0, \bar{\omega}_0].$$

3) Del **Lema 4** tenemos que

$$K_p(\omega, \rho_0) = \frac{2n_0 \omega}{(\tau_0 c_0)^2} m(\omega, \rho_0) \text{ y } K_p(\omega, \rho) = \frac{2n \omega}{(\tau c)^2} m(\omega, \rho),$$

donde $m(\omega, \rho_0)$ y $m(\omega, \rho)$ está definida por (4.10) correspondientes a los parámetros ρ_0 y ρ , respectivamente.

También, del **Lema 4** y del hecho que $\bar{\omega}_0 \leq \bar{\omega}$ se sigue que

$$\omega \cos(\omega) + \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \sin(\omega) > 0 \text{ y } \omega \cos(\omega) + \frac{2n}{\tau c} \sin(\omega) > 0, \forall \omega \in (0, \bar{\omega}_0).$$

Por otro lado, observemos que $\cos(\omega) < 0$, para $(\frac{\pi}{2}, \bar{\omega}_0)$, entonces de las desigualdades anteriores se sigue que

$$\frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \sin(\omega) > \omega \cos(\omega) > 0 \text{ y } \frac{2n}{\tau c} \sin(\omega) > \omega \cos(\omega) > 0, \forall \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \bar{\omega}_0\right).$$

Dado que $\sin(\omega) > 0$ para $\omega \in (0, \bar{\omega}_0)$ y $\frac{n_0}{\tau_0 c_0} \leq \frac{n}{\tau c}$ podemos calcular:

a) Para $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \left(\omega \cos(\omega) + \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \sin(\omega) \right) &\leq \frac{2n}{\tau c} \left(\omega \cos(\omega) + \frac{2n}{\tau c} \sin(\omega) \right) \\ K_p(\omega, \rho_0) &\leq K_p(\omega, \rho) \end{aligned}$$

b) Para $\omega \in (\frac{\pi}{2}, \bar{\omega}_0)$

$$\begin{aligned} \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \left(\omega \cos(\omega) + \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \sin(\omega) \right) &\leq \frac{2n}{\tau c} \left(\omega \cos(\omega) + \frac{2n}{\tau c} \sin(\omega) \right) \\ K_p(\omega, \rho_0) &\leq K_p(\omega, \rho) \end{aligned}$$

c) Para $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$K_p\left(\frac{\pi}{2}, \rho_0\right) = \frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \left(\frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \right) \leq \frac{2n}{\tau c} \left(\frac{2n}{\tau c} \right) = K_p\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right)$$

De los tres puntos anteriores se concluye que $K_p(\omega, \rho) \geq K_p(\omega, \rho_0)$ para todo $\omega \in (0, \bar{\omega}_0)$ como se quería mostrar.

■

El siguiente resultado define el comportamiento de las regiones de estabilidad Γ_{ρ_0} y Γ_{ρ} cuando los parámetros varían según la condición (4.14). Este resultado es fundamental para el estudio de estabilidad robusta presentada más adelante.

Proposición 3 *Dados los parámetros de red ρ_0 y ρ satisfaciendo (4.14) se satisface la siguiente propiedad:*

$$\Gamma_{\rho_0} \subseteq \Gamma_{\rho}. \quad (4.16)$$

Demostración. Obviamente $\Gamma_{\rho_0} = \Gamma_{\rho}$ cuando $\rho_0 = \rho$. Note que con el objetivo de mostrar el caso general no trivial basta con mostrar que la propiedad de contención de la región de estabilidad se mantiene para algunos parámetros $\rho_1 = (n_1, \tau_1, c_1)$ que satisfacen las condiciones (4.14), dado que podemos usar un procedimiento recursivo si redefinimos los parámetros como $n_1 = n_0, \tau_1 = \tau_0$ y $c_1 = c_0$.

Sea $(K_{p0}, K_{d0}) \in \Gamma_{\rho_0}$. De la convexidad de Γ_{ρ_0} existen $\omega_1 \in (0, \omega_{m0})$ y $\omega_2 \in (\omega_{m0}, \bar{\omega}_0)$ tales que

$$K_{p0} = K_p(\omega_1, \rho_0) = K_p(\omega_2, \rho_0) \text{ y } K_d(\omega_1, \rho_0) < K_{d0} < K_d(\omega_2, \rho_0). \quad (4.17)$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\tilde{\omega}_0 < \tilde{\omega} < \omega_1$ y $\omega_{m0} < \omega_m < \omega_2$ dado que podemos elegir los parámetros ρ_1 satisfaciendo (4.14) tales que las desigualdades anteriores se mantienen.

Ahora observemos el punto $(K_p(\omega_1, \rho_0), K_d(\omega_1, \rho_0)) \in \partial\Gamma_{\rho_0}$. Considerando las propiedades de las funciones $K_p(\omega_1, \rho)$ y $K_d(\omega_1, \rho)$ con respecto a las variaciones en los parámetros, se tienen los dos siguientes casos:

1) $\omega_1 \in (0, \tilde{\omega}_0)$. De la información del **Lema 5** tenemos que

$$0 < K_p(\omega_1, \rho_0) < K_p(\omega_1, \rho_1) \text{ y } K_d(\omega_1, \rho_1) < K_d(\omega_1, \rho_0) < 0.$$

Las desigualdades anteriores y los hechos que $K_d(\omega, \rho_1)$ es creciente para $\omega \in (0, \bar{\omega}_0)$ y $K_p(\omega, \rho_1)$ es creciente para $\omega \in (0, \omega_1) \subset (0, \tilde{\omega})$ implican que existen $\omega_3 < \omega_1$ tal que

$$K_d(\omega, \rho_1) \text{ es creciente para } \omega \in (0, \bar{\omega}_0) \Rightarrow K_d(\omega_3, \rho_1) < K_d(\omega_1, \rho_1) < K_d(\omega_1, \rho_0) < 0$$

$$K_p(\omega, \rho_1) \text{ es creciente para } \omega \in (0, \omega_1) \subset (0, \tilde{\omega}) \Rightarrow 0 < K_p(\omega_1, \rho_0) \leq K_p(\omega_3, \rho_1) < K_p(\omega_1, \rho_1)$$

es decir,

$$K_p(\omega_1, \rho_0) = K_p(\omega_3, \rho_1) \text{ y } K_d(\omega_3, \rho_1) < K_d(\omega_1, \rho_0)$$

2) $\omega_1 \in (\tilde{\omega}_0, \omega_{m0})$. Para este caso, del **Lema 5** tenemos que

$$0 < K_p(\omega_1, \rho_0) < K_p(\omega_1, \rho_1) \text{ y } 0 < K_d(\omega_1, \rho_0) < K_d(\omega_1, \rho_1).$$

Dado que $K_d(\omega, \rho_1)$ es creciente para $\omega \in (0, \bar{\omega}_0)$ entonces existe $\omega_4 < \omega_1$ tal que

$$0 < K_d(\omega_4, \rho_1) < K_d(\omega_1, \rho_1)$$

y de $0 < K_d(\omega_1, \rho_0) < K_d(\omega_1, \rho_1) \Rightarrow 0 < K_d(\omega_1, \rho_0) \leq K_p(\omega_4, \rho_1) < K_d(\omega_1, \rho_1)$, es decir,

$$K_d(\omega_1, \rho_0) = K_d(\omega_4, \rho_1).$$

Por otro lado, dado que $K_p(\omega, \rho_1)$ es creciente para $\omega \in (0, \omega_1)$ entonces existe $\omega_5 < \omega_1$ tal que

$$K_p(\omega_5, \rho_1) < K_p(\omega_1, \rho_1)$$

y de $0 < K_p(\omega_1, \rho_0) < K_p(\omega_1, \rho_1) \Rightarrow 0 < K_p(\omega_1, \rho_0) \leq K_p(\omega_5, \rho_1) < K_p(\omega_1, \rho_1)$, podemos suponer que

$$K_p(\omega_1, \rho_0) = K_p(\omega_5, \rho_1).$$

La continuidad y el comportamiento creciente de $K_p(\omega, \rho_1)$ y $K_d(\omega, \rho_1)$ en el intervalo $(0, \omega_1)$ implica que $\omega_5 < \omega_4$.

Por lo tanto, tenemos que existe $\omega_5 < \omega_1$ tal que

$$K_p(\omega_1, \rho_0) = K_p(\omega_5, \rho_1) \text{ y } K_d(\omega_5, \rho_1) < K_d(\omega_1, \rho_0).$$

De todo el análisis anterior y la desigualdad (4.17) se sigue que existe $\omega'_1 < \omega_1$, donde ω'_1 puede ser ω_3 o ω_5 en cada uno de los casos, tal que

$$K_{p0} = K_p(\omega'_1, \rho_1) \text{ y } K_d(\omega'_1, \rho_1) < K_{d0}. \quad (4.18)$$

Ahora estudiemos el punto $(K_p(\omega_2, \rho_0), K_d(\omega_2, \rho_0)) \in \partial\Gamma_{\rho_0}$. Del **Lema 5** tenemos

$$0 < K_p(\omega_2, \rho_0) < K_p(\omega_2, \rho_1) \text{ y } 0 < K_d(\omega_2, \rho_0) < K_d(\omega_2, \rho_1).$$

De las desigualdades anteriores y del hecho que $K_p(\omega, \rho_1)$ es decreciente para $\omega \in (\omega_2, \bar{\omega}_0)$, dado que $\omega_2 > \omega_m$, se satisface que

$$K_p(\omega_m, \rho_1) > K_p(\omega_2, \rho_1),$$

y como $K_d(\omega, \rho_1)$ es creciente para $\omega \in (\omega_2, \bar{\omega}_0)$, entonces

$$K_d(\bar{\omega}_0, \rho_1) > K_d(\omega_2, \rho_1).$$

De lo anterior se sigue que existe $\omega'_2 > \omega_2$ tal que

$$\begin{aligned} K_p(\omega_m, \rho_1) &\geq K_p(\omega'_2, \rho_1) > K_p(\omega_2, \rho_1), \\ K_d(\bar{\omega}_0, \rho_1) &\geq K_d(\omega'_2, \rho_1) > K_d(\omega_2, \rho_1). \end{aligned}$$

es decir,

$$K_p(\omega_2, \rho_0) = K_p(\omega'_2, \rho_1) \text{ y } K_d(\omega_2, \rho_1) < K_d(\omega'_2, \rho_1).$$

De las desigualdades (4.17) se sigue que

$$K_{p0} = K_p(\omega'_2, \rho_1) \text{ y } K_{d0} < K_d(\omega'_2, \rho_1). \quad (4.19)$$

Finalmente, de (4.18) y (4.19) se concluye que

$$K_{p0} = K_p(\omega'_2, \rho_1) = K_p(\omega'_1, \rho_1) \text{ y } K_{d0} < K_d(\omega'_1, \rho_1) < K_d(\omega'_2, \rho_1)$$

lo que implica que $(K_{p0}, K_{d0}) \in \Gamma_{\rho_1}$ y, por lo tanto, $\Gamma_{\rho_0} \subset \Gamma_{\rho_1}$ lo cual termina la prueba.

■

Una representación gráfica de la propiedad de contención (4.16) se presenta en la Fig. 4.6.

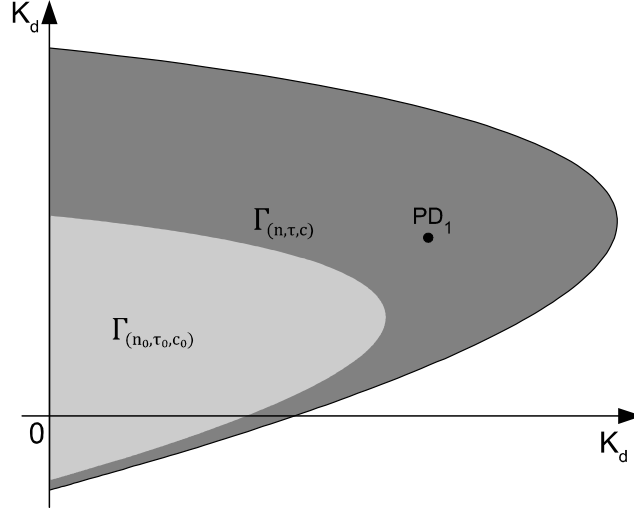


Figura 4.6: Regiones de estabildas con parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14).

Para interpretar este resultado en el contexto de variaciones en los parámetros del sistema, considere lo siguiente. Dados los parámetros de red (n, τ, c) calculamos la región de estabilidad Γ_ρ , donde el controlador PD_1 estabiliza asintóticamente el sistema (4.1), véase la Fig. 4.6. Ahora supongamos que los parámetros del sistema varían, es decir, los valores de (n, τ, c) ahora son (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (4.14). Para estos parámetros existe una nueva región de estabilidad Γ_{ρ_0} . Dado que para estos nuevos valores (n_0, τ_0, c_0) el controlador se encuentra fuera de la región de estabilidad Γ_{ρ_0} se sigue que el sistema (4.1) es inestable. Por otro lado, en las siguientes secciones se presenta como la propiedad de contención (4.16) nos permite diseñar controladores que soportan cierto tipo de variaciones en los parámetros del sistema.

Capítulo 5

Análisis de estabilidad no lineal

En este capítulo se presenta el análisis de estabilidad no lineal local de los equilibrios realizado en esta tesis doctoral. Este análisis se realiza usando el enfoque de funcionales Lyapunov-Krasovskii.

5.1. Condiciones suficientes de estabilidad

El sistema no lineal (3.18) de tipo retardado se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) = & -0.5 [(\dot{y}^2(t) + 2w_0\dot{y}(t)) (K_1y(t-1) + K_2\dot{y}(t-1) + p_0)] \\ & -0.5w_0^2 (K_1y(t-1) + K_2\dot{y}(t-1)),\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $K_1 = nK_p$ y $K_2 = \frac{n}{\tau}K_d$.

En la sección de preliminares se presentan las definiciones y teoremas del enfoque Lyapunov-Krasovskii que son necesarios para estudiar la estabilidad del sistema no lineal (5.1).

Suponiendo el instante de tiempo inicial $t_0 = 0$, para una solución $y(t, \varphi)$ definamos el estado natural del sistema (5.1) como

$$y_t(\varphi) = y(t + \theta, \varphi), \quad \theta \in [-1, 0],$$

donde $y_t(\varphi) \in \mathcal{C}^1([-1, 0], \mathbb{R}), \forall t \geq 0$.

Lo anterior implica que necesitamos una funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$(y_t(\varphi), \dot{y}_t(\varphi)) \rightarrow v(y_t(\varphi), \dot{y}_t(\varphi)).$$

Por lo tanto, la funcional debe ser definida para el vector $(\varphi, \dot{\varphi})$ que pertenece a

$\mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, el espacio de Banach de las funciones continuas que mapean el intervalo $[-1, 0]$ a \mathbb{R}^2 , equipado con la norma

$$\|(\varphi, \dot{\varphi})\| = \sup_{\theta \in [-1, 0]} \|(\varphi(\theta), \dot{\varphi}(\theta))\|.$$

Teorema 9 *La solución cero del sistema (5.1) es localmente asintóticamente estable si $K_p, K_d > 0$ satisfacen*

$$K_p + \frac{1}{\tau} K_d < \frac{2n^2}{(\tau c)^3}. \quad (5.2)$$

El conjunto

$$\mathcal{U} := \{(\varphi, \dot{\varphi}) : \|(\varphi, \dot{\varphi})\| < \sigma \text{ y } v(\varphi, \dot{\varphi}) < \gamma_1 \sigma^2\}, \quad (5.3)$$

donde $\gamma_1 = \min\left\{\frac{w_0^2 n K_p}{2}, 1\right\}$ y $\sigma = \frac{2}{w_0^2 n (K_p + \frac{1}{\tau} K_d)} - w_0 > 0$, es un estimado de la región de atracción.

Demostración. Consideremos la siguiente funcional candidata Lyapunov-Krasovskii :

$$\begin{aligned} v(\varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{w_0^2 K_1}{2} \varphi^2(0) + \dot{\varphi}^2(0) + \frac{w_0^2 K_1}{2} \int_{-1}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^2(\xi) d\xi d\theta \\ &+ \frac{w_0^2 K_2}{2} \int_{-1}^0 \dot{\varphi}^2(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $K_1 = nK_p$ y $K_2 = \frac{n}{\tau} K_d$.

Primeramente, tenemos que corroborar que la funcional $v(\varphi, \dot{\varphi})$ es definida positiva. Es claro que

$$v(0_h, 0_h) = 0.$$

Observemos que

$$v(\varphi, \dot{\varphi}) \geq \frac{w_0^2 K_1}{2} \varphi^2(0) + \dot{\varphi}^2(0).$$

Sea $\gamma_1 = \min\left\{\frac{w_0^2 K_1}{2}, 1\right\}$ entonces

$$v(\varphi, \dot{\varphi}) \geq \gamma_1 \|(\varphi^2(0), \dot{\varphi}^2(0))\|^2.$$

Por otro lado,

$$\dot{\varphi}^2(\xi) \leq \sup_{\xi \in [-1, 0]} \dot{\varphi}^2(\xi), \forall \xi \in [-1, 0],$$

y así

$$\int_{-1}^0 \dot{\varphi}^2(\xi) d\xi \leq \sup_{\xi \in [-1,0]} \dot{\varphi}^2(\xi).$$

Observemos que

$$\int_{-1}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^2(\xi) d\xi d\theta \leq \left(\frac{1}{2}\right) \sup_{\xi \in [-1,0]} \dot{\varphi}^2(\xi),$$

y por lo tanto,

$$v(\varphi, \dot{\varphi}) \leq \frac{w_0^2 K_1}{2} \sup_{\xi \in [-1,0]} \varphi^2(\xi) + \left(1 + \frac{w_0^2 K_1}{4} + \frac{w_0^2 K_2}{2}\right) \sup_{\xi \in [-1,0]} \dot{\varphi}^2(\xi).$$

Sea $\gamma_2 = \min \left\{ \frac{w_0^2 K_1}{2}, 1 + \frac{w_0^2 K_1}{4} + \frac{w_0^2 K_2}{2} \right\}$, entonces

$$v(\varphi, \dot{\varphi}) \leq \gamma_2 \|(\varphi^2, \dot{\varphi}^2)\|_h^2.$$

De todo el análisis anterior se tiene que la funcional $v(\varphi, \dot{\varphi})$ satisface

$$\gamma_1 \|(\varphi(0), \dot{\varphi}(0))\|^2 \leq v(\varphi, \dot{\varphi}) \leq \gamma_2 \|(\varphi, \dot{\varphi})\|_h^2.$$

Calculamos la derivada de la funcional (5.4) a lo largo de las soluciones $(y_t(\varphi), \dot{y}_t(\varphi))$ del sistema (5.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(y_t, \dot{y}_t) &= w_0^2 K_1 \dot{y}(t) (y(t) - y(t-1)) - w_0^2 K_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t-1) \\ &\quad - \dot{y}^2(t) (\dot{y}(t) + 2w_0) (K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1) + p_0) \\ &\quad + \frac{w_0^2}{2} (K_1 + K_2) \dot{y}^2(t) - \frac{w_0^2 K_1}{2} \int_{-1}^0 \dot{y}^2(t+\theta) d\theta - \frac{w_0^2 K_2}{2} \dot{y}^2(t-1). \end{aligned}$$

La derivada anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(y_t, \dot{y}_t) &= w_0^2 (K_1 + K_2) \dot{y}^2(t) - \dot{y}^2(t) (\dot{y}(t) + 2w_0) (K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1) + p_0) \\ &\quad + w_0^2 K_1 \dot{y}(t) (y(t) - y(t-1)) - w_0^2 K_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t-1) \\ &\quad - \frac{w_0^2 K_1}{2} \left(\dot{y}^2(t) + \int_{-1}^0 \dot{y}^2(t+\theta) d\theta \right) - \frac{w_0^2 K_2}{2} (\dot{y}^2(t) + \dot{y}^2(t-1)). \end{aligned}$$

Ahora observemos que

$$w_0^2 K_1 \dot{y}(t) (y(t) - y(t-1)) \leq \frac{w_0^2 K_1}{2} \left(\dot{y}^2(t) + \int_{-1}^0 \dot{y}^2(t+\theta) d\theta \right),$$

y

$$w_0^2 K_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t-1) \leq \frac{w_0^2 K_2}{2} (\dot{y}^2(t) + \dot{y}^2(t-1)).$$

De lo anterior se sigue

$$w_0^2 K_1 \dot{y}(t) (y(t) - y(t-1)) - \left(\dot{y}^2(t) + \int_{-1}^0 \dot{y}^2(t+\theta) d\theta \right) \leq 0,$$

y

$$-\frac{w_0^2 K_2}{2} (\dot{y}^2(t) + \dot{y}^2(t-1)) - w_0^2 K_2 \dot{y}(t) \dot{y}(t-1) \leq 0.$$

Así, podemos definir una cota superior para la derivada a lo largo de las soluciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(y_t, \dot{y}_t) &\leq w_0^2 (K_1 + K_2) \dot{y}^2(t) \\ &\quad - \dot{y}^2(t) (\dot{y}(t) + 2w_0) (K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1) + p_0), \end{aligned} \quad (5.5)$$

Observemos que de la definición $\dot{y}(t) = \dot{q}(t) = w(t) - w_0$ y del hecho que $w(t) \geq 0$ se sigue que $\dot{y}(t) \geq -w_0$ y, por lo tanto

$$\dot{y}(t) + 2w_0 \geq 2w_0 - w_0 = w_0 > 0,$$

Por otro lado, de la condición (5.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{w_0^3} &> K_1 + K_2, \\ \frac{p_0}{(K_1 + K_2)} - w_0 &> 0, \\ \sigma = \varsigma - w_0 &> 0, \end{aligned}$$

donde $\varsigma = \frac{2}{w_0^2(K_1+K_2)} = \frac{p_0}{(K_1+K_2)}$.

Si para algún $t \geq 0$ tenemos que $(y_t, \dot{y}_t) \in \mathcal{U}$ entonces $\|(y_t, \dot{y}_t)\| < \sigma$.

Por otro lado,

$$\|(y(t-1), \dot{y}(t-1))\| \leq \|(y_t, \dot{y}_t)\|,$$

y como $\sigma < \varsigma$ se sigue que

$$\begin{aligned} \|(y(t-1), \dot{y}(t-1))\| &< \frac{p_0}{(K_1 + K_2)}, \\ y^2(t-1) + \dot{y}^2(t-1) &< \frac{p_0}{(K_1 + K_2)}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$y^2(t-1) < \frac{p_0}{(K_1 + K_2)} \quad \text{y} \quad \dot{y}^2(t-1) < \frac{p_0}{(K_1 + K_2)}.$$

De lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} & -\dot{y}^2(t) (\dot{y}(t) + 2w_0) (K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1) + p_0) \leq \\ & -w_0 \dot{y}^2(t) (K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1) + p_0), \end{aligned}$$

y usando en (5.5) tenemos

$$\frac{d}{dt} v(y_t, \dot{y}_t) \leq -\eta(y_t, \dot{y}_t),$$

donde

$$\begin{aligned} \eta(y_t, \dot{y}_t) &= [w_0 \dot{y}^2(t) [K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1) + p_0 - w_0 (K_1 + K_2)]] , \\ &= [w_0 \dot{y}^2(t) [K_1 (y(t-1) - w_0) + K_2 (\dot{y}(t-1) - w_0) + p_0]] . \end{aligned}$$

que se mantiene cuando $(y_t, \dot{y}_t) \in \mathcal{U}$. Dado que

$$\|(y_t, \dot{y}_t)\| < \varsigma \Rightarrow \|(y(t-1), \dot{y}(t-1))\| < \varsigma,$$

entonces

$$|y(t-1)| + |\dot{y}(t-1)| < \frac{p_0}{(K_1 + K_2)} - w_0,$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned} p_0 - K_1 y(t-1) - K_2 \dot{y}(t-1) - w_0 (K_1 + K_2) &> 0, \\ K_1 (y(t-1) - w_0) + K_2 (\dot{y}(t-1) - w_0) + p_0 &> 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\eta(y_t, \dot{y}_t) \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{d}{dt} v(y_t, \dot{y}_t) \leq -\eta(y_t, \dot{y}_t), \leq 0, \tag{5.6}$$

con lo cual se concluye que si $(y_t, \dot{y}_t) \in \mathcal{U}$ entonces $v(y_t, \dot{y}_t)$ es no creciente con respecto de t .

Ahora vamos a mostrar que si una solución $(y_t, \dot{y}_t) \in \mathcal{U}$ entonces (y_t, \dot{y}_t) permanece dentro de \mathcal{U} para todo $t \geq 0$, es decir, \mathcal{U} es un conjunto positivamente invariante con

respecto al sistema (5.1).

Sea una función inicial $(\varphi, \dot{\varphi})$ tal que

$$\|(\varphi, \dot{\varphi})\|_h < \sigma \text{ y } v(\varphi, \dot{\varphi}) < \gamma_1 \sigma^2.$$

Para esta función inicial se tiene que

$$\left. \frac{d}{dt} v(y_t, \dot{y}_t) \right|_{t=0} \leq 0,$$

y por lo tanto, se sigue que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$v(y_t, \dot{y}_t) \leq v(\varphi, \dot{\varphi}), \quad \forall t \in [0, t_0].$$

De lo anterior y de las desigualdades

$$\gamma_1 \|(y(t), \dot{y}(t))\|^2 \leq v(y_t, \dot{y}_t) \text{ y } v(\varphi, \dot{\varphi}) < \gamma_1 \sigma^2,$$

se sigue que

$$\|(y(t), \dot{y}(t))\| < \sigma, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Por otro lado,

$$\|(y(t), \dot{y}(t))\| = \|(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))\| < \sigma, \quad \forall t \in [-1, 0], \quad (5.7)$$

y así

$$\|(y_t, \dot{y}_t)\|_h < \sigma, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Ahora supongamos que (y_t, \dot{y}_t) no pertenece a \mathcal{U} para todo $t \geq 0$, entonces existe $t_1 \geq t_0$ tal que $\|(y(t), \dot{y}(t))\| < \sigma$ para todo $t \in [0, t_1)$ y $\|(y(t), \dot{y}(t))\| = \sigma$. La continuidad de las soluciones y, por tanto de $\frac{d}{dt} v(y_t, \dot{y}_t)$, implica que

$$\left. \frac{d}{dt} v(y_t, \dot{y}_t) \right|_{t=t_1} \leq 0,$$

y las desigualdades

$$\gamma_1 \|(y(t_1), \dot{y}(t_1))\|^2 \leq v(y_{t_1}, \dot{y}_{t_1}) \leq v(\varphi, \dot{\varphi}) < \gamma_1 \sigma^2,$$

se sigue que

$$\|(y(t_1), \dot{y}(t_1))\| < \sigma.$$

La contradicción muestra que (y_t, \dot{y}_t) pertenece a \mathcal{U} para todo $t \geq 0$ y cualquier función inicial $(\varphi, \dot{\varphi}) \in \mathcal{U}$.

Hasta el momento hemos mostrado que:

- i) \mathcal{U} es un conjunto positivamente invariante con respecto a (5.1).
- ii) v es una funcional de Lyapunov en \mathcal{U} .

Para satisfacer la condición de estabilidad asintótica vamos a mostrar que para una función inicial $(\varphi, \dot{\varphi}) \in \mathcal{U}$, la correspondiente solución $y(t)$ converge asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Debido a que $\|(y(t), \dot{y}(t))\| < \sigma$ para todo $t \geq 0$ entonces $y(t)$ y $\dot{y}(t)$ son uniformemente acotadas para $t \geq 0$, lo cual implica que $\eta(y_t, \dot{y}_t)$ también está acotada uniformemente para todo $t \geq 0$.

Por otro lado, de (5.6) se sigue que

$$v(\varphi, \dot{\varphi}) - v(y_t, \dot{y}_t) \geq \int_0^t \eta(y_\xi, \dot{y}_\xi) d\xi \geq 0,$$

Dado que $v(y_t, \dot{y}_t)$ es no creciente y acotado por abajo por cero, entonces converge cuando $t \rightarrow \infty$, y por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \eta(y_\xi, \dot{y}_\xi) d\xi,$$

existe y es finito. Utilizando el lema de Barbalat se puede concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \eta(y_\xi, \dot{y}_\xi) d\xi = 0.$$

La continuidad de la función $\eta(y_t, \dot{y}_t)$ implica que (y_t, \dot{y}_t) converge al conjunto invariante más grande de (5.1) donde $\eta(y_t, \dot{y}_t) = 0$.

Tomando en cuenta que

$$K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1) + p_0 - w_0 (K_1 + K_2) \geq 0,$$

se sigue que $\eta(y_t, \dot{y}_t) = 0$ sí y sólo si $\dot{y}_t = 0$ para todo $t \geq 0$, lo cual implica que $y_t \equiv a$ para todo $t \geq 0$, donde a es una constante.

De la ecuación (5.1)

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= -0.5 \left[(\dot{y}^2(t) + 2w_0 \dot{y}(t)) (K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1) + p_0) \right] \\ &\quad - 0.5w_0^2 (K_1 y(t-1) + K_2 \dot{y}(t-1)), \end{aligned}$$

se sigue que la única solución constante es la trivial. Todo lo anterior implica la estabilidad asintótica, y por lo tanto, \mathcal{U} es un estimado de la región de atracción. ■

5.2. Región de atracción y región de estabilidad

El estimado de la región de atracción \mathcal{U} es complicado de calcular debido que involucra a la funcional $v(y_t, \dot{y}_t)$ dada por (5.4). Usando las cotas inferior y superior para la funcional es posible obtener un estimado más conveniente para la región de atracción, definido como

$$\mathcal{V} := \left\{ (\varphi, \dot{\varphi}) : \|(\varphi, \dot{\varphi})\| < \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \sigma \right\} \subseteq \mathcal{U}. \quad (5.8)$$

Como $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ entonces \mathcal{V} también es un estimado de la región de atracción. El conjunto \mathcal{V} es más fácil de calcular numéricamente comparado con el conjunto \mathcal{U} , dado que la cota no involucra la funcional (5.4) y se puede calcular directamente. Sin embargo, dado que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ es claro que \mathcal{V} es un estimado más conservador.

Observación 4 La funcional (5.4) se obtiene agregando un término integral a la funcional propuesta en [22] y utilizada para el análisis de controladores P . Como consecuencia, si $K_d = 0$, es decir, cuando consideramos el controlador P , entonces la condición de estabilidad (5.2) se reduce a la condición obtenida en el **Teorema 2** de [22]. Por lo tanto, el **Teorema 9** generaliza el **Teorema 2** de [22] para los controladores P -AQM, al caso de los controladores PD -AQM.

Observación 5 La condición de estabilidad no lineal (5.2) define una región en el espacio de las ganancias del controlador (K_p, K_d) la cuál está determinada por la línea recta

$$K_d = \tau \left(\frac{2n^2}{(\tau c)^3} - K_p \right)$$

y sus intersecciones con los ejes coordenados:

$$(K_{p1}, K_{d1}) = \left(0, \frac{2n^2}{\tau^2 c^3} \right) \quad \text{y} \quad (K_{p2}, K_{d2}) = \left(\frac{2n^2}{(\tau c)^3}, 0 \right).$$

Para comparar esta región de estabilidad con la región de estabilidad completa $\Gamma_{(n,\tau,c)}$, observemos las intersecciones de $\partial\Gamma_{(n,\tau,c)}$ con los ejes:

$$(K_p(\bar{\omega}), K_d(\bar{\omega})) \quad \text{y} \quad (K_p(\tilde{\omega}), K_d(\tilde{\omega})),$$

donde $K_p(\bar{\omega}) = 0$, $K_d(\tilde{\omega}) = 0$ mientras que $K_p(\tilde{\omega})$ y $K_d(\bar{\omega})$ están definidos por (4.4) y (4.5).

Por un lado, del Lema 3 tenemos que la función $K_d(\omega)$ es estrictamente creciente para $\omega \in (0, \bar{\omega})$ y $\bar{\omega} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ por lo que

$$K_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n}{\tau c^2} \left(\frac{\pi}{2}\right) < K_d(\bar{\omega}).$$

se satisface. Dado que $\frac{\tau c}{n} \geq 1 > \frac{2}{\pi}$ entonces $\frac{2n^2}{\tau^2 c^3} < \frac{n\pi}{\tau c^2}$, lo que implica que

$$K_{d1} = \frac{2n^2}{\tau^2 c^3} < K_d(\bar{\omega}).$$

Por otro lado, considerando que $K_p(\tilde{\omega}) = \frac{4n^2}{(\tau c)^3} \frac{\tilde{\omega}}{\sin(\tilde{\omega})}$ y como $\frac{\tilde{\omega}}{\sin(\tilde{\omega})} > 1$ se sigue

$$K_p(\tilde{\omega}) > \frac{4n^2}{(\tau c)^3} > \frac{2n^2}{(\tau c)^3} = K_{p2}.$$

Como consecuencia, la región proporcionada por la condición de estabilidad no lineal (5.2) está contenida dentro de la región de estabilidad $\Gamma_{(n,\tau,c)}$ determinada por nuestro análisis de estabilidad lineal. Es importante mencionar que esta propiedad de contención se esperaba dado que el sistema lineal es una aproximación del sistema no lineal.

Capítulo 6

Análisis de estabilidad robusta

En este capítulo se aborda el análisis de estabilidad robusta de los controladores PD-AQM ante incertidumbres en los principales parámetros de la red (n, τ, c) .

6.1. Formulación del problema de la estabilidad robusta

Como ya se mencionó en los preliminares, uno de los principales objetivos de una estrategia AQM es proporcionar un funcionamiento estable y robusto en el QoS. Este funcionamiento se deteriora principalmente debido a retrasos en el proceso de transmisión de información, que se originan a causa de problemas en las tasas de errores, ancho de banda, rendimiento, retraso en la transmisión, disponibilidad, etc. En otras palabras, el funcionamiento del QoS se deteriora debido a incertidumbres o variaciones en los parámetros de red.

Las incertidumbres en los parámetros del sistema pueden ser ocasionadas debido a la naturaleza propia del sistema. En el caso del sistema de red TCP/AQM, estas variaciones son intrínsecas del sistema dado que los parámetros son variantes en el tiempo, como se pueden observar en el modelo (1.1). Por ejemplo, el parámetro n (cantidad de conexiones TCP) varía dependiendo de la cantidad de computadoras conectadas, lo cual es intrínseco del proceso de comunicación dentro de un sistema de red TCP/AQM.

La discusión anterior motiva a realizar un análisis de la estabilidad del controlador AQM ante variaciones en los parámetros del sistema de red TCP. Condiciones de estabilidad robusta se proporcionan en [22] y [21] para el caso P y PI, respectivamente. A continuación, se presenta el análisis de estabilidad robusta para el caso PD-AQM.

Consideremos el sistema no lineal (3.16) para los parámetros nominales (n_0, τ_0, c_0) :

$$\ddot{\tilde{q}}_0(t) = 1 - 0.5 \left(\dot{\tilde{q}}_0(t) + w_0 \right)^2 \left(K_p (n_0 \tilde{q}_0(t-1) - q_d) + \frac{K_d n_0}{\tau_0} \dot{\tilde{q}}_0(t-1) + p_0 \right), \quad (6.1)$$

donde $w_0 = \frac{\tau_0 c_0}{n_0}$ y $p_0 = \frac{2}{w_0^2}$. El único punto de equilibrio de (6.1) está definido como

$$q_0^* = \frac{q_d}{n_0}.$$

Supongamos que las ganancias K_p y K_d del controlador son asignadas de tal forma que el equilibrio q_0^* es localmente asintóticamente estable.

Ahora supongamos que en cierto instante, los valores de los parámetros del sistema (6.1) cambian y ahora son (n_1, τ_1, c_1) , es decir

$$\ddot{\tilde{q}}_1(t) = 1 - 0.5 \left(\dot{\tilde{q}}_1(t) + w_1 \right)^2 \left(K_p (n_1 \tilde{q}_1(t-1) - q_d) + \frac{K_d n_1}{\tau_1} \dot{\tilde{q}}_1(t-1) + p_0 \right), \quad (6.2)$$

donde $w_1 = \frac{\tau_1 c_1}{n_1}$. Calculando el equilibrio del sistema (6.2) obtenemos

$$0 = 1 - 0.5 (0 + w_1)^2 \left(K_p (n_1 q_1^* - q_d) + \frac{K_d n_1}{\tau_1} 0 + p_0 \right),$$

lo que implica que

$$q_1^* = \frac{1}{n_1 K_p} \left(\frac{2}{w_1^2} - \frac{2}{w_0^2} \right) + \frac{1}{n_1} q_d.$$

Observemos que con respecto al sistema original (3.8), en la variable $q(t)$, el equilibrio correspondiente es $q_1 = n_1 q_1^*$, por lo tanto,

$$q_1 = \frac{1}{K_p} \left(\frac{2}{w_1^2} - \frac{2}{w_0^2} \right) + q_d. \quad (6.3)$$

La expresión (6.3) muestra que un controlador PD-AQM bajo incertidumbre en los parámetros de red no puede regular al valor deseado q_d para el que fue diseñado con parámetros nominales. Lo anterior se sigue del hecho que el sistema en lazo cerrado ahora tiene un nuevo punto de equilibrio, que es único y diferente al equilibrio bajo parámetros nominales. Dentro de la literatura de control clásico, a esta característica de los controladores PD sobre la regulación ante incertidumbres en los parámetros se le conoce como *error en estado estable*. Sin embargo, hasta donde sabemos, la expresión (6.3) no ha sido reportada en la literatura de los controladores PD-AQM.

Ante este escenario de regulación, resulta deseable garantizar al menos que el nuevo

equilibrio q_1 sea localmente asintóticamente estable para las ganancias K_p y K_d diseñadas en el caso nominal y para un valor deseado q_d . Lo anterior y el hecho que los parámetros en las redes TCP/AQM varían constantemente nos obligan a plantear el siguiente problema de robustez paramétrica.

Supongamos que los parámetros de red son (n, τ, c) constantes y satisfacen las siguientes condiciones tipo intervalo:

$$n \in [n_1, n_2], \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2] \quad \text{y} \quad c \in [c_1, c_2]. \quad (6.4)$$

Dado un valor deseado q_d , se requiere determinar algunos parámetros de red, digamos n_r, τ_r y c_r , satisfaciendo la condición (6.4) que permitan seleccionar las ganancias K_p y K_d de tal forma que se garantice la estabilidad asintótica local de la familia completa de puntos de equilibrio determinados para todos los valores de parámetros (n, τ, c) que satisfacen (6.4). La familia completa de puntos de equilibrio se determina con la expresión

$$q_1(n, \tau, c) = \frac{1}{K_p} \left(\frac{2}{w^2} - \frac{2}{w_r^2} \right) + q_d, \quad (6.5)$$

donde $w = \frac{\tau c}{n}$ y $w_r = \frac{\tau_r c_r}{n_r}$.

6.2. Condiciones no lineales de estabilidad robusta

Para resolver este problema de robustez considere lo siguiente. Primeramente, traslademos los puntos de equilibrio q_0^* y q_1^* de los sistemas no lineales (6.1) y (6.2) al origen. Sean $y_0(t) = \tilde{q}_0(t) - q_0^*$ y $y_1(t) = \tilde{q}_1(t) - q_1^*$. Entonces calculamos para $y_0(t)$,

$$y_0(t) = \tilde{q}_0(t) - q_0^* \Rightarrow \tilde{q}_0(t) = y_0(t) + q_0^*,$$

derivando

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \tilde{q}_0(t) - q_0^*, \\ \dot{y}_0(t) &= \dot{\tilde{q}}_0(t), \\ \ddot{y}_0(t) &= 1 - 0.5(\dot{y}_0(t) + w_0)^2 \left(K_p n y_0(t-1) + \frac{K_d n_0}{\tau_0} \dot{y}_0(t-1) + p_0 \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

Calculamos para

$$y_1(t), \quad y_1(t) = \tilde{q}_1(t) - q_1^* \Rightarrow \tilde{q}_1(t) = y_1(t) + q_1^*,$$

y derivando

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \tilde{q}_1(t) - q_1^*, \\
\dot{y}_1(t) &= \dot{\tilde{q}}_1(t), \\
\ddot{y}_1(t) &= \ddot{\tilde{q}}_1(t) = 1 - 0.5(\dot{y}_1(t) + w_1)^2 \left(K_p n_1 y_1(t) + \frac{2}{w_1^2} - p_0 + \frac{K_d n_1}{\tau_1} \dot{y}_1(t) + p_0 \right), \\
\ddot{y}_1(t) &= 1 - 0.5(\dot{y}_1(t) + w_1)^2 \left(n_1 K_p y_1(t-1) + \frac{n_1}{\tau_1} K_d \dot{y}_1(t-1) + p_1 \right), \quad (6.7)
\end{aligned}$$

Observemos que ahora ambos sistemas (6.6) y (6.7) tienen solución trivial. Por otro lado, estos sistemas tienen exactamente la misma forma que el sistema no lineal (3.18), es decir, si sustituimos $(n, \tau, c) = (n_0, \tau_0, c_0)$ en el caso de (6.6) y $(n, \tau, c) = (n_1, \tau_1, c_1)$ para el caso (6.7). Por lo tanto, aplicando las condiciones no lineales propuestas en el **Teorema 9** se puede mostrar el siguiente resultado de estabilidad robusta.

Proposición 4 *La familia completa de puntos de equilibrio definida por (6.5), donde $(n_r, \tau_r, c_r) = (n_1, \tau_2, c_2)$ y (n, τ, c) son cualesquiera parámetros que satisfacen (6.4), es localmente asintóticamente estable si $K_p, K_d > 0$ satisfacen*

$$K_p + \frac{1}{\tau_1} K_d < \frac{2n_r^2}{(\tau_r c_r)^3}. \quad (6.8)$$

Los conjuntos

$$\mathcal{U}_r = \{(\varphi, \dot{\varphi}) : \|(\varphi, \dot{\varphi})\| < \sigma_r \text{ y } v(\varphi, \dot{\varphi}) < \gamma_{1r} \sigma_r^2\}, \quad (6.9)$$

y

$$\mathcal{V}_r = \left\{ (\varphi, \dot{\varphi}) : \|(\varphi, \dot{\varphi})\| < \sqrt{\frac{\gamma_{1r}}{\gamma_{2r}}} \sigma_r \right\} \subseteq \mathcal{U}_r, \quad (6.10)$$

donde $\gamma_{1r} = \min \left\{ \frac{(\tau_1 c_1)^2 K_p}{2n_2}, 1 \right\}$, $\gamma_{2r} = \min \left\{ \frac{w_r^2 n_r K_p}{2}, 1 + \frac{w_r^2 n_r K_p}{4} + \frac{w_r c_2 K_d}{2} \right\}$ y $\sigma_r = \frac{2}{w_r^2 n_r (K_p + \frac{1}{\tau_1} K_d)} - w_r > 0$, son estimados de la región de atracción robusta.

Demostración. Dado que para todo (n, τ, c) satisfaciendo (6.4) tenemos que

$$\frac{n_1^3}{(\tau_2 c_2)^3} \leq \frac{n^3}{(\tau c)^3} \text{ y } \frac{1}{\tau} K_d \leq \frac{1}{\tau_1} K_d,$$

entonces seleccionando $(n_r, \tau_r, c_r) = (n_1, \tau_2, c_2)$ el resultado se sigue directamente del **Teorema 9**. El conjunto \mathcal{U}_r definido como (6.9) (\mathcal{V}_r definido como (6.10)) es el conjunto que contiene completamente a la familia de conjuntos \mathcal{U} definidos como (5.3) (\mathcal{V} definido por (5.8)), la cual está generada por todos los parámetros (n, τ, c) que satisfacen (6.4).

Las expresiones (6.9) y (6.10) se obtienen dado que para toda (n, τ, c) satisfaciendo (6.4), se cumple lo siguiente:

a) Para $w_r = \frac{\tau_2 c_2}{n_1}$ y $w_0 = \frac{\tau c}{n}$

$$\frac{\tau c}{n} \leq \frac{\tau_2 c_2}{n_1},$$

b) Para $\sigma_r = \frac{2n_1}{(\tau_2 c_2)^2 (K_p + \frac{1}{\tau_1} K_d)} - w_r$ y $\sigma = \frac{2n}{(\tau c)^2 (K_p + \frac{1}{\tau} K_d)} - w_0$

$$\frac{2n_1}{(\tau_2 c_2)^2 (K_p + \frac{1}{\tau_1} K_d)} - w_r \leq \frac{2n}{(\tau c)^2 (K_p + \frac{1}{\tau} K_d)} - w_0,$$

c) Para $\gamma_{1r} = \frac{(\tau_1 c_1)^2 K_p}{2n_2}$ y $\gamma_1 = \frac{(\tau c)^2 K_p}{2n}$

$$\frac{(\tau_1 c_1)^2 K_p}{2n_2} \leq \frac{(\tau c)^2 K_p}{2n},$$

d) Para γ_2 y γ_{2r} :

Si $\gamma_2 = \frac{(\tau c)^2 K_p}{2n}$ y $\gamma_{2r} = \frac{(\tau_2 c_2)^2 K_p}{2n_1}$

$$\frac{(\tau c)^2 K_p}{2n} \leq \frac{(\tau_2 c_2)^2 K_p}{2n_1},$$

Si $\gamma_2 = 1 + \frac{(\tau c)^2 K_p}{4n} + \frac{\tau c^2 K_d}{2n}$ y $\gamma_{2r} = 1 + \frac{(\tau_2 c_2)^2 K_p}{4n_1} + \frac{\tau_2^2 c_2^3 K_d}{2n_1}$

$$\gamma_2 = 1 + \frac{(\tau c)^2 K_p}{4n} + \frac{\tau c^2 K_d}{2n} \leq \gamma_{2r} = 1 + \frac{(\tau_2 c_2)^2 K_p}{4n_1} + \frac{\tau_2^2 c_2^3 K_d}{2n_1}.$$

■

6.3. Condiciones lineales de estabilidad robusta

Por otro lado, linealizando los sistemas (6.6) y (6.7) obtenemos

$$\ddot{y}_0(t) = -\frac{2n_0}{\tau_0 c_0} \dot{y}_0(t) - \left(\frac{(\tau_0 c_0)^2}{2n_0} \right) K_p y_0(t-1) - \left(\frac{\tau_0 c_0^2}{2n_0} \right) K_p \dot{y}_0(t-1),$$

y

$$\ddot{y}_1(t) = -\frac{2n_1}{\tau_1 c_1} \dot{y}_1(t) - \left(\frac{(\tau_1 c_1)^2}{2n_1} \right) K_p y_1(t-1) - \left(\frac{\tau_1 c_1^2}{2n_1} \right) K_p \dot{y}_1(t-1),$$

respectivamente. Observemos que los sistemas anteriores tienen la misma estructura que el sistema lineal (4.1) con parámetros $(n, \tau, c) = (n_0, \tau_0, c_0)$ y $(n, \tau, c) = (n_1, \tau_1, c_1)$. Por lo tanto, se sigue que aplicando las condiciones de estabilidad lineal definidas en la **Proposición 2** y considerando la propiedad de contención de la **Proposición 3** podemos mostrar el siguiente resultado de estabilidad asintótica.

Proposición 5 *La familia completa de puntos de equilibrio definida por (6.5), donde $(n_r, \tau_r, c_r) = (n_1, \tau_2, c_2)$ y (n, τ, c) son cualesquiera parámetros satisfaciendo (6.4), es localmente asintóticamente estable para $(K_p, K_d) \in \Gamma_{(n_r, \tau_r, c_r)}$.*

Demostración. De la proposición 3 tenemos que $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)} \subseteq \Gamma_{(n, \tau, c)}$ para toda (n, τ, c) satisfaciendo (6.4). Entonces, el resultado se sigue directamente de la **Proposición 2**.

■

Observación 6 *Dado que la expresión (6.3) depende sólo de la ganancia proporcional K_p y no de la ganancia derivativa K_d , entonces se sigue que también es válida para el caso de controladores P-AQM, es decir, un controlador P-AQM también genera un nuevo punto de equilibrio bajo incertidumbres en los parámetros de red. Los resultados de estabilidad robusta definidos en las proposiciones (4) y (5) también son válidos para el caso P-AQM.*

La importancia de todo el análisis de estabilidad robusta anterior radica en que ahora tenemos 2 regiones de estabilidad robusta de las cuales podemos obtener controladores PD-AQM estabilizantes y que son capaces de estabilizar la familia completa de puntos de equilibrio generados cuando varían los parámetros del sistema. Por un lado, una región definida en la proposición 5 que se obtiene usando las condiciones obtenidas en el análisis de estabilidad lineal, y por otro lado, una región proporcionada en 4 que se deriva de los resultados del análisis de estabilidad no lineal.

Es importante resaltar que aunque este trabajo de tesis proporciona las condiciones para sintonizar controladores PD-AQM estables y robustos, no tiene contemplado definir alguna metodología para sintonizar controladores que cumplan ciertos requerimientos de control, por ejemplo, menor sobretiro, tiempo de estabilización definido, entre otros. Lo anterior es relevante dado que el desempeño de los controladores PD-AQM seleccionados dentro de la región de estabilidad definida en 4 es diferente al desempeño

de los controladores fuera de esta región. Esta diferencia en el rendimiento se observa en el siguiente capítulo.

Capítulo 7

Ejemplo numérico

En este capítulo presentamos una simulación numérica para ilustrar los resultados principales de esta investigación. La idea principal de este ejemplo numérico es utilizar los resultados obtenidos del análisis de estabilidad robusta, tanto lineal como no lineal, para sintonizar controladores PD estabilizantes y mostrar que soportan variaciones tipo intervalo en sus parámetros. Este ejemplo se realiza a través simulaciones en Matlab/Simulink usando el modelo no lineal (3.18).

Consideremos el siguiente escenario para una red TCP/AQM:

- Equilibrio deseado $q_d = 175$ paquetes

- Parámetros de red (n, τ, c) constantes y satisfaciendo la condición tipo intervalo (6.4), con
 - $n_1 = 60$ y $n_2 = 100$ flujos TCP,
 - $\tau_1 = 0.200$ y $\tau_2 = 0.246$ segundos,
 - $c_1 = 3500$ y $c_2 = 3750$ paquetes/segundo.

Es importante mencionar que en la aplicación real de redes TCP/AQM el personal de redes cuenta con herramientas computacionales para acceder a la información sobre los principales parámetros de la red. Estas herramientas permiten, por ejemplo, calcular aproximadamente el viaje de tiempo redondo (RTT) τ a través del envío de paquetes de prueba, cuya única función es llegar a la computadora o servidor de destino y regresar a la computadora emisora para medir el tiempo de ida y vuelta.

Para la sintonización de los controladores considere lo siguiente. De nuestro análisis de estabilidad robusta lineal tenemos que si el controlador (K_p, K_d) pertenece a $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$ entonces la familia completa de puntos de equilibrio será asintóticamente estable. Así, sean $(n_r, \tau_r, c_r) = (n_1, \tau_2, c_2)$, usando la **Proposición 5** obtenemos la región $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$, que se observa en la Fig. 7.1.

Por otro lado, usando la condición de estabilidad robusta no lineal dada por la **Proposición 4** obtenemos la condición de estabilidad

$$K_p + \frac{1}{\tau_1} K_d < \frac{2n_r^2}{(\tau_r c_r)^3} = K_p + 5K_d < \frac{2n_r^2}{(\tau_r c_r)^3} = 9.1714 \times 10^{-6},$$

con la cual podemos graficar la región generada por la línea recta

$$K_d = \frac{1}{5} (9.1714 \times 10^{-6} - K_p), \quad (7.1)$$

y sus intersecciones con los ejes coordenados, véase la Fig. 7.1.

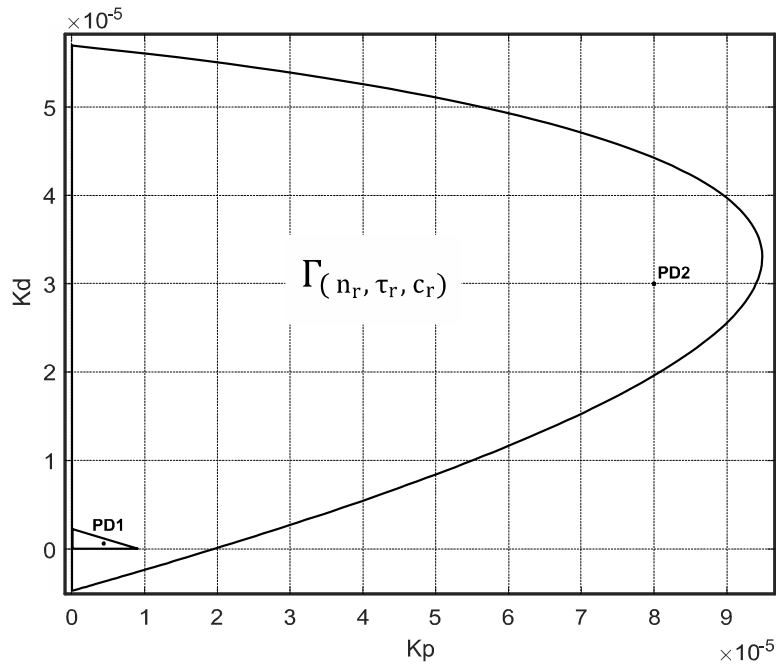


Figura 7.1: Regiones de estabilidad lineal $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$ y no lineal determinadas por (7.1).

Como se puede observar, la región de estabilidad determinada por la condición no lineal (4) está contenida dentro de la región de estabilidad generada de las condiciones de estabilidad lineal, como se muestra en la Observación 5. Con las regiones definidas, el siguiente paso es seleccionar las ganancias de dos controladores estables:

$$\begin{aligned} PD1 &= (K_{p1}, K_{d1}) = (5 \times 10^{-6}, 0.5 \times 10^{-6}), \\ PD2 &= (K_{p2}, K_{d2}) = (8 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-5}), \end{aligned}$$

donde $PD1$ está contenido dentro de la región derivada de la condición no lineal y $PD2$ dentro de la región $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$.

Para mostrar las propiedades de estabilidad robusta de los controladores $PD1$ y $PD2$, considere el siguiente escenario de simulación.

Para:

- $t \in [0, 30]$ los parámetros de red son $(n, \tau, c) = (60, 0.246, 3750)$.
- $t \in (30, 60]$ los parámetros de red son $(n, \tau, c) = (100, 0.200, 3500)$.
- $t \in (60, 90]$ los parámetros de red son $(n, \tau, c) = (80, 0.220, 3650)$.

De las condiciones anteriores y la expresión (6.5) se sigue que para cada controlador PD ($PD1$ y $PD2$) tenemos tres puntos de equilibrios que dependen directamente de la ganancia proporcional K_p , véase la Tabla 7.1. Como se observa, los puntos de equilibrio correspondientes a $PD2$ son más pequeños que los correspondientes a $PD1$ debido a que $K_{p2} > K_{p1}$.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones. Primeramente, se presentan las respuestas para el controlador $PD1$. En la figura 7.2 observamos el comportamiento asintótico de los 3 puntos de equilibrio generados debido a la variación de los parámetros, comportamiento que ya se esperaba gracias a los resultados teóricos presentados en esta tesis. En las figuras 7.3 y 7.3 se observa el comportamiento de ventana de transmisión w y la función $p(t)$ del controlador $PD1$.

(n, τ, c)	$PD1$	$PD2$
$(60, 0.246, 3750)$	175	175
$(100, 0.200, 3500)$	6646.2	579.4
$(80, 0.220, 3650)$	2453.1	317.4

Tabla 7.1: Puntos de equilibrio para PD1 y PD2

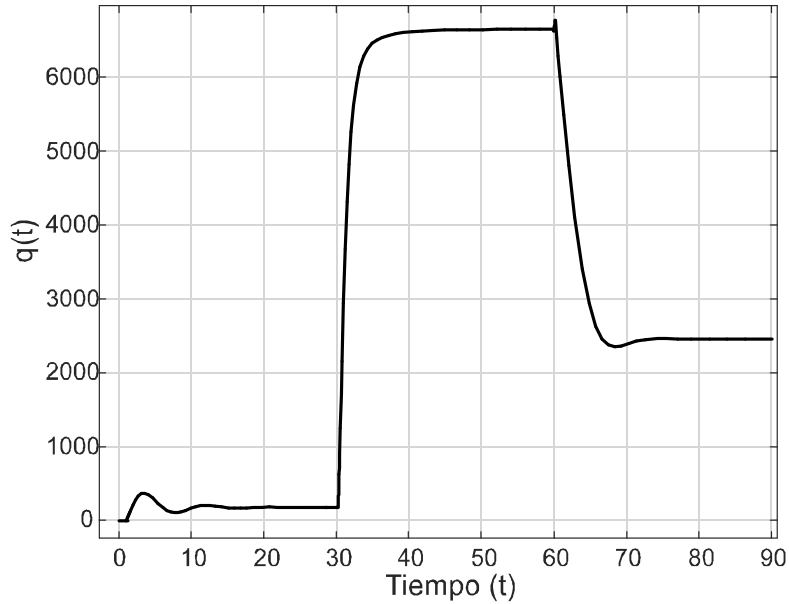


Figura 7.2: Respuesta $q(t)$ del controlador $PD1$.

Ahora se presentan las respuestas para el controlador $PD2$. En la figura 7.5 observamos el comportamiento asintótico de los 3 puntos de equilibrio, y en las figuras 7.6 y 7.7 se observa el comportamiento de ventana de transmisión w y la función $p(t)$ del controlador $PD2$, respectivamente.

De los resultados de las simulaciones para ambos controladores se comprueba la estabilidad asintótica de los correspondientes tres puntos de equilibrio para $q(t)$ en cada una de los escenarios, lo cual esperábamos gracias a los resultados teóricos.

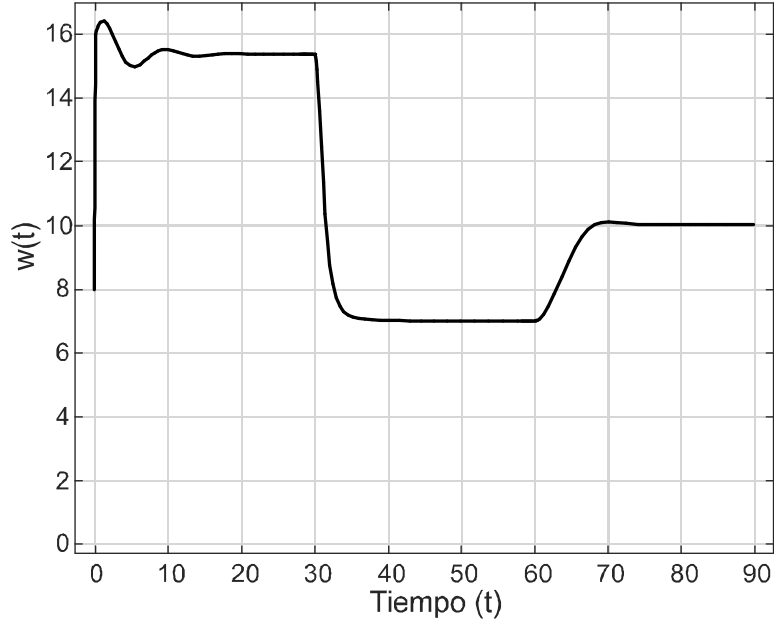


Figura 7.3: Respuesta $w(t)$ del controlador $PD1$.

Finalmente, gracias a la condición (47) se pueden considerar las no linealidades del sistema y podemos calcular los estimados de la región de atracción \mathcal{U}_r y \mathcal{V}_r asociados al controlador $PD1$, donde

$$\mathcal{U}_r = \{(\varphi, \dot{\varphi}) : \|(\varphi, \dot{\varphi})\| < 18.80127 \text{ y } v(\varphi, \dot{\varphi}) < 4.3302\},$$

y

$$\mathcal{V}_r = \{(\varphi, \dot{\varphi}) : \|(\varphi, \dot{\varphi})\| < 1.97413\} \subseteq \mathcal{U}_r.$$

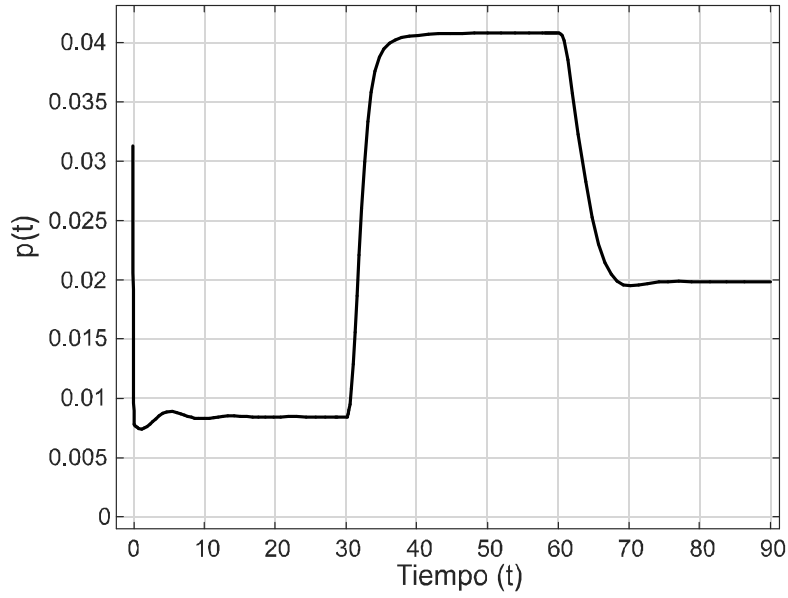


Figura 7.4: Función $p(t)$ para el controlador $PD1$.

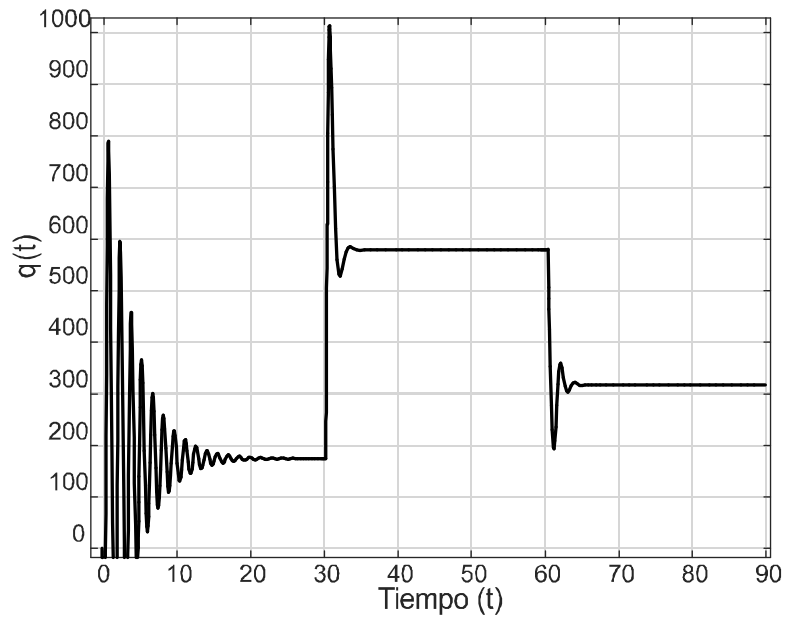


Figura 7.5: Respuesta $q(t)$ del controlador $PD2$.

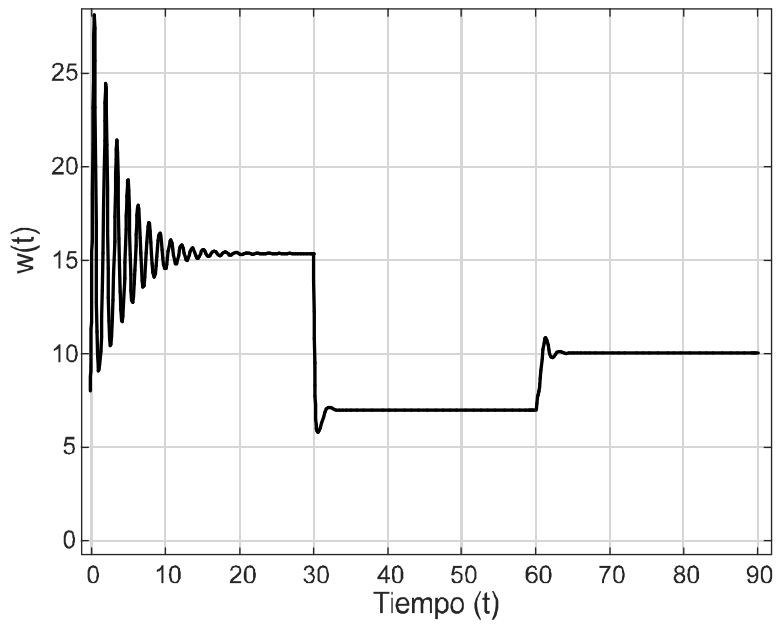


Figura 7.6: Respuesta $w(t)$ del controlador $PD2$.

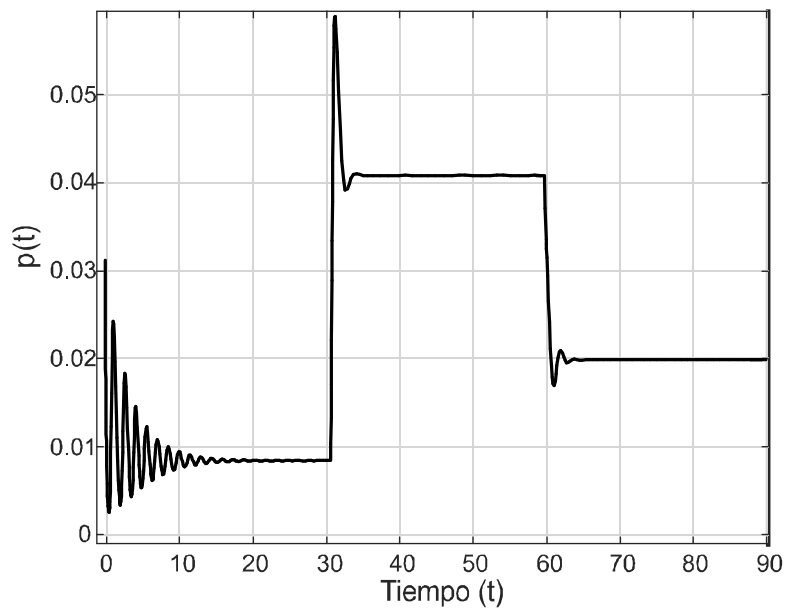


Figura 7.7: Función $p(t)$ para el controlador $PD2$.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo a futuro

Conclusiones

- Se muestra que el sistema no lineal en lazo cerrado con el controlador (3.2) presenta un problema que implica la dependencia de K_p en el punto de equilibrio. Para solucionar este problema se propone el controlador tipo PD (3.5).
- Se mostró que el sistema TCP/AQM modelado a través del sistema (3.8) en lazo cerrado con un controlador AQM tipo PD (3.5), es un sistema con retardos de tipo neutro y se presentó una justificación matemática para transformarlo en un sistema de tipo retardado equivalente.
- Se presentó el conjunto completo de controladores PD-AQM que estabilizan el sistema lineal (4.1). Este conjunto se obtiene de las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial definidas en la **Proposición 2**. Con la obtención de este conjunto ahora se puede estudiar el comportamiento de cada PD-AQM estabilizante con el objetivo de diseñar un controlador para satisfacer algún desempeño específico, como por ejemplo, mayor velocidad de convergencia, menos sobretiro, etc.
- Mediante el uso del enfoque Lyapunov-Krasovskii se obtuvieron condiciones locales de estabilidad asintótica para los equilibrios del modelo no lineal (3.8). Estas condiciones nos permiten considerar las no linealidades del modelo (3.8) en el diseño de controladores. Adicionalmente, el resultado de estabilidad no lineal dado en la **Proposición 9** nos permite calcular numéricamente un estimado de la región de atracción del sistema alrededor del equilibrio.

- Se mostró que si existen variaciones en los parámetros de red entonces existe una familia de puntos de equilibrio para el sistema no lineal. Adicionalmente, se presentó una expresión analítica en función de los parámetros que permite calcular numéricamente la familia completa de puntos de equilibrio.
- Se presentaron condiciones de estabilidad robusta que permiten estabilizar la familia completa de puntos de equilibrio que se origina cuando los parámetros del sistema (3.8) varían dentro de intervalos establecidos. Estas condiciones permiten sintonizar controladores PD-AQM que aunque no pueden regular a un objetivo deseado cuando existen variaciones en los parámetros, si soportan estas variaciones sin perder la propiedad de estabilidad en el sistema.

Trabajo a futuro

- Verificar los resultados obtenidos a través de simulaciones NS. Esto permitirá evaluar el desempeño de la estrategia PD-AQM (3.5) en escenarios más realistas.
- Extender los resultados, tanto lineal como no lineal, para el caso de los sistemas más generales. Recordemos que el modelo utilizado en esta tesis es un modelo simplificado del modelo más general.

Capítulo 9

Publicaciones

Revistas indexadas

- Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar, D. (2020). “Stability analysis of PD AQM control for delay models od TCP networks”. *International Journal of Control*, 1-11. DOI: 10.1080/00207179.2020.1849804.

Congresos

- Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar, D. (2016). “*Complete Stability Region of PD Controllers for TCP/AQM Networks*”. In 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC). 4382–4387. IEEE. DOI: 10.1109/CDC.2016.7798934.
- Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar D. (2016). “*Sobre la estabilidad de controladores PD en redes TCP/AQM*”. Congreso Nacional de Control Automático AMCA, Santiago de Querétaro, Querétaro.
- Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar D. (2018). “*Diseño de controladores PD robustos y no frágiles en redes TCP/AQM*”. Congreso Nacional de Control Automático AMCA, San Luis Potosí, San Luis Potosí.

Capítulo 10

Bibliografía

- [1] Adams, R. (2012). “*Active queue management: A survey*”. IEEE communications surveys & tutorials, 15(3), 1425–1476.
- [2] Azadegan, M., Beheshti, M.T.H. y Tavassoli, B. (2015). “*Design of Proportional-Derivative-Type State Feedback Controllers for Congestion Control of Transmission Control Protocol Networks*”. International Journal of Systems Science, 46(10), 1774–1779.
- [3] Bellman, R. y Cooke, K.L. (1963). “*Differential-difference equations*”. Academic Press.
- [4] Bhargava, N., Bhargava, R., Mathuria, M., Gupta S., y Jyotiyana, K.K. (2013). “*Analysis of different congestion avoidance algorithms*”. International Journal of Computer Networks and Wireless Communications, 3(1), 32.
- [5] Bhattacharyya, S., Chapellat, H. y Keel, L. (1995). “*Robust Control: The Parametric Approach*”. Prentice-Hall.
- [6] Bisoy, S.K. y Pattnaik, P.K. (2017). “*Design of Feedback Controller for TCP/AQM Networks*”. Engineering Science and Technology, an International Journal, 20(1), 116–132.
- [7] Comer, D.E. y Stevens, D.L. (1995). “*Internetworking with TCP/IP: Principles, Protocols, and Architecture*”. Prentice-Hall.
- [8] Floyd, S. y Jacobson, V. (1993). “*Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance*”. IEEE/ACM Transactions on networking, 1(4), 397–413.

- [9] Gu, K., Chen, J. y Kharitonov, V.L. (2003). *“Stability of Time-Delay Systems”*. Springer Science & Business Media.
- [10] Hale, J.K. (1980). *“Ordinary Differential Equations”*. Krieger Publishing Company.
- [11] Hollot, C.V. y Chait, Y. (2001). *“Nonlinear Stability Analysis for a Class of TCP/AQM Networks”*. En Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001, volumen.3, 2309–2314. IEEE.
- [12] Hollot, C.V., Misra, V., Towsley, D. y Gong, W.B. (2002). *“Analysis and Design of Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows”*. IEEE Trans. Autom. Control, 47(6), 945–959.
- [13] Hollot, C.V., Misra, V., Towsley, D. y Gong, W.B. (2001). *“A Control Theoretic Analysis of RED”*. En Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No. 01CH37213), volumen.3, 1510–1519. IEEE.
- [14] Jacobson, V. (1988). *“Congestion avoidance and control”*. ACM SIGCOMM computer communication review, 18(4), 314–329.
- [15] Keshav, S. y Kesahv, S. (1997). *“An Engineering Approach to Computer Networking: ATM Networks, the Internet, and the Telephone Network”*, volumen 116. Reading: Addison-Wesley..
- [16] Kharitonov, V. (2012). *“Time-delay systems: Lyapunov Functionals and Matrices”*. Springer Science & Business Media.
- [17] Kim, K.B. (2006). *“Design of Feedback Controls Supporting TCP Based on the State-Space Approach”*. IEEE Transactions on Automatic Control, 51(7), 1086–1099.
- [18] Kolmanovskii, V. y Myshkis, A. (1999). *“Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations”*. Springer Science & Business Media..
- [19] Li, Y., Ko, K.T., Chen, G., Sun, J. y Chan, S. (2004). *“Designing a Stable and Effective PD-control AQM”*. In ICARCV 2004 8th Control, Automation, Robotics and Vision Conference, 2004., volumen.1, 579–584. IEEE.
- [20] Low, S.H., Paganini, F. y Doyle, J.C. (2002). *“Internet Congestion Control”*. IEEE control systems magazine, 22(1), 28–43.

- [21] Melchor-Aguilar, D. y Niculescu, S.I. (2009). “*Computing Non-fragile PI Controllers for Delay Models of TCP/AQM Networks*”. *International Journal of Control*, 82(12), 2249–2259.
- [22] Michiels, W., Melchor-Aguilar, D. y Niculescu, S.I. (2006). “*Stability Analysis of Some Classes of TCP/AQM Networks*”. *International Journal of Control*, 79(9), 1136–1144.
- [23] Misra, V., Gong, W.B. y Towsley, D. (1999). “*Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-window Size Behavior*”. In *Proceedings of PERFORMANCE*, volumen 99.
- [24] Misra, V., Gong, W.B., y Towsley, D. (2000). “*Fluid-based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED*”. In *Proceedings of the Conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication*, 151–160.
- [25] Neimark, J. (1949). “*D-subdivisions and Spaces of Quasi-polynomials*”. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 13, 349–380.
- [26] Niculescu, S.I. (2001). “*Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*”, volumen.269. Springer Science & Business Media.
- [27] Peterson, L.L. y Davie, B.S. (2007). “*Computer Networks: A Systems Approach*”. Elsevier.
- [28] Puerto-Piña, A. (2015). “*Condiciones de Estabilidad de Controladores PD para Modelos con Retardo de Redes TCP/AQM*”. Tesis de maestría, División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT.
- [29] Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar, D. (2016). “*Complete Stability Region of PD Controllers for TCP/AQM Networks*”. In *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*, 4382–4387. IEEE.
- [30] Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar D. (2016). “*Sobre la estabilidad de controladores PD en redes TCP/AQM*”. En *Congreso Nacional de Control Automático AMCA*, Santiago de Querétaro, Querétaro.
- [31] Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar D. (2018). “*Diseño de controladores PD robustos y no frágiles en redes TCP/AQM*”. En *Congreso Nacional de Control Automático AMCA*, San Luis Potosí, San Luis Potosí.

- [32] Richard, J.P. (2003). “*Time-delay systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems*”. *Automatica*, 39(10), 1667–1694.
- [33] Shakkottai, S. y Srikant, R. (2007). “*Network Optimization and Control*”. *Foundations and Trends in Networking*, 2(3), 271–379.
- [34] Silva, G.J., Datta, A. y Bhattacharyya, S. (2005). “*PID Controllers for Time-delay Systems*”. Birkhäuser.
- [35] Srikant, R. (2004). “*The Mathematics of Internet Congestion Control*”. Springer Science & Business Media.
- [36] Sun, J., Chen, G., Ko, K., Chan, S., y Zukerman, M. (2003a). “*PD-controller: A New Active Queue Management Scheme*”. En *GLOBECOM’03 IEEE Global Telecommunications Conference, 2003*, volumen.6, 3103–3107. IEEE.
- [37] Sun, J., Ko, K.T., Chen, G., y Chan, Sammy y Zukerman, M. (2003b). “*PD-RED: to Improve the Performance of RED*”. *IEEE Communications letters*, 7(8), 406–408.
- [38] Tanenbaum, A.S. et.al. (1996). “*Computer Networks*”. Prentice-Hall.
- [39] Vyhlídal, T., Michiels, W., Zítek, P. y McGahan, P. (2009). “*Stability Impact of Small Delays in Proportional-Derivative State Feedback*”. *Control Engineering Practice*, 17(3), 382–393.
- [40] Wang, P., Zhu, D. y Lu, X. (2017). “*Active Queue Management Algorithm Based on Data-Driven Predictive Control*”. *Telecommunication systems*, 64(1), 103–111.
- [41] Xiong, N., Vasilakos, A.V., Yang, L.T., Wang, C.X., Kannan, R., Chang, C.C., y Pan, Y. (2010). “*A Novel Self-tuning Feedback Controller for Active Queue Management Supporting TCP Flows*”. *Information Sciences*, 180(11), 2249–2263.
- [42] Yanfie, F., Fengyuan, R. y Chuang, L. (2003). “*Design a PID Controller for Active Queue Management*”. En *Proceedings of the Eighth IEEE Symposium on Computers and Communications. ISCC 2003* (pp. 985-990). IEEE.
- [43] Zheng, F. y Nelson, J. (2009). “*An H^∞ Approach to the Controller Design of AQM Routers Supporting TCP Flows*”. *Automatica*, 45(3), 757-763.
- [44] Üstebay, D. y Özbay, H. (2007). “*Switching Resilient PI Controllers for Active Queue Management of TCP Flows*”. En *IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, 2007*, 574–578. IEEE.