



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Análisis y control de sistemas conmutados**

Tesis que presenta

**Ruby Angélica Mendoza Torres**

Para obtener el grado de

**Doctora en ciencias aplicadas**

En la opción de

**Control y sistemas dinámicos**

**Directora de la Tesis:**

Dra. Ilse Cervantes Camacho

San Luis Potosí, S.L.P. 7 de marzo de 2013



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Análisis y control de sistemas conmutados** presentada para obtener el Grado de de Doctora en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Ruby Angélica Mendoza Torres** y aprobada el **dd de mm de aaaa** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

---

Dr. Ilse Cervantes Camacho  
(Directora de la tesis)

---

Dr. Manuel Adam Medina  
(CENIDET)

---

Dr. Basilio del Muro Cuellar  
(ESIME Culhuacan IPN)

---

Dr. Hugo Cabrera Ibarra  
(DMAp IPICyT)

---

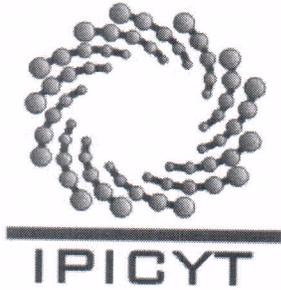
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez  
(DMAp IPICyT)



## **Créditos Institucionales**

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección de la Dra. Ilse Cervantes Camacho. El trabajo experimental se hizo con apoyo técnico del M. en C. Irwin Allen Díaz Díaz.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro:182198) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 013 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 19 días del mes de marzo del año 2013, se reunió a las 09:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Hugo Cabrera Ibarra</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dra. Ilse Cervantes Camacho</b>	<b>Secretaria</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Basilio del Muro Cuellar</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>IPN</b>
<b>Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Manuel Adam Medina</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>CENIDET</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**DOCTORA EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

**Ruby Angélica Mendoza Torres**

sobre la Tesis intitulada:

*Análisis y control de sistemas conmutados*

que se desarrolló bajo la dirección de

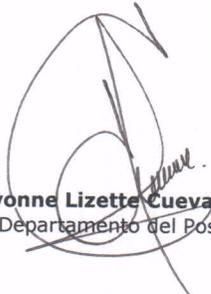
**Dra. Ilse Cervantes Camacho**

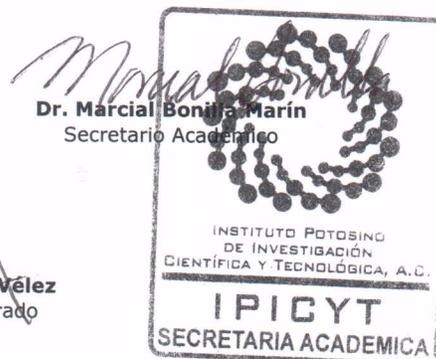
El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLA**

Dándose por terminado el acto a las 12:20 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 19 días del mes de marzo de 2013.

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado



# Agradecimientos

Agradezco primeramente a la Dra. Ilse Cervantes por la paciencia y por la dirección de este trabajo. A todos los Profesores del IPICyT que a través de avances y seminarios contribuyeron significativamente para la realización del trabajo. Al Dr. David Antonio Lizárraga Navarro, Dr. Arturo Zavala Río, Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez, Dra. Nancy Visairo Cruz, Dr. Victor Cárdenas, Dr. Ciro Alberto Nuñez, que a través de sus clases me transmitieron sus conocimientos. Al Dr. Francisco Javier Pérez Pinal, M. en C. Irwin Allen Díaz Díaz, M. en C. Rafael García Cuevas, M. en C. Crescencio Hernández Rosales, M. en C. Luis Humberto Díaz Saldierna por su colaboración y participación, para llevar a cabo el desarrollo experimental de esta tesis. Finalmente agradezco al CONACYT por otorgarme una beca durante mis estudios en el Doctorado y al IPICyT por brindarme su infraestructura que fue favorable para realizar mi trabajo así como al proyecto CONACYT “Estabilidad y control de sistemas conmutados: Aplicación al desarrollo de tecnologías versátiles” por brindarme apoyo para asistir al curso organizado por la Escuela de Control European Embedded Control Institute (EECI), llevado a cabo en SUPELEC en Paris Francia, titulado: “Verification and Control of Nonlinear and Hybrid Systems.”

# Contenido

<b>Portada</b>	<b>I</b>
<b>Contenido</b>	<b>XII</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>XV</b>
<b>Glosario</b>	<b>XVII</b>
<b>Resumen</b>	<b>XIX</b>
<b>Abstract</b>	<b>XXI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas dinámicos determinísticos . . . . .	1
1.2. Sistemas conmutados . . . . .	3
1.3. Problemas de estabilización . . . . .	5
1.3.1. Estado del conocimiento . . . . .	6
1.4. Aplicaciones e importancia . . . . .	8
1.5. Motivación . . . . .	9
1.6. Objetivos . . . . .	9
1.7. Aportaciones . . . . .	10
1.8. Organización . . . . .	11
<b>2. Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1. Estabilidad de sistemas conmutados . . . . .	13
2.2. Estabilidad $\varepsilon$ -práctica de sistemas conmutados . . . . .	15
<b>3. Estabilización <math>\varepsilon</math>-Práctica para Sistemas Conmutados Integrador</b>	<b>21</b>
3.1. Conmutación dependiente del tiempo . . . . .	26
3.2. Conmutación dependiente del estado . . . . .	29
3.2.1. Conexión entre las secuencias estabilizables . . . . .	32
3.3. Resumen del Capítulo . . . . .	38

<b>4. Estabilización <math>\varepsilon</math>-Práctica para Sistemas Conmutados Integrador Inciertos</b>	<b>39</b>
4.1. Conmutación dependiente del tiempo en el caso incierto . . . . .	41
4.2. Conmutación dependiente del estado en el caso incierto . . . . .	53
4.2.1. $\bar{c}_i$ para $n = 2$ . . . . .	57
4.2.2. $\bar{c}_i$ para $n = 3$ . . . . .	58
4.3. Resumen del Capítulo . . . . .	61
<b>5. Observaciones sobre la Estabilización de Sistemas Conmutados Lineales y No Lineales Inciertos</b>	<b>63</b>
5.1. Sistemas conmutados lineales inciertos . . . . .	63
5.2. Sistemas conmutados no lineales inciertos . . . . .	68
5.3. Resumen del Capítulo . . . . .	74
<b>6. Retroalimentación de Salida para Sistemas Conmutados Integrador Inciertos</b>	<b>75</b>
6.1. Estabilización usando la secuencia del sistema medido . . . . .	76
6.2. Estabilización para la misma secuencia . . . . .	77
6.3. Resumen del Capítulo . . . . .	80
<b>7. Aplicaciones</b>	<b>81</b>
7.1. Ejemplo: convertidor Boost de dos celdas . . . . .	81
7.2. Estabilidad asintótica práctica de las corrientes . . . . .	84
7.2.1. Conocimiento exacto del modelo . . . . .	84
7.2.2. Incertidumbre en el modelo . . . . .	85
7.2.3. Resultado . . . . .	85
7.2.4. Implementación del resultado . . . . .	86
7.3. Ejemplo ilustrativo . . . . .	89
7.4. Conclusiones . . . . .	93
<b>8. Conclusiones</b>	<b>95</b>
8.1. Conclusiones de la tesis . . . . .	95
8.2. Trabajo futuro . . . . .	96
8.3. Publicaciones . . . . .	97

# Lista de Figuras

1.1.	[1] Conceptualización de sistema híbrido. . . . .	2
1.2.	Trayectoria de un sistema híbrido. En $t_1, t_2, t_3$ las trayectorias son no diferenciables. Observe que a los tiempos $t_1, t_3$ el sistema presenta comportamiento impulsivo ( <i>i.e.</i> las trayectorias son discontinuas), mientras que en $t_2$ comportamiento conmutado. . . . .	2
1.3.	Conmutación dependiente del estado. . . . .	5
1.4.	Conmutación dependiente del tiempo. . . . .	5
1.5.	El sistema conmutado puede ser inestable aunque todos los subsistemas sean estables. . . . .	7
1.6.	Múltiples funciones de Lyapunov que garantizan estabilidad asintótica global. . . . .	8
2.1.	Estabilidad de un sistema conmutado. . . . .	14
2.2.	Estabilidad asintótica de un sistema conmutado. . . . .	14
2.3.	Estabilidad $\epsilon$ -práctica de un sistema conmutado. . . . .	16
2.4.	Estabilidad $\epsilon$ -práctica asintótica de un sistema conmutado. . . . .	18
2.5.	Aunque el origen es $\epsilon$ -atractivo el sistema no es $\epsilon$ -prácticamente estable. . . . .	18
3.1.	Comportamiento de un sistema conmutado integrador en dimensión dos, cuando está activo el subsistema $k$ . . . . .	22
3.2.	Ejemplo de la evolución de la trayectoria de un sistema conmutado integrador. Las etiquetas al lado de las trayectorias indican el modo o subsistema que está activo. En este caso el subsistema activo $i$ es paralelo a $c_i$ . Los vectores $c_i$ se dibujan por conveniencia. . . . .	22
3.3.	$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^3$ cumplen con la condición $C = \mathbb{R}^3$ , si $c_1, c_2, c_3$ son linealmente independientes y $c_4$ es una combinación cónica de $-c_1, -c_2, -c_3$ , es decir, $c_4$ está en el cono convexo descrito por $-c_1, -c_2, -c_3$ . . . . .	26
3.4.	Ley de conmutación 2 descrita por el criterio 1, en dimensión 2. . . . .	30
3.5.	Una cota para $x(t)$ en el intervalo $[t_0, t_M)$ , en dimensión 2. . . . .	35
3.6.	Trayectorias de $x_1$ y $x_2$ del Ejemplo 2. . . . .	37
3.7.	Señal de conmutación en el Ejemplo 2. . . . .	37
4.1.	Una cota para $x(t)$ en el intervalo $[T, T + t_n)$ , en dimensión 2, (Caso incierto). . . . .	47
4.2.	Evolución del sistema conmutado en el Ejemplo 3. Observe que los tiempos de conmutación tienden a cero conforme el tiempo avanza . . . . .	50

4.3.	Señal de conmutación en el Ejemplo 3. Aquí se puede observar como se presenta el fenómeno llamado castaño. . . . .	50
4.4.	Evolución en el tiempo $x$ para el Ejemplo 4. . . . .	52
4.5.	Señal de conmutación, descrita por la Ley de conmutación 4 para el Ejemplo 4. . . . .	53
4.6.	Trayectorias del sistema para el sistema incierto del Ejemplo 5 usando la partición nominal. Los conos descritos por los vectores discontinuos y continuos representan la partición incierta y la nominal respectivamente. Observe que las trayectorias tocan la frontera de un cono repetidamente. . . . .	54
4.7.	Señal de conmutación del Ejemplo 5 usando la partición nominal. Observe que ocurre una conmutación rápida, entre los modos 2 y 3. . . . .	55
4.8.	Una nueva partición. . . . .	56
4.9.	Diagrama esquemático de los vectores que definen la partición en el criterio 2. La cota superior incierta es usada para definir el ángulo de rotación $\phi$ del vector nominal $-c_i$ para generar $-\bar{c}_i$ para $i = 1, \dots, n + 1$ . . . . .	57
4.10.	Base ortonormal definida en (4.16) cuando $\tau = a$ . . . . .	59
4.11.	Evolución del Sistema 4.1 para parámetros en el Ejemplo 6, usando el Criterio 2. . . . .	60
4.12.	Señal de conmutación en el Ejemplo 6 . . . . .	61
5.1.	Evolución en el tiempo del sistema lineal conmutado incierto con $x_0 = [0, 0.01, 0.02]$ . Ejemplo 7. . . . .	67
5.2.	señal de conmutación en el Ejemplo 7. . . . .	67
5.3.	Trayectoria de seguimiento (izquierda) y evolución del sistema 5.7 (derecha). . . . .	69
5.4.	Evolución en el tiempo del sistema no lineal del Ejemplo 9. . . . .	72
5.5.	Evolución en el tiempo del sistema conmutado no lineal del Ejemplo 10. . . . .	73
5.6.	Señal de conmutación del Ejemplo 10. . . . .	74
6.1.	Evolución en el tiempo de $z$ . . . . .	80
7.1.	Configuraciones de conmutación. . . . .	82
7.2.	La trayectoria de la corriente en los inductores para los estado <i>encendido</i> y <i>apagado</i> . . . . .	83
7.3.	Ilustración de la partición para $n = 2$ . . . . .	85
7.4.	Diagrama de Bloques del controlador multi-lazo propuesto. . . . .	88
7.5.	Convertidor boost y control de corriente. . . . .	89
7.6.	Montaje Experimental. . . . .	90
7.7.	Evolución experimental de las corrientes y el voltaje bajo condiciones de estado estable para $\delta_1 = \delta_2 = 0.5Amp$ (izquierda) y $\delta_1 = \delta_2 = 0.25Amp$ (derecha). . . . .	90
7.8.	Evolución experimental de las corrientes y el voltaje bajo condiciones de estado estable para $iref = [0.777, 0.804](Amp)$ (izquierda) y $iref = [0.475, 0.489]Amp$ (derecha). . . . .	91
7.9.	Caso no balanceado en modo de conducción continua, (izquierda); caso balanceado cerca del modo de condición discontinua (derecha). . . . .	91
7.10.	Seguimiento de voltaje. . . . .	92

7.11. Evolución en el tiempo del convertidor con la retroalimentación propuesta, bajo cambios en la carga de 50%. . . . .	92
7.12. Evolución en el tiempo del convertidor bajo cambios en la fuente de voltaje de 65%. . . . .	93



# Glosario

$\mathbb{R}^n$ : Espacio euclidiano  $n$ -dimensional.

$\|x\|$ : la norma 1 en  $\mathbb{R}^n$ .

$B(0, \delta) = \{x : \|x\| \leq \delta\}$ : Bola cerrada con centro en cero y radio delta.

**Punto interior:** Sea  $A$  un subconjunto de un espacio métrico  $M$ . Un punto  $a$  en  $A$ , se llama punto interior de  $A$ , si existe un abierto  $U$  que contiene a  $a$ , tal que  $U \subseteq A$ .

**int(A):** El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto  $A$ , denotado por  $\text{int}(A)$  se llama el interior de  $A$ .

**Combinación cónica:** Dados los puntos  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  y los números no negativos  $\rho_1, \dots, \rho_m$ , el punto  $x = \sum_{i=1}^m \rho_i x_i$  se llama una combinación cónica de los puntos  $x_1, \dots, x_m$ .

**Conjunto convexo:** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , se dice que es convexo si  $x \in A$ ,  $y \in A$  implican que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$  para cualquier  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

**Cono:** Un conjunto no vacío  $A \subset \mathbb{R}^n$  es llamado un cono si  $\lambda a \in A$ , siempre que  $a \in A$  y  $\lambda \geq 0$ .

**gen:** Es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores en el argumento. La traducción del término span.

# Resumen

En esta tesis se resolvieron algunos problemas de análisis y control de una clase de sistemas híbridos conocidos como conmutados. Estos sistemas son descritos por una familia de subsistemas y una ley de conmutación que determina cual de ellos está activo en cada instante de tiempo. El tipo de sistemas conmutados que estudia esta tesis es aquel en que los subsistemas no comparten puntos de equilibrio y donde no existe una retroalimentación continua o continua por pedazos. En este caso la única opción de estabilizar al sistema es mediante la ley de conmutación, por consiguiente en este caso la conmutación es inherentemente restringida y los subsistemas pueden ser inestables.

En esta tesis se abordan dos problemas: i) el de estabilizabilidad conmutada, que consiste en establecer condiciones para garantizar la existencia de una ley de conmutación que estabilice al sistema; y ii) el de estabilidad conmutada que consiste en encontrar una ley de conmutación estabilizante. En particular, en esta tesis se extendieron algunos resultados en la literatura para los dos problemas anteriores en el caso de sistemas inciertos. Con este fin, en esta tesis primero se estudian los así llamados sistemas conmutados integrador, resultados en la literatura de estabilizabilidad y estabilidad se extienden a sistemas conmutados inciertos y luego se muestra como estos resultados pueden ser usados en la estabilización de sistemas conmutados lineales y no lineales inciertos, Además se proponen leyes de conmutación estabilizantes dependientes del estado y de la salida. Finalmente se muestran algunos resultados experimentales obtenidos de la aplicación de los resultados teóricos a sistemas electrónicos de potencia, en particular en convertidores multi-celda de  $n$  etapas.

**Palabras claves:** Estabilidad; Estabilizabilidad; Sistemas conmutados; Sistemas inciertos.

# Abstract

In this thesis a class of hybrid systems known as switched is studied. Such systems are described by a family of modes or subsystems and a switching law that defines the active mode at every time. In particular, in this work I am focus in studying the stability properties of switched systems that do not share a common equilibrium point or the equilibrium point does not exist. To this end, in the first part of this document, integrator switched systems are studied, the role of uncertainty on stability using time and state dependent switching actions are studied. Furthermore, boundedness of switched linear and non linear systems are studied under time dependent switching designed on integrator switching systems. The results of this thesis are illustrated through numerical simulations and experimental work in a boost interleaved converter. The application of the results on power electronics, lead us to contribute with a novel current ripple control.

**Key words:** Stability; Stabilizability; Switched Systems; Uncertain Systems.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Sistemas dinámicos determinísticos

Los sistemas dinámicos determinísticos describen la evolución de un estado sobre el tiempo y se pueden clasificar en **sistemas continuos, discretos y discontinuos**. Algunos autores hablan de sistemas en **tiempo discreto** si el tiempo sólo está definido en ciertos instantes que forman un conjunto contable  $\mathcal{U} = \{t_1, t_2, \dots\}$ ; esto es cuando existe una equivalencia (vea [2]) entre el conjunto  $\mathcal{U}$  y el conjunto de los números enteros positivos. Por otro lado, si el tiempo está definido en todo real  $t > 0$  se dice que el **tiempo es continuo** [3]. También existen los llamados estados discretos y continuos. Los **estados discretos** son variables que sólo están definidos en ciertos instantes de tiempo (generalmente fijos), mientras que los **estados continuos** son estados que viven en un espacio por ejemplo  $\mathbb{R}^n$  y que están definidos en todo tiempo  $t > 0$  [3]. En general, se habla de **sistemas continuos** cuando estos sistemas admiten una descripción en términos de ecuaciones diferenciales <sup>1</sup> con campos vectoriales continuos (*i.e.*  $f(\dot{x}, x, t) = 0$ , donde  $f$  es un campo vectorial continuo en sus argumentos) [3]. Mientras que **sistemas discretos**, son aquellos definidos en tiempo discreto pero aún pueden admitir una descripción en términos de ecuaciones de diferencias usando campos vectoriales continuos [3] *i.e.*  $f(x_{n+1}, x_n, t_n) = 0$ .

Por otro lado en [4] y [5] se habla de **sistemas dinámicos discontinuos** como aquellos que admiten una descripción en términos de ecuaciones explícitas diferenciables o en diferencias tales que  $\dot{x} = f(x, t)$  (ó  $x_{n+1} = f(x_n, t_n)$ ) donde  $f \in \{f_1, \dots, f_m\}$  para algún  $m \in \mathbb{Z}^+$  y  $x, x_n$  y  $t, t_n$  definidas apropiadamente. Se habla de un sistema discontinuo **bien definido** si  $\forall t \geq 0$  existe un único  $f_i$   $i \in 1, 2, \dots, m$  activado. **En esta tesis sólo se tratará el caso de sistemas discontinuos bien definidos.**

---

<sup>1</sup>En esta tesis sólo se trata el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias sin retrasos o adelantos en los estados

En la literatura, se usa el término de sistema híbrido como equivalente a sistema discontinuo. En [1] se habla de un sistema híbrido como un sistema dinámico que consta de dinámicas continuas que interaccionan entre ellas mediante eventos de tipo discreto. La Figura 1.1 fue extraída de [1] y presenta un esquema de esta conceptualización (vea también [4]).

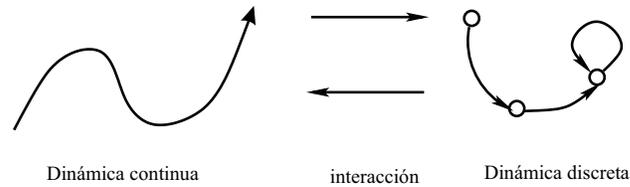


Figura 1.1: [1] Conceptualización de sistema híbrido.

Un sistema híbrido describe trayectorias **diferenciables por pedazos**, las cuales pueden ser **continuas o continuas por pedazos**. En el primer caso, al sistema híbrido se le llama **conmutado** y los instantes de cambio del campo vectorial se le llaman instantes de conmutación; mientras que en el segundo, al sistema se le conoce como **impulsivo** y las trayectorias pueden presentar brincos en ciertos instantes por medio de lo que se le conoce como *efectos impulsivos*, [3], [6], [7] (Ver Figura 1.2).

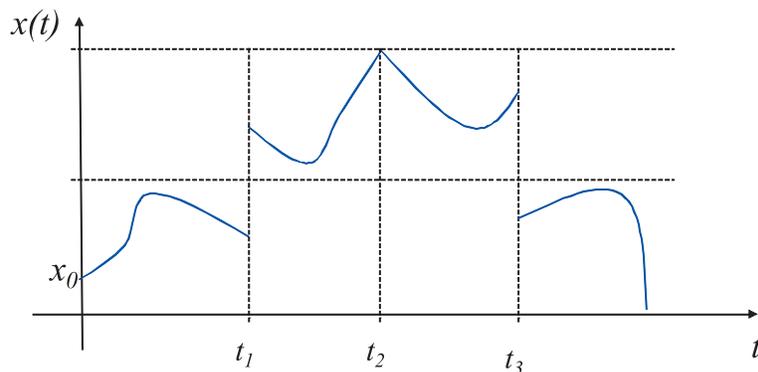


Figura 1.2: Trayectoria de un sistema híbrido. En  $t_1, t_2, t_3$  las trayectorias son no diferenciables. Observe que a los tiempos  $t_1, t_3$  el sistema presenta comportamiento impulsivo (*i.e.* las trayectorias son discontinuas), mientras que en  $t_2$  comportamiento conmutado.

## 1.2. Sistemas conmutados

Esta tesis tiene como objetivos analizar y estabilizar sistemas conmutados. Como primer paso en el estudio de estos sistemas se ganará precisión en su descripción a continuación. Los sistemas conmutados están compuestos por una familia de subsistemas o modos y **cualquiera** de las siguientes: ley de conmutación, criterio de conmutación, secuencia de conmutación y señal de conmutación, las cuales tienen la misma función: **determinar el modo activo**. Generalmente la **ley de conmutación** está dada por una función constante por pedazos que puede ser dependiente del tiempo y/o del estado. Se le llama **criterio de conmutación**, a aquella descripción que no necesariamente está dada por ecuaciones sino por reglas o algoritmos y que en general usan palabras, más que formulas matemáticas explícitas. La secuencia y la señal de conmutación dependen **únicamente** del tiempo. Una **señal de conmutación** es una función constante por pedazos dependiente del tiempo, mientras que la **secuencia de conmutación** es el conjunto de pares que describen los modos activos a lo largo del tiempo.

Considere la siguiente descripción de sistemas conmutados invariantes en tiempo <sup>2</sup> dada por:

- **Una familia de subsistemas o modos** descritos a partir de funciones vectoriales continuas en  $\mathbb{R}^n$ ,  $f_i(x)$ :

$$\dot{x} = f_i(x) \quad i \in I \subset \mathbb{Z}^+ \quad (1.1)$$

donde  $I$  es un conjunto indizado, por ejemplo,  $I = \{1, \dots, M\}$  y  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i \in I$ .

- **Una ley de conmutación  $S$**  que determina que subsistema está activo en cada instante de tiempo por medio de un función escalar de la forma:

$$S : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow I$$

Como se dijo anteriormente  $S$  es una función por lo que define de manera única el  $i \in I$ , en vista de lo que valga el estado (en  $\mathbb{R}^n$ ) y el tiempo

**Observación 1** *Los modos del sistema conmutado (1.1) pueden o no tener puntos de equilibrio y aún cuando existan ellos pueden no ser iguales. En este trabajo se asumirá que no todos los subsistemas comparten o tiene puntos de equilibrio. Además se asumirá que no todos los subsistemas son estables alrededor del origen.*

<sup>2</sup>Se le llama a un sistema conmutado invariante en tiempo, a aquel en que los campos vectoriales que definen sus modos o subsistemas no dependen del tiempo, incluso aunque pueda estar sujeto a una ley/criterio de conmutación dependiente del tiempo o a una secuencia o señal de conmutación.

Observe que dada la descripción de la ley de conmutación, ésta **especifica a su vez a lo largo del tiempo, una secuencia de conmutación  $\sigma(x_0, t_0)$  en el intervalo  $[t_0, t_f)$  para cualquier par  $(x_0, t_0)$** , donde

$$\sigma(x_0, t_0) = \{(i_1, \theta_1), (i_2, \theta_2), \dots, (i_K, \theta_K)\} \quad (1.2)$$

y  $0 < K < \infty$ , donde  $K \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ,  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K < t_f$ ,  $i_k \in I$  y  $\theta_k = t_k - t_{k-1}$  para  $k = 1, \dots, K$ . Observe que  $\theta_k$  en general no es igual a  $\theta_{k-1}$  o  $\theta_{k+1}$ . Así,  $\sigma^3$  es una colección de pares la cual indica que el subsistema  $i_k$  permanecerá activo un tiempo  $\theta_k$ , por esta razón  $\theta_k$  es llamado tiempo de permanencia en el subsistema  $i_k$ .

**Observación 2** Debido a lo anterior, en la literatura también se suele definir una **ley de conmutación  $S$**  como un mapeo de  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  a  $\Sigma_{[t_0, t_f)} = \{ \text{secuencias de conmutación } \sigma \text{ en el intervalo } [t_0, t_f) \}$ , en vez del mapeo  $S : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow I$  la cual asigna a cada par de condiciones una secuencia de conmutación  $\sigma$ .

A su vez, una secuencia de conmutación determina de manera única una **señal de conmutación** descrita como sigue:

$$i(t) = \begin{cases} i_1 & t \in [t_0, t_1) \\ i_2 & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ i_K & t \in [t_K, t_f) \end{cases} \quad (1.3)$$

Como se dijo anteriormente, la ley de conmutación puede depender de los estados y/o del tiempo. De especial interés son las leyes de conmutación que sólo son dependientes de los estados o sólo dependientes del tiempo. Éstas se describen a continuación. Cabe señalar que de aquí en adelante se llamará Ley de conmutación dependiente del estado, a aquellas que sólo dependen del estado y leyes de conmutación dependientes del tiempo a las que sólo dependen del tiempo.

**Ley de conmutación dependiente del estado** En este caso, la conmutación se realiza cuando las trayectorias alcanzan una superficie conocida como *superficie de conmutación*. Las superficies de conmutación dividen al espacio de estados en una cantidad finita o infinita de regiones llamadas *regiones de operación* a las cuales se asocia un sólo subsistema o modo (Vea Fig 1.3).

<sup>3</sup>De aquí en adelante los argumentos de la secuencia de conmutación se omitirán por simplicidad.

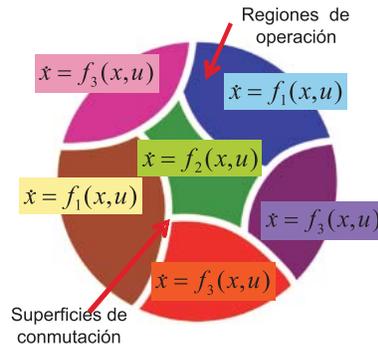


Figura 1.3: Conmutación dependiente del estado.

**ley de conmutación dependiente del tiempo** En este caso, la conmutación se efectúa por medio de una señal constante por pedazos  $i : [0, \infty) \rightarrow I$  (Ver Figura 1.4). Debido a que hay una correspondencia biyectiva entre una secuencia de conmutación y una señal de conmutación, una secuencia define una señal y viceversa.

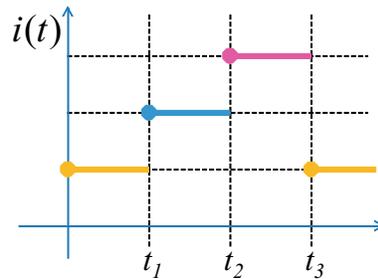


Figura 1.4: Conmutación dependiente del tiempo.

### 1.3. Problemas de estabilización

En contraste con los sistemas puramente continuos o discretos, los sistemas conmutados de tipo

$$\dot{x} = f_{i(t)}(x, u) \tag{1.4}$$

se dicen **completamente controlables** (vea [8]) si existe tanto una  $i(t)$  como una entrada de control continua por pedazos  $u$ , tal que el sistema conmutado puede ser llevado de cualquier condición inicial a cero (estabilizables al origen). El problema de control de sistemas conmutados cuando existe una entrada de control  $u(t)$ , que puede modificar completamente la dinámica de cada modo, es relativamente simple; ya que es posible encontrar  $u(t)$  tal que cada modo comparta un punto de equilibrio asintóticamente estable. Debido a lo anterior, el problema de estabilización

de (1.4) bajo esta premisa, puede verse equivalente a estabilizar un sistema conmutado conformado de subsistemas estables y por lo tanto es un caso particular de (1.1).

De lo anterior se deduce que (1.4) pudiera ser estabilizado usando (i) **conmutación arbitraria** o (ii) **conmutación restringida**. En la conmutación arbitraria, no se busca modificar la conmutación sino las propiedades de estabilidad de los subsistemas; mientras que en la restringida nos preguntamos sobre la ley de conmutación que estabiliza a un tipo de sistemas ya dados.

En la literatura al problema de estabilizabilidad bajo conmutación restringida se le conoce como problema de estabilizabilidad conmutada y se formula de la siguiente manera.

**Problema: Estabilizabilidad Conmutada** *Considere la familia de modos dada por (1.1), establezca condiciones de existencia de una ley de conmutación dependiente de los estados y/o del tiempo, tal que el origen del sistema conmutado sea estable.*

En la literatura al problema de estabilización bajo conmutación restringida se le conoce como problema de estabilización conmutada y se formula de la siguiente manera.

**Problema: Estabilización Conmutada** *Considere la familia de modos dada por (1.1), diseñe una ley de conmutación dependiente de los estados y/o del tiempo, tal que el origen del sistema conmutado sea estable.*

### 1.3.1. Estado del conocimiento

Algunos de los resultados en la literatura asumen que el punto de equilibrio de los subsistemas son estables. Esta condición por si sola no es suficiente para garantizar la estabilidad del origen del sistema conmutado: Por ejemplo, si en  $\mathbb{R}^2$  se tiene un sistema conmutado con dos subsistemas con comportamiento asintóticamente estable, una elección de la señal de conmutación puede derivar un comportamiento inestable en el sistema conmutado [1] como se describe en la Figura 1.5, por lo anterior, condiciones adicionales deben ser impuestas para garantizar la estabilidad del origen del sistema conmutado.

Daniel Lyberzon en [1], plantea condiciones suficientes para que un sistema conmutado cuyos subsistemas comparten el mismo equilibrio, sea asintóticamente estable cuando se usa una

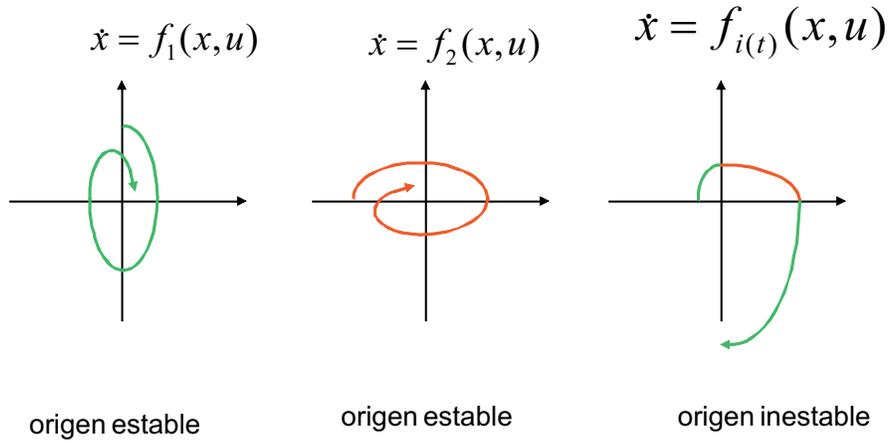


Figura 1.5: El sistema conmutado puede ser inestable aunque todos los subsistemas sean estables.

señal de conmutación arbitraria. En [9] se mostró que si existe una función de Lyapunov común para todos los subsistemas, entonces el sistema podrá ser asintóticamente estable independientemente de la conmutación.

A pesar de lo anterior, no siempre es posible encontrar una función de Lyapunov común. Para remediar esta situación se estableció en [10] que en la ausencia de una función de Lyapunov común, la existencia de funciones de Lyapunov múltiples son requeridas para garantizar la estabilidad asintótica del sistema conmutado; en este caso las propiedades de estabilidad del sistema conmutado dependen de la señal de conmutación y se mostró que si los valores de las funciones de Lyapunov coinciden en el instante de conmutación ver Figura 1.6 (a) entonces se puede garantizar estabilidad asintótica del sistema conmutado. Sin embargo las funciones de Lyapunov generalmente no coinciden en el instante de conmutación. Para relajar esta condición se mostró por otro lado, que si la secuencia de valores iniciales de cada función de Lyapunov, en los instantes de conmutación, son decrecientes (ver Figura 1.6) (b) entonces se podrá mostrar la estabilidad asintótica del origen.

El encontrar una secuencia de funciones de Lyapunov en principio, implicaría la existencia de una secuencia de conmutación que garantizaría la estabilidad del sistema. Sin embargo, establecer esta secuencia puede ser difícil ya que la secuencia queda de manera implícita y en general no es única. Es decir, aún cuando la herramienta de múltiples funciones de Lyapunov puede ser útil en algunas aplicaciones, no queda claro como se encontraría esta secuencia. Encontrar una secuencia de conmutación es esencial para aplicaciones de tipo práctico. En la literatura, [9], [1], [11], [12], [13], [14] [15], [16], e incluso en dos excelentes reseñas (ver [17], [18]) avances importantes con respecto a estabilidad de sistemas conmutados se han presentado; la mayoría de ellos están enfocados en sistemas conmutados estables y están enfocados en diseñar una entrada

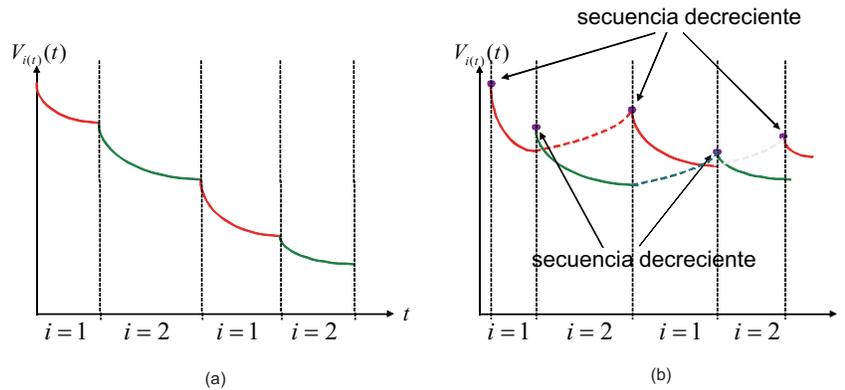


Figura 1.6: Múltiples funciones de Lyapunov que garantizan estabilidad asintótica global.

de control para garantizar la existencia de funciones de Lyapunov.

Observe que para garantizar estabilidad asintótica se requiere tener un punto de equilibrio en común, además estos resultados requieren de la existencia de una Función de Lyapunov para cada etapa. Sin embargo, si una de las etapas es inestable los resultados anteriores no se podrían aplicar. Cabe mencionar que la existencia de etapas inestables es más bien la regla que la excepción en aplicaciones prácticas. Por otro lado, son numerosas las aplicaciones en las que los subsistemas no tienen un punto de equilibrio común. Aún menos común que se disponga de subsistemas estables. Es decir, para contar con resultados que sean relevantes en aplicaciones industriales o que tengan relevancia desde un punto de vista práctico, queda mucho por hacer.

## 1.4. Aplicaciones e importancia

Muchos sistemas dinámicos pueden ser descritos como conmutados, por ejemplo aquellos que están sujetos a cambios de parámetros abruptos. Estos cambios repentinos pueden ocurrir por ejemplo cuando falla un componente o cuando ocurre un cambio de operación. Debido a lo anterior, la solución a problemas de estabilidad de esta clase de sistemas es de gran utilidad en diversas ramas de la ciencia.

Los sistemas conmutados surgen de manera natural en aplicaciones de electrónica de potencia, donde el sistema de procesamiento de energía o convertidor de potencia se dota de un dispositivo semiconductor que regula el flujo de energía de la fuente de manera alternante. De esta manera limita o controla el comportamiento del sistema. Los sistemas conmutados también surgen cuando sistemas continuos son controlados por leyes discretas, (*p. ej.* en plantas químicas con controles de tipo supervisores, o en ciertos esquemas de control para sistemas altamente no lineales). Sistemas conmutados pueden existir también cuando sistemas continuos no pueden ser controlados por retroalimentaciones continuas y se utilizan otras de tipo discreto, (*p. ej.* en robots

móviles o en automatización de vehículos).

## 1.5. Motivación

Como hemos visto en la sección anterior, aunque existen resultados sobre estabilidad de sistemas conmutados, la mayoría de estos resultados no se pueden aplicar en una gran variedad de sistemas en la práctica, principalmente por las restricciones establecidas para su derivación. Es por ello que para obtener resultados que tengan relevancia en diversas aplicaciones, se hace necesario suponer que los subsistemas que no comparten puntos de equilibrio y que no necesariamente son estables.

Bajo leyes de conmutación apropiada, sistemas conmutados e híbridos cuyos subsistemas no tienen puntos de equilibrio en común, pueden exhibir comportamientos similares a los de sistemas convencionales estables al rededor de un punto de operación, por lo que es posible hacer extensiones a conceptos tradicionales de estabilidad como se verá más adelante.

## 1.6. Objetivos

El objetivo general de la tesis es la investigación y desarrollo de aspectos teóricos y experimentales relacionados con el análisis dinámico, la estabilidad y el control de sistemas conmutados. Los objetivos específicos son los siguientes:

1. Estudiar los problemas de estabilizabilidad y estabilización conmutada para sistemas con modos descritos por (1.1), y profundizar en el entendimiento de las limitaciones de éstas.
  - donde  $u = 0$  y
  - donde los  $f_i(x)$ ,  $i \in 1, \dots, M$ , no comparten el mismo equilibrio estable.
2. Proponer leyes de conmutación para sistemas conmutados considerando incertidumbre paramétrica en el modelo.
3. Aplicar los resultados en problemas de sistemas electrónicos de potencia.
  - Resolver el problema de estabilización de convertidores intercalados (interleaved) con retroalimentación de corriente.
  - Proponer algoritmos de control con el fin de garantizar la regulación del voltaje en convertidores de potencia intercalados.

## 1.7. Aportaciones

Sistemas en ingeniería como mezcladores por lotes (batch) y sistemas en electrónica como convertidores pueden ser modelados mediante una clase de los sistemas conmutados, conocidos como conmutado integrador. El estudio de este tipo de sistemas es el primer paso hacia el diseño de leyes de conmutación para sistemas conmutados tanto lineales como no lineales. Estos sistemas no tienen puntos de equilibrio, sin embargo, dado que su comportamiento es muy simple, nos permite ganar claridad en el efecto de la secuencia de conmutación en un sistema conmutado en general.

En la literatura hay algunos resultados con respecto al problema de estabilizabilidad conmutada. Avances importantes han sido presentados en [9],[12], [13], [19], [20], [21]. Sin embargo, aunque estos contienen contribuciones significativas, algunos no consideran el caso incierto o requieren del conocimiento exacto del estado completo, la contribución de esta tesis está en estos rubros.

Las aportaciones de esta tesis son la extensión de algunos resultados en [9], [11] para el caso de sistemas conmutado integrador con incertidumbre. Se estudia además el problema de estabilizabilidad conmutada con uso de retroalimentación de salida. Con base en estos resultados, se establece el confinamiento de las trayectorias de sistemas conmutados lineales y no lineales que no tienen o que no comparten puntos de equilibrio y donde los subsistemas o modos no necesariamente son estables. A lo largo de esta tesis se utiliza la noción de estabilidad  $\epsilon$ -práctica y de confinamiento en una bola de tamaño  $\epsilon$ .

Específicamene las aportaciones de esta tesis son las siguientes:

1. Probar que una ley de conmutación dependiente del estado hace al origen del sistema conmutado integrador nominal,  $\epsilon$ -práctica global asintóticamente estable.
2. Establecer condiciones suficientes para que el origen del sistema conmutado integrador con incertidumbre sea  $\epsilon$ -práctica global asintóticamente estable, usando una ley de conmutación de pendiente del tiempo.
3. Proponer una ley de conmutación dependiente del estado que evita la conmutación rápida entre las superficies de conmutación.
4. Establecer condiciones suficientes para que el origen del sistema conmutado integrador sea  $\epsilon$ -prácticamente estable usando una retroalimentación de salida y una conmutación dependiente del tiempo.
5. Mostrar que un sistema conmutado lineal incierto puede ser confinado en una vecindad suficientemente pequeña del origen, usando una conmutación dependiente del tiempo.
6. Mostrar que un sistema conmutado no lineal incierto puede ser confinado en una vecindad suficientemente pequeña del origen, usando una conmutación dependiente del tiempo.

7. Aplicar algunos de los resultados obtenidos en electrónica de potencia, en particular en convertidores intercalado (multi-celda) de 2 etapas.

## **1.8. Organización**

Esta tesis está organizada como sigue:

El Capítulo 1 está dedicado a la introducción; en el Capítulo 2 se introducen algunas nociones de estabilidad que son empleadas a lo largo de la tesis; con el fin de poner en perspectiva la contribución de la tesis, en el Capítulo 3 se presentan resultados existentes en la literatura acerca de sistemas conmutados integrador; en el Capítulo 4 se establecen condiciones suficientes para garantizar la estabilidad asintótica práctica de sistemas conmutados integrador incierto, usando una ley de conmutación dependiente del tiempo. Además se propone una ley de conmutación dependiente del estado que evita la conmutación rápida. En el Capítulo 5 se emplean los resultados del Capítulo 4 para establecer algunas observaciones sobre el confinamiento de sistemas conmutados lineales y no lineales inciertos; en el Capítulo 6 se resuelve el problema de estabilización de sistemas conmutados integrador inciertos usando retroalimentación de salida y conmutación dependiente del tiempo; el Capítulo 7 presenta la aplicación de algunos resultados en convertidores de potencia intercalados y finalmente el Capítulo 8 fue designado para exponer las conclusiones y trabajos futuros de esta tesis.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se presentan las diferentes nociones de estabilidad que serán usadas a lo largo de este documento. En lo que sigue, por conveniencia y sin pérdida de generalidad, todas las definiciones y resultados serán establecidos alrededor del origen de  $\mathbb{R}^n$ . Otros puntos de operación se pueden obtener mediante un cambio de variables apropiado.

### 2.1. Estabilidad de sistemas conmutados

Considere el sistema (1.1) con condición inicial  $x(0) = x_0$  y tome en cuenta la Observación 2 para establecer la generalidad de las definiciones de estabilidad usando la ley de conmutación, en vez de la señal o la secuencia de conmutación.

En las nociones de estabilidad y estabilizabilidad que se presentan en esta sección, se asume que el origen es un punto de equilibrio común, es decir,

$$f_i(0) = 0, \quad \forall i \in I \quad (2.1)$$

**Definición 1** [22], [23], [24] *Se dice que el sistema conmutado (1.1) es **estable** alrededor del origen bajo una ley de conmutación  $S$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

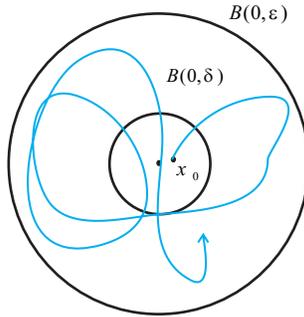


Figura 2.1: Estabilidad de un sistema conmutado.

**Definición 2** [22], [23], [24] Dado  $\varepsilon > 0$ , se dice que el sistema conmutado es **asintóticamente estable** alrededor del origen bajo una ley de conmutación  $S$ , si

(i) es estable

(ii) existe  $\eta > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.2)$$

Cuando la condición (2.2) se satisface para todo  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , el sistema conmutado se dice que es **global asintóticamente estable** al rededor del origen bajo una  $S$ .

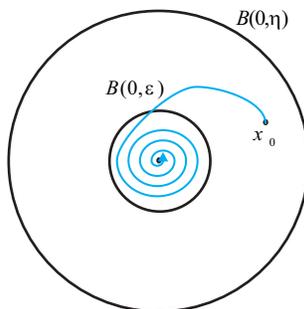


Figura 2.2: Estabilidad asintótica de un sistema conmutado.

**Definición 3** [22], [23], [24] *Un sistema conmutado (1.1) se dice que es*  
**estabilizable** *si existe una ley de conmutación  $S$  tal que el sistema es  $\varepsilon$ -estable alrededor del origen bajo  $S$ .*  
**asintóticamente estabilizable** *si existe una ley de conmutación  $S$  tal que el sistema es asintóticamente estable alrededor del origen bajo  $S$ .*  
**global asintóticamente estabilizable** *si existe una ley de conmutación  $S$  tal que el sistema es global asintóticamente estable alrededor del origen bajo  $S$ .*

**Observación 3** *Note que en la Definición 3,  $S$  es independiente de  $\varepsilon$ .*

**Observación 4** *Note que en general los modos de sistemas no lineales conmutados pueden tener varios equilibrios, y algunos de ellos pueden ser compartidos y otros no. En este sentido, la clasificación de arriba puede verse como incompleta; sin embargo, la estabilización de algún punto de interés (ya sea equilibrio común, no común o algún otro) depende del problema particular de control que se desea resolver.*

## 2.2. Estabilidad $\varepsilon$ -práctica de sistemas conmutados

Tres tipos de sistemas conmutados que no comparten puntos de equilibrio son posibles:

- Los subsistemas tienen puntos de equilibrio distintos. Estos se conocen como sistemas de equilibrio múltiple o (EM);
- Los subsistemas no tienen puntos de equilibrio;
- Combinación de los dos primeros.

Para estos tipos de sistemas, no es posible aplicar las definiciones de estabilidad de la Sección 2.1, dado que no se tiene un único punto de equilibrio. Sin embargo, bajo leyes de conmutación apropiadas, se pueden exhibir comportamientos similares en algún punto de operación. Estas nociones de estabilidad son introducidas en [9] y [11] y se presentan a continuación.

**Definición 4** [9], [11] *Dado  $\varepsilon > 0$ , se dice que el sistema conmutado (1.1) es  $\varepsilon$ -prácticamente estable alrededor del origen bajo una ley de conmutación  $S$ , si existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que*

$$\|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

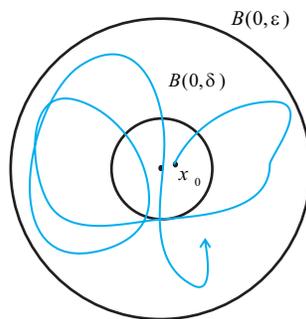


Figura 2.3: Estabilidad  $\varepsilon$ -práctica de un sistema conmutado.

**Observación 5** *Observe que las Definiciones 1 y 4 requieren que las condiciones de acotamiento se satisfagan para todo  $t > 0$ , dada la continuidad de las trayectorias del sistema conmutado ello implica que  $\delta \leq \varepsilon$ .*

**Observación 6** *La Definición 1 puede verse equivalente a la Definición 4 de estabilidad  $\varepsilon$ -práctica; sin embargo la Definición 1 presupone que el origen es punto de equilibrio, mientras que la Definición 4 no. Por otro lado en [9],[11], se menciona*

que la diferencia entre estas nociones es que en la noción de estabilidad  $\varepsilon$ -práctica,  $\varepsilon$  es fijo. No obstante, en el análisis del capítulo siguiente se verá que esto es irrelevante para establecer que el sistema es o no estable bajo cualquiera de las dos definiciones.

**Definición 5** [9] Dado  $\varepsilon > 0$ , se dice que el sistema conmutado (1.1) es  **$\varepsilon$ -práctica asintóticamente estable** alrededor del origen bajo una ley de conmutación  $S$  si

(i) es  $\varepsilon$ -prácticamente estable

(ii) el origen es  $\varepsilon$ -atractivo, esto es, si existe  $\eta = \eta(\varepsilon) \geq \delta$  tal que

$$\|x(0)\| \leq \eta \Rightarrow \exists T = T(\varepsilon) \geq 0 : \|x(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq T \quad (2.3)$$

Cuando la condición (2.3) se satisface para todo  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , el origen es globalmente  $\varepsilon$ -atractivo, en este caso el sistema conmutado se dice que es  **$\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable** al rededor del origen bajo  $S$ .

**Observación 7** En la definición anterior, el término de asintótico se usa en la literatura, sin embargo ello no implica que se tienda al origen asintóticamente.

**Observación 8** Note que en la noción de estabilidad asintótica, las trayectorias tienden asintóticamente al origen, mientras que en la estabilidad  $\varepsilon$ -práctica asintótica, las trayectorias son atraídas a una vecindad de tamaño  $\varepsilon$  alrededor del origen.

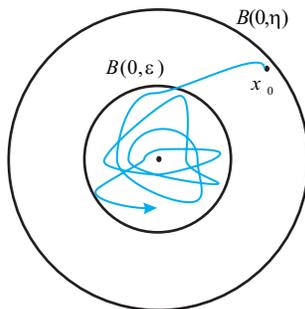


Figura 2.4: Estabilidad  $\varepsilon$ -práctica asintótica de un sistema conmutado.

**Observación 9**  $\varepsilon$ -atractividad no implica la estabilidad  $\varepsilon$ -práctica a todo tiempo, sólo a partir de algún tiempo  $T$  (Vea el siguiente ejemplo).

**Ejemplo 1** Considere que  $\eta = \varepsilon$  y  $T > 0$ , en este caso,  $\|x_0\| \leq \varepsilon$  no necesariamente implica que  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  a partir de un tiempo  $T > 0$ , ya que en el tiempo que transcurre de 0 a  $T$  la trayectoria puede salir de la bola de radio  $\varepsilon$ , (ver Figura 2.5).

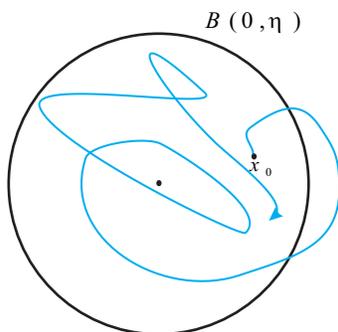


Figura 2.5: Aunque el origen es  $\varepsilon$ -atractivo el sistema no es  $\varepsilon$ -prácticamente estable.

**Definición 6** [9], [11] *El sistema conmutado (1.1) se dice que es*

**$\varepsilon$ -prácticamente estabilizable** *si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una ley de conmutación  $S(\varepsilon)$  tal que el sistema es  $\varepsilon$ -prácticamente estable alrededor del origen bajo  $S$ .*

**$\varepsilon$ -práctica asintóticamente estabilizable** *si existe una ley de conmutación  $S(\varepsilon)$  tal que el sistema es  $\varepsilon$ -prácticamente asintóticamente estable alrededor del origen bajo  $S$ .*

**$\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable** *si existe una ley de conmutación  $S(\varepsilon)$  tal que el sistema es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable alrededor del origen bajo  $S$ .*

**Observación 10** *Note que en la Definición 6, en general  $S$  depende de  $\varepsilon$ . Note además que en vista de la Observación 3, se puede establecer si  $S$  depende de  $\varepsilon$  o no, en función de el tipo de estabilidad a analizar.*

## Capítulo 3

# Estabilización $\varepsilon$ -Práctica para Sistemas Conmutados Integrador

Con el fin de poner en perspectiva la contribución de la tesis, en este capítulo se presentan algunos resultados acerca de la estabilizabilidad práctica para sistemas conmutados integrador según lo expuesto en [9]. Los sistemas conmutados integrador son un tipo de sistemas conmutados cuyo comportamiento es muy simple, por lo que nos abre la posibilidad de tener claridad en el efecto que la secuencia de conmutación tiene en un sistema.

**Definición 7** *Un sistema conmutado integrador en  $\mathbb{R}^n$  consiste en una ley de conmutación  $S$  y una familia de subsistemas:*

$$\dot{x}(t) = c_i \quad i \in I = \{1, \dots, M\} \quad (3.1)$$

donde  $c_i \in \mathbb{R}^n$  ( $c_i \neq 0$ ),  $i \in I$  son vectores constantes y  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Observe que los sistemas conmutados tipo integrador no tienen puntos de equilibrio. Además, sean  $t_0, t_1, t_2, \dots$  los instantes de conmutación, observe que si el subsistema  $k$  está activo en el intervalo de tiempo  $[t_i, t_{i+1})$ , el comportamiento del sistema conmutado integrador en tal intervalo estará descrito por

$$x(t) = x(t_i) + (t - t_i)c_k. \quad (3.2)$$

**Observación 11** *Note que debido a que solo está activo, el subsistema  $k$ , por ende no existe conmutación en el intervalo  $[t_i, t_{i+1})$ .*

Cuando el subsistema  $k$  está activo, la trayectoria del sistema conmutado integrador se mueve en dirección del vector  $c_k$ , (ver Figura 3.1).

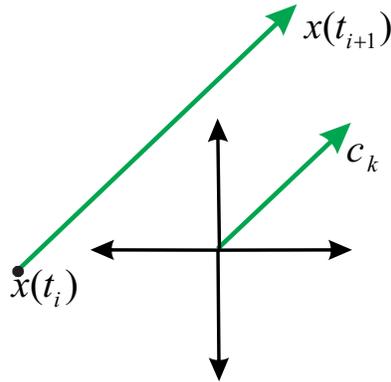


Figura 3.1: Comportamiento de un sistema conmutado integrador en dimensión dos, cuando está activo el subsistema  $k$ .

De este modo, un ejemplo de como estaría descrita una trayectoria de un sistema conmutado integrador se puede ver en la Figura 3.2

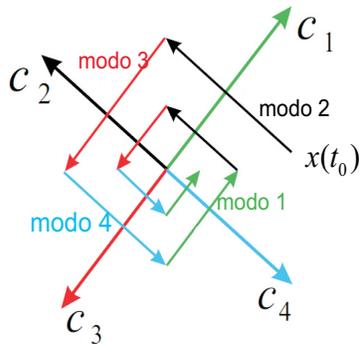


Figura 3.2: Ejemplo de la evolución de la trayectoria de un sistema conmutado integrador. Las etiquetas al lado de las trayectorias indican el modo o subsistema que está activo. En este caso el subsistema activo  $i$  es paralelo a  $c_i$ . Los vectores  $c_i$  se dibujan por conveniencia.

**Observación 12** *Observe que dada la naturaleza de la dinámica de cada subsistema sistema, la única opción para estabilizar al sistema conmutado es diseñando una ley de conmutación  $S$ .*

A continuación, enunciamos uno de los resultados principales expuestos en [9], donde se establecen condiciones necesarias y suficientes de estabilizabilidad práctica para sistemas conmutados integrador.

**Teorema 1 (Teorema 3.1.[9])**

*Un sistema conmutado integrador en  $\mathbb{R}^n$  que consiste de  $M$  subsistemas con campos vectoriales  $c_1, \dots, c_M$  es  $\epsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable si y sólo si  $C = \mathbb{R}^n$ , donde  $C$  es el cono convexo:  $C = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^M \lambda_i c_i, \text{ donde } \lambda_i \geq 0\}$ .*

Para poder aplicar el Teorema 3.1, se necesita verificar la condición  $C = \mathbb{R}^n$ , una manera de saber cuando  $C = \mathbb{R}^n$  se establece en el siguiente lema.

**Lema 1 (Lema 3.1.[9])**

*$C = \mathbb{R}^n$  si sólo si existe un subconjunto  $\{c_{i_1}, \dots, c_{i_l}\}$  de  $\{c_1, \dots, c_M\}$  que satisfaga:*

- a) *gen  $\{c_{i_1}, \dots, c_{i_l}\} = \mathbb{R}^n$  donde  $i_1, \dots, i_l \subset I$*
- b)  *$\exists \lambda_j > 0, j = 1, \dots, l$  tal que  $\sum_{j=1}^l \lambda_j c_{i_j} = 0$*

**Observación 13** *En el lema anterior la notación el doble subíndice se emplea para denotar que  $\{c_{i_1}, \dots, c_{i_l}\}$  es un subconjunto de  $\{c_1, \dots, c_M\}$ , donde  $l$  indica el índice de los posibles elementos del conjunto.*

También en [9] se establece que debe haber al menos  $n + 1$  subsistemas en el sistema (3.1), es decir  $M \geq n + 1$ , en este caso siempre es posible seleccionar un sistema conmutado integrador de (3.1) de  $n + 1$  subsistemas que sea  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable.

**Teorema 2 (Teorema 3.2 [9])**

- (i) Si un sistema conmutado integrador en  $\mathbb{R}^n$  es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable entonces hay al menos  $n + 1$  subsistemas.
- (ii) Además, existe un sistema conmutado integrador de  $n + 1$  subsistemas que es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable.

**Observación 14** En vista del resultado anterior, puede asumirse por simplicidad que  $M = n + 1$  ya que sólo se necesitan  $n + 1$  subsistemas para resolver el problema de estabilizabilidad.

Finalmente se presentan dos corolarios que pueden ser inferidos de los teoremas anteriores y el lema anterior.

**Corolario 1 (Corolario 3.1 [9])**

Un sistema conmutado integrador en  $\mathbb{R}^n$  que consiste de  $n + 1$  subsistemas con campos vectoriales  $c_1, \dots, c_{n+1}$  es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable si y solo si

- a)  $\text{gen} \{c_1, \dots, c_{n+1}\} = \mathbb{R}^n$
- b)  $\exists \lambda_j \geq 0$ , no todos cero,  $j = 1, \dots, n + 1$  tal que  $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j c_j = 0$

La condición a) en el corolario 1 puede ser descrita de otra manera distinta, por lo que el Corolario 1 también puede enunciarse de la siguiente manera:

**Corolario 2 (Corolario 3.2 [9])**

Un sistema conmutado integrador en  $\mathbb{R}^n$  que consiste de  $n + 1$  subsistemas con campos vectoriales  $c_1, \dots, c_{n+1}$  es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable si y solo si

- a) Cualquier conjunto de  $n$  vectores del conjunto  $\{c_1, \dots, c_{n+1}\}$  son linealmente independientes.
- b)  $\exists \lambda_j \geq 0$ , no todos cero,  $j = 1, \dots, n + 1$  tal que  $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j c_j = 0$

**Observación 15** La condición b) del Corolario 2 se puede reescribir como,

- b)  $\exists \lambda_j \geq 0$ , no todos cero,  $j = 1, \dots, n + 1$  tal que

$$\lambda_{n+1} c_{n+1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j (-c_j).$$

De aquí, una manera de escoger  $n + 1$  vectores que satisfagan

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i c_i : \lambda_i \geq 0 \right\} = \mathbb{R}^n$$

es escogiendo primero  $n$  vectores que sean linealmente independientes y un vector que sea una combinación cónica<sup>1</sup> de los  $n$  vectores escogidos linealmente independientes pero negativos, ver Figura 3.3 para una representación en  $\mathbb{R}^3$ .

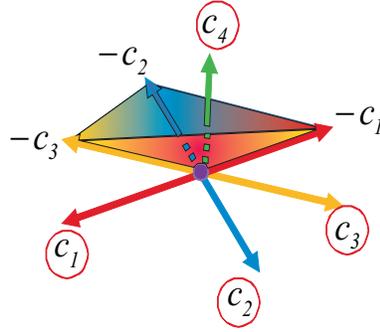


Figura 3.3:  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^3$  cumplen con la condición  $C = \mathbb{R}^3$ , si  $c_1, c_2, c_3$  son linealmente independientes y  $c_4$  es una combinación cónica de  $-c_1, -c_2, -c_3$ , es decir,  $c_4$  está en el cono convexo descrito por  $-c_1, -c_2, -c_3$ .

### 3.1. Conmutación dependiente del tiempo

El Teorema 3.1 en [9] da condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de una ley de conmutación que estabiliza  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente el sistema (3.1). La prueba de este hecho es constructiva (*i.e.* garantiza la existencia de una ley de conmutación proponiéndola), tal secuencia se calcula explícitamente y se reproduce aquí con fines de claridad

#### Ley de conmutación 1 (*Ley de conmutación dependiente del tiempo*)

**Paso 1** Se inicia con  $t_r = t_0$  y  $x_r = x_0$ , entonces se escribe  $x_r$  en la siguiente forma:

$$x_r = \gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_M c_M \quad \gamma_i \leq 0 \quad (3.3)$$

**Paso 2** Se usan estos  $\gamma_i$  para establecer la siguiente secuencia de conmutación hasta un tiempo  $t_M = t_r + \sum_{i=1}^M |\gamma_i|$ :

$$\sigma = \{(1, |\gamma_1|), (2, |\gamma_2|), \dots, (M, |\gamma_M|)\}, \quad (3.4)$$

donde  $|\gamma_i| = t_i - t_{i-1}$   $i = 1, \dots, M$  y

$$\begin{aligned} t_1 &= t_r + |\gamma_1| \\ t_2 &= t_r + |\gamma_1| + |\gamma_2| \\ &\dots \\ t_M &= t_r + |\gamma_1| + |\gamma_2| + \cdots + |\gamma_M| \end{aligned}$$

**Paso 3** Una vez que se llega al origen, (ver Observación 16) se mantiene activo el subsistema  $M$  por un tiempo  $\frac{\delta}{\|c_M\|}$  que es cuando la trayectoria del sistema coincide con la frontera de la bola  $B[0, \delta]$ .

**Paso 4** Se actualiza el tiempo de reinicio,  $t_r$ , por

$$t_{M+1} = t_r + |\gamma_1| + |\gamma_2| + \cdots + |\gamma_M| + \frac{\delta}{\|c_M\|}$$

y el estado de reinicio  $x_r$ , por

$$x(t_{M+1}) = \frac{\delta}{\|c_M\|} c_M,$$

el punto de intersección con la bola.

**Paso 5** Se repiten los pasos del 1 al 5.

**Observación 16** Sea la dinámica del sistema conmutado en el intervalo  $[t_0, t_M)$ , denotando  $x_i \triangleq x(t_i)$ , en vista de la ecuación (3.2)

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + (t_{i+1} - t_i)c_{i+1} \\ &= x_i + |\gamma_{i+1}|c_{i+1} \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} x_1 &= x_r + |\gamma_1|c_1 \\ x_2 &= x_1 + |\gamma_2|c_2 \\ &\vdots \\ x_M &= x_{M-1} + |\gamma_M|c_M. \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores, es posible observar que luego del tiempo  $t_M = t_r + \sum_{i=1}^M |\gamma_i|$ ,

$$x_M = x_r + \sum_{i=1}^M |\gamma_i|c_i.$$

Finalmente, de (3.3) se tiene que en el tiempo de conmutación  $t_M$ , la trayectoria alcanza el origen.

**Observación 17** Observe que en el Paso 1, dado que hay un grado de libertad (i.e. un  $|\gamma_k|$  puede escogerse arbitrariamente), hay infinitas maneras de expresar  $x_r$  como en (3.3), por consiguiente se pueden derivar infinitas secuencias de conmutación estabilizantes. En [9] se presenta una manera explícita de expresar  $x_r$  como en (3.3), en donde se deriva que los  $\gamma_i$  están dados por

$$\gamma_i = \sum_{l=1}^{2n} \beta_l \lambda_{l,i} \quad (3.5)$$

con

$$\beta_l = \begin{cases} \eta_l, & \text{si } \eta_l \leq 0 \\ 0, & \text{si } \eta_l > 0 \end{cases}$$

para  $l = 1, \dots, n$ ,

$$\beta_l = \begin{cases} -\eta_{l-n}, & \text{si } \eta_{l-n} < 0 \\ 0, & \text{si } \eta_{l-n} \leq 0 \end{cases}$$

para  $l = n+1, \dots, 2n$ , y  $\lambda_{l,i} \geq 0$  que cumplen

$$\hat{e}_l = \sum_{i=1}^M \lambda_{l,i} c_i \quad (3.6)$$

donde,

$$\begin{aligned} \hat{e}_l &= e_l & l &= 1, \dots, n \\ \hat{e}_l &= -e_{l-n} & l &= n+1, \dots, 2n \end{aligned}$$

con  $e_l$  vectores en la base canónica en  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación 18** Note que si  $x$  es un estado inicial, las  $\eta_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ , son las coordenadas en la base canónica de  $x$ ; esto es,  $\eta_l \in \mathbb{R}$  es tal que  $x = \sum_{l=1}^n \eta_l e_l$ , por lo tanto, para cada estado inicial,  $x \in B[0, \delta]$ ,  $(\sum_{l=1}^{2n} \beta_l^2)^{1/2} = (\sum_{l=1}^n \eta_l^2)^{1/2} \leq \delta$ .

Dado que la implementación práctica de esta secuencia de conmutación es laboriosa, en la referencia mostrada anteriormente se propone también una ley de conmutación dependiente de los estados, como se describe en la siguiente sección.

## 3.2. Conmutación dependiente del estado

Como puede verse a partir de la Definición 3 el problema de estabilizabilidad conmutada consiste en encontrar leyes de conmutación que aseguren la estabilidad práctica del sistema de conmutado (3.1). En [9] se propuso la siguiente ley de conmutación dependiente del estado:

**Ley de Conmutación 2[9]** (*Ley de conmutación dependiente del estado*).

Sea  $C_k$  el cono generado por todos los vectores excepto el  $k$ -ésimo vector, es decir, el cono generado por los vectores  $-c_1, \dots, -c_{k-1}, -c_{k+1}, \dots, -c_{n+1}$  definido como:

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1(-c_1) + \dots + \lambda_{k-1}(-c_{k-1}) + \lambda_{k+1}(-c_{k+1}) + \dots + \lambda_{n+1}(-c_{n+1}), \lambda_i \geq 0\}.$$

### **Criterio 1**

- Si  $x(t) \in C_k$ , se activa el subsistema  $k + 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ .
- Si  $x(t) \in C_{n+1}$  se activa el subsistema 1.
- Si  $x(t)$  está en la frontera común de cualquiera de los conos, se activa el subsistema correspondiente al cono donde la trayectoria entrará. Para una representación de este criterio en dimensión 2 (Vea Figura 3.4).

Hasta aquí, sólo se ha hablado acerca de resultados en [9], los cuales serán usados para extenderlos en el caso de sistemas inciertos. Dichos resultados consisten en proponer leyes de conmutación dependientes del tiempo así como leyes de conmutación dependientes del estado considerando incertidumbres. En este punto es importante hacer notar que en [9] no se presenta una prueba de que la Ley de Conmutación 2 descrita por el Criterio 1 garantiza la estabilidad  $\varepsilon$ -práctica asintótica global. Sin embargo, debido a las extensiones de los resultados en esta tesis, se consideró necesario dar evidencia de que esta ley de conmutación estabiliza  $\varepsilon$ -prácticamente asintóticamente el sistema conmutado integrador (3.1).

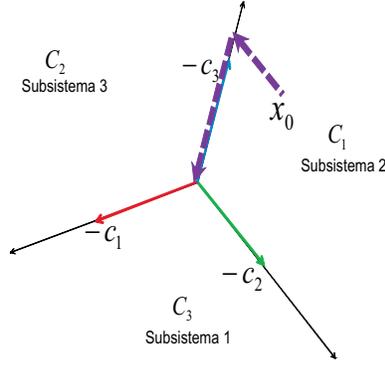


Figura 3.4: Ley de conmutación 2 descrita por el criterio 1, en dimensión 2.

Una de las aportaciones de esta tesis es la prueba de que la ley de conmutación dependiente del estado asegura la estabilidad  $\varepsilon$ -práctica asintótica global. Para probar este hecho se necesita hacer uso de un hecho importante descrito en el siguiente lema.

**Lema 2** Si (3.1) es  $\varepsilon$ -prácticamente estabilizable,  $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ , como se definieron en el Criterio 1, describen una partición de  $\mathbb{R}^n$ ; esto es, cada uno de los  $C_i$ ,  $0 \leq i \leq n+1$  satisfacen lo siguiente:

- (i)  $\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i = \mathbb{R}^n$
- (ii)  $\text{int}C_i \cap \text{int}C_j = \emptyset$  con  $i \neq j$ ,  $0 \leq i, j \leq n+1$
- (iii)  $\text{int}C_i \neq \emptyset$

### *Demostración*

#### **Prueba de (i)**

Dado que cualquier elemento  $C_k$  está en  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que  $\bigcup_{i=1}^{n+1} C_k \subset \mathbb{R}^n$ , por lo tanto es suficiente probar que  $\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} C_k$ . Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ , dado que (3.1) es  $\varepsilon$ -prácticamente estabilizable, usando el Teorema 3.1 en [9],  $\mathbb{R}^n = C$ , donde  $C = \{z : z = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i c_i, \alpha_i \geq 0\}$ , por consiguiente

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i c_i \quad \alpha_i \geq 0. \quad (3.7)$$

Ahora, usando el Corolario 2 en [9], se tiene que existen  $p_i > 0$  tales que  $\sum_{i=1}^{n+1} p_i c_i = 0$  donde  $p_i > 0$ , por consiguiente,

$$c_r = -\frac{p_1}{p_r} c_1 - \dots - \frac{p_{r-1}}{p_r} c_{r-1} - \frac{p_{r+1}}{p_r} c_{r+1} - \dots - \frac{p_{n+1}}{p_r} c_{n+1}$$

donde  $r$  se define como el índice que satisface  $\frac{\alpha_r}{p_r} = \min_{1 \leq i \leq n+1} \left\{ \frac{\alpha_i}{p_i} \right\}$ . Multiplicando la ecuación anterior por  $\alpha_r$ , y sustituyendo  $\alpha_r c_r$  en (3.7), se tiene que

$$x = \left\{ \alpha_1 - \frac{\alpha_r}{p_r} p_1 \right\} c_1 + \dots + \left\{ \alpha_{r-1} - \frac{\alpha_r}{p_r} p_{r-1} \right\} c_{r-1} + \\ \left\{ \alpha_{r+1} - \frac{\alpha_r}{p_r} p_{r+1} \right\} c_{r+1} + \dots + \left\{ \alpha_{n+1} - \frac{\alpha_r}{p_r} p_{n+1} \right\} c_{n+1}.$$

Puesto que  $\frac{\alpha_i}{p_i} \leq \frac{\alpha_r}{p_r}$  para  $0 \leq i \leq n+1$ , se cumple que  $\alpha_i - \frac{\alpha_r}{p_r} p_i \leq 0$ . Sea  $\lambda_i = \left| \alpha_i - \frac{\alpha_r}{p_r} p_i \right|$ , la ecuación anterior puede ser escrita de la siguiente manera.  $\lambda_1(-c_1) + \dots + \lambda_{k-1}(-c_{k-1}) + \lambda_{k+1}(-c_{k+1}) + \dots + \lambda_{n+1}(-c_{n+1})$ , donde  $\lambda_i \geq 0$ . Luego  $x \in C_r$ , por lo tanto  $\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} C_k$ .

## Prueba de (ii)

Ahora se prueba que  $C_1, \dots, C_{n+1}$  tiene interiores mutuamente disjuntos, esto es,  $\text{int}C_i \cap \text{int}C_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . La prueba se hará por contradicción. Asumiendo que  $\text{int}C_i \cap \text{int}C_j \neq \emptyset$ , entonces existe un  $x$  tal que  $x \in \text{int}C_i$  y  $x \in \text{int}C_j$  donde

$$\text{int}C_i = \{x : x = -\lambda_1 c_1 - \dots - \lambda_{i-1} c_{i-1} - \lambda_{i+1} c_{i+1} - \dots - \lambda_{n+1} c_{n+1}, \lambda_k > 0\} \\ \text{int}C_j = \{x : x = -\bar{\lambda}_1 c_1 - \dots - \bar{\lambda}_{j-1} c_{j-1} - \bar{\lambda}_{j+1} c_{j+1} - \dots - \bar{\lambda}_{n+1} c_{n+1}, \bar{\lambda}_l > 0\}$$

de aquí

$$x = -\lambda_1 c_1 - \dots - \lambda_{i-1} c_{i-1} - \lambda_{i+1} c_{i+1} - \dots - \lambda_{n+1} c_{n+1} \\ = -\bar{\lambda}_1 c_1 - \dots - \bar{\lambda}_{j-1} c_{j-1} - \bar{\lambda}_{j+1} c_{j+1} - \dots - \bar{\lambda}_{n+1} c_{n+1}.$$

donde  $\lambda_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1$  y  $\bar{\lambda}_l > 0$ ,  $l = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1$ . Ya que  $i \neq j$ ,  $\lambda_j = 0$  y  $\bar{\lambda}_i = 0$ , se sigue que  $x \notin \text{int}C_i$  y  $x \notin \text{int}C_j$ , esto es una contradicción, por consiguiente  $C_1, \dots, C_{n+1}$  tiene interiores mutuamente disjuntos.

## Prueba de (iii)

Esto se sigue claramente ya que se asume que  $c_i \neq 0$  para  $i \in I = \{1, \dots, M\}$ .

□

### 3.2.1. Conexión entre las secuencias estabilizables

Con el fin de probar que la ley de conmutación descrita por el Criterio 1 garantiza la estabilidad práctica del sistema conmutado integrador (3.1), estableceremos una conexión entre las secuencia de conmutación descrita por la ley de conmutación dependiente del tiempo y la secuencia de conmutación descrita por la ley de conmutación dependiente del estado. Hasta ahora sabemos que partiendo de que (3.1) es  $\varepsilon$ -prácticamente estabilizable, se puede cubrir  $\mathbb{R}^n$  con  $n + 1$  conos con interiores disjuntos. Así que si algún  $x$  está en  $\mathbb{R}^n$ , indudablemente estará en algún cono  $C_k$ . Como se puede ver, la ley de conmutación descrita por el Criterio 1 es dependiente de los estados, por lo que se requiere saber en qué cono se encuentran un estado  $x$  dado. Una manera de determinar si  $x$  está en un cono  $C_k$  es resolviendo la siguiente ecuación

$$[-c_1, \dots, -c_{k-1}, -c_{k+1}, \dots, -c_{n+1}] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \\ \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = x,$$

dado que se sabe que  $n$  vectores cualesquiera de  $\{c_1, \dots, c_{n+1}\}$  son linealmente independientes (vea Corolario 2), la ecuación anterior tiene solución única. Además si  $x$  está en el interior del cono  $C_k$ , los  $\lambda_i$  son todos positivos. Ahora, si se define  $\check{\gamma}_i = -\lambda_i \leq 0$  entonces  $x = \check{\gamma}_1 c_1 + \dots + \check{\gamma}_{k-1} c_{k-1} + \check{\gamma}_{k+1} c_{k+1} + \dots + \check{\gamma}_{n+1} c_{n+1}$ . De aquí se deriva que para cada estado inicial dentro del cono  $C_k$ , se puede describir una secuencia de conmutación de la siguiente manera

$$\check{\sigma} = \{(1, |\check{\gamma}_1|), \dots, (k-1, |\check{\gamma}_{k-1}|), (k+1, |\check{\gamma}_{k+1}|), \dots, (M, |\check{\gamma}_M|)\}, \quad (3.8)$$

donde usamos  $M$  en vez de  $n + 1$  con el fin de comparar esta secuencia descrita por la ley de conmutación dependiente del estado con la secuencia descrita en el Paso 2 por la ley de conmutación dependiente del tiempo. Como pudimos observar anteriormente, la clave para llegar al origen consiste en expresar cada estado  $x_r$  como en (3.3). Por consiguiente con la secuencia de conmutación  $\check{\sigma}$  también se llega al origen en el  $M$ -ésimo tiempo de conmutación,  $t_M$ .

Con el fin de establecer una conexión entre las secuencias de conmutación  $\sigma$  y  $\check{\sigma}$ , se mostrará que el tiempo que la trayectoria tarda en llegar desde un estado inicial al origen usando la secuencia descrita por el Criterio 1,  $\check{\sigma}$ , es más corto que el tiempo que la trayectoria tarda en llegar desde el mismo estado inicial hacia el origen usando la secuencia de conmutación descrita por la ley de conmutación dependiente del tiempo. Esto será descrito en el siguiente lema

**Lema 3** Sean  $|\gamma_i|$  los tiempos de permanencia dados por la secuencia de conmutación dependiente del tiempo (3.4), y  $|\check{\gamma}_i|$  los tiempos de permanencia dados por la secuencia de conmutación dependiente del estado (3.8), entonces

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i| + \sum_{i=k+1}^M |\check{\gamma}_i| \leq \sum_{i=1}^M |\gamma_i| \quad (3.9)$$

### ***Demostración***

Por un lado si  $\gamma_k = 0$ , por igualdad de coeficientes se tiene que  $\gamma_i = \check{\gamma}_i$ , para  $i \neq k$ , de donde se sigue que  $\sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i| + \sum_{i=k+1}^M |\check{\gamma}_i| = \sum_{i=1}^M |\gamma_i|$ . Por otro lado, si  $\gamma_k < 0$ , se tienen dos expresiones distintas para un estado inicial,  $x$

$$x = \sum_{i=1}^M \gamma_i c_i = \sum_{i=1}^{k-1} \check{\gamma}_i c_i + \sum_{i=k+1}^M \check{\gamma}_i c_i$$

Re escribiendo esta expresión como

$$x = \sum_{i=1}^M |\gamma_i|(-c_i) = \sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i|(-c_i) + \sum_{i=k+1}^M |\check{\gamma}_i|(-c_i). \quad (3.10)$$

En vista del corolario 2, [9], se puede ver que el  $k$ -ésimo término,  $|\gamma_k|(-c_k)$ , puede ser escrito de la siguiente forma  $|\gamma_k|(-c_k) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i c_i + \sum_{i=k+1}^M p_i c_i$ , donde  $p_i > 0$ . Usando la parte central de (3.10),  $x$  puede ser escrita como:

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} |\gamma_i|(-c_i) + \sum_{i=k+1}^M |\gamma_i|(-c_i) + \sum_{i=1}^{k-1} p_i c_i + \sum_{i=k+1}^M p_i c_i = \sum_{i=1}^{k-1} (|\gamma_i| - p_i)(-c_i) + \sum_{i=k+1}^M (|\gamma_i| - p_i)(-c_i)$$

Ahora, comparando los coeficientes del lado derecho de esta última expresión con los coeficientes del lado derecho de (3.10), se tiene que  $|\gamma_i| - p_i = |\check{\gamma}_i|$ , de donde  $|\gamma_i| - |\check{\gamma}_i| = p_i$ . Luego como  $p_i > 0$ ,  $|\gamma_i| > |\check{\gamma}_i|$ , note que este ultimo hecho se cumple para todo  $i = 1, \dots, M$ , excepto para  $k$ , por consiguiente se cumple la siguiente desigualdad,  $\sum_{i=k-1}^M |\check{\gamma}_i| + \sum_{i=k+1}^M |\check{\gamma}_i| < \sum_{i=k-1}^M |\gamma_i| + \sum_{i=k+1}^M |\gamma_i|$ , Además, dado que se cumple que  $\sum_{i=k-1}^M |\gamma_i| + \sum_{i=k+1}^M |\gamma_i| < \sum_{i=1}^M |\gamma_i|$ , se sigue lo que deseamos.

□

Ahora estamos preparados para garantizar que la secuencia generada por los tiempos de permanencia  $|\check{\gamma}_j|$  dados por el Criterio 1, garantiza el confinamiento de las trayectorias del sistema conmutado integrador (3.1) en la bola  $B[0, \varepsilon]$ , como se describe en el siguiente Teorema.

**Teorema 3** *La ley de conmutación dependiente del estado, descrita por el Criterio 1, estabiliza  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente el sistema conmutado integrador (3.1).*

**Demostración**

Empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (3.5) y el hecho de que  $(\sum_{l=1}^{2n} \beta_l^2)^{1/2} \leq \delta$  como vimos en la Observación 18, por el Lema 3 se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i| + \sum_{i=k+1}^M |\check{\gamma}_i| \leq \sum_{i=1}^M |\gamma_i| = \sum_{i=1}^M \left| \sum_{l=1}^{2n} \beta_l \lambda_{l,i} \right| \leq \sum_{i=1}^M \left| \left( \sum_{l=1}^{2n} \beta_l^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{l=1}^{2n} \lambda_{l,i}^2 \right)^{1/2} \right| \leq \delta \sum_{i=1}^M \left( \sum_{l=1}^{2n} \lambda_{l,i}^2 \right)^{1/2} \quad (3.11)$$

Por otro lado, como vimos anteriormente, a partir de la ley de conmutación dependiente de los estados, descrita por el Criterio 1, se deriva la ley de conmutación dependiente del tiempo  $\check{\sigma}$  descrita en (3.8). Luego, de manera similar como se ve en la Observación 16, se tiene

$$\begin{aligned} x_j &= x_0 + \sum_{i=1}^j |\check{\gamma}_i| c_i & j = 1, \dots, k-1 & \quad (3.12) \\ x_j &= x_{j-1} & j = k & \\ x_j &= x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i| c_i + \sum_{i=k+1}^j |\check{\gamma}_i| c_i & j = k+1, \dots, M & \end{aligned}$$

**Observación 19** *Note que es posible acotar la trayectoria de sistema en el intervalo de tiempo  $[t_0, t_M)$ , por  $\mu$  donde  $\mu = \max\{\|x_0\|, \|x_1\|, \dots, \|x_M\|\}$ , (ver Figura 3.5).*

De la observación anterior los siguientes caso son posibles:

**Caso 1** ( $\mu = \|x_0\|$ ), el cual implica que

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\|$$

**Caso 2** ( $\mu = \|x_1\|$ ), el cual implica que

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + |\check{\gamma}_1| \|c_1\|$$

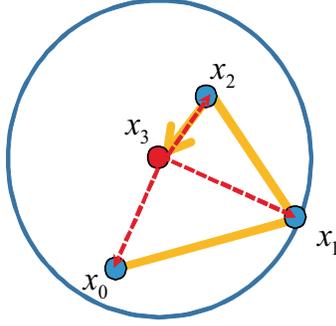


Figura 3.5: Una cota para  $x(t)$  en el intervalo  $[t_0, t_M)$ , en dimensión 2.

⋮

**Caso  $n+1$**  ( $\mu = \|x_n\|$ ), el cual implica que

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i| \|c_i\| + \sum_{i=k+1}^n |\check{\gamma}_i| \|c_i\|$$

Note que la cota en el caso  $n+1$  es mas grande que la cota en todos los casos anteriores, por consiguiente para  $t \in [t_0, t_M)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i| \|c_i\| + \sum_{i=k+1}^n |\check{\gamma}_i| \|c_i\| \\ &\leq \|x_0\| + \sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i| \|c_i\| + \sum_{i=k+1}^M |\check{\gamma}_i| \|c_i\| \\ &\leq \|x_0\| + \max_{1 \leq i \leq M} \|c_i\| \left[ \sum_{i=1}^{k-1} |\check{\gamma}_i| + \sum_{i=k+1}^M |\check{\gamma}_i| \right] \end{aligned}$$

Sea  $x_0 \in B[0, \delta]$ , definiendo

$$G_1 \triangleq \sum_{i=1}^M \left( \sum_{l=1}^{2n} \lambda_{l,i}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.13)$$

de (3.11) se tiene que

$$\|x(t)\| \leq \delta (1 + (\max_{1 \leq i \leq M} \|c_i\|) G_1).$$

Por lo tanto, si

$$G \triangleq 1 + (\max_{1 \leq i \leq M} \|c_i\|) G_1,$$

se puede definir  $\delta = \frac{\varepsilon}{G}$ . De este modo se cumple que,  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  para  $0 \leq t < t_M$ .

**Observación 20** Como se estableció anteriormente, la Ley de conmutación 2 descrita por el Criterio 1, produce los tiempos de permanencia  $|\check{\gamma}_i|$  más cortos que conducen cualquier condición inicial hacia el origen. Sin embargo, una vez que se llega al origen la posibilidad del comportamiento Zenon surge. Para evitar este fenómeno, se mantiene activo el subsistema anterior hasta que las trayectorias intercepten la frontera de la bola  $B[0, \delta]$ ; cuando esto suceda, el Criterio 1 se puede aplicar otra vez para dirigir nuevamente el sistema al origen, de esta forma es posible garantizar el confinamiento para todo  $t \geq 0$ .

Finalmente, si la condición inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , de acuerdo a como esta descrita la ley de conmutación dependiente de los estados, la trayectoria alcanza el origen después de  $M$  iteraciones. De aquí que a partir del tiempo  $T = \sum_{i=1}^M |\check{\gamma}_i|$ , las trayectorias permanecerán en la bola cerrada de radio  $\varepsilon$ , de esta manera se garantiza la estabilidad  $\varepsilon$ -práctica global asintótica del sistema.

□

**Ejemplo 2.** Considere el sistema conmutado (3.1) donde  $x \in \mathbb{R}^2$ , con  $c_1 = [2, 1]^T$ ,  $c_2 = [-2, 3]^T$ ,  $c_3 = [-1, -2]^T$ . Si se escoge  $\varepsilon = 1$ , entonces  $\delta = \varepsilon/G$  donde:

$$G = 1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|c_i\|) G_1, \quad (3.14)$$

$$G_1 \triangleq \sum_{i=1}^M \left( \sum_{l=1}^{2n} \lambda_{l,i}^2 \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

y

$$\hat{e}_l = \sum_{i=1}^M \lambda_{l,i} c_i. \quad (3.16)$$

En dimensión dos,  $n = 2$  y  $M = 3$ , por tanto existen cuatro  $\hat{e}_l$  dados por  $\hat{e}_1 = [1, 0]^T$ ,  $\hat{e}_2 = [0, 1]^T$ ,  $\hat{e}_3 = [-1, 0]^T$ ,  $\hat{e}_4 = [0, -1]^T$  por lo que resolviendo (3.16) se tiene que:

$$\hat{e}_1 = \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_3$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2$$

$$\hat{e}_3 = 2/7c_2 + 3/7$$

$$\hat{e}_4 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_3$$

de aquí,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1} &= 2/3, & \lambda_{1,2} &= 0, & \lambda_{1,3} &= 1/3, \\ \lambda_{2,1} &= 1/4, & \lambda_{2,2} &= 1/4, & \lambda_{2,3} &= 0, \\ \lambda_{3,1} &= 0, & \lambda_{3,2} &= 2/7, & \lambda_{3,3} &= 3/7, \\ \lambda_{4,1} &= 1/3, & \lambda_{4,2} &= 0, & \lambda_{4,3} &= 2/3, \end{aligned}$$

lo que implica que  $G_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 2.0256$ , por consiguiente  $G = 1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|c_i\|) G_1 = 8.3034$ , de donde se sigue que  $\delta = \frac{1}{8.3034} = 0.1204$ . El resultado de aplicar la Ley de conmutación 2, se muestra en la Figura 3.6 donde se puede observar como las trayectorias son confinadas en una bola de tamaño  $\varepsilon$ , (la Figura 3.7, describe la señal de conmutación descrita por la Ley de conmutación 2.

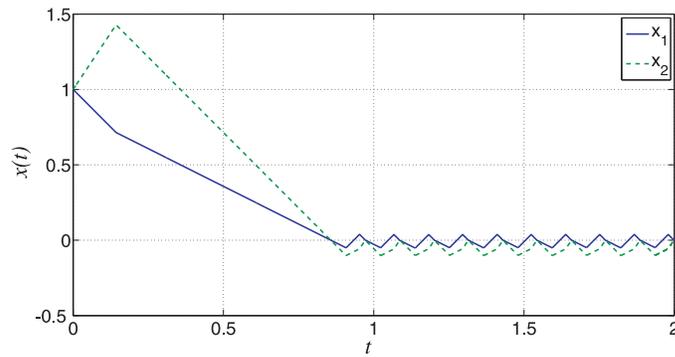


Figura 3.6: Trayectorias de  $x_1$  y  $x_2$  del Ejemplo 2.

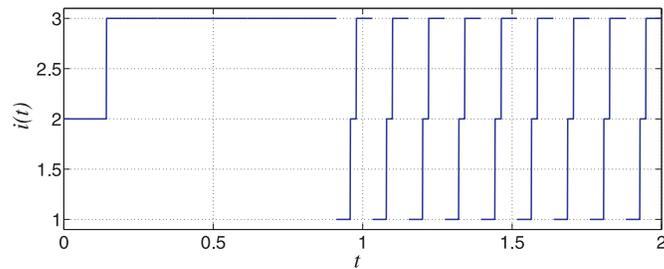


Figura 3.7: Señal de conmutación en el Ejemplo 2.

### **3.3. Resumen del Capítulo**

En este capítulo se presentaron dos leyes de conmutación, la Ley de conmutación 1 dependiente del tiempo, y la Ley de conmutación 2 dependiente del estado, dichas leyes serán empleadas en el capítulo siguiente para proponer leyes de conmutación dependientes del tiempo y del estado en el caso incierto.

## Capítulo 4

# Estabilización $\varepsilon$ -Práctica para Sistemas Conmutados Integrador Inciertos

En este capítulo se deriva una ley de conmutación para un sistema conmutado integrador incierto con conmutación dependiente del tiempo, en este caso se se proponen condiciones suficientes para garantizar que un sistema conmutado integrador incierto sea  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable y se obtienen explícitamente regiones de confinamiento. Además se propone una ley de conmutación dependiente del estado que evita castaño. Con este fin considere el sistema conmutado integrador incierto descrito por

$$\dot{x} = c_i + \Delta c_i \quad i \in I = \{1, \dots, M\} \quad (4.1)$$

donde  $c_i, \Delta c_i \in \mathbb{R}^n, i \in I$ , son vectores con coordenadas constantes, que cumplen con que

**H.1**  $\Delta c_i \neq 0$ ,

**H.2**  $c_i \neq 0$  y

**H.3**  $\|\Delta c_i\|_1 \leq \xi_i$ .

**Observación 21** *Dado que todas las normas definidas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, la convergencia de sucesiones de vectores en espacios de dimensión finita es independiente de la norma elegida. A partir de este capítulo empleamos la norma 1. Sin embargo, para evitar una notación pesada en lo sucesivo, no escribiremos el subíndice 1.*

Los vectores  $c_i$  constituyen la parte del sistema que se conoce, serán llamados en lo sucesivo vectores nominales; mientras que los vectores  $\Delta c_i$  representan la incertidumbre (*i.e. los vectores*

$\Delta c_i$  *son desconocidos* ), debido a lo anterior el sistema (4.1) se le llama sistema real o sistema incierto. Los rubros H.1 a H.3 constituyen las principales hipótesis que nos ayudarán a resolver el problema de estabilidad práctica de (4.1). H.1 es necesario para establecer que el problema de estabilidad no es trivial (*i.e.* es el caso donde no existe incertidumbre). H.2 es una condición necesaria para la estabilizabilidad práctica del sistema nominal (3.1) vea [9]. Finalmente, la tercera nos dice que la norma de la incertidumbre está acotada.

***Formulación del problema***

*Sean las hipótesis H.1-H.3 y sea el sistema nominal (3.1)  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable, encuentre las condiciones de existencia de una ley de conmutación tal que el sistema incierto (4.1) sea  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable.*

Observe que conforme lo visto en el Capítulo 3, una condición necesaria y suficiente para estabilizar al sistema (4.1) sería que cada conjunto de  $n$  vectores de  $c_i + \Delta c_i$  sea linealmente independiente. Sin embargo, esta condición no es verificable por la existencia de la incertidumbre y aún más, no es posible calcular los tiempos de permanencia en cada subsistema debido precisamente a que éstos son inciertos.

Una posible solución al problema formulado anteriormente, es usar al sistema nominal como el generador de las secuencias de conmutación. Sin embargo, mientras que el sistema nominal si puede llegar al origen, el sistema real (4.1) no necesariamente (una vez más debido a la existencia de la incertidumbre). En este punto dos preguntas son relevantes; luego de usar los tiempos de permanencia del sistema nominal en el sistema real (4.1) ¿a dónde se llega?, ¿es posible todavía llegar al origen? en otras palabras ¿es posible usar una conmutación basada en los tiempos de permanencia del sistema nominal para estabilizar práctica global asintóticamente el sistema incierto? En lo siguiente se responderán estas preguntas y para ello comenzaremos con el siguiente teorema, que nos dice que la secuencia basada en tiempos del nominal genera un sucesión decreciente y tendiente hacia el origen en el sistema real. Para mostrar esto haremos uso de los siguientes resultados.

**Observación 22** *Si el sistema nominal tiene  $M$  subsistemas, donde  $M > n + 1$ , entonces hay  $n + 1$  vectores donde cada conjunto de  $n$  vectores son linealmente independientes (vea Corolario 2).*

*Sea cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , debido al Lema 2,  $x_0 \in C_k$  para algún  $k, 1 \leq k \leq n + 1$ ,*

por consiguiente

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i c_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} \gamma_i c_i \quad \gamma_i \leq 0$$

donde  $\gamma_k = 0$ .

**Observación 23** El equilibrio  $x_e = 0$  del sistema lineal discreto

$$x(l+1) = Fx(l) \quad l \geq 0$$

es global uniforme asintóticamente estable si y sólo si la matriz  $F$  es **Schur estable**, es decir, todos los eigenvalores de  $F$  están dentro del círculo unitario. (Vea Teorema 7.5.5, página 288 de [25] )

## 4.1. Conmutación dependiente del tiempo en el caso incierto

**Teorema 4** Asuma que el sistema nominal (3.1) es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable y sea

$$\max_{1 \leq k \leq M} (\xi_k) < \min_{1 \leq k \leq M} \left\{ \frac{1}{\|A_k^{-1}\|} \right\} \quad (4.2)$$

donde  $A_k \triangleq [c_1 \ \cdots \ c_{k-1} \ c_{k+1} \ \cdots \ c_M]$ , entonces existe una ley de conmutación dependiente del tiempo obtenida a partir del sistema nominal (3.1) tal que el sistema incierto (4.1) es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable.

**Demostración.** Primero construimos la siguiente ley de conmutación basada en los tiempos de permanencia del sistema nominal, de la siguiente manera.

**Ley de conmutación 3** (*Ley de conmutación dependiente del tiempo para el sistema incierto calculada usando el sistema nominal*)

**Paso 1** Se inicia con  $t_r = t_0$  y  $x_r = x_0$ .

**Paso 2** En vista de la Observación 22, se resuelve la siguiente ecuación:

$$x_r = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i c_i + \sum_{i=k+1}^M \gamma_i c_i \quad \gamma_i \leq 0$$

Observe que la existencia de los  $\gamma_i \leq 0$  está garantizada por la propiedad de estabilizabilidad práctica del sistema nominal. Aún más si se usan los  $|\gamma_i|$   $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, M$  como tiempos de permanencia del sistema nominal en él mismo, es claro que se llegaría al origen. Por otro lado, si se usan estos en el sistema real o incierto (4.1) se obtiene lo siguiente:

Denotando  $x_i \triangleq x(t_i)$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + (t_1 - t_0)(c_1 + \Delta c_1) = x_r + |\gamma_1|(c_1 + \Delta c_1) \\ x_2 &= x_1 + (t_2 - t_1)(c_2 + \Delta c_2) = x_r + |\gamma_1|(c_1 + \Delta c_1) + |\gamma_2|(c_2 + \Delta c_2) \\ &\vdots \\ x_k &= x_r + \sum_{i=1}^{k-1} |\gamma_i|(c_i + \Delta c_i) \\ &\vdots \\ x_M &= x_r + \sum_{i=1}^{k-1} |\gamma_i|(c_i + \Delta c_i) + \sum_{i=k+1}^M |\gamma_i|(c_i + \Delta c_i) \end{aligned}$$

De lo anterior es posible ver que

$$x_M = \sum_{i=1}^{k-1} |\gamma_i| \Delta c_i + \sum_{i=k+1}^M |\gamma_i| \Delta c_i \quad (4.3)$$

**Paso 3** Se define  $t_r = t_M$  y  $x_r = x_M$  y se repiten los pasos 2-3

Usando el procedimiento anterior es posible generar una sucesión de estados de reinicio dados

por:

$$x_0, x_M, x_{2M}, x_{3M}, \dots \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

**Observación 24** Note que si  $x_0 \in C_k$

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{l=1}^{k-1} \gamma_l c_l + \sum_{l=k+1}^M \gamma_l c_l & \gamma_l \leq 0 \\ &= A_k \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{k-1} \\ \gamma_{k+1} \\ \vdots \\ \gamma_M \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $A_k \triangleq [c_1 \ \dots \ c_{k-1} \ c_{k+1} \ \dots \ c_n]$ . Denote  $\vec{\gamma}_k \triangleq [\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_M]^T$ , entonces se tiene que

$$\vec{\gamma}_k = A_k^{-1} x_0. \quad (4.4)$$

Por otro lado en vista de (4.3)

$$\begin{aligned} x_M &= \sum_{i=1}^{k-1} |\gamma_i| \Delta c_i + \sum_{i=k+1}^M |\gamma_i| \Delta c_i \\ &= \begin{bmatrix} \Delta c_1 & \dots & \Delta c_{k-1} & \Delta c_{k+1} & \dots & \Delta c_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\gamma_1| \\ \vdots \\ |\gamma_{k-1}| \\ |\gamma_{k+1}| \\ \vdots \\ |\gamma_M| \end{bmatrix}, & |\gamma_i| = -\gamma_i \\ &= \begin{bmatrix} -\Delta c_1 & \dots & -\Delta c_{k-1} & -\Delta c_{k+1} & \dots & -\Delta c_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{k-1} \\ \gamma_{k+1} \\ \vdots \\ \gamma_M \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sea  $\Delta B_k \triangleq [ -\Delta c_1 \quad \cdots \quad -\Delta c_{k-1} \quad -\Delta c_{k+1} \quad \cdots \quad -\Delta c_M ]$ , se tiene que

$$x_M = \Delta B_k \vec{\gamma}_k.$$

Luego, por (4.4),

$$x_M = \Delta B_k A_k^{-1} x_0.$$

Reiniciado el procedimiento de la Ley de conmutación 3 en el Paso 2, si  $x_M \in C_j$ ,  $j \neq k$ , ahora resolvemos

$$x_M = \sum_{i=1}^{j-1} {}^1\gamma_i c_i + \sum_{i=j+1}^M {}^1\gamma_i c_i \quad {}^1\gamma_i \leq 0,$$

donde  ${}^1\gamma_i$  se usa para denotar los tiempos de permanencia descritos por el primer estado de reinicio, de aquí que

$${}^1\vec{\gamma}_j = A_j^{-1} x_M. \quad (4.5)$$

y

$$x_{2M} = \Delta B_j A_j^{-1} x_M.$$

⋮

En general, si los tiempos de reinicio son denotados como  $x(l) = x_{lM}$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$ , entonces si  $x(l) \in C_k$ , se tiene que

$$\boxed{x(l+1) = \Delta B_k A_k^{-1} x(l)} \quad k \in \{1, \dots, M\} \quad (4.6)$$

**Observación 25** Note que si los puntos de la sucesión transcurren en un mismo cono  $C_k$  entonces de la Observación 17 es suficiente con asegurar que  $\tilde{A}_k \triangleq \Delta B_k A_k^{-1}$  es Schur estable para probar la atractividad global. Sin embargo, no es el único caso ya que en lo general podemos terminar en un cono diferente.

Con el fin de garantizar que el sistema (4.6) es global asintóticamente estable primero nos aseguraremos que las matrices  $\Delta B_k A_k^{-1}$  son Schur estables.

$$\|\Delta B_k\| = \max_{1 \leq i \leq M} \{\|\Delta c_i\|\} \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$$

Además, como  $\|\Delta c_i\| \leq \xi_i$

$$\|\Delta B_k\| \leq \max_{1 \leq i \leq M} \{\xi_i\} \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$$

Luego por la hipótesis (4.2), tenemos que  $\max_{1 \leq i \leq M} \{\xi_i\} < \min_{1 \leq i \leq M} \left\{ \frac{1}{\|A_k^{-1}\|} \right\}$ , por consiguiente

$$\|\Delta B_k\| < \frac{1}{\|A_k^{-1}\|}, \quad \forall k \in \{1, \dots, M\},$$

es decir,

$$\|\Delta B_k\| \|A_k^{-1}\| < 1. \quad (4.7)$$

Mas aún, el radio espectral de una matriz está acotado por su norma (vea [26], página 18) por consiguiente, si  $\lambda_i(\Delta B_k A_k^{-1})$ ,  $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, M$  denotan los valores propios de  $\Delta B_k A_k^{-1}$

$$\max_{1 \leq i \leq M} \{|\lambda_i(\Delta B_k A_k^{-1})|\} < \|\Delta B_k A_k^{-1}\|.$$

Finalmente, como la norma de un producto de matrices siempre está acotada por el producto de sus normas, se tiene que

$$\|\Delta B_k A_k^{-1}\| < \|\Delta B_k\| \|A_k^{-1}\|,$$

de aquí que

$$\max_{1 \leq i \leq M} \{|\lambda_i(\Delta B_k A_k^{-1})|\} < \|\Delta B_k\| \|A_k^{-1}\|.$$

Por consiguiente, de (4.7) se sigue que

$$\max_{1 \leq i \leq M} \{|\lambda_i(\Delta B_k A_k^{-1})|\} < 1.$$

Luego entonces, las matrices  $\Delta B_k A_k^{-1}$  son Schur estables.

Con el fin de probar la estabilidad asintótica de (4.6), considere la siguiente función definida positiva  $V(x_l) = x_l^T x_l$ .

En lo siguiente se mostrará que si en cualesquiera tiempos consecutivos discretos se satisface

$$V(l+1) - V(l) < 0.$$

donde  $V(l+1) = V(x_{l+1})$  y  $V(l) = V(x_l)$  entonces (4.6) es asintóticamente estable, para ello considere lo siguiente:

$$V(l+1) - V(l) = x_{l+1}^T x_{l+1} - x_l^T x_l.$$

Luego por el mapa (4.6), se tiene que

$$V(l+1) - V(l) = x_l^T \tilde{A}_k^T \tilde{A}_k x_l - x_l^T x_l,$$

donde  $\tilde{A}_k = \Delta B_k A_k^{-1}$ . Ya que  $x^T x = \|x\|^2$  (Vea [27], pag. 15), observe que

$$\begin{aligned} x_l^T \tilde{A}_k^T \tilde{A}_k x_l &= \|\tilde{A}_k x_l\|^2 \\ &\leq \|\tilde{A}_k\|^2 \|x_l\|^2. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$V(l+1) - V(l) \leq (\|\tilde{A}_k\|^2 - 1) \|x_l\|^2 \quad (4.8)$$

Además de (4.7) se puede concluir que  $\|\tilde{A}_k\| < 1$ , de donde se sigue que

$$V(l+1) - V(l) < 0.$$

Además, por (4.8), existe  $\nu > 0$  tal que

$$V(l+1) - V(l) \leq -\nu \|x_l\|^2. \quad (4.9)$$

De lo anterior se deduce que la sucesión  $V(l)$  es estrictamente decreciente y acotada inferiormente por cero (debido a que es una función positiva definida), entonces existe un número  $c \geq 0$ , tal que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} V(l) = c.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= c - c = \lim_{l \rightarrow \infty} V(l+1) - \lim_{l \rightarrow \infty} V(l) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} (V(l+1) - V(l)) \\ &\leq -\nu \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_l\|^2 \quad (\text{Por la desigualdad (4.9)}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Observe que como se ha acotado por arriba y por abajo por cero, de lo anterior se concluye que  $\lim_{l \rightarrow \infty} \|x_l\|^2 = 0$ , lo que implica la estabilidad asintótica del origen de (4.6).

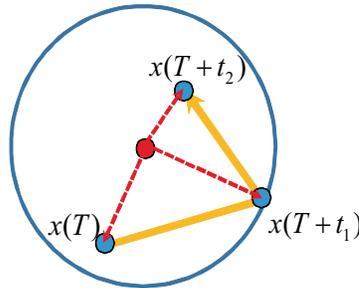
De acuerdo a la Definición 5 ahora debemos mostrar que existe un tiempo  $T$  tal que  $\|x(t)\| < \varepsilon$   $\forall t > T$  esto se conseguirá de la siguiente manera. Está claro que debido a que el origen del sistema conmutado (4.6) es asintóticamente estable, existe un tiempo  $T$  tal que  $\|x(T)\| < \delta$ . Si en este punto se demuestra estabilidad  $\varepsilon$ -práctica, se demostraría  $\varepsilon$ -atractividad del origen y al mismo

tiempo estabilidad  $\varepsilon$ -práctica asintótica. Con esta idea en mente, considere que  $\|x(T)\| < \delta$  y observe que sin pérdida de generalidad el análisis se puede hacer asumiendo que las condiciones iniciales se encuentran en el cono  $C_{n+1}$ ; se pueden usar los mismos argumentos para hacer un análisis equivalente en los otros conos.

Primero estableceremos una cota para  $\|x(t)\|$  transcurrido el tiempo  $\sum_{i=1}^n |\gamma_i|$ . Como veremos a continuación, es posible establecer tal cota de la siguiente manera

$$\|x(t)\| \leq \|x(T)\| + \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \|c_i + \Delta c_i\|.$$

**Observación 26** Note que es posible acotar la trayectoria de sistema en el intervalo de tiempo  $[T, T + t_n)$ , por  $\mu$  donde  $\mu = \max\{\|x(T)\|, \|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}$ , (ver Figura 4.1).



$$\|x(t)\| \leq \max\{\|x(T)\|, \dots, \|x(T+t_2)\|\} \quad t \in [T, T+t_2)$$

Figura 4.1: Una cota para  $x(t)$  en el intervalo  $[T, T + t_n)$ , en dimensión 2, (Caso incierto).

De la Observación 26, los siguientes casos son posibles:

**Caso 1** ( $\mu = \|x(T)\|$ ), el cual implica que

$$\|x(t)\| \leq \|x(T)\|$$

**Caso 2** ( $\mu = \|x(T + t_1)\|$ ), el cual implica que

$$\|x(t)\| \leq \|x(T)\| + |\gamma_1| \|c_1 + \Delta c_1\|$$

⋮

**Caso n+1** ( $\mu = \|x(T + t_n)\|$ ), el cual implica que

$$\|x(t)\| \leq \|x(T)\| + \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \|c_i + \Delta c_i\|$$

Note que la cota en el caso  $n + 1$  es más grande que la cota en todos los casos anteriores, por consiguiente para  $t \in [T, T + t_n)$  se tiene que

$$\|x(t)\| \leq \|x(T)\| + \sum_{i=1}^n \|c_i + \Delta c_i\| |\gamma_i|$$

Recuerde que  $x(T) \in B[0, \delta]$ ,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \delta + \sum_{i=1}^n \|c_i + \Delta c_i\| |\gamma_i| \\ &\leq \delta + \max_{1 \leq i \leq n} (\|c_i + \Delta c_i\|) \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \\ &\leq \delta + \max_{1 \leq i \leq n} (\|c_i\| + \|\Delta c_i\|) \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \\ &\leq \delta + \max_{1 \leq i \leq n} (\|c_i\| + \xi_i) \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \end{aligned}$$

Observe que, de las desigualdades en (3.11), se tiene que  $\sum_{i=1}^n |\gamma_i| \leq \delta G_1$ , por consiguiente

$$\|x(t)\| \leq \delta \left( 1 + \max_{1 \leq i \leq n} (\|c_i\| + \xi_i) \cdot G_1 \right).$$

Luego definiendo  $\hat{G} = 1 + \max_{1 \leq i \leq n} (\|c_i\| + \xi_i) \cdot G_1$ , para  $\delta = \varepsilon / \hat{G}$ ,  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [T, T + t_n)$ .

Hasta aquí se ha garantizado el confinamiento en la bola de tamaño  $\varepsilon$  para el primer ciclo de conmutación luego de haber entrado a la bola de tamaño  $\delta$ . Aplicando nuevamente y de manera indefinida la ley de conmutación 3, se puede garantizar que  $\|x(t)\| \leq \varepsilon \forall t > T$ . Observe que cada vez que se repite el proceso, se encuentra un sólo  $\delta$  descrito de la siguiente manera:  $\delta = \varepsilon / (1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|c_i\| + \xi_i) \cdot G_1)$ , (vea la siguiente observación).

□

**Observación 27** Note que  $G_1$  sólo depende de  $\lambda_{l,i}$ , ver (3.13), los cuales se derivan de las expresiones de  $\hat{e}_l$ ,  $l = 1, \dots, 2M$ , en (3.6). Más aún, los  $\hat{e}_l$  no varían, lo que hace que los  $\lambda_{l,i}$  tampoco varíen. De aquí que  $\delta$  se puede usar para garantizar que  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  para  $\forall t > T$ .

**Ejemplo 3.** Considere el sistema conmutado (4.1) donde  $x \in \mathbb{R}^2$ , con  $c_1 = [2, 1]^T$ ,  $c_2 = [-2, 3]^T$ ,  $c_3 = [-1, -2]^T$ . Primero verificaremos que las cotas de las incertidumbres satisfagan la condición del Teorema 4, esto es

$$\max_{1 \leq k \leq M} (\xi_k) < \min_{1 \leq k \leq M} \left\{ \frac{1}{\|A_k^{-1}\|} \right\} = 1,$$

de aquí que se puede considerar que  $\xi_i = 0.98$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Algunos casos de incertidumbre que satisfacen  $\|\Delta c_i\| < 0.98$  son por ejemplo  $\Delta c_1 = -[0.5, 0]^T$ ,  $\Delta c_2 = -[0, -0.5]^T$  y  $\Delta c_3 = -[0.5, 0]^T$ . Si se escoge  $\varepsilon = 1$ , entonces  $\delta = \varepsilon/\hat{G}$  donde:

$$\hat{G} = 1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|c_i\| + \xi_i) G_1, \quad (4.10)$$

$$G_1 \triangleq \sum_{i=1}^M \left( \sum_{l=1}^{2n} \lambda_{l,i}^2 \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

y

$$\hat{e}_l = \sum_{i=1}^M \lambda_{l,i} c_i. \quad (4.12)$$

En dimensión dos,  $n = 2$  y  $M = 3$ , por tanto existen cuatro  $\hat{e}_l$  dados por  $\hat{e}_1 = [1, 0]^T$ ,  $\hat{e}_2 = [0, 1]^T$ ,  $\hat{e}_3 = [-1, 0]^T$ ,  $\hat{e}_4 = [0, -1]^T$  por lo que resolviendo (4.12) se tiene que:

$$\hat{e}_1 = \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_3$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2$$

$$\hat{e}_3 = 2/7c_2 + 3/7$$

$$\hat{e}_4 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_3$$

de aquí

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1} &= 2/3, & \lambda_{1,2} &= 0, & \lambda_{1,3} &= 1/3, \\ \lambda_{2,1} &= 1/4, & \lambda_{2,2} &= 1/4, & \lambda_{2,3} &= 0, \\ \lambda_{3,1} &= 0, & \lambda_{3,2} &= 2/7, & \lambda_{3,3} &= 3/7, \\ \lambda_{4,1} &= 1/3, & \lambda_{4,2} &= 0, & \lambda_{4,3} &= 2/3, \end{aligned}$$

lo que implica que  $G_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 2.0256$ , por consiguiente  $\hat{G} = 1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|c_i\| + \xi_i) G_1 = 10.2886$ , de donde se sigue que  $\delta = \frac{1}{10.286} = 0.0972$ . El resultado de aplicar la Ley de conmutación 3, se muestra en la Figura 4.2 donde se puede observar como el origen es  $\varepsilon$ -atractivo y  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable (La señal de conmutación descrita por la Ley de conmutación 3 se puede observar en la Figura 4.3).

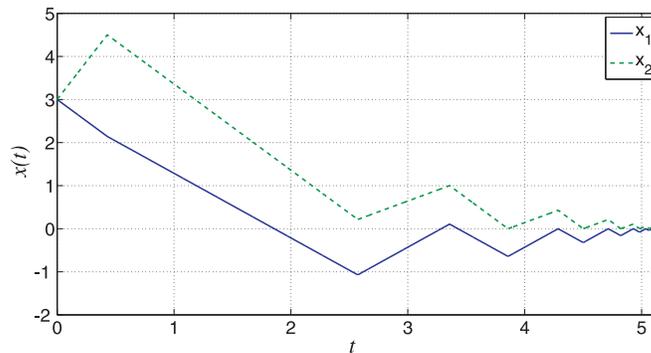


Figura 4.2: Evolución del sistema conmutado en el Ejemplo 3. Observe que los tiempos de conmutación tienden a cero conforme el tiempo avanza

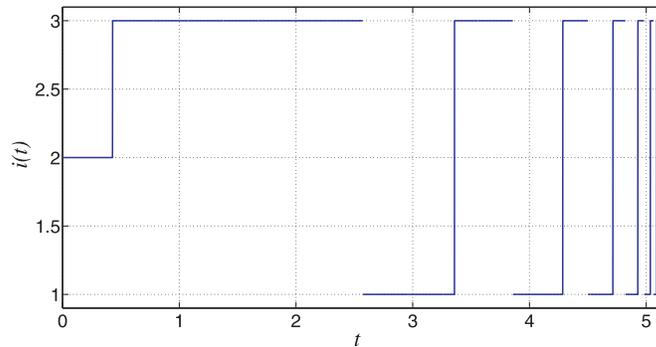


Figura 4.3: Señal de conmutación en el Ejemplo 3. Aquí se puede observar como se presenta el fenómeno llamado castaño.

**Observación 28** *Del ejemplo anterior es posible observar que cerca del origen la estrategia de conmutación anterior tiene castaño, por lo que es necesario cambiar la ley de conmutación para que las trayectorias estén, por ejemplo, en una vecindad del origen de tamaño  $\varepsilon$ . Con esta idea en mente se propone la alternancia entre dos leyes.*

**Ley de conmutación 4** *Se usa la Ley de conmutación 3 y una vez que se llegue a la bola de tamaño  $\delta$  se continuará por el mismo subsistema hasta que la trayectoria salga de ésta. Hecho esto, se vuelve a aplicar la Ley de conmutación 3 para caer nuevamente dentro de la bola de tamaño  $\delta$  y así sucesivamente. Lo anterior no cambia las propiedades de estabilidad de (4.1).*

**Ejemplo 4** *Considere el sistema (4.1) donde*

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y donde  $\xi_1 = 0.18$ ,  $\xi_2 = 0.2$ ,  $\xi_3 = 0.15$  y  $\xi_4 = 0.19$  satisfacen la hipótesis del Teorema 4, es decir,  $\max_{1 \leq i \leq 4} \{\xi_i\} < 0.25$ . Algunos casos de incertidumbres acotadas por las cotas fijadas anteriormente son por ejemplo  $\Delta c_1 = (-0.1 \ 0.1 \ -0.05)^T$ ,  $\Delta c_2 = (0 \ 0 \ -0.2)^T$ ,  $\Delta c_3 = (-0.1 \ -0.1 \ 0)^T$  y  $\Delta c_4 = (-0.1 \ 0 \ -0.15)^T$ . Si se escoge  $\varepsilon = 1$ , entonces  $\delta = \varepsilon/\hat{G}$  donde:

$$\hat{G} = 1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|c_i\|) G_1, \quad (4.13)$$

$$G_1 \triangleq \sum_{i=1}^M \left( \sum_{l=1}^{2n} \lambda_{l,i}^2 \right)^{1/2} \quad (4.14)$$

y

$$\hat{e}_l = \sum_{i=1}^M \lambda_{l,i} c_i. \quad (4.15)$$

En dimensión tres  $n = 3$  y  $M = 4$ , por tanto existen seis  $\hat{e}_l$  dados por  $\hat{e}_1 = [1, 0, 0]^T$ ,  $\hat{e}_2 = [0, 1, 0]^T$ ,  $\hat{e}_3 = [0, 0, 1]^T$ ,  $\hat{e}_4 = [-1, 0, 0]^T$ ,  $\hat{e}_5 = [0, -1, 0]^T$ ,  $\hat{e}_6 = [0, 0, -1]^T$  por lo que usando (4.15) se tiene que:

$$\hat{e}_1 = c_1 + c_3 + 2c_4$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_4$$

$$\hat{e}_3 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_3$$

$$\hat{e}_4 = c_2 + c_3 + c_4$$

$$\hat{e}_5 = c_3 + c_4$$

$$\hat{e}_6 = c_4$$

de aquí,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1} &= 1, & \lambda_{1,2} &= 0, & \lambda_{1,3} &= 1, & \lambda_{1,4} &= 2, \\ \lambda_{2,1} &= 1/2, & \lambda_{2,2} &= 1/2, & \lambda_{2,3} &= 0, & \lambda_{2,4} &= 1/2, \\ \lambda_{3,1} &= 1/3, & \lambda_{3,2} &= 1/3, & \lambda_{3,3} &= 2/3, & \lambda_{3,4} &= 0, \\ \lambda_{4,1} &= 0, & \lambda_{4,2} &= 1, & \lambda_{4,3} &= 1, & \lambda_{4,4} &= 1, \\ \lambda_{5,1} &= 0, & \lambda_{5,2} &= 0, & \lambda_{5,3} &= 1, & \lambda_{5,4} &= 1, \\ \lambda_{6,1} &= 0, & \lambda_{6,2} &= 0, & \lambda_{6,3} &= 0, & \lambda_{6,4} &= 1, \end{aligned}$$

lo que implica que  $G_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = 6.8818$ . Por otro lado  $\hat{G} = 1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|c_i\| + \xi_i) = 14.1584$ , lo que implica que  $\delta = \frac{1}{14.1584}$ . Sea  $x_0 = (1 \ 1 \ 1)^T$ , en (Fig. 4.4), se puede observar que las trayectorias permanecen confinadas en la bola  $B[0, \varepsilon]$  y sin castaño bajo la señal de conmutación descrita por la ley de conmutación 4 (vea Fig. 4.5).

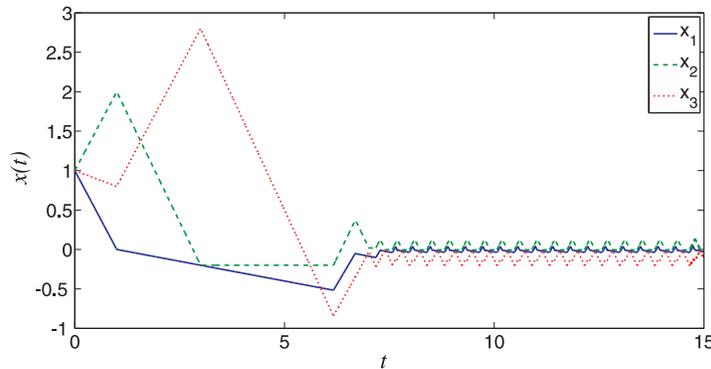


Figura 4.4: Evolución en el tiempo  $x$  para el Ejemplo 4.

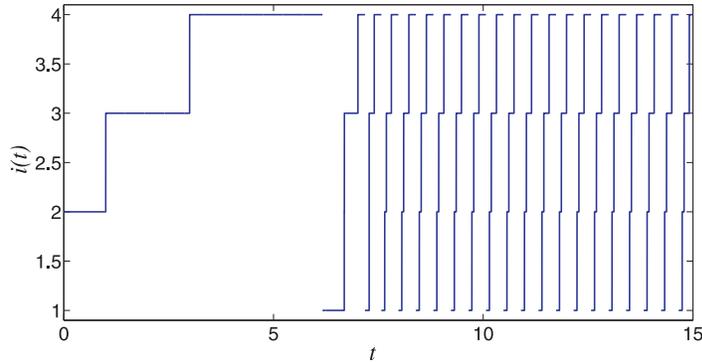


Figura 4.5: Señal de conmutación, descrita por la Ley de conmutación 4 para el Ejemplo 4.

## 4.2. Conmutación dependiente del estado en el caso incierto

En el Capítulo 3 se ha mostrado como una ley de conmutación dependiente de los estados puede estabilizar práctica y asintóticamente el origen del sistema conmutado integrado cuando no hay incertidumbre. Sin embargo, para proponer una ley de conmutación dependiente de los estados en sistemas conmutados inciertos es necesario mostrar que cualquier condición inicial puede ser expresada como una combinación cónica de los vectores  $-(c_1 + \Delta c_1)$ ,  $-(c_2 + \Delta c_2) \cdots - (c_{k-1} + \Delta c_{k-1})$ ,  $-(c_{k+1} + \Delta c_{k+1}) \cdots - (c_{n+1} + \Delta c_{n+1})$ . Un primer hecho que es importante hacer notar, es que en presencia de incertidumbre, los conos en el sistema incierto son desconocidos, es decir, las superficies de conmutación descritas por las fronteras de los conos son inciertas, por consiguiente no es posible usar directamente la estrategia de conmutación como en el Criterio 1. Una primera idea para resolver el problema es utilizar la partición del sistema nominal en el sistema incierto; sin embargo, se puede ver que si se utiliza el sistema nominal para definir la partición puede ocurrir castaño. El castaño sucede cuando las trayectorias del sistema real alcanzan las fronteras de los conos nominales, detonando una conmutación y modificando el comportamiento del sistema real de tal manera que las trayectorias regresan repetidamente a esa frontera. Esto se verá más claro en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5** Considere el sistema conmutado descrito en el Ejemplo 3. El resultado de usar la partición del nominal y la Ley de conmutación 2 descrita por el Criterio 1 se muestra en la parte superior de la Figura 4.6 para condiciones iniciales en cada cono  $C_k$ . Sin embargo, si se hace un acercamiento del rectángulo mostrado en la figura de arriba (vea la parte de abajo de la Figura 4.6), se puede ver que el sistema evoluciona indefinidamente en los modos consecutivos 2 y 3, haciendo que la trayectoria del sistema incierto que inicia en  $x_0 = [1, 1]^T$  se deslice a lo largo de la frontera descrita por el vector  $c_3$ . La Figura 4.7 describe la señal de conmutación descrita por la Ley de Conmutación 2, usando el Criterio 1, ésta muestra el fenómeno de conmutación rápida entre los modos 2 y 3.

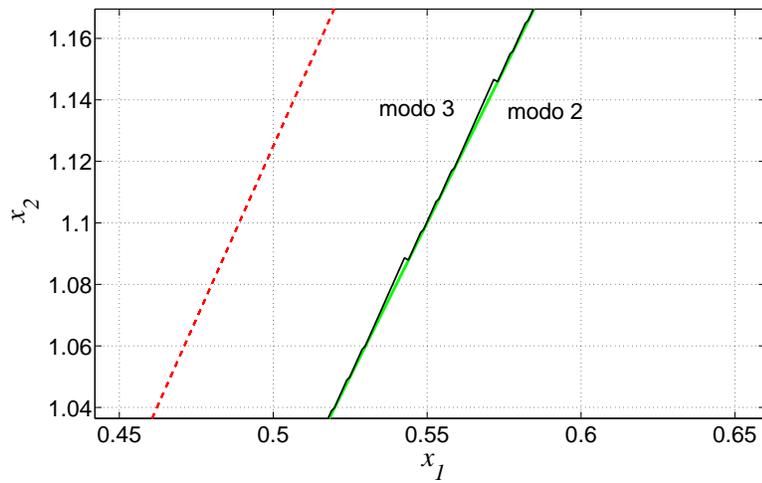
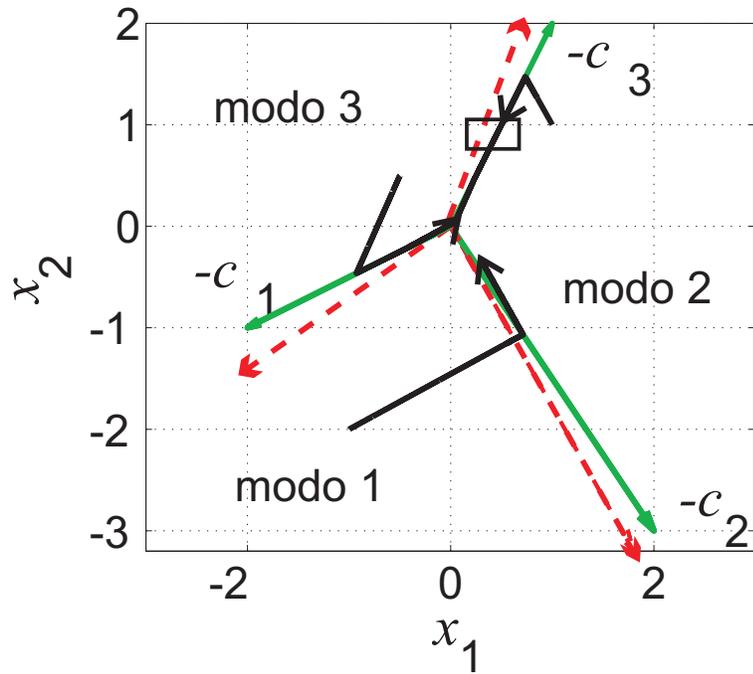


Figura 4.6: Trayectorias del sistema para el sistema incierto del Ejemplo 5 usando la partición nominal. Los conos descritos por los vectores discontinuos y continuos representan la partición incierta y la nominal respectivamente. Observe que las trayectorias tocan la frontera de un cono repetidamente.

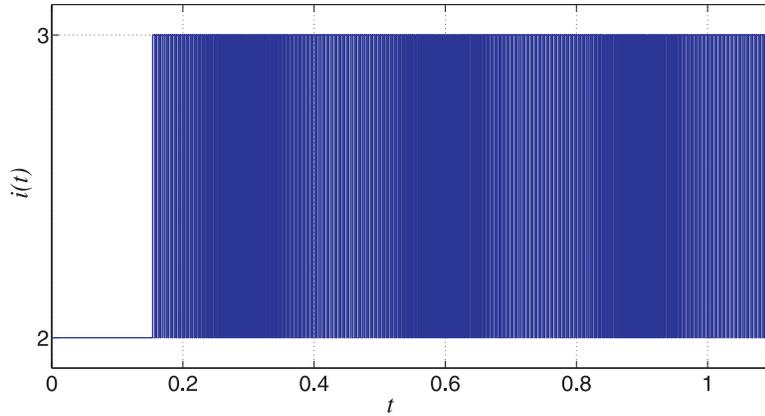


Figura 4.7: Señal de conmutación del Ejemplo 5 usando la partición nominal. Observe que ocurre una conmutación rápida , entre los modos 2 y 3.

**Observación 29** *Analizando el ejemplo anterior, se puede observar que la ley de conmutación define una y sólo una dirección en la que las trayectorias se acercan a la frontera del cono (i.e. en sentido contrario a las manecillas del reloj). Cuando las superficies de conmutación descritas por la partición nominal están a la izquierda del vector incierto, las trayectorias no pueden regresarse, por lo que no ocurre el castaño (ver Figura 4.8 (a)). Sin embargo, cuando las superficies de conmutación descritas por la partición nominal están a la derecha del vector incierto, las trayectorias pueden regresarse lo que produce el castaño (ver Figura 4.8 (b)). Lo anterior sugiere que para evitar el castaño, las superficies de conmutación se deben encontrar a la izquierda de los vectores inciertos, con este fin se describen nuevos vectores  $\bar{c}_i, i = 1, \dots, M$  dados por una rotación de los vectores nominales en sentido contrario a las manecillas del reloj (ver Figura 4.8 (c)).*

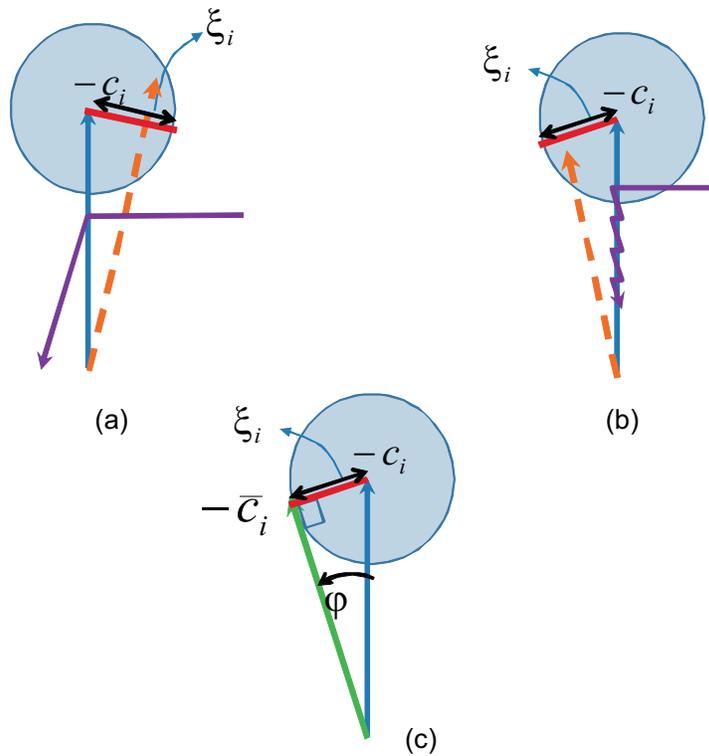


Figura 4.8: Una nueva partición.

Con el fin de evitar esta conmutación rápida, se define una nueva partición del espacio de estados en conos  $\bar{C}_k$  generados por los vectores  $-\bar{c}_1, \dots, -\bar{c}_{n+1}$ . En las siguientes subsecciones (Subsecs. 4.2.2 y 4.2.2) definimos los vectores  $-\bar{c}_j$  que generan una partición que evita la conmutación rápida. La idea detrás de la definición de estos vectores es la siguiente: Si la cota superior de la norma de la incertidumbre es interpretada como un ángulo  $\varphi$  y se utiliza este ángulo para rotar los vectores nominales  $c_i$ , entonces es posible proponer una ley de conmutación dependiente del estado que evite que el sistema conmute de manera rápida y se deslice a lo largo de las fronteras de los conos. Con las definiciones de conos de las próximas subsecciones, la ley de conmutación que se propone es la siguiente manera:

**Ley de conmutación 5** (*Ley de conmutación dependiente de estado*)

Sea  $\bar{C}_k$  el cono generado por todos los vectores excepto el  $k$ -ésimo vector, es decir, el cono generado por los vectores  $-\bar{c}_1, \dots, -\bar{c}_{k-1}, -\bar{c}_{k+1}, \dots, -\bar{c}_{n+1}$  definido como:

$$\bar{C}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \bar{\lambda}_1(-\bar{c}_1) + \dots + \bar{\lambda}_{k-1}(-\bar{c}_{k-1}) + \bar{\lambda}_{k+1}(-\bar{c}_{k+1}) + \dots + \bar{\lambda}_{n+1}(-\bar{c}_{n+1}), \bar{\lambda}_i \geq 0\}.$$

### Criterio 2

- Si  $x(t) \in \bar{C}_k$ , se activa el subsistema  $k + 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ .
- Si  $x(t) \in \bar{C}_{n+1}$ , se activa el subsistema 1.
- Si  $x(t) \in \bar{C}_k \cap \bar{C}_{k+1}$ , se activa el subsistema  $k + 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ .
- Si  $x(t) \in \bar{C}_{n+1} \cap \bar{C}_1$ , se activa el subsistema 1.

A continuación se encuentran los conos  $\bar{C}_k$  definidos por los vectores nominales  $\bar{c}_k$  en dimensión 2 y 3.

#### 4.2.1. $\bar{c}_i$ para $n = 2$

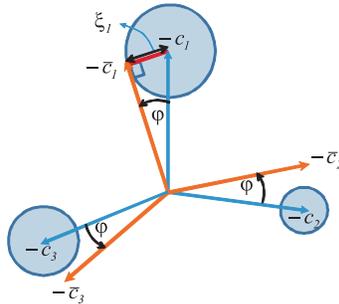


Figura 4.9: Diagrama esquemático de los vectores que definen la partición en el criterio 2. La cota superior incierta es usada para definir el ángulo de rotación  $\varphi$  del vector nominal  $-c_i$  para generar  $-\bar{c}_i$  para  $i = 1, \dots, n + 1$ .

Para obtener los vectores  $\bar{c}_j$  del Criterio 2, interpretemos la cota de la incertidumbre  $\xi_i$  como un ángulo. Con este fin definimos  $\varphi_i \triangleq \arcsen \frac{\xi_i}{\| -c_i \|}$  y  $\varphi \triangleq \max_i \{ \varphi_i \}$ , entonces podemos usar este ángulo para rotar el vector  $-c_i$  con el fin de obtener  $-\bar{c}_i$  (ver Figura 4.9). Observe que de acuerdo al Criterio 2, en este caso las trayectorias del sistema conmutado giran siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj. Con esta observación en mente, ahora es claro que

para evitar la zona de incertidumbre completamente, tenemos que rotar el vector nominal  $\bar{c}_i$  en sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$-\bar{c}_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} (-c_i)$$

de este modo los vectores  $-\bar{c}_i$  definen una partición nueva. Puesto que cada vector es rotado un ángulo descrito por la máxima cota de la incertidumbre en este caso el castaño o conmutación rápida será evitado a lo largo de las fronteras de los conos.

#### 4.2.2. $\bar{c}_i$ para $n = 3$

En  $\mathbb{R}^3$ , también podemos definir una partición nueva desarrollando rotaciones consecutivas en  $\mathbb{R}^3$ . Observe que al igual que en el caso de  $n = 2$ , en  $n = 3$ , el Criterio 2 define las trayectorias del sistema conmutado en un sentido fijo. En este caso, si se conceptualiza una esfera como generada por un radio con un giro doble (un primer giro de 360 grados y un segundo de 180), se necesitarían dos giros consecutivos de los vectores  $c_i$  para poder evitar la zona donde existe incertidumbre. El primer giro es exactamente el definido en  $n = 2$ , mientras que el segundo lo determina la dirección del negativo del otro vector que genera cada cono (recuerde que en  $n = 3$  cada cono está formado por 3 vectores).

Para establecer formalmente tales rotaciones, definimos una base ortonormal para cada superficie de conmutación descrita por el Criterio 1, dada por:

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{(-c_3) + (-c_4)}{\|(-c_3) + (-c_4)\|}, y_a = \frac{-\hat{c}_3(-c_4)}{\|-\hat{c}_3(-c_4)\|}, z_a = \frac{\hat{y}_a x_a}{\|\hat{y}_a x_a\|} \\ x_b &= \frac{(-c_1) + (-c_4)}{\|(-c_1) + (-c_4)\|}, y_b = \frac{-\hat{c}_1(-c_4)}{\|-\hat{c}_1(-c_4)\|}, z_b = \frac{\hat{y}_b x_b}{\|\hat{y}_b x_b\|} \\ x_c &= \frac{(-c_1) + (-c_2)}{\|(-c_1) + (-c_2)\|}, y_c = \frac{-\hat{c}_1(-c_2)}{\|-\hat{c}_1(-c_2)\|}, z_c = \frac{\hat{y}_c x_c}{\|\hat{y}_c x_c\|} \\ x_d &= \frac{(-c_2) + (-c_3)}{\|(-c_2) + (-c_3)\|}, y_d = \frac{-\hat{c}_2(-c_3)}{\|-\hat{c}_2(-c_3)\|}, z_d = \frac{\hat{y}_d x_d}{\|\hat{y}_d x_d\|} \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde  $\hat{p}$  se usa para denotar la matriz anti-simétrica generada por el vector  $p^T = [p_1, p_2, p_3]$ , de este modo  $p \times q = \hat{p}(q)$ . Note que la coordenada  $x_i$ ,  $i \in \{a, b, c, d\}$  es dada por la suma de los vectores que generan el plano que será rotado,  $y_i$  es ortogonal a tal plano y  $z_i$  es ortogonal a  $x_i$  y  $y_i$  (ver Figura 4.10).

Sean  $\varphi_i \triangleq \arcsen \frac{\xi_i}{\|c_i\|}$  y  $\varphi \triangleq \max_i \{\varphi_i\}$  definidos como se hizo anteriormente. Ahora, se propone desarrollar la rotación a través del eje  $z_i$  como sigue:

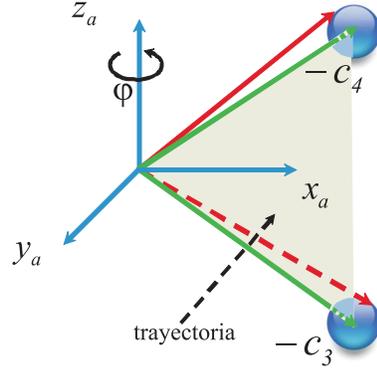


Figura 4.10: Base ortonormal definida en (4.16) cuando  $\iota = a$ .

$$R_{z_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi & 0 \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

En este punto es importante notar que, cuando no hay incertidumbre, si  $x(0) \in C_1$ , entonces el sistema se desenvuelve en el Modo 2 hasta que alcanza el plano generado por  $-c_3$  y  $-c_4$  para pasar al cono  $C_2$ . Sin embargo, considerando incertidumbre, las trayectorias del sistema pueden entrar y salir a través de cualquiera de las tres caras del cono. Para evitar esto, se propone una nueva partición dada por una doble rotación como se describe a continuación:

$$\begin{aligned} -\bar{c}_1 &= A_c^{-1} R_{z_c} A_c A_b^{-1} R_{z_b} A_b (-c_1) \\ -\bar{c}_2 &= A_d^{-1} R_{z_d} A_d A_c^{-1} R_{z_c} A_c (-c_2) \\ -\bar{c}_3 &= A_d^{-1} R_{z_d} A_d A_a^{-1} R_{z_a} A_a (-c_3) \\ -\bar{c}_4 &= A_b^{-1} R_{z_b} A_b A_a^{-1} R_{z_a} A_a (-c_4) \end{aligned}$$

donde  $A_i = [x_i \ y_i \ z_i]$  describe la transformación de coordenadas correspondiente.

De este modo, puesto que la incertidumbre es acotada, no importa donde estén las condiciones iniciales en el nuevo cono, la trayectoria saldrá a través de una sola cara evitando la posibilidad de que el chattering ocurra. Note que la generalización de la rotación puede ser desarrollada convenientemente definiendo la matriz de rotación (4.17) y bases ortonormales.

**Ejemplo 6** Considere el sistema (4.1) con

$$c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2.5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y considere que las cotas de las incertidumbres están dadas por  $\xi_1 = 0.2$ ,  $\xi_2 = 0.32$ ,  $\xi_3 = 0.46$ ,  $\xi_4 = 0.38$ , de aquí que  $\varphi = 0.1043$ , el cual nos permite definir una nueva partición dada por

$$-\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} -1.9946 \\ 0.0054 \\ -0.1428 \end{pmatrix}, \quad -\bar{c}_2 = \begin{pmatrix} -1.2516 \\ -2.8919 \\ -0.2655 \end{pmatrix},$$

$$-\bar{c}_3 = \begin{pmatrix} -1.5858 \\ -1.6432 \\ -3.9731 \end{pmatrix}, \quad -\bar{c}_4 = \begin{pmatrix} 2.0245 \\ 2.2545 \\ 2.2514 \end{pmatrix}$$

A partir de este momento podemos usar el Criterio 2 para estabilizar el sistema. Observe que debido a la presencia de incertidumbre y en contraste con el caso donde se conoce exactamente el modelo, el sistema no presenta castaño alrededor del origen, la razón es precisamente la presencia de incertidumbre.

La evolución del sistema se muestra en la figura 4.11 donde se puede ver que las trayectorias se contraen al origen y permanecen al rededor de la vecindad de tamaño  $\varepsilon$  (La señal de conmutación descrita por el Criterio 2 se puede observar en la Figura 4.12).

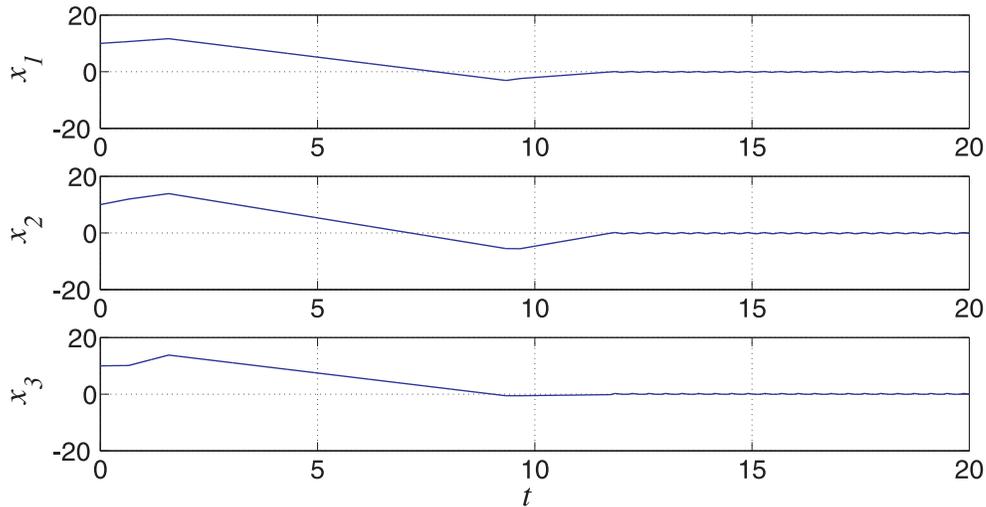


Figura 4.11: Evolución del Sistema 4.1 para parámetros en el Ejemplo 6, usando el Criterio 2.

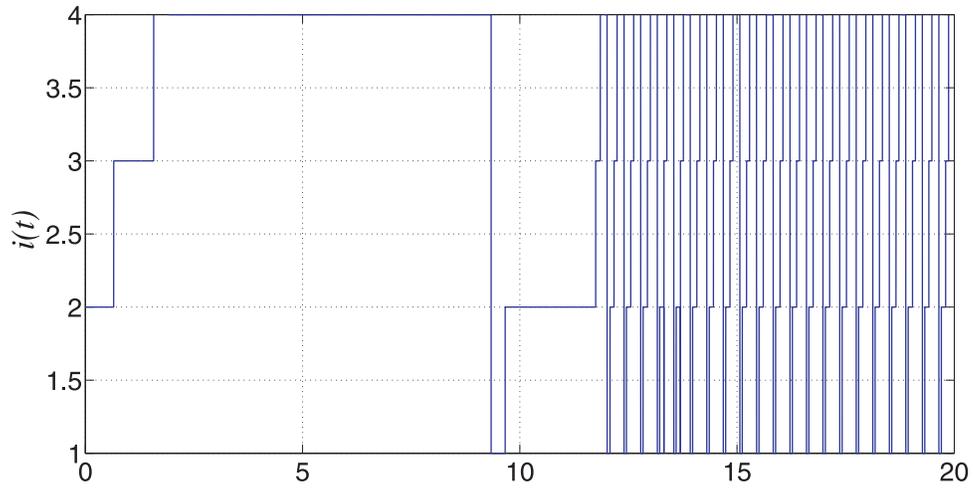


Figura 4.12: Señal de conmutación en el Ejemplo 6

### 4.3. Resumen del Capítulo

En este capítulo se estudio la estabilidad de una familia de leyes de conmutación dependientes del tiempo y se probó que el origen del sistema conmutado integrador incierto es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable bajo estas. Además se propuso una ley de conmutación dependiente del estado en dimensión 2 y 3 que evita el castaño a lo largo de las superficies de conmutación.

# Capítulo 5

## Observaciones sobre la Estabilización de Sistemas Conmutados Lineales y No Lineales Inciertos

En este capítulo, se mostrará como las leyes de conmutación obtenidas en el capítulo anterior pueden ser usadas para confinar sistemas conmutados lineales y no lineales inciertos alrededor del origen.

### 5.1. Sistemas conmutados lineales inciertos

Considere un sistema conmutado lineal incierto  $n$ -dimensional dado por los siguientes subsistemas:

$$\dot{x} = A_i x + b_i + \Delta A_i x + \Delta b_i, \quad (5.1)$$

donde  $\Delta A_i, A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b_i, \Delta b_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_i \neq 0$ ,  $\Delta b_i \neq 0$  y  $\|\Delta b_i\| \leq \xi_i$ .

Considere que el tiempo se divide en intervalos  $[\tau_k, \tau_{k+1})$ , donde  $\tau_k = t_{kM}$  y  $\tau_{k+1} = t_{(k+1)M}$ . Está claro que debido a que el término  $A_i x + \Delta A_i x$  es proporcional a  $x$ , existe una vecindad suficiente pequeña alrededor del origen tal que este término puede ser despreciable en comparación al término  $b_i + \Delta b_i$ . La pregunta que surge en este momento es ¿de qué tamaño es esa vecindad? ¿bajo qué condiciones esa vecindad es de tamaño  $\varepsilon$ ? En las siguientes líneas se intentará responder estas preguntas. Con este fin, considere además los sistemas auxiliares siguientes:

$$\dot{x}_a = b_i + \Delta b_i \quad (5.2)$$

con condición inicial  $x_a(\tau_k) = x(\tau_k)$  bajo la misma secuencia de  $x(t)$  y :

$$\dot{x}_b = A_i x_b + \Delta A_i x_b \quad (5.3)$$

con condición inicial  $x_b(\tau_k) = 0$  bajo la misma secuencia de  $x(t)$ .

**Teorema 5** *Asuma que el sistema nominal*

$$\dot{x}_a = b_i \quad (5.4)$$

*es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable y que se cumple*

$$\max_{1 \leq k \leq M} (\xi_k) < \min_{1 \leq k \leq M} \left\{ \frac{1}{\|B_k^{-1}\|} \right\} \quad (5.5)$$

*donde  $B_k \triangleq [b_1 \ \cdots \ b_{k-1} \ b_{k+1} \ \cdots \ b_M]$ , y*

$$\max_{1 \leq i \leq M} \{ \|A_i + \Delta A_i\| \} G_1 \bar{\varepsilon} < 1 \quad (5.6)$$

*para algún  $\bar{\varepsilon}$  donde  $G_1$  está dada por (3.13), entonces el sistema incierto (5.1) puede ser confinado dentro de una vecindad suficientemente pequeña del origen usando la Ley de conmutación 3 dependiente del tiempo.*

**Demostración.** La idea que se usará en esta demostración es la siguiente. Dado que la función  $\|A_i x_b + \Delta A_i x_b\| \approx 0$  cuando  $\|x_b\| \approx 0$ , existe una vecindad suficientemente pequeña alrededor del origen tal que el sistema conmutado lineal se comporta como un conmutado integrador. En lo siguiente se mostrará.

Por un lado, la condición  $\max_{1 \leq k \leq M} (\xi_k) < \min_{1 \leq k \leq M} \left\{ \frac{1}{\|B_k^{-1}\|} \right\}$ , asegura que la Ley de conmutación 3 estabiliza al sistema conmutado integrador incierto descrito por (5.2), de esta manera, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x_a(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

Por otro lado, para cualquier  $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ ,

$$\|x_b(t)\| \leq \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \|A_i x_b + \Delta A_i x_b\| d\tau.$$

Además, asumiendo que  $x_b(t) \in B[0, \bar{\varepsilon}]$ , dado que  $\tau_{k+1} - \tau_k = \sum_{i=1}^M |\gamma_i|$ , de (3.11) y (3.13), se tiene que

$$\|x_b(t)\| \leq \max_{i \in I} \{ \|A_i x_b + \Delta A_i x_b\| \} \cdot \sum_{i=1}^M |\gamma_i| < \max_{1 \leq i \leq M} \{ \|A_i + \Delta A_i\| \} \bar{\varepsilon} \delta G_1$$

$x_b \in B[0, \bar{\varepsilon}]$

Observe que  $\max_{1 \leq i \leq M} \{\|A_i + \Delta A_i\|\} \bar{\epsilon} \approx 0$  cuando  $\bar{\epsilon} \approx 0$ . Además, por la Condición (5.6), se tiene que

$$\max_{1 \leq i \leq M} \{\|A_i + \Delta A_i\|\} \bar{\epsilon} < \frac{1}{G_1}$$

por lo tanto  $x_b(t) \leq \delta$ . De aquí se sigue que existe un  $\epsilon_0 = \min\{\epsilon, \bar{\epsilon}\}$  tal que  $\|x(t)\| \leq \epsilon_0$  para todo  $t > 0$ ,

**Observación 30** Observe que la vecindad en la cual se pueden confinar las trayectorias del sistema (5.1) es de tamaño  $\epsilon_0 = \min\{\epsilon, \bar{\epsilon}\}$ , donde  $\epsilon$  es el parámetro de diseño para el sistema nominal (5.4) y  $\bar{\epsilon}$  satisface la condición (5.6).

Finalmente aplicando repetidas veces la Ley de conmutación 3 es posible permanecer en una vecindad del origen.

**Observación 31** Observe que la condición (5.6) puede interpretarse de dos maneras : i) restringe las matrices candidatas,  $A_i$  y  $\Delta A_i$ , que pueden usarse para un  $\bar{\epsilon}$  o ii) limita los valores de  $\bar{\epsilon}$  que pueden usarse. La última aseveración la podemos observar más claramente de la Ley de conmutación 3, donde cuando  $\bar{\epsilon} \approx 0$  entonces  $\sum_{i=1}^M |\gamma_i| \approx 0$  lo que implica que siempre podemos encontrar un  $\bar{\epsilon}$  suficientemente pequeño que cumpla con la desigualdad (5.6).

## Ejemplo Ilustrativo: Confinamiento

En esta sección ilustramos el resultado anterior en un problema de confinamiento. Este consiste en confinar las trayectorias alrededor del origen en una vecindad de tamaño  $\epsilon$ , esto se logrará usando la Ley de conmutación 3.

**Ejemplo 7** Considere el siguiente sistema conmutado lineal incierto (5.1) en dimensión 3 donde  $b_1 = [4, 0, 0]^T$ ,  $b_2 = [0, -3, 0]^T$ ,  $b_3 = [0, 0, -2]^T$ ,  $b_4 = [-4, 3, 2]^T$ . Sean  $\xi_1 = 0.7$ ,  $\xi_2 = 0.9$ ,  $\xi_3 = 1.33$ ,  $\xi_4 = 1.22$ , éstas cotas satisfacen la hipótesis del Teorema, es decir,  $\max_{1 \leq k \leq M} (\xi_k) < 0.6667$ . De aquí que se puede considerar cualquier vector incierto  $\Delta b_i$  donde  $\|\Delta b_i\| \leq \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Sea  $\epsilon = 1$ , siguiendo el procedimiento en los ejemplos anteriores, dado que

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{4} b_1$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_3 + \frac{1}{3}b_4$$

$$\hat{e}_3 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_4$$

$$\hat{e}_4 = \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_3 + \frac{1}{4}b_4$$

$$\hat{e}_5 = \frac{1}{3}b_2$$

$$\hat{e}_6 = \frac{1}{2}b_3$$

$G_1 = \sum_{i=1}^M \left( \sum_{l=1}^{2n} \lambda_{l,i}^2 \right)^{1/2} = 2.6034$  y  $\hat{G} = 1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|b_i\| + \xi_i) = 18.19$ . *Considerando*

$$A_1 = I_3, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -7 & -2 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A_1 = 0.1I_3, \Delta A_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 & 0 \\ 0.3 & 0 & -0.3 \\ -0.7 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}, \Delta A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}.$$

$\bar{\epsilon} = \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq M} \{\|A_i + \Delta A_i\|\}} G_1 = 0.1578$ , de aquí que para garantizar el confinamiento en la bola tamaño  $\epsilon_0 = \min\{\epsilon, \bar{\epsilon}\} = 0.1578$ , debemos considerar  $\delta = \epsilon_0 / \hat{G}$ . En Figura 5.1. Se puede ver que las trayectorias se contraen al origen y permanecen alrededor de este sin atravesar la bola de tamaño 0.1578. (La señal de conmutación descrita por la Ley de conmutación 3, se puede observar en la Figura 5.2).

## Ejemplo ilustrativo: Confinamiento alrededor de una trayectoria

En esta sección ilustramos los resultados de este capítulo en un problema de seguimiento de trayectorias. Este problema consiste en confinar las trayectorias del sistema alrededor de una vecindad de tamaño  $\epsilon_0$  de la trayectoria deseada. Esta trayectoria está por lo general parametrizada en tiempo.

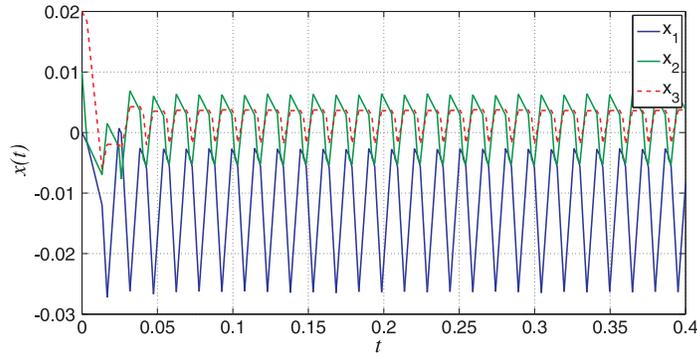


Figura 5.1: Evolución en el tiempo del sistema lineal conmutado incierto con  $x_0 = [0, 0.01, 0.02]$ . Ejemplo 7.

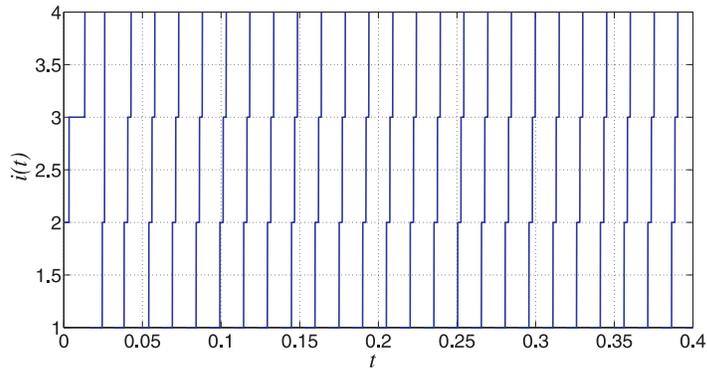


Figura 5.2: señal de conmutación en el Ejemplo 7.

**Ejemplo 8** Considere el sistema conmutado descrito por la siguiente ecuación en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\dot{y} = Ay + b_i + \Delta b_i \quad i \in 1, \dots, M \quad (5.7)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

y  $\Delta b_i$  vectores que satisfacen  $\|\Delta b_i\| \leq \xi_i$ , donde  $\xi_i$  satisfacen la condición (5.5) del Teorema, por ejemplo, considere que  $\xi_1 = 0.18$ ,  $\xi_2 = 0.2$ ,  $\xi_3 = 0.15$   $\xi_4 = 0.19$ . Considere que  $\varepsilon = 0.1$ .

Se desea diseñar una ley de conmutación tal que  $y(t)$  siga la dinámica del sistema continuo descrito por

$$\dot{z} = Az$$

esto es, nuestro objetivo de control es  $\|y(t) - z(t)\| \leq \varepsilon_0 \forall t \geq 0$ . Sea  $x(t) \triangleq y(t) - z(t)$  (con  $y(0) = z(0) = [0.2, 0.1, 0]^T$ ), el problema de seguimiento se puede convertir a un problema de estabilización conmutada del siguiente sistema

$$\dot{x} = f_i(x) + \bar{\Delta}f_i(x) = Ax + b_i + \Delta b_i \quad i \in 1, \dots, M$$

con  $x(0) = 0$ . Observe que  $\bar{\Delta}f_i(0) = \Delta b_i$  y  $f_i(0) = b_i$ . Por otro lado, de (3.6) se tiene que

$$\hat{e}_1 = 2b_1 + 2b_3 + 4b_4$$

$$\hat{e}_2 = b_1 + b_2 + b_4$$

$$\hat{e}_3 = 2/3b_1 + 2/3b_2 + 4/3b_3$$

$$\hat{e}_4 = 2b_2 + 2b_3 + 2b_4$$

$$\hat{e}_5 = 2b_3 + 2b_4$$

$$\hat{e}_6 = 2b_4;$$

por lo tanto  $G_1 = \sum_{i=1}^M (\sum_{l=1}^{2n} \lambda_{li}^2)^{1/2} = 13.7637$  y  $\hat{G} = 1 + \max_{1 \leq i \leq M} (\|b_i\| + \xi_i) = 15.6724$ . escogiendo  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\|A\|G_1} = 0.0806$ , se puede escoger  $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) = 0.0806$ , de aquí  $\delta = \frac{\varepsilon_0}{\hat{G}} = 0.0026$  garantiza el  $\varepsilon_0$ -confinamiento al rededor de la trayectoria deseada  $z(t)$ . ver Figura 5.3.

## 5.2. Sistemas conmutados no lineales inciertos

Considere un sistema conmutado no lineal incierto  $n$ -dimensional dado por los siguientes subsistemas:

$$\dot{x} = f_i(x) + \bar{\Delta}f_i(x) \quad i \in I = \{1, \dots, M\} \quad (5.8)$$

donde  $f_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\bar{\Delta}f_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones localmente Lipschitz continuas con  $\|\bar{\Delta}f_i(0)\| \leq \xi_i$ , y  $f_i(0) \neq 0$ ,  $\bar{\Delta}f_i(0) \neq 0$ , vectores constantes. Sea el sistema nominal asociado a (5.8)

$$\dot{x} = f_i(x) \quad i \in I = \{1, \dots, M\} \quad (5.9)$$

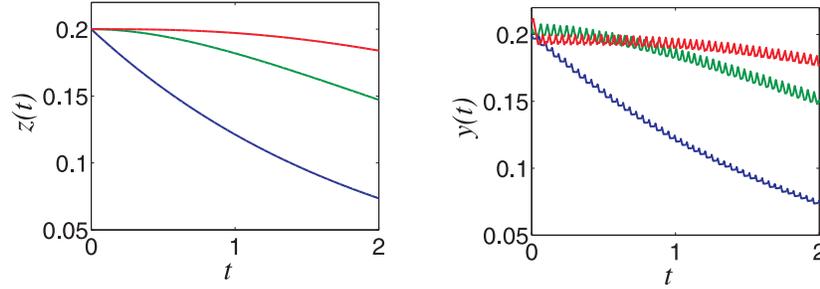


Figura 5.3: Trayectoria de seguimiento (izquierda) y evolución del sistema 5.7 (derecha).

Consideremos que el tiempo se divide en intervalos  $[\tau_k, \tau_{k+1})$  dados por los tiempos de reinicio de la Ley de conmutación 3 como en la sección anterior, considere los sistemas auxiliares dados por:

$$\dot{x}_a = f_i(0) + \bar{\Delta}f_i(0) \quad (5.10)$$

con condición inicial  $x_a(\tau_k) = x(\tau_k)$  bajo la misma secuencia de  $x(t)$ , y

$$\dot{x}_b = f_i(x_b) + \bar{\Delta}f_i(x_b) - f_i(0) - \bar{\Delta}f_i(0) = \Delta f_i(x_b) \quad (5.11)$$

con condición inicial  $x_b(\tau_k) = 0$  bajo la misma secuencia de  $x(t)$ .

**Teorema 6** *Asuma que el sistema nominal*

$$\dot{x}_a = f_i(0) \quad (5.12)$$

*es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable y que se cumple*

$$\max_{1 \leq k \leq M} (\xi_k) < \min_{1 \leq k \leq M} \left\{ \frac{1}{\|A_k^{-1}\|} \right\} \quad (5.13)$$

*donde  $A_k \triangleq [ f_1(0) \ \cdots \ f_{k-1}(0) \ f_{k+1}(0) \ \cdots \ f_M(0) ]$ , Considere además que:*

$$K(\bar{\varepsilon})G_1 < 1 \quad (5.14)$$

*donde*

$$K(\bar{\varepsilon}) \triangleq \max_{\substack{i \in I \\ x_b \in B[0, \bar{\varepsilon}]}} \{ \|\Delta f_i(x_b)\| \} \quad (5.15)$$

y donde  $G_1$  está dada por (3.13), entonces el sistema incierto (5.1) puede ser confiado dentro de una vecindad suficientemente pequeña del origen usando la Ley de conmutación 3 dependiente del tiempo.

***Demostración.***

Por un lado, por los resultados del Capítulo 4, la ley de conmutación 3 estabiliza  $\varepsilon$ -prácticamente (5.10), de aquí, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x_a(\tau_k)\| \leq \delta \Rightarrow \|x_a(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

Por otro lado, para cualquier  $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ ,

$$\|x_b(t)\| \leq \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \|\Delta f_i(x_b)\| d\tau.$$

Ahora, asumiendo que  $x_b(t) \in B[0, \bar{\varepsilon}]$  para todo  $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$\|x_b(t)\| \leq \max_{\substack{i \in I \\ x_b \in B[0, \bar{\varepsilon}]}} \{\|\Delta f_i(x_b)\|\} (\tau_{k+1} - \tau_k).$$

dado que

$$K(\bar{\varepsilon}) \triangleq \max_{\substack{i \in I \\ x_b \in B[0, \bar{\varepsilon}]}} \{\|\Delta f_i(x_b)\|\} \tag{5.16}$$

se tiene que

$$\|x_b(t)\| \leq K(\bar{\varepsilon}) \sum_{i=1}^M |\gamma_i| \leq K(\bar{\varepsilon}) \delta G_1$$

Ya que  $f_i(x)$  y  $\bar{\Delta}f_i(x)$  son continuas localmente Lipschitz.  $\Delta f_i(x)$  también es continua Lipschitz por consiguiente  $K(\bar{\varepsilon}) \approx 0$  cuando  $\varepsilon \approx 0$ . Además, de la condición (5.14)

$$K(\bar{\varepsilon}) \leq \frac{1}{G_1}$$

por lo tanto  $\|x_b(t)\| \leq \delta$ . De aquí se sigue que existe  $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon, \bar{\varepsilon}\}$  tal que  $\|x(t)\| \leq \varepsilon_0$  para todo  $t > 0$ , aplicando repetidas veces la Ley de conmutación 3.

**Ejemplo 9** (Sistema no lineal conmutado incierto en dimensión 3) Consideremos un valor deseado  $\varepsilon = 0.3$  y el sistema conmutado no lineal (5.8) descrito por las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_2 \end{pmatrix}; \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2 + x_3^2 + 1} \\ 3\cos x_1 \\ 4\sin x_2 \end{pmatrix}$$

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_3^2 + 1} \\ \tan^{-1} x_2 + 2 \\ x_3^2 + 4 \end{pmatrix}; \quad f_4(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2.5 \\ \frac{-2}{x_3^2 + 1} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Delta}f_1(x) = \begin{pmatrix} \Delta c_{11} + x_3^3 \\ \Delta c_{12} \\ \Delta c_{13} \end{pmatrix}; \quad \bar{\Delta}f_2(x) = \begin{pmatrix} \Delta c_{21} + \cos x_1 - \cos x_2 \\ \Delta c_{22} + 3x_1^2 \\ \Delta c_{23} + \frac{x_3}{1+x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Delta}f_3(x) = \begin{pmatrix} \Delta c_{31} + 2x_1 \\ \Delta c_{32} + 3x_1 + 2x_3^2 \\ \Delta c_{33} + \sin x_1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\Delta}f_4(x) = \begin{pmatrix} \Delta c_{41} + \sin x_2 \\ \Delta c_{42} \\ \Delta c_{43} \end{pmatrix}$$

Puesto que

$$f_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f_4(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2.5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dada la hipótesis del Teorema de esta sección, se debe satisfacer que  $\max_{1 \leq i \leq 4} \{\xi_i\} < 0.5$ , por consiguiente, se puede considerar que  $\xi_1 = 0.2$ ,  $\xi_2 = 0.32$ ,  $\xi_3 = 0.46$  y  $\xi_4 = 0.38$ . Algunos casos de incertidumbres acotadas por tales cotas son por ejemplo  $\Delta c_1 = (0.2 \ 0 \ 0)^T$ ,  $\Delta c_2 = (0.1 \ 0.3 \ 0)^T$ ,  $\Delta c_3 = (0.1 \ 0.2 \ 0.4)^T$  y  $\Delta c_4 = (0.2 \ 0.25 \ 0.2)^T$ . Sea  $\varepsilon = 1$ , dado que

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{2}f_1(0)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{2}f_2(0) + \frac{1}{6}f_3(0) + \frac{1}{3}f_4(0)$$

$$\hat{e}_3 = \frac{1}{8}f_1(0) + \frac{5}{12}f_3(0) + \frac{1}{3}f_4(0)$$

$$\hat{e}_4 = \frac{1}{2}f_2(0) + \frac{1}{2}f_3(0) + f_4(0)$$

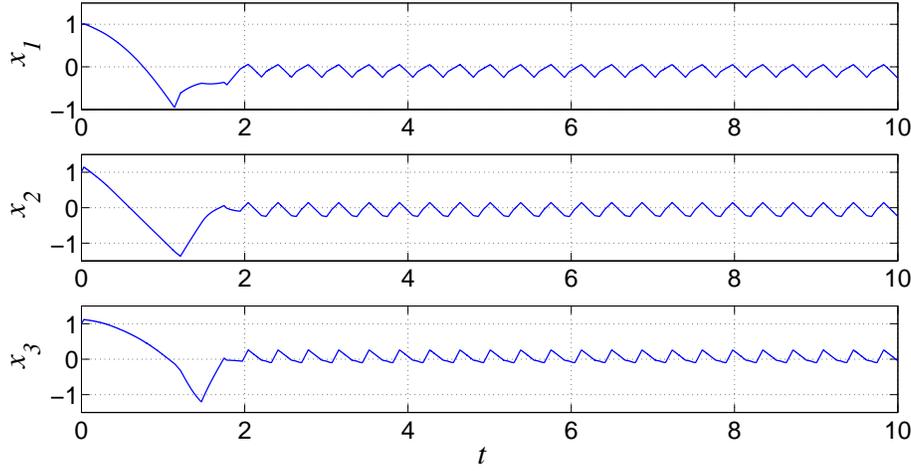


Figura 5.4: Evolución en el tiempo del sistema no lineal del Ejemplo 9.

$$\hat{e}_5 = \frac{1}{2}f_1(0) + \frac{1}{3}f_3(0) + \frac{2}{3}f_4(0)$$

$$\hat{e}_6 = \frac{1}{24}f_1(0) + \frac{5}{12}f_2(0) + \frac{1}{2}f_4(0)$$

se sigue que  $G_1 = \sum_{i=1}^M (\sum_{l=1}^{2n} \lambda_{li}^2)^{1/2} = 3.7302$  y  $\hat{G} = 1 + G_1(\max_{1 \leq i \leq M} \{\|f_i(0)\| + \xi_i\}) = 18.6535$ . Por otro lado, se puede ver que un  $\bar{\epsilon}$  que satisface la desigualdad (5.14) es  $\bar{\epsilon} = 0.3$ , por consiguiente  $\epsilon_0 = \min\{1, 0.3\} = 0.3$ . de aquí que se puede escoger a  $\delta = \epsilon_0/\hat{G} = 0.016$ . La evolución del sistemas se muestra en la Figura 5.4 donde se puede observar que las trayectorias permanecen localmente  $\epsilon_0$ -acotadas alrededor del origen.

**Ejemplo 10** Consideremos un valor deseado  $\epsilon = 0.1$  y el sistema conmutado no lineal descrito por las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + 1 \\ 2x + 1 \end{pmatrix}; \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2 + 1} \\ -\cos x_1 \end{pmatrix}$$

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ \text{sen} x_2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\Delta}f_1(x) = \begin{pmatrix} \Delta b_{11} + x_1^2 + x_2^3 \\ \Delta b_{12} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Delta}f_2(x) = \begin{pmatrix} \Delta b_{21} + 3x_1^2 \\ \Delta b_{22} + \frac{x_2}{1+x_1^2} \end{pmatrix}; \quad \bar{\Delta}f_3(x) = \begin{pmatrix} \Delta b_{31} + 2x_1 \\ \Delta b_{32} + \text{sen} x_1 \end{pmatrix}$$

Puesto que  $f_1(0) = [1, 1]^T$ ,  $f_2(0) = [1, -1]^T$  y  $f_3(0) = [-1, 0]^T$ . Dada la hipótesis del Teorema de esta sección, se debe satisfacer que  $\max_{1 \leq i \leq 4} \{\xi_i\} < 0.2$ , por consiguiente, se puede considerar  $\xi_1 = 0.19$ ,  $\xi_2 = 0.2$ ,  $\xi_3 = 0.15$ . Algunos casos de incertidumbres acotadas por tales cotas son por ejemplo  $\Delta c_1 = (0.2 \ 0)^T$ ,  $\Delta c_2 = (0.1 \ 0.3)^T$  y  $\Delta c_3 = (0.1 \ 0.2)^T$ .

Por otro lado, de (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \frac{1}{2}f_1(0) + \frac{1}{2}f_2(0) \\ \hat{e}_2 &= f_1(0) + f_3(0) \\ \hat{e}_3 &= f_3(0) \\ \hat{e}_4 &= f_2(0) + f_3(0)\end{aligned}$$

por lo tanto  $G_1 = \sum_{i=1}^M (\sum_{l=1}^{2n} \lambda_{li}^2)^{1/2} = 3.9681$  y  $\hat{G} = 1 + G_1(\max_{1 \leq i \leq M} \{\|f_i(0)\| + \xi_i\}) = 7.4054$ . Se puede ver que si  $\bar{\varepsilon} = 0.1$ ,  $K(\bar{\varepsilon}) = 0.1043 \leq 1/G_1 = 0.252$ , por consiguiente, se puede escoger  $\bar{\varepsilon} = 0.1$  luego entonces  $\varepsilon_0 = 0.1$  de aquí  $\delta = \frac{\varepsilon_0}{\hat{G}} = 0.0068$  garantizara el  $\varepsilon_0$ -confinamiento del sistema. La evolución del sistema se muestra en la Figura 5.5. Es posible ver que las trayectorias permanecen  $\varepsilon$ -acotadas al rededor del origen bajo la señal de conmutación descrita por la Ley de conmutación 3 que se ilustra en la Figura 5.6.

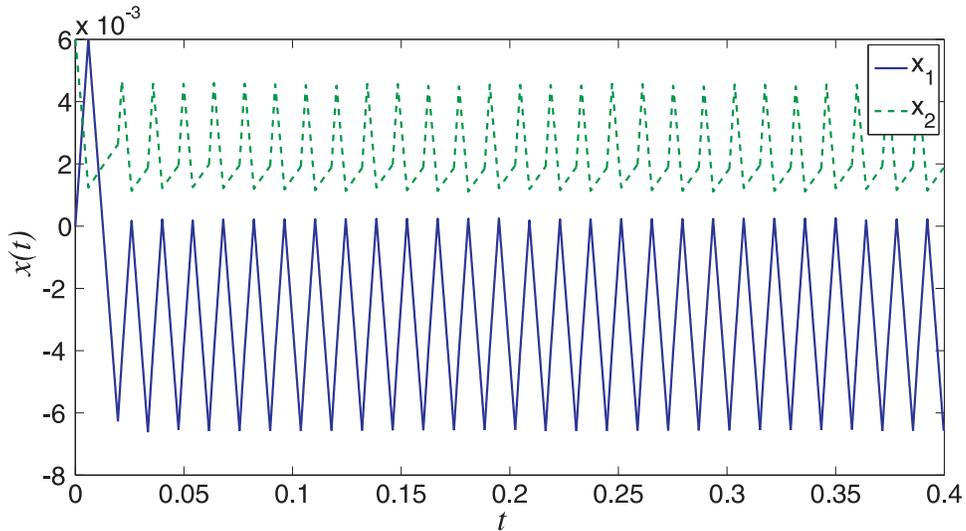


Figura 5.5: Evolución en el tiempo del sistema conmutado no lineal del Ejemplo 10.

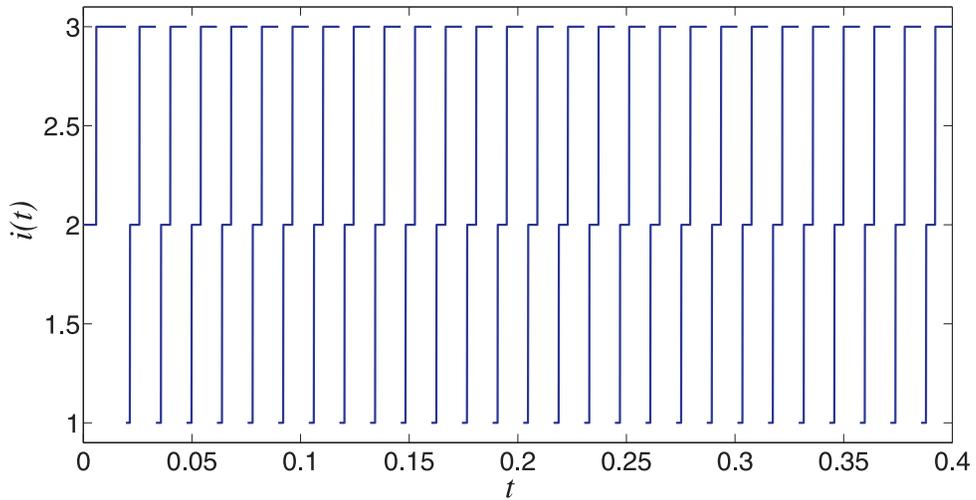


Figura 5.6: Señal de conmutación del Ejemplo 10.

### 5.3. Resumen del Capítulo

En este capítulo se mostró como los resultados de sistemas integrador pueden ser usados para garantizar la estabilidad sistemas lineales como no lineales. La condición de ser localmente Lipchitz alrededor del origen nos permite establecer que si las condiciones iniciales están suficientemente cerca del origen, las trayectorias permanecerán en una vecindad del origen.

## Capítulo 6

# Retroalimentación de Salida para Sistemas Conmutados Integrador Inciertos

En este capítulo se dan condiciones suficientes para garantizar la estabilización práctica de sistemas conmutados integrador inciertos donde únicamente una parte del estado está disponible para propósitos de retroalimentación.

Consideremos un sistema conmutado integrador incierto descrito de la siguiente manera.

$$\dot{x} = c_i + \Delta c_i \quad i \in I = \{1, \dots, M\} \quad (6.1)$$

Sea  $x(t) = [y(t), z(t)]^T$ , donde  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  la salida del sistema (la parte del estado disponible para medición), y sea  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  la parte no observable, entonces es posible escribir al sistema (6.1) como sigue:

$$\dot{y} = a_i + \Delta a_i \quad i \in I = \{1, \dots, M\} \quad (6.2)$$

$$\dot{z} = b_i + \Delta b_i \quad (6.3)$$

donde  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $c_i = (a_i, b_i)^T$  y  $\Delta c_i = (\Delta a_i, \Delta b_i)^T$ .

El problema en este capítulo se resume en establecer condiciones para garantizar la estabilidad práctica de (6.2)-(6.3) cuando sólo  $y(t)$  está disponible para retroalimentación (*i.e.*  $y(t)$  es la única parte del estado que se puede medir). Considerando los resultados del Capítulo 4, para resolver este problema, es suficiente resolver el problema de retroalimentación de salida para el sistema nominal asociado a (6.2)-(6.3) dado por:

$$\dot{y} = a_i \quad (6.4)$$

$$\dot{z} = b_i \quad i \in I = \{1, \dots, \bar{M}\} \quad (6.5)$$

con  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $z \in \mathbb{R}^q$ , y  $\bar{M} \geq \max\{p, q\} + 1$ , esto es, Sea (6.4) y (6.5)  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable, y sea  $\sigma$  una secuencia que asegura que (6.4) es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable. Encontrar condiciones sobre el sistema (6.5) tal que los tiempos de permanencia

se puedan usar para definir (al menos) una secuencia que estabilice  $\varepsilon$ -prácticamente al sistema (6.5). Note que tal problema tiene dos posibles variantes: (i) la secuencia  $\sigma$  que estabiliza (6.4) es parcialmente utilizada para estabilizar el sistema (6.5), y (ii) la misma secuencia se usa para estabilizar (6.5).

## 6.1. Estabilización usando la secuencia del sistema medido

Sea  $y_0$  una condición inicial, observe que después de aplicar la secuencia  $\sigma$ , a (6.4) y (6.5),  $y(t_{\bar{M}})$  alcanza el origen en  $\mathbb{R}^p$  mientras que  $z(t_{\bar{M}})$  no necesariamente alcanza el origen en  $\mathbb{R}^q$ .

**Proposición 1** *Sea (6.4)  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable. Si existen valores no negativos  $\chi_i$  para  $i = 1, \dots, \bar{M}$  (no todos cero) tales que*

$$\chi_1 b_1 + \dots + \chi_{\bar{M}} b_{\bar{M}} = 0. \quad (6.6)$$

*donde  $\chi_i = k_{i,1}|\gamma_1| + \dots + k_{i,\bar{M}}|\gamma_{\bar{M}}|$ ,  $i = 1, \dots, \bar{M}$ , entonces se puede construir al menos una secuencia  $\bar{\sigma}$  para (6.5) en términos de los tiempos de permanencia del sistema (6.4)  $|\gamma_1|, \dots, |\gamma_{\bar{M}}|$  tal que (6.5) es  $\varepsilon$ -prácticamente estable al rededor de  $z(t_{\bar{M}})$ .*

### **Demostración.**

Asuma la existencia de valores no negativos  $\chi_i$  para  $i = 1, \dots, \bar{M}$  (no todos cero) tales que

$$\chi_1 b_1 + \dots + \chi_{\bar{M}} b_{\bar{M}} = 0. \quad (6.7)$$

donde  $\chi_i = k_{i,1}|\gamma_1| + \dots + k_{i,\bar{M}}|\gamma_{\bar{M}}|$ ,  $i = 1, \dots, \bar{M}$ , con  $k_{i,j} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ , entonces la secuencia

$$\begin{aligned} & (b_1, k_{1,1}|\gamma_1|), \dots, (b_1, k_{1,\bar{M}}|\gamma_{\bar{M}}|) \\ & (b_2, k_{2,1}|\gamma_1|), \dots, (b_2, k_{2,\bar{M}}|\gamma_{\bar{M}}|) \\ & \vdots \\ & (b_{\bar{M}}, k_{\bar{M},1}|\gamma_1|), \dots, (b_{\bar{M}}, k_{\bar{M},\bar{M}}|\gamma_{\bar{M}}|) \end{aligned} \quad (6.8)$$

conduce al sistema (6.5) hacia el origen.

Sea  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  las cotas superiores de las condiciones iniciales que aseguran el  $\varepsilon$ -confinamiento (como se definió anteriormente) para los sistemas (6.4) y (6.5) respectivamente.

Definamos  $\bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Si  $z(0) \in B[z(t_{\bar{M}}), \bar{\delta}]$ , entonces es claro que aplicando (6.8) en (6.5) se tiene que

$$\|z(t)\| - \|z(t_{\bar{M}})\| \leq \bar{\delta} + \sum_{i=1}^{\bar{M}} \sum_{j=1}^{\bar{M}} k_{i,j} |\gamma_j| b_i \leq \bar{\delta}$$

Por lo tanto, aplicando (6.8) sucesivamente, se puede asegurar que las trayectorias permanecen acotadas por  $\bar{\delta} < \varepsilon$ . Por lo tanto es claro que los tiempos de permanencia del sistema (6.4),  $|\gamma_1|, \dots, |\gamma_{\bar{M}}|$ , se pueden usar en (6.5) para garantizar su estabilidad  $\varepsilon$ -práctica al rededor de  $z(t_{\bar{M}})$ , esto concluye la prueba.

□

## 6.2. Estabilización para la misma secuencia

Como se señaló anteriormente, un problema interesante es encontrar condiciones para la estabilización de (6.5) bajo la misma secuencia de (6.4).

Podemos usar la propiedad de estabilizabilidad asintótica global  $\varepsilon$ -práctica de (6.4) para proponer una secuencia  $\sigma$  provista de dos partes. Una primera ( $\sigma_1$ ) que comience desde la condición inicial, pase por el origen e intersecte la bola de radio  $B[0, \delta]$ . Una segunda ( $\sigma_2$ ), que represente las trayectorias de estado estacionario, que inicie precisamente en el punto de intersección con la bola  $B[0, \delta]$ , pase por el origen alcance la bola y así sucesivamente.

Sean  $|\gamma_i|, i = 1, \dots, \bar{M}$  los tiempos de permanencia de  $\sigma_1$ , y  $|\gamma_{2_i}|, i = 1, \dots, \bar{M}$  los tiempos de permanencia de  $\sigma_2$ . Una condición suficiente para la estabilización (6.5) bajo la misma secuencia de (6.4) es dada en la siguiente proposición:

**Proposición 2** Sean (6.4) y (6.5)  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizables, y si

$$|\gamma_{2_1}| v_1 + \dots + \left( |\gamma_{2_{\bar{M}}}| + \frac{\delta}{\|a_{\bar{M}}\|} \right) v_{\bar{M}} = 0, \quad (6.9)$$

entonces el sistema conmutado (6.5) es  $\varepsilon$ -prácticamente estable bajo  $\sigma$ , donde  $a_{\bar{M}}$  y  $b_i$  son dados como en (6.4) y (6.5) respectivamente, y  $v_i \in \{b_i, \dots, b_{\bar{M}}\}$ .

**Demostración.** Para analizar la trayectoria del sistema (6.5) bajo tiempos de permanencia  $|\gamma_{2_i}|$ ,  $i = 1, \dots, \bar{M}$ , observe que las trayectorias descritas por (6.5) bajo  $|\gamma_{1_i}|$ ,  $i = 1, \dots, \bar{M}$  son dadas por:

$$z(t_{\bar{M}}) = |\gamma_{1_1}|v_1 + \dots + |\gamma_{1_{\bar{M}}}|v_{\bar{M}} + z_0. \quad (6.10)$$

Se puede observar que  $z(t_{\bar{M}})$  no necesariamente es el origen, ya que la secuencia fue diseñada para (6.4). Una vez que el sistema (6.4) llegue a la bola  $B[0, \delta]$ , el sistema (6.5) está en  $z_r$ :

$$z_r \triangleq z(t_{\bar{M}+1}) = |\gamma_{1_1}|v_1 + \dots + \left( |\gamma_{1_{\bar{M}}}| + \frac{\delta}{\|a_{\bar{M}}\|} \right) v_{\bar{M}} + z_0.$$

aplicando los tiempos  $|\gamma_{2_i}|$ ,  $i = 1, \dots, \bar{M}$ , se tiene que

$$z(t_{r+\bar{M}}) = |\gamma_{2_1}|v_1 + \dots + |\gamma_{2_{\bar{M}}}|v_{\bar{M}} + z_r. \quad (6.11)$$

Una condición suficiente para garantizar confinamiento es la siguiente  $z(t_{\bar{M}}) = z(t_{r+\bar{M}})$ . Observe que tal condición puede ser derivada igualando (6.11) y (6.10), la cual conduce a (6.9). Usando los mismos argumentos en la Proposición 1, se puede mostrar que las trayectorias de (6.5) permanecen  $\varepsilon$ -acotadas.

□

Ahora estamos preparados para resolver el problema de estabilizabilidad para el sistema conmutado integrador incierto aproximado descrito por (6.2)-(6.3). A partir de los resultados del Capítulo 4 y de esta sección, se pueden establecer condiciones suficientes las cuales se enuncian formalmente en el siguiente resultado.

**Corolario 3** *Asuma que los sistemas nominales (6.4) y (6.5) son  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizables. Sea*

$$\max_{1 \leq k \leq M} (\alpha_k) < \min_{1 \leq k \leq M} \left\{ \frac{1}{\|C_k^{-1}\|} \right\} \quad (6.12)$$

y

$$\max_{1 \leq k \leq M} (\beta_k) < \min_{1 \leq k \leq M} \left\{ \frac{1}{\|D_k^{-1}\|} \right\} \quad (6.13)$$

donde  $C_k \triangleq [a_1 \ \dots \ a_{k-1} \ a_{k+1} \ \dots \ a_{\bar{M}}]$  y  $D_k \triangleq [b_1 \ \dots \ b_{k-1} \ b_{k+1} \ \dots \ b_{\bar{M}}]$ , entonces es posible construir dos secuencias  $\sigma$  y  $\bar{\sigma}$  para (6.2) y (6.3) respectivamente, tales que:

(I)  $\bar{\sigma}$  puede ser construido en términos de los tiempos de permanencia en  $\sigma$ ,

(II) (6.2) y (6.3) son  $\varepsilon$ -prácticamente estabilizables.

**Demostración.** Dados los resultados en el Capítulo 4, es claro que podemos proponer una secuencia de conmutación  $\sigma$  para el sistema incierto (medido) (6.2) que garantice su estabilidad global asintótica  $\varepsilon$ -práctica. Por otro lado empleando los resultados en el Capítulo 4 se puede mostrar que (6.3) es  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estabilizable. Ahora, empleando la Proposición 1 se pueden usar los tiempos de permanencia en  $\sigma$  denotados anteriormente por  $|\gamma_1|, \dots, |\gamma_M|$  para construir una secuencia  $\bar{\sigma}$  tal que (6.3) es  $\varepsilon$ -prácticamente estable. Esto concluye la prueba. □

### Ejemplo: Sistemas conmutado integrador incierto usando retroalimentación en la salida.

**Ejemplo 11** Asuma que  $\alpha_1 = 0.18$ ,  $\alpha_2 = 0.2$ ,  $\alpha_3 = 0.15$ ,  $\alpha_4 = 0.19$ , y cada  $\beta_i = 0.3$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Considere el sistema (6.2)-(6.3) donde la parte medible del estado,  $y(t)$ , está en  $\mathbb{R}^3$  y la parte no observable,  $z(t)$ , está en  $\mathbb{R}$ . Considere que

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde  $c_i = [a_i, b_i]^T$ ,  $\Delta a_1 = (-0.1 \ 0.1 \ -0.05)^T$ ,  $\Delta a_2 = (0 \ 0 \ -0.2)^T$ ,  $\Delta a_3 = (-0.1 \ -0.1 \ 0)^T$ ,  $\Delta a_4 = (-0.1 \ 0 \ -0.15)^T$ ,  $\Delta b_1 = \Delta b_2 = 0.2$ ,  $\Delta b_3 = -0.2$  y  $\Delta b_4 = 0.2$  claramente  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $\Delta a_i$  y  $\Delta b_i$  satisfacen a) y b) en el Corolario 1. Además, dado  $\varepsilon = 1$ , podemos asegurar estabilidad  $\varepsilon$ -práctica global de el sistema (6.2) usando  $\delta_1 = 0.3$ . Se puede ver que la condición inicial en estado estacionario,  $y_0$ , está dada por  $[0, 0, -0.3]^T$ . De aquí se obtienen los tiempos de permanencia del sistema medido  $|\gamma_1| = 0.1$ ,  $|\gamma_2| = 0.1$ ,  $|\gamma_3| = 0.2$  y  $|\gamma_4| = 0.2121$ . Observe que  $(b_1 + \Delta b_1)|\gamma_i| = -2.8|\gamma_i|$ ,  $(b_2 + \Delta b_2)|\gamma_i| = -0.8|\gamma_i|$  y  $(b_3 + \Delta b_3)|\gamma_i| = 1.8|\gamma_i|$  para  $i = 1, \dots, 4$ . Así

$$(b_1 + \Delta b_1)|\gamma_i| + (b_2 + \Delta b_2)|\gamma_i| + 2(b_3 + \Delta b_3)|\gamma_i| = 0$$

para  $i = 1, \dots, 4$ . Por lo tanto se puede proponer al menos una secuencia de conmutación que estabiliza  $\varepsilon$ -prácticamente al sistema. Una puede ser la siguiente:

$$\{(b_1 + \Delta b_1, |\gamma_3|), (b_2 + \Delta b_2, |\gamma_3|), (b_3 + \Delta b_3, 2|\gamma_3|)\}.$$

En la Figura 6.1 se puede observar la dinámica de  $z$  usando su secuencia de conmutación; Además podemos observar claramente que  $z(t)$  está en  $B[0, \epsilon]$ .

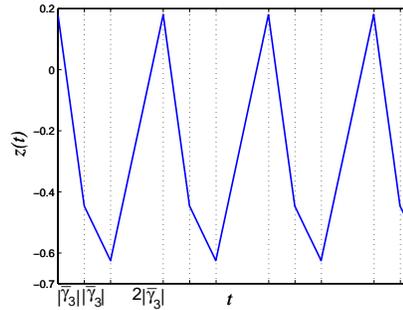


Figura 6.1: Evolución en el tiempo de  $z$ .

### 6.3. Resumen del Capítulo

En este capítulo se mostró como los resultados de sistemas integrador incierto pueden ser usados para garantizar la estabilidad sistemas conmutados inciertos parcialmente medidos. Se muestra que si los sistemas medidos y no medidos son estabilizables, es posible usar una secuencia basada en los tiempos del sistema medido, tal que las trayectorias del no medido quedan confinadas en una bola de tamaño  $\epsilon$ ; sin embargo, no se tiene garantía de que sea alrededor del origen. Los resultados son ilustrados con ejemplos numéricos, mientras que en la próxima sección se muestra evidencia experimental.

# Capítulo 7

## Aplicaciones

Como mencionamos anteriormente, los convertidores multi-celda pueden ser descritos como un tipo sistema híbrido llamado conmutado, el cual está formado por una familia de subsistemas que conmutan por virtud de un evento discreto. La conmutación está descrita por medio de un conjunto de superficies definidas por las restricciones de la operación (es decir, máximo rizo, regulación de voltaje, etc.) En este capítulo se describe como se utilizan los resultados en sistemas conmutados integrador para proponer un control híbrido que es capaz de realizar múltiples objetivos como limitar la corriente, asegurar el máximo rizo de voltaje y corriente y al mismo tiempo regular el voltaje. Cabe mencionar que el controlador propuesto tiene la ventaja de tener una estructura sencilla y una alta flexibilidad y adaptabilidad en un gran conjunto de condiciones de funcionamiento. Evidencia experimental de las ventajas y características de la estrategia del control propuesto se presentan en este capítulo. Se comprobó que tal controlador tiene buen desempeño en convertidores paralelo cd-cd tipo reductor Buck de hasta 3 celdas y elevador Boost de hasta 2 celdas. La metodología de control empleada también se puede implementar en otras topologías independientemente del número de celdas, que tengan la siguiente descripción dinámica continua diferenciable por pedazos:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)} \quad (7.1)$$

donde  $x$  es el vector de estado,  $\sigma$  es un evento discreto el cual describe la conmutación y  $B_{\sigma(t)}$  es el vector de traslación para la acción del voltaje de entrada.

### 7.1. Ejemplo: convertidor Boost de dos celdas

Consideremos el modelo lineal por pedazos del convertidor Boost de dos celdas que opera en modo de conducción continua (MCC), como sigue:

$$\dot{x} = A_l x + B \quad (7.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^3$ , está constituido por el vector de las corrientes en los inductores  $i = [x_1, x_2]$  y el voltaje en la salida, ( $v = x_3$ ). El vector de traslación  $B \in \mathbb{R}^3$  para el voltaje en la entrada está dado

por  $B = [ E/L_1, E/L_2 \ 0 ]^T$ . El sistema continuo está sujeto a eventos de tiempo discreto  $l$  que definen las matrices de estado  $A_l \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\begin{aligned} A_1 & \text{ si } l = 1 \\ A_2 & \text{ si } l = 2 \\ A_3 & \text{ si } l = 3 \\ A_4 & \text{ si } l = 4 \end{aligned} \tag{7.3}$$

donde  $l$  es un índice que establece las configuraciones diferentes de conmutación. (ver Figura 7.1).

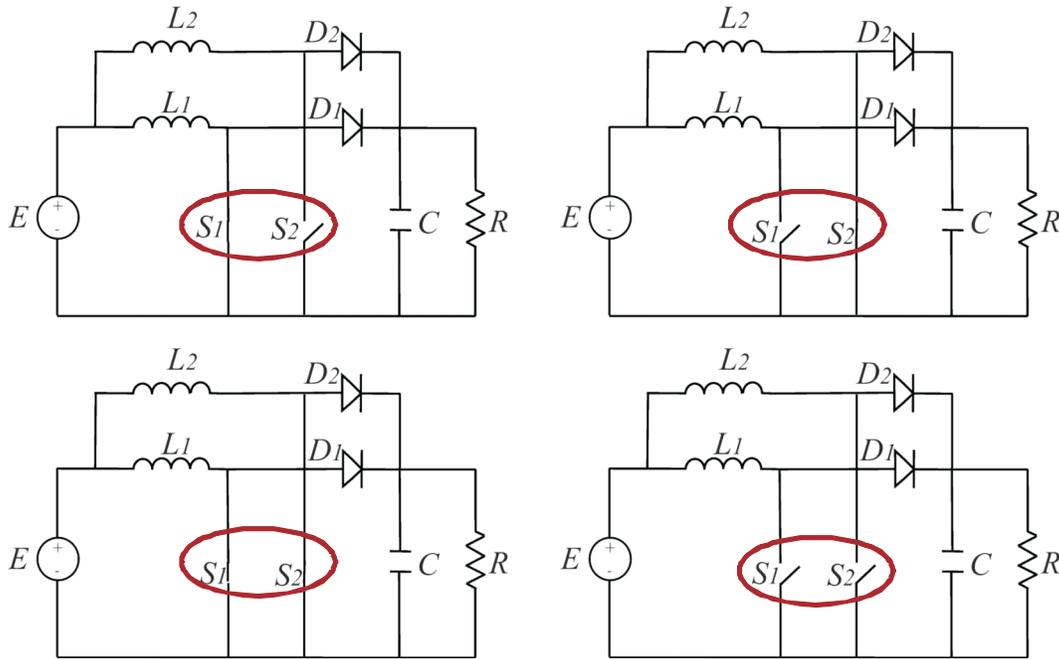


Figura 7.1: Configuraciones de conmutación.

y las matrices  $A_j$  que describen cada configuración están definida como:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L_2 \\ 0 & 1/C & -1/CR \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & 0 & -0 \\ 1/C & 0 & -1/CR \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/C & -1/CR \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & 0 & -1/L_2 \\ 1/C & 1/C & -1/CR \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $E, L_1, L_2, C, R$  son los valores del voltaje en la entrada, las inductancias, la capacitancia y la carga resistiva respectivamente.

**Observación 32** Debido a consideraciones de diseño, la frecuencia nominal ( $1/RC$ ) es pequeña comparada con la frecuencia de conmutación ( $f_s$ ), por lo que el voltaje en la salida permanece constante para tiempos pequeños ( $O(1/f_s)$ ). Bajo esta consideración, es posible ver de la solución de (7.2), que la corriente en los inductores evoluciona describiendo una trayectoria lineal por pedazos como se muestra en la Figura 7.2, donde para el convertidor boost de 2-celdas  $m_{j_{off}} = \frac{E-x_3}{L_j} \geq 0$ , y  $m_{j_{on}} = \frac{E}{L_j} \leq 0$ , para  $j = 1, 2$ . Note que ya que  $n = \text{número de inductores}$ , hay  $2^n$  configuraciones de conmutación entre las etapas, en este caso  $n = 2$  por consiguiente las 4 configuraciones se pueden describir por los siguientes vectores.

$m_1 = \begin{pmatrix} m_{1_{on}} \\ m_{2_{on}} \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} m_{1_{off}} \\ m_{2_{off}} \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} m_{1_{on}} \\ m_{2_{off}} \end{pmatrix}, m_4 = \begin{pmatrix} m_{1_{off}} \\ m_{2_{on}} \end{pmatrix}$ . de este modo, la evolución de la corriente puede ser descrita como un sistema conmutado integrador como en (7.4) donde el vector de las corrientes está dado por  $i = [i_1, i_2]$ .

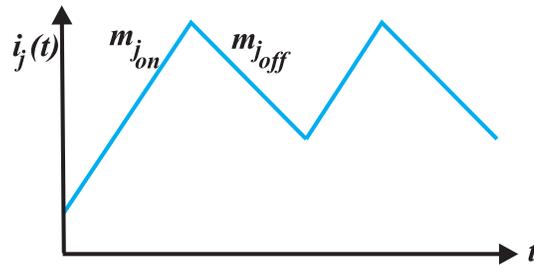


Figura 7.2: La trayectoria de la corriente en los inductores para los estado encendido y apagado.

**Observación 33** Si cada corriente en el inductor  $i_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , es confinada en una región de medida  $\beta_j$ , e.g.  $B(i_j, \beta_j)$ , (i.e. en una bola centrada en  $i_j$  y radio  $\beta_j$ ) el vector de las corrientes  $i = [i_1, \dots, i_n]$  puede ser confinado en una región de medida  $\hat{\beta} = \sqrt{\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2}$ . Además, observando la estructura de las ecuaciones (7.2)-(7.3), cuando el interruptor  $j$  está apagado, la dinámica del voltaje de salida es afectado por las corrientes de los inductores  $x_1, x_2$  de la siguiente manera:

$$\dot{x}_3 = \sum_{j=1}^2 \frac{x_j}{C} - \frac{x_3}{CR},$$

de este modo, el voltaje será confinado en otra región acotada e.g.  $B(\hat{v}, \theta)$ , ya que la dinámica actúa como un filtro estable [28], con tiempo constante (RC).

## 7.2. Estabilidad asintótica práctica de las corrientes

Para propósito de análisis asumimos que la dinámica de la corriente en (7.1) admite una descripción aproximada de la siguiente forma

$$\frac{di}{dt} = m_l \quad l \in \{1, \dots, 2^n\} \quad (7.4)$$

donde  $n$  es el número de inductores.

Usando la descripción (7.4) para síntesis de control, mostraremos que la dinámica de la corriente y el voltaje es  **$\hat{\beta}$ -práctica global asintóticamente estable** a pesar de incertidumbres, inducidas por la aproximación (7.4).

En esta sección, se verá como se usan los resultados en los Capítulos 3 y 4 para probar estabilidad asintótica  $\hat{\beta}$ -práctica global de las corrientes a pesar de la incertidumbre en el modelo descrito por la observación 32. Además se mostrará que como la dinámica del voltaje actúa como un filtro estable, estas trayectorias también están confinadas. Para ello, en esta sección vamos a analizar primero las condiciones de estabilización para el caso de los parámetros conocidos y luego se analizaran en el caso cuando son inciertos.

### 7.2.1. Conocimiento exacto del modelo

Considerando el modelo cuando los parámetros mostrados en (7.4) son conocidos, los resultados del Capítulo 3 garantizan la estabilidad, así como la existencia de un subconjunto  $\{m_{j_1}, \dots, m_{j_{n+1}}\}$  de  $\{m_1, \dots, m_{2^n}\}$  que cumple con  $\mathbb{R}^n = \{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k m_{j_k} : \lambda_k \geq 0\}$ . Además, habiendo establecido esto, si  $C_k$  el cono generado por los vectores  $-m_{j_1}, \dots, -m_{j_{k-1}}, -m_{j_{k+1}}, \dots, -m_{j_{n+1}}$  (ver Figura 7.3) entonces  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} C_k$  donde  $C_k, k = 1, \dots, n+1$ , tiene interiores mutuamente disjuntos. De este modo, si  $i \in \mathbb{R}^n$  está dentro de un cono  $C_k$  para algún  $1 \leq k \leq n+1$  entonces  $i$  se puede expresar como

$$i = \sum_{l=1}^{k-1} |\gamma_l| (-m_{j_l}) + \sum_{l=k+1}^{n+1} |\gamma_l| (-m_{j_l}). \quad (7.5)$$

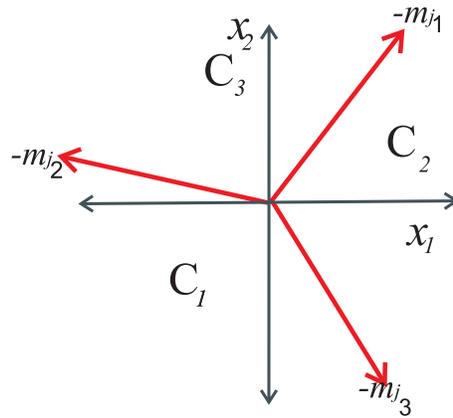


Figura 7.3: Ilustración de la partición para  $n = 2$ .

Tal expresión es única, ya que la dimensión de la corriente es  $n$ . Además, (7.5) constituye una combinación cónica y puede ser interpretada como sigue: Sea  $|\gamma_l|$  el tiempo de permanencia en el sistema  $m_{j_l}$ . A través de (7.5) nosotros podemos encontrar una señal de conmutación que conduzca al vector de las corrientes,  $i$ , hacia el origen usando la secuencia descrita como sigue:

$$\sigma = \{(l_1, |\gamma_1|), \dots, (l_{k-1}, |\gamma_{k-1}|), (l_{k+1}, |\gamma_{k+1}|), \dots, (l_{n+1}, |\gamma_{n+1}|)\}.$$

### 7.2.2. Incertidumbre en el modelo

En la esta sección se analiza la estabilidad en el caso incierto. Considere la descripción real de la dinámica de las corrientes dada por:

$$\frac{di}{dt} = m_l + \Delta m_l \quad l \in \{1, \dots, 2^n\} \quad (7.6)$$

donde  $m_l$  describe el comportamiento nominal del sistema y  $\Delta m_l$  describe la incertidumbre. Asumamos que la incertidumbre  $\Delta m_l$  cumple la siguiente condición:

$$\|\Delta m_l\| < \alpha_l \quad (7.7)$$

### 7.2.3. Resultado

De las discusiones descritas en las dos secciones anteriores y de los resultados en los Capítulos 3 y 4 es claro que se puede establecer el siguiente resultado.

**Teorema 7** Si existen  $|\gamma_k|$  tales que  $i_{ref} = \sum_{l=1}^{k-1} |\gamma_l|(-m_{j_l}) + \sum_{l=k+1}^{n+1} |\gamma_l|(-m_{j_l})$  y si

$$\max_{1 \leq l \leq M} (\alpha_{j_l}) < \min_{1 \leq k \leq M} \left\{ \frac{1}{\|A_k^{-1}\|} \right\} \quad (7.8)$$

donde  $A_k \triangleq [ m_{j_1} \ \cdots \ m_{j_{k-1}} \ m_{j_{k+1}} \ \cdots \ m_{j_{n+1}} ]$ , entonces las trayectorias de la corriente (7.6) serán  $\hat{\beta}$ -práctica global asintóticamente estables; esto es, existe un tiempo  $T < \infty$  tal que para todo  $t > T$ ,  $i \in B(i_{ref}, \hat{\beta})$  y  $v \in B(v_{ref}, \mathfrak{O})$ .

#### 7.2.4. Implementación del resultado

Como hemos visto en las secciones anteriores, el uso de la secuencia  $\sigma$  garantiza la estabilidad asintótica  $\varepsilon$ -práctica de las trayectorias del convertidor para una referencia deseada. Tal secuencia corresponde a una secuencia de control para el sistema conmutado (7.6). Con el fin de aplicar la estrategia de conmutación en un convertidor real, la señal de conmutación tiene que ser interpretada como acciones de encendido (on) y apagado (off) en cada uno de los interruptores. Para ilustrar esto, partimos de la discusión en la Observación 33. En este caso, cada subsistema del sistema conmutado 7.2 fue derivado utilizando todas las combinaciones posibles de los estados on y off de los dispositivos de conmutación. Es decir, cada subsistema de (7.4) corresponde a una única representación del estado de dispositivos de conmutación en el convertidor real.

**Observación 34** (*Sistemas de primer orden*) Es importante notar que en el caso de sistemas de primer orden, las fronteras de los conos en el Criterio 1 son líneas y la bola  $B(i_{ref}, \beta)$  es en realidad un intervalo cerrado  $[i_{ref} - \beta, i_{ref} + \beta]$ . Note también que la condición del Teorema 7,  $i_{ref} = \sum_{k=1}^{n+1} |\gamma_k| m_{j_k}$ , se reduce únicamente a dos posibilidades (i)  $i_{ref} = |\gamma_1| m_1$  para condiciones iniciales abajo de  $i_{ref} - \beta$  o (ii)  $i_{ref} = |\gamma_2| m_2$  para condiciones iniciales arriba de  $i_{ref} + \beta$ . Así, aplicando tales expresiones consecutivamente, se puede estabilizar el sistema. De este modo se puede observar que la estrategia de control propuesta es realmente un control por histéresis para sistemas de primer orden, de aquí nuestra propuesta puede ser interpretada como una generalización del control por histéresis para sistemas de orden mayor a 1.

**Observación 35** (*Secuencias estabilizantes*) Sea  $\varepsilon \triangleq \max\{\hat{\beta}, \varpi\}$  y  $x_{ref} = [i_{ref}, v_{ref}]^T$ , el resultado en este capítulo establece básicamente que todas las trayectorias del sistema serán confinadas en una región  $B(x_{ref}, \varepsilon)$  en tiempo finito  $t > \hat{T}$  con  $\hat{T} \triangleq \max\{T, 1/RC\}$ . De este modo, el conjunto  $B(x_{ref}, \varepsilon)$  es globalmente atractivo y las trayectorias del sistema serán conducidas a este conjunto asintóticamente. Además, tal resultado también define una familia de secuencias de conmutación  $\sigma$  tal que las trayectorias descritas por el convertidor son confinadas en  $t \geq \hat{T}$ , donde el rizo en la corriente del convertidor debe ser como máximo  $2\max\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Por lo tanto se puede definir un conjunto acotado para cada corriente de referencia tal que  $x_1 \in B(i_{ref,1}, \beta_1), \dots, x_n \in B(i_{ref,n}, \beta_n)$ . Además, si se requiere que el sistema opere a una frecuencia de conmutación fija, entonces también se fija el valor mínimo de  $\beta_1, \dots, \beta_n$  que se puede alcanzar.

**Observación 36** (*Inductores idénticos*) Cabe señalar que se puede obtener cualquier corriente de referencia en un inductor dado, independientemente de la corriente en otros inductores (siempre que se cumpla la ley de la conservación de la energía). Es decir, la secuencia de conmutación  $\sigma$  está constituida por  $n$  secuencias posiblemente asíncronas de forma independiente,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . Sin embargo, cuando los inductores son iguales, la secuencia de conmutación de un inductor puede ser utilizada para estabilizar los otros inductores (y por tanto asegurar confinamiento) utilizando la secuencias de uno de ellos con un retardo de tiempo acotado  $\tau < \tau_{max}$ . Si el sistema está operando bajo una frecuencia fija, tal retraso puede interpretarse como la introducción de una fase  $\varphi$  en la secuencia de conmutación. Es interesante notar que comúnmente, los convertidores multicelda son operados con una fase de  $360/n$  entre las señales de conmutación. Por lo tanto, se puede conseguir la estabilización del convertidor utilizando retroalimentación en uno de los inductores y en el voltaje de salida.

**Observación 37** (Esquema del control propuesto) Hasta aquí, se ha asumido que el mapa  $i_{ref} = i_{ref}(v_{ref})$  es conocido. Sin embargo en la mayoría de las aplicaciones esto no siempre sucede. Para corregir esta limitación, se puede usar un esquema de control multi-lazo constituido de un lazo de voltaje ya sea discreto o continuo, y un lazo de corriente descrito por el esquema de control conmutado propuesto, como se ilustra en la Figura 7.4. En tal esquema, la corriente de referencia se fija por virtud del lazo externo o lazo maestro y es utilizada como un centro de los conjuntos de confinamiento  $B(i_{ref,i}, \beta_i)$  para  $j = 1, 2 \dots n$ . Si los inductores de los convertidores son iguales, entonces tenemos el caso balanceado esto es,  $i_{ref,1} = i_{ref,2} \dots i_{ref,n}$ . Sin embargo, note que el resultado en este capítulo, también asegura estabilidad y equilibrio en el caso que  $L_1 \neq L_2 \neq L_3 \dots$ , el cual es el caso real (ya que se pueden presentar perturbaciones).

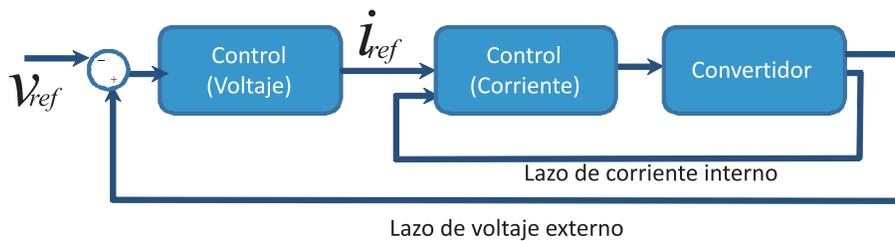


Figura 7.4: Diagrama de Bloques del controlador multi-lazo propuesto.

### 7.3. Ejemplo ilustrativo

Con el fin de aplicar los resultados obtenidos, el objetivo de esta sección es evaluar la robustez y el desempeño de la estrategia de control propuesta. Para este fin, se desarrolló trabajo experimental en el convertidor elevador Boost de dos celdas de la Figura 7.5, el cual fue diseñado y construido en el Laboratorio de Sistemas híbridos en IPICYT, para funcionar a un máximo de 2KW (100V, 20A), en esta figura se puede observar que la ley de control fue implementada empleando circuitería digital diseñada *ad hoc* debido a su simplicidad ; Sin embargo su ejecución también puede ser implementada en tarjetas comerciales como FPGA o DSP, lo cual es una ventaja de la metodología propuesta. Los parámetros de diseño de tal convertidor son los siguientes: inductores  $L_1 = L_2 = 330\mu H$ , capacitor  $C = 6.8\mu F$ , resistencia nominal  $R = 50\Omega$ , frecuencia nominal  $F = 40kHz$  y Voltaje en la entrada  $E = 20V$ , en donde se consideró un tiempo de muestreo de  $200\mu s$ .

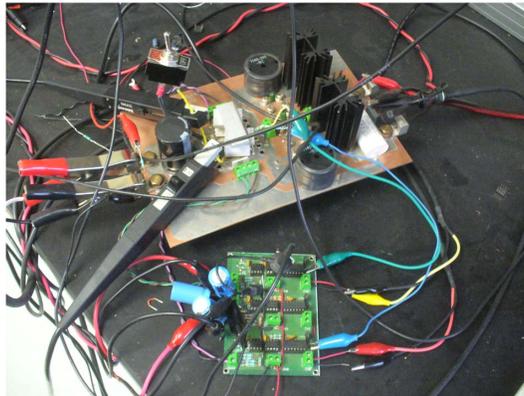


Figura 7.5: Convertidor boost y control de corriente.

Para evaluar el desempeño del control propuesto se implementó el montaje descrito en la Figura 7.6, el cual consiste de una computadora personal (Pentium IV con Windows 2000), una tarjeta de adquisición de datos DS1104 R&D de dSPACE y de un generador de funciones.

Como primer paso para ilustrar el funcionamiento del controlador, las corrientes en los inductores fueron reguladas utilizando valores diferentes para el rizo. Los resultados se muestran en la figura 7.7 para condiciones de estado-estable para dos condiciones diferentes (a)  $\delta_1 = \delta_2 = 0.5Amp$  y (b)  $\delta_1 = \delta_2 = 0.25Amp$  respectivamente para los inductores en el caso balanceado. Aquí se puede observar como el controlador propuesto es capaz de ajustar el rizo a un valor deseado.

En la Figura 7.8 podemos observar que la corriente así como su rizo son exitosamente regulados al valor deseado. En el primer experimento de la Figura 7.8 de la izquierda, el voltaje de salida de salida es de 30V, considerando como corriente de referencia  $i_{ref} = [0.777, 0.804]^T (Amp)$ ,

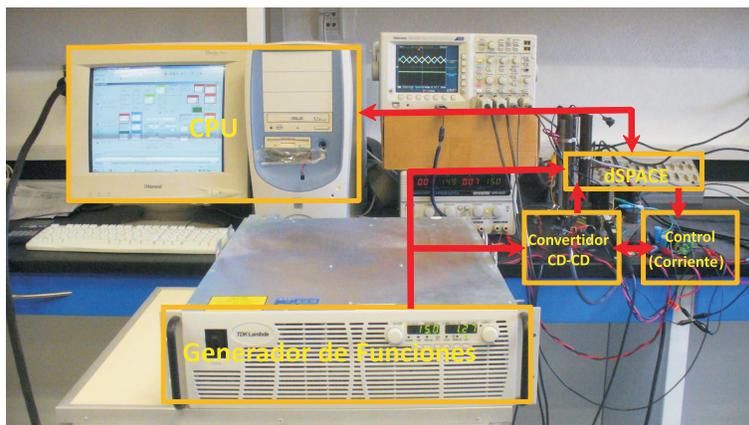


Figura 7.6: Montaje Experimental.

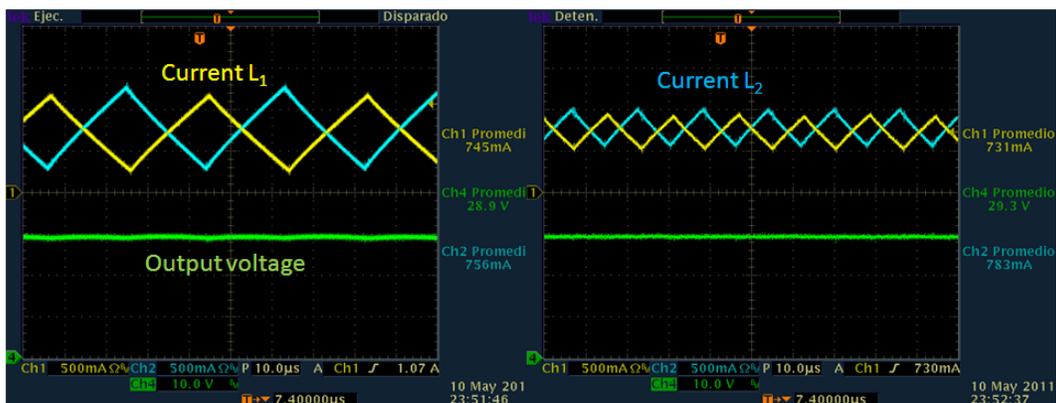


Figura 7.7: Evolución experimental de las corrientes y el voltaje bajo condiciones de estado estable para  $\delta_1 = \delta_2 = 0.5Amp$  (izquierda) y  $\delta_1 = \delta_2 = 0.25Amp$  (derecha).

mientras que en el segundo experimento el voltaje en la salida es de 20V considerando como corriente de referencia  $i_{ref} = [0.475, 0.489]^T (Amp)$  en ambos casos se consideró un rizo máximo de (0.350Amp).

Dado que el controlador no se basa en modelos promediados, el esquema de control de corriente se puede aplicar a un amplio número de condiciones de operación. Este hecho se ilustra en la Figura 7.9 donde se obtiene el modo de conducción continuo y discontinuo controlando la corriente de referencia (caso balanceado y no balanceado); por ejemplo en la figura se puede observar que el controlador es capaz de regular la corriente en ambos casos. En el primer experimento (izquierda), se consideró que las corrientes entre los inductores no está balanceada  $i_{ref} = [0,871,0,614](Amp)$ , mientras que en el segundo, se consideró que las corrientes están balanceadas  $i_{ref} = [0.433,0.430]Amp$ ; en este caso podemos observar que las corrientes en los inductores se ven obligadas a operar en el límite del modo de conducción discontinuo.

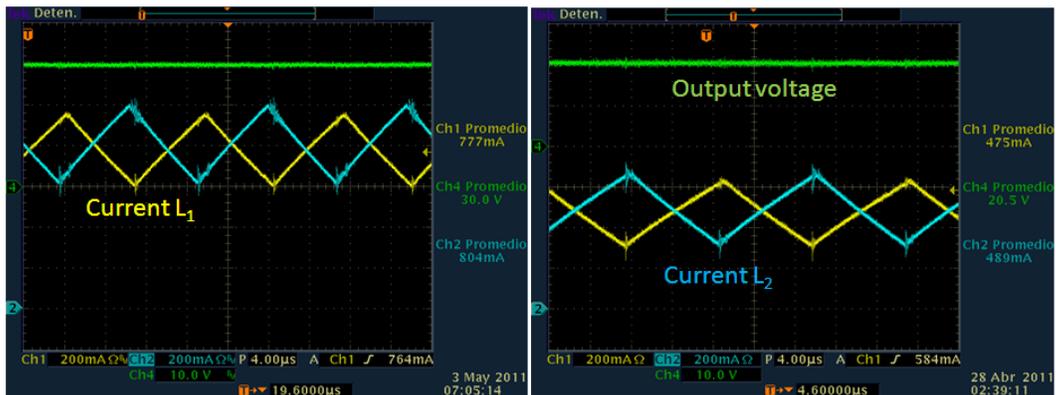


Figura 7.8: Evolución experimental de las corrientes y el voltaje bajo condiciones de estado estable para  $i_{ref} = [0.777, 0.804](Amp)$  (izquierda) y  $i_{ref} = [0.475, 0.489]Amp$  (derecha).

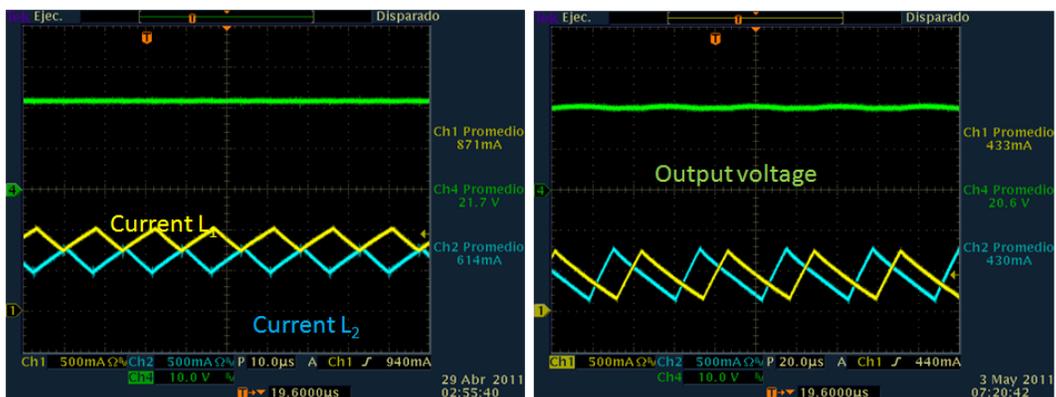


Figura 7.9: Caso no balanceado en modo de conducción continua, (izquierda); caso balanceado cerca del modo de condición discontinua (derecha).

Para ilustrar el uso de este controlador a través del lazo de regulación de voltaje, se empleó un controlador PI continuo para establecer la corriente de referencia. En la Figura 7.10, se puede observar la evolución en el tiempo de la corriente y el voltaje de salida de un convertidor de dos celdas en donde el sistema fue sometido a cambios en el voltaje de referencia. Como podemos ver en la figura, la regulación del voltaje se consigue con éxito para distintos voltajes de referencia.

Además, empleando el controlador propuesto con un controlador PI en el lazo de voltaje, se puede observar en la Figura 7.11 que el controlador puede limitar tanto el rizo de la corriente como el del voltaje con éxito a pesar de perturbaciones en la carga al rededor de 50%, en este caso se considero el caso balanceado (i.e.  $i_{ref,1} = i_{ref,2}$ ). También se observa que la capacidad de

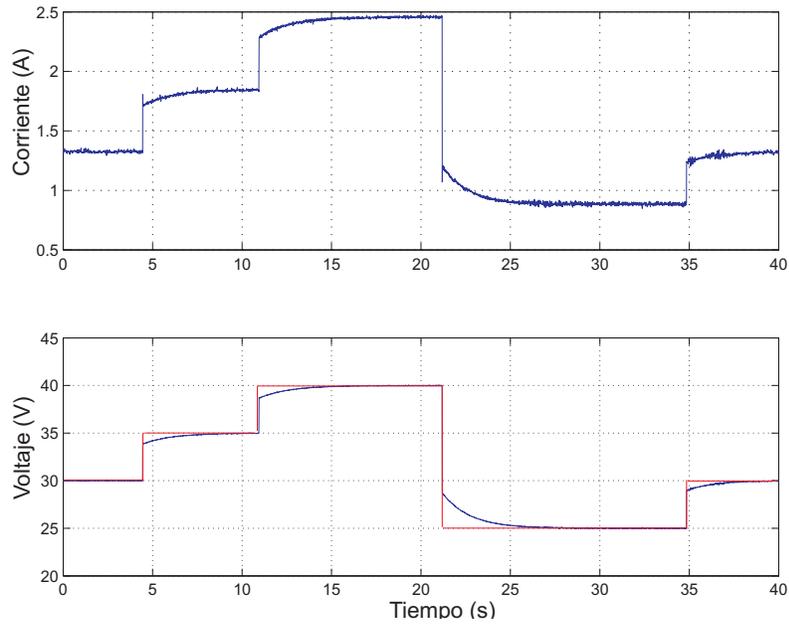


Figura 7.10: Seguimiento de voltaje.

seguir el voltaje dependerá de la elección del lazo exterior.

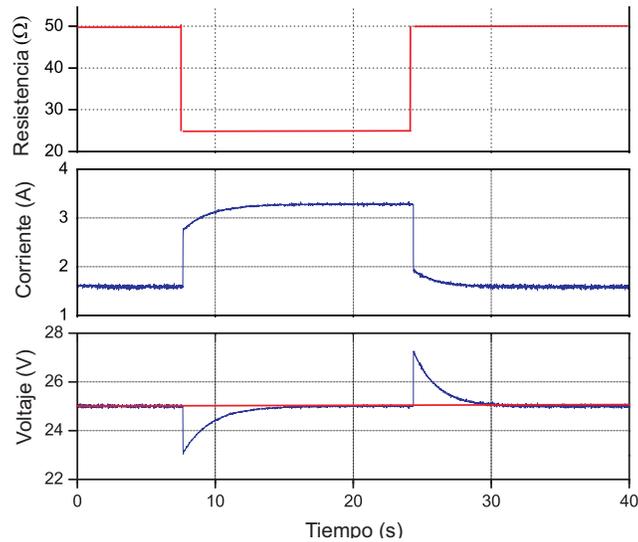


Figura 7.11: Evolución en el tiempo del convertidor con la retroalimentación propuesta, bajo cambios en la carga de 50%.

Dado que una de las aplicaciones principales de los convertidores multi-celda es en vehícu-

los eléctricos e híbridos, la principal preocupación acerca de los controladores de corriente es su robustez en presencia de cambios en el voltaje de entrada. Tal variación en el voltaje de entrada puede ser inducida por ejemplo por el funcionamiento de celdas de combustible. La figura 7.12 muestra el desempeño del controlador propuesto bajo cambios dramáticos en el voltaje de entrada. Aquí también podemos observar que el voltaje puede ser regulado con éxito.

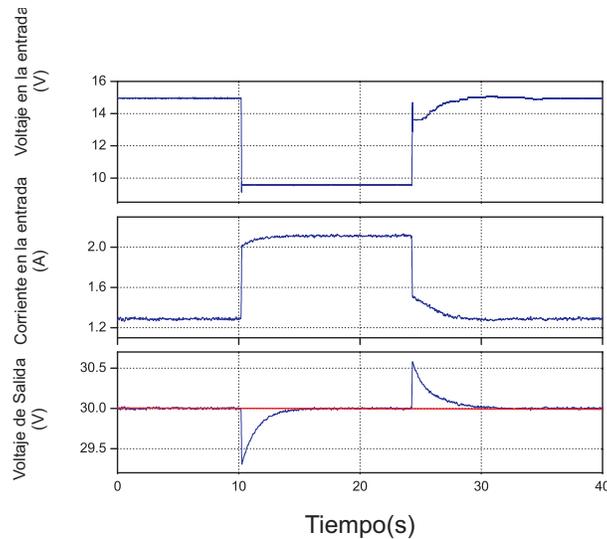


Figura 7.12: Evolución en el tiempo del convertidor bajo cambios en la fuente de voltaje de 65 %.

## 7.4. Conclusiones

En este capítulo se emplearon los resultados obtenidos en el Capítulo 4 para proponer un controlador basado en un esquema de control conmutado para convertidores multi-celda de  $n$  etapas, el cual

- utiliza una descripción lineal por pedazos del controlador para propósitos de diseño,
- regula el voltaje,
- garantiza la distribución de corriente en una forma equilibrada,
- asegura el máximo rizo de corriente y voltaje permitido,
- tiene adaptabilidad y aplicabilidad en modo de conducción continuo o discontinuo.
- emplea una estructura simple y tiene la ventaja de que es fácil de diseñar aún si el número de celdas en el convertidor es alta.

# Capítulo 8

## Conclusiones

### 8.1. Conclusiones de la tesis

El estudio en esta tesis se ha centrado en sistemas conmutados integrador, debido a que son sistemas relativamente sencillos y que aún captan las dificultades de estabilización de sistemas conmutados que no tienen o no comparten puntos de equilibrio. Las contribuciones de esta tesis han sido las siguientes:

- Establecer condiciones suficientes para que el origen del sistema conmutado integrador con incertidumbre sea  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable, usando una ley de conmutación de pendiente del tiempo.
- Probar que una ley de conmutación dependiente del estado hace al origen del sistema conmutado integrador nominal,  $\varepsilon$ -práctica global asintóticamente estable.
- Proponer una ley de conmutación dependiente del estado para sistemas conmutado integrador incierto que evita la conmutación rápida entre las superficies de conmutación.
- Establecer condiciones suficientes para que el origen del sistema conmutado integrador sea  $\varepsilon$ -prácticamente estable usando una retroalimentación de salida y una conmutación dependiente del tiempo.
- Mostrar que un sistema conmutado lineal incierto puede ser confinado en una vecindad suficientemente pequeña del origen, usando una conmutación dependiente del tiempo.
- Mostrar que un sistema conmutado no lineal incierto puede ser confinado en una vecindad suficientemente pequeña del origen, usando una conmutación dependiente del tiempo.
- Aplicar algunos de los resultados obtenidos en electrónica de potencia, en particular en convertidores intercalados (multi-celda) de 2 etapas.

En particular, se han extendido resultados en la literatura para sistemas conmutados tipo integrador en [11] y [9], al caso en donde los parámetros son inciertos. Se ha mostrado que si se diseña una secuencia de conmutación para el sistema nominal integrador, ésta puede estabilizar globalmente, al sistema incierto. Además se ha mostrado que la ley de conmutación basada en estado o detonada por evento propuesta en [9], es  $\epsilon$ -práctica global asintóticamente estable y se han propuesto modificaciones que evitan el castaño en sistemas inciertos.

Finalmente se dieron algunas observaciones acerca de la estabilización de sistemas conmutados lineales y no lineales. En particular se muestra como las leyes de conmutación dependientes del tiempo propuestas para sistemas conmutados integrador inciertos pueden emplearse para garantizar el confinamiento de las trayectorias de sistemas conmutados lineales y no lineales inciertos alrededor de una vecindad del origen suficientemente pequeña. Se han ilustrado estos resultados en ejemplos muy variados que incluyen problemas de estabilización alrededor de un punto y de una trayectoria.

Esta tesis además, da evidencia experimental de que los resultados obtenidos pueden ser aplicados en el control de una clase de sistemas electrónicos de potencia. En particular, se ha mostrado como usando un control conmutado es posible resolver algunos de los problemas más importantes en la administración de la energía de convertidores DC/DC; estos son, el de limitar la corriente y regular el voltaje de manera robusta. Los experimentos además, nos dejan ver la facilidad de la implementación del control en circuitos analógicos, así como la viabilidad y el buen desempeño del control propuesto.

## 8.2. Trabajo futuro

Existen un sin fin de extensiones de este trabajo. Entre los problemas más importantes que se pueden mencionar es encontrar, en el caso más general posible, condiciones para la  $\epsilon$ -atractividad de las trayectorias de sistemas lineales y no lineales inciertos. Aunque es claro que en casos particulares estas condiciones se pueden encontrar (p.ej. cuando alguno de ellos es estable o cuando la solución de algún subsistema pasa por la bola de tamaño  $\epsilon$ ), todavía hace falta la reflexión y formalización de estas condiciones. Otro problema abierto es el de extender los resultados de esta tesis a sistemas variantes en tiempo, lo que podría implicar secuencias variantes en tiempo o leyes de conmutación basadas en estado variantes en tiempo. El establecer condiciones necesarias y suficientes para la existencia de retroalimentación de salida es otro tema que pudiera ser abordado.

Es importante mencionar que, la estrategia de control propuesta en el capítulo de aplicaciones, se puede utilizar cuando se considera que la fuente en los convertidores es una celda de combustible, hasta ahora se ha comprobado su desempeño mediante simulaciones, y se está preparando lo necesario para comprobar el desempeño de esta estrategia de manera experimental.

### 8.3. Publicaciones

De esta tesis resultaron los siguientes documentos:

- Artículos de Revista

- A. Mendoza-Torres, I. Cervantes. “Remarks on the stabilizability of integrator switched systems”, *International Journal of Robust and Nonlinear . Control*, 2012. (Aceptado para publicación el cual ya se encuentra publicado en línea en <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/rnc.2865/abstract>.)

- Capítulos de Libro

- Ilse Cervantes, Francisco-Perez Pinal and Angelica Mendoza-Torres ”Hybrid Control of DC-DC Power Converters, *Renewable Energy*”, T J Hammons (Ed.), ISBN: 978-953-7619-52-7, INTECH Education and Publishing, Pp.114-148, Austria. 2009. (Disponible en <http://sciyo.com/articles/show/title/hybrid-control-of-dc-dc-power-converters>).

- Artículos de Congreso

- Internacionales

- I .Cervantes, A. Mendoza-Torres, R. García-Cuevas, J. Perez-Pinal “Switched Control of Interleaved Converters”. En *Proc. of IEEE Int. Vehicle Power and Propulsion Conference*. Dearborn, Michigan, USA. Del 7-11 de Septiembre del 2009, Pp. 1156-1161.
- Ilse Cervantes, Angelica Mendoza-Torres, Francisco J. Perez-Pinal “High Performance Hybrid Control for Buck Converters”. En *European Power Electronics Conference, IEEE Barcelona, España*. 8-10 de Septiembre del 2009.
- Ilse Cervantes, Francisco J. Perez-Pinal, Jesus Leyva-Ramos, Angelica Mendoza-Torres “Hybrid Control Technique Applied in a FC-SC Electric Vehicle Platform”. En *Proc. of IEEE Int. Vehicle Power and Propulsion Conference*. Lille, France, 7-11 de Septiembre del 2010.

- Nacionales

- A. Mendoza-Torres, Ilse Cervantes, Irwin A. Díaz-Díaz “Switched Control of Interleaved Buck Converters”. En el *Congreso Nacional 2010 de la Asociación de México de Control Automático (AMCA)* que se llevó a cabo del 6-8 de Octubre del 2010 en Puerto Vallarta, Jalisco.

# Bibliografía

- [1] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, 2003.
- [2] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition*. McGraw-Hill, United States of America, 1976.
- [3] Jan Lunze and Françoise Lamnabhi-Lagarrigue. *Handbook of Hybrid Systems Control: Theory, Tools, Applications*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- [4] Marat Akhmet. *Principles of Discontinuous Dynamical Systems Analysis*. Springer, New York, 2010.
- [5] A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*. Springer, New York, 1988.
- [6] H. Yang; B. Jiang and V. Cocquempot. Observer-based fault-tolerant control for a class of hybrid impulsive systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20:448–459, 2010.
- [7] G. Guo and H. Jin. A switching system approach to actuator assignment with limited channels. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20:1407–1426, 2010.
- [8] S. Zhao and J. Sun. Controllability and observability for time-varying switched impulsive controlled systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20:1313–1325, 2010.
- [9] X. Xu and P. Antsaklis. Practical stabilization of integrator switched systems. *IEEE Proc. of American Control Conf.*, pages 2767–2772, June 4-6 2003.
- [10] W. P. Dayawansa and C.F.Martin. *A converse Lyapunov for a class of dynamical system which undergo switching*, volume 44. 1999.
- [11] X. Xu. Practical stabilizability of a class of switched systems. *Proceedings of the 2004 American Control Conference, Boston Massachusetts*, pages 4537–4542, June 30- July 2 2004.
- [12] H. Lin and P. J. Antsaklis. Switching stabilizability for continuous-time uncertain switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, Int. Symposium on Intelligent Control*, 52(4):633–646, October 2007.

- [13] G. Zhai X. Xu and S. He. Practical uniform asymptotic stabilizability of switched systems with time- varying subsystems. *Proceedings of the 2007 American Control Conference, Marriott Marquis Hotel at times Square, New York*, pages 681–686, July 9-13 2007.
- [14] Zhendong Sun. *Switched Linear System Control and Design*. Springer, 2005.
- [15] L. Wang Z. Ji and G. Xie. Quadratic stabilization of uncertain discrete time switched systems via output feedback. *Circuits Systems Signal Processing*, 24(6):733–751, 2005. Birauser Boston.
- [16] D. Cheng and G. Z. Xi. Stabilization of a class of switched nonlinear system. *Journal of Control Theory and Appl.*, 4(1):53–61, 2006.
- [17] H. Lin and P. J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transctions on Automatic Control*, 54(2):308–322, February 2009.
- [18] F. Wirth O. K. R. Shorten and C. Kingi. Stability criteria for switched and hybrid systems. *J.Society for Industrial and Applied Mathematics*, 49(4):545–592, 2007.
- [19] G. Zhai and A. Michel. On practical stability of switched systems. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control Las Vegas, Nevada USA*, pages 3488–3493, December 2002.
- [20] H. Lin and P. J. Antsaklis. Delay dependent robust  $\mathbf{H}_\infty$  control for a class of uncertain switched system with time delay. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA*, pages 566–571, December 2002.
- [21] A. Yfoulis. Robust stabilizability of linear uncertain switched systems: a computational algorithm. *22nd IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 106–111, October 2007.
- [22] V. Lakshmikanham S.Leela and A. A. Martynyuk. *Practical Stability of Nonlinear Systems*. World Scientific Publisher, 1990.
- [23] S. Pettersson R.A. DeCarlo, M.S. Branicky and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability of hybrid systems. *Procedings of the IEEE*, 88(7):1069–1082, July 2000.
- [24] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5):59–70, October 1999.
- [25] Derong Liu Anthony N. Michel, Ling Hou. *Stability of Dynamical Systems, Continuous, Discontinuous and Discrete Systems*. Birkhauser oston, New York, NY, USA, 2008.
- [26] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.
- [27] Serge Lang. *Introduction to Linear Algebra, segunda edicion*. Springer, New York, 1986.

- [28] C.A. Desoer and M. Vidyasagar. Feedback systems: Input-output properties. *Academic Press New York*, 1975.