



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Trayectorias relativistas, ecuaciones de Frenet-Serret  
y aplicaciones a nanomateriales**

Tesis que presenta

**Iván de Jesús Pérez Román**

Para obtener el grado de

**Doctor en Nanociencias y Materiales**

**Director de la Tesis:**

Dr. Haret-Codratian Rosu

San Luis Potosí, S.L.P., Marzo de 2023





**IPICYT**

## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Trayectorias relativistas, ecuaciones de Frenet-Serret y aplicaciones a nanomateriales**” presentada para obtener el Grado de Doctor(a) en Nanociencias y Materiales fue elaborada por **Iván de Jesús Pérez Román** y aprobada el **16 de marzo de 2023** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Materiales Avanzados del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dr. Haret-Codratian Rosu**  
Director de la tesis

**Dr. Eric Campos Cantón**  
Miembro del Comité Tutorial

**Dr. José Salomé Murguía Ibarra**  
Miembro del Comité Tutorial

**Dr. Vicente Rodríguez González**  
Miembro del Comité Tutorial







## Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de la División de Materiales Avanzados del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Haret-Codratian Rosu.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología No. 712016 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.







*Dedicado a mi familia, a mis amigos  
y a todos los que me han apoyado en mi camino.*



# Agradecimientos

Agradezco al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo en forma de beca con CVU 712016 que se me proporcionó, y también agradezco al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por su apoyo y patrocinio para el desarrollo de este trabajo de tesis.

Quiero agradecer a mi familia que me estuvo apoyando en todas las etapas y de todas las formas en que lo necesité durante todos mis años de estudio. También quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Haret-Codratian Rosu por toda su ayuda, su guía y su apoyo incluso para los problemas más pequeños y también quiero agradecer a los sinodales, que me ayudaron a corregir mis errores y me guiaron en el proceso.



# Resumen

En esta tesis, estudiamos el Jerk relativista y otras derivadas superiores cinemáticas en espacio-tiempo de Minkowski mediante el marco de Frenet-Serret generalizado. La importancia del marco de Frenet-Serret radica, en términos muy superficiales, en las ecuaciones de movimiento que se pueden obtener según las restricciones que se consideraron. Por ejemplo, al considerar la curvatura en un sistema, se encuentra que las ecuaciones de Frenet-Serret describen el movimiento hiperbólico. En este tipo de sistemas, el Jerk, y otras derivadas superiores, toma relevancia pues está presente en el marco de Frenet-Serret y son útiles para describir movimientos más complejos. Nosotros trabajamos primero desde la perspectiva de la aceleración propia constante y después también desde la perspectiva de la aceleración propia no constante. Para el caso de la aceleración propia no constante, las ecuaciones de Frenet-Serret sugieren asumir alguna forma funcional para el módulo del Jerk. Esto nos permite encontrar relaciones entre los módulos que nos dan distintos tipos de trayectorias en el espacio-tiempo de Minkowski. Finalmente consideramos posibles aplicaciones para algunos nanomateriales.

Palabras clave - movimiento hiperbólico, ecuaciones Frenet-Serret, espacio-tiempo, Jerk, aceleración propia.

# Abstract

In this thesis, we study the relativistic Jerk and other kinematic superior derivatives in a Minkowski spacetime through the generalized Frenet-Serret frame. The importance of the Frenet-Serret frame lies, in very superficial terms, in the motion equations that can be found depending on the constraints that were considered. For example, by considering the curvature in a system it is found that the Frenet-Serret equations describe the hyperbolic motion. In these type of systems, the Jerk, and other superior derivatives, take relevance because they are present in the Frenet-Serret frame and are useful for describing more complex motions. We worked first under the perspective of constant proper acceleration and then under the perspective of non-constant proper acceleration. In the case of non-constant proper acceleration, the Frenet-Serret equations suggest taking some functional form for the Jerk modulus. This allows us to find relations between these moduli which provide different kind of trajectories in Minkowski spacetime. Finally, we consider possible applications for some nanomaterials.

Keywords - hyperbolic motion, Frenet-Serret equations, spacetime, Jerk, proper acceleration.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Antecedentes en la literatura</b>	<b>5</b>
2.1. Movimiento hiperbólico en espacio-tiempo Minkowski $1 + 1$ . . . . .	5
2.2. Clasificación cinemática de trayectorias . . . . .	8
2.3. Gráficas de las trayectorias . . . . .	14
2.4. Derivadas superiores iterativas . . . . .	16
<b>3. Movimiento hiperbólico relativista y sus cantidades cinemáticas de orden superior</b>	<b>21</b>
3.1. Esquema iterativo de la cinemática hiperbólica $1+1$ . . . . .	22
3.2. Caso $1 + 3$ . . . . .	23
3.2.1. Cuatro-Aceleración . . . . .	26
3.2.2. Cuatro-Jerk . . . . .	28
3.2.3. Cuatro-Snap . . . . .	30
3.3. La solución general $f(s)$ a la ecuación para el caso $1 + 3$ con parametrización hiperbólica . . . . .	31
3.3.1. Cantidades cinemáticas usando la solución general $f(s)$ . . . . .	35
3.4. Hipérbolas de Rindler modificadas . . . . .	36
3.5. Velocidad hiperbólica . . . . .	37
3.6. Ecuaciones de Frenet-Serret . . . . .	38
3.6.1. Curvatura: Matriz $K$ $2 \times 2$ . . . . .	42
3.6.2. Curvatura y torsión: Matriz $K$ $3 \times 3$ . . . . .	43

3.6.3.	Curvatura, torsión e hipertorsión: Matriz $K$ $4 \times 4$ . . . . .	44
3.7.	Compatibilidad de la parametrización hiperbólica con las ecuaciones de Frenet-Serret . . . . .	45
3.7.1.	Curvatura . . . . .	45
3.7.2.	Torsión . . . . .	46
<b>4.</b>	<b>Ecuaciones de Frenet-Serret con aceleración propia no constante y análisis del Jerk</b> . . . . .	<b>48</b>
4.1.	Ecuaciones de Frenet-Serret con parámetros no constantes . . . . .	49
4.2.	Ecuaciones de Frenet-Serret con solo curvatura . . . . .	51
4.2.1.	Caso $J^2 = 0$ . . . . .	53
4.2.2.	Caso $J^2$ constante pero distinto de cero . . . . .	56
4.2.3.	Caso $J^2$ no constante . . . . .	56
4.3.	Curvatura y torsión . . . . .	58
4.3.1.	Caso: $J^2 = 0$ con curvatura y torsión . . . . .	61
4.3.2.	Caso: $J^2 =$ constante distinta de cero . . . . .	63
4.3.3.	Caso $J^2$ no constante . . . . .	65
4.3.4.	Comentarios . . . . .	67
<b>5.</b>	<b>Frenet-Serret en espacio-tiempo curvo con aceleración propia constante</b> . . . . .	<b>69</b>
5.1.	Marco de Frenet-Serret . . . . .	70
5.2.	Métrica General . . . . .	72
5.3.	Métrica de Schwarzschild . . . . .	78
<b>6.</b>	<b>Aplicación al grafeno</b> . . . . .	<b>83</b>
6.1.	Métrica del grafeno . . . . .	83
6.2.	Métrica del grafeno en el marco de Frenet-Serret . . . . .	86
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>91</b>



<b>A. Notación</b>	<b>93</b>
A.1. Notación de relatividad especial . . . . .	93
A.2. Notación en secciones de relatividad con curvatura . . . . .	96
<b>B. Efecto Unruh</b>	<b>99</b>
<b>C. ¿Tiene el Jerk un valor máximo?</b>	<b>100</b>
C.1. Contexto sobre la fuerza máxima . . . . .	100
C.2. Derivación heurística de las ecuaciones de campo . . . . .	101
C.3. ¿Límite superior para el Jerk? . . . . .	102

# Capítulo 1

## Introducción

El efecto Unruh, descubierto en 1976 por William Unruh, es la predicción de que un observador acelerado observará radiación donde un observador inercial no la observaría. Desde el punto de vista de un observador acelerado, el que es el vacío para un observador inercial se verá como un estado que contiene muchas partículas en equilibrio termodinámico. Este efecto surge del hecho de que el espacio está lleno de campos cuánticos a pesar de que lo llamemos vacío. Unruh encontró que la radiación térmica tendría una temperatura

$$T = \frac{\hbar\alpha}{2\pi ck_B}. \quad (1.1)$$

La temperatura de Unruh tiene la misma forma que la temperatura de Hawking

$$T_H = \frac{\hbar g}{2\pi ck_B}, \quad (1.2)$$

la cual es la temperatura de la radiación de un agujero negro;  $g$  es la gravedad superficial del agujero negro. Considerando el principio de equivalencia a este efecto se le suele llamar efecto Hawking-Unruh.

Notamos que la temperatura de Unruh depende principalmente de la aceleración del observador acelerado. Cuando se tiene aceleración uniforme en un espacio-tiempo equivale al movimiento hiperbólico, que se puede entender mejor con la ayuda de las coordenadas de Rindler, que describen el marco de referencia acelerado.

Un marco apropiado para estudiar el movimiento hiperbólico es el de Frenet-Serret. Estas ecuaciones son un sistema vectorial de ecuaciones diferenciales acopladas que utilizan parámetros, que llamaremos parámetros de Frenet-Serret, para definir la dimensionalidad del sistema y que además son fundamentales en un sistema físico, relacionados con las cantidades cinemáticas del sistema físico. Uno de los casos más interesantes es un sistema que solo cuenta con uno de estos parámetros de Frenet-Serret, la curvatura, pues el sistema describe el movimiento hiperbólico mediante las ecuaciones diferenciales de Frenet-Serret, de donde se puede obtener incluso la trayectoria del sistema físico e importantes relaciones entre los parámetros de Frenet-Serret y los parámetros físicos se dan a cabo.

En particular, es de interés la cinemática hiperbólica porque cualquier material que podamos relacionar con una geometría hiperbólica se puede entender, en cuestiones cinemáticas, mediante estos marcos propuestos. Hay otros materiales a los que sería posible relacionarlos con una métrica que describa movimiento hiperbólico, por ejemplo, una hoja de grafeno curvada de manera específica. Otro ejemplo podría ser la nanoaguja, cuya forma es similar a la pseudoesfera, una forma geométrica muy relacionada a una métrica hiperbólica, donde la aguja juega el papel de espacio en el que se mueve algún otra partícula, por ejemplo un plasmón superficial. Podemos estudiar esto desde una perspectiva relativista con la ayuda de una métrica hiperbólica, que es posible asociarla a dichos materiales.

La organización de esta tesis es como sigue. En el Capítulo 2 se presentan algunos antecedentes de importancia que se encuentran en la vasta literatura. En la sección 2.1 desarrollamos el movimiento hiperbólico en  $1 + 1$  dimensiones, un ejemplo clásico en la relatividad especial. En la sección 2.2 estudiamos las ecuaciones de Frenet-Serret en su generalización a espacio-tiempo de Minkowski, obteniendo seis trayectorias (o “worldlines”) distintas dependiendo de tres parámetros cinemáticos, los de Frenet-Serret, curvatura, torsión e hipertorsión. En la sección 2.3 se grafican y se comentan

dichas trayectorias para algunos valores de los parámetros. Por último, en la sección 2.4 consideramos un método alternativo de tipo iterativo para definir las derivadas superiores cinemáticas, con la ventaja de que los cuatro-vectores son siempre de tipo espacio y que se puede generalizar para n-vectores.

En el Capítulo 3 contiene una descripción del movimiento hiperbólico, en 1+3 dimensiones en cuyo caso las trayectorias hiperbólicas se ven modificadas y además se encuentra que en realidad el movimiento se puede considerar 1 + 2 dimensional. En la sección 3.2 con la meta de obtener una trayectoria usamos una parametrización hiperbólica, y se usa una ecuación diferencial no lineal en el argumento de la parametrización [1]. En la siguiente sección, la 3.3, se encuentra la solución general para dicha ecuación diferencial no lineal y se usa en el cálculo de las derivadas de orden superior cinemáticas, presentando resultados más generales de las encontradas en la literatura [1]. En la sección 3.4 se compara la parametrización con el argumento expresado en términos de la solución general contra las hipérbolas de Rindler típicas donde el argumento es la solución particular (proporcional al tiempo propio). Por último en este capítulo, en las secciones 3.6 y 3.7 el mismo tipo de movimiento se estudia desde el punto de vista del marco de Frenet-Serret donde se obtienen relaciones entre los parámetros cinemáticos de Frenet-Serret y las constantes de integración que físicamente representan las condiciones iniciales.

En el Capítulo 4, a diferencia de todos los desarrollos anteriores, la aceleración propia es considerada variable, es decir, los efectos de una aceleración no constante en las ecuaciones de Frenet-Serret. En la sección 4.2, con solo el parámetro de curvatura, se considera el sistema reducido de Frenet-Serret obteniendo trayectorias analíticas tanto sin Jerk como con Jerk. Ya que tenemos relaciones entre el módulo del Jerk y el módulo de la aceleración y su derivada se hacen ciertas suposiciones en uno u otro caso. También se comparan estas trayectorias con las trayectorias puramente hiperbólicas de Rindler. En la sección 4.3 se desarrolla Frenet-Serret con curvatura y torsión, pero la obtención de trayectorias ya no es posible analíticamente, a pesar de que se mantienen las conexiones entre los módulos de la aceleración y del Jerk.

En el Capítulo 5, basado en [2], consideramos una generalización al espacio-tiempo

curvo, pero debido a la complejidad del sistema, consideramos solo curvatura y además la consideramos constante, lo que implica que también la aceleración propia es constante. En la sección 5.1 desarrollamos las ecuaciones de Frenet-Serret en espacio-tiempo curvo. En las secciones 5.2 y 5.3 las aplicamos primero en un caso general y después al caso particular de la métrica de Schwarzschild.

En el Capítulo 6 se aplican las ecuaciones de Frenet-Serret en espacio-tiempo curvo a una métrica que se puede asociar al grafeno. Esto se hace como ejemplo de uso del marco de Frenet-Serret a un sistemas de laboratorio.

# Capítulo 2

## Antecedentes en la literatura

El movimiento hiperbólico, las ecuaciones de Frenet-Serret y sus distintas generalizaciones han sido estudiadas desde hace más de 100 años, con la formulación de la relatividad especial. En este capítulo, hacemos un pequeño compendio de los que consideramos algunos de los trabajos más ilustrativos que además sirven de preámbulo en nuestro propio trabajo sobre movimiento hiperbólico y las ecuaciones de Frenet-Serret.

### 2.1. Movimiento hiperbólico en espacio-tiempo Minkowski $1 + 1$

El movimiento relativista de una partícula con aceleración constante se estudió en detalle por Max Born en 1909, quien lo llamó “Movimiento hiperbólico” ya que la ecuación de la trayectoria en el plano  $x, t$  es una hipérbola [3,4], aunque los efectos de un marco acelerado uniformemente ya se había estudiado por Einstein desde alrededor de 1907. El trabajo de Born se elaboró aún más por Arnold Sommerfeld y Von Laue y una serie de científicos que estudiaron la aceleración uniforme a partir de ahí. Mientras todo el estudio de marcos acelerados uniformemente se hizo en espacio-tiempo plano, no fue hasta 1960 cuando Wolfgang Rindler [5] analizó el movimiento hiperbólico en espacio-tiempo curvo y posteriormente mostró [6] la analogía entre las coordenadas de Rindler, que se popularizaron con este nombre desde la publicación de su artículo, con

las coordenadas de Kruskal, que son coordenadas para la métrica de Schwarzschild, en el espacio-tiempo curvo. Esto posteriormente motivó el estudio de la relación entre el efecto Unruh para un observador en movimiento hiperbólico con el efecto Hawking.

En un espacio-tiempo cuatro-dimensional plano, es decir, un espacio-tiempo de Minkowski, uno de los conceptos más básicos en el movimiento hiperbólico es el de la velocidad hiperbólica [4], que se usaba en lugar de la rapidéz adimensional  $w$  para sus aplicaciones en la física

$$V = c \cdot w = c \cdot \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right), \quad (2.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Esta velocidad se usó por Varičák desde 1910 aunque no con ese nombre. Es natural el definir entonces una aceleración hiperbólica como el cambio de la velocidad hiperbólica con respecto al tiempo propio, que es el tiempo observado por el cuerpo en movimiento. En una dimensión se tiene simplemente que [7]

$$\alpha = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right) = \frac{dV}{ds}, \quad (2.2)$$

donde  $v = r'$ , esto es, la derivada con respecto al tiempo de laboratorio. Por simplicidad, en este escrito nosotros trabajamos con las llamadas unidades naturales donde  $c = 1$ . La aceleración hiperbólica,  $\alpha$ , es la aceleración propia, relacionada a la aceleración de laboratorio por  $\alpha = \gamma^3(v)(dv/dt)$ . La trayectoria relativista se puede encontrar de

$$\frac{dv}{(1 - v^2)^{3/2}} = \alpha dt. \quad (2.3)$$

Se obtiene para  $v$

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} = \alpha(t - t_0), \quad (2.4)$$

donde se usó la constante de integración  $c = -\alpha t_0$ . La condición inicial  $v = 0$  a  $t = 0$  nos da  $t_0 = 0$ , pero manenemos la condición inicial sin especificar. Resolviendo para  $v$

$$v = \frac{\alpha(t - t_0)}{1 + \alpha^2(t - t_0)^2}, \quad (2.5)$$

y considerando que  $v = r' = x' = dx/dt$ , integrando una vez más se obtiene

$$x - x_0 = \int \frac{\alpha(t - t_0)}{\sqrt{1 + (\alpha(t - t_0))^2}} dt, \quad (2.6)$$

para obtener la coordenada  $x$

$$x - x_0 = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{1 + (\alpha(t - t_0))^2} - 1). \quad (2.7)$$

La última ecuación se puede escribir como la ecuación de una hipérbola

$$(x - x_0 + b)^2 - (t - t_0)^2 = b^2, \quad (2.8)$$

donde  $b = 1/\alpha$ . Ponemos como condición inicial  $x_0 = 0$  y usamos la parametrización hiperbólica

$$x = b(\cosh u - 1), \quad t = b \sinh u, \quad (2.9)$$

de modo que

$$dx = b \sinh u du, \quad dt = b \cosh u du, \quad (2.10)$$

lo cual nos permite identificar  $u$  con la rapidez ( $V$ ) ya que

$$\frac{dx}{dt} = \tanh u. \quad (2.11)$$

Además

$$ds = \sqrt{dt^2 - dx^2} = b du = b dV, \quad (2.12)$$

de modo que

$$\frac{dV}{ds} = \frac{du}{ds} = \frac{1}{b} = \alpha. \quad (2.13)$$

El movimiento en el espacio-tiempo 1+1, es un movimiento en una sola dimensión espacial y una temporal, es decir, el movimiento se da en una línea recta. Surge la pregunta, ¿por qué se le dice movimiento hiperbólico si el movimiento en el espacio no es una hipérbola? A pesar de que el movimiento se da en una línea recta en el espacio, se le llama movimiento hiperbólico porque sí se forma una hipérbola, pero la hipérbola



se da en términos de la posición y el tiempo, es decir, en el espacio se mueve en línea, pero debido a la aceleración, hay una relación hiperbólica con el tiempo. Esto es más fácil de ver cuando se hace la parametrización de la posición  $x$  en  $t$  en lugar del tiempo propio. En términos prácticos, desde una perspectiva de un observador, se vería que el cuerpo se acerca al origen conforme pasa el tiempo y después se aleja del origen, todo mientras se mueve en la misma recta.

## 2.2. Clasificación cinemática de trayectorias

Unruh mostró que un detector de partículas escalares que se mueve con aceleración lineal constante en el vacío del espacio-tiempo plano, estará excitado. El detector se comportará como si estuviera en un baño térmico (partículas escalares con energías en un espectro planckiano) de temperatura  $T = \alpha/2\pi$ , donde  $\alpha$  es la magnitud de la aceleración del detector.

Detectores con aceleración circular uniforme también estarán excitados, aunque los espectros serán distintos (ya no serán planckianos). Es de notarse que los espectros para estos casos es independiente del tiempo, pero en general no es así.

Según las ecuaciones de Frenet-Serret generalizadas [8] y la cantidad de invariantes de curvatura a considerar, tendremos una amplia gama de posibles movimientos, que pueden ir desde un movimiento rectilíneo uniforme hasta otros más complejos como movimiento hiperbólico, circular y combinaciones de estos. Para estos movimientos conocidos como estacionarios es posible asociarles un espectro que nos dice sobre lo que los observadores sobre estas trayectorias (o worldlines) ven en términos energéticos. El espectro depende mucho del tipo de trayectoria que se analiza, y hasta donde se sabe no es posible encontrar expresiones analíticas para todos los tipos de movimientos estacionarios. Estas trayectorias se conocen como estacionarias porque sus propiedades geométricas son independientes del tiempo propio. Solo los observadores sobre estas trayectorias pueden establecer un sistema de coordenadas en el cual estén en reposo y la métrica sea estacionaria. El intervalo geodético entre dos puntos de una trayectoria

estacionaria puede depender solo en el intervalo de tiempo propio, por lo tanto esas son las trayectorias en las cuales la excitación de un detector es independiente del tiempo. Letaw describió seis tipos de trayectorias, [8], dependiendo del valor de los invariantes de curvatura, aunque estamos interesados solo en los que no consideran la hipertorsión, ya que los espectros no tienen aparente solución analítica.

Para generalizar las ecuaciones de Frenet-Serret se necesita pensar en un proceso similar. Las ecuaciones de Frenet-Serret relacionan las derivadas de vectores unitarios con combinaciones lineales de estos, los vectores siguen cada punto de la trayectoria 3D y son perpendiculares entre sí.

En lugar de una trayectoria, una worldline está descrita por  $X^\mu(s)$ , es decir, se considera la parte temporal, pero nosotros no haremos distinción entre trayectoria y worldline. Para empezar la generalización se construye una tétrada ortonormal  $\Lambda_a^\mu(s)$  en cada punto de la worldline  $X^\mu(s)$ . El índice latino es el índice de la tétrada, es decir que nos indica cada componente de la tétrada, mientras que el índice griego nos indica los elementos que forman cada uno de los cuatro-vectores. La tétrada está formada por derivadas de  $X^\mu(s)$  respecto al tiempo propio y deben satisfacer la condición de ortonormalidad

$$\Lambda_{a\mu}\Lambda_b^\mu = \eta_{ab}, \quad (2.14)$$

donde  $\eta_{ab} = (1, -1, -1, -1)$ . Se puede construir la tétrada  $\Lambda$  mediante la ortogonalización de Gram-Schmidt, en donde es sencillo partir de la cuatro-velocidad  $\Lambda_0^\mu = U^\mu = \dot{X}^\mu$  pues ya cumple con la ortonormalidad.

La tétrada es la base para el espacio vectorial en cada punto de la worldline. Por lo que las derivadas de los vectores base (que dan algún otro vector que se puede expresar como una combinación lineal en esa base) se escriben como

$$\dot{\Lambda}_a^\mu = K_a^b \Lambda_b^\mu, \quad (2.15)$$

la ecuación (2.15) son las ecuaciones de Frenet-Serret generalizadas. De la ecuación

(2.14) se encuentra que

$$\dot{\Lambda}_{a\mu}\Lambda_b^\mu + \Lambda_{a\mu}\dot{\Lambda}_b^\mu = 0, \quad (2.16)$$

y al usar las ecuaciones generalizadas

$$K_a^b\Lambda_{b\mu}\Lambda_b^\mu + \Lambda_{a\mu}K_b^a\Lambda_a^\mu = 0, \quad (2.17)$$

por lo que  $K_{ab} = -K_{ba}$  (matriz antisimétrica). Un vector base  $\Lambda_a^\mu$  está definido en términos de la  $a + 1$  derivada de  $X^\mu$ , por lo que  $\dot{\Lambda}_a^\mu$  será una combinación lineal de  $a + 2$  derivadas. Estas  $a + 2$  derivadas solo dependen de la base  $\Lambda_b^\mu$  donde  $b \leq a + 1$ . Entonces  $b > a + 1$  es cero, con esto y considerando que hay antisimetría se tendrá que

$$(K_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 & -\nu(s) \\ 0 & 0 & \nu(s) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Se encuentra que

$$\begin{aligned} \kappa &= -\dot{\Lambda}_{0\mu}\Lambda_1^\mu = \Lambda_{0\mu}\dot{\Lambda}_1^\mu, \\ \tau &= -\dot{\Lambda}_{1\mu}\Lambda_2^\mu = \Lambda_{1\mu}\dot{\Lambda}_2^\mu, \\ \nu &= -\dot{\Lambda}_{2\mu}\Lambda_3^\mu = \Lambda_{2\mu}\dot{\Lambda}_3^\mu. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si los invariantes de curvatura son constantes, los elementos de la tétrada se reducen

a

$$\begin{aligned} \Lambda_0^\mu &= U^\mu, \\ \Lambda_1^\mu &= \frac{\dot{\Lambda}_0^\mu}{\kappa}, \\ \Lambda_2^\mu &= \frac{\ddot{\Lambda}_0^\mu - \kappa^2\Lambda_0^\mu}{|\kappa\tau|}, \\ \Lambda_3^\mu &= \frac{\ddot{\Lambda}_0^\mu - (\kappa^2 - \tau^2)\dot{\Lambda}_0^\mu}{\kappa\tau\nu}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A estas worldlines se llaman estacionarias porque sus propiedades geométricas son

independientes del tiempo propio. Solo los observadores sobre estas worldlines pueden establecer un sistema coordinado en el cual estén en reposo y la métrica sea estacionaria. El intervalo geodético entre dos puntos de una worldline estacionaria puede depender solo en el intervalo de tiempo propio, por lo tanto esas son las worldlines en las cuales la excitación de un detector es independiente del tiempo.

Cuando se usa  $a = 3$  en la ecuación (2.15) se obtiene

$$\dot{S}^\mu = (\kappa^2 - \tau^2 - \nu^2)J^\mu + \nu^2\kappa^2U^\mu, \quad (2.21)$$

donde  $J^\mu = \ddot{X}^\mu$  y  $S^\mu = \ddot{X}^\mu$ . Podemos escribir esto como

$$\ddot{\Lambda}_0^\mu - 2a\ddot{\Lambda}_0^\mu - b^2\Lambda_0^\mu = 0, \quad (2.22)$$

donde  $a = (\kappa^2 - \tau^2 - \nu^2)/2$  y  $b = |\nu\kappa|$ . La solución más general a la ecuación diferencial es

$$\Lambda_0^\mu = A^\mu \cosh(R_+s) + B^\mu \sinh(R_+s) + C^\mu \cos(R_-s) + D^\mu \sin(R_-s), \quad (2.23)$$

donde  $A^\mu, B^\mu, C^\mu, D^\mu$  son coeficientes tensoriales.  $R_\pm = \sqrt{(a^2 + b^2)^{1/2} \pm a}$ ,  $a = (\kappa^2 - \tau^2 - \nu^2)/2$  y  $b = |\kappa\nu|$ . La condición inicial propuesta para los coeficientes es

$$(\Lambda_a^\mu)_{s=0} = \delta_a^\mu. \quad (2.24)$$

Si resolvemos para la tétrada con la condición inicial dada, encontramos que

$$\begin{aligned} A^\mu &= \frac{1}{R^2}(R_-^2 + \kappa^2, 0, \kappa\tau, 0), \\ B^\mu &= \frac{1}{R^2}\left(0, \frac{\kappa R_-^2 + \kappa(\kappa^2 - \tau^2)}{R_+}, 0, \frac{\kappa\tau\nu}{R_+}\right), \\ C^\mu &= \frac{1}{R^2}(R_+^2 - \kappa^2, 0, -\kappa\tau, 0), \\ D^\mu &= \frac{1}{R^2}\left(0, \frac{\kappa}{R_-}(R_+^2 - \kappa^2 + \tau^2), 0, -\frac{\kappa\tau\nu}{R_-}\right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $R^2 = R_-^2 + R_+^2$ . Las trayectorias se dividen naturalmente en 6 tipos dependiendo de los valores de los invariantes de curvatura:

- $\kappa = \tau = \nu = 0$   
 $\Lambda_0^\mu = (1, 0, 0, 0);$
- $\tau = \nu = 0$   
 $\Lambda_0^\mu = (\cosh(\kappa s), \sinh(\kappa s), 0, 0);$
- $|\kappa| < |\tau|, \nu = 0$   
 $\Lambda_0^\mu = \rho^{-2}(\tau^2 - \kappa^2 \cos(\rho s), \kappa \rho \sin(\rho s), \kappa \tau [1 - \cos(\rho s)], 0);$   
 $\rho^2 = \tau^2 - \kappa^2$
- $|\kappa| = |\tau|, \nu = 0$   
 $\Lambda_0^\mu = (1 + 1/2\kappa^2 s^2, \kappa s, 1/2\kappa^2 s^2, 0);$
- $|\kappa| > |\tau|, \nu = 0$   
 $\Lambda_0^\mu = \sigma^{-2}(\kappa^2 \cosh(\sigma s) - \tau^2, \kappa \sigma \sinh(\sigma s), \kappa \tau [\cosh(\sigma s) - 1], 0);$   
 $\sigma^2 = \kappa^2 - \tau^2$
- $\nu \neq 0$   $\Lambda_0^\mu = (\frac{\Delta}{R} \cosh(R_1 s), \frac{Delta}{R} \sinh(R_1 s), -\frac{\kappa \tau}{\Delta R} \sin(R_2 s), \frac{\kappa \tau}{\Delta R} \cos(R_2 s));$   
 $\Delta^2 = \frac{1}{2}(R^2 + \kappa^2 + \tau^2 + \nu^2),$   
 $R_1^2 = \frac{1}{2}(R^2 + \kappa^2 - \tau^2 - \nu^2),$   
 $R_2^2 = \frac{1}{2}(R^2 - \kappa^2 + \tau^2 + \nu^2),$   
 $R^4 = (\kappa^2 + \tau^2 + \nu^2)^2 - 4\kappa^2 \tau^2.$

Finalmente, se puede calcular el espectro e excitación mediante

$$S(E, s) = \frac{E^2}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-iEs} \{[X_\mu(0) - X_\mu(s)][X^\mu(0) - X^\mu(s)]\}^{-1}. \quad (2.26)$$

Los casos analíticos son pocos y se reducen a:

- Detector inercial

$$X^\mu(s) = (s, 0, 0, 0), \quad (2.27)$$

con espectro de excitación

$$S(E) = E^3/4\pi^2, \quad (2.28)$$

que corresponde a una energía de estado base por modo de  $E/2$ .

- Movimiento lineal con aceleración constante

$$X^\mu(s) = \kappa^{-1}(\sinh \kappa s, \cosh \kappa s, 0, 0), \quad (2.29)$$

con espectro

$$S(\epsilon_\kappa) = \frac{\epsilon_\kappa^3}{2\pi^2(e^{2\pi\epsilon_\kappa} - 1)}, \quad (2.30)$$

que es un espectro Planckiano con temperatura  $\kappa/2\pi$ .

- Paratorsión,  $|\kappa| = |\tau|$ ,

$$X^\mu(s) = \left( s + \frac{1}{6}\kappa^2 s^3, \frac{1}{2}\kappa s^2, \frac{1}{6}\kappa^2 s^3, 0 \right), \quad (2.31)$$

con espectro

$$S(\epsilon_\kappa) = \frac{\epsilon_\kappa^2}{8\pi^2\sqrt{3}} e^{-\sqrt{12}\epsilon_\kappa}. \quad (2.32)$$

### Notas:

Como comentario a destacar, en el artículo [8] encontramos una serie de pequeños errores. La primer mención no es en sí un error, pero para evitar confusiones mencionamos que el cuarto elemento de la tétrada no se escribe de manera explícita y la expresión que aparece solo nos garantiza que ese elemento es perpendicular a los tres anteriores. Sin embargo, el elemento se puede calcular de la misma manera que los anteriores, mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. El segundo error se encuentra en la expresión para la tétrada dada en término de los parámetros de Frenet-Serret, y es simplemente un valor absoluto, pues un factor salió de una raíz. El tercer error parece que fue un error al momento escribirlo y es que se escribió la curvatura,  $\kappa$ , igual a cero cuando se refería a la torsión.

## 2.3. Gráficas de las trayectorias

Una worldline o trayectoria que tiene un espectro independiente del tiempo se le llama estacionaria. Tales trayectorias son los movimientos más simples en la física [9]. Sin incluir el caso estático o sin movimiento, las trayectorias estacionarias están uniformemente aceleradas. Como tal, una carga puntual que se mueve a lo largo de una trayectoria estacionaria emitirá una potencia radiativa. Por otro lado, el espectro del vacío para la trayectoria  $\kappa \neq 0$ ,  $\tau = \nu = 0$ , tiene la forma  $T = \kappa/2\pi$ , por lo que es evidente que están relacionadas.

Se sigue la convención de nombres para las worldlines estacionarias, en que se utiliza las torsiones como referencia, Nulltor cuando no hay torsiones (pero sí curvatura)  $\tau = \nu = 0$ , Infrator cuando la torsión es menor a la curvatura  $|\kappa| > |\tau|$ , Parator cuando la torsión es igual a la curvatura  $|\kappa| = |\tau|$ , Ultrator cuando la torsión es mayor a la curvatura  $|\kappa| < |\tau|$  e Hypertor cuando también hay hipertorsión. El caso cuando hay torsión e hipertorsión además de curvatura es el caso más general y es una combinación de todos los anteriores. Las gráficas de las worldlines, es decir, sus trayectorias en representación gráfica, son:

- Nulltor

Con worldline  $X^\mu = \kappa^{-1}(\sinh(\kappa s), \cosh(\kappa s), 0, 0)$ , graficado en la figura (2.1)

- Ultrator

Con worldline  $X^\mu = (\tau^2 - \kappa^2)(\tau\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}s, \kappa \cos(\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}s), \kappa \sin(\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}s), 0)$ , graficado en la figura (2.2)

- Parator

Con worldline  $X^\mu = (s + \frac{1}{6}\kappa^2s^3, \frac{1}{2}\kappa s^2, \frac{1}{6}\kappa^2s^3, 0)$ , graficado en la figura (2.3)

- Infrator

Con worldline  $X^\mu = (\kappa^2 - \tau^2)^{-2}(\kappa \sinh((\kappa^2 - \tau^2)s), \kappa \cosh((\kappa^2 - \tau^2)s), \tau(\kappa^2 - \tau^2)s, 0)$ , graficado en la figura (2.4)

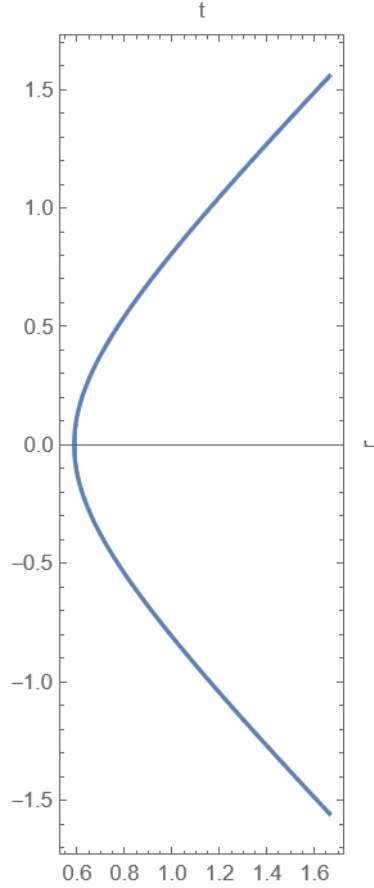


Figura 2.1: Gráfica de  $t$  vs  $r$  correspondiente a la trayectoria Nulltor, con  $\kappa = 1,7$ , en un rango  $-3 < s < 3$ . El caso Nulltor representa un movimiento hiperbólico.

- Hypertor

Este caso corresponde a una worldline cuatro-dimensional que no se puede expresar en una gráfica 3D. Sin embargo, lo que sí se puede hacer es una proyección a un espacio 3D. Una gráfica de la proyección de la worldline hypertor la podemos ver en la Figura (2.5). La proyección de la worldline, que son las coordenadas espaciales son

$$x = \frac{\Delta}{RR_+} \cosh(R_+s), \quad y = \frac{\kappa\tau}{R\Delta R_-} \cos(R_-s), \quad z = \frac{\kappa\tau}{R\Delta R_-} \sin(R_-s), \quad (2.33)$$

donde  $\Delta = \sqrt{(R^2 + \kappa^2 + \tau^2 + \nu^2)/2}$ ,  $R = \sqrt{R_+^2 + R_-^2}$ ,  $R_\pm^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \pm a$ ,  $a = (\kappa^2 - \nu^2 - \tau^2)/2$  y  $b = |\kappa\nu|$ .



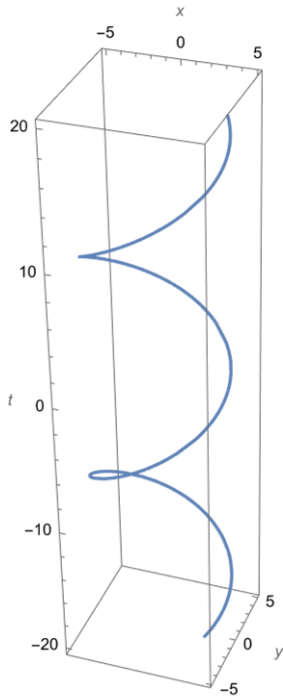


Figura 2.2: Gráfica de la trayectoria ultrator, con  $\kappa = 1$  y  $\tau = 1,1$ , en un rango  $-15 < s < 15$ . El caso Ultrator representa un movimiento helicoidal.

A primera vista parece ser que el comportamiento que se ve en la figura (2.5) es caótico, pero, si bien es un movimiento complicado, si ajustamos los parámetros podemos encontrar ciertas simetrías, como se observa en la figura (2.6) Si se aumenta el rango de  $s$  aumenta el largo en el eje  $x$  de la gráfica, además de los puntos de contacto de la trayectoria consigo misma y la distancia entre estos puntos. Se espera que si se consideran parámetros de Frenet-Serret iguales aparezcan simetrías en la proyección de la worldline.

## 2.4. Derivadas superiores iterativas

Se debe considerar que el Jerk, Snap, y todas las derivadas de orden superior (en el tiempo) son distintas de cero en contextos físicos simples [10]. Por ejemplo, consideremos un objeto que se suelta del reposo en un campo gravitacional. Se puede encontrar el cuatro-Jerk y el módulo resulta ser constante y proporcional a la aceleración.

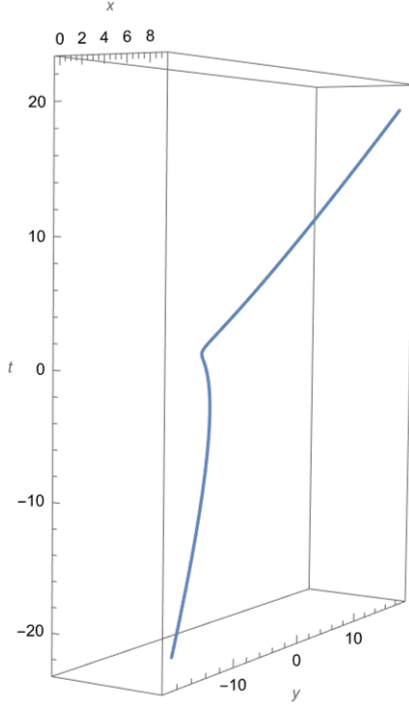


Figura 2.3: Gráfica de la trayectoria parator, con  $\kappa = \tau = 2$ , en un rango  $-3 < s < 3$ .

Las generalizaciones relativistas del Jerk, Snap, etc. no han atraído mucha atención en más de un siglo desde que se formuló la relatividad especial. La razón de esto, es que se cree que hay poco sobre la dinámica después de que ya se definió la aceleración  $A = dU/ds = \gamma(dU/dt)$ . Sin embargo, presuponerlo para todos los sistemas sin importar sus condiciones o parámetros puede dejar de lado información importante. Como ejemplo, se sabe que el Jerk surge naturalmente en el contexto de la ecuación de Lorentz-Dirac [11] que describe el movimiento de una partícula cargada en un campo de fuerza externo después de que se toma en cuenta la fuerza de radiación-reacción,

$$f_{\text{rad}} = -\frac{2e^2}{3}\Sigma, \quad (2.34)$$

donde  $\Sigma$  es el Jerk relativista, que definiremos a continuación. El Jerk usualmente se define como  $J = dA/ds$ , pero hay una forma de definirlo

$$\Sigma = J \pm A^2U, \quad (2.35)$$

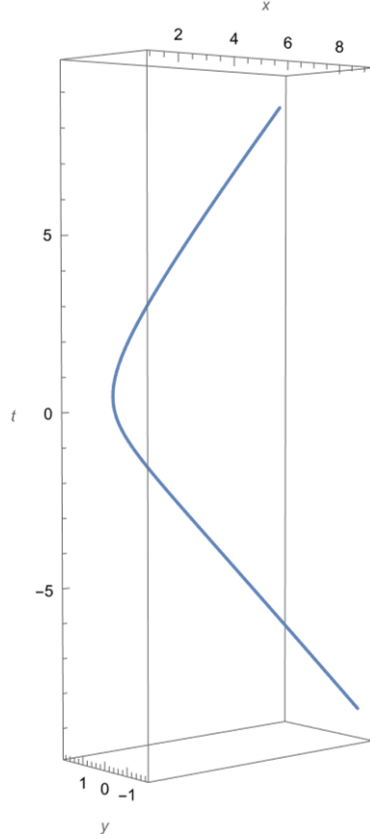


Figura 2.4: Gráfica de la trayectoria infrator, con  $\kappa = 1$  y  $\tau = 0,5$ , en un rango  $-3 < s < 3$ .

que tiene la ventaja de que es tipo espacio porque  $U \cdot \Sigma = 0$ . Aquí el signo de  $\pm A^2 U$  depende de la signatura escogida. Ya que nosotros consideramos la signatura  $(+, -, -, -)$ , los módulos de los vectores tipo espacio serán negativos, y por lo tanto el signo en  $U \cdot \Sigma = 0$  es el positivo.

Similarmente, podemos definir el cuatro-Snap como

$$\Xi = S \pm (A \cdot \Sigma)U, \quad (2.36)$$

donde  $S = d\Sigma/ds$ . Se puede hacer de manera consecutiva y definir  $P_1 = A$ ,  $P_2 = \Sigma$ ,  $P_3 = \Xi$ , etc. Los cuatro-vectores que usan esta son cuatro-vectores tipo-espacio, por lo que se tiene la propiedad

$$P_n \leq 0, \quad (2.37)$$

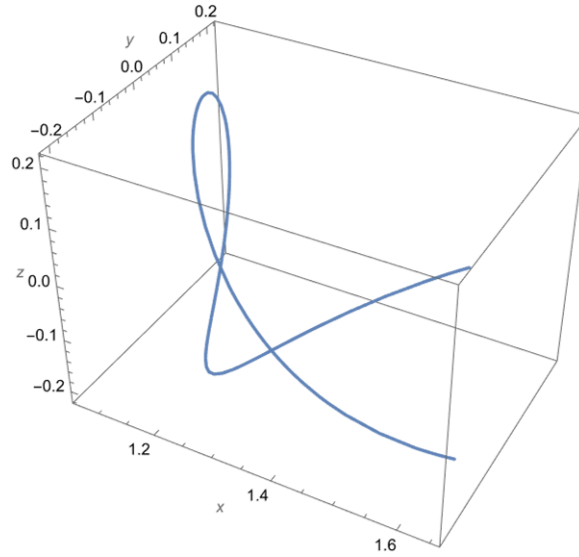


Figura 2.5: Gráfica de la trayectoria hypertor, con  $\kappa = \nu = 1$  y  $\tau = 2$ , en un rango  $-2 < s < 2$ . Se puede observar que la trayectoria en el espacio es una combinación de todos los movimientos anteriores. Esta es la proyección en el espacio 3D y no se considera la componente temporal.

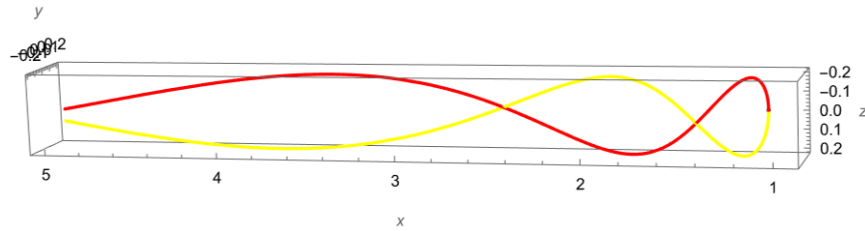


Figura 2.6: Gráfica de la trayectoria hypertor, con  $\kappa = \nu = 1$  y  $\tau = 2$ , en un rango  $-4,5 < s < 4,5$ . Se dividió la gráfica en colores distintos para facilitar la visualización. Se observa que en este rango de  $s$  hay tres puntos de contacto de la trayectoria consigo misma.

donde la desigualdad depende de igual manera de la signatura. Se puede definir de forma iterativa cada derivada superior mediante

$$P_{n+1} = \frac{P_n}{ds} - (A \cdot P_n)U, \quad (2.38)$$

donde  $P_0 = U$ . Esta forma de definir los cuatro-vectores cinemáticos tiene la ventaja de que siempre serán tipo-espacio,  $U \cdot P_n = 0$  si  $n > 0$ ; si  $P_n = 0$  entonces  $P_{n+1} = 0$ ; se pueden hacer generalizaciones a  $D$  dimensiones, por lo que se tendrán  $D$ -vectores pero que cumplen las mismas relaciones; y se pueden expresar estas relaciones iterativas

mediante matrices (antisimétricas) que se encuentran para cada caso. Para el caso de movimientos estacionarios se tiene que  $P_n^2$  es constante para toda  $n$  lo cual implica que  $P_n \cdot P_{n+1} = 0$ .

# Capítulo 3

## Movimiento hiperbólico relativista y sus cantidades cinemáticas de orden superior

En este capítulo, basado en el artículo publicado [12], estudiamos el movimiento de un observador con aceleración propia constante en un espacio-tiempo de Minkowski considerando una representación matricial de la velocidad y aceleración. Obtuvimos una ecuación diferencial vectorial para la aceleración y considerando que la aceleración propia es constante podemos escribir la ecuación en términos de las derivadas del radio vector. Si parametrizamos la velocidad por funciones hiperbólicas obtenemos una ecuación diferencial en términos de la velocidad  $f(s)$ .

En años recientes, han habido discusiones en la literatura relacionadas a características particulares de la aceleración uniforme y aceleración no uniforme [10], en cuyo caso, se deberían considerar derivadas temporales de orden mayor de la velocidad como el Jerk,  $J(s)$ , Snap,  $S(s)$ , Crackle,  $C(s)$ , y más. La aceleración y las posteriores derivadas temporales de orden superior se vuelven cantidades importantes y no triviales en generalizaciones relacionadas a los parámetros intrínsecos en la geometría diferencial en curvas (worldlines) como [8], o relacionadas a espacios-tiempo curvos como en [13] y [2].

El movimiento hiperbólico en el espacio-tiempo de Minkowski de dos dimensiones

(una coordenada espacial y una temporal) se ha discutido extensamente por más de un siglo [3]. Cuando se considera aceleración propia constante en el espacio-tiempo de Minkowski cuatro-dimensional, se puede usar una representación de las transformaciones de Lorentz entre el marco de laboratorio y el marco propio del observador en movimiento [1]. En este acercamiento matricial se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden que se puede resolver usando una parametrización de la velocidad en términos de funciones hiperbólicas.

### 3.1. Esquema iterativo de la cinemática hiperbólica 1+1

La ecuación (2.9) contiene los componentes del 1 + 1-vector de posición

$$X(s) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \sinh(u(s)) \\ \cosh(u(s)) - 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

pero para generar la secuencia iterativa de cantidades cinemáticas de orden mayor, encontramos que el vector posición 1 + 1 desplazado  $\bar{X}$

$$\bar{X} = X + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \sinh(u(s)) \\ \cosh(u(s)) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

es más apropiado. En términos del vector posición 1 + 1 desplazado, la 1 + 1-velocidad es

$$U(s) = \frac{d\bar{X}}{ds} = \begin{pmatrix} \cosh u \\ \sinh u \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde se usó  $\dot{u} = \alpha$  de (2.13). Para la 1 + 1-aceleración, se obtiene

$$A(s) = \frac{dU}{ds} = \alpha \begin{pmatrix} \sinh u \\ \cosh u \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Además, el 1 + 1-Jerk y el 1 + 1-Snap son

$$J(s) = \frac{dA}{ds} = \alpha^2 \begin{pmatrix} \cosh u \\ \sinh u \end{pmatrix}, \quad S(s) = \frac{dJ}{ds} = \alpha^3 \begin{pmatrix} \sinh u \\ \cosh u \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Las derivadas de orden mayor se pueden escribir iterativamente como sigue:

$$\frac{d^{2p}}{ds^{2p}} \bar{X}(s) = \alpha^{2p} \bar{X}, \quad p = 0, 1, 2, 3... \quad (3.6)$$

para derivadas pares, y

$$\frac{d^{2q+1}}{ds^{(2q+1)}} \bar{X}(s) = \alpha^{(2q+1)} \frac{d\bar{X}}{ds}, \quad q = 0, 1, 2, 3... \quad (3.7)$$

para derivadas impares. Para la aceleración propia constante, las derivadas pares de orden mayor (1 + 1-aceleración, 1 + 1-Snap, etc.) están dadas en términos del 1 + 1-vector de posición mientras que las derivadas impares están dadas en términos de las velocidades 1 + 1. Los módulos de ambos tipos de derivadas son potencias sucesivas de  $\alpha$  al cuadrado. Las derivadas pares son vectores 1 + 1 tipo espacio, y las derivadas impares son tipo tiempo.

### 3.2. Caso 1 + 3

En un espacio-tiempo de Minkowski 1 + 3 la cuatro-velocidad está definida como

$$U(s) = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ x'(t(s)) \\ y'(t(s)) \\ z'(t(s)) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{r}'(t(s)) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (r')^2}$  y se usó  $\frac{dx^i}{ds} = \gamma \frac{dx^i}{dt}$ . Se puede comprobar fácilmente que, por definición,  $U^2(s) = 1$ .



Cuando consideramos movimiento hiperbólico en más de dos dimensiones es apropiado el usar el formalismo matricial, [1], ya que las transformaciones de Lorentz, como los boosts generales de Lorentz, tienen representaciones matriciales bien definidas. La idea es que esta transformación lleve al observador al reposo a cualquier tiempo propio

$$U(s) \rightarrow B(s)U(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = U_p, \quad (3.9)$$

donde  $U_p$  es la cuatro-velocidad propia y  $B(s)$  es la familia de boost de Lorentz

$$B(s) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma x'(t(s)) & -\gamma y'(t(s)) & -\gamma z'(t(s)) \\ -\gamma x'(t(s)) & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} x'(t(s))^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} x'(t(s))y'(t(s)) & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} x'(t(s))z'(t(s)) \\ -\gamma y'(t(s)) & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} x'(t(s))y'(t(s)) & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} y'(t(s))^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} y'(t(s))z'(t(s)) \\ -\gamma z'(t(s)) & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} x'(t(s))z'(t(s)) & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} y'(t(s))z'(t(s)) & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} z'(t(s))^2 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Habría aceleración si la transformación necesaria para enviar al observador al reposo en un tiempo  $s + \delta s$  es diferente a  $B(s)$ . Consideramos un boost infinitesimal tal que  $\bar{B}(\delta s)B(s) = B(s + \delta s)$ . Expandimos a primer orden  $B(s + \delta s) \approx B(s) + \dot{B}(s)(\delta s)$ , de modo que

$$\bar{B}(\delta s) = (B(s) + \dot{B}(s)\delta s)B^{-1}(s) = I + \dot{B}(s)B^{-1}(s)\delta s. \quad (3.11)$$

Concluimos que sí hay una aceleración causada por  $\bar{B}(\delta s)$ , y está definida por

$$\frac{1}{\delta s}(\bar{B}(\delta s)U_p - U_p) = \dot{B}(s)B^{-1}(s)U_p. \quad (3.12)$$

La parte izquierda es el cambio de la velocidad propia  $U_p$  respecto a  $s$ , que es por definición la aceleración propia  $A_p(s)$ . Por lo tanto, la aceleración propia que experimenta el observador está dada por la transformación  $-\dot{B}(s)B^{-1}(s)$  aplicada a  $U_p(s)$ , donde el signo negativo surge porque el boost infinitesimal compensa por la aceleración al

tiempo propio  $s$ . Se encuentra que

$$A_p(s) = -\dot{B}(s)B^{-1}(s)U_p = \begin{pmatrix} 0 \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

De (3.13) obtenemos

$$\vec{a} = \gamma\vec{r}'' + \frac{\gamma}{\gamma+1}\gamma'\dot{\vec{r}}', \quad (3.14)$$

donde  $\gamma' = (1/2)\gamma^3 d(\dot{\vec{r}}')^2/dt$ . Aquí,  $\vec{r}$  es el radio vector y el punto indica derivada con respecto al tiempo propio. Se puede notar que si se toma  $\gamma' = 0$  en (3.14) entonces uno tiene  $d(\dot{\vec{r}}')^2/dt = 0$  y (3.14) se vuelve  $\vec{a} = 0$ , lo que nos dice que el movimiento es una traslación simple a velocidad constante. También, tenemos que el módulo cuadrado de la cuatro-aceleración es

$$A^2 = A_p^2 = -\vec{a} \cdot \vec{a} = -(\gamma^4(\vec{r}'')^2 + (\gamma')^2), \quad (3.15)$$

donde el signo menos viene de la signatura  $(+---)$ . Estudiamos el caso con aceleración propia constante,  $\vec{a}$ , de módulo cuadrado constante  $\vec{a}^2 = \alpha^2$ . Considerando  $\gamma = \dot{t}$ , la ecuación (3.14) se vuelve

$$\ddot{\vec{r}}(s) = \vec{a} + \frac{\dot{t}(s)}{\dot{t}(s)+1}\dot{\vec{r}}(s). \quad (3.16)$$

Parametrizamos la cuatro-velocidad como

$$U(s) = \begin{pmatrix} \dot{t}(s) \\ \dot{\vec{r}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(f(s)) \\ \sinh(f(s))\hat{n}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario, cuya derivada es

$$\dot{\hat{n}} = \frac{1}{\sinh(f)}(\vec{a} - \dot{f}\hat{n}). \quad (3.18)$$

Ya que  $\dot{\hat{n}} \cdot \hat{n} = 0$ , obtenemos

$$\dot{f} = \vec{a} \cdot \hat{n} \quad \text{and} \quad \ddot{f} = \vec{a} \cdot \dot{\hat{n}}, \quad (3.19)$$

lo que nos lleva a la ecuación no lineal de segundo orden

$$\sinh(f)\ddot{f} + \dot{f}^2 - \alpha^2 = 0. \quad (3.20)$$

Una solución particular de esta ecuación que corresponde con la velocidad inicial  $U^T(0) = (1, 0)$  es

$$f_p(s) = \alpha s, \quad (3.21)$$

con  $\dot{\hat{n}}_p = 0$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \alpha^2$  y para este caso particular,  $\hat{n}_p = \vec{a}/\alpha$ . Sin embargo, ahora calculamos la 1 + 3-aceleración, Jerk, y Snap, manteniendo una forma funcional sin especificar para  $f(s)$  restringida solo por la ecuación (4.9) para permitir la posibilidad de usar la solución general en lugar de la particular (3.21). Podemos mostrar que la parametrización hiperbólica (3.17) preserva la forma analítica de todos los parámetros cinemáticos sin importar la forma de  $f(s)$ .

### 3.2.1. Cuatro-Aceleración

En el espacio-tiempo de Minkowski cuatro-dimensional  $\hat{n}$  no es necesariamente proporcional a  $\vec{a}$ , y en general es un vector no constante relacionado a  $\dot{f}$  por las ecuaciones (4.8). La solución particular  $f_p(s) = \alpha s$  es equivalente a  $\vec{a} - \hat{n}_p \dot{f}_p = 0$ , mientras que en general  $\vec{a} - \hat{n} \dot{f} \neq 0$ . Para un sistema Minkowskiano de dos dimensiones podemos omitir  $\hat{n}$ , ya que la velocidad y la aceleración solo pueden ir en la misma dirección, pero para más dimensiones necesitamos mantener un  $\hat{n}$  general.

Ya contamos con la expresión de la velocidad en términos de  $f(s)$ , (3.17), y por lo tanto los cálculos para la aceleración son directos con  $A = dU/ds$

$$A(s) = \begin{pmatrix} \dot{f} \sinh(f) \\ \dot{f} \cosh(f) \hat{n}(s) + \sinh(f) \dot{\hat{n}} \end{pmatrix} = \dot{f} \begin{pmatrix} \sinh(f) \\ \cosh(f) \hat{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} - \dot{f} \hat{n} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

y usando (4.7) esto se vuelve

$$A(s) \begin{pmatrix} \dot{f} \sinh(f) \\ \dot{f}(\cosh(f) - 1)\hat{n} + \vec{a} \end{pmatrix} = \dot{f} \begin{pmatrix} \sinh(f) \\ \cosh(f)\hat{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} - \dot{f}\hat{n} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Contrario a  $\vec{a}$ , a pesar de que  $\hat{n}$  es un vector unitario, no es constante con respecto al tiempo propio, ya que puede cambiar de acuerdo con (4.7).

Diferenciando  $U^2 = 1$  con respecto al tiempo propio obtenemos  $U \cdot A = 0$ , lo cual muestra el hecho básico de que la velocidad y aceleración relativistas siempre son ortogonales una a otra. Esto se puede comprobar directamente mediante el producto interno de la cuatro-velocidad con la cuatro-aceleración

$$U \cdot A = U_t A_t - \vec{U} \cdot \vec{A} = \dot{f} \sinh(f) \cosh(f) - \dot{f} \sinh(f) \cosh(f) + \dot{f} \sinh(f) - \sinh(f)\hat{n} \cdot \vec{a}, \quad (3.24)$$

donde el subíndice  $t$  hace referencia a la componente temporal y la notación vectorial hace referencia a la componente espacial. Es fácil ver que (3.24) se hace cero si consideramos (4.8), entonces  $U \cdot A = 0$  se satisface. Ahora, calculemos el módulo de la cuatro-aceleración, donde se espera que sea  $-\alpha^2$  debido a que la aceleración propia solo tiene componentes espaciales y que los módulos de los cuatro-vectores son invariantes. Como  $A^2 = A_t^2 - \vec{A}^2$ , tenemos para las componentes

$$A_t = \dot{f} \sinh f, \quad (3.25)$$

de modo que  $A_t^2 = \dot{f}^2 \sinh^2 f$ . Similarmente  $\vec{A} = \hat{n}\dot{f}(\cosh f - 1) + \vec{a}$ , y ya que  $\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{A}^2 &= \dot{f}^2(\cosh f - 1)^2 \hat{n} \cdot \vec{n} + \hat{a} \cdot \hat{a} + 2\hat{a} \cdot \hat{n}\dot{f}(\cosh f - 1) \\ &= \dot{f}^2(\cosh f - 1)^2 + 2\dot{f}^2(\cosh f - 1) + \alpha^2 \\ &= \alpha^2 + \dot{f}^2(\cosh^2 f - 1), \end{aligned} \quad (3.26)$$

por lo que

$$A^2 = \dot{f}^2 \sinh^2 f - \alpha^2 - \dot{f}^2 \cosh^2 f + \dot{f}^2 = -\alpha^2. \quad (3.27)$$

Vemos que  $A^2 = -\alpha^2$  se satisface para todo  $f(s)$ .

### 3.2.2. Cuatro-Jerk

En general, se espera que el Jerk no sea de importancia en la dinámica clásica de partículas ya que la ecuación de movimiento de Newton es de segundo orden  $F(x, \dot{x}) = m\ddot{x}$ . Sin embargo, si la fuerza depende de  $x$  o  $\dot{x}$  en tiempos previos, decimos que la fuerza tiene memoria, entonces, si tomamos la derivada temporal de la ecuación de movimiento tendremos dinámica del Jerk que contendrán términos extras. Tales modelos son usados en teorías del caos. La dinámica del Jerk se ha estudiado en casos tres-dimensionales específicos tales como [14, 15], y sus aplicaciones se han investigado en cristales con memoria [16], Jerks geomagnéticos [17] y otros sistemas caóticos [18]. Sistemas incluso más raros son aquellos que consideran el Snap, la derivada del Jerk, aunque el Snap se vuelve de importancia en algunos sistemas eléctricos caóticos [19].

En un espacio-tiempo de Minkowski cuatro-dimensional, calculamos el cuatro-Jerk derivando la cuatro-aceleración (3.22) con respecto al tiempo propio

$$J(s) = \frac{dA}{ds} = \begin{pmatrix} \ddot{f} \sinh(f) + \dot{f}^2 \cosh(f) \\ \dot{f}(\cosh(f) - 1)\dot{\hat{n}} + [\ddot{f}(\cosh(f) - 1) + \dot{f}^2 \sinh(f)]\hat{n} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Usando (4.7) y (4.9) tenemos para la componente temporal que

$$J_t = \alpha^2 + \dot{f}^2(\cosh f - 1), \quad (3.29)$$

así que para obtener  $J_t^2$  solo necesitamos elevar al cuadrado la ecuación anterior. Simi-

larmente, tenemos para la componente espacial

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= \hat{n}[\ddot{f}(\cosh f - 1) + \dot{f}^2 \sinh f] + \dot{f} \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} (\vec{a} - \dot{f} \hat{n}) \\
&= \hat{n} \left[ \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} (\alpha^2 - \dot{f}^2) + \dot{f}^2 \frac{\cosh f}{\sinh f} (\cosh f - 1) \right] + \dot{f} \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} \vec{a} \\
&= \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} \left\{ \vec{n} [\alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1)] + \dot{f} \vec{a} \right\} \\
&= \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} \left\{ \vec{n} [\alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1)] + \dot{f} \vec{a} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

La expresión final para el Jerk es

$$J(s) = \left( \begin{array}{c} \alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1) \\ \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} \left\{ [\alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1)] \hat{n} + \dot{f} \vec{a} \right\} \end{array} \right), \tag{3.31}$$

la cual también se puede escribir como

$$J(s) = \dot{f}^2 \left( \begin{array}{c} \cosh(f) \\ \sinh(f) \hat{n} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \alpha^2 - \dot{f}^2 \\ \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} \left[ (\alpha^2 - 2\dot{f}^2) \hat{n} + \dot{f} \vec{a} \right] \end{array} \right). \tag{3.32}$$

El módulo espacial es el producto interno de la componente espacial consigo misma

$$\vec{J}^2 = \left( \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} \right)^2 \left\{ \left[ \alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1) \right]^2 + \dot{f}^2 + 2\dot{f}^2 \left[ \alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1) \right] \right\}. \tag{3.33}$$

Por lo tanto, el módulo cuadrado total,  $J^2 = J_t^2 - \vec{J}^2$ , es

$$J^2 = \alpha^4 \frac{2 + (\dot{f}/\alpha)^2 (\cosh f - 1)}{\cosh f + 1}, \tag{3.34}$$

donde se usó  $\hat{n} \cdot \vec{a} = \dot{f}$ . Derivando dos veces  $U^2 = 1$  obtenemos  $U \cdot J + A^2 = 0$  de modo que  $U \cdot J = -A^2 = \alpha^2$ , y podemos comprobar que se satisface para (3.22) y (3.28),

pues

$$\begin{aligned}
U \cdot J &= \alpha^2 \cosh f + \dot{f}^2 (\cosh f - 1) \cosh f - (\cosh f - 1) \{[\alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1)] + \dot{f}^2\} \\
&= \alpha^2 \cosh f - (\cosh f - 1) \alpha^2 + \dot{f}^2 \cosh f (\cosh f - 1) - (\cosh f - 1)^2 \dot{f}^2 - (\cosh f - 1) \dot{f}^2 \\
&= \alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1) [\cosh f - \cosh f + 1 - 1] \\
&= \alpha^2.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Ahora vemos un desarrollo interesante pues  $J^2$  ya no parece ser constante (en comparación con la forma que tomaba con la solución particular  $f_p(s) = \alpha(s - s_0)$ ). Para comprobar esto, calculamos la derivada de (3.34) y encontramos que

$$\frac{d}{ds}(J^2) = \frac{2\alpha^2 \dot{f} \sinh(f) (\ddot{f} \sinh(f) - \alpha^2 + \dot{f}^2)}{(\cosh f + 1)^2}, \tag{3.36}$$

pero, cuando consideramos la ecuación (4.9), tenemos para (3.36) que

$$\frac{d}{ds}(J^2) = \frac{2\alpha^2 \dot{f} \sinh(f)}{(\cosh f + 1)^2} (\alpha^2 - \dot{f}^2 - \alpha^2 + \dot{f}^2) = 0, \tag{3.37}$$

así que  $J^2$  sí es constante para cualquier  $f(s)$  con esta parametrización.

### 3.2.3. Cuatro-Snap

El Snap se define como la derivada del Jerk respecto al tiempo propio

$$S(s) = \frac{d}{ds} \left( \begin{array}{c} \alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1) \\ \frac{\cosh f - 1}{\sinh f} \{[\alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1)] \hat{n} + \dot{f} \vec{a}\} \end{array} \right), \tag{3.38}$$

el cual, considerando (4.7) y (4.9), se puede escribir como

$$S(s) = \left( \begin{array}{c} \tanh\left(\frac{f}{2}\right) \dot{f} (2\alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1)) \\ \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{f}{2}\right) (2\alpha^2 + \dot{f}^2 (\cosh f - 1)) \left(\vec{a} + 2\dot{f} \sinh^2\left(\frac{f}{2}\right) \hat{n}\right) \end{array} \right). \tag{3.39}$$

También podemos escribir (3.39) como

$$S(s) = \dot{f}^3 \begin{pmatrix} \sinh(f) \\ \cosh(f)\hat{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\dot{f}(\alpha^2 - \dot{f}^2) \tanh\left(\frac{f}{2}\right) \\ \frac{2\alpha^2 + \dot{f}^2(\cosh f - 1)}{\cosh f + 1} \vec{a} + \left( \dot{f} \frac{(2\alpha^2 + \dot{f}^2(\cosh f - 1)) \sinh^2 f}{(\cosh f + 1)^2} - \dot{f}^3 \cosh f \right) \hat{n} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Ahora que tenemos el cuatro-Snap, calculamos el módulo y su derivada para ver si es constante así como el de la aceleración y el Jerk. El módulo al cuadrado,  $S_t^2 - \vec{S} \cdot \vec{S}$ , está dado por

$$S^2 = -\frac{1}{4} \operatorname{sech}^4\left(\frac{f}{2}\right) \left(2\alpha^3 + \alpha \dot{f}^2 (\cosh f - 1)\right)^2, \quad (3.41)$$

donde usamos  $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$  y  $\vec{a} \cdot \hat{n} = \dot{f}$ . Se puede comprobar fácilmente que  $dS^2/ds = 0$

$$\frac{d}{ds}(S^2) = -\alpha^2 \operatorname{sech}^4\left(\frac{f}{2}\right) \tanh\left(\frac{f}{2}\right) \dot{f} (2\alpha^2 \dot{f}^2 (\cosh(f) - 1)) (\ddot{f} \sinh(f) + \dot{f}^2 - \alpha^2) = 0, \quad (3.42)$$

donde se consideró (4.9). Debido a los resultados anteriores ahora asumimos que la derivada de cada módulo de las derivadas consecutivas (Crackle, Pop, etc.) será cero y no realizaremos más cálculos para esto. También notamos que si se usa la solución particular  $f(s) = f_p(s) = \alpha s$  entonces (3.22), (3.32) y (3.40) se vuelven (3.4) y (3.5), respectivamente.

### 3.3. La solución general $f(s)$ a la ecuación para el caso 1 + 3 con parametrización hiperbólica

La ecuación (4.9) es vital para ñnevar a las expresiones de la aceleración, Jerk, y Snap a su forma simplificada que contiene solo términos en  $f$  y  $\dot{f}$ . Además, las derivadas de sus módulos correspondientes se hacen cero solo cuando consideramos (4.9). Para encontrar una solución a (4.9), notamos que esta es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea donde el término  $\sinh(f(s))$  complica la ecuación. Evitamos esto



mediante el siguiente cambio de variable dependiente

$$f(s) = \ln(g(s)), \quad (3.43)$$

de modo que la derivada y segunda derivada son

$$\begin{aligned} \dot{f}(s) &= \frac{\dot{g}(s)}{g(s)}, \\ \ddot{f}(s) &= \frac{\ddot{g}(s)g(s) - \dot{g}^2(s)}{g^2(s)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

El seno hiperbólico se vuelve

$$\sinh(f(s)) = \frac{1}{2} \frac{g^2(s) - 1}{g(s)}. \quad (3.45)$$

que vuelve (4.9) en

$$g(g^2 - 1)\ddot{g} - (g^2 - 2g - 1)\dot{g}^2 - 2\alpha^2 g^3 = 0. \quad (3.46)$$

Podemos ir aún más lejos y proponer una forma particular para  $g(s)$ , de modo que coincida con una función hiperbólica inversa, por comodidad. Para arcsinh y arccosh las ecuaciones diferenciales son muy complicadas y no pudimos encontrar una solución. Para arccoth se puede encontrar una solución, pero no es una solución física. Sin embargo, para arctanh definida por

$$\operatorname{arctanh}(h) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+h}{1-h} \right), \quad (3.47)$$

podemos escribir con un segundo cambio de variable

$$g(s) = \frac{1+h(s)}{1-h(s)}, \quad (3.48)$$

en (3.46), obtenemos

$$4h(h^2 - 1)\ddot{h} - 4(h^2 + 1)\dot{h}^2 - \alpha^2(h^2 - 1)^3 = 0. \quad (3.49)$$

Podemos hacer aún otro cambio de variable para simplificar más la ecuación diferencial, puesto la forma de la ecuación y los términos entre paréntesis se propone un cambio en la forma  $h(s) = \sqrt{m(s)}$  lo que nos lleva a una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} (m-1)(2\dot{m} - \dot{m}^2/m) - (m+1)\frac{\dot{m}^2}{m} - \alpha^2(m-1)^3 &= 0, \\ &= (m-1)\ddot{m} - \dot{m}^2 - \frac{\alpha^2}{2}(m-1)^3 = 0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde un simple cambio de la forma  $m \rightarrow m+1$  deja la ecuación en la forma

$$m\ddot{m} - \dot{m}^2 - \frac{\alpha^2}{2}l^3 = \ddot{m} - \frac{\dot{m}^2}{m} - \frac{\alpha^2}{2}l^2 = 0, \quad (3.51)$$

de donde se puede encontrar una solución de una maera mucho más simple, cuidando las condiciones que surgen de los cambios de variables realizados. La solución es de la forma

$$m(s) = \frac{1}{\alpha^2} \left( \beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2) \tanh^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} (s - s_0) \right) \right). \quad (3.52)$$

Se encontró una de las constantes mediante condiciones iniciales, pero una constante,  $\beta$ , nunca queda completamente determinada pues las condiciones iniciales que se tienen, que son las de la velocidad, son redundantes aparentemente por la forma hiperbólica de las funciones. Podemos regresar a la expresión para  $h(s)$

$$h_{\pm}(s) = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2) \tanh^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} (s - s_0) \right)}, \quad (3.53)$$

donde  $s_0$  y  $\beta$  son constantes de integración que se pueden determinar mediante condiciones iniciales. Además, usaremos la notación  $s_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} (s - s_0)$  y  $\text{Th}^2(s_{\alpha\beta}) = (\alpha^2 - \beta^2) \tanh^2(s_{\alpha\beta})$ ; reemplazando (3.53) en nos da (3.48)  $g(s)$  en la forma

$$g(s)_{\pm} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}}{\alpha \mp \sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}}, \quad (3.54)$$

lo que implica

$$f(s)_{\pm} = \ln \left( \frac{\alpha \pm \sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}}{\alpha \mp \sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}} \right), \quad (3.55)$$

o de manera alternativa

$$f(s)_{\pm} = \pm 2 \text{arctanh} \left( \frac{1}{\alpha} \sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})} \right). \quad (3.56)$$

Si  $\beta = 0$ , entonces la solución general (3.56) se reduce a la particular,  $f_p(s) = \alpha(s - s_0)$ .

Considerando (3.56) en (3.34), el módulo cuadrado del Jerk se obtiene en términos de  $\alpha$  y la condición inicial  $\beta$

$$J^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \beta^2), \quad (3.57)$$

lo cual muestra que el módulo cuadrado del Jerk es una cantidad constante menor a  $\alpha^4$ . Con respecto a el módulo cuadrado del cuatro-Snap en (3.41), uno obtiene

$$S^2 = -\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)^2 = -\frac{J^4}{\alpha^2}, \quad (3.58)$$

al usar la solución general (3.56), lo cual muestra que el cuatro-Snap es tipo espacio de módulo cuadrado menor a  $\alpha^6$ . También se puede escribir la solución general (3.56) en términos del módulo del Jerk (3.57) como

$$f(s)_{\pm} = \pm 2 \text{arctanh} \left( \frac{1}{\alpha} \sqrt{\left( \alpha^2 - \frac{J^2}{\alpha^2} \right) + \frac{J^2}{\alpha^2} \tanh^2 \left( \frac{1}{2} \frac{|J|}{\alpha} (s - s_0) \right)} \right). \quad (3.59)$$

Las fórmulas de la solución general en términos de los módulos de las erivadas de orden mayor se pueden escribir fácilmente. Por ejemplo, usando (3.58) se puede sustituir  $J^2$  en (3.59) por el módulo del Snap.

Debido a los cambios de variable realizados para  $f(s)$  y  $g(s)$ , hay algunas restricciones que debemos tomar en cuenta. La ecuación (3.43) implica que  $g(s) \geq 1$ , mientras que la ecuación (3.48) requiere que  $h(s) \in [0, 1)$ . Ya que  $0 \leq \tanh^2(s_{\alpha\beta}) \leq 1$  nos aseguramos de que  $h(s) \in [0, 1)$  solo si  $|\beta| < |\alpha|$ , y el caos límite  $h(s) \rightarrow 1$  sucede solo

cuando  $s \rightarrow \infty$  o  $|\alpha| = |\beta|$ .

### 3.3.1. Cantidades cinemáticas usando la solución general $f(s)$

Al considerar la ecuación (3.56) las cantidades cinemáticas calculadas en las secciones previas se pueden expresar en términos de  $s_{\alpha\beta}$ . Para la cuatro-aceleración en (3.22), tenemos

$$A(s) = \frac{\alpha \text{Th}(s_{\alpha\beta})}{\alpha^2 - \beta^2} \begin{pmatrix} 2\alpha \cosh^2(s_{\alpha\beta}) \\ \frac{\beta^2 + \alpha^2 \cosh(2s_{\alpha\beta})}{\sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}} \hat{n} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{a} - \frac{\text{Th}(s_{\alpha\beta})}{\sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}} \hat{n} \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Para  $\beta = 0$ , el primer término se reduce a (3.4), mientras que el segundo término se hace cero.

Para el cuatro-Jerk, se obtiene

$$J(s) = \frac{\alpha^2 \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta}))} \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha^2 \cosh(2s_{\alpha\beta}) \\ 2\alpha \cosh^2(s_{\alpha\beta}) \sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})} \hat{n} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})} \\ \text{Th}(s_{\alpha\beta}) \hat{a} + \frac{\beta^2 - \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}{\sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}} \hat{n} \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Para  $\beta = 0$ , el primer término se reduce a la parte izquierda de (3.5), mientras que el segundo término se hace cero.

Similarmente, para el Snap

$$\begin{aligned}
S(s) = & \frac{\alpha^3 \text{Th}^3(s_{\alpha\beta})}{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta}))^{3/2}} \begin{pmatrix} 2\alpha\sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})} \cosh^2(s_{\alpha\beta}) \hat{n} \\ \beta^2 + \alpha^2 \cosh(2s_{\alpha\beta}) \end{pmatrix} + \\
& \frac{1}{\cosh^2(s_{\alpha\beta})} \begin{pmatrix} 0 \\ \left[ (\alpha^2 - \beta^2) + \frac{\text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})} (\beta^2 + \alpha^2 \sinh^2(s_{\alpha\beta})) \right] \vec{a} \end{pmatrix} + \\
& \frac{\text{Th}(s_{\alpha\beta})}{\sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}} \begin{pmatrix} \frac{2\alpha\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}} \\ \left[ \frac{2\sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}}{\cosh(2s_{\alpha\beta}) + 1} \left( \alpha^2 - \beta^2 + (\beta^2 + \alpha^2 \sinh^2 s_{\alpha\beta}) \frac{\text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})} \right) - \frac{\alpha^3 \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})} \frac{\beta^2 + \alpha^2 \cosh(2s_{\alpha\beta})}{\alpha^2 - \beta^2} \right] \hat{n} \end{pmatrix}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Para  $\beta = 0$ , el primer término se reduce a la parte derecha de (3.5), mientras que el segundo y tercer término se eliminan uno al otro.

### 3.4. Hipérbolas de Rindler modificadas

Si se usa la solución particular  $f_p(s)$ , es fácil obtener el comportamiento geométrico hiperbólico estandar en un plano definido por las coordenadas  $t(s)$  y  $x(s)$  si integramos los componentes correspondientes de la velocidad parametrizada (3.17). En lugar de esto, usamos la solución general arctanh para ver gráficamente el tipo de comportamiento de las worldlines. Usando (3.17) y (3.56) calculamos la coordenada temporal como

$$t(s) = \int \cosh(f(s)) ds = \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{-3/2} \frac{\sinh(2s_{\alpha\beta})}{\alpha} + \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}} s. \tag{3.63}$$

Similarmente, al integrar la componente espacial de la velocidad a lo largo de  $\hat{n}$ , que es  $\sinh(f)$ , nos lleva a la proyección  $r_n$

$$\begin{aligned}
r_n(s) &= \int \sinh(f(s)) ds \\
&= \frac{2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}} \left( \alpha \sinh(s_{\alpha\beta}) \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 \sinh^2(s_{\alpha\beta})} + \beta \text{arcsinh} \left( \frac{\alpha \sinh(s_{\alpha\beta})}{\beta} \right) \right). \tag{3.64}
\end{aligned}$$

La gráfica de  $r_n(s)$  como función de  $s$  se muestra en la fig. (3.1), para diferentes valores de  $\beta$ , mientras en las coordenadas  $t$  vs  $r_n$  como regularmente se presenta en la literatura [3, 6]

se muestra en la fig. (3.2). El valor  $\beta = 0$  corresponde a la solución particular  $f_p(s) = \alpha s$ .

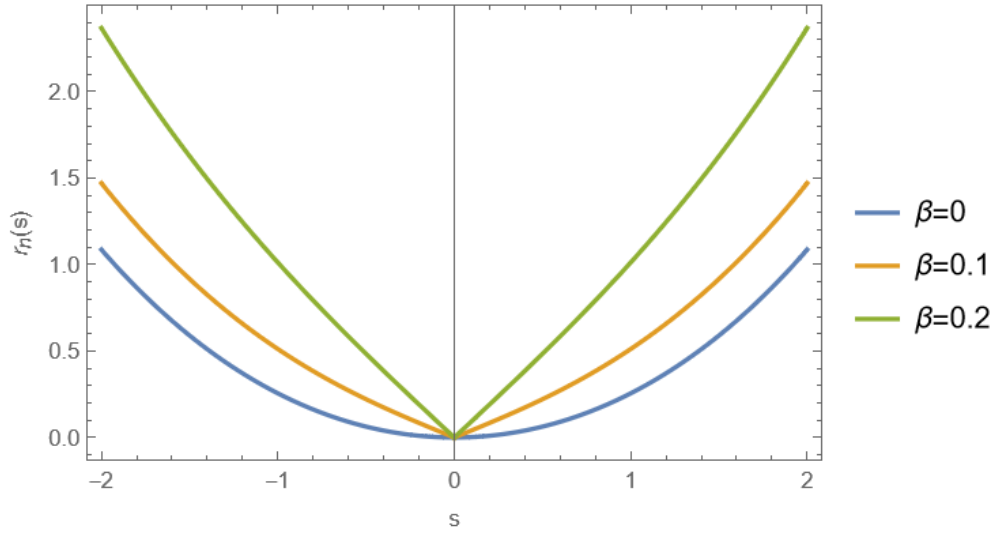


Figura 3.1: Gráfica de  $r_n(s)$  vs  $s$ , con  $\alpha = 0,5$ , mientras se cambia  $\beta$ .

### 3.5. Velocidad hiperbólica

Recordamos que se puede representar la cuatro-velocidad como  $U^T = \gamma(1, \vec{r}')$ , y que para la parametrización hiperbólica que

$$U^T(s) = (\cosh(f(s)), \sinh(f(s))\hat{n}), \quad (3.65)$$

entonces

$$\gamma = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - (r')^2}} = \cosh(f(s)), \quad (3.66)$$

de donde podemos obtener

$$|r'| = \tanh(f(s)), \quad (3.67)$$

el módulo de la tres-velocidad. Considerando la ecuación (3.56), y considerando que

$$\tanh(2\text{arctanh}(x)) = \tanh\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad (3.68)$$

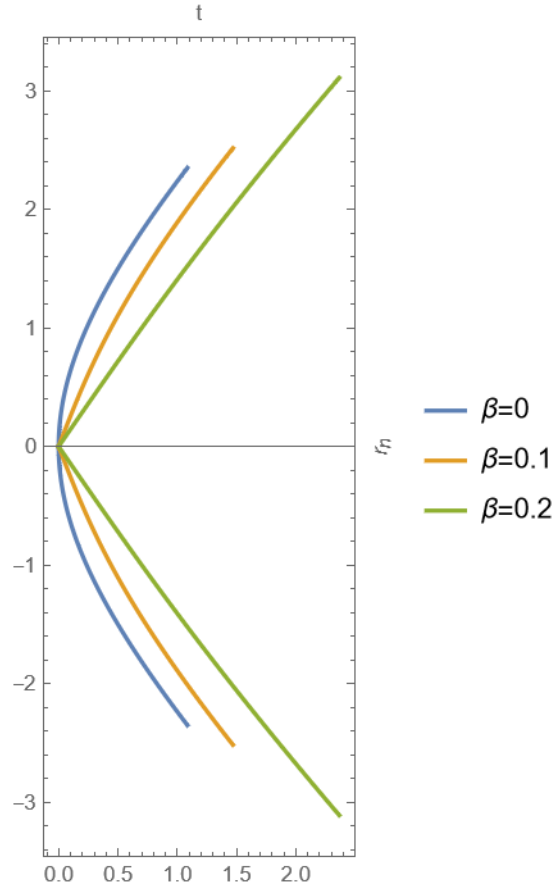


Figura 3.2: Para  $\alpha = 0,5$  fijo, hipérbola de Rindler original ( $\beta = 0$ ) e hipérbolas modificadas de Rindler con  $\beta = 0,1$ , y  $\beta = 0,2$ , respectivamente.

podemos escribir (3.67) como

$$|r'| = \tanh(f(s)) = \frac{\alpha(1 + \cosh(2s_{\alpha\beta}))\sqrt{\beta^2 + \text{Th}^2(s_{\alpha\beta})}}{\beta^2 + \alpha^2 \cosh(2s_{\alpha\beta})}. \quad (3.69)$$

### 3.6. Ecuaciones de Frenet-Serret

Las ecuaciones de Frenet-Serret, nombradas tras los dos matemáticos franceses Jean Frenet y Joseph Serret que las descubrieron de manera independiente en 1847 y 1851, respectivamente, describen la cinemática de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en un espacio Euclideo tres-dimensional y también describen las propiedades geométricas independiente de las cinemáticas. Son ecuaciones diferenciales vectoriales que cuentan con dos parámetros escalares  $\kappa$  y  $\tau$  que definen la curvatura y torsión de la curva espacial, respecti-

vamente. Intuitivamente, la curvatura mide qué tan torcida está la curva con respecto a una línea recta y la torsión mide que tan torcida está la curva con respecto a un plano.

El marco Frenet-Serret es especialmente útil en la tarea de identificar parámetros físicos en términos de otros parámetros matemáticos más ambiguos y viceversa, si se necesita. Originalmente, las fórmulas de Frenet-Serret fueron desarrolladas en un espacio Euclideo tres-dimensional, y describen la cinemática de un cuerpo que se mueve en el espacio. Son embargo, en 1981, en su artículo, [8], Letaw generalizó las ecuaciones de Frenet-Serret a un espacio-tiempo cuatro-dimensional.

Las fórmulas (generalizadas) de Frenet-Serret están dadas en términos de las derivadas de la cuatro-velocidad y de los parámetros de Frenet-Serret que dependen del tiempo propio. El número de ecuaciones que se obtienen de estas fórmulas dependen del número de parámetros usados en sus cálculos. Hay tres parámetros que podemos tomar en cuenta, aunque en realidad se puede generalizar a  $n$  parámetros, estos son: curvatura  $\kappa$ , torsión  $\tau$ , e hipertorsión  $\nu$ , donde  $s$  es el tiempo propio. Por ejemplo, si tenemos que los tres parámetros simultaneos son cero, entonces la derivada de la velocidad respecto al tiempo propio también es cero, de modo que el movimiento se da a velocidad constante y la worldline es simplemente  $x(s) = v_0 s - s_0$  donde  $c_1$  es una constante de integración. Cada parámetro extra que tomemos en cuenta nos da una ecuación extra, topando a los tres parámetros tendremos cuatro ecuaciones en total. Estos parámetros definen la dimensionalidad del movimiento y se relacionan a los parámetros físico, por ejemplo, a la aceleración.

En la generalización de Letaw [8], las ecuaciones de Frenet-Serret en su forma matricial-diferencial son

$$\dot{\Lambda}_a^\mu(s) = K_a^b \Lambda_b^\mu(s), \quad (3.70)$$

donde

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 & -\nu(s) \\ 0 & 0 & \nu(s) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$



Aquí,  $\Lambda_a^\mu$  es una tétrada de cuatro-vectores ortonormales construidos en cada punto de la worldline  $X^\mu(s)$ , que construimos a su vez a partir de la cuatro-velocidad como primer elemento, y cada elemento posterior se construyó mediante el proceso de Gram-Schmidt. Usamos la signatura  $\eta \rightarrow (+, -, -, -)$  en donde el índice griego (en este caso  $\mu$ ) indica la componente correspondiente del cuatro-vector, corriendo de 0 a 3, esto es,  $\mu = 0$  indica la componente temporal y  $\mu = 1, 2, 3$  indica las componentes espaciales. Similarmente, el índice latino  $a$  corre de 0 a 3 e indica el elemento correspondiente de la tétrada; no se debe confundir con la aceleración (propia),  $\vec{a}$ . De la misma manera,  $b$ , corre de 0 a 3 y ayuda con la identificación de los parámetros en  $K$ . Aún identificamos  $\kappa(s)$  como la curvatura y  $\tau(s)$  con la torsión, pero ahora tenemos un nuevo parámetro  $\nu(s)$  llamado hipertorsión que juega el rol de una componente de la velocidad angular propia [8]. Los elementos de la tétrada deben satisfacer la condición ortonormal  $V_{a\mu}V_b^\mu = \eta_{ab}$ . Construyamos los elementos de la tétrada. Tomamos el primer elemento de la cuatro-velocidad

$$\Lambda_0^\mu = U^\mu, \quad (3.72)$$

el cual ya satisface la condición de ortonormalidad ya que  $U_\mu U^\mu = 1$ , por lo que no necesita normalizarse. Usamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para los elementos de  $\Lambda_a^\mu$ , con  $a = 1, 2, 3$ , de modo que

$$(\Lambda_1^\mu)_{NN} = A^\mu - \left( \frac{U_\nu A^\nu}{U_\delta U^\delta} \right) U^\mu = A^\mu, \quad (3.73)$$

donde el subfijo  $NN$  indica que el elemento todavía no está normalizado. Hemos usado la derivada de  $U_\nu U^\nu = 1$  para determinar que  $U_\nu A^\nu = 0$ . Determinamos el factor de normalización,  $N$ , por

$$\Lambda_{1\nu} \Lambda_1^\nu = N^2 (A_\nu A^\nu) = -1, \quad (3.74)$$

entonces considerando  $A_\nu A^\nu = -\alpha^2$  tenemos que  $N = 1/\alpha$  y así

$$\Lambda_1^\mu = \frac{A^\mu}{\alpha}. \quad (3.75)$$

Similarmente, calculamos el elemento para  $a = 2$

$$(\Lambda_2^\mu)_{NN} = J^\mu - \left( \frac{J_\nu U^\nu}{U_\delta U^\delta} \right) U^\mu - \left( \frac{J_\nu A^\nu}{A_\delta A^\delta} \right) A^\mu = J^\mu - \alpha^2 U^\mu, \quad (3.76)$$

donde hemos usado la derivada de  $A_\nu A^\nu = -\alpha^2$  para determinar que  $A_\nu J^\nu = 0$  y la segunda derivada de  $U_\nu U^\nu = 1$  para determinar que  $U_\nu J^\nu = \alpha^2$ . El factor de normalización se obtiene como en (3.74) y considerándolo tenemos finalmente que

$$\Lambda_2^\mu = \frac{J^\mu - \alpha^2 U^\mu}{\sqrt{\alpha^4 - J_\nu J^\nu}}. \quad (3.77)$$

Ahora calculemos el cuarto y último elemento de la tétrada,  $a = 3$ , de la misma manera que los anteriores

$$\begin{aligned} (\Lambda_3^\mu)_{NN} &= S^\mu - \left( \frac{U_\nu S^\nu}{U_\delta U^\delta} \right) U^\mu - \frac{A_\nu S^\nu}{A_\delta A^\delta} A^\mu - \frac{(J_\nu - \alpha^2 U_\nu) S^\nu}{(J_\nu - \alpha^2 U_\nu)(J^\nu - \alpha^2 U^\nu)} (J^\mu - \alpha^2 U^\mu) \\ &= S^\mu - \frac{1}{\alpha^2} (J_\nu J^\nu) A^\mu, \end{aligned} \quad (3.78)$$

donde hemos usado (3.37) para encontrar que  $A_\nu J^\nu = 0$  y de la cuarta derivada de  $U_\nu U^\nu = 1$  obtenemos  $U_\nu J^\nu = 0$ . Considerando el factor de normalización tenemos

$$\Lambda_3^\mu = \frac{S^\mu - \frac{1}{\alpha^2} (J_\nu J^\nu) A^\mu}{\sqrt{-S_\nu S^\nu - \frac{1}{\alpha^2} (J_\nu J^\nu)^2}}. \quad (3.79)$$

Todo junto es

$$\begin{aligned} \Lambda_0^\mu &= U^\mu, \\ \Lambda_1^\mu &= \frac{A^\mu}{\alpha}, \\ \Lambda_2^\mu &= \frac{J^\mu - \alpha^2 U^\mu}{\sqrt{\alpha^4 - J_\nu J^\nu}}, \\ \Lambda_3^\mu &= \frac{S^\mu - \frac{1}{\alpha^2} (J_\nu J^\nu) A^\mu}{\sqrt{-S_\nu S^\nu - \frac{1}{\alpha^2} (J_\nu J^\nu)^2}}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ahora podemos reemplazar la tétrada  $\Lambda_a^\mu$  en (3.70), pero para hacerlo, primero debemos considerar que los parámetros de Frenet-Serret en (3.81) para que sea constante, llamados movimientos estacionarios, ya que el caso con parámetros de Frenet-Serret no constantes está fuera del alcance de este trabajo. Hacemos los cálculos gradualmente, esto es, primero consideramos que el único parámetro distinto de cero es la curvatura. Después, consideramos dos parámetros, la curvatura y la torsión. Finalmente, consideramos los tres parámetros. El caso en que todos los invariantes son cero es trivial, ya que simplemente tenemos  $\dot{\Lambda}_0^\mu = A^\mu = 0$ , que corresponde a velocidad constante.

### 3.6.1. Curvatura: Matriz $K$ $2 \times 2$

El caso no trivial más simple es cuando solo se consiera uno de los parámetros de Frenet-Serret distinto de cero, la curvatura  $\kappa$ . Esto significa que tendremos una matriz  $2 \times 2$   $K_{ab}$

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

y así el sistema de Frenet-Serret es un sistema de dos ecuaciones. En nuestro caso, la parametrización más compleja de la cuatro-velocidad nos da constantes indeterminadas porque se han usado todas las condiciones iniciales.

Cuando solo tenemos curvatura solo necesitamos dos elementos de la tétrada porque el índice solo corre con  $a = 0, 1$  y son los únicos componentes de la matriz de  $2 \times 2$   $K$  que no son cero, esto es

$$\dot{\Lambda}_0^\mu = K_0^b \Lambda^\mu \quad \text{and} \quad \dot{\Lambda}_1^\mu = K_1^b \Lambda^\mu. \quad (3.82)$$

Entonces, para  $a = 0$  en (3.70) y considerando (5.1) tenemos para la primer ecuación de Frenet-Serret

$$\dot{\Lambda}_0^\mu(s) = \frac{d}{ds}(U^\mu) = K_0^b \Lambda_b^\mu = K_0^0 \Lambda_0^\mu + \Lambda_0^1 \Lambda_1^\mu = K_0^1 \Lambda_1^\mu \quad (3.83)$$

que podemos escribir como

$$A^\mu = \kappa \frac{A^\mu}{\alpha}, \quad (3.84)$$

lo que implica que  $\kappa = \alpha$ . Esta primer ecuación nos dice que la cuatro-aceleración es la derivada de la cuatro-velocidad con respecto al tiempo propio, pero solo si la curvatura  $\kappa$  es la aceleración propia  $\alpha$ , y ya que la aceleración de hecho es la derivada de la cuatro-velocidad siempre, entonces el caos contrario también es cierto, la curvatura, un parámetro geométrico, es la aceleración. Similarmente, para  $a = 1$  tenemos la ecuación de Frenet-Serret

$$\dot{\Lambda}_1^\mu = \frac{d}{ds} \left( \frac{A^\mu}{\alpha} \right) = K_1^b V_b^\mu, \quad (3.85)$$

lo que implica

$$J^\mu = \alpha^2 U^\mu. \quad (3.86)$$

Podemos escribir (3.86) en términos del módulo de la cantidad cinemática  $A$

$$J^\mu + (A^2)U^\mu = 0, \quad (3.87)$$

donde escribimos el módulo dentro del paréntesis para evitar confusión con el componente  $\mu = 2$ . La ecuación (3.86) nos dice que el cuatro-Jerk es proporcional a la cuatro-velocidad. Es de particular importancia que la última ecuación se puede escribir como una ecuación diferencial para  $U^\mu$  ya que

$$\frac{d^2 U^\mu}{ds^2} - \alpha^2 U^\mu = 0. \quad (3.88)$$

Debido a que (3.88) es la ecuación de un oscilador hiperbólico asumimos que la cuatro-velocidad es

$$U(s) = \begin{pmatrix} \cosh(\kappa s) \\ \sinh(\kappa s) \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

una simple sustitución en (3.85) muestra que (3.89) es una solución. Entonces, las ecuaciones de Frenet-Serret con curvatura constante son compatibles con el movimiento hiperbólico, y encontramos que la curvatura es la aceleración propia.

### 3.6.2. Curvatura y torsión: Matriz $K$ $3 \times 3$

Inmediatamente surge la pregunta, ¿Qué sucede cuando consideramos más parámetros de Frenet-Serret? En este caso, la curvatura sigue siendo un parámetro constante y si sigue siendo la aceleración propia entonces deberíamos seguir teniendo movimiento hiperbólico, según nuestros resultados anteriores. Pero el nuevo parámetro tiene otras interesantes consecuencias para este nuevo movimiento hiperbólico.

Con curvatura y torsión, solo necesitamos los primeros tres elementos de la tétrada (5.1). Para  $a = 0$  tenemos la misma ecuación (3.83) por lo que se concluye que  $\kappa = \alpha$ . Para  $a = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} \dot{A}_1^\mu &= \frac{d}{ds} \left( \frac{A^\mu}{\alpha} \right) = K_1^b V_b^\mu \\ J^\mu - \alpha^2 U^\mu &= \kappa \tau \frac{J^\mu - \alpha^2 U^\mu}{\sqrt{\alpha^4 - J_\nu J^\nu}}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

por lo que concluimos que

$$J_\nu J^\nu = \alpha^2(\alpha^2 - \tau^2) = \kappa^2(\kappa^2 - \tau^2). \quad (3.91)$$

Esto significa que  $\Lambda_2^\mu$  de (5.1) se puede escribir como

$$\Lambda_2^\mu = \frac{J^\mu - \alpha^2 U^\mu}{\alpha\tau} = \frac{J^\mu - \kappa^2 U^\mu}{\kappa\tau}. \quad (3.92)$$

Finalmente, para  $a = 2$  tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_2^\mu &= K_2^{-1} \Lambda_1^\mu \\ \frac{S^\mu - \kappa^2 A^\mu}{\kappa\tau} &= -\frac{\tau}{\kappa} A^\mu, \end{aligned} \quad (3.93)$$

de modo que

$$S^\mu - (\kappa^2 - \tau^2) A^\mu = 0, \quad (3.94)$$

la cual la podemos escribir como la ecuación diferencial característica del sistema de Frenet-Serret de dos parámetros

$$\frac{d^4 U^\mu}{ds^4} - (\kappa^2 - \tau^2) \frac{d^2 U^\mu}{ds^2} = 0. \quad (3.95)$$

Por último, podemos escribir (3.94) en términos de los módulos de las cantidades cinemáticas  $A$  y  $J$  como

$$S^\mu + \left( \frac{J^2}{A^2} \right) A^\mu = 0. \quad (3.96)$$

### 3.6.3. Curvatura, torsión e hipertorsión: Mátriz $K$ $4 \times 4$

Cuando se consideran los tres parámetros de Frenet-Serret debemos considerar por consiguiente todos los elementos de la tétrada. Para  $a = 0$  y  $a = 1$  tenemos las mismas ecuaciones que antes, (3.83) y (3.90), de donde correspondientemente se concluye que  $\kappa = \alpha$  y  $J_\nu J^\nu = \kappa^2(\kappa^2 - \tau^2)$ . Para  $a = 2$  se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_2^\mu &= K_2^b \Lambda_b^\mu = K_2^{-1} \Lambda_1^\mu + K_2^3 \Lambda_3^\mu \\ S^\mu - \kappa^2 A^\mu + \tau^2 A^\mu &= \nu\tau \frac{S^\mu - (\kappa^2 - \tau^2) A^\mu}{\sqrt{\frac{-S_\nu S^\nu}{\kappa^2} - (\kappa^2 - \tau^2)^2}}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

que se puede escribir como

$$S_\nu S^\nu = S^2 = -\kappa^2 \nu^2 \tau^2 - \kappa^2 (\kappa^2 - \tau^2)^2, \quad (3.98)$$

y con esto podemos escribir  $\Lambda_3^\mu$  como

$$\Lambda_3^\mu = \frac{S^\mu - (\kappa^2 - \tau^2)A^\mu}{\kappa\tau\nu}. \quad (3.99)$$

Finalmente, para  $a = 3$  tenemos la ecuación diferencial característica

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_3^\mu &= K_3^b \Lambda_b^\mu = K_3^2 \Lambda_2^\mu, \\ \frac{C^\mu - (\kappa^2 - \tau^2)J^\mu}{\kappa\tau\nu} &= -\nu \frac{J^\mu - \kappa^2 U^\mu}{\kappa\tau} \end{aligned} \quad (3.100)$$

que se puede escribir como

$$C^\mu - (\kappa^2 - \tau^2 - \nu^2)J^\mu - \kappa^2 \nu^2 U^\mu = 0, \quad (3.101)$$

donde  $C^\mu = (d/ds)(S^\mu)$  es el cuatro-Crackle, la derivada del cuatro-Snap respecto al tiempo propio. Letaw resolvió la ecuación (3.101) en [8]. Podemos escribir (3.101) en términos de los módulos de las cantidades cinemáticas  $A$  y  $J$  como

$$C^\mu + \left( \frac{A^2 J^2 - S^2}{A^4 - J^2} \right) J^\mu + \left( \frac{J^4 - A^2 S^2}{A^4 - J^2} \right) U^\mu = 0. \quad (3.102)$$

## 3.7. Compatibilidad de la parametrización hiperbólica con las ecuaciones de Frenet-Serret

### 3.7.1. Curvatura

La solución a (3.101) es bien conocida y se ha estudiado desde 1981 en [8] por Letaw. Sin embargo, nos concentramos en (3.85) y (3.94) de manera independiente, con una parametrización hiperbólica pura de  $U^\mu$  pero con un argumento general  $f(s)$ .

Si consideramos (3.31) y (3.17) para (3.85) tendremos dos posibles ecuaciones, una para la componente temporal,  $\mu = 0$ , y otra para los componentes espaciales, denotados por  $\mu = i$ ,

donde  $i = 1, 2, 3$ , o que podemos expresar con una notación vectorial. Entonces, usando la componente temporal del cuatro-Jerk y la cuatro-velocidad en (3.85) tenemos

$$\alpha^2 + \dot{f}^2(\cosh f - 1) - \alpha^2 \cosh f = (\cosh f - 1)(\dot{f}^2 - \alpha^2) = 0, \quad (3.103)$$

de donde se concluye que  $\dot{f} = \alpha$  es la única solución posible, ya que en general  $\cosh f \neq 1$ . Similarmente, para las componentes espaciales se tiene

$$\frac{\cosh f - 1}{\sinh f} \left\{ \vec{n}[\alpha^2 - \dot{f}^2 + \dot{f}^2(\cosh f)] + \dot{f}\vec{a} \right\} - \alpha^2 \sinh f \hat{n} = 0. \quad (3.104)$$

la cual no se puede evaluar directamente ya que no asumimos ninguna dependencia lineal entre  $\hat{n}$  y  $\vec{a}$ , pero considerando la relación (4.8) de modo que haciendo un producto punto de (3.104) con  $\hat{n}$  nos da

$$(\cosh f - 1)(\alpha^2 - \dot{f}^2 + \dot{f}^2(\cosh f) + \dot{f}^2) - \alpha^2 \sinh^2 f = 0, \quad (3.105)$$

donde  $\dot{f} = \alpha$  es de nuevo la solución inmediata.

### 3.7.2. Torsión

Por otro lado, para la ecuación (3.94) el parámetro extra  $\tau$  cambia los resultados anteriores. Usando (3.22) y (3.39) en (3.94) para  $\mu = 0$

$$\tanh\left(\frac{f}{2}\right) \dot{f}(2\alpha^2 + \dot{f}^2(\cosh(f) - 1)) - (\alpha^2 - \tau^2)\dot{f} \sinh(f) = 0, \quad (3.106)$$

y usando (3.56)

$$\frac{\alpha \cosh\left(\frac{s}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right) \sqrt{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)\operatorname{sech}^2\left(\frac{s}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)(\tau^2 - \beta^2)}}{\alpha^2 - \beta^2} = 0, \quad (3.107)$$

donde se asumió que  $c_2 \neq -\alpha^2$ . En general las funciones hiperbólicas no son cero, de modo que la única manera en que toda la ecuación sea cero para todo  $s$  es si  $c_2 = -\tau^2$ . Llegamos a la misma conclusión si se consideran las componentes espaciales

$$\vec{S} - (\kappa^2 - \tau^2)\vec{A} = \vec{0}, \quad (3.108)$$

donde tenemos para el Jerk y la aceleración, respectivamente, que

$$\begin{aligned}\vec{S}_e &= \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{f}{2}\right)(2\kappa^2 + f^2(\cosh f - 1))\left(\vec{a} + 2\dot{f}\sinh^2\left(\frac{f}{2}\right)\hat{n}\right) \\ \vec{A}_e &= \vec{a} + \dot{f}(\cosh f - 1)\hat{n}.\end{aligned}\quad (3.109)$$

Hacemos el producto interno de (3.108) con  $\hat{n}$  para obtener

$$\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{f}{2}\right)(2\kappa^2 + f^2(\cosh f - 1))\left(1 + 2\sinh^2\left(\frac{f}{2}\right)\right) - (\kappa^2 - \tau^2)\cosh f = 0, \quad (3.110)$$

que se puede expresar como

$$\frac{(\tau^2 - \beta^2)(\alpha^2 \cosh(s\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) - c_2)}{\alpha^2 - c_2} = 0, \quad (3.111)$$

de donde se concluye que  $c_2 = -\tau^2$ .

Determinamos  $c_2$  mediante una condición inicial, por ejemplo, escogemos la condición inicial de modo que  $c_2 = 0$ . Esto implicaría que (3.56) se puede escribir como

$$f(s) = \pm 2\operatorname{arccoth}\left[\frac{\kappa \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}(s)\right)}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2 + \tau^2 \tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}(s)\right)}}\right]. \quad (3.112)$$

Nótese que la condición  $c_1 = 0$  significa que a  $s = 0$

$$f(0)_{\pm} = \pm 2\operatorname{arctanh}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right). \quad (3.113)$$



# Capítulo 4

## Ecuaciones de Frenet-Serret con aceleración propia no constante y análisis del Jerk

En el capítulo anterior se realizó un análisis de las ecuaciones de Frenet-Serret considerando aceleración propia constante, lo cual nos da una forma particular para las ecuaciones y los sistemas que pueden representar. Por ejemplo, cuando solo consideramos un parámetro de Frenet-Serret, la curvatura, tenemos que la curvatura corresponde a la aceleración y la ecuación de Frenet-serret describe el movimiento hiperbólico. En este capítulo consideramos aceleración propia no-constante, basándonos en [20], y para que sea consistente con un análisis más completo en el marco de Frenet-Serret también consideramos que los parámetros de torsión, es decir, curvatura, torsión e hipertorsión, tampoco sean constantes. Caso contrario, si consideramos aceleración propia variable y parámetros de Frenet-Serret constantes llegamos a conclusiones opuestas sobre la constancia o no de estos parámetros.

El marco de Frenet-Serret empezó a estudiarse en un espacio Euclídeo en tres dimensiones, pero con la formulación de la relatividad especial, donde se considera un espacio-tiempo cuatro dimensional, las generalizaciones no tardaron en llegar. Siguiendo los mismos principios matemáticos se puede generalizar como en [8] para espacio-tiempo de Minkowski o incluso se puede generalizar a espacio-tiempo curvo, de Schwarzschild, como en [2]. Es muy interesante el hecho de que las ecuaciones de Frenet-Serret estén relacionadas a worldlines o trayectorias

de un cuerpo con aceleración propia constante, dado que también consideremos parámetros de Frenet-Serret constantes [8,21]. Por ejemplo, el caso más básico no trivial de las ecuaciones generalizadas de Frenet-Serret describen matemáticamente al movimiento hiperbólico [5,6,22]. Las worldlines estacionarias se han estudiado desde un punto de vista térmico [23, 24] las cuales están relacionadas con el efecto Unruh [9,25]. El caso con curvatura constante es bien conocido y se ha estudiado ampliamente en artículos como [8, 21]. Sin embargo, el caso con aceleración propia-no constante, lo cual implica parámetros de Frenet-Serret no-constantes, no se encuentra en la literatura hasta este momento.

## 4.1. Ecuaciones de Frenet-Serret con parámetros no constantes

Las ecuaciones de Frenet-Serret, nombradas así después de que dos matemáticos franceses Jean Frenet y Joseph Serret las descubrieran por separado en 1847 y 1851, respectivamente, describen la cinemática de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en un espacio Euclídeo en tres dimensiones y también describen las propiedades geométricas independientemente de las cinemáticas. Las ecuaciones de Frenet-Serret son ecuaciones diferenciales vectoriales que cuentan con dos parámetros escalares  $\kappa$  y  $\tau$  que definen la curvatura y la torsión de una curva espacial, respectivamente. De manera intuitiva, la curvatura mide que tan curvada o torcida está la curva con respecto a una línea recta y la torsión mide que tan torcida está una curva con respecto a una curva plana.

Originalmente, las fórmulas de Frenet-Serret funcionan en el espacio Euclídeo tres-dimensional y describen la cinemática del cuerpo que se mueve en el espacio. Sin embargo, en 1981, en su artículo, [8, 21], Letaw generalizó las ecuaciones de Frenet-Serret a un espacio-tiempo de Minkowski de cuatro dimensiones.

Las fórmulas de Frenet-Serret (generalizadas) están dadas en términos de derivadas de la cuatro-velocidad y los parámetros intrínsecos de Frenet-Serret que dependen del tiempo propio. En el caso de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones se deben considerar tres parámetros intrínsecos, uno más que en el espacio Euclídeo: curvatura  $\kappa(s)$ , torsión  $\tau(s)$  e hipertorsión  $\nu(s)$ , donde  $s$  es el tiempo propio. Por ejemplo, si los tres parámetros son cero, entonces la

derivada de la velocidad se vuelve cero, lo que implica que el movimiento se da con velocidad constante. Cada parámetro que consideremos, distinto de cero, nos da una ecuación extra, hasta que tenemos los tres parámetros lo que nos da un total de cuatro ecuaciones de Frenet-Serret. Estos parámetros definen la dimensionalidad del problema y están relacionados con parámetros físicos como la aceleración y sus derivadas de orden superior.

Las ecuaciones generalizadas de Frenet-Serret [8] están dadas por

$$\dot{\Lambda}_a^\mu = K_a^b \Lambda_b^\mu, \quad (4.1)$$

donde  $\Lambda_a^\mu$  es una tétrada que se construye mediante la ortogonalización de Gram-Schmidt a partir de una base que es la cuatro-velocidad,  $\Lambda_0^\mu = U^\mu$ . Consideramos una signatura  $\eta to(+, -, -, -)$  y los índices latinos  $a, b$  indica cuales elementos de la tétrada y matriz se están considerando, mientras que los índices griegos  $\mu$  indica la componente del tensor, como tenemos cuatro-vectores significa que tienen cuatro componentes por lo que  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , donde la componente  $\mu = 0$  indica la componente temporal, mientras que los índices  $\mu = 1, 2, 3$  son las componentes espaciales. No hay que confundir los índices latinos como  $a$  con otros elementos como la aceleración espacial  $\vec{a}$ . El término  $K_a^b$  se refiere a la matriz de invariantes de curvatura

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 & -\nu(s) \\ 0 & 0 & \nu(s) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

donde  $\kappa(s)$ ,  $\tau(s)$  y  $\nu(s)$  se conocen como invariantes (de curvatura) y son la curvatura, torsión e hipertorsión, respectivamente. Los elementos de la tétrada deben satisfacer  $\Lambda_{a\mu} \Lambda_b^\mu = \eta_{ab}$ , y como la velocidad ya cumple este requisito se usa como primer elemento, el elemento 0, para construir los demás, además de que está estrechamente relacionada con la worldline del sistema.

El caso de movimiento estacionario, es decir, con invariantes de curvatura constantes, es bien conocido y fue estudiado en artículos como [1]. Sin embargo, el caso con invariantes no constantes no ha sido tan estudiado, porbablemente debido a la dificultad que presenta. Un

ejemplo de esto, es que este tipo de casos represente sistemas con aceleración no uniforme e incluso con derivadas superiores (Jerk, Snap, Crackle, etc.) no uniformes. La forma de las ecuaciones generalizadas de Frenet-Serret se vuelve más compleja que para su contraparte con invariantes constantes. Aquí tratamos de resolverlas empezando por el caso más sencillo y de ser posible, escalamos a los casos más complejos.

## 4.2. Ecuaciones de Frenet-Serret con solo curvatura

El caso más simple no trivial es cuando solo tenemos curvatura, esto es,

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Con solo curvatura no necesitamos la tetrada completa y solo se usarán dos de los cuatro elementos. A partir de

$$\Lambda_0^\mu = U^\mu \quad (4.4)$$

construimos el otro miembro de la base como

$$(\Lambda_1^\mu)_{NN} = \dot{\Lambda}_0^\mu - \frac{\langle \dot{\Lambda}_0^\mu, \Lambda_{0\mu} \rangle}{\langle \Lambda_{0\mu}, \Lambda_0^\mu \rangle} \Lambda_0^\mu, \quad (4.5)$$

donde el subíndice  $NN$  se refiere a que no está normalizado y la notación  $\langle \rangle$  se refiere a un producto interno. Se debe cumplir que  $U_\mu U^\mu = 1$ , lo que implica que  $U_\mu A^\mu = 0$ . Tenemos entonces que  $(\Lambda_1^\mu)_{NN} = A^\mu - U_\mu A^\mu = A^\mu$ , y normalizamos con  $\Lambda_1^\mu \Lambda_{1\mu} = A_\mu A^\mu (N^2) = -1$ , de donde se tiene que ya considerando la constante de normalización,  $N$ , el elemento normalizado es

$$\Lambda_1^\mu = \frac{A^\mu}{\sqrt{-A_\nu A^\nu}}. \quad (4.6)$$

Cuando  $\kappa$  es constante coincide con la norma de la cuatro-aceleración, por lo que la aceleración uniforme y curvatura constante se relacionan directamente. Es fácil suponer que si una no es constante entonces la otra tampoco lo será, por lo que consideramos  $A_\mu A^\mu = -\alpha^2$ , con  $\alpha = \alpha(s)$ . Con esto podemos escribir  $\Lambda_1^\mu = A^\mu/a$ . Para sustituir en (3.13) primero calculemos

la derivada que nos falta

$$\dot{\Lambda}_1^\mu = \frac{d}{ds} \left( \frac{A^\mu}{\alpha} \right) = \frac{J^\mu}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} A^\mu = \frac{J^\mu}{\sqrt{-A_\mu A^\mu}} + \frac{(A_\nu J^\nu u) A^\mu}{(-A_\nu A^\nu)^{3/2}}, \quad (4.7)$$

donde a partir de  $U_\nu A^\nu = 0$  se obtiene que  $A_\nu J^\nu = -\alpha \dot{\alpha}$ . Para el índice  $a = 0$  en (3.13) tenemos

$$\dot{\Lambda}_0^\mu = \dot{U}^\mu = K_0^1 \Lambda_1^\mu = \kappa \frac{A^\mu}{\alpha}, \quad (4.8)$$

por lo que  $A^\mu = (\alpha/\kappa) \dot{U}^\mu$ , de donde se concluye que  $\kappa(s) = \alpha(s)$ . Es el mismo resultado que se obtiene con la curvatura constante, pero esto a su vez nos indica que si la aceleración es constante también lo será la curvatura y viceversa. Para  $a = 1$ , usando (4.7), tendremos

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_1^\mu &= \eta^{00} K_{10} \Lambda_0^\mu \\ \frac{J^\mu}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} A^\mu &= \kappa U^\mu \\ \frac{J^\mu}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} A^\mu &= \alpha U^\mu, \end{aligned} \quad (4.9)$$

que podemos escribir como

$$J^\mu - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} A^\mu - \alpha^2 U^\mu = 0. \quad (4.10)$$

De (4.10) es claro que si  $a = \kappa = \text{constante}$  recuperamos la ecuación de Frenet-Serret correspondiente.

Podemos suponer una solución de la forma  $U^T = (\cosh f, \sinh f \vec{n})$  y la ecuación (4.10) la podemos separar en dos, una para la parte espacial y otra para la parte temporal. Para la parte temporal de (4.10) tendremos que

$$\begin{aligned} \ddot{f} \sinh f + \dot{f}^2 \cosh f - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \dot{f} \sinh f - \alpha^2 \cosh f &= 0, \\ (\sinh f) \left( \ddot{f} - \frac{\dot{\alpha} \dot{f}}{\alpha} \right) + (\cosh f) (\dot{f}^2 - \alpha^2) &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

de donde vemos que ambas expresiones entre paréntesis se vuelven cero si  $\dot{f}(s) = \alpha(s)$ , por lo que la parametrización propuesta es válida siempre y cuando podamos expresar

$$f(s) = \int \alpha(s) ds + c_2. \quad (4.12)$$

La parte espacial es muy similar y se obtiene la misma expresión (4.12), esto ya que la cuatro-velocidad es en realidad una dos-velocidad ya que los demás componentes son cero debido a que solo tenemos curvatura, lo cual implica movimiento en dos dimensiones, una temporal y una espacial. De la ecuación (4.10) podemos calcular el módulo

$$J_\nu J^\nu = J^2 = \alpha^4 - \dot{\alpha}^2. \quad (4.13)$$

Notemos que tenemos una relación entre la aceleración, Jerk y derivada de la aceleración. Para determinar el Jerk necesitamos saber la forma explícita de  $\alpha$  o hacer suposiciones sobre esta. La otra opción es encontrar  $\alpha$  en términos de  $J^2$  lo cual podemos hacer si sabemos la forma funcional de  $J^2$  o si hacemos suposiciones sobre el módulo. Optamos por lo segundo e intentamos resolver la ecuación diferencial para  $\alpha$  en términos de distintas formas de  $J^2$ . Particularmente consideramos  $J^2 = 0$ ,  $J^2$  constante y  $J^2$  como una función que sea reescalada de  $\alpha$ .

En las siguientes subsecciones consideramos distintos casos para el valor del módulo del Jerk,  $J^2$ , y vemos su repercusión en la aceleración. Analizamos los casos más sencillos,  $J^2 = 0$ ,  $J^2$  constante y  $J^2$  no constante pero proporcional a la aceleración. En particular este último caso no es una suposición al azar, puesto que en el caso con aceleración propia constante, cuando solo hay un parámetro de Frenet-Serret, el módulo cuadrado del Jerk es proporcional a la aceleración a la cuarta potencia.

### 4.2.1. Caso $J^2 = 0$

Para este caso particular del Jerk tenemos que

$$J^2 = \alpha^4 - \dot{\alpha}^2 = 0, \quad (4.14)$$

por lo que si despejamos  $\dot{\alpha}$  podemos encontrar  $\alpha$  en función de  $s$  resolviendo la integral  $\int \alpha^{-2} d\alpha = \int ds$ . Resolviendo, se encuentra que

$$\alpha(s) = \pm \frac{1}{s + c_1}, \quad (4.15)$$

donde  $c_1$  es una constante de integración que se encuentra mediante condiciones iniciales. Por ejemplo, la condición  $\alpha(s=0) = \alpha_0$ , con  $\alpha_0 > 0$ , nos da la relación  $c_1 = 1/\alpha_0$ . Condiciones iniciales similares pueden dar siempre valores negativos para la aceleración o singularidades en  $s = 1/\alpha$ ; el caso  $c_1 = 0$  implica que  $\alpha(s=0) \rightarrow \infty$ . Nos decidimos por  $\alpha(s=0) = \alpha_0$ , lo que implica que  $c_1 = 1/\alpha_0$  ya que la aceleración está bien definida para cualquier valor positivo del tiempo propio. Este caso es de particular interés ya que los cálculos posteriores con una aceleración siempre negativa permiten también el cálculo de la trayectoria o worldline de manera analítica y con valores reales; mientras que el caso con  $c_1$  como una constante negativa provoca una singularidad en la aceleración la cual no permite una trayectoria física. Entonces, para

$$\alpha(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{\alpha_0}} = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 s}, \quad (4.16)$$

con  $\alpha_0 > 0$ , no hay singularidad siempre y cuando consideremos un rango de tiempo propio positivo,  $s \geq 0$ . Calculamos  $f(s)$  mediante (4.12)

$$f(s) = \int \alpha(s) ds + c_2 = \ln(c_{2b} + c_{2b}\alpha_0 s), \quad (4.17)$$

donde  $c_{2b} = \ln c_2$  y la condición inicial  $f(0) = 0$  nos da  $c_{2b} = 1$  o  $c_2 = 0$ . La ecuación (4.17) implica que podemos escribir la dos-velocidad, solo tenemos dos componentes distintos de cero de la cuatro-velocidad, como

$$U(s) = \begin{pmatrix} \dot{t}(s) \\ \dot{r}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(f(s)) \\ \sinh(f(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+(1+\alpha_0 s)^2}{2(1+\alpha_0 s)} \\ \frac{-1+(1+\alpha_0 s)^2}{2(1+\alpha_0 s)} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

El cálculo de  $t(s)$  y  $r(s)$  es directo, integramos las componentes temporal y espacial de la velocidad, y se obtiene que

$$t(s) = \frac{(1 + \alpha_0 s)^2 + 2 \ln(1 + \alpha_0 s)}{4\alpha_0} - \frac{1}{4\alpha_0}, \quad y \quad r(s) = \frac{\alpha_0 s^2}{4} + \frac{s}{2} - \frac{\ln(1 + \alpha_0 s)}{2\alpha_0}. \quad (4.19)$$

El término  $-1/(4\alpha_0)$  en  $t(s)$  proviene de la constante de integración con la condición  $t(0) = 0$ , no se hizo igual para  $r(s)$  ya que queremos compararla con las hipérbolas de Rindler. Podemos ver el comportamiento de  $t(s)$  y  $r(s)$  en la gráfica paramétrica (4.1) para rangos de tiempo cercanos a la unidad y rangos de tiempo un orden mayor. Notamos que para rangos de

tiempo relativamente pequeño la gráfica es similar a las hipérbolas tradicionales de Rindler, pero para rangos de tiempo más amplios la parte positiva del tiempo  $t$  domina por completo en comparación a la parte negativa.

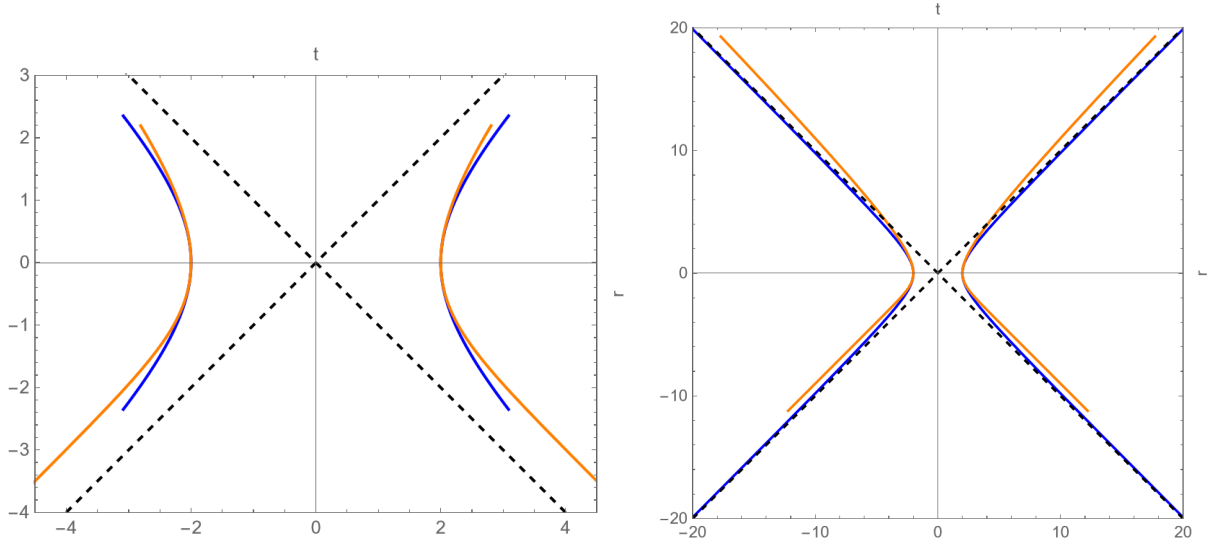


Figura 4.1: Gráficas paramétricas de  $r$  y  $t$  en  $s \in (-3, 3)$  y  $s \in (-30, 30)$  con  $\alpha_0 = 0,5$ . Las gráficas azules representan las hipérbolas de Rindler,  $t(s) = \cosh(\alpha s)/\alpha$  y  $\pm r(s) = \sinh(\alpha s)/\alpha$ , también con  $\alpha = 0,5$ . Las gráficas naranjas son las trayectorias obtenidas, donde el origen se hizo coincidir con el de Rindler mediante condiciones iniciales.

Notamos de la Figura (4.1) que el horizonte de Rindler, representado por la línea punteada en la gráfica, al que un observador acelerado uniformemente está impuesto, no existe como tal o por lo menos no es el mismo para un observador con aceleración variable. Un observador acelerado uniformemente no puede saber de los eventos más allá del horizonte de Rindler, que está representado por un pulso de luz que se lanza desde el origen. El observador de Rindler nunca verá ese pulso de luz ni cualquier otro suceso más allá del horizonte, similar a lo que sucede con un agujero negro. Sin embargo, un observador con aceleración variable no está sometido a este horizonte, pues el horizonte de Rindler a diferencia del horizonte de un agujero negro no es un horizonte físico en el sentido de que es una división del espacio creada por leyes físicas sino que es más bien un efecto geométrico. Nada le impide a un observador cambiar su aceleración (si es que eso es posible) y cruzar dicho horizonte.



### 4.2.2. Caso $J^2$ constante pero distinto de cero

Similar al caso anterior podemos expresar el módulo del Jerk,  $J^2 = \alpha^4 - \dot{\alpha}^2$ , como una integral para la aceleración que queda en términos de  $s$ , en la forma

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^4 - J^2}} = s + c_1, \quad (4.20)$$

donde  $c_1$  es una constante de integración distinta a la de la sección anterior y que se encuentra mediante condiciones iniciales. En particular, la integral del lado izquierdo de (4.20) es una integral elíptica de primera clase, por lo que tenemos la relación

$$\frac{i}{\sqrt{|J|}} \text{EllipticF} \left( \arcsin \left( \frac{\alpha}{\sqrt{|J|}} \right), -1 \right) = s + c_1, \quad (4.21)$$

y de hecho se puede aplicar la función inversa, que es un seno de Jacobi, para encontrar la aceleración en términos de  $s$ , esto es,

$$\alpha(s) = -\sqrt{|J|} \text{JacobiSN}(i\sqrt{|J|}(s + c_1), -1), \quad (4.22)$$

en donde el seno de Jacobi siempre da valores imaginarios para la aceleración  $\alpha(s)$ . Podemos encontrar  $f(s)$  mediante la ecuación (4.12), se encuentra que

$$f(s) = -i \arctan( \text{JacobiCD}(i\sqrt{|J|}(s + c_1)), -1) + c_2, \quad (4.23)$$

donde  $f(s)$  es el argumento de las funciones hiperbólicas que componen el tensor velocidad. Para encontrar la trayectoria se deben integrar estas funciones, pero no nos es posible realizar estas integrales analíticamente. Además como los valores son complejos o puramente imaginarios, no nos enfocamos en la resolución, e este caso numérica, de las integrales para encontrar las trayectorias, ya que son no físicas en nuestro entendimiento.

### 4.2.3. Caso $J^2$ no constante

Este es el caso más general y para evaluarlo necesitaríamos la forma explícita de  $J^2(s)$ . Pero para algunos casos particulares donde  $J^2$  sea proporcional a  $\alpha^4$ ,  $J^2(s) \propto \alpha^4(s)$ , por lo que  $J^2 = p\alpha^4$ , donde  $p$  es una constante de proporcionalidad positiva, tendremos que

$J^2 = \alpha^4 - \dot{\alpha}^2$  la podemos escribir como

$$\dot{\alpha}^2 = \alpha^4(1 - p). \quad (4.24)$$

Similarmente al caso  $J^2 = 0$ , hacemos una separación de variables e integramos para obtener

$$\alpha(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - ps} + c_1}, \quad (4.25)$$

donde  $c_1$  es una constante de integración que se encuentra mediante condiciones iniciales; la condición inicial  $\alpha(s = 0) = \alpha_0$  nos da  $c_1 = 1/\alpha_0$ . De la ecuación (4.25) notamos que  $p \leq 1$ . Por comodidad denotamos  $\sqrt{1 - p} = b$ . Encontramos  $f(s)$  mediante (4.12)

$$f(s) = \int \alpha(s) ds + c_2 = \frac{1}{b} \ln(1 + b\alpha_0 s) = \ln(1 + b\alpha_0 s)^{1/b}. \quad (4.26)$$

donde recordemos que  $f(s)$  es el argumento de las funciones hiperbólicas que componen al tensor velocidad, la condición  $f(0) = 0$  implica  $c_2 = 0$ . Para encontrar la trayectoria integramos estas funciones hiperbólicas

$$t(s) = \int \cosh(f(s)) ds = \frac{1 + \alpha_0 bs}{\alpha_0(b^2 - 1)} \left( b \cosh\left(\frac{\log[1 + \alpha_0 bs]}{b}\right) - \sinh\left(\frac{\log[1 + \alpha_0 bs]}{b}\right) \right), \quad (4.27)$$

y

$$r(s) = \int \sinh(f(s)) ds = \frac{1 + \alpha_0 bs}{\alpha_0(b^2 - 1)} \left( -\cosh\left(\frac{\log[1 + \alpha_0 bs]}{b}\right) + b \sinh\left(\frac{\log[1 + \alpha_0 bs]}{b}\right) \right). \quad (4.28)$$

Vemos una gráfica paramétrica en  $s$  de  $t(s)$  y  $r(s)$  en la figura (4.2), así como en las figuras (4.3) y (4.4) donde se aumentó considerablemente el valor de  $b$  para observar el comportamiento.

Notamos que el parámetro  $b = \sqrt{1 - p}$  juega el papel de separación con la hipérbola de Rindler, pues si  $b = 0$  recuperamos el movimiento hiperbólico típico de Minkowski dos-dimensional. En cambio, si aumentamos  $b$  las trayectorias se ven modificadas enormemente, aumentando su distancia al origen y su comportamiento con respecto a una hipérbola. Al contrario con el caso  $J^2 = 0$ , no parece que la trayectoria cruce el horizonte de Rindler.

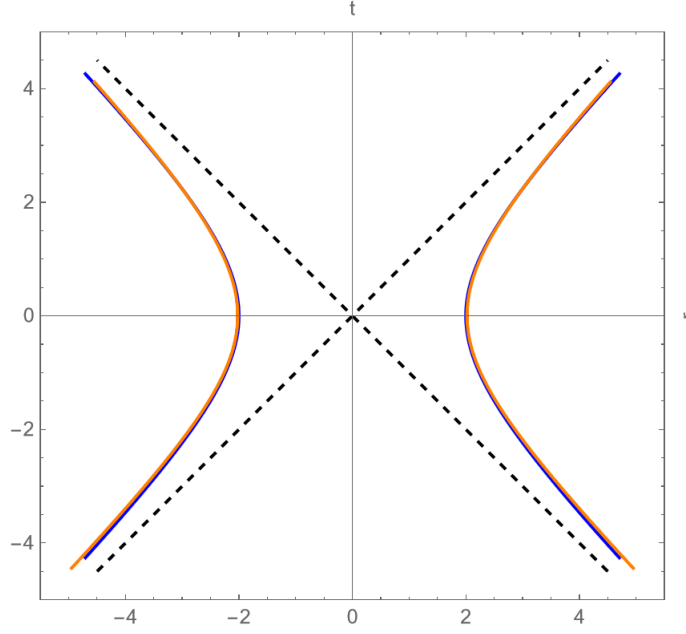


Figura 4.2: Gráficas paramétricas de  $r$  y  $t$  en  $s \in (-3, 3)$  con  $\alpha_0 = 0,5$  y  $b = 0,1$ . Las gráficas azules representan las hipérbolas de Rindler,  $t(s) = \cosh(\alpha s)/\alpha$  y  $\pm r(s) = \sinh(\alpha s)/\alpha$  también con  $\alpha = 0,5$ , mientras que las gráficas naranjas representan las trayectoria modificada.

### 4.3. Curvatura y torsión

Cuando también se tiene curvatura tendremos para  $K_a^b$  que

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

y también debemos calcular  $\Lambda_2^\mu$

$$\begin{aligned} (\Lambda_2^\mu)_{NN} &= J^\mu - \frac{\langle J^\mu, U^\mu \rangle}{\langle U^\mu, U^\mu \rangle} U^\mu - \frac{\langle J^\mu, A^\mu \rangle}{\langle A^\mu, A^\mu \rangle} A^\mu \\ &= J^\mu - U_\nu J^\nu U^\mu - \frac{A_\nu J^\nu}{-\alpha^2} A^\mu, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde el subíndice  $NN$  indica que no está normalizado. Derivando  $U_\nu U^\nu = 1$  se encuentra que  $U_\nu J^\nu = -A_\nu A^\nu = \alpha^2$ . Similarmente, de  $A_\nu A^\nu = -\alpha^2$  se encuentra que  $A_\nu J^\nu = -\alpha \dot{\alpha}$ , por lo que

$$(\Lambda_2^\mu)_{NN} = J^\mu - \alpha^2 U^\mu - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} A^\mu. \quad (4.31)$$

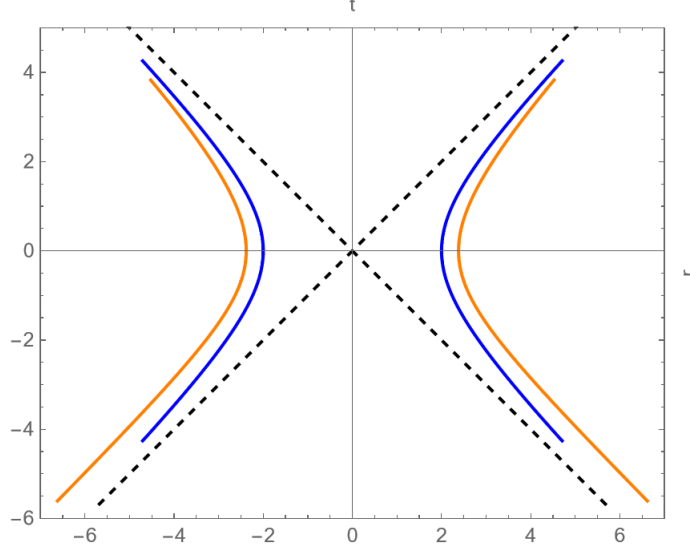


Figura 4.3: Gráficas paramétricas de  $r$  y  $t$  en  $s \in (-3, 3)$  con  $\alpha_0 = 0,5$  y  $b = 0,4$ . Las gráficas azules representan las hipérbolas de Rindler,  $t(s) = \cosh(\alpha s)/\alpha$  y  $\pm r(s) = \sinh(\alpha s)/\alpha$  también con  $\alpha = 0,5$ , mientras que las gráficas naranjas representan las trayectoria modificada.

Como el elemento  $\Lambda_a^\nu A_{a\nu} = \eta_{\nu\eta^\nu}$ , se debe cumplir que

$$\Lambda_{2\nu}\Lambda_2^\nu = N^2 \left( J_\nu J^\nu - 2\alpha^2 U_\nu J^\nu - 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} A_\nu J^\nu + \alpha\dot{\alpha} U_\nu A^\nu + \alpha^4 U_\nu U^\nu + \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} A_\nu A^\nu \right) = -1, \quad (4.32)$$

por lo que considerando  $U_\nu A^\nu = 0$ ,  $U_\nu J^\nu = \alpha^2$  y  $A_\nu J^\nu = -\alpha\dot{\alpha}$  tendremos que

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - J_\nu J^\nu}}, \quad (4.33)$$

y así

$$\Lambda_2^\mu = \frac{J^\mu - \alpha^2 U^\mu - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} A^\mu}{\sqrt{\alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - J_\nu J^\nu}}. \quad (4.34)$$

Ya podemos sustituir en las ecuaciones de Frenet-Serret, y para  $\dot{\Lambda}_0^\mu = K_0^b \Lambda_b^\mu$  igual que antes se encuentra que  $\kappa(s) = \alpha(s)$  y que  $\dot{U}^\mu = A^\mu$ . Similarmente, para  $a = 1$  tenemos  $\dot{\Lambda}_1^\mu = K_1^b \Lambda_b^\mu$  que es  $\dot{\Lambda}_1^\mu = \kappa U^\mu + \tau \Lambda_2^\mu$ , y considerando (4.7) lo podemos escribir como

$$\frac{J^\mu}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} A^\mu = \alpha U^\mu + \tau \left( \frac{J^\mu - \alpha^2 U^\mu - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} A^\mu}{\sqrt{\alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - J_\nu J^\nu}} \right), \quad (4.35)$$

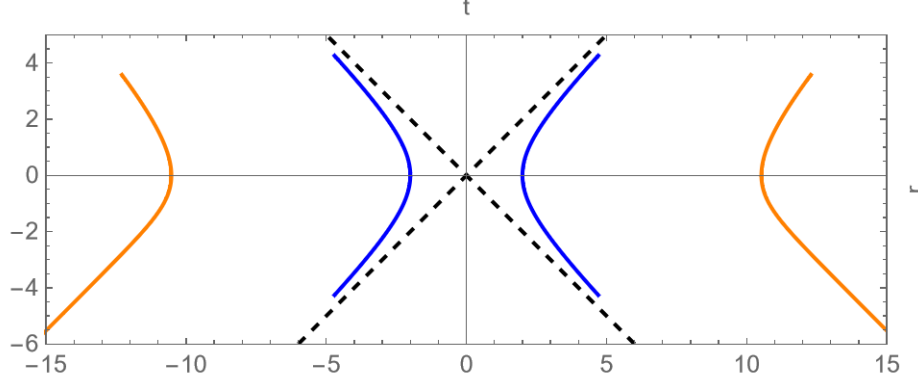


Figura 4.4: Gráficas paramétricas de  $r$  y  $t$  en  $s \in (-3, 3)$  con  $\alpha_0 = 0,5$  y  $b = 0,9$ . Las gráficas azules representan las hipérbolas de Rindler,  $t(s) = \cosh(\alpha s)/\alpha$  y  $\pm r(s) = \sinh(\alpha s)/\alpha$  también con  $\alpha = 0,5$ , mientras que las gráficas naranjas representan las trayectoria modificada.

por lo que  $\sqrt{\alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - J_\nu J^\nu} = \alpha\tau$ , consideramos  $\alpha = \kappa$  y tenemos finalmente que

$$J_\nu J^\nu = \kappa^4 - \dot{\kappa}^2 - \kappa^2 \tau^2, \quad (4.36)$$

Notemos que esta expresión cambió en comparación a la ecuación (4.13) ya que ahora también tenemos torsión. Por la forma de la matriz sabemos que el Jerk se ve afectado por la torsión, pero si la matriz tuviera más términos, como la hipertorsión, el Jerk ya no se vería afectado por estos subsecuentes a la torsión. Para el índice  $a = 2$  necesitaremos la expresión para  $\dot{\Lambda}_2^\mu$ , que se encuentra que es

$$\dot{\Lambda}_2^\mu = \frac{1}{\alpha\tau} S^\mu - \frac{2\dot{\alpha}\tau + \alpha\dot{\tau}}{\alpha^2\tau^2} J^\mu + \frac{2\dot{\alpha}^2\tau + \alpha\dot{\alpha}\dot{\tau} - \alpha\ddot{\alpha}\tau - \alpha^4\tau}{\alpha^3\tau^2} A^\mu - \frac{3\dot{\alpha}\tau + \alpha\dot{\tau}}{\tau^2} U^\mu, \quad (4.37)$$

por lo que para  $\dot{\Lambda}_2^\mu = K_2^1 \Lambda_1^\mu = -\tau \Lambda_1^\mu$  la escribimos como

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_2^\mu + \frac{\tau}{\alpha} A^\mu &= 0, \\ S^\mu - \frac{2\dot{\alpha}\tau + \alpha\dot{\tau}}{\alpha\tau} J^\mu + \frac{2\dot{\alpha}^2\tau + \alpha\dot{\alpha}\dot{\tau} - \alpha\ddot{\alpha}\tau - \alpha^4\tau + \alpha^2\tau^3}{\alpha^2\tau} A^\mu - \alpha \frac{3\dot{\alpha}\tau + \alpha\dot{\tau}}{\tau} U^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Resolver esta ecuación en términos de una ecuación diferencial está fuera de nuestras capacidades actuales y se deja para un trabajo a futuro y así como también el análisis de una parametrización particular para  $U^\mu$ . Sin embargo, según las consideraciones tomadas podemos simplificar la ecuación (4.38) a una versión considerablemente más simple que puede

pensarse en resolver, para posteriormente obtener una trayectoria, aunque no se realizó ya que la propia expresión de la aceleración es lo suficientemente complicada como para pensar en obtener una trayectoria analítica.

### 4.3.1. Caso: $J^2 = 0$ con curvatura y torsión

Similar a la sección donde se analizaron los casos cuando se tenía curvatura, haremos un análisis similar pero ahora también considerando una torsión, en general, no constante. Este primer caso corresponde a aquel donde la ecuación (4.36) es cero, por lo que se tiene

$$\alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - \alpha^2 \tau^2 = 0, \quad (4.39)$$

lo que se puede reescribir como una ecuación para la derivada de  $\alpha$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \alpha \sqrt{\alpha^2 - \tau^2}. \quad (4.40)$$

Hay varias posibilidades según cómo sea  $\tau$ .

- Si  $\tau = 0$  volvemos al caso con solo  $\kappa$ .
- Si  $\tau$  es constante entonces se puede escribir la integral como

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - \tau^2}} = \int ds, \quad (4.41)$$

que tiene solución de la forma

$$\frac{1}{\tau} \arctan \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - \tau^2}}{\tau} \right) = s + c_1, \quad (4.42)$$

donde  $c_1$  es una constante de integración que se encuentra mediante condiciones iniciales, no se debe confundir con  $c_1$  de los casos anteriores. Podemos reescribir la ecuación anterior como  $\alpha$  en función de  $s$

$$\alpha(s) = \tau \sec[\tau(s + c_1)]. \quad (4.43)$$

Una condición inicial que haga que  $c_1 = 0$  implica  $\alpha(s = 0) = \alpha_0 = \tau$ . Nosotros

consideramos la condición inicial de la forma  $\alpha(s = 0) = \alpha_0 = \tau \sec(\tau c_1)$ , por lo que

$$c_1 = \frac{1}{\tau} \operatorname{arcsec} \left( \frac{\alpha_0}{\tau} \right), \quad (4.44)$$

sin embargo, esta condición inicial implica que  $\alpha_0 \neq 0$  ya que si no  $c_1$  se vuelve un infinito complejo, imposible de evaluar.

Por otro lado, la ecuación de Frenet-Serret (4.38) también se verá modificada. Que  $\tau$  sea constante implica que  $\dot{\tau} = 0$ , y  $J^2 = \alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - \alpha^2 \tau^2 = 0$  implica que

$$\alpha = \alpha \sqrt{\alpha^2 - \tau^2}, \quad (4.45)$$

cuya solución está dada por (4.43). Por último, si derivamos una vez más la relación (4.45) obtenemos que

$$\ddot{\alpha} = 2\alpha^3 - \alpha\tau^2, \quad (4.46)$$

todo esto nos permite escribir la ecuación de Frenet-Serret (4.38) de una forma simplificada

$$S^\mu - 2\sqrt{\alpha^2 - \tau^2} J^\mu - \alpha^2 A^\mu - 3\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - \tau^2} U^\mu = 0. \quad (4.47)$$

- La última posibilidad es que  $\tau = \tau(s)$ , no constante y distinto de cero. Este caso es más difícil de evaluar por lo que consideramos el caso particular en que haya proporcionalidad,  $\tau(s) \propto \alpha(s)$ , esto es

$$\tau(s) = \pm p\alpha(s), \quad (4.48)$$

donde  $p$  es una constante positiva de proporcionalidad. Podemos tener incluso que  $p$  sea una función en  $s$  siempre y cuando se puedan evaluar las integrales, pero no analizamos ese caso. Entonces, para este caso particular de  $\tau(s)$  tenemos que

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\sqrt{1 - p^2 s + c_2}}, \quad (4.49)$$

donde  $c_2$  es una constante de integración que se encuentra mediante condiciones iniciales. Por ejemplo, una condición inicial en la forma  $\alpha(s = 0) = \alpha_0$  da  $c_2 = -1/\alpha_0$ , por

lo que se tiene

$$\alpha(s) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0 \sqrt{1 - p^2 s}}. \quad (4.50)$$

Esta elección particular de condición inicial hace que la singularidad en  $\alpha$  se encuentre dentro de un rango positivo de  $s$  pero también hace que  $\alpha$  tenga un valor positivo para  $s < 1/(\alpha_0 \sqrt{1 - p^2})$ .

Para este caso en particular tendremos que  $\dot{\tau} = p\dot{\alpha}$ , además  $J^2 = \alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - \alpha^2 \tau^2 = 0$ , por lo que

$$\dot{\alpha} = \sqrt{1 - p^2} \alpha^2. \quad (4.51)$$

Si derivamos la ecuación anterior y sustituimos  $\dot{\alpha}$  encontramos que

$$\ddot{\alpha} = 2(1 - p^2) \alpha^3. \quad (4.52)$$

Considerando lo anterior y sustituyendo en (4.38) encontramos que

$$S^\mu - 3\sqrt{1 - p^2} \alpha J^\mu - 3\sqrt{1 - p^2} \alpha^3 U^\mu = 0. \quad (4.53)$$

### 4.3.2. Caso: $J^2 =$ constante distinta de cero

Como para el caso donde solo se tiene curvatura, este es un caso especial. Podemos ver esto si expresamos la ecuación (4.36) como

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^4 - \tau^2 \alpha^2 - J^2}} = \int ds, \quad (4.54)$$

donde, otra vez, tenemos distintas posibilidades para  $\tau(s)$ .

- Si  $\tau = 0$  entonces regresamos al caso donde solo hay curvatura y recordemos que la integral es una integral elíptica.
- Si  $\tau$  es una constante distinta de cero, entonces tendremos también una integral elíptica, con solución en términos de la función elíptica de primera clase

$$\frac{(\sqrt{4J^2 + \tau^4} - \tau^2)^{1/2}}{\sqrt{2}|J|} \text{EllipticF} \left( \text{iarcsinh} \left( \alpha \sqrt{\frac{2}{\sqrt{4J^2 + \tau^4} - \tau^2}} \right), \frac{\tau^2 - \sqrt{4J^2 + \tau^4}}{\tau^2 + \sqrt{4J^2 + \tau^4}} \right) = s + c_1, \quad (4.55)$$



donde  $\text{EllipticF}$  hace referencia a la función elíptica de primera clase y donde  $c_1$  es una constante de integración que se encuentra mediante condiciones iniciales. En principio se puede encontrar  $\alpha$  en función de  $s$  aplicando funciones inversas, esto es, el seno de Jacobi

$$\alpha(s) = i\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{4J^2 + \tau^2 - \tau^2}} \right)^{3/2} (\tau^2 \sqrt{4J^2 + \tau^4} - \tau^4 - 2J^2) \times \text{JacobiSN} \left( |J| \sqrt{\frac{2}{\sqrt{4J^2 + \tau^4} - \tau^2}} (s + c_1), \frac{\tau^2 - \sqrt{4J^2 + \tau^4}}{\tau^2 + \sqrt{4J^2 + \tau^4}} \right). \quad (4.56)$$

Para este caso particular, esta función de  $s$ , siempre tenemos valores puramente imaginarios para  $\alpha(s)$ . Por simplicidad consideramos  $c_1 = 0$ .

Por otro lado, la ecuación de Frenet-Serret también se verá modificada. Como  $J^2$  es constante tendremos que

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\alpha^4 - \alpha^2 \tau^2 - J^2}, \quad (4.57)$$

y derivando la ecuación anterior se obtiene

$$\ddot{\alpha} = 2\alpha^3 - \alpha\tau^2. \quad (4.58)$$

Sustituyendo  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\tau}$  y  $\ddot{\alpha}$  en (4.38) obtenemos

$$\alpha^2 S^\mu - 2\alpha \sqrt{\alpha^4 - \alpha^2 \tau^2 - J^2} J^\mu - (2J^2 + \alpha^4) A^\mu - 3\alpha^3 \sqrt{\alpha^4 - \alpha^2 \tau^2 - J^2} U^\mu = 0. \quad (4.59)$$

- El último caso corresponde a  $\tau$  no constante, pero donde supondremos una proporcionalidad a  $\alpha$ ,  $\tau(s) \propto \alpha(s)$ , esto es  $\tau^2(s) = p\alpha^2(s)$  donde  $p$  es una constante de proporcionalidad positiva. Tendremos entonces que la ecuación (4.54) la podemos expresar como

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-p)\alpha^4 - J^2}} = s + c_1, \quad (4.60)$$

donde  $c_1$  es una constante de integración que se encuentra mediante condiciones iniciales. La solución a la integral está en términos de funciones elípticas, en la forma

$$- \frac{i}{(|J|\sqrt{1-p})^{1/2}} \text{EllipticF} \left( i \text{arcsinh} \left( \sqrt{-\frac{\sqrt{1-p}}{|J|}} \alpha \right), -1 \right), \quad (4.61)$$

donde EllipticF hace referencia a una función elíptica de primera clase. De igual manera que el sub-caso anterior podemos encontrar  $\alpha$  en términos de  $s$

$$\alpha(s) = -\sqrt{\frac{|J|}{\sqrt{1-p}}} \text{JacobiSN} \left( i\sqrt{|J|\sqrt{1-p}}(s + c_1), -1 \right), \quad (4.62)$$

donde  $\alpha(s)$  siempre tiene valores puramente imaginarios, como en casos anteriores. Se consideró  $c_1 = 0$  por simplicidad.

La ecuación de Frenet-Serret se verá modificada. Ya que  $J^2 = \alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - p^2\alpha^4$  es una constante, podemos despejar para  $\dot{\alpha}$  y obtener

$$\dot{\alpha} = \sqrt{(1-p^2)\alpha^4 - J^2}, \quad (4.63)$$

y volviendo a derivar se tiene

$$\ddot{\alpha} = 2(1-p^2)\alpha^3. \quad (4.64)$$

La ecuación de Frenet-Serret (4.38) se vuelve

$$S^\mu - \frac{3}{\alpha} \sqrt{(1-p^2)\alpha^4 - J^2} J^\mu - \frac{3J^2}{\alpha^2} A^\mu - 3\alpha \sqrt{(1-p^2)\alpha^4 - J^2} U^\mu = 0. \quad (4.65)$$

### 4.3.3. Caso $J^2$ no constante

Para poder evaluar este caso necesitamos suponer alguna relación con  $\alpha$ ; nosotros trabajamos con la relación particular  $J^2(s) \propto \alpha^4(s)$ , por lo que  $J^2 = p_1\alpha^4$ , donde  $p_1$  es una constante de proporcionalidad positiva. Para este caso la integral

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^4 - J^2 - \alpha^2\tau^2}} = \int ds, \quad (4.66)$$

toma la forma

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-p_1)\alpha^4 - \alpha^2\tau^2}} = \int \frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{(1-p_1)\alpha^2 - \tau^2}} = s + c_1, \quad (4.67)$$

donde  $c_1$  es una constante de integración que se encuentra mediante condiciones iniciales. Se tienen tres subcasos,  $\tau = 0$ ,  $\tau$  constante y  $\tau$  no constante, pero por simplicidad proporcional a  $\alpha$ .

- El caso  $\tau = 0$  corresponde a un caso anterior con  $J^2$  no constante y donde solo se cuenta con curvatura  $\kappa$ .
- Para el caso  $\tau$  constante se puede evaluar la ecuación (4.67) directamente para obtener

$$\frac{1}{\tau} \arctan \left( \frac{1}{\tau} \sqrt{(1-p_1)\alpha^2 - \tau^2} \right) = s + c_1, \quad (4.68)$$

de donde podemos encontrar  $\alpha$  en términos de  $s$  como

$$\alpha(s) = \frac{\tau \sec(\tau(s + c_1))}{\sqrt{1-p_1}}. \quad (4.69)$$

La condición inicial  $\alpha(s = 0) = \alpha_0$  nos da

$$c_1 = \frac{1}{\tau} \operatorname{arcsec} \left( \frac{1}{\tau} \sqrt{1-p_1} \alpha_0 \right), \quad (4.70)$$

una condición inicial que haga  $c_1 = 0$  implica que  $\alpha(s = 0) = \alpha_0 = \tau / \sqrt{1-p_1}$ .

La ecuación de Frenet-Serret también se ve modificada. Como  $J^2 = p_1 \alpha^4 = \alpha^4 - \dot{\alpha}^2 - \alpha^2 \tau^2$ , tenemos que

$$\dot{\alpha} = \alpha \sqrt{(1-p_1)\alpha^2 - \tau^2}, \quad (4.71)$$

y derivando la ecuación anterior obtenemos que

$$\ddot{\alpha} = 2(1-p_1)\alpha^3 - \alpha\tau^2, \quad (4.72)$$

por lo que sustituyendo todo en (4.38) se obtiene

$$S^\mu - 2\sqrt{(1-p_1)\alpha^2 - \tau^2} J^\mu - \alpha^2 A^\mu - 3\alpha^2 \sqrt{(1-p_1)\alpha^2 - \tau^2} U^\mu = 0. \quad (4.73)$$

- El caso en  $\tau(s)$ , no constante, implica saber la forma funcional de  $\tau(s)$ , o suponer alguna +. En nuestro caso consideramos el caso en que  $\tau(s) \propto \alpha(s)$ , es decir,  $\tau^2 = p_2 \alpha^2$  donde  $p_2$  es una constante positiva de proporcionalidades. Para este sub-caso en particular se

tiene que la ecuación (4.67) se puede escribir como

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 \sqrt{1-p_1-p_2}} = s + c_1, \quad (4.74)$$

cuyo resultado expresamos como

$$\alpha(a) = -\frac{1}{\sqrt{1-p_1-p_2}(s+c_1)}. \quad (4.75)$$

Notemos la condición  $1-p_1-p_2 > 0$ , donde por separado  $p_1 > 0$  y  $p_2 > 0$ , por lo que  $0 < p_1 + p_2 < 1$ . Una condición inicial de la forma  $\alpha(s=0) = \alpha_0$  implica

$$c_1 = -\frac{1}{\alpha_0 \sqrt{1-p_1-p_2}}. \quad (4.76)$$

Como en los casos anteriores la ecuación de Frenet-Serret se ve modificada. Como  $\tau = p_1 \alpha$ , de  $J^2$  tendremos que

$$\dot{\alpha} = \sqrt{1-p_1^2-p_2^2} \alpha^2, \quad (4.77)$$

y derivando la ecuación anterior se obtiene

$$\ddot{\alpha} = 2(1-p_1^2-p_2^2) \alpha^3. \quad (4.78)$$

La ecuación de Frenet-Serret resultante es

$$S^\mu - 3\sqrt{1-p_1^2-p_2^2} \alpha J^\mu + \left(2 - 2p_2^2 - 3p_1^2 - 2\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}\right) \alpha^2 A^\mu - 3\sqrt{1-p_1^2-p_2^2} \alpha^3 U^\mu = 0. \quad (4.79)$$

#### 4.3.4. Comentarios

Una cosa a notar es que las ecuaciones de Frenet-Serret se ven modificadas considerablemente según como se haya considerado  $J^2$  y  $\tau$ . Además, con regularidad el factor que acompaña al cuatro-Jerk,  $J^\mu$ , es igual al factor que acompaña a la cuatro-velocidad,  $U^\mu$ , excepto por un factor de  $\alpha^2$ . Lo cual guarda relación con la ecuación de Frenet-Serret don-

de solo hay curvatura, en cuyo caso el Jerk es igual a la velocidad excepto por un factor de  $\alpha^2$ .

Los distintos casos son interesantes de analizar, pues tienen que ver directamente con el significado del Jerk en un movimiento relativista. Cuando la aceleración es constante, que el Jerk sea cero significa que la aceleración propia constante también es cero, y viceversa. El Jerk (su módulo) está estrechamente ligado con la aceleración propia, que a su vez es la curvatura, y dependiendo de los parámetros considerados también está relacionado con la torsión. El tensor Jerk está también relacionado con el tensor cuatro-velocidad, además de la aceleración propia, siendo este proporcional. Esto significa que cambios en el tensor del Jerk cambian al tensor velocidad y por lo tanto cambian el movimiento en general. Un módulo de Jerk cero implica entonces que la componente espacial y temporal se eliminan lo cual es característico de los tensores nulos que describen el movimiento de la luz.

Cuando la aceleración ya no es constante se pueden hacer análisis similares. Para este caso, que el módulo del Jerk sea cero ya no implica que la aceleración propia sea cero y tampoco el tensor Jerk es proporcional a la velocidad, sino que ahora también hay un elemento que tiene que ver con el tensor aceleración.

El caso particular en que  $\tau$  es igual a  $\kappa$  equivale a un movimiento helicoidal. Esto se puede ver intuitivamente ya que al tener una curvatura que sea proporcional a la torsión en una curva, tendremos que la parte plana crece proporcionalmente con la parte vertical, lo que implica un movimiento restringido por un cilindro. Si los parámetros no son constantes, lo que sucede es que el cilindro puede cambiar su tamaño, lo que da una mayor libertad posible de movimientos. Un ejemplo natural de este caso particular podría ser, por ejemplo, el ADN. Si existe algún tipo de transporte de moléculas, o cuando el mismo ADN se mueve pasando por un punto, entonces este movimiento se podría describir mediante el marco de Frenet-Serret en un espacio-tiempo 1+3. Un posible ejemplo podría ser cuando el ADN es copiado, pues se podría pensar que el punto en donde pasa el ADN para ser copiado y multiplicado es en realidad un punto que se mueve mientras que el ADN permanece estático, una de las ventajas de un marco relativista.

# Capítulo 5

## Frenet-Serret en espacio-tiempo curvo con aceleración propia constante

En los capítulos anteriores estudiamos las ecuaciones de Frenet-Serret, partiendo de usar solo uno de los parámetros de Frenet-Serret, curvatura, torsión e hipertorsión y posteriormente considerar dos de los tres para finalizar considerándolos los tres. Esto se hizo considerando parámetros constantes. Sin embargo, se puede generalizar aún más y considerar parámetros no constantes, que fue lo que se hizo al considerar aceleración no constante, pero dos de los parámetros cero y posteriormente se consideró también la torsión no constante, pero esto complica mucho más los cálculos. Es claro que se puede generalizar aún más si también se considera la hipertorsión, pero los resultados analíticos, si los hay, son considerablemente más difíciles de obtener. Sin embargo, aumentar la cantidad de parámetros a considerar y que estos sean constantes o no, no es la única de generalizar las ecuaciones de Frenet-Serret, otra opción es considerar un espacio-tiempo más general, no necesariamente con más dimensiones, pero uno que sea curvo. En este capítulo tratamos el desarrollo de las ecuaciones de Frenet-Serret en espacio-tiempo curvo, considerando solo el parámetro de curvatura, también constante.

Supongamos que se introduce una gran masa, por ejemplo un agujero negro (BH por sus siglas en inglés), con simetría esférica, estática, tipo Schwarzschild (masa  $M$ ) en el escenario

de Minkowski de tal manera que la masa esté lejos del observador. En la localidad de la trayectoria de se tendría mayormente espacio-tiempo plano pero también pequeñas perturbaciones debidas a la gran masa. Habría correcciones en la solución hiperbólica de la trayectoria uniformemente acelerada y la superficie del horizonte de Rindler correspondiente. El escenario descrito es distinto al caso  $r = \text{constante}$  con observadores acelerados en la métrica de Schwarzschild, pues en este último la magnitud de la aceleración depende de  $r$  y  $M$  y en el caso que queremos estudiar la magnitud de la aceleración  $|a|$  es un parámetro independiente y la trayectoria no está restringida a  $r$  constante. En este caso hay dos horizontes, el del BH y el de Rindler. El horizonte de Rindler no es igual a un horizonte de eventos de un agujero negro; cuando se tiene movimiento hiperbólico simple, digamos  $X = (\sinh(\alpha s)/\alpha, \cosh(\alpha s)/\alpha)$ , y consideremos un rayo de luz que se lanza desde el origen del marco. El cuerpo acelerado nunca podrá alcanzar la worldline del rayo de luz, y de hecho siempre estará a una distancia  $1/\alpha$  de dicha trayectoria, a esto se le conoce como horizonte de Rindler. Se le llama horizonte porque funciona como un horizonte de eventos de un agujero negro, pues, cualquier evento que suceda del otro lado de la línea que marca la trayectoria nunca será percibido por el observador acelerado. Sin embargo, hay claras diferencias con un horizonte de un agujero negro. Primero, si el observador deja de acelerar entonces el horizonte desaparece, lo cual no sería posible para un campo gravitacional una vez el horizonte se formó. Segundo, no hay una singularidad como tal en este horizonte de Rindler como sí la hay, por ejemplo, en el horizonte de un agujero negro de Schwarzschild. Sin embargo, algunos fenómenos que suceden en o cerca de un horizonte de agujero negro, tienen analogías en un horizonte de Rindler, por ejemplo, el análogo de el efecto Hawking en el horizonte de Rindler es el efecto Unruh.

En espacio-tiempo curvo, una generalización de la trayectoria de Rindler involucra, además de que  $|a|$  sea constante, una restricción en la trayectoria de que esta debe ser lineal, con torsión cero e hipertorsión cero.

## 5.1. Marco de Frenet-Serret

Entre las trayectorias aceleradas uniformemente, las órbitas de un boost se conocen como aceleradas linealmente de manera uniforme o LUA por sus siglas en inglés.

Letaw mostró que la construcción de las ecuaciones de Frenet generalizadas en espacio-tiempo de Minkowski se pueden utilizar para definir análogos de la curvatura escalar, el escalar de torsión y el escalar de hipertorsión para líneas de mundo (WL por su siglas en inglés) en espacio-tiempo plano. En particular, el escalar de curvatura es la magnitud de la aceleración propia. El caso de aceleración lineal uniforme surge cuando el escalar de curvatura es fijado a una constante positiva mientras que la torsión e hipertorsión se toman como cero.

La construcción del marco de Frenet-Serret a espacio-tiempo curvo se construye de la misma manera en que se construye para espacio-tiempo plano, empezamos por definir cuatro vectores unitarios que formen una tétrada ortogonal usando la ortogonalización de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned}
\Lambda_0^\mu &= U^\mu \\
\Lambda_1^\mu &= \frac{A^\mu}{|A|}, \\
\Lambda_2^\mu &= \frac{|A|^2 J^\mu - |A|^2 (J^\nu U_\nu) U^\mu - (J^\nu A_\nu) A^\mu}{N}, \\
\Lambda_3^\mu &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\epsilon^{\mu bcd}}{\sqrt{-g}} \Lambda_{0b} \Lambda_{1c} \Lambda_{2d},
\end{aligned} \tag{5.1}$$

pero, una diferencia importante es que la derivada de un cuatro-vector respecto al tiempo cambia por la derivada absoluta, por lo que  $dA/ds \rightarrow A^\mu = U^\nu \nabla_\nu U^\mu$ ,  $J^\mu = U^\nu \nabla_\nu A^\mu$ . Para construir un marco ortonormal necesitamos un factor de normalización para la tétrada, para  $\Lambda_0$  es la unidad, para  $\Lambda_1$  es el módulo de la aceleración y  $N = |A|(|A|^2 J_\nu J^\nu - (A_\nu J^\nu)^2 + |A|^4)^{1/2}$  es el factor de normalización de  $\Lambda_2$ . Las ecuaciones de Letaw-Frenet generalizadas son

$$U^\nu \nabla_\nu \Lambda_a^\mu = K_a^b \Lambda_b^\mu, \tag{5.2}$$

donde

$$K_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 & -\nu(s) \\ 0 & 0 & \nu(s) & 0 \end{pmatrix}.$$



Para aceleración lineal uniforme y con las consideraciones se tiene que

$$K_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix},$$

es decir que solo los elementos  $K_{01}$  y  $K_{10}$  son distintos de cero. La primer ecuación de Frenet-Serret surge al considerar el elemento  $K_{01}$ , sustituimos en (5.2) y se encuentra que  $U^\nu \nabla_\nu \Lambda_0^\mu = K_0^1 \Lambda_1^\mu$ , tomando los vectores de (5.1) se tiene

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = \kappa \frac{A^\mu}{|A|} = A^\mu. \quad (5.3)$$

Pero esta es precisamente la definición de la cuatro-aceleración y por lo tanto  $\kappa = |A|$ , lo que significa que la curvatura es la aceleración incluso en marco con espacio-tiempo curvo. La segunda ecuación de Frenet-Serret se obtiene considerando el elemento  $K_{10}$

$$U^\nu \nabla_\nu A^\mu = |A|^2 \Lambda_0^\mu = |A|^2 U^\mu, \quad (5.4)$$

por lo que, con  $J^\mu = U^\nu \nabla_\nu A^\mu$ , se tiene

$$J^\mu - |A|^2 U^\mu = 0. \quad (5.5)$$

## 5.2. Métrica General

Consideremos una métrica asintóticamente plana con simetría esférica y que no rota

$$ds^2 = F(r)dt^2 - F(r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.6)$$

donde  $F(r)$  es una función diferenciable con  $F(r_H) = 0$  para un  $r_H$  particular, y si  $r \rightarrow \infty$  entonces  $F(r) \rightarrow 0$ ; se sabe que no hay rotación porque no hay términos cruzados con  $\theta$  y  $\phi$ . Suponemos coordenadas angulares fijas ( $\theta, \phi$  constantes), por lo que la cuatro-velocidad tendrá solo dos componentes distintos de cero

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = (U^0, U^1, 0, 0). \quad (5.7)$$

Calculamos la cuatro-aceleración mediante la derivada absoluta

$$A^\gamma = \frac{dU^\gamma}{ds} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu, \quad (5.8)$$

que es equivalente a  $A^\mu = U^\nu \nabla_\nu U^\mu$ . Los componentes específicos son

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{dU^0}{ds} + \Gamma^0_{\mu\nu} U^\mu U^\nu, & A^1 &= \frac{dU^1}{ds} + \Gamma^1_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \\ A^2 &= \frac{dU^2}{ds} + \Gamma^2_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0, & A^3 &= \frac{dU^3}{ds} + \Gamma^3_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde  $A^2$  y  $A^3$  son cero ya que los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son  $\Gamma^0_{01}, \Gamma^1_{00}, \Gamma^2_{21}, \Gamma^3_{31}, \Gamma^1_{33}, \Gamma^2_{32}$  y  $\Gamma^3_{32}$  (más los símbolos con la permutación de índices covariantes donde aplique) pero  $U^2$  y  $U^3$  son cero, por lo que todos los símbolos con índices covariantes 2 y 3 son cero. Los símbolos se pueden obtener de tablas donde se calculan para las métricas tipo Schwarzschild, es decir, estáticas y sin rotación. Los símbolos restantes distintos de cero son

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2} \frac{1}{F(r)} \partial_r F(r), \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} F(r) \partial_r F(r), \\ \Gamma^1_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{F(r)} \frac{\partial F(r)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Con esto, para la componente temporal de la aceleración se obtiene directamente que

$$A^0 = \frac{dU^0}{ds} + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial r} U^0 U^1, \quad (5.11)$$

mientras que para la componente radial de la aceleración es

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{dU^1}{ds} + \frac{F}{2} \frac{\partial F}{\partial r} (U^0)^2 - \frac{1}{2F} \frac{\partial F}{\partial r} (U^1)^2 \\ &= \frac{dU^1}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \left[ (U^0)^2 F - \frac{(U^1)^2}{F} \right] \\ &= \frac{dU^1}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde se usó  $[(U^0)^2 F - (U^1)^2 / F] = [U^0 U^0 g_{00} + U^1 U^1 g_{11}] = 1$ , el módulo de la cuatro-velocidad siempre es uno. El módulo de la cuatro-aceleración es

$$\begin{aligned}
-|A|^2 &= F(A^0)^2 - \frac{(A^1)^2}{F} \\
&= F \left( \frac{dU^0}{ds} \right)^2 - \frac{1}{F} \left( \frac{dU^1}{ds} \right)^2 + \frac{1}{F} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right) (U^0 U^1)^2 - \frac{1}{4F} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \\
&\quad + 2U^0 U^1 \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right) \left( \frac{dU^0}{ds} \right) - \frac{1}{F} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right) \left( \frac{dU^1}{ds} \right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Ya contamos con las componentes del Jerk, de la velocidad y el módulo de la aceleración, además de sus componentes, por lo que ya podemos calcular las componentes distintas de cero de la ecuación de Frenet-Serret,  $J^\mu - |A|^2 U^\mu = 0$ , empezamos por la componente temporal  $J^0 - |A|^2 U^0 = U^\nu \nabla_\nu A^0 - |A|^2 U^0 = 0$ , explícitamente esto es

$$\begin{aligned}
0 &= U^0 \partial_0 A^0 + U^0 \Gamma_{0\nu}^0 a^\nu + U^1 \partial_1 A^0 + U^1 \Gamma_{1\nu}^0 A^\nu - |A|^2 U^0 \\
&= U^0 \frac{\partial A^0}{\partial t} + U^1 \frac{\partial A^0}{\partial r} + U^0 \Gamma_{01}^0 A^1 + U^1 \Gamma_{10}^0 A^0 - |A|^2 U^0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

donde  $\nu = 0, 1$ . Con  $\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial r}$  y considerando que  $\frac{dA^0}{ds} = \frac{\partial A^0}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial A^0}{\partial r} \frac{dr}{ds}$  se tiene finalmente para la componente cero que

$$\frac{dA^0}{ds} + \frac{1}{2F} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right) [U^0 A^1 + A^0 U^1] - |A|^2 U^0 = 0. \tag{5.15}$$

Para el componente radial el procedimiento es análogo, de la ecuación (5.5) se tiene  $J^1 - |A|^2 U^1 = U^\nu \nabla_\nu A^1 - |A|^2 U^1 = 0$ , explícitamente

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{dA^1}{ds} + U^0 \Gamma_{0\mu}^1 A^\mu + U^1 \Gamma_{1\mu}^1 A^\mu \\
&= \frac{dA^1}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right) \left[ F U^0 A^0 - \frac{1}{F} U^1 A^1 \right] - |A|^2 U^1 \\
&= \frac{dA^1}{ds} - |A|^2 U^1,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

donde se ha usado el hecho de que la velocidad y la aceleración son perpendiculares, es decir,  $F U^0 A^0 - U^1 A^1 / F = g_{00} U^0 A^0 + g_{11} U^1 A^1 = U^\mu A_\mu = 0$ .

Como  $|A|$  es constante, es decir, la aceleración propia es uniforme, se puede mostrar que  $J^\mu$  es ortogonal a  $A^\mu$ , pues  $U^\nu \nabla_\nu |A|^2 = U^\nu \nabla_\nu (A^\mu A_\mu) = 2J^\nu A_\nu = 0$ . Siempre que el módulo de la cuatro-aceleración sea constante, lo cual se supuso desde el principio del problema al abarcar

solo movimiento con aceleración uniforme, se tendrá que el cuatro-Jerk es perpendicular a la cuatro-Aceleración, es decir, son ortogonales y su producto interno es cero,  $A_\nu J^\nu = 0$ . Como la velocidad es un cuatro-vector tipo tiempo y de hecho proporcional al cuatro-Jerk según (5.5), y como la aceleración es un cuatro-vector tipo espacio, es claro que su producto interno es cero, esto es más claro en el marco propio, porque estos cuatro-vectores solo tienen componentes temporales y espaciales, correspondientemente.

Para la componente radial de  $J^\mu$ , sustituimos la ecuación (5.12) en (5.5) con lo que se tiene la ecuación diferencial de Frenet-Serret

$$\frac{d^2 U^1}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right) - |A|^2 U^1 = 0. \quad (5.17)$$

Contamos con dos ecuaciones diferenciales, (5.15) y (5.17), una para cada componente de la ecuación de Frenet-Serret, además pueden estar acopladas. A simple vista la parte radial es más sencilla de resolver, en términos de  $U^1$  a su vez en términos de  $r$ . Como

$$\frac{d}{ds} = \frac{dr}{ds} \frac{\partial}{\partial r} = U^1 \frac{\partial}{\partial r}, \quad (5.18)$$

entonces, podemos escribir  $dU^1/ds$  como

$$\frac{dU^1}{ds} = \frac{\partial U^1}{\partial r} \frac{dr}{ds} = \frac{\partial U^1}{\partial r} U^1, \quad (5.19)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U^1}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( U^1 \frac{\partial U^1}{\partial r} \right) \\ &= \frac{dU^1}{ds} \frac{\partial U^1}{\partial r} + U^1 \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U^1}{\partial r} \right) \\ &= \left( \frac{\partial U^1}{\partial r} \right)^2 U^1 + (U^1)^2 \frac{\partial^2 U^1}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Se sustituye la ecuación (5.20) en (5.17) y se usa (5.18) en la parcial de  $F$  para obtener

$$U^1 \left[ U^1 \frac{\partial^2 U^1}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial U^1}{\partial r} \right)^2 - \left( |A|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right) \right] = 0. \quad (5.21)$$

Es claro que una solución trivial es  $U^1 = 0$ , por lo que el verdadero interés está dentro de los paréntesis cuadrados. Podemos ver que la ecuación (5.21) es de la forma  $yy'' + (y')^2 = G(r)$

que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} yy'' + (y')^2 &= (yy')' \\ &= \left(\frac{y^2}{2}\right)' , \end{aligned} \quad (5.22)$$

por lo que para la ec. (5.21) tenemos que

$$\frac{1}{2}([U^1]^2)'' = |A|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right) , \quad (5.23)$$

que podemos resolver mediante sencillas integraciones respecto a  $r$  a ambos lados de la igualdad

$$\frac{1}{2}([U^1]^2)' = |A|^2 r - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r} + c_1 , \quad (5.24)$$

y una vez más

$$\frac{1}{2}([U^1]^2) = |A|^2 \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} F(r) + c_1 r + c_2 , \quad (5.25)$$

finalmente, esto es

$$U^1 = \sqrt{|A|^2 r^2 - F(r) + 2c_1 r + 2c_2} , \quad (5.26)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración. La componente temporal  $U^0$  se puede obtener directamente de la condición de normalización  $U^\nu U_\nu = 1$

$$U^0 U_0 + U^1 U_1 = U^0 U^0 g_{00} + U^1 U^1 g_{11} = (U^0)^2 F - \frac{1}{F} (U^1)^2 = 1 , \quad (5.27)$$

por lo que al despejar

$$U^0 = F^{-1} \sqrt{|A|^2 r^2 + 2c_1 r + 2c_2} . \quad (5.28)$$

Aún tenemos la ecuación diferencial (5.15) y podemos sustituir  $U^0$  y la ec. (5.11) para intentar obtener las constantes de integración  $c_1$  y  $c_2$ . Para esto, sabemos que lejos del BH (cuando  $r \rightarrow \infty$ )  $F(r) \rightarrow 1$ , y las constantes seguirán valiendo lo mismo, por lo que en el límite  $r \rightarrow \infty$  se tiene

$$A^0 = \frac{dU^0}{ds} = \frac{c_1 + |A|^2 r}{\sqrt{2c_2 + 2c_1 r + |A|^2 r^2}} U^1 , \quad (5.29)$$

y la ecuación (5.15) se reduce a

$$0 = \frac{dA^0}{ds} - |A|^2 U^0 . \quad (5.30)$$

Ahora se calcula  $dA^0/ds$  y se sustituye en la ec. (5.30) para obtener

$$\frac{c_1^2 - 2|A|^2 c_2}{(2c_2 + 2c_1 r + |A|^2 r^2)^{3/2}} = 0, \quad (5.31)$$

por lo que  $c_2 = c_1^2/2|A|^2$ . Entonces, podemos escribir a  $U^1$  como

$$\begin{aligned} U^1 &= \sqrt{|A|^2 r^2 - F(r) + 2c_1 r + c_1^2/|A|^2} \\ &= \sqrt{(|A|r + \frac{c_1}{|A|})^2 - F(r)} \\ &= \sqrt{(|A|r + h)^2 - F(r)}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde  $h = c_1/|A| = \sqrt{2c_2}$ . Y de igual manera

$$U^0 = F(r)^{-1}(|A|r + h). \quad (5.33)$$

En principio, podemos obtener las trayectorias  $r(s)$  y  $t(s)$  integrando  $U^1$  y  $U^0$  respecto a  $s$ . Veamos con  $U^1$  lejos del BH que  $dr/ds = \sqrt{(|A|r + h)^2 - 1}$ , por lo que

$$\begin{aligned} s &= \int \frac{dr}{\sqrt{(|A|r + h)^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int \frac{dX}{\sqrt{X^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{arccosh}(\alpha r + h), \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde se usó  $X = \alpha r + h$  y  $|A| = \alpha$ , considerando aceleración positiva. Podemos despejar  $r$

$$r = \frac{\cosh(a\tau) - h}{a}, \quad (5.35)$$

mientras que para  $t$  se tiene que  $U^0 = dt/ds = \alpha r + h = \cosh(\alpha s)$ , por lo que

$$t = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha s), \quad (5.36)$$

por lo que la presencia del BH hace que la hipérbola de Rindler se desplace a lo largo de la dirección radial debido a  $h$ , pero como  $h = c_1/\alpha$  es posible aplicar condiciones iniciales para encontrar  $c_1$ .

### 5.3. Métrica de Schwarzschild

Las componentes de la velocidad se encuentran sustituyendo  $F(r) = 1 - r_s/r$

$$U^1 = \sqrt{(|A|r+h)^2 - 2 + \frac{r_s}{r}}, \quad U^0 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} (|A|r+h). \quad (5.37)$$

Si se toma  $r_s = 0$  tendremos la trayectoria de Rindler que ya se calculó. Si consideramos  $h = 0$ , podemos calcular la ecuación de movimiento,  $r(t)$ , tomando  $U^1/U^0$ , así

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{|A|r} \sqrt{|A|^2 r^2 - 1 + \frac{r_s}{r}}, \quad (5.38)$$

la cual se puede resolver numéricamente para encontrar  $r(t)$ . Sin embargo, se nota un patrón, pues no es posible encontrar la worldline,  $r(s)$  y  $t(s)$ , pues depende de que la integral sea analítica.

Lo que sí es posible hacer es determinar los valores extremales que hacen  $dr/dt = 0$  y hacer un análisis en términos de la aceleración como parámetro, en lugar del tiempo propio.

Considerando  $|A| = \alpha$ , se tiene

$$\left(\alpha^2 r^2 - 1 + \frac{r_s}{r}\right) \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 = 0, \quad (5.39)$$

uno de los valores  $r = r_s$  no es de interés pues ya alcanza al BH. Lo que nos queda es el polinomio  $\alpha^2 r^3 - r + r_s = 0$  que tiene las raíces

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(2/3)^{1/3}}{(-A_0 + B_0)^{1/3}} + \frac{(-A_0 + B_0)^{1/3}}{2^{1/3} 3^{2/3} \alpha^2}, \\ r_2 &= -\frac{(1 + i\sqrt{3})}{2^{2/3} 3^{1/3} (-A_0 + B_0)^{1/3}} - \frac{(1 - i\sqrt{3})(-A_0 + B_0)^{1/3}}{2^{4/3} 3^{2/3} \alpha^2}, \\ r_3 &= -\frac{(1 - i\sqrt{3})}{2^{2/3} 3^{1/3} (-A_0 + B_0)^{1/3}} - \frac{(1 + i\sqrt{3})(-A_0 + B_0)^{1/3}}{2^{4/3} 3^{2/3} \alpha^2}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

con  $A_0 = 9\alpha^4 r_s$  y  $B_0 = \sqrt{3}\alpha^3 \sqrt{27\alpha^2 r_s^2 - 4}$  como coeficientes de las raíces, no confundir  $A_0$  con el módulo del cuatro-vector aceleración. Para  $\alpha^2 > (4/27r_s^2)$ ,  $(-A_0 + B_0)$  es real y  $r_2$  y  $r_3$  son complejos con  $r_1$  negativo. Para estos valores no hay punto de retorno y el observador acelerado cae al horizonte. Para  $|A|^2 < (4/27r_s^2)$ , el término  $(-A_0 + B_0)$  es complejo y se puede escribir como

$$(-A_0 + B_0) = (-A_0 + iB'_0) = C_0 e^{i(\pi-\eta)}, \quad (5.41)$$

donde  $B'_0 = \sqrt{3}\alpha^3\sqrt{4 - 27\alpha^2r_s^2}$ ,  $\eta = \tan^{-1}(B'_0/A_0)$  y

$$\begin{aligned} C_0 &= \sqrt{A_0^2 + B_0^2} \\ &= \sqrt{81\alpha^8r_s^2 + 3\alpha^6(4 - 27\alpha^2r_s^2)} \\ &= 2\sqrt{3}\alpha^3. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Entonces, usando todo esto tenemos para  $r_1$  que

$$\begin{aligned} r_1 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{1}{C_0^{1/3}} e^{-i(\pi-\eta)/3} + \frac{C_0^{1/3}}{2^{1/3}3^{2/3}} e^{i(\pi-\eta)/3} \\ &= \frac{1}{3^{1/3}3^{1/6}} \frac{1}{\alpha} e^{-i(\pi-\eta)/3} + \frac{1}{3^{-1/6}3^{2/3}} \frac{\alpha}{\alpha^2} e^{i(\pi-\eta)/3} \\ &= \frac{1}{\alpha 3^{3/6}} e^{-i(\pi-\eta)/3} + \frac{1}{\alpha 3^{3/6}} e^{i(\pi-\eta)/3} \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{3}} \left( e^{i(\pi-\eta)/3} + e^{-i(\pi-\eta)/3} \right) \\ &= \frac{2}{\alpha\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi-\eta}{3}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{3}} \left( \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\eta}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\eta}{3} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{3}} \left( \cos\frac{\eta}{3} + \sqrt{3} \sin\frac{\eta}{3} \right). \end{aligned} \tag{5.43}$$

y similarmente

$$r_2 = -\frac{4 \cos \frac{\eta}{3}}{2\sqrt{3}\alpha}, \quad y \quad r_3 = \frac{1}{\alpha\sqrt{3}} \left( \cos \frac{\eta}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\eta}{3} \right). \tag{5.44}$$

$\eta$  puede tomar valores de 0 a  $\pi/2$ . Para este rango  $\cos(\eta/3)$  y  $\sin(\eta/3)$  son positivos y por lo tanto  $r_2$  es negativo y no físico. Cuando  $\alpha^2$  se acerca a  $(4/27r_s^2)$ , ambos valores extremales ( $r_1$  y  $r_3$ ) se hacen cercanos. Cuando  $\alpha^2 = 4/27r_s^2$ ,  $B'_0 = 0$  y  $\sin(\eta/3) = 0$ , entonces ambos radios se vuelven el mismo valor  $r_b$ ,

$$r_b = \frac{1}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{3r_s}{2}. \tag{5.45}$$

Ahora, para el caso general  $h \neq 0$  podemos hacer el cambio  $h = c_1/\alpha$  y tendremos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{U^1}{U^0} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\sqrt{(\alpha r + \frac{c_1}{\alpha})^2 - 1 + \frac{r_s}{r}}}{(\alpha r + \frac{c_1}{\alpha})}, \tag{5.46}$$

que se puede resolver numéricamente para encontrar la trayectoria  $r(t)$ . Para los valores



extremos hacemos  $dr/dt = 0$  y tendremos

$$\left[ \left( \alpha r + \frac{c_1}{\alpha} \right)^2 - 1 + \frac{r_s}{r} \right] \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)^2 = 0, \quad (5.47)$$

donde una de las raíces es  $r = r_s$ . Las otras soluciones de interés se obtienen del polinomio entre paréntesis cuadrados que podemos reescribir como

$$\alpha^2 r^3 + 2c_1 r^2 + r \left( \frac{c_1^2}{\alpha^2 - 1} \right) + r_s = 0, \quad (5.48)$$

que tiene tres soluciones

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{2c_1}{3\alpha^2} + \frac{P^{1/3}}{2^{1/3}3\alpha^4} + \frac{2^{1/3}(3\alpha^2 + c_1^2)}{3P^{1/3}}, \\ r_2 &= -\frac{2c_1}{3\alpha^2} - \frac{(1 - i\sqrt{3}P^{1/3})}{2^{1/3}6\alpha^4} - \frac{(1 + i\sqrt{3})(3\alpha^2 + c_1^2)}{2^{2/3}P^{1/3}}, \\ r_3 &= -\frac{2c_1}{3\alpha^2} - \frac{(1 + i\sqrt{3}P^{1/3})}{2^{1/3}6\alpha^4} - \frac{(1 - i\sqrt{3})(3\alpha^2 + c_1^2)}{2^{2/3}P^{1/3}}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde  $P = -A + iB$ , con  $A = (27\alpha^{10}r_s + 18\alpha^8c_1 - 2\alpha^6c_1^3)$  y  $B = \sqrt{4(3\alpha^6 + \alpha^4c_1^2)^3 - A^2}$ .

Ahora hacemos un procedimiento similar al que se hizo con el caso  $h = 0$ , podemos escribir

$$-A + iB = Ce^{i(\pi - \epsilon)}, \quad (5.50)$$

con  $\epsilon = \arctan(B/A)$  y  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ , que específicamente es

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{4(3\alpha^6 + \alpha^4c_1^2)^3 - A^2 + A^2} \\ &= \sqrt{4(3\alpha^6 + \alpha^4c_1^2)^3} \\ &= 2(3\alpha^6 + \alpha^4c_1^2)^{3/2} \\ &= 2\alpha^6(3\alpha^2 + c_1^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Entonces,  $P = -A + iB = 2(3\alpha^6 + \alpha^4 c_1^2)^{3/2} e^{i(\pi-\epsilon)}$ , por lo que

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\frac{2c}{3\alpha^2} + \frac{[2(3\alpha^6 + \alpha^4 c_1^2)^{3/2} e^{i(\pi-\epsilon)}]^{1/3}}{2^{1/3} 3\alpha^4} + \frac{2^{1/3} (3\alpha^2 + c_1^2)}{3 [2(3\alpha^6 + \alpha^4 c_1^2)^{3/2} e^{i(\pi-\epsilon)}]^{1/3}} \\
&= -\frac{2c_1}{3\alpha^2} + \frac{\sqrt{3\alpha^2 + c_1^2}}{3\alpha^2} e^{i(\pi-\epsilon)/3} + \frac{\sqrt{3\alpha^2 + c_1^2}}{3\alpha^2} e^{-i(\pi-\epsilon)/3} \\
&= -\frac{2c_1}{3\alpha^2} + \frac{\sqrt{3\alpha^2 + c_1^2}}{3\alpha^2} \left( e^{i(\pi-\epsilon)/3} + e^{-i(\pi-\epsilon)/3} \right) \\
&= -\frac{2c_1}{3\alpha^2} + 2 \frac{\sqrt{3\alpha^2 + c_1^2}}{3\alpha^2} \cos\left(\frac{\pi - \epsilon}{3}\right),
\end{aligned} \tag{5.52}$$

por lo que finalmente tendremos que

$$r_1 = \frac{2}{3\alpha^2} \left[ \frac{\sqrt{3\alpha^2 + c_1^2}}{2} \left( \cos \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\epsilon}{3} \right) - c_1 \right]. \tag{5.53}$$

Similarmente,

$$r_2 = -\frac{2}{3\alpha^2} \left[ \sqrt{3\alpha^2 + c_1^2} \cos \frac{\epsilon}{3} + c_1 \right], \tag{5.54}$$

$$r_3 = \frac{2}{3\alpha^2} \left[ \frac{\sqrt{3\alpha^2 + c_1^2}}{2} \left( \cos \frac{\epsilon}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\epsilon}{3} \right) - c_1 \right]. \tag{5.55}$$

Es claro que si revertimos el cambio,  $c_1 = \alpha h$ , tendremos

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{2}{3\alpha} \left[ \frac{\sqrt{3 + h^2}}{2} \left( \cos \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\epsilon}{3} \right) - h \right], \\
r_2 &= -\frac{2}{3\alpha} \left[ \sqrt{3 + h^2} \cos \frac{\epsilon}{3} + h \right], \\
r_3 &= \frac{2}{3\alpha} \left[ \frac{\sqrt{3 + h^2}}{2} \left( \cos \frac{\epsilon}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\epsilon}{3} \right) - h \right].
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Si  $B$  es real, entonces  $\epsilon$  es la arcotangente de un valor positivo, y es un valor que va de entre 0 y  $\pi/2$ . Para este rango de valores  $r_2$  siempre es negativo por lo que no es un valor de interés físico.

Para encontrar los valores para los que  $B$  es real, primero encontramos los ceros de la función  $B$  y encontramos  $|A|$  en términos de  $r_s$  y  $h$ , esto es, resolver para  $|a|$  del polinomio  $4(3 +$

$h^2)^3 - (27|A|r_s + 18h - 2h^3)^2 = 0$ , lo que nos da dos valores para la aceleración

$$\begin{aligned} |A_1| &= \frac{2(-9h + h^3 - \sqrt{(3 + h^2)^3})}{27r_s}, \\ |A_2| &= \frac{2(-9h + h^3 + \sqrt{(3 + h^2)^3})}{27r_s}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

# Capítulo 6

## Aplicación al grafeno

El grafeno es de particular interés pues es un material que puede ser del ancho de un átomo y por lo tanto es el objeto más cercano que tenemos a uno dos-dimensional que hay en la naturaleza. Uno de los casos más sencillos en el que podemos pensar es en una hoja de grafeno la cual esté deformada de tal manera que coincida con una pseudoesfera, que es bastante similar a una aguja, y de esta manera podemos asociar una métrica con geometría hiperbólica a la hoja de grafeno. Esto ya que la pseudoesfera se caracteriza porque el movimiento sobre esta superficie se puede representar por un movimiento hiperbólico.

### 6.1. Métrica del grafeno

La métrica más sencilla a la que podemos asociar el grafeno, [26], y que podemos realizar en un laboratorio tiene la dimensionalidad  $(1+2)$ , es de la forma

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & g_{\alpha\beta}^{(2)}(x, y) & \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

esto es, con toda la curvatura en la parte espacial  $g_{\alpha\beta}^{(2)}$  y sin dependencia temporal. El (2) en la métrica significa que la parte espacial es de dos dimensiones, más la dimensión de la parte temporal. En principio una lámina de grafeno puede ser curvada y se pueden tener situaciones que implican un espacio-tiempo plano conforme.

Podemos escribir la métrica como

$$ds_{\text{grafeno}}^2 = dt^2 - \frac{r^2}{\bar{y}^2}(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2) = \frac{r^2}{\bar{y}^2} \left[ \frac{\bar{y}^2}{r^2} dt^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 \right], \quad (6.2)$$

donde  $\bar{x}, \bar{y}$  son las coordenadas abstractas de la llamada geometría de Lobachevsky. La parte espacial de la métrica del grafeno es

$$dl^2 = \frac{r^2}{\bar{y}^2}(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2), \quad (6.3)$$

donde con ( $\bar{y} > 0$ ). El elemento completo es  $ds_{\text{grafeno}}^2 = dt^2 - dl^2$ .

En general, no hay una única parametrización que sea buena para todas las superficies. Pero nosotros nos concentramos en la llamada canónica

$$x(u, v) = R(u) \cos v, \quad y(u, v) = R(u) \sin v, \quad z(u) = \pm \int^u \sqrt{1 - R'(\bar{u})} d\bar{u}, \quad (6.4)$$

donde la prima denota derivada respecto al argumento,  $v \in [0, 2\pi]$  es el paralelo,  $u$  es el meridiano y  $R(u)$  define el tipo de superficie. Con esta parametrización

$$dl^2 = du^2 + R^2(u)dv^2. \quad (6.5)$$

La curvatura Gaussiana está dada por la expresión

$$\kappa = -\frac{R''(u)}{R(u)}. \quad (6.6)$$

Cuando  $\kappa$  es constante es fácil determinar que

$$\begin{aligned} R(u) &= c \cos(u/r + b) \quad \text{para } \kappa = 1/r^2, \\ R(u) &= c_1 \sinh(u/r) + c_2 \cosh(u/r) \quad \text{para } \kappa = -1/r^2, \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde  $r$  es una constante, y  $c, b, c_1, c_2$  son también constantes que determinan el tipo de superficie. Cuando  $\kappa = 1/r^2$ , con  $c = r$ , tendremos una esfera de radio  $r$ . Cuando  $\kappa = -1/r^2$  tendremos tres casos:

- $c_1 = c_2 = c$  que da

$$R(u) = ce^{u/r}, \quad (6.8)$$

- $c_1 = 0$ ,  $c_2 = c$  que da

$$R(u) = c \cosh(u/r), \quad (6.9)$$

- o  $c_2 = 0$ ,  $c_1 = c$  que da

$$R(u) = c \sinh(u/r). \quad (6.10)$$

En ese orden son llamadas las pseudoesferas de Beltrami, la hiperbólica y la elíptica, y  $z(u)$  está dada por  $ds_{\text{grafeno}}^2$ . Las superficies de curvatura  $\kappa = +1/r^2 = \text{constante}$  se pueden describir por el elemento de línea espacial

$$dl^2 = du^2 + c^2 \cos^2(u/r) dv^2, \quad (6.11)$$

con una constante real  $c$  tal que  $c = r$  (esfera),  $c < r$ ,  $c > r$ . Para las superficies de revolución con  $k = -1/r^2$ , llamadas pseudoesferas, podemos describirlas por el elemento de línea

$$dl^2 = du^2 + (c_1^2 \cosh^2(u/r) + c_2^2 \sinh^2(u/r)) dv^2. \quad (6.12)$$

En términos de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  es, pra el caso de la pseudoesfera hiperbólica ( $c_1 \neq 0$  y  $c_2 = 0$  en (6.12)),

$$\bar{x} = e^{cv/r} \tanh(u/r), \quad \bar{y} = e^{cv/r} / \cosh(u/r). \quad (6.13)$$

El factor conforme  $r^2/\bar{y}^2$  es multivaluado. Para el caso de la pseudoesfera de Beltrami

$$\bar{x} = v/r, \quad \bar{y} = e^{-u/r}/r, \quad (6.14)$$

esto es,  $r^2/\bar{y}^2$  tiene un sentido sobre toda la superficie/espacio-tiempo. Ahora sabemos cuanto vale el factor conforme,  $\phi$ , de modo que  $g_{\mu\nu}^{\text{grafeno}} = \phi^2 g_{\mu\nu}^{\text{plana}}$

$$ds_{\text{grafeno}}^2 = ds_{(B)}^2 = e^{2u/r} [e^{-2u/r} (dt^2 - du^2) - r^2 dv^2]. \quad (6.15)$$

El factor conforme resulta ser  $\phi(u) = \frac{1}{r} e^{(u/r)}$ . Ya que la métrica es diagonal, los componentes del tensor métrico son

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1 \quad \text{y} \quad g_{22} = -r^2 e^{2u/r}. \quad (6.16)$$

## 6.2. Métrica del grafeno en el marco de Frenet-Serret

Para obtener las ecuaciones de Frenet-Serret necesitamos la tétrada ortogonal (5.1) que se calcula mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. La cuatro-velocidad tiene la forma

$$U^\mu = (U^0, U^1, U^2, U^3), \quad (6.17)$$

pero  $U^3 = 0$  por la dimensionalidad del problema. Entonces, por esta misma razón, en lugar de tétrada tendremos una triada y podemos descartar  $\Lambda_3^\mu$  en (5.1). La aceleración la calculamos mediante la derivada absoluta de la cuatro-velocidad, esto es

$$A^\mu = \frac{D}{ds} U^\mu = \frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{jk}^\mu U^j U^k, \quad (6.18)$$

y similarmente para el Jerk

$$J^\mu = \frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma_{jk}^\mu U^j A^k. \quad (6.19)$$

Sabemos que como también debemos considerar la torsión entonces las ecuaciones de Frenet-Serret aparecerá el Snap, que es

$$S^\mu = \frac{dJ^\mu}{ds} + \Gamma_{jk}^\mu U^j J^k. \quad (6.20)$$

Es claro que todas las derivadas superiores cumplen esta misma forma. Notemos que los cuatrovectores que son derivadas de otros cuatro-vectores, como la cuatro-aceleración que es derivada de la cuatro-velocidad, dependen además de los símbolos de Christoffel,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ , que a su vez dependen del tensor métrico y derivadas del tensor métrico (revisar apéndice A.2). Calculamos los símbolos de Christoffel y se encuentra que los símbolos distintos de cero son

$$\Gamma_{22}^1 = -re^{\frac{2u}{r}} \quad \text{y} \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}. \quad (6.21)$$

Con esto, ya es posible calcular los componentes de los cuatrovectores para después sustituirlos en las ecuaciones de Frenet-Serret en su generalización a espacio-tiempo curvo que vimos en el Capítulo 5. Sin embargo, la métrica del grafeno es una métrica (1+2), es decir, una métrica con una coordenada temporal y dos coordenadas espaciales, mientras que la generalización a

espacio-tiempo curvo del marco de Frenet-Serret en el Capítulo 5 se hizo solo considerando métricas  $(1 + 1)$ . Que se tengan  $(1 + 2)$  coordenadas significa una posible trayectoria en tres dimensiones, lo que implica que las fórmulas de Frenet-Serret deben contar con dos de los parámetros de Frenet-Serret, la curvatura y la torsión. El caso más simple, es el consideras que ambos parámetros de Frenet-Serret son constantes.

Las componentes de los cuatro-vectores que se definen como la derivada absoluta de otro cuatro-vector, con estos símbolos de Christoffel en particular, toman la forma

$$\begin{aligned} J^0 &= \frac{d}{ds} A^0, \\ J^1 &= \frac{d}{ds} A^1 - r e^{2u/r} U^2 A^2, \\ J^2 &= \frac{d}{ds} A^2 + \frac{1}{r} (U^1 A^2 + U^2 A^1). \end{aligned} \quad (6.22)$$

En este caso usamos el Jerk como ejemplo, pero si se cambia el Jerk por cualquier otro vector que es la derivada de un cuatro-vector, y se cambian los componentes A por los componentes del cuatro-vector que se derivó.

Las ecuaciones de Frenet-Serret generalizadas a considerar son (5.2) con  $\nu = 0$  en la matriz  $K_{\alpha\beta}$  y con  $\kappa$  y  $\tau$  como constantes.

La primer ecuación de Frenet-Serret surge al considerar  $a = 0$  en (5.2)

$$\dot{\Lambda}_0^\mu = K_0^b \Lambda_b^\mu \rightarrow \frac{DU^\mu}{ds} = \kappa \frac{A^\mu}{|A|}, \quad (6.23)$$

pero, como  $DU^\mu/ds = A^\mu$  tenemos una relación trivial siempre y cuando  $\kappa = |A| = \alpha$ .

La segunda ecuación de Frenet-Serret se consigue al considerar  $a = 1$  en (5.2)

$$\dot{\Lambda}_1^\mu = K_1^b \Lambda_b^\mu \rightarrow \frac{D\Lambda_1^\mu}{ds} = \kappa U^\mu + \tau \Lambda_2^\mu, \quad (6.24)$$

donde al considerar  $\kappa = \alpha$  en (5.1) encontramos que

$$\Lambda_2^\mu = \frac{J^\mu - \kappa^2 U^\mu}{\sqrt{\kappa^2 - J_\nu J^\nu}}, \quad (6.25)$$

entonces la ecuación de Frenet-Serret es

$$(J^\mu - \kappa^2 U^\mu) \left( 1 - \frac{\kappa\tau}{\sqrt{\kappa^2 - J_\nu J^\nu}} \right) = 0. \quad (6.26)$$



Si el paréntesis a la izquierda es cero, recuperamos el caso dos-dimensional, pero si el paréntesis de la derecha es cero concluimos que

$$|J|^2 = J_\nu J^\nu = \kappa^2(\kappa^2 - \tau^2). \quad (6.27)$$

La última ecuación de Frenet-Serret surge al considerar  $a = 2$  en (5.2)

$$\dot{\Lambda}_2^\mu = K_2^b \Lambda_b^\mu = -\tau \Lambda_1, \quad (6.28)$$

que escribimos como

$$S^\mu - (\kappa^2 - \tau^2)A^\mu = 0. \quad (6.29)$$

A primera vista parece una ecuación simple, pero hay que sustituir, por componente, el cuatro-Snap (6.20) que es a su vez una derivada absoluta de (6.19) que es a su vez derivada de la aceleración y esta lo es de la velocidad, y como son tres componentes tendremos tres ecuaciones diferenciales de cuarto orden y acopladas para los componentes de la cuatro-velocidad. La única manera de intentar desacoplar las ecuaciones es mediante las siguientes propiedades que se pueden deducir de los cuatro-vectores mediante sus módulos

$$U^\mu U_\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = g_{00}(U^0)^2 + g_{11}(U^1)^2 + g_{22}(U^2)^2 = 1, \quad (6.30)$$

$A_\nu A^\nu = -\kappa^2$ ,  $J_\nu J^\nu = \kappa^2(\kappa^2 - \tau^2)$ ,  $S_\nu S^\nu = -\kappa^2(\kappa^2 - \tau^2)$ ) y por último, la velocidad y aceleración son perpendiculares, se tiene

$$U_\mu A^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu A^\nu = g_{00}U^0A^0 + g_{11}U^1A^1 + g_{22}U^2A^2 = 0, \quad (6.31)$$

y también son perpendiculares todos los cuatrovectores y su cuatro-vector derivado inmediato, es decir,  $A_\nu J^\nu = 0$  y  $J_\nu S^\nu = 0$ .

Tres ecuaciones diferenciales de cuarto orden acopladas no está dentro de nuestras posibilidades para resolver, pero intentar disminuir la complejidad del problema empezando por notar que para una métrica plana (Minkowski) en la forma

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2, \quad (6.32)$$

con los cambios

$$T = re^{-u/r} \sinh(t/r), \quad X = re^{-u/r} \cosh(t/r) \quad \text{y} \quad Y = rv, \quad (6.33)$$

nos da la parte entré paréntesis de la métrica (6.15), por lo que comprobamos que es una métrica plana si hacemos los cambios inversos. Esto significa que el factor conforme es el único componente no plano de la métrica y como es igual para toda la métrica se simplifica bastante los símbolos de Christoffel. Aún más, si consideramos en la métrica plana  $dY^2 = 0$  entonces reducimos la dimensionalidad del problema sin perder mucha generalidad. Si reconocemos que

$$u = -\frac{r}{2} \ln \left[ \frac{X^2 - T^2}{r^2} \right], \quad (6.34)$$

se encuentra que la métrica del grafeno se puede reducir a

$$ds_{\text{graph}}^2 = \left( \frac{X^2 - T^2}{r^2} \right) (dT^2 - dX^2). \quad (6.35)$$

Para esta nueva forma de la métrica los símbolos de Christoffel son

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 = \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 &= \frac{T}{T^2 - X^2}, \\ \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{00}^1 = \Gamma_{11}^1 &= \frac{X}{X^2 - T^2}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Las ventajas de escribir la métrica son evidentes, a pesar de que tenemos más símbolos de Christoffel distintos de cero, como la métrica es dos-dimensional entonces solo tendremos dos ecuaciones de Frenet-Serret, solo se usarán dos elementos de la tétrada y solo tendremos que considerar hasta el Jerk como derivada superior, pues todas las posteriores son proporcionales a las ya calculadas. Los componentes del cuatro vector aceleración toma la forma

$$A^\mu = \frac{d}{ds} U^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu U^\nu U^\lambda, \quad (6.37)$$

y similarmente para el cuatro-Jerk

$$J^\mu = \frac{d}{ds} A^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu U^\nu A^\lambda, \quad (6.38)$$

mientras que se debe cumplir para la ecuación de Frenet-Serret que

$$J^\mu - \kappa^2 U^\mu = 0. \tag{6.39}$$

Tendremos dos ecuaciones diferenciales acopladas no lineales considerablemente complicadas, y no nos es posible resolverlas con los recursos actuales. Debido a la complejidad de este sistema en particular, se consideró adecuado dejar este análisis como trabajo a futuro.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En esta tesis de doctorado se estudió el movimiento hiperbólico relativista desde varios ángulos que nos permitieron hacer algunas generalizaciones. Con aceleración propia constante desarrollamos el movimiento hiperbólico en  $1 + 1$  y  $1 + 3$  dimensiones tiempo espaciales de Minkowski y también se generalizó a un espacio-tiempo curvo tipo Schwarzschild en  $1 + 1$  dimensiones. No solo eso, pues encontramos que el movimiento hiperbólico está estrechamente relacionado con las ecuaciones de Frenet-Serret. Cuando desarrollamos las ecuaciones de Frenet-Serret con un solo parámetro cinemático constante, la curvatura, encontramos que describe exactamente el movimiento hiperbólico en  $1 + 1$  dimensiones. Además, se encuentra que la aceleración propia, es decir, el valor del módulo de la cuatro aceleración corresponde de manera idéntica con el parámetro de Frenet-Serret, la curvatura. En el mismo contexto, desarrollamos el movimiento en  $1 + 3$  dimensiones tiempo espaciales de Minkowski con una parametrización hiperbólica para la velocidad y encontramos que está relacionado con el desarrollo del marco de Frenet-Serret con dos parámetros cinemáticos constantes, la curvatura y la torsión, pero, solo si una constante de integración en el argumento de la parametrización hiperbólica,  $f(s)$ , equivale a la torsión. Evidentemente, la cantidad de parámetros de Frenet-Serret indican la dimensionalidad del sistema  $+1$ , esto es, si se consideran los tres parámetros tendremos espacio-tiempo Minkowski en cuatro dimensiones, y encontramos así que el desarrollo matricial del Capítulo 3 se da en  $1 + 2$  dimensiones, y no en  $1 + 3$  como se pensaba. El objetivo final de estudiar la cinemática hiperbólica es encontrar trayectorias (líneas de universo), lo cual se logró y se pudieron graficar. A pesar de tener una parametrización hiperbólica, para la velocidad, no implica que la línea de universo,  $X^\mu(s)$ , va a estar dada en

términos de funciones hiperbólicas solamente. Las líneas de universo obtenidas se grafican en términos de los parámetros que obtenemos y están relacionados con los de Frenet-Serret pero además juegan el papel de un modificador del movimiento hiperbólico, pues como se puede ver en las gráficas las hipérbolas modificadas concuerdan con las hipérbolas de Rindler si esos parámetros son cero, y mientras sean mayores las trayectorias modificadas se alejan de las hipérbolas de Rindler típicas.

Por otro lado, de manera natural en las ideas del escrito, se piensa en el caso en que la aceleración ya no es uniforme. Mantenemos el formalismo de Frenet-Serret y encontramos que bajo ciertas condiciones muy específicas, como la constancia o proporcionalidad del módulo del Jerk con la aceleración, se pueden obtener trayectorias bastante similares a hipérbolas, las graficamos y comparamos con las hipérbolas de Rindler y encontramos situaciones interesantes. Como ejemplo, encontramos que la trayectoria modificada cruza el horizonte de Rindler, lo cual sucede ya que el horizonte está definido por la constancia de la aceleración en el movimiento hiperbólico, y si la aceleración es variable parece ser que cruza el horizonte. Para el caso de dos parámetros de Frenet-Serret, curvatura y torsión, no pudimos encontrar trayectorias en forma analítica, pero se pudo encontrar la cuatro-aceleración.

Una posible implicación de estos resultados es el poder obtener información adicional gracias a ciertos efectos relacionados con la aceleración, como el efecto Unruh, que directamente relaciona la aceleración propia constante con radiación térmica. El caso de aceleración propia no constante se usa junto con el efecto Unruh para calcular límites superiores absolutos en el Jerk y aceleración.

# Apéndice A

## Notación

En este escrito de tesis se trabajó con relatividad especial e incluso con relatividad general, por lo tanto, se ha usado una gran cantidad de notación común en estas áreas, yendo desde los cuatro-vectores cinemáticos como el Jerk, hasta métricas y tensores. Este apéndice muestra la notación que consideramos más importante usada en el escrito.

### A.1. Notación de relatividad especial

Una de las principales diferencias entre la relatividad especial con la mecánica Newtoniana es que el tiempo toma importancia en un nivel de dimensión; los eventos tienen una separación temporal y las velocidades a las que viaja la información son finitas y de hecho limitadas por una velocidad máxima, que después se encuentra es la velocidad de la luz. En lugar de trabajar con tres dimensiones, se trabaja con una dimensión adicional, el tiempo, a esto le llamamos el espacio-tiempo. Como comparación, en la mecánica clásica el objetivo es encontrar la posición del cuerpo (o cuerpos) en el sistema de interés en todo momento, y en la relatividad especial se sigue una filosofía similar, pues es de interés el camino o curva que un cuerpo sigue a través del espacio-tiempo. A este camino se le llama trayectoria o mejor conocido en la literatura como worldline o línea de mundo. Por ejemplo, un espacio-tiempo plano, también conocido como espacio-tiempo de Minkowski, es un espacio-tiempo en donde no hay campos gravitacionales presentes, como una gran masa como la de un agujero negro. Hay un sistema de coordenadas

que cubre todo el espacio-tiempo, que se suele escribir como

$$(X^\mu) = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (t, x, y, z), \quad (\text{A.1})$$

en donde notamos que la parte correspondiente al tiempo,  $t$ , es la componente cero,  $X^0$ , y no la componente uno. Esto se hace principalmente por convención, pues es sencillo recordar que la componente cero sea la temporal y las componentes uno en adelante sean las espaciales, cada una agregando una dimensión al sistema. Notamos que el índice griego  $\mu$  se usó en (A.1), e indica la componente individual del espacio-tiempo, es decir, la componente temporal, con  $\mu = 0$ , o las espaciales, con  $\mu = 1, 2, 3$ . A la forma que toma  $X^\mu$  también le llamamos cuatro-vector porque se comporta exactamente igual que un vector en el espacio Euclídeo pero con cuatro componentes en lugar de tres, en el espacio-tiempo de Minkowski, siempre conscientes de que el primer componente es una componente temporal. La separación entre dos eventos en el espacio-tiempo está dada, en su forma diferencial, por el elemento de línea

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (\text{A.2})$$

No hay nada que nos impida el usar otro sistema de coordenadas que no sean  $x, y, z$ ; podría usarse un sistema de coordenadas cilíndricas o de coordenadas esféricas, por ejemplo, y solo se necesita hacer el cambio de coordenadas correspondiente. Hacemos  $c = 1$  en (A.2) por simplicidad, donde se puede determinar que  $c$  es la velocidad de la luz. Notamos también que el elemento de línea se escribió con la parte del tiempo con valor positivo, y la parte espacial con valor negativo, la razón por la que tienen signos opuestos es porque si  $ds^2 = 0$  entonces  $c$  juega el papel de velocidad máxima que puede haber, que por simplicidad se considera positiva. Tampoco hay ninguna razón por la cual no considerar los signos del diferencial de línea a la inversa, es decir,  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ , y esto se suele llamarle convención de signos; nosotros usamos en el escrito la convención  $(+, -, -, -)$ . Por último, para el elemento de línea, lo podemos escribir como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.3})$$

en donde se usa la convención de suma de Einstein, donde el subíndice griego está contraído, es decir, se repite con su forma de superíndice, y significa que hay una suma implícita.

ta para cada valor del índice. Por ejemplo, para un cuatro-vector cualquiera la operación  $V_\mu V^\mu = V_0V^0 + V_1V^1 + V_2V^2 + V_3V^3$ . Además,  $\eta_{\mu\nu}$  se le conoce como tensor métrico, y para el caso del espacio-tiempo de Minkowski es la matriz diagonal de  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . A  $ds^2$  también se le suele llamar métrica, dependiendo del autor, pero como está estrechamente relacionada con el tensor métrico (A.3) se suele usar indistintamente el nombre métrica para ambos.

Notemos que en relatividad especial (SR) el tiempo y el espacio se consideran por separado y con la misma jerarquía, de dimensión, pero uno de los efectos de las consideraciones de la SR es que el tiempo se vuelve relativo a quién lo mide. Entonces, surge el concepto de *tiempo propio*, el tiempo propio entre dos eventos mide el tiempo que transcurre para un observador que se mueve entre estos dos eventos, y no es el mismo que se mediría en el tiempo coordinado,  $t$ , y además se encuentra que este tiempo, usualmente representado con  $\tau$ , cumple que  $d\tau = ds$ , siempre que  $c = 1$ . Entonces, hemos optado por especificar al tiempo propio con la letra  $s$ , ya que  $\tau$  se usa como el símbolo para la torsión. Cualquier derivada respecto al tiempo propio la denotaremos con un punto arriba de la expresión derivada, como ejemplo, la derivada  $dR/ds = \dot{R}$ .

El uso del término “propio”, como tiempo propio, velocidad propia y aceleración propia, entre otros, se refiere a la perspectiva del observador que se encuentra en un marco comovil al movimiento del cuerpo/partícula. Ya que una de las cualidades de la relatividad especial es que las mediciones dependen o son relativas al marco donde se midan es importante aclarar que en el marco propio se mide desde la perspectiva del objeto en movimiento. Por ejemplo, la aceleración propia es la aceleración que mediría el observador en movimiento con un acelerómetro. En general nosotros solo consideramos la perspectiva de dos marcos, el marco propio y el marco de laboratorio, que es la perspectiva de un marco inercial que se tendría, por ejemplo, desde un laboratorio.

Una forma de escribir el producto interno entre vectores con la expresión tensorial es, para dos cuatro-vectores cualesquiera  $A$  y  $B$ ,  $A_\mu B^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ , es decir, se está haciendo un producto entre cada uno de los elementos de los vectores, para asegurar que sean productos entre las componetes correspondientes se usa la métrica, que es diagonal, para asegurarlo, además de que le da el signo apropiado a la parte temporal o espacial según la signatura escogida. Otra forma equivalente de expresar el producto interno es mediante la simbología  $\langle, \rangle$ , la cual



usamos en el escrito. Cualquier expresion de un cuatro-vector en la forma cuadrática, por ejemplo  $J^2$ , significa que se está haciendo un producto interno con el mismo cuatro-vector, esto es  $J^2 = J \cdot J = \eta_{\mu\nu} J^\mu J^\nu = J_\nu J^\nu = J_0^2 - J_1^2 - J_2^2 - J_3^2$ . Se suele especificar que es un producto interno en el contexto de la operación ya que puede haber confusión con la componente de ese mismo cuatro-vector.

Por último, un comentario sobre el porqué se escoge una parametrización hiperbólica para la cuatro-velocidad, tiene que ver con que el módulo de la cuatro-velocidad siempre es  $\pm c^2$ , dependiendo de la signatura, y como nosotros consideramos la velocidad de la luz como la unidad, y la signatura la consideramos  $(+, -, -, -)$ , entonces siempre tendremos que el módulo de la cuatro-velocidad será 1. Esto se puede ver si consideramos la cuatro-velocidad, incluyendo  $c$ , como  $U = (\gamma c, \gamma \vec{u})$ , entonces si calculamos su modulo se tiene que

$$U \cdot U = U^2 = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = (U^0)^2 - \vec{U}^2 = \gamma^2(c^2 - u^2), \quad (\text{A.4})$$

pero, por definición, tenemos que el factor de Lorentz es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (\text{A.5})$$

por lo que simplemente se tiene que  $U^2 = c^2$ . Una parametrización hiperbólica en la forma  $\dot{t} = \gamma = \cosh f$  y  $\dot{\vec{r}} = \sinh f \hat{n}$  cumple el mismo requisito.

## A.2. Notación en secciones de relatividad con curvatura

No se considera a fondo en la formulación completa de la relatividad general, pero se hace uso de algunas herramientas explicadas en la sección anterior. La primera ya fue introducida y es la métrica, ahora expresada con  $g$ , esto es  $\eta \rightarrow g$ , y la diferencia es que para una metrica plana la métrica es diagonal y compuesta de la unidad, mientras que cuando se considera un espacio-tiempo curvo la métrica no es necesariamente diagonal, aunque a veces lo es, y ya no siempre se compone por elementos que tengan la unidad. Uno de los ejemplos es la métrica de Schwarzschild, que es la que describe el espacio-tiempo para un objeto masivo que produce

un campo gravitacional, con simetría esférica.

Otra de las cosas que cambian es la derivada, cuando se tiene una derivada respecto al tiempo propio de términos como un cuatro-vector, se debe considerar en cómo afecta la curvatura del espacio tiempo. Para esto, en el caso particular de los cuatro-vectores, se sustituye su derivada por la llamada *derivada absoluta*, esto es

$$\frac{d}{ds} \rightarrow \frac{D}{ds}. \quad (\text{A.6})$$

La derivada absoluta de un cuatro-vector  $F^\mu$  se define como

$$\frac{DF^\mu}{ds} = \frac{dF^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu F^\nu U^\lambda, \quad (\text{A.7})$$

donde  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  son los símbolos de Christoffel. Los símbolos de Christoffel se definen como

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right), \quad (\text{A.8})$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico que depende del espacio-tiempo que se estudia, y que cumple  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  para el elemento de línea. A su vez  $g^{\mu\nu}$  es el inverso del tensor métrico y entre los dos se cumple que  $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$ , la delta de Kronecker. Además,  $g_{\mu\nu}$  se usa para bajar y subir índices si está contraído, por ejemplo  $g_{\mu\nu} F^\mu = F_\nu$ .

La ventaja de expresar el movimiento hiperbólico en espacio-tiempo de Minkowski con una formulación covariante es que el paso a un espacio-tiempo curvo es más sencillo, pues se sigue el mismo formalismo de expresión en las ecuaciones, pero se hacen unos ligeros cambios, que incluyen:

- Cambio de la derivada por una derivada covariante, o absoluta
- Cambio de la métrica plana por un tensor métrico que contiene los efectos de curvatura
- El lugar de los índices ahora importa, no es lo mismo un índice covariante (abajo) que contravariante (arriba) pues son contrarios entre sí. Por ejemplo un vector covariante multiplicado por uno contravariante  $A_\mu A^\mu$  es en realidad el módulo de dicho vector. Esto significa que un índice sea covariante o contravariante para un vector implica que

el vector sea horizontal o su transpuesto (vertical). Similarmente, para una matriz el que tenga sus dos índices covariantes o contravariantes significa que es son inversas una de la otra.

- Como la métrica ya no es necesariamente una métrica diagonal y plana (compuesto de constantes iguales) entonces ahora importa si tiene índices covariantes o contravariantes. De hecho, se puede mostrar que la métrica tiene la función de subir y bajar índices y de contraerlos.

# Apéndice B

## Efecto Unruh

El efecto Unruh nos dice que una partícula acelerada uniformemente en el vacío de Minkowski, sin importar que no esté cargada, emitirá radiación térmica con temperatura

$$T = \frac{\hbar\alpha}{2\pi ck_B}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\alpha$  es la aceleración uniforme de la partícula. Un observador inercial no observaría nada como es de esperar.

La utilidad de esta fórmula es inmediata, relaciona la temperatura a la que un observador acelerado de Minkowski vería el “vacío” con la aceleración a la que viaja. No discutimos sobre el concepto de donde viene la energía si se encuentra en el vacío, ni de por qué un observador inercial no observaría tal temperatura, pero es de gran interés la simple relación proporcional entre aceleración y temperatura. Sin embargo, cabe notar que el valor de la temperatura es muy pequeño y se necesita una gran aceleración para que si quiera pueda pensarse en detectarse experimentalmente. Por ejemplo, para detectar un Kelvin el observador acelerado debería tener una aceleración de

$$\alpha = \frac{2\pi(3 \times 10^8)(1,38 \times 10^{-23})}{1,06 \times 10^{-34}} \frac{m}{s^2} \approx 2,45 \times 10^{20} \frac{m}{s^2}, \quad (\text{B.2})$$

es decir, alrededor de 19 órdenes de magnitud la aceleración en la superficie de la Tierra. Por otro lado, el efecto Unruh presupone una aceleración uniforme, pero se puede considerar la idea de una aceleración variable y observar los efectos que provoca.

# Apéndice C

## ¿Tiene el Jerk un valor máximo?

Una de las bases de la relatividad especial es el hecho de que la velocidad de la luz  $c$  es una constante que funge como valor máximo para la velocidad para todo sistema físico. Sin embargo, aquí discutimos que la relatividad especial podría basarse en una fuerza invariante máxima, [27,28], válida para todo sistema físico, dada por

$$F_{\max} = \frac{c^4}{4G}. \quad (\text{C.1})$$

La posibilidad de tener una fuerza máxima implica también la posibilidad de tener una aceleración máxima posible que un sistema físico podría alcanzar. Esto, entonces, da lugar a la posibilidad de que también exista un límite superior para el valor de otras cantidades cinemáticas como el Jerk, Snap y demás derivadas superiores. Es por lo tanto de interés para nosotros la posibilidad de la existencia de un límite superior para el Jerk y otras cantidades cinemáticas, pues encontramos relaciones entre el módulo del Jerk y la aceleración con parámetros geométricos de Frenet-Serret, por lo que tener un límite superior para algún elemento de la relación ayuda a la identificación de los demás elementos.

### C.1. Contexto sobre la fuerza máxima

La fuerza máxima es una consecuencia de la definición  $F = ma$ . En relatividad, la aceleración del (frente de) un cuerpo de longitud  $l$  se conoce que está limitada por  $a \leq c^2/l$ . Como resultado, la fuerza de un cuerpo de masa  $m$  está limitada por  $F < c^2(m/l)$ . La razón mayor  $m/l$  surge de un agujero negro, con un valor  $c^2/4G$ . Esto nos da un valor máximo para la

fuerza  $F_{\max} = c^4/4G$ , independientemente de la masa y longitud del cuerpo.

La fuerza también es energía por longitud; una fuerza que actúa a lo largo de un camino depone una energía a lo largo de su longitud. La energía más alta por razón de longitud se logra cuando el agujero negro de Schwarzschild de energía  $Mc^2$  se depone sobre una longitud dada por su diámetro  $4GM/c^2$ .

Otra derivación surge cuando se considera la fuerza producida por un agujero negro de Schwarzschild en una masa de prueba. Cuando se acerca una masa  $m$  hacia un agujero negro la fuerza de gravedad  $F$  a una distancia radial  $r$ , se conoce que está dada, a primer orden, por

$$F = \frac{GMm}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}. \quad (\text{C.2})$$

A primera vista, la expresión diverge si la masa de prueba se acerca al horizonte. Sin embargo, cada masa  $m$  se extiende al espacio. Para generar una fuerza medible, la masa completa debe de estar fuera del horizonte. La misma masa tiene un tamaño mínimo dada por su propio radio de Schwarzschild  $2Gm/c^2$ . Asumiendo  $m \ll M$ , el tamaño mínimo nos da el valor mínimo para la distancia entre los centros de masa. La distancia mínima está dada por  $r = 2G(m + M)/c^2$ . Insertando esta distancia, la fuerza de gravitación en la masa  $m$  obedece

$$F = \frac{c^4}{4G} \frac{M\sqrt{m}}{(m + M)^{3/2}} \leq \frac{c^4}{4G}. \quad (\text{C.3})$$

Físicamente una fuerza máxima  $c^4/4G$  es equivalente a una potencia máxima, o a una luminosidad máxima, dada por

$$P_{\max} = cF_{\max} = \frac{c^4}{4G} \approx 9,1 \times 10^{51} W. \quad (\text{C.4})$$

## C.2. Derivación heurística de las ecuaciones de campo

La elasticidad del vacío sugiere una forma heurística simple de obtener las ecuaciones de campo partiendo de la fuerza máxima. La densidad de energía  $\varepsilon$  en el vacío es fuerza por

área. Una fuerza máxima  $c^4/4G$  que también describe la elasticidad del vacío implica

$$\frac{c^4/4G}{A} = \varepsilon. \quad (\text{C.5})$$

Esta es la densidad de energía máxima para una superficie esférica. Para una superficie esférica de radio  $r$  y curvatura  $R = 1/r^2$ , el área se relaciona a la curva por  $A = 4\pi/R$ . La relación entre la curvatura  $R$  y la densidad de energía  $\varepsilon$  se vuelve

$$R = \frac{16\pi G}{c^4} \varepsilon. \quad (\text{C.6})$$

Esta es la máxima curvatura posible para una esfera. Para un observador general se reemplaza la curvatura  $R/2$  por el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ , y la densidad de energía  $\varepsilon$  se reemplaza por el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ . Esto da

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (\text{C.7})$$

### C.3. ¿Límite superior para el Jerk?

Con una inspiración similar que para el caso de la aceleración máxima, pero con métodos ligeramente distintos se discute si es posible que el Jerk tenga un valor máximo y cuál podría ser.

Hay modelos que requieren una constante de gravitación  $G$  que depende de la temperatura

$$G = \frac{G_0}{1 - bT^2}, \quad (\text{C.8})$$

donde  $G_0 = G(T = 0)$  es el valor de  $G$  en el valor cero de la temperatura, muy cercano a  $6,67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-1}$ . Aquí  $T$  es la temperatura absoluta del ambiente en donde se mide  $G$ , y  $b$  es una constante universal cuyo valor depende de la teoría involucrada.

Si  $T$  depende del tiempo  $t$ ,  $\dot{G} = dG/dt$ ,  $\dot{T} = dT/dt$ , tenemos

$$\frac{\dot{G}}{G} = \frac{2bT\dot{T}}{1 - bT^2}. \quad (\text{C.9})$$

En un espacio con torsión una constante gravitacional que varía genera un campo de torsión

de intensidad

$$U = \frac{G^*}{2G}, \quad (\text{C.10})$$

donde  $G^* = |G|$ . La densidad de energía  $D$  de un campo de torsión  $U$  está dada por

$$D = \frac{U^2}{G}. \quad (\text{C.11})$$

El radio de curvatura del espacio-tiempo  $R_c$  es

$$R_c = \left( \frac{c^2}{GD} \right)^{1/2}, \quad (\text{C.12})$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Si  $R$  es el tamaño lineal de la región del espacio en el cual medimos  $G$ , la condición

$$R < R_c \quad (\text{C.13})$$

es un requisito para evitar el colapso gravitacional. Como

$$R < R_c = \sqrt{\frac{c^2}{GD}} = \frac{c}{U} \rightarrow U < \frac{c}{R}, \quad (\text{C.14})$$

entonces

$$U = \frac{G^*}{2G} < \frac{c}{R} \rightarrow U = \frac{G^*}{2G} = \frac{1}{2} \frac{2bT^*\dot{T}}{1-bT^2} = \frac{bT^*\dot{T}}{1-bT^2} < \frac{c}{R}. \quad (\text{C.15})$$

Para temperaturas pequeñas ( $bT^2 \ll 1$ ), tenemos

$$|\dot{T}| < \frac{c}{bRT}, \quad (\text{C.16})$$

mientras  $T$  se acerca a  $1/b^{1/2}$  la variación temporal de  $T$  se vuelve más lento. De acuerdo al efecto Unruh

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_b}, \quad (\text{C.17})$$

entonces

$$\dot{T} = \frac{\hbar \dot{a}}{2\pi c k_b} = \frac{\hbar J}{2\pi c k_b}, \quad (\text{C.18})$$

por lo que

$$J < \frac{c}{bRT} \frac{(2\pi c k_b)^2 c}{abR\hbar^2} = \frac{(2\pi c k_b)^2 c}{abR\hbar^2}. \quad (\text{C.19})$$



En principio, una  $G$  que varía con el tiempo se puede describir en términos de torsión, o equivalentemente,  $\dot{G}/G$  actúa como fuente de torsión en el sistema.

# Bibliografía

- [1] J. M. Pons and F. de Palol, “Observers with constant proper acceleration, constant proper jerk, and beyond,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 51, no. 6, pp. 1–40, 2019.
- [2] K. Paithankar and S. Kolekar, “Bound on Rindler trajectories in a black hole spacetime,” *Physical Review D*, vol. 99, no. 6, p. 064012, 2019.
- [3] M. Born, “The theory of the rigid electron in the kinematics of the principle of relativity,” *Ann. Phys.(Leipzig)*, vol. 30, p. 1, 1909.
- [4] J. F. Barrett, “The hyperbolic theory of special relativity,” 2019.
- [5] W. Rindler, “Hyperbolic motion in curved space time,” *Physical Review*, vol. 119, no. 6, p. 2082, 1960.
- [6] W. Rindler, “Kruskal space and the uniformly accelerated frame,” *American Journal of Physics*, vol. 34, no. 12, pp. 1174–1178, 1966.
- [7] W. Rindler, “Relativity: special, general, and cosmological,” 2003.
- [8] J. R. Letaw, “Stationary world lines and the vacuum excitation of noninertial detectors,” *Physical Review D*, vol. 23, no. 8, p. 1709, 1981.
- [9] M. R. Good, M. Temirkhan, and T. Oikonomou, “Stationary worldline power distributions,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 58, no. 9, pp. 2942–2968, 2019.
- [10] J. G. Russo and P. K. Townsend, “Relativistic kinematics and stationary motions,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 44, p. 445402, 2009.

- [11] E. Poisson, “An Introduction to the Lorentz-Dirac equation,” 12 1999.
- [12] I. de Jesus Perez Roman and H.-C. R. Barbus, “Relativistic hyperbolic motion and its higher order kinematic quantities,” *Rev. Mex. Fis.*, vol. 68, no. 6, p. 060702, 2022.
- [13] Y. Friedman and T. Scarr, “Uniform acceleration in general relativity,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 47, no. 10, pp. 1–19, 2015.
- [14] H. Hu, “Perturbation method for periodic solutions of nonlinear jerk equations,” *Physics Letters A*, vol. 372, no. 23, pp. 4205–4209, 2008.
- [15] R. Eichhorn, S. J. Linz, and P. Hänggi, “Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows,” *Physical Review E*, vol. 58, no. 6, p. 7151, 1998.
- [16] M. te Vrugt, J. Jeggle, and R. Wittkowski, “Jerky active matter: a phase field crystal model with translational and orientational memory,” *New Journal of Physics*, vol. 23, no. 6, p. 063023, 2021.
- [17] J. Bloxham, S. Zatman, and M. Dumberry, “The origin of geomagnetic jerks,” *Nature*, vol. 420, no. 6911, pp. 65–68, 2002.
- [18] J. Sprott, “Some simple chaotic jerk functions,” *American Journal of Physics*, vol. 65, no. 6, pp. 537–543, 1997.
- [19] G. D. Leutcho and J. Kengne, “A unique chaotic snap system with a smoothly adjustable symmetry and nonlinearity: Chaos, offset-boosting, antimonotonicity, and coexisting multiple attractors,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 113, pp. 275–293, 2018.
- [20] I. Perez-Roman and H. C. Rosu, “Frenet-serret equations with non-constant proper acceleration and jerk analysis,” *Por Enviar*, 2023.
- [21] J. R. Letaw and J. D. Pfautsch, “The stationary coordinate systems in flat spacetime,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 23, no. 3, pp. 425–431, 1982.
- [22] C. Semay, “Observer with a constant proper acceleration,” *arXiv preprint physics/0601179*, 2006.
- [23] H. C. Rosu, “Stationary and nonstationary scalar vacuum field noises,” *Nuovo Cim. B*, vol. 115, pp. 1049–1056, 2000.

- [24] H. C. Rosu, “Quantum vacuum radiation and detection proposals,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 44, no. 4, pp. 493–528, 2005.
- [25] M. Good, B. A. Juárez-Aubry, D. Moustos, and M. Temirkhan, “Unruh-like effects: effective temperatures along stationary worldlines,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2020, no. 6, pp. 1–26, 2020.
- [26] A. Iorio, “Graphene: QFT in curved spacetimes close to experiments,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 442, p. 012056, 2013.
- [27] G. W. Gibbons, “The Maximum tension principle in general relativity,” *Found. Phys.*, vol. 32, pp. 1891–1901, 2002.
- [28] M. P. Dabrowski and H. Gohar, “Abolishing the maximum tension principle,” *Physics Letters B*, vol. 748, pp. 428–431, 2015.