



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Control de consenso y formación en arreglos de agentes
móviles**

Tesis que presenta

Miguel Ibrahín Hernández Hernández

Para obtener el grado de

Maestro en Control y sistemas Dinámicos

codirectores de tesis:

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

Dr. Luis Javier Ontañón García Pimentel

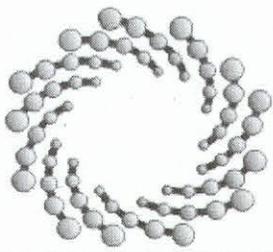
San Luis Potosí, S.L.P., agosto de 2022

Constancia de aprobación de la tesis

Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez y el Dr. Luis Javier Ontañón García Pimentel.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con No. de registro: 831256 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

La Secretaría Académica del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 051 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 15 días del mes de diciembre del año 2022, se reunió a las 16:30 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Eric Campos Cantón	Presidente	IPICYT
Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez	Secretario	IPICYT
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Sinodal	IPICYT
Dr. Luis Javier Ontañón García Pimentel	Sinodal externo	UASLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Miguel Ibrahim Hernández Hernández

sobre la Tesis intitulada:

Control de consenso y formación en arreglos de agentes móviles

que se desarrolló bajo la codirección de

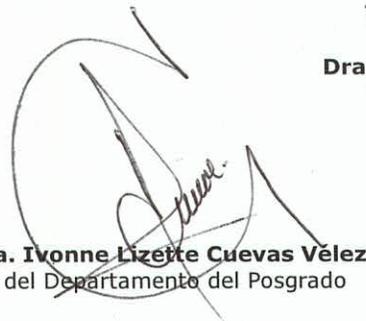
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Dr. Luis Javier Ontañón García Pimentel (UASLP)

El Jurado, después de deliberar, determinó

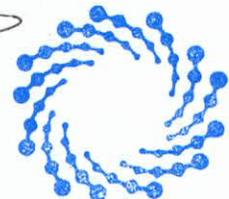
APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 18:20 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe la Secretaría Académica del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 15 días del mes de diciembre de 2022.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dra. Lina Raquel Riego Ruiz
Secretaría Académica



IPICYT
SECRETARÍA ACADÉMICA
INSTITUTO POTOSINO DE
INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

Dedicatoria

A mis padres y esposa que siempre estuvieron conmigo apoyándome en el proceso.

Agradecimientos

- Un profundo agradecimiento al Dr. Gonzalo Barajas y el Dr. Luis Javier Ontañón García Pimentel por su asesoría y constante apoyo durante la realización del trabajo de tesis.
- Le doy las gracias a mis profesores del Instituto Potosino de Ciencia y Tecnología (IPICYT) por compartir su tiempo y conocimientos en cada una de las clases.
- Por último, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

Índice general

Índice de figuras	VIII
Resumen	X
Abstract	XI
1. Introducción	1
2. Fundamentos de teoría de grafos y redes en consenso	4
2.1. Teoría de grafos	4
2.2. Control cooperativo	8
2.3. Algoritmo de consenso en control cooperativo	9
2.4. Protocolo de consenso	10
2.5. Análisis de convergencia del protocolo de consenso	12
2.5.1. Consenso bajo diferentes topologías de comunicación	15
3. Consenso de seguimiento a una referencia	22
3.1. Consenso de seguimiento para una referencia constante	22
3.1.1. Ejemplos de consenso a una referencia constante.	24
3.2. Consenso de seguimiento para una referencia variable en el tiempo	28
3.3. Algoritmo de seguimiento de consenso fundamental	33
4. Control de formación y seguimiento de trayectoria de robots tipo unicycle y diferencial	35
4.1. Planteamiento del problema	35
4.2. Modelo cinemático de un robot móvil tipo unicycle	36
4.3. Problema de formación y seguimiento de trayectoria entre un líder virtual y robots seguidores	37
4.3.1. Diseño de los controladores que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria	39
4.4. Aproximación del modelo cinemático de un robot móvil tipo diferencial (Lego EV3)	41
4.4.1. Diseño de los controladores que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria	43
5. Resultados numéricos	46

6. Implementación del controlador para un robot diferencial Lego EV3	50
6.1. Estructura mecánica del robot móvil diferencial Lego EV3	50
6.2. Implementación de los controladores para un robot móvil tipo diferencial .	52
6.2.1. Formación y seguimiento de trayectorias por medio de poses	54
7. Conclusiones	58
7.1. Trabajo a Futuro	59
Bibliografía	60

Índice de figuras

2.1. Representación genérica de un grafo con su matriz de adyacencia.	5
2.2. Dos representaciones distintas para \mathcal{G}_e del Ejemplo 1.	5
2.3. Representación de los tipos de grafos.	6
2.4. Representación de un grafo fuertemente conexo.	6
2.5. Grafo dirigido donde se puede observar más de un árbol de expansión, y además, no es fuertemente conexo.	7
2.6. Grafo dirigido y su matriz de adyacencia asociada.	7
2.7. Grafo dirigido y su matriz de Laplaciana asociada.	8
2.8. Grafo que no es fuertemente conexo y su matriz Laplaciana.	13
2.9. Grafo fuertemente conexo y su matriz Laplaciana.	13
2.10. Evolución de los estados a través del tiempo del grafo de la Figura 2.8. . . .	15
2.11. Topología de comunicación con dos grupos separados.	16
2.12. Evolución de los estados de la Figura 2.11.	16
2.13. Errores entre los agentes de la Figura 2.15.	17
2.14. Topología de interacción con múltiples líderes.	17
2.15. Evolución de los estados de la Figura 2.14.	18
2.16. Error de los agentes $i = 2, 3, 4$ con respecto al agente 1 de acuerdo a la Figura 2.14.	18
2.17. Topología de comunicación con el agente 1 como raíz.	19
2.18. Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 2.17. . . .	20
2.19. Topología de comunicación de un grafo fuertemente conexo.	20
2.20. Evolución de los estados del grafo de la Figura 2.19.	21
3.1. Topología de comunicación entre los nodos y su matriz Laplaciana.	24
3.2. Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 3.1.	25
3.3. Topología de comunicación entre los nodos y su matriz Laplaciana.	25
3.4. Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 3.3.	26
3.5. Topología de comunicación entre los nodos y su matriz Laplaciana.	26
3.6. Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 3.5.	27
3.7. Topología de comunicación entre los nodos y su matriz Laplaciana.	27
3.8. Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 3.7.	28
3.9. Resultados de consenso de la Figura 3.1 usando como referencia $\xi_r = \cos t$	29
3.10. Resultados de consenso de la Figura 3.3 usando como referencia $\xi_r = \cos t$	29
3.11. Resultados de consenso de la Figura 3.5 usando como referencia $\xi_r = \cos t$	30
3.12. Resultados de consenso de la Figura 3.7 usando como referencia $\xi_r = \cos t$	30

3.13. Resultados de consenso de la Figura 3.1 usando la Ecuación 3.3.	31
3.14. Resultados de consenso y topología de comunicación.	32
3.15. Topología de comunicación entre 5 agentes con $\xi_r = \cos(t)$	34
3.16. Resultados de consenso con respecto a la topología de comunicación de la Figura 3.15	34
4.1. Representación pictográfica de un robot unicycle.	36
4.2. Representación pictográfica de un robot líder virtual y un robot seguidor. . .	38
4.3. Robot móvil tipo diferencial Lego EV3.	41
4.4. Velocidades involucradas en la cinemática del robot móvil tipo diferencial Lego EV3.	42
5.1. Muestra la trayectoria del movimiento de los robots en el tiempo vista en la proyección de un plano (x,y).	47
5.2. Muestra como la formación se mantiene para un tiempo $t = 30$	47
5.3. Error a través del tiempo de las posiciones en x de los seguidores con res- pecto al líder virtual.	48
5.4. Error a través del tiempo de las posiciones en y de los seguidores con res- pecto al líder virtual.	48
5.5. Error a través del tiempo de las orientaciones θ de los seguidores con res- pecto al líder virtual.	48
6.1. Motor DC del robot Lego EV3.	51
6.2. Ruedas delanteras y traseras del robot Lego EV3.	51
6.3. Las estrellas representan condiciones iniciales de posición y orientación y los círculos los valores finales deseados de posición y orientación para cada robot en el plano (x,y).	54
6.4. Curva de regresión lineal simple usando la Tabla 6.2.	56

Resumen

En el presente trabajo de tesis se muestran algunos aspectos básicos y definiciones importantes sobre la teoría de grafos. Se muestra la definición de un grafo y su representación pictográfica. Igualmente, se ilustran los tipos de grafo y su representación matricial como matriz de adyacencia y matriz Laplaciana. Por otro lado, se explica la relación del control cooperativo y sistemas con múltiples vehículos autónomos. Se establecen condiciones para que se logre la coordinación y cooperación entre los vehículos como la disponibilidad de información que debe tener un vehículo con respecto al otro y el intercambio de información como una necesidad para la cooperación entre ellos. Enseguida, se plantea el protocolo de consenso de primer orden y condiciones matemáticas para su estabilidad. Para finalizar, en el Capítulo 2, se realizan algunas simulaciones numéricas bajo diferentes tipos de topologías. En el Capítulo 3 encontraremos dos tipos de algoritmos de consenso basándose en el seguimiento de una referencia establecida por un agente líder, se muestra el consenso para un estado de referencia constante y variable junto con algunas simulaciones numéricas. El Capítulo 4 encontramos los modelos cinemáticos de un robot unicycle y diferencial, así como también los algoritmos de control que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectorias para grupos de robots móviles tipo unicycle y diferencial. El Capítulo 5 se presentan resultados numéricos derivados del Capítulo 4 para un conjunto de robots tipo unicycle. En particular, el algoritmo de control se calcula para tres robots móviles tipo unicycle que siguen una trayectoria circular en una formación triangular constante. El Capítulo 6 se presenta la estructura mecánica de un robot diferencial Lego EV3 y sus limitaciones holonómicas. Por otra parte, se trata de implementar los algoritmos de control que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria para un grupo de robots tipo diferencial y al mismo tiempo se muestran las limitaciones técnicas que impidieron la implementación de dichos algoritmos. Así pues, se plantea imitar el problema de seguimiento de formación y seguimiento de trayectoria por medio de poses. Finalmente, en el Capítulo 7 se dan las conclusiones de la investigación y una alternativa de solución para la implementación de los controladores en robots diferenciales Lego EV3.

Abstract

In the present thesis work some basic aspects and important definitions about graph theory are shown. The definition of a graph and its pictorial representation are shown. Likewise, the types of graph and their matrix representation as an adjacency matrix and Laplacian matrix are illustrated. On the other hand, the relationship of cooperative control and systems with multiple autonomous vehicles is explained. Conditions are laid down for coordination and cooperation between vehicles such as the availability of information that one vehicle should have with respect to the other and the exchange of information as a necessity for cooperation between them. Next, the protocol of consensus of the first order and mathematical conditions for its stability is proposed. Finally, in Chapter 2, some numerical simulations are carried out under different types of topologies. In Chapter 3 we will find two types of consensus algorithms based on the following of a reference established by a leading agent, the consensus is shown for a constant and variable reference state along with some numerical simulations. Chapter 4 we find the kinematic models of a unicycle and differential robot, as well as the control algorithms that solve the problem of formation and tracking of trajectories for groups of mobile robots. Chapter 5 presents numerical results derived from Chapter 4 for a set of unicycle-like robots. In particular, the control algorithm is calculated for three mobile robots that follow a circular path in a triangular-conforming formation. Chapter 6 presents the mechanical structure of a Lego EV3 differential robot and its holonomic limitations. On the other hand, we try to implement the control algorithms that solve the formation and tracking problem for a group of differential robots, and at the same time we show the technical limitations that prevented the implementation of these algorithms. Thus, it is proposed to mimic the problem of formation and tracking problem by means of poses. Finally, Chapter 7 gives the conclusions of the research and an alternative solution for the implementation of the controllers in Lego EV3 differential robots.

Capítulo 1

Introducción

En la naturaleza, se pueden observar grupos de animales que exhiben comportamientos colectivos organizados, como por ejemplo: las aves en parvadas y los cardúmenes de peces que se mueven en grupos. Recientemente, estos comportamientos armonizados han sido de interés por la comunidad científica. Por lo tanto, esto ha traído como resultado el diseño de protocolos que permiten imitar estos comportamientos colectivos con diferentes tipos de agentes móviles para trabajar de forma coordinada y cumplir con ciertos objetivos preestablecidos, como por ejemplo una formación [1–3].

Hoy en día se han desarrollado una gran variedad de vehículos no tripulados como por ejemplo: robots móviles con ruedas [1, 4, 5], vehículos aéreos [2, 6], satélites y naves espaciales [3, 7]. Estos sistemas complejos, están constituidos por sensores, procesadores, dispositivos de comunicación, etc. Sin embargo, a pesar de la variedad de componentes que los conforman, estos pueden ser vistos como un solo sistema, sin considerar la dificultad con la que están diseñados.

Al considerar varios agentes móviles como robots con ruedas, drones y satélites trabajando de manera conjunta, se pueden resolver tareas más complejas que serían difíciles e inclusive imposibles de lograr para un solo agente. Esto, a su vez, también plantea algunos retos y no solo ventajas, tanto tecnológicamente y teóricamente. Uno de los retos en este contexto es analizar la conectividad que tienen los miembros del grupo entre sí, y además, como manipular y compartir información entre los miembros del grupo para cumplir con una tarea. Otra de las complicaciones de estos problemas, es que la información podría ser limitada y expuesta a ruido externo. Por último, se debe considerar como se comparte información y cuál es la información que se está compartiendo. Este tipo de problema ha sido llamado por la comunidad científica, en particular, como problema de consenso en múltiples agentes [6, 8, 9].

Basándose en la teoría de grafos [10], se ha observado que la topología de interacción entre los agentes es un factor clave a considerar para el problema de consenso [11, 12]. Por otra parte, también se han mostrado las condiciones suficientes y necesarias para que se logre el consenso bajo una topología de interacción invariante en el tiempo, se ha establecido que la topología de interacción del intercambio de información de los miembros del grupo debe tener un árbol de expansión dirigido [6].

Además, también se ha demostrado que en una red con topología de comunicación cambiante en el tiempo el consenso puede ser logrado como en [6], con la condición de que la topología contenga un árbol de expansión [12, 13]. Estos trabajos han establecido las bases teóricas y analíticas para abordar el problema de consenso en sistemas compuestos por diversos agentes. El objetivo principal del problema de consenso, es que, un grupo de agentes que se encuentren interactuando entre sí, logren llegar a un acuerdo sobre un parámetro de interés, todo esto usando interacciones locales entre los agentes del grupo. Usualmente, lo que se busca es que se converja a un parámetro de referencia o un valor de separación con respecto a una referencia establecida. El parámetro de referencia está establecido por un agente, este agente puede ser llamado en la literatura como “agente líder” y el resto de los agentes son llamados “seguidores”. El agente “líder” o “maestro” es el encargado de establecer el parámetro de referencia, mientras que los demás miembros del grupo llamados “seguidores” deben converger al valor de referencia establecido por el “líder”. En diversas investigaciones se ha estudiado el problema de consenso con diferentes tipos de referencia, pero particularmente se pueden clasificar en dos tipos. El primer tipo de referencia estudia el consenso en donde la referencia es una constante y muestra las condiciones matemáticas que se deben cumplir para lograr el consenso, como en [14, 15]. El segundo tipo de referencia sucede cuando esta es variante en el tiempo y es la más estudiada debido a sus diversas aplicaciones en la ingeniería [16–18].

Una de las aplicaciones de sistemas compuestos por varios agentes, en el ámbito de la ingeniería, son los llamados robots móviles, que deben trabajar de manera conjunta para cumplir con los objetivos deseados. Algunas de las aprovechamiento de este tipo de robots móviles son: traslado de cargas pesadas, vigilancia en lugares restringidos, inspección de áreas peligrosas o desconocidas, envíos de objetos a lugares de difícil acceso, entre otras aplicaciones [19, 20]. Diversos investigadores han abordado este problema de diferentes maneras, como en [21] donde se presentan controladores distribuidos para múltiples vehículos autónomos usando potenciales artificiales y la estructura de líder virtual. Por otro lado, en [22] se ha abordado el problema de formación en múltiples robots móviles usando estructuras virtuales y en [23] se ha estudiado de igual forma el problema de formación usando la estructura de líder-seguidor.

En investigaciones anteriores se ha abordado el problema de formación y/o seguimiento de trayectoria considerando principalmente la dinámica de los agentes móviles haciendo la tarea de análisis y diseño de los controladores más compleja. De este modo, para este trabajo se propone el diseño de controladores que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria considerando solo la cinemática de cada uno de los agentes haciendo el diseño y análisis de estos menos complejo. En particular, el problema de formación y seguimiento

de trayectoria es tratado como un problema de consenso.

El problema de formación y seguimiento de trayectoria consiste en tener un arreglo de N robots móviles tipo diferencial y unicycle que son descritos por un su modelo cinemático. En concreto, el problema radica en establecer algoritmos de control y condiciones matemáticas que le permitan a cada uno de los robots involucrados en el sistema cumplir con los objetivos de control, es decir, estos robots deben llegar a un acuerdo entre ellos sobre un parámetro de interés, que para este trabajo son la posición y orientación (x, y, θ) este parámetro de interés debe permitirle a cada robot móvil mantenerse a una posición y orientación relativa entre cada uno de ellos constante a lo largo del tiempo, y además, siguiendo una trayectoria establecida. La trayectoria deseada y los parámetros de interés para que los robots se sitúen a una distancia relativa entre ellos esta dado por un robot líder virtual que posee la misma estructura mecánica, y por lo tanto, la misma cinemática que los demás robot móviles que conforman el sistema. Por otra parte, en cuanto a la parte matemática se debe establecer la topología de interacción del intercambio de información entre los robots móviles para lograr los objetivos de control de posición y orientación.

Al mismo tiempo, también es posible encontrar en la literatura diversos artículos relacionados con este problema, como en [24] donde se presenta un diseño de control cooperativo, que forzará a un grupo de robots móviles tipo unicycle a seguir una formación deseada garantizando que no colisionen entre ellos y además considerando la dinámica de los robots. En [25] se propone un nuevo esquema de control de seguimiento de formación usando una cámara y sin considerar mediciones de posición y velocidad. En [26] Se establecen leyes de control para que un conjunto de agentes con restricciones no holonómicas converjan a un punto de interés bajo diferentes tipos de topologías de comunicación.

En particular, en este trabajo de tesis se propone diseñar algoritmos de consenso que le permitan a un grupo de robots móviles seguir una trayectoria deseada en una formación específica. El principal trabajo relacionado con esta tesis se muestra en [4] en donde se presenta una estructura de control diseñada con base en un líder y un seguidor. Este trabajo, junto con las investigaciones citadas anteriormente, ayudaron a resolver el problema de formación y seguimiento de trayectoria para robot móviles considerando solo la cinemática del cada uno de los robots móviles.

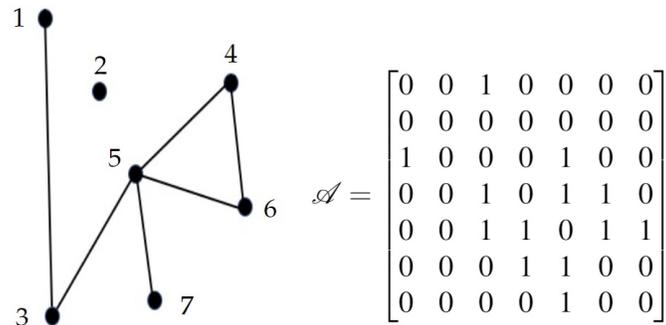
Capítulo 2

Fundamentos de teoría de grafos y redes en consenso

En este capítulo se presentan de manera breve varias herramientas matemáticas, conceptos y definiciones sobre la teoría de grafos [27]. También, se presenta un protocolo de consenso y su análisis de convergencia.

2.1. Teoría de grafos

La teoría de grafos ha sido bastante útil para representar a los sistemas en donde existen interacciones entre múltiples agentes y la relación entre las propiedades del grafo de la red, además de diversos atributos de estos tipos de sistemas [28] como la estabilidad y la velocidad de convergencia [29,30] todo lo que se sabe está firmemente establecido en la literatura. A continuación enumeraremos varios conceptos y definiciones de la teoría de grafos relevantes para el problema de consenso. Una parte fundamental para estudiar sistemas de múltiples agentes, es poder describir las interacciones entre los miembros del grupo. Para ello, tomamos de la teoría de grafos el concepto de vértices para representar a los agentes de un sistema y las aristas para representar la interacción entre los agentes. Asimismo, estos elementos pueden ser representados como puntos y líneas que unen los puntos. Los enlaces pueden o no tener una dirección específica. Un grafo \mathcal{G} es un conjunto finito no vacío constituido por dos elementos llamados nodos y aristas $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \varepsilon)$, donde \mathcal{N} es el conjunto de nodos $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_n\}$ y ε es la relación que existe entre un par de nodos $\varepsilon \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. En la Figura 2.1 se muestra una representación genérica de un grafo junto con su matriz de adyacencia, en donde se indica en cada renglón la conexión que hay entre un nodo y otro. También se observa que el grafo tiene 7 nodos y 6 aristas. Por otra parte, un grafo \mathcal{G} puede ser dibujado en más de una manera como se muestra en la Figura 2.2 donde a pesar de que los dibujos son distintos, las conexiones entre los nodos se mantiene igual.



(a) Grafo no dirigido con 7 nodos. (b) Matriz de adyacencia del grafo.

Figura 2.1: Representación genérica de un grafo con su matriz de adyacencia.

Ejemplo 1: Sea $\mathcal{N} = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{E} = \{x, y, z, w\}$ obtenga dos dibujos distintos para el mismo grafo $\mathcal{G}_e = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$.

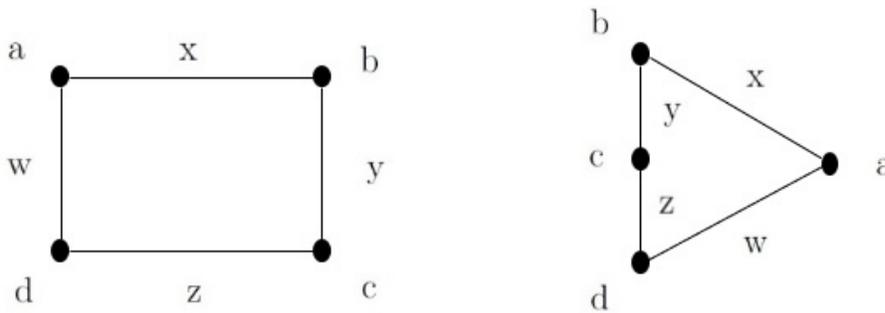


Figura 2.2: Dos representaciones distintas para \mathcal{G}_e del Ejemplo 1.

Si hay una arista dirigida desde el nodo \mathcal{N}_i al nodo \mathcal{N}_j , entonces \mathcal{N}_i se define como el nodo padre y \mathcal{N}_j se define como el nodo hijo. Un camino dirigido del nodo i al nodo j que es una secuencia de aristas ordenadas de la forma $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2), (\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3) \dots (\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j)$, donde $\mathcal{N}_{i,j} \in \mathcal{N}$.

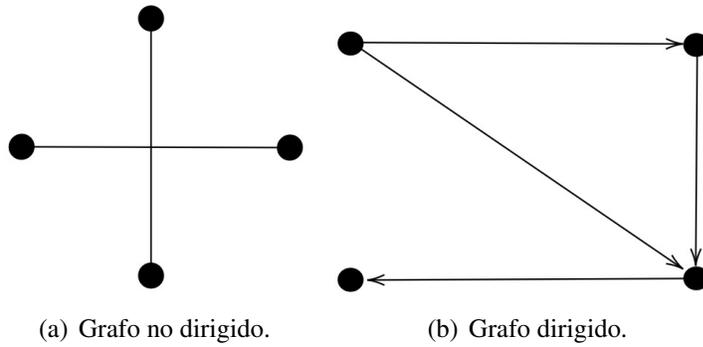


Figura 2.3: Representación de los tipos de grafos.

Un grafo dirigido se conoce como fuertemente conexo si hay un camino dirigido para cualquier par de nodos en el grafo. Un ejemplo de un grafo fuertemente conexo se muestra en la Figura 2.4.

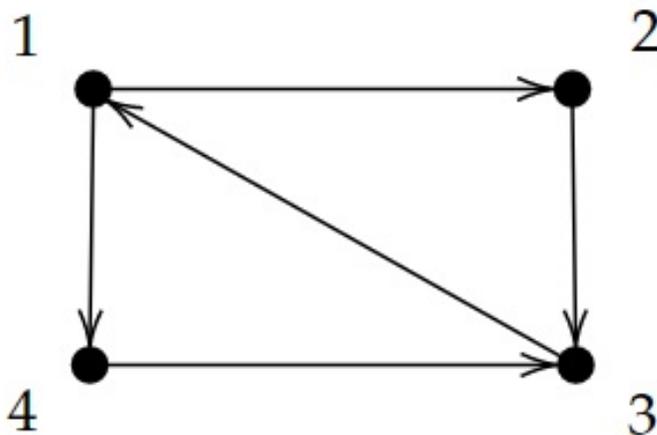


Figura 2.4: Representación de un grafo fuertemente conexo.

Un árbol de expansión dirigido es aquel, donde cada nodo, excepto la raíz, tiene exactamente un padre. Asimismo, un árbol de expansión de un dígrafo es un árbol dirigido formado por aristas del grafo que conectan todos los nodos del grafo. Decimos que un grafo contiene un árbol de expansión, si existe un árbol de expansión que es un subconjunto del grafo. Obsérvese que la condición de que un dígrafo tenga un árbol de expansión es equivalente al caso de que existe un nodo que tiene un camino dirigido a todos los demás nodos.

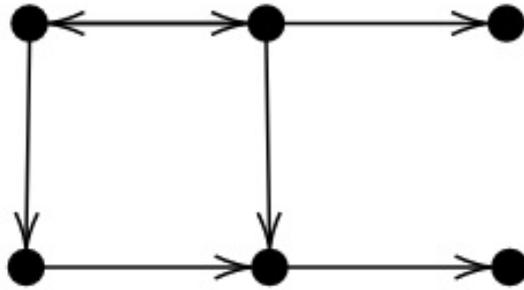


Figura 2.5: Grafo dirigido donde se puede observar más de un árbol de expansión, y además, no es fuertemente conexo.

Tener una representación matricial del grafo es fundamental para este proyecto, por lo tanto, la matriz de adyacencia es de gran utilidad para establecer relaciones entre los nodos de un grafo. La matriz de adyacencia se define como $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$, donde $a_{ij} = 1$ si hay un enlace que conecta al nodo i con el nodo j y $a_{ij} = 0$ si no están conectados. Esta matriz es tal que, una entrada distinta de cero a_{ij} indica la presencia de una arista desde el vértice j al vértice i y una entrada cero a_{ij} implica que no hay una arista que conecta estos dos nodos. Considere la figura siguiente de un grafo dirigido al cual se le calcula su matriz de adyacencia. En la Figura 2.6 se muestra un grafo y su matriz de adyacencia asociada.

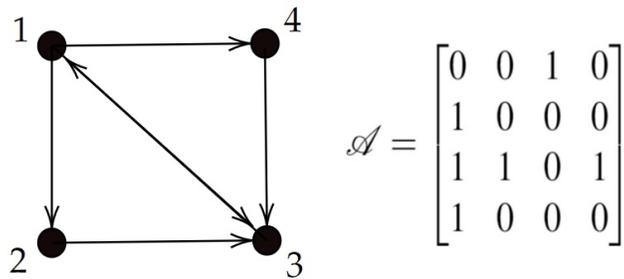


Figura 2.6: Grafo dirigido y su matriz de adyacencia asociada.

De igual relevancia, para este trabajo de tesis es necesario el uso de la matriz Laplaciana de un dígrafo, la cual está definida de la siguiente manera $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$, donde $l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ y además, $l_{ij} = -a_{ij}$ donde $i \neq j$. La matriz Laplaciana de un grafo no dirigido es simétrica definida positiva.

En el siguiente ejemplo se calcula la matriz Laplaciana asociada al grafo mostrado en la Figura 2.6.

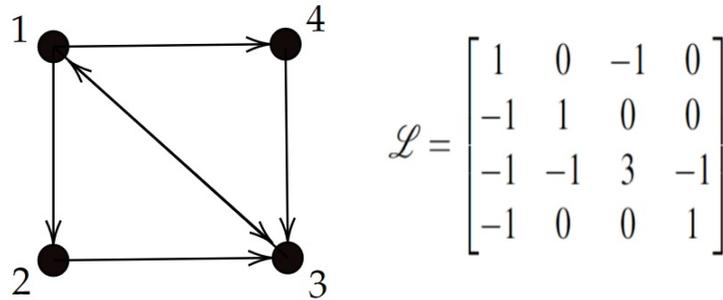


Figura 2.7: Grafo dirigido y su matriz de Laplaciana asociada.

Es posible observar de la Figura 2.7 que la suma de los elementos de las filas de la matriz Laplaciana \mathcal{L} dan como resultado cero. Por lo tanto, \mathcal{L} siempre tiene un eigenvalor $\lambda_i = 0$. Este eigenvalor corresponde al eigenvector $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ esto debido a que $\mathbf{1}$ pertenece al espacio nulo de \mathcal{L} ($\mathcal{L}\mathbf{1} = 0$) [31].

2.2. Control cooperativo

El control cooperativo para un sistema de múltiples vehículos autónomos es de gran interés para este trabajo, ya que trae consigo algunas complicaciones. La más importante es el análisis del intercambio de información en el grupo de agentes, y como afecta la coordinación entre ellos para completar exitosamente una tarea. Por otra parte, el diseño de controladores para cumplir con una tarea en específico y están involucrados múltiples agentes se le conoce como control cooperativo.

Los objetivos de control del equipo se acoplan a través de las tareas asignadas, en lugar de las interacciones dinámicas o limitaciones físicas. El control cooperativo, para un grupo de vehículos depende del medio en el cual se encuentran actuando. Por tanto, para caracterizar los elementos de un entorno se define a X_i , que representa de manera generalizada el espacio de estados para un i -ésimo vehículo. Para la mayoría de problemas de control cooperativo, el intercambio de información podría incluir la posición de un vehículo en el entorno en el que está situado y las acciones factibles para un vehículo están dadas por $U_i(X_i)$, donde las acciones afectan directamente la calidad y factibilidad para una buena cooperación entre un grupo de vehículos.

De este modo, de acuerdo a [15] se hacen 3 suposiciones importantes.

1. La disponibilidad de un conocimiento global de los miembros del equipo para algún agente.
2. Una comunicación perfecta e ilimitada entre los vehículos de manera unidireccional o bidireccional.
3. La capacidad de planificar las acciones del grupo de manera centralizada.

Un esquema de coordinación centralizado se basa en la suposición de que cada miembro del equipo tiene la capacidad de comunicarse con una ubicación central o de compartir información a través de una red totalmente conectada.

Sin embargo, en la vida real, en ocasiones el esquema centralizado no se adapta bien al número de agentes conectados, esto debido a que, si la comunicación del agente central encargado de enviar información hacia todos los demás agentes falla, el sistema completo también fallará. De la misma forma, las topologías de comunicación del mundo real no suelen estar totalmente conectadas. En muchos casos, dependen de las posiciones relativas de los vehículos y de otros factores ambientales, por lo que cambian dinámicamente en el tiempo. Por consiguiente, el control cooperativo en presencia de las limitaciones de comunicación del mundo real se convierte en un reto importante.

Por tanto, este problema puede ser resuelto introduciendo un agente virtual, es decir, un agente que no este físicamente interactuando con los demás agentes y su entorno. De este modo, con la adaptación de este nuevo agente virtual que actúa como el líder encargado de enviar información a todos los demás agentes, es posible aumentar la robustez y fiabilidad del intercambio de información del sistema completo, ya que el agente virtual no queda expuesto a problemas técnicos como el fallo de dispositivos de comunicación inalámbrica. Por lo tanto, en este trabajo de tesis se pretende utilizar un esquema de control centralizado con un líder virtual. Por otro lado, para comprender las cuestiones fundamentales inherentes a todos los problemas de control cooperativo, se establece el siguiente axioma fundamental.

Axioma 1. Compartir información es una condición necesaria para la cooperación.

Bajo este axioma, el intercambio de información se convierte en una cuestión central en el control cooperativo. Por tanto, la cooperación se producirá si cada miembro del equipo tiene acceso a una información de coordinación coherente, precisa y completa.

2.3. Algoritmo de consenso en control cooperativo

Cuando varios agentes concuerdan con el valor de una variable de interés, se dice que se ha logrado el consenso, en otras palabras el consenso es un parámetro de interés en común al cual el grupo de agentes que conforman un sistema buscan converger. Para llegar al consenso, debe existir un parámetro de interés. El parámetro es considerado como un estado de información.

Las variables de estado representan una pieza clave para un buen desempeño del algoritmo de consenso, esto debido a que los algoritmos de consenso están diseñados a ser distribuidos, asumiendo únicamente la interacción de vecino a vecino entre los agentes involucrados. Los agentes actualizan su valor de estado instante a instante en función de la información disponible por parte de sus vecinos o agentes que comparten información directamente con él.

A continuación se diseña un algoritmo de control, tal que, los estados de información de los agentes miembros del grupo logren llegar al consenso [32].

2.4. Protocolo de consenso

Como ya se mencionó anteriormente, la idea principal de un protocolo de consenso es imponer una dinámica similar con respecto a los estados de los agentes que conforman una red. Por otro lado, si la red de comunicación entre los agentes es conexa, es posible modelar el comportamiento de la red con base en la información de los estados a través de una ecuación diferencial.

Supóngase que hay n agentes interactuando entre ellos, entonces la topología de interacción entre los agentes, puede ser representada por un grafo dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \varepsilon)$ donde las aristas son la relación que hay entre un agente y otro agente $\varepsilon \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, entonces es posible proponer un protocolo de consenso [6, 12]. La dinámica del agente de primer orden se muestra a continuación en la Ecuación 2.1.

$$\dot{\xi}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

con

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) [\xi_i(t) - \xi_j(t)], \quad i \neq j$$

Donde $a_{ij} = 0$ si no existe intercambio de información del agente i hacia el agente j y $a_{ij} = 1$ si hay intercambio de información. De igual importancia, $\xi_i, \xi_j \in \mathbf{R}$ son los estados de información del i -ésimo y j -ésimo agente, respectivamente. Si establecemos que $a_{ij} = 0$ esto significa que el agente i -ésimo no recibe información de un agente j -ésimo, $\forall i \neq j$. Recíprocamente si $a_{ij} \neq 0$ significa que el agente i -ésimo si recibe información de un agente j -ésimo, $\forall i \neq j$. En términos simples la Ecuación 2.1 nos dice la información que tiene disponible el agente i -ésimo por parte de uno u otros agentes que se encuentren en la red.

Para este trabajo de tesis se asume que se tiene una topología de comunicación entre los agentes fija, y además, se consideran las constantes a_{ij} invariantes en el tiempo. De este modo, al desarrollar la Ecuación 2.1, obtenemos 2.2. Observe que los elementos de la diagonal del sistema 2.2 son igual a cero, ya que $a_{ii}(\xi_i(t) - \xi_j(t)) = 0$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(\xi_1(t) - \xi_2(t)) & \dots & a_{1n}(\xi_1(t) - \xi_n(t)) \\ a_{21}(\xi_2(t) - \xi_1(t)) & 0 & \dots & a_{2n}(\xi_2(t) - \xi_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\xi_n(t) - \xi_1(t)) & a_{n2}(\xi_n(t) - \xi_2(t)) & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Desarrollando y simplificando los términos de cada fila del sistema de Ecuaciones 2.2, podemos reescribirlo como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{12} + \dots + a_{1n} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{21} + \dots + a_{2n} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & a_{n1} + \dots + a_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Nótese que la matriz es de tamaño $n \times n$. Observe que la Ecuación 2.3 cumple con la definición de una matriz Laplaciana expuesta en la Sección 2.1, ya que los elementos de la diagonal es igual a la suma de los elementos de la fila, pero con signo contrario. Por lo tanto, es posible reescribir la Ecuación 2.1 como se muestra a continuación:

$$\dot{\xi}(t) = -\mathcal{L}\xi(t) \quad (2.4)$$

Donde $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$ son los estados de información y $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n} \forall i \neq j$ con $a_{ij} = -\sum_{j \neq i} a_{ij}$ es la matriz Laplaciana asociada al grafo \mathcal{G} que representa la comunicación entre los agentes. Se dice que el consenso es alcanzado por un grupo de agentes si $|\xi_i - \xi_j| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.

2.5. Análisis de convergencia del protocolo de consenso

Theorema 2.5.1. Sea $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$, y sea $R_i(A)$ la suma de los valores absolutos de las entradas que no están en la diagonal de la matriz \mathcal{A}

$$R_i(A) = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Entonces, todos los eigenvalores de \mathcal{A} se encuentran en la unión de los n discos.

$$\bigcup_{i=1}^n \{ \lambda_i \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{ij}| \leq R_i(A) \}$$

Demostración. Se sabe del algebra lineal que:

$$A\vec{V} = \lambda\vec{V}. \quad (2.5)$$

Entonces, podemos reescribir la Ecuación 2.5 de la siguiente manera.

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} v_j + a_{ii} v_i = \lambda v_i$$

Despejando y tomando los valores absolutos obtenemos la Ecuación 2.6. Donde v_i es la magnitud de la entrada más grande.

$$|\lambda - a_{ij}| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} \right| \left| \frac{v_j}{v_i} \right| \quad (2.6)$$

Por último, aplicando la desigualdad del triángulo se demuestra que

$$|\lambda - a_{ij}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (2.7)$$

□

Se sabe de la literatura que la suma de las entradas de cada fila de \mathcal{L} da como resultado cero. Además, $\lambda_i = 0$ es un eigenvalor correspondiente a la matriz Laplaciana \mathcal{L} obtenida a partir de un grafo fuertemente conexo, véase la preposición 3 de [31]. Donde $\lambda_i = 0$ es un eigenvalor asociado con el eigenvector $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$. Aplicando el Teorema 2.5.1 a la matriz Laplaciana obtenida a partir de un grafo fuertemente conexo, obtenemos que todos los eigenvalores de \mathcal{L} diferentes de cero, tienen parte real positiva [33]. Por consiguiente, podemos concluir que los eigenvalores de $-\mathcal{L}$ tiene parte real negativa y se pueden ordenar como en [34].

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$$

Resulta, que si cero es un eigenvalor de la matriz Laplaciana \mathcal{L} entonces $|\xi_i - \xi_j| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, tener un grafo fuertemente conexo, solo es una condición de suficiencia para que se cumpla lo anterior.

Considere la matriz Laplaciana \mathcal{L}_a y \mathcal{L}_b obtenidas de un grafo que no es fuertemente conexo, y otro que si es fuertemente conexo.

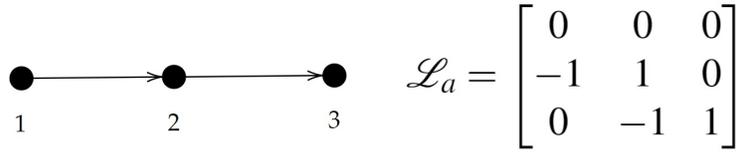


Figura 2.8: Grafo que no es fuertemente conexo y su matriz Laplaciana.

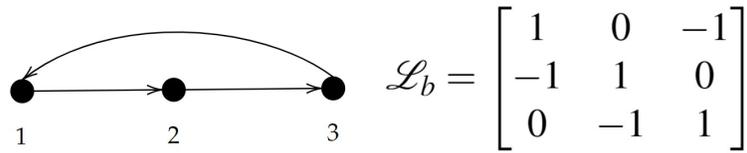


Figura 2.9: Grafo fuertemente conexo y su matriz Laplaciana.

Los eigenvalores asociados a la matriz \mathcal{L}_a son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Igualmente, los eigenvalores asociados a la matriz \mathcal{L}_b son $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - i\sqrt{3})$, $\lambda_3 = 0$. Asimismo, el eigenvector asociado con el eigenvalor $\lambda_i = 0$ de \mathcal{L}_a y \mathcal{L}_b es $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.

Observe que no se tiene un grafo fuertemente conexo en la Figura 2.8. Sin embargo, se tiene que los eigenvalores de la matriz Laplaciana $-\mathcal{L}_a$ son de la forma $0 = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$. Donde $\lambda_i = 0$ es el máximo eigenvalor de todos los eigenvalores obtenidos de los grafos de las Figuras 2.8 y 2.9. En consecuencia de lo mostrado en esta sección, es de interés enunciar el siguiente Teorema.

Theorema 2.5.2. *Un grupo de agentes involucrados en un sistema alcanza el consenso global asintóticamente si y sólo si el grafo de comunicación asociado \mathcal{G} tiene un árbol de expansión.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, se pueden enumerar los agentes sucesivamente de acuerdo a su profundidad en el árbol de expansión, es decir, el nodo raíz es enumerado como A_1 , el nodo hijo de A_1 es enumerado A_2 , el nodo hijo de A_2 como A_3 y Así sucesivamente hasta A_p con $p = 1, 2, 3, \dots, q$. Considérese el protocolo de consenso mostrado en la Ecuación 2.1 y su representación análoga mostrada en la Ecuación 2.4. Donde \mathcal{L} recordemos que representa la matriz Laplaciana. En este caso, la matriz Laplaciana \mathcal{L} está asociada a un árbol de expansión de un grafo \mathcal{G} . Así pues, la raíz A_1 no tiene padres, por lo tanto, la fila 1 de la matriz Laplaciana \mathcal{L} todas sus entradas serán igual a cero y para todas las demás filas se tiene que las entradas de su diagonal serán igual a 1 debido a que cada nodo A_p para $p \neq 1$ tienen un padre por ser un árbol de expansión. De este modo, se puede concluir fácilmente por obtener una matriz triangular inferior que los eigenvalores de la matriz Laplaciana \mathcal{L} son igual a 1 y solo un eigenvalor es igual a cero. Finalmente, de acuerdo al Teorema 3.1 de [35] el grupo de agentes alcanza el consenso global de forma asintótica. \square

Lema 2.5.1. *Suponga que $z = [z_1, \dots, z_p]^T$ con $z \in \mathbf{R}_m$ y $\mathcal{L}_p \in \mathbf{R}^{p \times p}$ es la matriz Laplaciana que se presenta en la Sección 2.5. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. \mathcal{L}_p tiene un eigenvalor cero simple con un eigenvector asociado $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ y todos los demás eigenvalores tienen parte real positiva.
2. $\mathcal{L}_p z = 0$ implica que $z_1 = z_2 = \dots = z_p$.
3. El consenso es alcanzado asintoticamente por el sistema $\dot{z} = -\mathcal{L}_p z$.
4. El grafo dirigido de \mathcal{L}_p tiene un árbol de expansión.
5. El rango de \mathcal{L}_p es $p - 1$.

Lema 2.5.2. *Suponga que z y \mathcal{L}_p están definidos como en el Lema 2.5.1. Entonces las 4 condiciones siguientes son equivalentes.*

1. El grafo dirigido de \mathcal{L}_p tiene un árbol de expansión dirigido y el agente k no tiene aristas entrantes.
2. El grafo dirigido de \mathcal{L}_p tiene un árbol de expansión y todas las entradas del agente k de la fila de \mathcal{L}_p son igual a cero.
3. El consenso es alcanzado asintoticamente por el sistema $\dot{z} = -\mathcal{L}_p z$, donde $z_i(t) \rightarrow z_k(0)$, $i = 1, \dots, p$, cuando $t \rightarrow \infty$.
4. El agente k es el único nodo que tiene un camino directo hacia todos los demás agentes del grupo.

Para ilustrar el Lema 2.5.1 y 2.5.2 consideraremos el grafo de la Figura 2.8. Observe que el grafo de la Figura 2.8 tiene un árbol de expansión dirigido y su matriz Laplaciana tiene una fila de ceros asociada al nodo uno que también tiene un camino dirigido hacia todos los demás nodos del grafo. Por otra parte, la suma de todas sus filas son igual a cero. De este modo, se cumplen las condiciones de los Lemas 2.5.1 y 2.5.2. Los resultados de consenso se muestran a continuación.

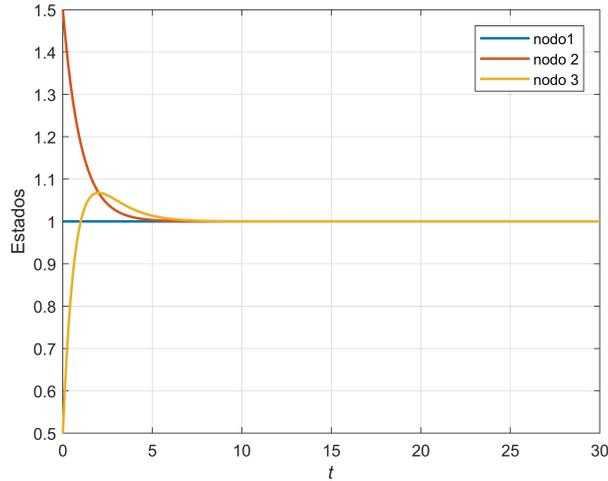


Figura 2.10: Evolución de los estados a través del tiempo del grafo de la Figura 2.8.

2.5.1. Consenso bajo diferentes topologías de comunicación

Como resultado de lo anterior, se muestran 4 casos diferentes de topologías de comunicación entre agentes, con el objetivo de exhibir principalmente lo establecido en el Teorema 2.5.2. El primer y segundo caso muestran como no es posible que se logre el consenso global entre los agentes debido a que no se cumplen las condiciones matemáticas establecidas en esta sección. Por otro lado, el tercer y cuarto caso muestran como se logra el consenso global por los agentes, esto debido a que se cumplen las condiciones matemáticas ya mencionadas.

Caso 1. Topología de comunicación con grupos separados.

En el caso donde la topología de comunicación tiene grupos separados, como se muestra en la Figura 2.11, el consenso global no puede ser alcanzado por el grupo de agentes que componen la red del grafo, debido a que el par de agentes 1 y 2 no tiene información de los estados de 3 y 4. Más aún, la matriz Laplaciana \mathcal{L} asociada al grafo de la Figura 2.11 tiene dos eigenvalores iguales a cero, y además, no se cumple el Teorema 2.5.2.

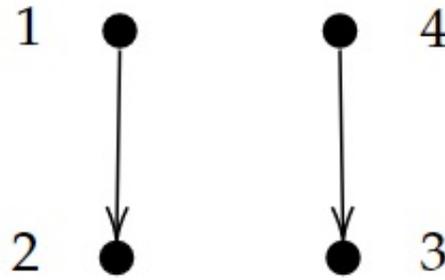


Figura 2.11: Topología de comunicación con dos grupos separados.

La dinámica de cada uno de los agentes de acuerdo a la Figura 2.11 con $\dot{\xi}_i(t) = u_i(t)$ y $i = 1, 2, 3, 4$. Se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \\ \dot{\xi}_4(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \\ \xi_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

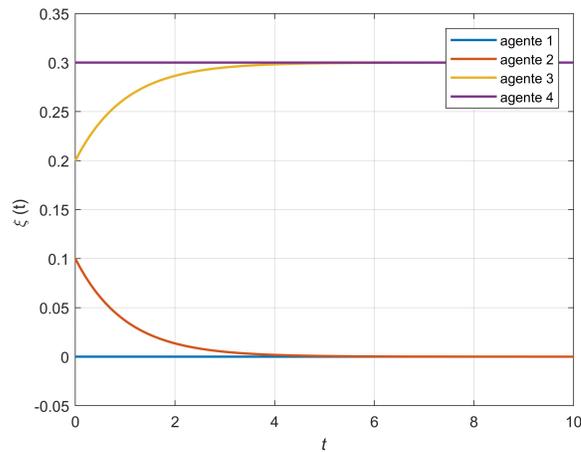
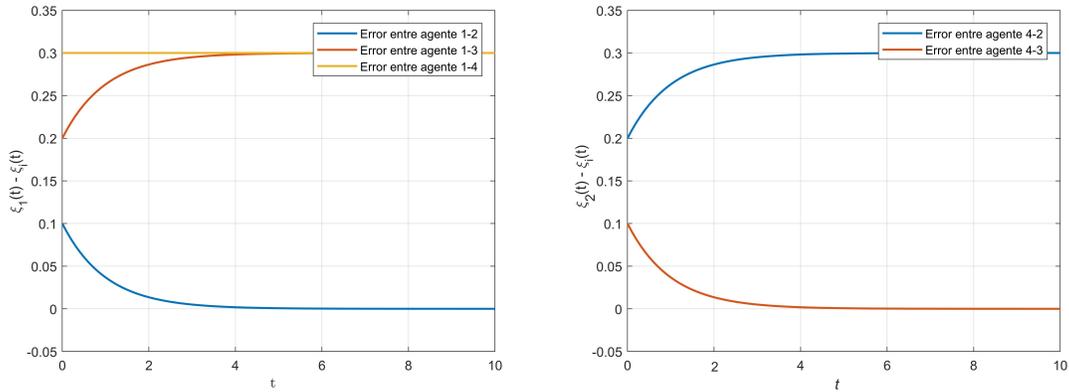


Figura 2.12: Evolución de los estados de la Figura 2.11.



(a) Error de los agentes $i = 2, 3, 4$ con respecto al agente 1.

(b) Error de los agentes $i = 2, 3$ con respecto al agente 4.

Figura 2.13: Errores entre los agentes de la Figura 2.15.

De la Figura 2.13 se observa como solo el agente 2 llega al consenso con el agente 1, mientras que el agente 3 llega al consenso con el agente 4. Por tanto, no se llega a un consenso global entre todos los agentes debido a que el error entre los agentes 1, 2 y 3, 4 no es cero o asintóticamente igual a cero.

Caso 2. Topología de comunicación con dos nodos raíz.

En el caso donde la topología de comunicación que presenta múltiples líderes o dos nodos raíz, como se muestra en la Figura 2.14, el consenso global no puede ser alcanzado por el grupo de agentes que componen la red, debido a que los dos nodos raíz 1 y 4 no se afectan entre sí y no conocen la información de estado del otro. Derivado de lo anterior, la matriz Laplaciana del grafo de la Figura 2.14 tiene dos eigenvalores igual a cero, ya que dos de sus filas son igual a cero y principalmente no se cumple el Teorema 2.5.2.

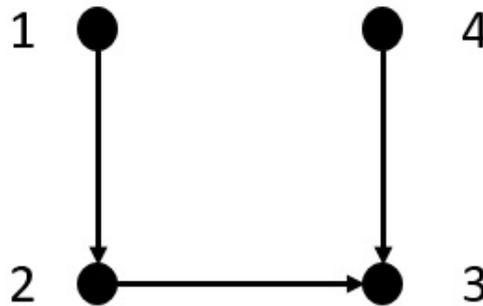


Figura 2.14: Topología de interacción con múltiples líderes.

La dinámica de cada uno de los agentes de acuerdo a la Figura 2.14 con $\dot{\xi}_i(t) = u_i(t)$ y $i = 1, 2, 3, 4$. Se presenta a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \\ \dot{\xi}_4(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

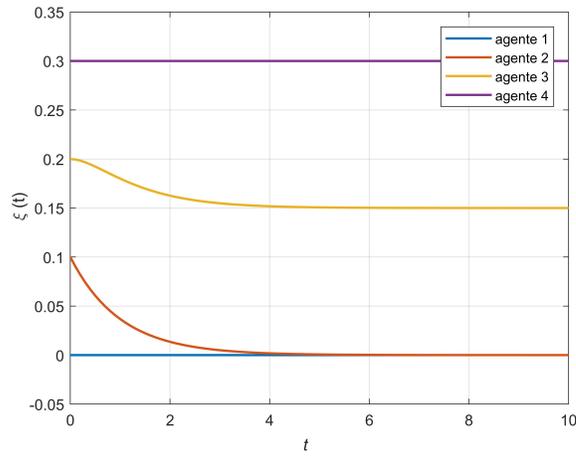


Figura 2.15: Evolución de los estados de la Figura 2.14.

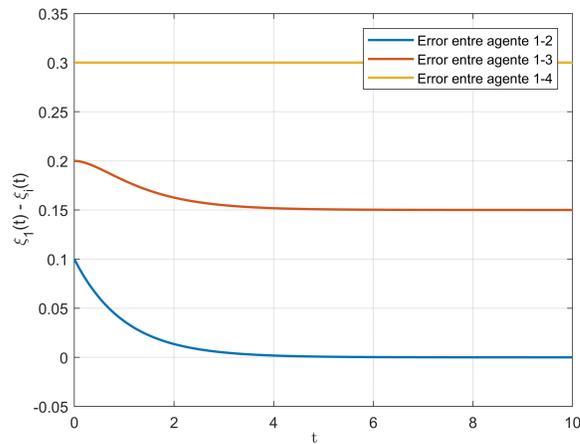


Figura 2.16: Error de los agentes $i = 2, 3, 4$ con respecto al agente 1 de acuerdo a la Figura 2.14.

De la Figura 2.15 y 2.16 se observa como el consenso solo es alcanzado por dos miembros del grafo de la Figura 2.14 que son el agente 1 y 2. El consenso global no se logra debido a que en el grafo mostrado en la Figura 2.14 no hay un camino dirigido de un agente hacia todos los demás agentes de la red. Por lo tanto, no se cumple el Teorema 2.5.2.

Caso 3. Topología de comunicación con un solo nodo raíz.

En este caso, se tiene una topología en donde se tiene un solo agente o nodo raíz que es el nodo 1. Es fácil observar que se cumple el Teorema 2.5.2 y también que se tiene un solo eigenvalor igual a cero de la matriz Laplaciana del grafo. De ahí, se puede concluir que el consenso global es alcanzado por todos los agentes del grupo (véase Figura 2.18). La topología de comunicación con un solo agente raíz que es etiquetado con el numero 1, se muestra a continuación:

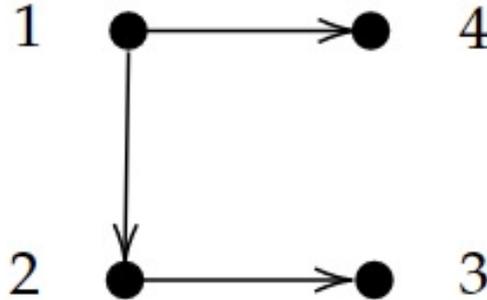
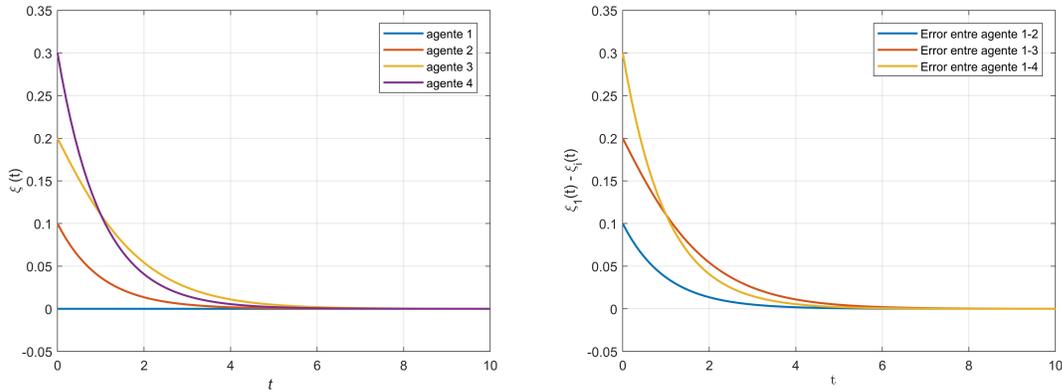


Figura 2.17: Topología de comunicación con el agente 1 como raíz.

La dinámica de cada uno de los agentes de acuerdo a la Figura 2.17 con $\dot{\xi}_i(t) = u_i(t)$ y $i = 1, 2, 3, 4$. Se presenta a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \\ \dot{\xi}_4(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \\ \xi_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$



(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 2, 3, 4$ con respecto al agente 1.

Figura 2.18: Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 2.17.

Al observar la Figura 2.18 se puede ver como los agentes 2, 3 y 4 convergen al mismo valor del agente 1. Por consiguiente, podemos decir que el consenso global es alcanzado por todos los miembros de la red.

Caso 4. Topología de comunicación de un grafo no dirigido

Si la topología de comunicación es no dirigida como se muestra en la Figura 2.19. Se sabe de la literatura que la matriz Laplaciana \mathcal{L} es positiva, semi-definida y tiene un único eigenvalor igual a cero, si y sólo si, el grafo está fuertemente conectado. Por lo tanto, el consenso global es alcanzado por el grupo de agentes como se muestra en la Figura 2.20. La diferencia entre las Figuras 2.19 y 2.17 es que en la Figura 2.19 la comunicación entre los agentes que están conectados entre sí, es bidireccional.

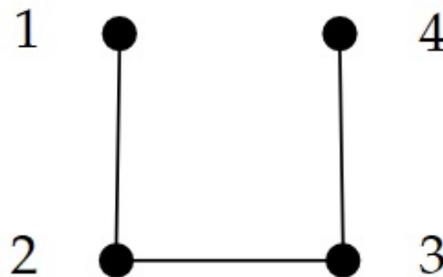


Figura 2.19: Topología de comunicación de un grafo fuertemente conexo.

La dinámica de cada uno de los agentes de acuerdo a la Figura 2.19 con $\dot{\xi}_i(t) = u_i(t)$ y $i = 1, 2, 3, 4$. Se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \\ \dot{\xi}_4(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \\ \xi_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

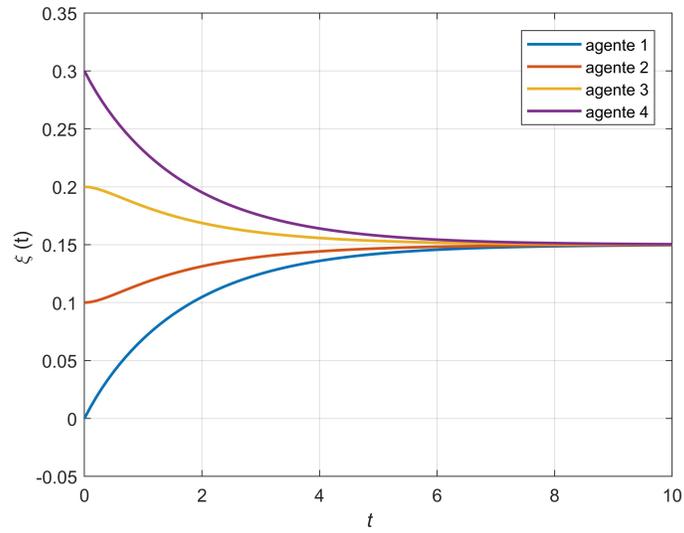


Figura 2.20: Evolución de los estados del grafo de la Figura 2.19.

Capítulo 3

Consenso de seguimiento a una referencia

Este capítulo se proponen los algoritmos de seguimiento y consenso para la dinámica de un solo integrador, donde los estados de los agentes se aproximan a un estado de referencia de consenso el cual puede ser constante o variable en el tiempo. Primero se propone analizar el algoritmo de seguimiento de consenso con un estado de referencia de consenso constante. A continuación, se propone un algoritmo de seguimiento de consenso a un estado de referencia variable en el tiempo. Se muestran condiciones en las que se alcanza en consenso a un estado de referencia constante y un estado de referencia variable en el tiempo. Para concluir, se analizan cuatro casos diferentes, es decir, cuatro grafos con topologías de comunicación distintas.

3.1. Consenso de seguimiento para una referencia constante

Con el protocolo de consenso mostrado en la Ecuación 2.1, de acuerdo al Teorema 2.8 de [15] se sabe que el equilibrio de consenso es una media ponderada de todos los estados de información iniciales de los agentes, y por tanto, es constante.

El equilibrio de consenso constante, que depende de la topología de la comunicación y de los pesos ponderados a_{ij} de la Ecuación 2.1, podría ser desconocido. La suposición de un equilibrio de consenso constante podría no ser apropiada cuando el estado de información de cada agente evoluciona con el tiempo, como ocurre en los problemas de control de formación, donde los estados evolucionan de manera variable en un espacio bidimensional o tridimensional. Además, la Ecuación 2.1 solo garantiza que los estados de información convergen a un valor común, pero no permite especificar un valor concreto como los resultados mostrados en [6]. En este caso, los problemas de convergencia incluyen tanto la convergencia a un valor común como la convergencia a un valor de referencia. Supóngase que se tiene un grupo de n agentes que interactúan entre sí, y además, se adiciona un agente virtual etiquetado como ξ_r que actúa como líder del grupo de n agentes. Al mismo tiempo, los agentes son etiquetados de la siguiente manera $1, 2, \dots, n$. La expresión del agente virtual se representaría como:

$$\dot{\xi}_r(t) = f(t, \xi_r) \quad (3.1)$$

Donde ξ_r representa el agente que impone una referencia constante, $f(., .)$ es una función continua a trozos y el tiempo t es localmente Lipchitz en ξ_r .

Recuerde que el objetivo principal de esta sección es proponer y analizar algoritmos de consenso para garantizar que cada agente del equipo siga una referencia constante cuando el agente ξ_r sólo comparte información para un subgrupo de los miembros del grupo. El problema de seguimiento de consenso con una referencia constante se resuelve si $|\xi_i(t) - \xi_r(t)| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$. Asimismo, $\mathcal{A}_r = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $\mathcal{L}_r \in \mathbf{R}^{n \times n}$ son las matrices de adyacencia y Laplaciana que están asociadas con el grafo $\mathcal{G}_r = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ que representa el intercambio de información entre el grupo de agentes $1, 2, \dots, n$ y el nodo que actúa como referencia ξ_r .

Considérese el caso donde el estado de referencia de consenso es constante, es decir, $\dot{\xi}_r(t) = 0$ en la Ecuación 3.1. Por tanto, el protocolo de consenso para una referencia de constante viene dado como:

$$\dot{\xi}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

con

$$u_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij} [\xi_i - \xi_j] - a_{ir} [\xi_i - \xi_r]$$

Donde ξ_r es el estado de la referencia y a_{ij} , es la entrada (i, j) de la matriz de adyacencia \mathcal{A} .

Theorema 3.1.1. *Supongamos que \mathcal{A} es constante. El problema de seguimiento del consenso con un estado de referencia constante se resuelve con el protocolo de consenso de la Ecuación 3.2, si y sólo si, el grafo dirigido \mathcal{G} tiene un árbol de expansión dirigido.*

Demostración. Observando que ξ_r es constante se obtiene $\dot{\xi}_r(t) = 0$. Dado que $\dot{\xi}_i(t) = u_i$ como se muestra en la Ecuación 3.2. Por lo cual, puede reescribirse en su forma matricial como:

$$\dot{\xi}(t) = -\mathcal{L} \xi(t)$$

donde $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_r]^T$ y $\mathcal{L} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es la matriz Laplaciana no simétrica. Observe que todas las entradas de la última fila de \mathcal{L} son cero y que el grafo dirigido de \mathcal{L} tiene un árbol de expansión dirigido si y sólo si \mathcal{G} tiene un árbol de expansión dirigido con el agente ξ_r como raíz.

Por lo tanto, de acuerdo a los enunciados (2) y (3) del Lema 2.5.2 con \mathcal{L} y ξ jugando el rol de \mathcal{L}_p y z , respectivamente permite que $|\xi_i(t) - \xi_r(0)| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ si y sólo si \mathcal{G} tienen un árbol de expansión dirigido esto debido a la consideración de que ξ_r es constante.

□

3.1.1. Ejemplos de consenso a una referencia constante.

Considere un grupo de 4 agentes junto con un agente virtual que interactúan entre sí con diferentes topologías. Obsérvese de las Figuras 3.1, 3.3, 3.5, 3.7 que el nodo ξ_r cumple con la función de establecer una referencia a la cual todos los demás agentes tiene que converger, es decir, el agente ξ_r es el líder y los demás agentes son seguidores, ya que tienen que converger a una referencia preestablecida por el nodo ξ_r . Además, Los elementos a_{ij} representan los coeficientes de la matriz Laplaciana asociada a las Figuras 3.1, 3.3, 3.5, 3.7.

La Figura 3.1 muestra la topología de comunicación entre 5 agentes y su matriz Laplaciana. Donde el nodo ξ_r representa al líder y los demás nodos 1, 2, 3, 4 representan a los otros agentes involucrados en la red. Note que, en la Figura 3.1 $a_{1r} = 1$ y $a_{ir} = 0$, $\forall i \neq 1$ con $i = j = r, 1, 2, 3, 4$. Se puede observar, que el agente líder solo comparte información con el agente 1. Por otra parte, se observa que hay un camino directo del nodo ξ_r hacia todos los demás agentes de la red y es mediante ese camino que los demás agentes de la red pueden recibir información del líder.

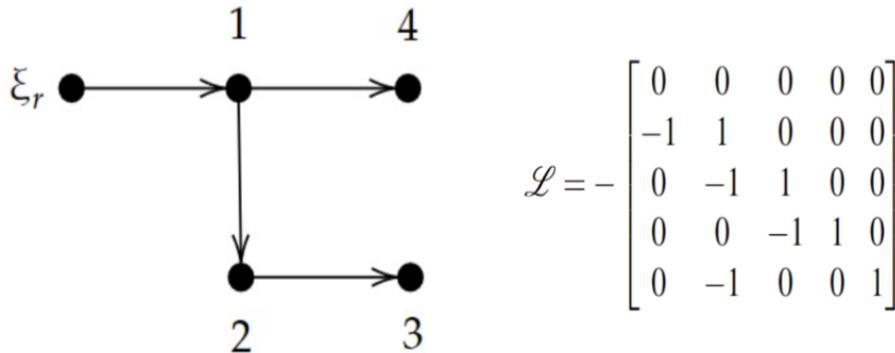
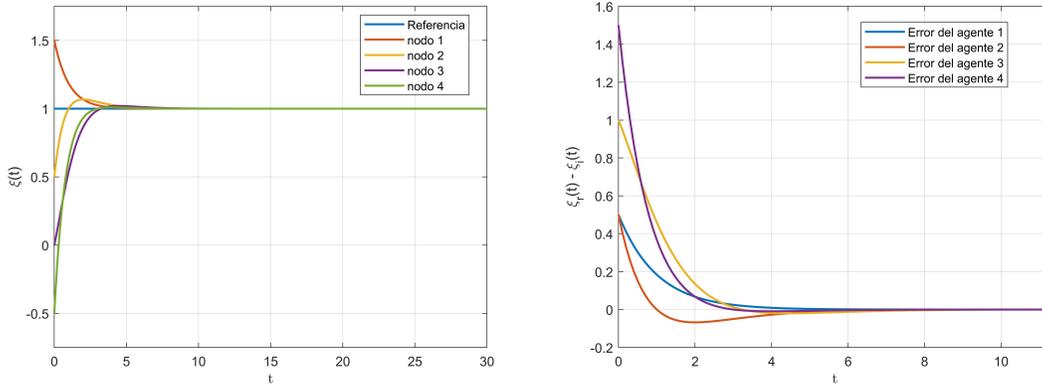


Figura 3.1: Topología de comunicación entre los nodos y su matriz Laplaciana.



(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto a ξ_r .

Figura 3.2: Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 3.1.

En la Figura 3.2 a) podemos observar como los agentes 1, 2, 3 y 4 bajo diferentes condiciones iniciales, tienden a seguir al agente ξ_r que actúa como una referencia constante igual a uno. Por otro lado, en la Figura 3.2 b) se observa como el error de los estados de los agentes 1, 2, 3 y 4 y el agente ξ_r tiende a cero a medida que transcurre el tiempo.

Para la topología de la Figura 3.3 se tiene que $a_{1r} = 1$, $a_{4r} = 1$ y $a_{ir} = 0$, $\forall i \neq 1$ y 4 con $i = j = r, 1, 2, 3, 4$. En otras palabras, el estado del agente ξ_r solo comparte información con el agente 1 y el agente 4. Por otra parte, se observa que hay un camino dirigido del agente ξ_r hacia todos los demás agentes de la red, es decir, hay un árbol de expansión dirigido.

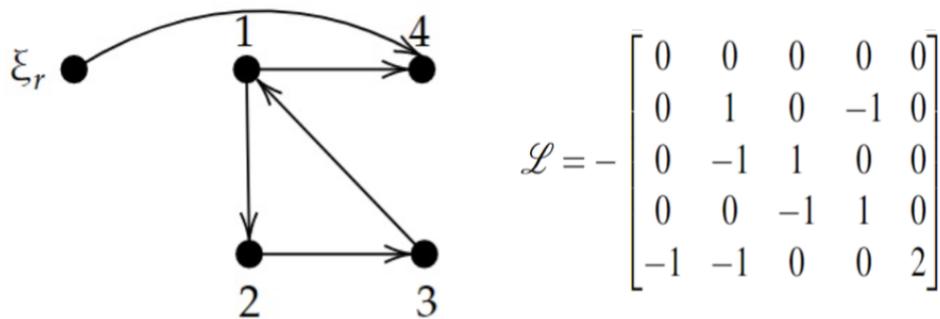
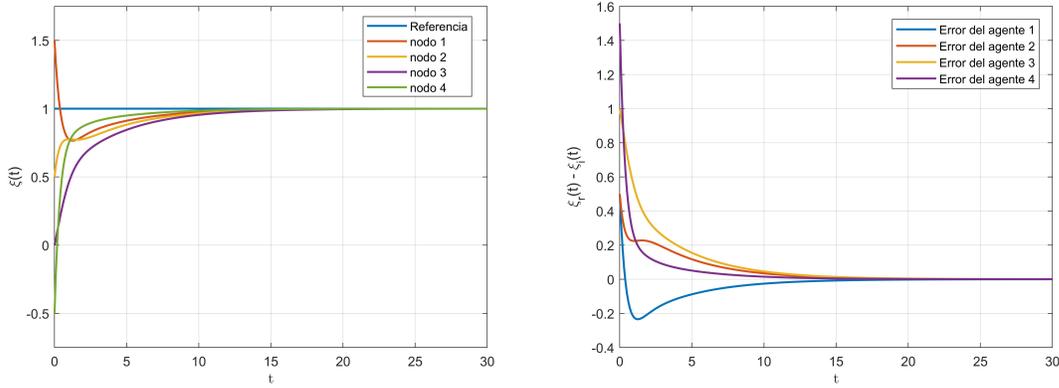


Figura 3.3: Topología de comunicación entre los nodos y su matriz Laplaciana.



(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto a ξ_r .

Figura 3.4: Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 3.3.

En la Figura 3.4 a) podemos observar como los agentes 1, 2, 3 y 4 bajo diferentes condiciones iniciales, tienden a seguir al agente ξ_r que actúa como una referencia constante igual a uno. Por otro lado, en la Figura 3.4 b) se muestra como el error entre los estados de los agentes 1, 2, 3 y 4 y el agente ξ_r tiende a cero a medida que transcurre el tiempo.

Para la topología de la Figura 3.5 se tiene que $a_{4r} = 1$ y $a_{ir} = 0, \forall i \neq 4$, es decir, el estado del agente ξ_r solo comparte información con el agente 4. Sin embargo, mediante el camino dirigido que hay del agente ξ_r hacia todos los demás agentes de la red, es posible que puedan tener acceso a su información, y de este modo, puedan lograr el consenso con hacia una referencia constante.

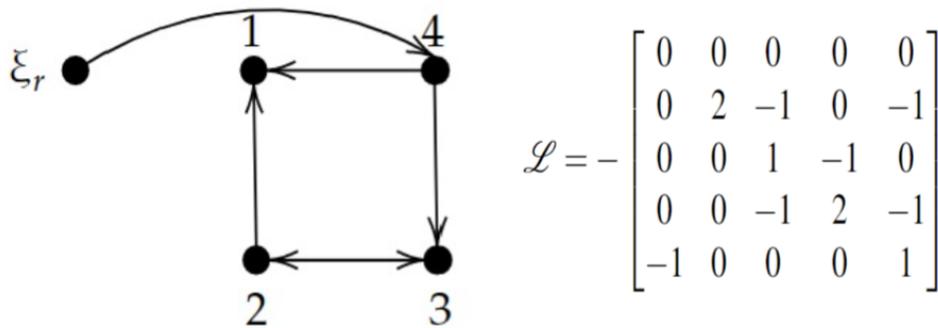
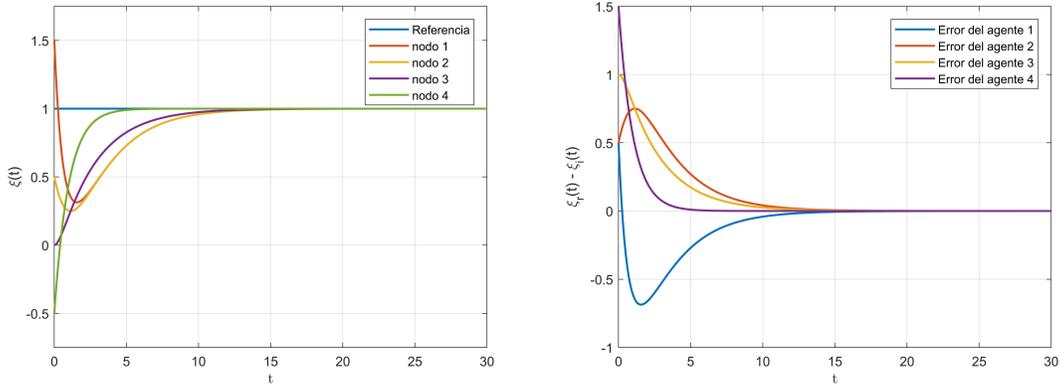


Figura 3.5: Topología de comunicación entre los nodos y su matriz Laplaciana.



(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto a ξ_r .

Figura 3.6: Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 3.5.

En la Figura 3.6 a) podemos observar como los agentes 1, 2, 3 y 4 bajo diferentes condiciones iniciales, tienden a seguir al agente ξ_r que actúa como una referencia constante igual a uno. Por otro lado, en la Figura 3.6 b) se muestra como el error entre los estados de los agentes 1, 2, 3 y 4 y el agente ξ_r tiende a cero a medida que transcurre el tiempo.

Para la topología de la Figura 3.7 se tiene que $a_{4r} = 1$ y $a_{ir} = 0, \forall i \neq 4$. Por el contrario, como en los casos anteriores, el agente número 4 no comparte información con los demás agentes de la red, por lo tanto, no hay un camino dirigido del nodo del agente líder virtual hacia todos los demás agentes de la red, es decir, no hay un árbol de expansión en el grafo de 3.7.

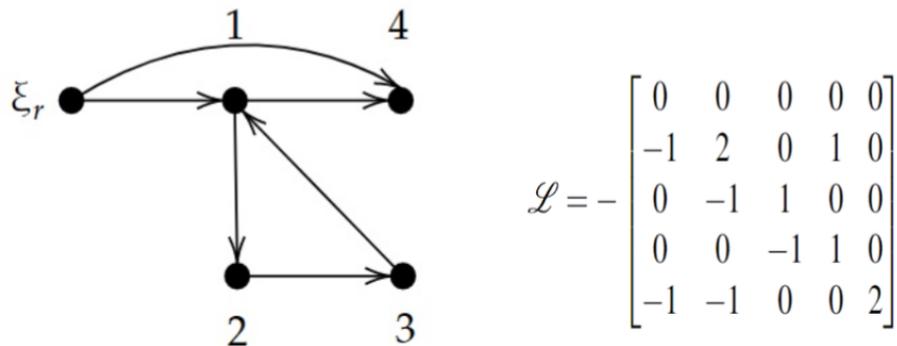
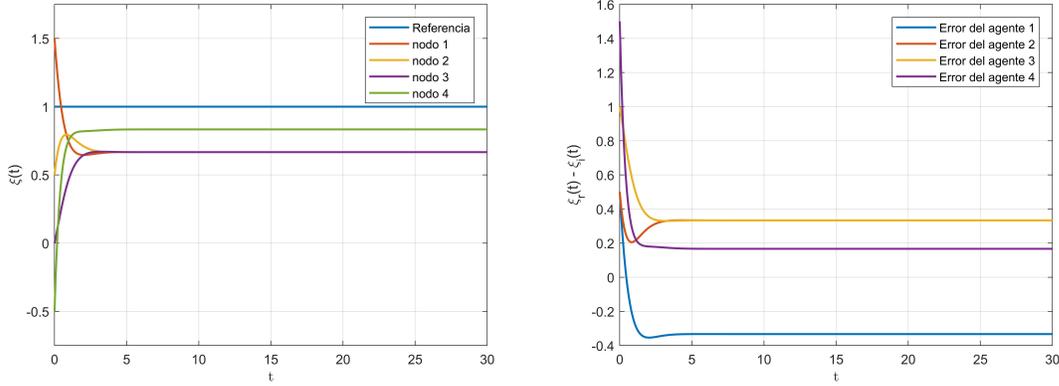


Figura 3.7: Topología de comunicación entre los nodos y su matriz Laplaciana.



(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto a ξ_r .

Figura 3.8: Evolución de los estados y error obtenidos del grafo de la Figura 3.7.

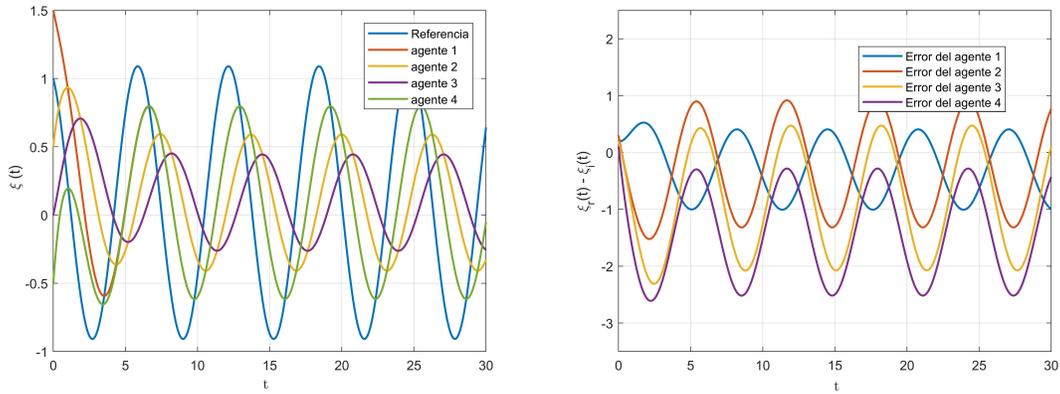
De acuerdo a la Figura 3.8 a) podemos observar como ninguno de los agentes 1, 2, 3 y 4 logran llegar al consenso con el agente ξ_r .

Para finalizar, derivado del Lema 2.5.2 y el Teorema 3.1.1 el consenso se logra para las topologías de interacción de las Figuras 3.1, 3.3, 3.5. Por el contrario, para la topología de interacción de la Figura 3.7 el consenso no se logra, debido a que no se cumple el Lema 2.5.2 y el Teorema 3.1.1, ya que no hay un árbol de expansión dirigido en el grafo.

3.2. Consenso de seguimiento para una referencia variable en el tiempo

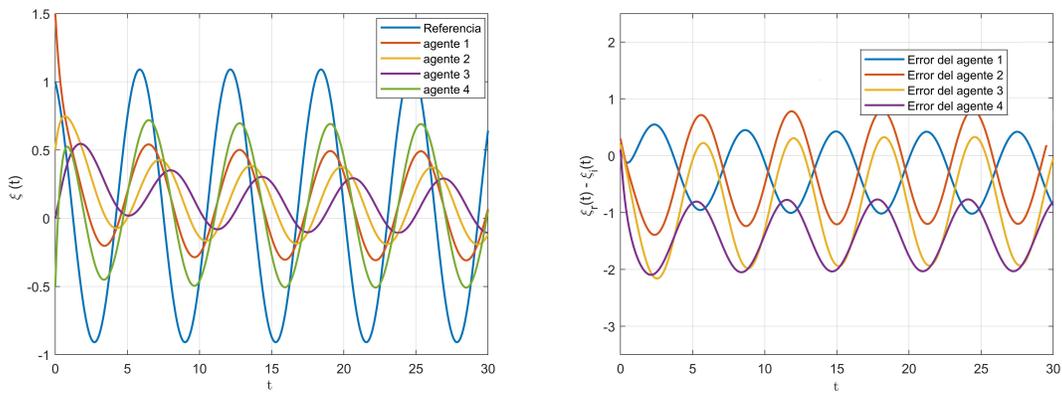
En este apartado, se asume que el estado de referencia es variante en el tiempo o que la señal de referencia desarrolla una dinámica no lineal.

Suponga que satisface la dinámica dada por el protocolo de la Ecuación 3.2. Primeramente, se mostrará que usando dicho algoritmo no es posible que se logre el consenso con una referencia que es variable en el tiempo. Tomando la referencia $\xi_r = \cos(t)$ y considerando la topología de interacción entre los agentes de las Figuras 3.1, 3.3, 3.5 y 3.7. Note que no es posible resolver el problema de seguimiento de consenso en todos los casos para un estado de referencia variable en el tiempo.



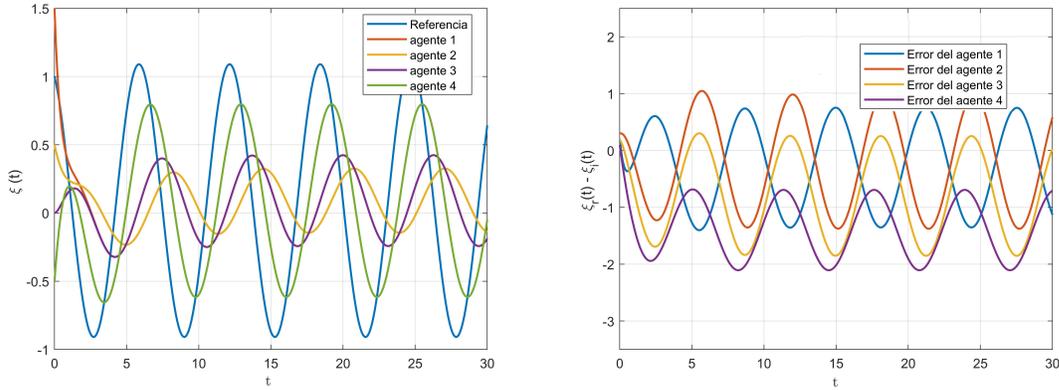
(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto al agente ξ_r .

Figura 3.9: Resultados de consenso de la Figura 3.1 usando como referencia $\xi_r = \cos t$.



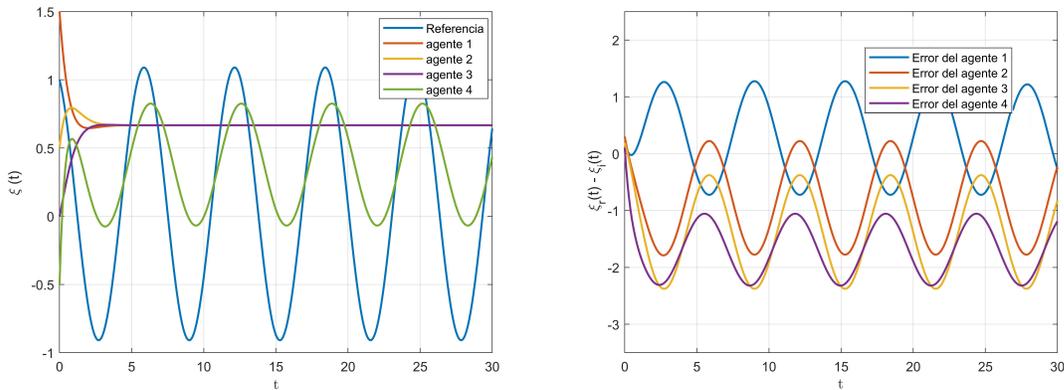
(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto al agente ξ_r .

Figura 3.10: Resultados de consenso de la Figura 3.3 usando como referencia $\xi_r = \cos t$.



(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto al agente ξ_r .

Figura 3.11: Resultados de consenso de la Figura 3.5 usando como referencia $\xi_r = \cos t$.



(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto al agente ξ_r .

Figura 3.12: Resultados de consenso de la Figura 3.7 usando como referencia $\xi_r = \cos t$.

Observe de las Figuras 3.9 a 3.12 que el consenso global no puede ser alcanzado por todos los agentes involucrados en la red con una referencia ξ_r variable en el tiempo. El consenso global no puede ser alcanzado incluso si se tiene un árbol de expansión dirigido en la topología de comunicación de los nodos del grafo. En relación con lo anterior, esto sucede debido a que no se cumple el Teorema 3.2.1 y además de acuerdo al Teorema 3.1.1 el protocolo de consenso mostrado en la Ecuación 3.2 solo funciona cuando se tiene una referencia ξ_r constante en el tiempo.

Ahora considérese el siguiente protocolo de consenso que se muestra en la Ecuación 3.3.

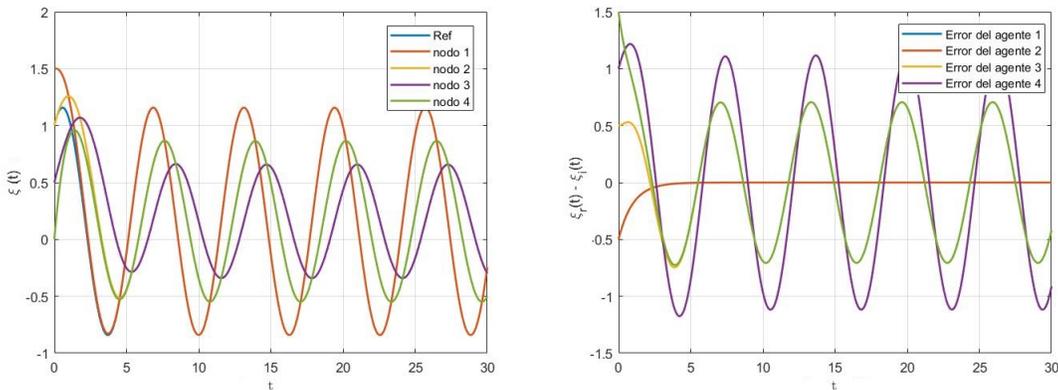
$$\dot{\xi}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

con

$$u_i = a_{ir}\dot{\xi}_r - a_{ir}\alpha[\xi_i(t) - \xi_r(t)] - \sum_{j=1}^n a_{ij}[\xi_i(t) - \xi_j(t)]$$

Donde α es una constante positiva, y a_{ij} es la entrada (i, j) de la matriz de adyacencia \mathcal{A} . Observe que en la Ecuación 3.3 hay un nuevo término $a_{ir}\dot{\xi}_r$ que no está en la Ecuación 3.2. Note que a medida que el error entre los estados $|\xi_i(t) - \xi_r(t)| \rightarrow 0$ y $|\xi_i(t) - \xi_j(t)| \rightarrow 0$ entonces la dinámica de cada uno de los agentes seguidores tiende a la dinámica del agente líder o referencia, es decir, $\xi_i \rightarrow \xi_r$. Para ilustrar la dinámica de una red de agentes usando la Ecuación 3.3 se propone el siguiente ejemplo:

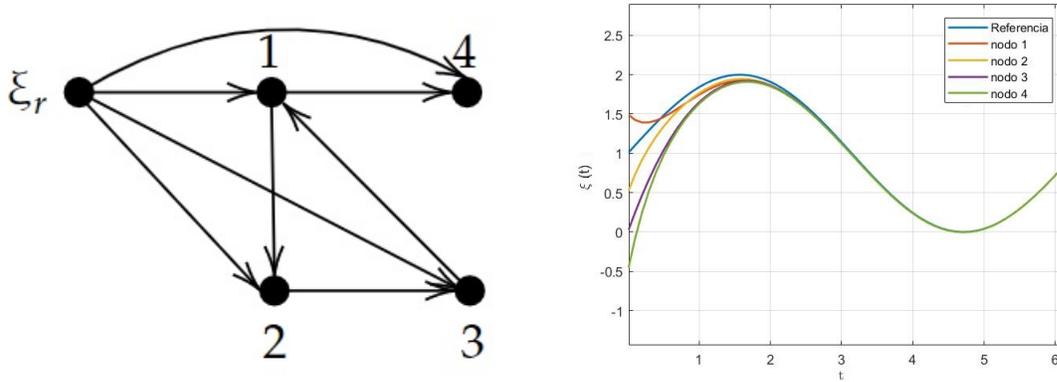
Considere una referencia variable en el tiempo $\xi_r = \cos(t)$ y considere la topología de interacción de la Figura 3.1 y la Figura 3.14.



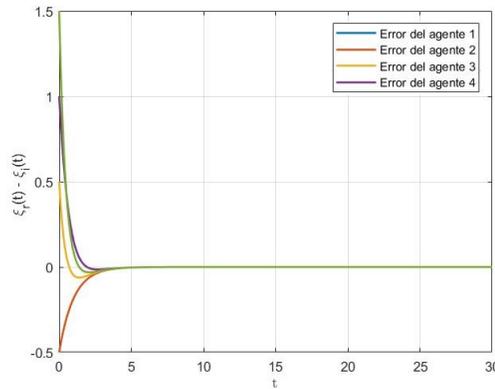
(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto al agente ξ_r .

Figura 3.13: Resultados de consenso de la Figura 3.1 usando la Ecuación 3.3.

Observe de la Figura 3.13 que el consenso global para todos los estados con una referencia variable en el tiempo no se logra. Note que el único estado que logra seguir al nodo de referencia es el agente 1. Además, observe que es el único que tiene un lazo de comunicación directo con el agente referencia ξ_r .



(a) Topología de comunicación entre los agentes con una referencia $\xi_r = \cos(t)$. (b) Evolución de los estados con respecto al tiempo.



(c) Error de los agentes $i = 1, 2, 3, 4$ con respecto al agente ξ_r .

Figura 3.14: Resultados de consenso y topología de comunicación.

Observe que en la Figura 3.14 todos los agentes llegan al consenso establecido por la referencia variable en el tiempo $\xi_r = \cos(t)$. En contraste con lo anterior, la similitud que se tiene, es que para ambas topologías, el consenso se logra para los estados que tienen una conexión mediante una arista dirigida con el nodo de referencia ξ_r . De lo anterior, se tiene el siguiente Teorema para el consenso de seguimiento bajo un estado de referencia variable en el tiempo usando la Ecuación 3.3.

Theorema 3.2.1. *Suponga que \mathcal{A} es constante y además si $a_{ir} = 1, i = 1, \dots, n$. Entonces, el problema de seguimiento de consenso con una referencia de consenso variable en el tiempo es resuelto por la Ecuación 3.3.*

Demostración. Dado que la Ecuación 3.3 se puede reescribir a $\dot{\xi}_{ri} = u_i$ en su forma matricial como

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = -(\mathcal{L}_n + Q) \hat{\xi}(t)$$

Donde $\hat{\xi} = [\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n]$ con $\hat{\xi}_i = \xi_i - \xi_r$, $Q = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $\mathcal{L}_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es la matriz Laplaciana no simétrica. Observe que \mathcal{L}_n satisface el Lema 2.5.1 y el Teorema 2.5.1. Entonces, se puede afirmar que todos los eigenvalores de $-(\mathcal{L}_n + Q)$ tienen parte real negativa. Por consiguiente, se tiene que $|\xi_i(t) - \xi_r(0)| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. \square

3.3. Algoritmo de seguimiento de consenso fundamental

Como ya se observó anteriormente que en la Ecuación 3.3, solo se puede resolver el problema de consenso de una referencia variable en el tiempo, solo si el nodo ξ_r intercambia información con todos los agentes que están involucrados en la red. Por consiguiente, considerese el siguiente algoritmo de consenso en donde el agente líder ξ_r solo está disponible para unos cuantos agentes que conforman el grafo.

$$\dot{\xi}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

con

$$u_i = \frac{1}{\eta(t)} \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) [\dot{\xi}_j - \gamma(\xi_i - \xi_j)] + \frac{1}{\eta(t)} a_{ir}(t) [\dot{\xi}_r - \gamma(\xi_i - \xi_r)]$$

Donde $a_{ij}(t)$ es la entrada (i, j) de la matriz de adyacencia \mathcal{A} , γ es una constante escalar positiva y $\eta(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)$ en un tiempo t . Observe que las entradas de control, para cada agente de la red, depende de tres parámetros importantes, el primero es que depende de los estados de información de los nodos vecinos. La segunda, es que también depende de la derivada de sus estados de información, y la tercera, pero no menos importante, es que depende de los estados y derivadas de la referencia ξ_r .

Al mismo tiempo, en esta sección, se mostrarán condiciones bajo las cuales una única solución existe para cada entrada de control y para las cuales un consenso de seguimiento puede ser alcanzado sobre una topología de interacción fija con una referencia variable en el tiempo.

Theorema 3.3.1. *Suponga que \mathcal{A} es constante. Con el protocolo de consenso de la Ecuación 3.4 una única solución existe y el problema de consenso de seguimiento es resuelto, si y sólo si, el grafo dirigido de \mathcal{G} tiene un árbol de expansión dirigido.*

Para ilustrar la aplicación del Teorema 3.3.1 se resuelve el siguiente ejemplo.

Considere un grafo compuesto de 4 agentes y un agente líder del grupo ξ_r , es decir, un agente que propondrá la referencia que tiene que seguir los demás miembros del grupo. La topología de comunicación se muestra en la Figura 3.15 con $\xi_r = \cos(t)$ y una condición inicial de $\xi_r(0) = 0.5$.

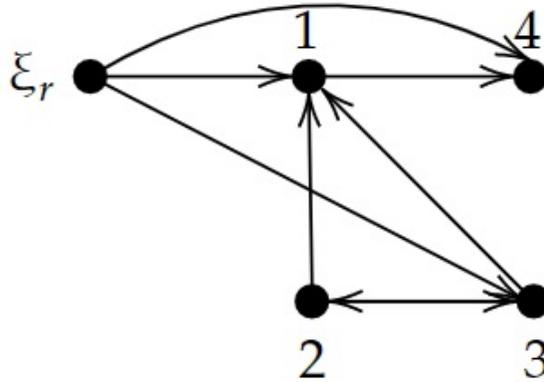
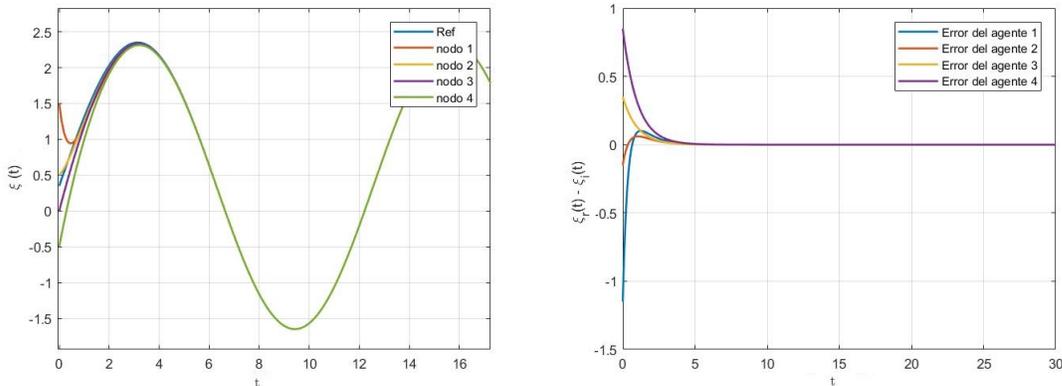


Figura 3.15: Topología de comunicación entre 5 agentes con $\xi_r = \cos(t)$.



(a) Evolución de los estados con respecto al tiempo. (b) Error de los agentes 1, 2, 3, 4 con respecto al agente ξ_r .

Figura 3.16: Resultados de consenso con respecto a la topología de comunicación de la Figura 3.15

La diferencia que hay entre la topología de comunicación entre las Figuras 3.15 y 3.14 es que en 3.14 el agente ξ_r tiene un enlace directo hacia todos los agentes de la red. Mientras tanto, en 3.15 ξ_r solo tiene un enlace directo para tres agentes de la red. En la Figura 3.16 se ilustra como todos los agentes de la red convergen asintóticamente a la referencia que es variable en el tiempo. El consenso para una referencia variable en el tiempo es alcanzado debido a que se cumple el Teorema 3.3.1.

Capítulo 4

Control de formación y seguimiento de trayectoria de robots tipo unicycle y diferencial

4.1. Planteamiento del problema

Dentro de este capítulo de tesis, se aborda el problema de control de seguimiento de trayectorias y formación para sistemas de múltiples agentes móviles que comparten una estructura mecánica similar.

Para el diseño del controlador que resuelve el problema de seguimiento de trayectoria de un agente móvil, se considerará el problema como un problema de consenso en sistemas multi-agentes. De igual forma, se diseñarán los controladores y analizará la estabilidad de los controladores. Por último, se ejecutarán algunas simulaciones numéricas implementadas en MATLAB. En particular, surgen algunas preguntas antes de abordar el problema en general, ¿será posible diseñar un controlador que le permita al agente móvil (Robot unicycle) seguir una trayectoria dada?, ¿bajo qué condiciones se mantiene la estabilidad de controlador? ¿será posible que un grupo de agentes logren establecer una formación constante a través del tiempo con el diseño del controlador?. Estas preguntas son las que han motivado el presente trabajo de tesis.

En este trabajo de tesis se propone utilizar el protocolo de consenso de primer orden para diseñar los controladores que le permitan al grupo de agentes móviles (Robots unicycle) seguir una trayectoria generada por un agente virtual que se encarga de establecer la formación del grupo de agentes manipulando el error de posición que existe entre dicho líder virtual y los miembros del grupo. Por otro lado, se propone una topología de comunicación entre los robots del tipo árbol de expansión dirigido para que puedan llegar al consenso.

4.2. Modelo cinemático de un robot móvil tipo unicycle

En el campo de la ingeniería, una de las aplicaciones más comunes y útiles es el uso coordinado de un grupo de agentes móviles que se desplazan en el plano \mathbb{R}^2 con el apoyo de llantas. Algunos ejemplos de sus aplicaciones en la vida real puede ser en la industria y en el área militar. Por ejemplo, para transportar objetos pesados de un lugar a otro, soldadura de piezas de diferentes materiales y en misiones de rescate y reconocimiento del área, entre otras cosas más [19, 20, 36]. Una de las estructuras populares más implementadas es la de un robot móvil tipo unicycle debido a que es una de las más baratas y sencillas de construir (véase la Figura 4.1). Además, el modelo matemático que describe su cinemática es más sencillo comparado con el de otros robots. La configuración del robot móvil tipo unicycle consta de un disco que se mueve en el plano (x,y) sin considerar los elementos mecánicos que hacen que se pueda trasladar de un lugar a otro.

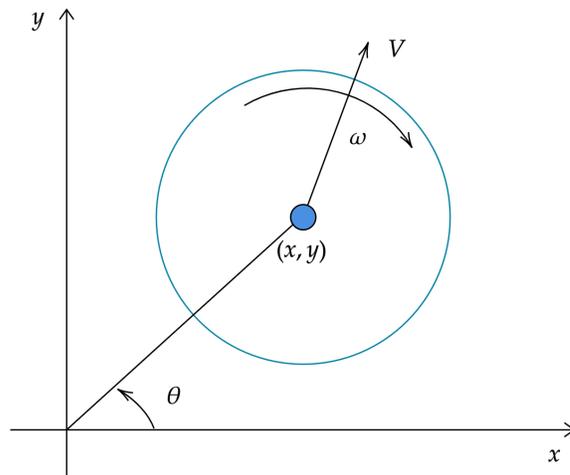


Figura 4.1: Representación pictográfica de un robot unicycle.

En la Figura 4.1 se observan algunas variables importantes en el modelo cinemático del robot, las cuales son V , ω , x , y y θ . Donde V Representa la velocidad global del robot, ω representa la velocidad angular global del robot, (x, y) representa las posiciones sobre el eje x y y con respecto al sistema de referencia global y por último, θ que representa la orientación con respecto al sistema de referencia global.

Los modelos cinemáticos de un robot móvil son usados dentro del diseño de controladores cuando el robot desempeña tareas o misiones a baja velocidad y con poca carga en relación con su estructura. El modelo cinemático del robot móvil tipo unicycle puede ser representado por el conjunto de Ecuaciones (4.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= V_i \cos \theta_i(t) \\ \dot{y}_i(t) &= V_i \sin \theta_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) &= \omega_i\end{aligned}\tag{4.1}$$

Donde $\dot{x}(t)$ es la velocidad lineal en x en el plano (x,y) , $\dot{y}(t)$ representa la velocidad lineal en y en el plano (x,y) , $\dot{\theta}(t)$ representa la velocidad angular en el plano (x,y) y θ es la orientación del robot, con $i = L, f1, \dots, fn$. El subíndice L representa las variables y parámetros de un robot líder virtual y fn representa a los robots seguidores, como se mostrará a continuación.

4.3. Problema de formación y seguimiento de trayectoria entre un líder virtual y robots seguidores

En esta sección se plantea un esquema de diseño de consenso al problema de control de formación de múltiples robots móviles. En particular, el control está diseñado para robots móviles tipo unicycle con un líder virtual. Se propone una arquitectura de control de formación centralizada que admite solo a un líder del grupo, el cual será el que proponga una trayectoria a seguir para los demás robots móviles, y además, establezca una formación específica. La arquitectura requiere que exista un intercambio de información entre el robot líder virtual y los demás robots móviles del grupo. El problema radica en que el robot líder virtual se encuentran moviéndose en el plano (x,y) y se desea tener un consenso de posición y orientación con respecto a una trayectoria a seguir.

Se considera un robot móvil virtual cuya estructura es la misma que la de un robot unicycle, este robot virtual se encuentra posicionado a una distancia fija de un robot seguidor unicycle como se muestra en la Figura 4.2. Suponemos que el robot virtual se sitúa a una posición relativa de un robot móvil seguidor (l,r) , la cual será el marco de referencia para poder establecer una formación entre el líder virtual y el robot seguidor. Una vez que el robot logre posicionarse a una distancia constante, el problema de formación estará resuelto.

Con la introducción del robot líder virtual, el problema del control de la formación entre el robot líder y el robot seguidor también se transforma en un problema de control de seguimiento entre el robot virtual y el robot líder.

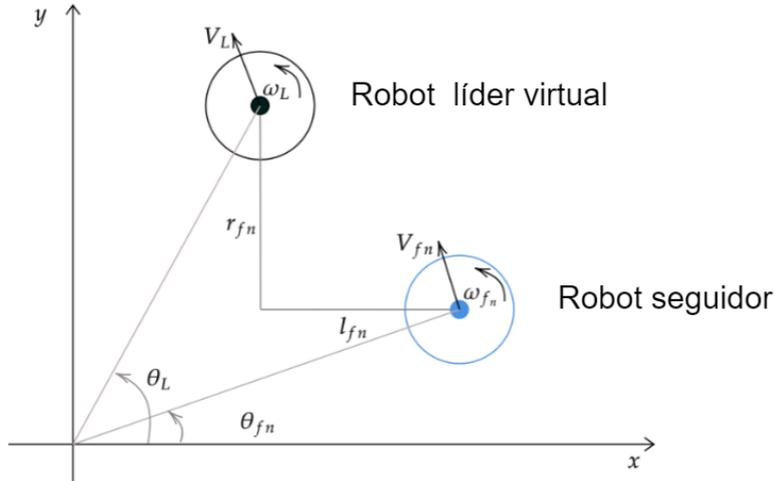


Figura 4.2: Representación pictográfica de un robot líder virtual y un robot seguidor.

Donde l_{fn} representa la distancia de separación entre el robot líder y el robot seguidor sobre el eje x , r_{fn} representa la distancia de separación entre el robot líder y el robot seguidor sobre el eje y . Mientras que θ_L y θ_{fn} representan la orientación angular del robot líder virtual y el robot seguidor, respectivamente. La orientación es tomada con respecto al eje x .

Sin pérdida de generalidad, podemos escribir la cinemática del robot virtual como se describió en la Ecuación 4.1, debido a que el robot líder virtual se considera que tiene una estructura igual a la de un robot móvil tipo unicyclo.

$$\begin{aligned}\dot{x}_L(t) &= V_L \cos \theta_L(t) \\ \dot{y}_L(t) &= V_L \sin \theta_L(t) \\ \dot{\theta}_L(t) &= \omega_L\end{aligned}\tag{4.2}$$

Donde el subíndice L denota al único robot líder virtual del grupo de robots y los demás parámetros son iguales a como se mostró en la Ecuación 4.1. Al mismo tiempo, también podemos escribir la cinemática de un robot seguidor como en la Ecuación 4.1. Donde fn nos ayuda a identificar que se trata de un robot seguidor como el de la Figura 4.2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_{fn}(t) &= V_{fn} \cos \theta_{fn}(t) \\ \dot{y}_{fn}(t) &= V_{fn} \sin \theta_{fn}(t) \\ \dot{\theta}_{fn}(t) &= \omega_{fn}\end{aligned}\tag{4.3}$$

4.3.1. Diseño de los controladores que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria

Las especificaciones de diseño para los controladores que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria, son de tal forma que, contemple los estados del líder virtual y el robot seguidor. El robot líder virtual y los robots seguidores deben moverse a través de una trayectoria deseada T en una formación F , es decir, se requiere diseñar leyes de control para el sistema de Ecuaciones 4.2 de forma que (l, r) establezcan la distancia de separación para llevar a cabo la formación deseada F entre el robot líder virtual y el robot seguidor y la trayectoria deseada T esté dada por el propio robot líder virtual. La trayectoria deseada T esta dada por la dinamica del robot líder virtual. A continuación, se describe el error de posiciones y orientación entre ambos robots:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_L(t) - x_{fn}(t) \\ y_L(t) - y_{fn}(t) \\ \theta_L(t) - \theta_{fn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{fn} \\ r_{fn} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Donde $[x_L(t) - x_{fn}(t)] = l_{fn}$, $[y_L(t) - y_{fn}(t)] = r_{fn}$ son la distancia de separación entre el robot líder y el robot seguidor sobre el eje x y y , respectivamente. Así mismo, $[\theta_L(t) - \theta_{fn}(t)]$ es el ángulo de desfase entre el robot virtual y algún robot seguidor con respecto al eje x .

Las leyes de control que resuelven el problema de control de formación y seguimiento son de la forma $u_{x_{fn}}(t)$, $u_{y_{fn}}(t)$, $u_{\theta_{fn}}(t)$. Están son inyectadas a la cinemática de cada uno de los robots seguidores miembros del grupo dependiendo de lo que se requiera controlar (véase la Ecuación 4.5). Dicho de otra manera, se utiliza una estructura de la forma $u_{x_{fn}}(t)$ para manipular la posición en x a la que se desea que esté ubicado el robot seguidor. Al mismo tiempo $u_{y_{fn}}(t)$ para manipular la posición en y a la que se desea que esté ubicado el robot seguidor. Por último, se emplea $u_{\theta_{fn}}(t)$ para manipular la posición angular θ a la que se desea que esté ubicado el robot seguidor.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{fn}(t) &= V_{fn} \cos \theta_{fn}(t) + u_{x_{fn}}(t) \\ \dot{y}_{fn}(t) &= V_{fn} \sin \theta_{fn}(t) + u_{y_{fn}}(t) \\ \dot{\theta}_{fn}(t) &= \omega_{fn} + u_{\theta_{fn}}(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sin pérdida de generalidad, las leyes de control $u_{x_{fn}}(t)$, $u_{y_{fn}}(t)$, $u_{\theta_{fn}}(t)$ que obligan a cada robot seguidor a moverse a través de una trayectoria T en una formación específica F están dadas como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} u_{x_{fn}}(t) \\ u_{y_{fn}}(t) \\ u_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x_{fn}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{y_{fn}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta_{fn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x_{fn}}(t) \\ e_{y_{fn}}(t) \\ e_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{x_{fn}}} (V_L \cos \theta_L(t) - V_{fn} \cos \theta_{fn}(t) + l_{fn}) \\ \frac{1}{k_{y_{fn}}} (V_L \sin \theta_L(t) - V_{fn} \sin \theta_{fn}(t) + r_{fn}) \\ \frac{1}{k_{\theta_{fn}}} (\omega_L - \omega_{fn}) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Donde cada $k_{fn} \in \mathbf{R}^+$ y $e_{x_{fn}}(t), e_{y_{fn}}(t), e_{\theta_{fn}}(t)$ son los errores que hay de posiciones x , y y la orientación θ entre la trayectoria T generada por el líder virtual y el seguidor n -ésimo. Matemáticamente se puede escribir como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} e_{x_{fn}}(t) \\ e_{y_{fn}}(t) \\ e_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_L(t) - x_{fn}(t) \\ y_L(t) - y_{fn}(t) \\ \theta_L(t) - \theta_{fn}(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

En último lugar, queda por analizar las condiciones bajo las cuales la dinámica del error del seguidor tiende a cero para la orientación o alguna otra constante l_{fn}, r_{fn} para la posición, como se expresa a continuación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} e_{x_{fn}}(t) \\ e_{y_{fn}}(t) \\ e_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_L(t) - x_{fn}(t) \\ y_L(t) - y_{fn}(t) \\ \theta_L(t) - \theta_{fn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{fn} \\ r_{fn} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Sin pérdida de generalidad, la dinámica del error queda expresada como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{x_{fn}}(t) \\ \dot{e}_{y_{fn}}(t) \\ \dot{e}_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_L \cos \theta_L(t) - V_{fn} \cos \theta_{fn}(t) - u_{x_{fn}}(t) \\ V_L \sin \theta_L(t) - V_{fn} \sin \theta_{fn}(t) - u_{y_{fn}}(t) \\ \omega_L(t) - \omega_{fn}(t) - u_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Al reducir la Ecuación 4.9 obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{x_{fn}}(t) \\ \dot{e}_{y_{fn}}(t) \\ \dot{e}_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{x_{fn}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{y_{fn}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta_{fn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x_{fn}}(t) \\ e_{y_{fn}}(t) \\ e_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix}$$

Donde $k_{x_{fn}}, k_{y_{fn}}, k_{\theta_{fn}}$ deben ser números reales estrictamente positivos para que se cumpla la condición de que el sistema de Ecuaciones 4.9 sea asintóticamente estable.

4.4. Aproximación del modelo cinemático de un robot móvil tipo diferencial (Lego EV3)

El proceso más básico para la navegación de un robot móvil se basa en el modelo cinemático del sistema de propulsión. Este sistema es el que permite al robot moverse dentro de un determinado entorno. Uno de los sistemas más usuales se basa en el uso de ruedas de tracción diferencial, el cual es un sistema poco complejo y adecuado para la navegación en algunos entornos de desarrollo típicos de actividades humanas, por ejemplo oficinas, bodegas y otros. Las configuraciones de tracción diferencial, son muy populares y permiten calcular la posición del robot a partir de las ecuaciones geométricas, que surgen de la relación entre los componentes del sistema de propulsión y de la información de los codificadores rotativos que usualmente llevan acoplados a sus ruedas. A este método, se le conoce como odometría. Este método, es muy usado en el ámbito de la ingeniería, debido a que entrega resultados aceptables para la localización global de objetos que se mueven en distancias cortas y no es muy complejo y caro comparado con otros métodos de localización global de objetos. Para este trabajo de tesis, se utilizó un robot móvil diferencial de la marca Lego EV3 como el que se muestra en la Figura 4.3



Figura 4.3: Robot móvil tipo diferencial Lego EV3.

Debido a que el modelo ideal de un robot unicycle solo contempla las velocidades globales del robot, es decir, velocidad lineal y angular, es de gran importancia poder establecer una relación entre las velocidades, *i.e.* globales y proporcionadas por cada llanta de un robot móvil diferencial Lego EV3. Todo esto, considerando como punto del objetivo de control al punto que se encuentra a la mitad del eje de las ruedas del robot Lego EV3 (véase la Figura 4.4).

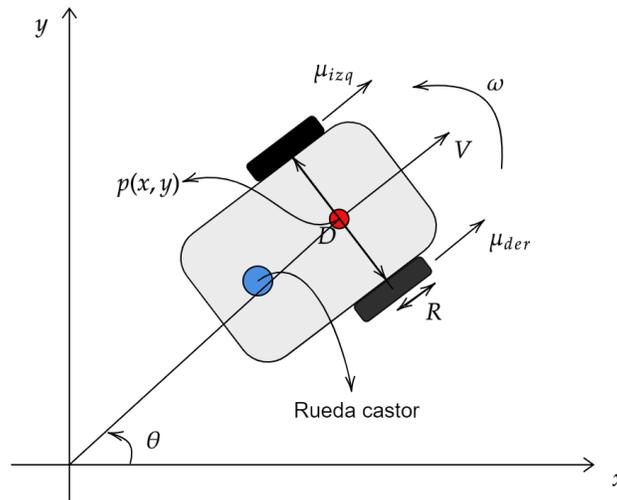


Figura 4.4: Velocidades involucradas en la cinemática del robot móvil tipo diferencial Lego EV3.

Donde $V \in \mathbf{R}$ y $\omega \in \mathbf{R}$ son las velocidades globales lineal y angular, respectivamente. $\mu_{der} \in \mathbf{R}$ y $\mu_{izq} \in \mathbf{R}$ representan las velocidades lineales de la llanta derecha e izquierda, respectivamente, del robot diferencial. $R \in \mathbf{R}$ representa el radio de las llantas. $D \in \mathbf{R}$ es la distancia de separación entre las dos llantas. El punto rojo $p(x,y)$ es el punto central del eje de las ruedas, y por último, el círculo azul representa una rueda loca que sirve para mantener el equilibrio del robot. Esta no es considerada en la cinemática del robot.

Para establecer una relación entre la velocidad lineal global del robot diferencial V y las velocidades de cada una de las llantas μ_{der} y μ_{izq} es necesario conocer como se obtienen dichas velocidades de las llantas.

$$\mu_{der} = R\alpha_{der} \quad (4.10)$$

$$\mu_{izq} = R\alpha_{izq} \quad (4.11)$$

Donde α_{der} y α_{izq} es la velocidad angular de la llanta derecha e izquierda, respectivamente, y R es el radio de las llantas como se mencionó anteriormente. Así pues, tomado la Ecuación 4.10 y 4.11 es posible calcular la velocidad lineal global, que es el promedio de las velocidades de cada una de las llantas.

$$V = \frac{(\alpha_{der} + \alpha_{izq})R}{2} \quad (4.12)$$

Al mismo tiempo, de acuerdo a [37] podemos escribir la velocidad angular ω en función de las velocidades de cada una de las llantas como:

$$\omega = \frac{(\alpha_{der} - \alpha_{izq})R}{D} \quad (4.13)$$

En conclusión, teniendo la Ecuación 4.12 y 4.13 que son las velocidades globales del robot diferencial en función de las velocidades de cada llanta derecha e izquierda, se pueden sustituir en las Ecuaciones 4.1, y así de esta manera establecer la cinemática de un robot móvil tipo diferencial.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \frac{R(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \cos \theta_i(t) \\ \dot{y}_i(t) &= \frac{R(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \sin \theta_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) &= \frac{R(\alpha_{der} - \alpha_{izq})}{D} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Donde $i = L, f1, \dots, fn$. El subíndice L representa las variables y parámetros de un robot líder virtual y fn representa a los robots seguidores como se mostró en la Ecuación 4.1.

4.4.1. Diseño de los controladores que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria

Igualmente, como se planteó en 4.3.1 las especificaciones de diseño deben tomar en cuenta los estados de posición y orientación del robot líder virtual y los seguidores. El robot líder virtual y los robots seguidores deben moverse a través de una trayectoria deseada T en una formación F , es decir, se requiere diseñar leyes de control para el sistema 4.14 de forma que (l, r) establezcan las distancias de separación para la formación deseada F entre el robot líder virtual y el robot seguidor. Por otra parte, la trayectoria deseada T esté dada por el propio robot líder virtual. De lo anterior, obtenemos a 4.15

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_L(t) - x_{fn}(t) \\ y_L(t) - y_{fn}(t) \\ \theta_L(t) - \theta_{fn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{fn} \\ r_{fn} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Donde $[x_L(t) - x_{fn}(t)]$, $[y_L(t) - y_{fn}(t)]$ son la distancia de separación en x y y . Así mismo, $[\theta_L(t) - \theta_{fn}(t)]$ es el ángulo de desfase entre el robot virtual y algún robot seguidor con respecto al eje x . En otras palabras, 4.15 describe el error de posiciones y orientación entre ambos robots.

Las leyes de control que resuelven el problema de control de formación y seguimiento son de la forma $u_{xfn}(t)$, $u_{yfn}(t)$, $u_{\theta fn}(t)$. Estas son inyectadas a la cinemática de cada uno de los robots seguidores miembros del grupo.

$$\begin{aligned}\dot{x}_{fn}(t) &= \frac{R(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \cos \theta_{fn}(t) + u_{xfn}(t) \\ \dot{y}_{fn}(t) &= \frac{R(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \sin \theta_{fn}(t) + u_{yfn}(t) \\ \dot{\theta}_{fn}(t) &= \frac{R(\alpha_{der} - \alpha_{izq})}{D} + u_{\theta fn}(t)\end{aligned}\quad (4.16)$$

En donde:

$$\begin{bmatrix} u_{xfn}(t) \\ u_{yfn}(t) \\ u_{\theta fn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xfn} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yfn} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta fn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xfn}(t) \\ e_{yfn}(t) \\ e_{\theta fn}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{k_{xfn}} \left(\frac{R(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \cos \theta_L(t) - \frac{R(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \cos \theta_{fn}(t) + l_{fn} \right) \\ \gamma &= \frac{1}{k_{yfn}} \left(\frac{R(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \sin \theta_L(t) - \frac{R(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \sin \theta_{fn}(t) + r_{fn} \right) \\ \delta &= \frac{1}{k_{\theta fn}} \left(\frac{R(\alpha_{der} - \alpha_{izq})}{D} - \frac{R(\alpha_{der} - \alpha_{izq})}{D} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} e_{xfn}(t) \\ e_{yfn}(t) \\ e_{\theta fn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_L(t) - x_{fn}(t) \\ y_L(t) - y_{fn}(t) \\ \theta_L(t) - \theta_{fn}(t) \end{bmatrix}\quad (4.17)$$

Observando la Ecuación 4.17 podemos notar, que es necesario conocer las posiciones (x, y, θ) en cada instante de tiempo, es decir, conocer cuanto se ha movido y rotado el robot diferencial con respecto a un eje de coordenadas absoluto. Este problema se puede resolver fácilmente con las ecuaciones de odometría, como en [37].

$$x_{fn}(t) = x_{0fn} + D_t(t) \cos \theta_{fn}(t)\quad (4.18)$$

$$y_{fn}(t) = y_{0fn} + D_t(t) \sin \theta_{fn}(t)\quad (4.19)$$

$$\theta_{fn}(t) = \theta_{0fn} + \frac{D_{der}(t) - D_{izq}(t)}{D}\quad (4.20)$$

$$D_t(t) = \frac{D_{der}(t) - D_{izq}(t)}{2}\quad (4.21)$$

$$D_{der,izq}(t) = 2\pi mR\quad (4.22)$$

Donde D_t representa la distancia total recorrida en el plano (x, y) . $D_{der,izq}$ representa la distancia recorrida por la llanta derecha e izquierda, respectivamente. $(x_{0fn}, y_{0fn}, \theta_{0fi})$ son las condiciones iniciales para las posiciones $(x_{fn}, y_{fn}, \theta_{fn})$ y m son las vueltas que dan las llantas tanto derechas como izquierdas.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Para mostrar el funcionamiento de conjunto de controladores mostrados en 4.6 se propone el siguiente experimento numérico y sus resultados.

Sea un grupo de robots móviles compuesto por un robot líder virtual y 3 robots móviles, cuyos parámetros $(V_d, \omega_d, V_{fi}, \omega_{fi})$, y condiciones iniciales (x_0, y_0, θ_0) se muestran en la Tabla 5.1. Se propone establecer una formación F triangular a la cual llegar eventualmente para un tiempo t , donde (l, r) según la Tabla 5.1 designan la posición relativa a la que deben de llegar y permanecer los robots seguidores, a partir de un tiempo t , con respecto al robot líder virtual, para así formar un triángulo. Finalmente, la trayectoria deseada T está dada por el robot líder virtual.

Datos	Robot virtual	seguidor 1	seguidor 2	seguidor 3
V	2	1	2	4
ω	1	1	0	3
x_0	0	4	-6	0
y_0	0	-1	-1	-1
θ_0	0	0	60	45
l	0	-2	-2	0
r	0	1	-1	0

Tabla 5.1: Parámetros de velocidades y condiciones iniciales de posición y orientación.

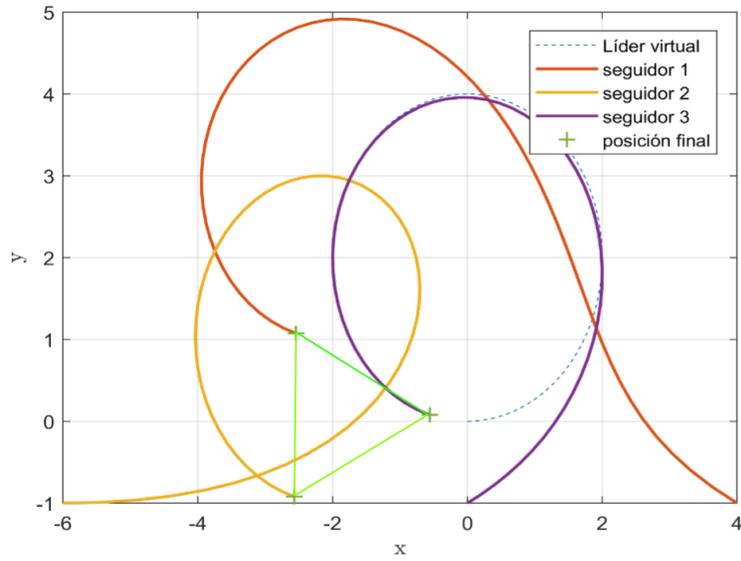


Figura 5.1: Muestra la trayectoria del movimiento de los robots en el tiempo vista en la proyección de un plano (x,y) .

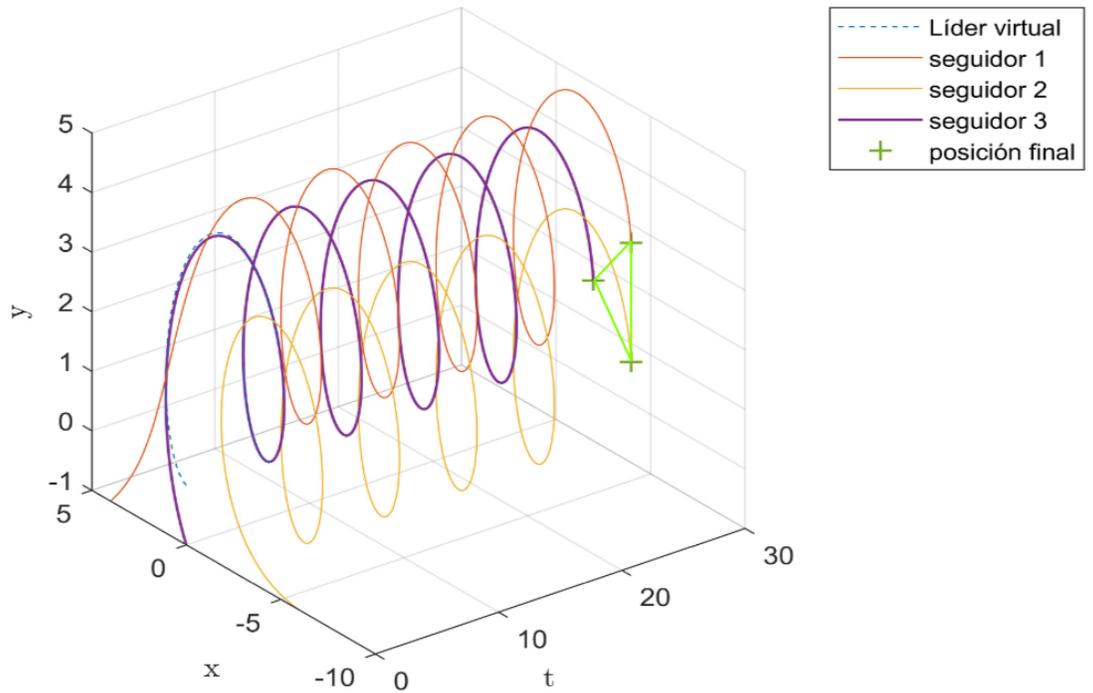


Figura 5.2: Muestra como la formación se mantiene para un tiempo $t = 30$.

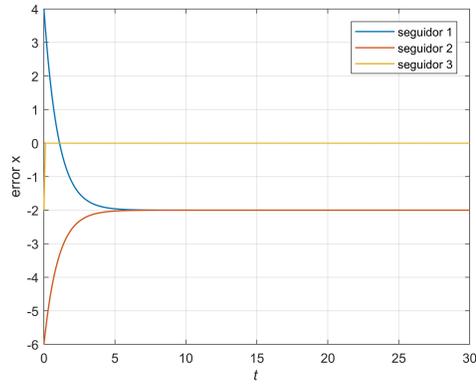


Figura 5.3: Error a través del tiempo de las posiciones en x de los seguidores con respecto al líder virtual.

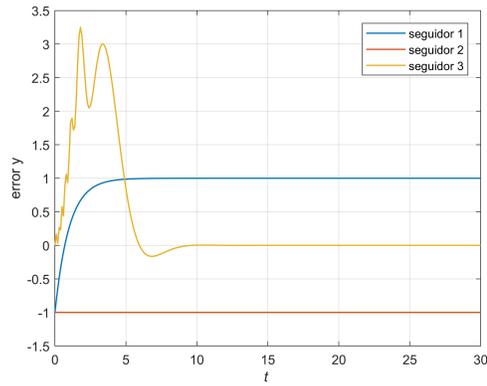


Figura 5.4: Error a través del tiempo de las posiciones en y de los seguidores con respecto al líder virtual.

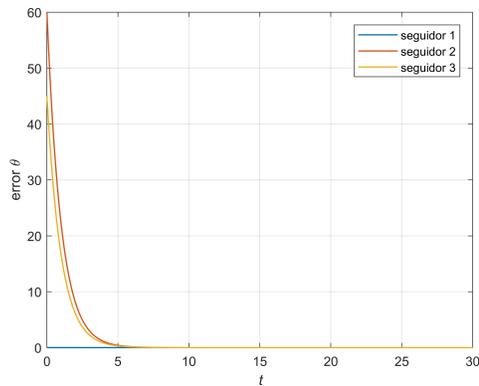


Figura 5.5: Error a través del tiempo de las orientaciones θ de los seguidores con respecto al líder virtual.

De acuerdo a las Figura 5.1 y 5.2 es posible observar como los agentes logran una formación triangular para un tiempo t , donde el seguidor 3 se encuentra en posición relativa a lo largo del tiempo $(0, 0)$ con respecto del robot líder virtual, mientras que el seguidor 2 se encuentra a una posición relativa del robot virtual de $(-2, -1)$, y por último, el seguidor 3 a una posición relativa de $(-2, 1)$. Las Figuras 5.3, 5.4 y 5.3 nos ayudan a corroborar que las distancias de separación (l, r) entre el robot líder virtual y los robots seguidores establecidas en 5.1 se logran y mantienen a través del tiempo, con el objetivo de mantener una formación triangular. Finalmente, se puede concluir de los resultados numéricos que los objetivos de control son satisfactorios.

Capítulo 6

Implementación del controlador para un robot diferencial Lego EV3

En el capítulo anterior, se mostraron algunos resultados numéricos obtenidos directamente de las leyes de control mostradas en 4.6. Estas leyes de control fueron inyectadas a la cinemática de un robot móvil tipo unicycle. De acuerdo a los resultados numéricos, quedó en evidencia el buen funcionamiento de los controladores para resolver el problema de formación y seguimiento de trayectoria en la cinemática del robot unicycle. Para este capítulo, se pretende proceder de una manera similar, usar las ecuaciones calculadas en 4.16 e inyectarlas directamente en la cinemática de cada uno de los robots móviles tipo diferencial Lego EV3, y asimismo, poder mostrar su funcionamiento.

6.1. Estructura mecánica del robot móvil diferencial Lego EV3

El robot Lego EV3 (véase Figura 4.3) es un robot móvil con dos ruedas delanteras tractoras conectadas a su respectivo motor DC, y una rueda trasera que se le conoce como rueda loca o rueda castor que es una esfera metálica que gira libremente y no es dependiente de un motor. Observe que el robot no puede mantenerse por sí solo con las dos ruedas delanteras, así que la una rueda loca trasera sirve para mantener el equilibrio del robot. La configuración de las ruedas se muestra en la Figura 6.2. Mientras que los motores que impulsan las dos ruedas tractoras se muestra en la Figura 6.1.

A este tipo de disposición se le conoce como configuración diferencial; en ella, los movimientos se realizan dando determinados sentidos de rotación a los motores. Por otro lado, este tipo de sistemas contiene restricciones no holonómicas debido a que las dos ruedas impulsadas por el motor DC solo pueden moverse de manera lineal, es decir, el robot móvil no puede tener ningún deslizamiento lateral, ya que estas ruedas naturalmente no pueden resbalar ortogonalmente a su movimiento.



Figura 6.1: Motor DC del robot Lego EV3.

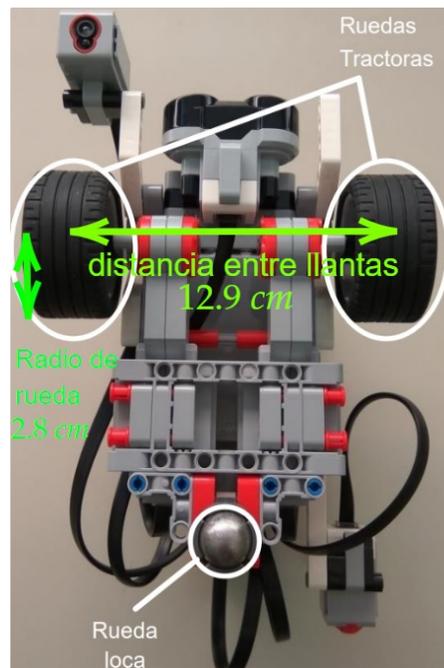


Figura 6.2: Ruedas delanteras y traseras del robot Lego EV3.

Otros de los parámetros importantes que se deben considerar para la implementación de los controladores son; el radio de las ruedas $R = 2.8 \text{ cm}$ que esta relacionado principalmente con la velocidad lineal de cada robot. Igualmente, otro parámetro importante a considerar es la distancia de separación entre las ruedas delanteras $D = 12.9 \text{ cm}$ que están más relacionadas directamente con la velocidad angular con la que gira el robot Lego EV3.

6.2. Implementación de los controladores para un robot móvil tipo diferencial

Con estos datos establecidos es posible calcular las velocidades de cada una de las llantas usando las Ecuaciones 4.10 y 4.11. Asimismo, es posible calcular la velocidad lineal global del robot usando la Ecuación 4.12 y la velocidad angular global se puede calcular fácilmente con la Ecuación 4.13. Por otra parte, de la Ecuación 4.17 que describe el error entre la posición deseada y la posición real medida por el robot diferencial en un instante de tiempo. Notemos que es necesario conocer la posición y orientación global del robot en cada instante de tiempo. De este modo, tomando en consideración los parámetros de radio $R = 2.8 \text{ cm}$ y la distancia de separación de las llantas $D = 12.9 \text{ cm}$, el modelo cinemático con las leyes de control que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria quedan descritas como se muestra a continuación.

Velocidades lineales de las llantas considerando el radio “ R ”.

$$\mu_{der} = (2.8 \text{ cm})\alpha_{der} \quad (6.1)$$

$$\mu_{izq} = (2.8 \text{ cm})\alpha_{izq} \quad (6.2)$$

Velocidad lineal y angular considerando el radio “ R ” y distancia de separación de las llantas “ D ”.

$$V = \frac{(\alpha_{der} + \alpha_{izq})(2.8 \text{ cm})}{2} \quad (6.3)$$

$$\omega = \frac{(\alpha_{der} - \alpha_{izq})(2.8 \text{ cm})}{12.9 \text{ cm}} \quad (6.4)$$

donde α_{der} y α_{izq} son las velocidades angulares de la llanta derecha e izquierda, respectivamente y μ_{der} y μ_{izq} son las velocidades lineales derecha e izquierda de las llantas.

Por último, la cinemática del robot diferencial y las leyes de control que resuelven el problema de control de formación y seguimiento quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{fn}(t) &= \frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \cos \theta_{fn}(t) + u_{xfn}(t) \\ \dot{y}_{fn}(t) &= \frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \sin \theta_{fn}(t) + u_{yfn}(t) \\ \dot{\theta}_{fn}(t) &= \frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{der} - \alpha_{izq})}{12.9 \text{ cm}} + u_{\theta fn}(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

En donde:

$$\begin{bmatrix} u_{x_{fn}}(t) \\ u_{y_{fn}}(t) \\ u_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x_{fn}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{y_{fn}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta_{fn}} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} e_{x_{fn}}(t) \\ e_{y_{fn}}(t) \\ e_{\theta_{fn}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{k_{x_{fn}}} \left(\frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \cos \theta_L(t) - \frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \cos \theta_{fn}(t) + l_{fn} \right) \\ \gamma &= \frac{1}{k_{y_{fn}}} \left(\frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \sin \theta_L(t) - \frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{der} + \alpha_{izq})}{2} \sin \theta_{fn}(t) + r_{fn} \right) \\ \delta &= \frac{1}{k_{\theta_{fn}}} \left(\frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{der} - \alpha_{izq})}{12.9 \text{ cm}} - \frac{(2.8 \text{ cm})(\alpha_{derfi} - \alpha_{izq})}{12.9 \text{ cm}} \right) \end{aligned}$$

Para este trabajo de tesis se buscó calcular la posición y orientación global del robot diferencial Lego EV3 utilizando las ecuaciones de la odometría 4.18 a 4.22. Sin embargo, al realizar experimentos en el Laboratorio de Redes Complejas (LRC) en el IPICYT se observó que los sensores (enconders) encargados de medir las rotaciones de cada una de las llantas para conocer el desplazamiento y por ende la posición global del robot, no estaban funcionando correctamente. Los datos obtenidos en el programa de MATLAB mostraban datos incongruentes, de acuerdo al desplazamiento real que había tenido el robot diferencial Lego EV3. Por lo tanto, no fue posible obtener correctas mediciones en las posiciones $x_{fn}(t)$, $y_{fn}(t)$ y la orientación $\theta_{fn}(t)$, y de este modo, cerrar el lazo de retroalimentación para comparar las posiciones deseadas, es decir, generadas por un robot virtual con respecto de las posiciones actualizadas de un robot seguidor i -ésimo. Sin embargo, para poder obtener la retroalimentación de las posiciones (x, y) y orientación θ pudo haberse resuelto con el uso de una cámara y mediante el procesamiento de imágenes obtener la ubicación real de cada uno de los robots que conforman el sistema. No obstante, debido a la falta de tiempo para resolver el problema por medio de procesamiento de imágenes y las falta de material, no fue posible implementar lo anterior. De este modo, se deja como trabajo a futuro.

Derivado de lo anterior, sobre los problemas técnicos presentados con los enconders, no fue posible realizar la implementación de los controladores que se mostraron en el sistema de Ecuaciones 6.5 sobre el robot diferencial Lego EV3.

Por consiguiente, se propuso que los robots diferenciales siguieran trayectorias por medio de poses. No obstante, es importante señalar que esta propuesta no resuelve el problema de consenso de posición y orientación entre n agentes, y además, no utiliza los controladores presentados en 4.16, más bien, la propuesta trata de imitar la solución del problema de formación y seguimiento de trayectoria, orientando y posicionando al robot de un lugar a otro. Los detalles se muestran en el siguiente Capítulo.

6.2.1. Formación y seguimiento de trayectorias por medio de poses

El problema de formación y seguimiento de trayectoria por medio de poses consiste en trasladar a cada uno de los agentes (robots) de un punto inicial a un punto final deseado, siguiendo una trayectoria previamente determinada. Para esto, es necesario utilizar las Ecuaciones de 4.18 a 4.22, pero como ya se mencionó anteriormente, conocer las posiciones x y y no es posible. Así que, el desplazamiento es controlado por la ecuación $v = d/t$ en donde v es la velocidad en cm/seg , d la distancia en cm y t el tiempo en segundos. Posteriormente, para el análisis del avance lineal de cada uno de los robots se inyectó una potencia de 50% a cada una de las llantas para conocer la distancia recorrida en un intervalo de tiempo, donde 50% se refiere a la mitad del voltaje máximo admisible en cada uno de los motores DC, que es de 9 volts. Usando regresión lineal simple para dibujar una línea de tendencia con los datos presentados en las Tablas de 6.1 a 6.3 se puede calcular la distancia que se quiere recorrer dado un intervalo de tiempo, es decir, se controlará el tiempo de activación de cada motor a una potencia constante de 50% para que recorra una distancia deseada.

Para lograr lo anterior, primero se establecieron las posiciones y trayectorias a seguir para cada uno de los robots en el plano (x,y) , como se muestra en la Figura 6.3. En donde los símbolos en forma de estrella de color azul representan las condiciones iniciales para cada robot, es decir, su posición y orientación inicial (x_0, y_0, θ_0) . Por otro lado, los círculos rojos representan las condiciones finales de posición y orientación (x_f, y_f, θ_f) y la orientación final e inicial es calculada con respecto al eje x del sistema de coordenadas mostrado a continuación.

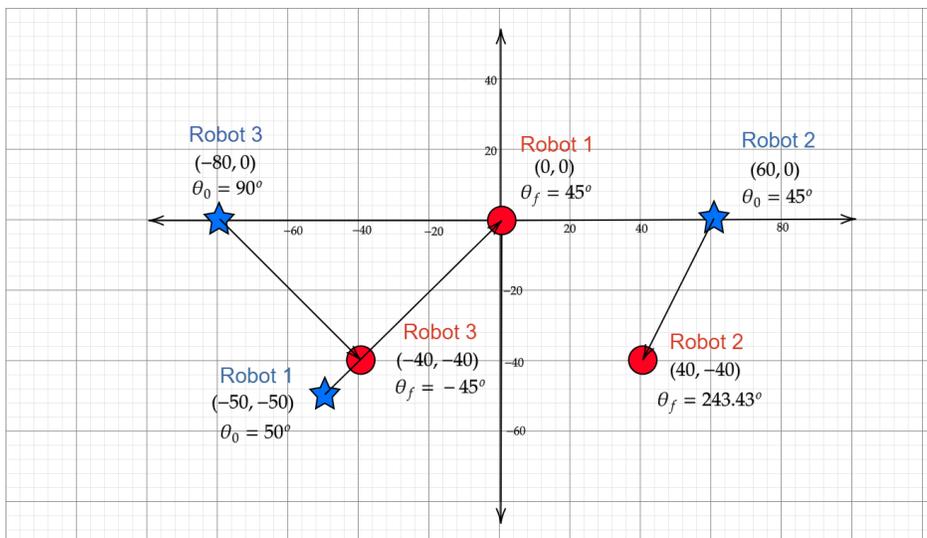


Figura 6.3: Las estrellas representan condiciones iniciales de posición y orientación y los círculos los valores finales deseados de posición y orientación para cada robot en el plano (x,y) .

De acuerdo a la Figura 6.3 los robots deben moverse desde su posición inicial (estrellas) hasta la posición final deseada (círculos) siguiendo una línea recta marcada por las flechas de color negro. Como ya se explicó en párrafos anteriores, la distancia recorrida por el robot diferencial será controlado por la activación de los motores y el uso de una herramienta matemática llamada regresión lineal, en donde se pretende graficar una línea de tendencia para predecir valores. Los datos necesarios para la implementación de dicha herramienta matemática se muestran en las siguientes tablas.

No. Experimento	segundos (s)	distancia (cm)
1	4	75.3
2	3	57.5
3	2.5	48
4	3.5	66
5	3.75	70.5
6	3.25	61.1

Tabla 6.1: Mediciones para el robot 1 a potencia constante de 50% para cada llanta.

No. Experimento	segundos (s)	distancia (cm)
1	3	61.4
2	3.5	70.03
3	3.25	65.7
4	3.6	72.25
5	3.7	75.2
6	3.8	76.35

Tabla 6.2: Mediciones para el robot 2 a potencia constante de 50% para cada llanta.

No. Experimento	segundos (s)	distancia (cm)
1	2	43.5
2	2.2	48.3
3	2.4	52.5
4	2.5	54.2
5	2.6	57.4
6	2.8	60.4

Tabla 6.3: Mediciones para el robot 3 a potencia constante de 50% para cada llanta.

Como se explicó en párrafos anteriores, los datos mostrados en las tablas nos ayudaran en este trabajo a pronosticar el tiempo de activación de los motores DC del robot Lego EV3 dependiendo de la distancia que se desea recorrer en centímetros. La expresión de regresión lineal simple viene dada por la siguiente ecuación.

$$y = mx + b \quad (6.6)$$

Donde m es la pendiente de la recta de predicción, b es el punto en donde la recta corta el eje y , x es la variable dependiente y y es la variable independiente. Para este caso, la variable y es igual a la distancia recorrida en centímetros por el robot y x representa el tiempo de activación de los motores. Por otro lado, m y b se calculan de la siguiente manera.

$$m = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} \text{ con } i = 1, 2, \dots, n \quad (6.7)$$

$$b = \bar{y} - m \bar{x} \quad (6.8)$$

donde \bar{x} y \bar{y} son la media aritmética y n es el número de datos.

Ejemplo: Usando los datos de la Tabla 6.2, obtenga el tiempo de activación de las llantas del robot 2 para recorrer 50 cm.

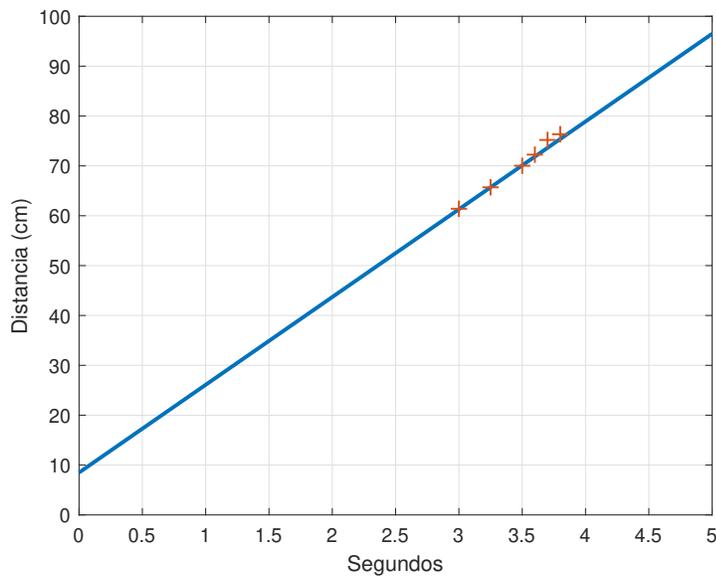


Figura 6.4: Curva de regresion lineal simple usando la Tabla 6.2.

De acuerdo a la Tabla 6.2 y la Ecuación 6.8 tenemos que $m = 17.601$ y $b = 8.493$. La variable independiente es y que corresponde a la distancia recorrida y x será la variable a calcular. De este modo, tenemos el tiempo de activación de los motores $x = 2.358$ segundos.

Por último, dadas las posiciones iniciales y finales establecidas en la Figura 6.3 en conjunto con las tablas 6.1, 6.2, 6.3 y las Ecuaciones 6.6, 6.7, 6.8 fue posible implementar el seguimiento de trayectorias por medio de poses propuesta en este Capítulo de forma exitosa. Asimismo, los experimentos de este trabajo fueron realizados dentro del Laboratorio de Redes Complejas (LRC) del IPICYT. Al mismo tiempo, para la implementación se utilizaron tres robots diferenciales Lego EV3 como el que se mostró en la Figura 4.3.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de tesis se abordó el problema de control de formación y seguimiento de trayectorias para robots móviles. En particular, se investigó el problema utilizando los modelos matemáticos de la cinemática de los robots móviles tipo unicycle y diferencial, basado en una estructura del líder y seguidor. Por otro lado, se estableció una topología de interacción entre los agentes fija con respecto al tiempo que les permitió llegar a un consenso de posición y orientación entre ellos. Asimismo, un robot virtual fue introducido, de tal forma que este robot virtual estableciera la trayectoria deseada para los robots seguidores. Así que, eventualmente, el problema de seguimiento de trayectoria se transformó en un problema de formación. De este modo, se diseñaron leyes de control en base las posiciones (x, y) y orientación θ que le permitieron al grupo de robots seguidores perseguir la trayectoria deseada situados a una distancia constante del robot líder virtual a lo largo del tiempo. además se redujo el número de controladores requeridos para lograr el objetivo de control. Mediante resultados numéricos ejecutados en MATLAB se mostró que los controladores diseñados utilizando la cinemática de robots móviles tipo unicycle arrojaron los resultados esperados, es decir, el grupo de robots en poco tiempo de simulación, lograron situarse a una distancia constante de la trayectoria deseada. Además, estableciendo una formación específica entre ellos previamente propuesta mediante las leyes de control diseñadas. Por otro lado, cabe resaltar que el diseño de los controladores es menos complejo considerando la cinemática de cada uno de los robots, ya que el modelo matemático que describe el movimiento de los robots es más sencillo y por ende el diseño de los controladores. Sin embargo, al no considerar las fuerzas externas e internas que afectan en el movimiento del robot, el controlador es menos robusto ante perturbaciones externas e internas.

Posteriormente, se buscó implementar los controladores diseñados para robots tipo diferencial en robots Lego EV3. Estos mostraron problemas en las métricas de sus posiciones actuales, ya que los sensores que contienen, no hicieron posible la determinación de las ubicaciones reales y, por lo tanto, no se podía tener un sistema con lazo cerrado para el control propuesto. Sin embargo, se trabajó con un esquema de seguimiento de poses para los robots, usando aproximaciones lineales para la el cálculo de las distancias y los ángulos de movimiento.

7.1. Trabajo a Futuro

Como se observó en capítulos anteriores, los resultados experimentales para la aplicación de los controladores que resuelven el problema de formación y seguimiento de trayectoria para un robot móvil diferencial Lego EV3 no fue posible. Así pues, a futuro se propone utilizar otras técnicas para la geolocalización de los robots Lego EV3 como el procesamiento de imágenes para detectar objetos y moverlos de un lado a otro, de tal forma que podamos seguir una trayectoria establecida, y además, poder hacerlo manteniendo una formación específica. Para lograr esto, se utilizará principalmente una computadora con buena capacidad de procesamiento de datos y una cámara que se encargara de identificar a cada uno de los robots que se encuentren dentro del rango de visión de la cámara. Por otra parte, las trayectorias y a seguir por cada uno de los robots deben ser dibujadas en el área de trabajo, de tal forma, que la cámara pueda identificarlas y retroalimentar el sistema para corregir la posición actual con respecto de la deseada.

Bibliografía

- [1] J. P. Desai, J. Ostrowski, and V. Kumar, “Controlling formations of multiple mobile robots,” in *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 98CH36146)*, vol. 4, pp. 2864–2869, IEEE, 1998.
- [2] F. Giulietti, L. Pollini, and M. Innocenti, “Autonomous formation flight,” *IEEE Control Systems*, vol. 20, pp. 34–44, 2000.
- [3] F. Y. Hadaegh, W.-M. Lu, and P. K. Wang, “Adaptive control of formation flying spacecraft for interferometry,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 31, no. 20, pp. 117–122, 1998.
- [4] K. C. Cao and C. Liu, “Formation tracking control and formation stabilization control of multiple nonholonomic mobile robots,” in *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, pp. 6053–6058, IEEE, 2012.
- [5] S. Feng and H. Zhang, “Formation control for wheeled mobile robots based on consensus protocol,” in *2011 IEEE International Conference on Information and Automation*, pp. 696–700, IEEE, 2011.
- [6] W. Ren and E. Atkins, “Second-order consensus protocols in multiple vehicle systems with local interactions,” *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit*, p. 6238, 2005.
- [7] D. Folta, F. Bordi, and C. Scolese, “Considerations on formation flying separations for earth observing satellite missions,” *Spaceflight Mechanics 1992*, pp. 803–822, 1992.
- [8] W. Ren, R. W. Beard, and T. W. McLain, “Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems,” in *Cooperative control*, pp. 171–188, Springer, 2005.
- [9] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, “A survey of consensus problems in multi-agent coordination,” in *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.*, pp. 1859–1864, IEEE, 2005.
- [10] C. Godsil and G. F. Royle, *Algebraic graph theory*, vol. 207. Springer Science & Business Media, 2001.
- [11] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, “Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 48, no. 6, pp. 988–1001, 2003.

- [12] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- [13] J. Shao, W. X. Zheng, T. Z. Huang, and A. N. Bishop, “On leader follower consensus with switching topologies: An analysis inspired by pigeon hierarchies,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 10, pp. 3588–3593, 2018.
- [14] J. Xi, N. Cai, and Y. Zhong, “Consensus problems for high-order linear time-invariant swarm systems,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 389, no. 24, pp. 5619–5627, 2010.
- [15] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*, vol. 27. Springer, 2008.
- [16] W. Ren, “Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state,” *Systems & Control Letters*, vol. 56, no. 7-8, pp. 474–483, 2007.
- [17] X. Dong, J. Xi, Z. Shi, and Y. Zhong, “Practical consensus for high-order linear time-invariant swarm systems with interaction uncertainties, time-varying delays and external disturbances,” *International Journal of Systems Science*, vol. 44, no. 10, pp. 1843–1856, 2013.
- [18] W. Ren, “Consensus seeking in multi-vehicle systems with a time-varying reference state,” in *2007 American Control Conference*, pp. 717–722, IEEE, 2007.
- [19] J. Acevedo, B. Arrue, I. Maza, A. Ollero, and E. S. de Ingenieros, “Distribución óptima de múltiples robots en vigilancia de perímetros,” in *IEEE/RSJ International Conference*, vol. 24, pp. 1394–1404, 2011.
- [20] E. W. Frew, “Combining area patrol, perimeter surveillance, and target tracking using ordered upwind methods,” in *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3123–3128, IEEE, 2009.
- [21] N. E. Leonard and E. Fiorelli, “Virtual leaders, artificial potentials and coordinated control of groups,” in *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 01CH37228)*, vol. 3, pp. 2968–2973, IEEE, 2001.
- [22] M. A. Lewis and K. H. Tan, “High precision formation control of mobile robots using virtual structures,” *Autonomous robots*, vol. 4, no. 4, pp. 387–403, 1997.
- [23] X. Li, J. Xiao, and Z. Cai, “Backstepping based multiple mobile robots formation control,” in *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 887–892, IEEE, 2005.
- [24] K. D. Do, “Formation tracking control of unicycle-type mobile robots,” in *Proceedings 2007 IEEE international conference on robotics and automation*, pp. 2391–2396, IEEE, 2007.

- [25] X. Liang, H. Wang, Y.-H. Liu, W. Chen, and T. Liu, "Formation control of nonholonomic mobile robots without position and velocity measurements," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 34, no. 2, pp. 434–446, 2017.
- [26] W. Dong and J. A. Farrell, "Cooperative control of multiple nonholonomic mobile agents," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1434–1448, 2008.
- [27] D. B. West *et al.*, *Introduction to graph theory*, vol. 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
- [28] R. O. Saber and R. M. Murray, "Consensus protocols for networks of dynamic agents," in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 2, pp. 951–956, IEEE, Jun. 2003.
- [29] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [30] L. Moreau, "Stability of multiagent systems with time-dependent communication links," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 50, no. 2, pp. 169–182, 2005.
- [31] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, 2004.
- [32] M. H. DeGroot, "Reaching a consensus," *Journal of the American Statistical association*, vol. 69, no. 345, pp. 118–121, 1974.
- [33] O. R. Oellermann and A. J. Schwenk, "The laplacian spectrum of graphs," *Graph Theory, c, Appl*, vol. 2, pp. 871–898, 1991.
- [34] X. F. Wang and G. Chen, "Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 1, pp. 54–62, 2002.
- [35] R. W. Beard and V. Stepanyan, "Information consensus in distributed multiple vehicle coordinated control," vol. 2, pp. 2029–2034, 2003.
- [36] T. L. Chung, T. H. Bui, T. T. Nguyen, and S. B. Kim, "Sliding mode control of two-wheeled welding mobile robot for tracking smooth curved welding path," *KSME International Journal*, vol. 18, no. 7, pp. 1094–1106, 2004.
- [37] L. H. R. González, J. A. Valencia, and A. Montoya, "Modelo cinemático de un robot móvil tipo diferencial y navegación a partir de la estimación odométrica," *Scientia et Technica*, vol. 1, no. 41, pp. 191–196, 2009.
- [38] L. Consolini, F. Morbidi, D. Prattichizzo, and M. Tosques, "A geometric characterization of leader-follower formation control," in *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2397–2402, IEEE, 2007.
- [39] M. Fiedler, "Algebraic connectivity of graphs," *Czechoslovak mathematical journal*, vol. 23, no. 2, pp. 298–305, 1973.

- [40] Z. P. Jiang and H. Nijmeijer, “Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping,” *Automatica*, vol. 33, no. 7, pp. 1393–1399, 1997.
- [41] E. Maulana, M. A. Muslim, and A. Zainuri, “Inverse kinematics of a two-wheeled differential drive an autonomous mobile robot,” in *2014 Electrical Power, Electronics, Communicatons, Control and Informatics Seminar (EECCIS)*, pp. 93–98, IEEE, 2014.
- [42] C. Wang, H. Tnunay, Z. Zuo, B. Lennox, and Z. Ding, “Fixed-time formation control of multirobot systems: Design and experiments,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 66, no. 8, pp. 6292–6301, 2018.