



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Control Híbrido de Velocidad y Orientación
para Aeronaves de Ala Fija**

Tesis que presenta

Fany Méndez Vergara

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dra. Ilse Cervantes Camacho

San Luis Potosí, S.L.P., Agosto del 2011



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis Control Híbrido de Velocidad y Orientación para Aeronaves de Ala Fija presentada para obtener el Grado de de Maestro(a) en Ciencias Aplicadas en la opción de Control de sistemas dinámicos fue elaborada por **Fany Méndez Vergara** y aprobada el **05 de 08 de 2011** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Ilse Cervantes Camacho
(Director de la tesis)

Dr. Hugo Rodríguez Cortes
(Jurado)

Dr. Arturo Zavala Río
(Jurado)

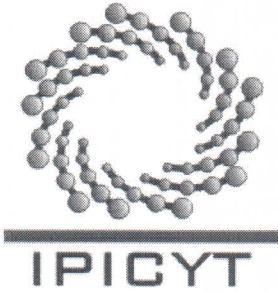
Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
(Jurado)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección de la Dra. Ilse Cervantes Camacho.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología **221807** y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 022 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 16 días del mes de agosto del año 2011, se reunió a las 13:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Arturo Zavala Río	Presidente	IPICYT
Dra. Ilse Cervantes Camacho	Secretaria	IPICYT
Dr. Hugo Rodríguez Cortés	Sinodal externo	CINVESTAV

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

Fany Méndez Vergara

sobre la Tesis intitulada:

Control Híbrido de Velocidad y Orientación para Aeronaves de Ala Fija

que se desarrolló bajo la dirección de

Dra. Ilse Cervantes Camacho

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 15:00 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 16 días del mes de agosto de 2011.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



Agradecimientos

A todas las personas que me apoyaron en la realización de este trabajo, en especial a mi asesora la Dra. Ilse Cervantes por todo el esfuerzo y tiempo invertido en mi procesos de aprendizaje, como tutora, como chamán y como guía. Gracias por todo.

A mis padres por ser un ejemplo de superación, por enseñarme a valorar las pequeñas cosas de la vida. Por ser tan valientes y por haber tenido el coraje de ser diferentes. Ellos me enseñaron y yo aprendí sin mas remedio. Gracias hermanos y papás, por aguantarme en mis peores ratos y por estar cuando más lo necesite.

Finalmente agradezco al IPICyT y al CONACyT por la oportunidad que me brindaron para desarrollarme y superarme académicamente y como persona.

Resumen

Esta tesis tiene como finalidad presentar un controlador híbrido para gobernar la orientación y el seguimiento de velocidad para un avión de ala fija. La aportación principal de esta tesis es mostrar que un simple controlador lineal tipo PI en lazo cerrado es capaz de garantizar estabilidad asintótica de la velocidad del avión, si la dinámica admite una descripción no lineal por pedazos. Se prueba que la orientación del avión es regulada de manera asintótica excepto de un número finito de puntos dados por la redundancia del mapa de cuaterniones. El modelo incluye el efecto de no linealidades así como de incertidumbres de modelado o paramétricas dependientes exclusivamente de los estados. Se estudian las condiciones de estabilidad, así como su dependencia con las ganancias del controlador y se muestra la dependencia de las ganancias del controlador con el tiempo de residencia del sistema híbrido. Finalmente para ilustrar los resultados, se presentan simulaciones numéricas utilizando datos aerodinámicos de un avión F-16.

Abstract

This work studies the stability of a class of linear controllers for fixed-wing aircrafts. The main contribution of this thesis is to show that a linear PI controller is able to guarantee asymptotic stability of the aircraft velocity, if its dynamics can be described as piecewise nonlinear. The aircraft dynamics consider nonlinear effects, as well as parametric uncertainties depending exclusively on system states. In addition, it is proved that the vehicle orientation can be asymptotic regulated except in a finite number of points given by the redundancy of the quaternion map. Stability conditions over controller gains are derived using singular perturbed systems and connections between average residence time for the hybrid system and controller gains are stated. Finally, numerical simulations in the jet F-16 are used to illustrate theoretical results.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación general del problema	2
1.2. Estado del arte	3
1.3. Objetivos y metodología	10
1.3.1. Tareas relacionadas con el alcance de los objetivos	11
1.4. Aportaciones	12
1.5. Organización de la tesis	13
2. Modelado	15
2.1. Marcos y sistemas coordenados	16
2.1.1. Definición de ejes de aerodinámicos	17
2.1.2. Orientación y posición del avión	19
2.1.3. Ecuaciones de Euler y cuaterniones	21
2.2. Ecuaciones de movimiento de un avión rígido y simétrico	23
2.2.1. Ecuaciones generales de fuerza	27
2.2.2. Ecuaciones generales de momentos	28
2.3. Componentes de Fuerzas y momentos	30
2.3.1. Ecuaciones adimensionales de movimiento	31
2.4. Modelo no lineal en ejes de cuerpo y ejes de viento	33
2.4.1. Coeficientes de fuerzas y momentos en ejes de viento	36
2.5. Consideraciones sobre las ecuaciones de movimiento	38
2.5.1. Términos gravitacionales	38
2.5.2. Términos aerodinámicos	38
2.5.3. Términos aerodinámicos de control	41
2.5.4. Términos de potencia	42
3. Formulación del problema de control y estructura del controlador	47
3.1. Objetivo de Control	47
3.1.1. Dificultades que presenta el control de actitud de un avión de ala fija	50
3.2. Propuesta de control	51
3.2.1. Ley de control	53
3.2.2. Criterio de conmutación	55
3.3. Requerimientos de la propuesta de control	57

3.3.1.	Función no lineal $\Phi(x)$	57
3.3.2.	Partición del dominio	58
4.	Aportaciones principales	61
4.1.	Estabilidad de modo y del esquema de control híbrido	62
4.1.1.	Preliminares	64
4.1.2.	Estabilidad para cada partición del dominio: Lema de estabilidad de modo	68
4.1.3.	Estabilidad del equilibrio en la unión de las particiones: Lema de estabilidad del sistema conmutado	76
4.2.	Resultados numéricos	80
4.2.1.	Efecto de ganancia proporcional	82
4.2.2.	Efecto de ganancia integral con ganancia proporcional fija	89
4.2.3.	Efecto de variaciones del tiempo de residencia en la conmutación	97
4.2.4.	Efectos de cambios en la referencia	107
4.2.5.	Efectos de diferentes perturbaciones no lineales	117
4.3.	Discusión final	125
5.	Conclusiones	127
5.1.	Conclusiones y logros	127
5.2.	Trabajo Futuro	129
	Bibliografía	131
	Apéndices	137
A.	Tablas derivadas aerodinámicas	138
B.	Datos de las simulaciones numéricas	141
B.1.	Avión F-16	141
B.2.	Valores numéricos y diagramas de simulaciones	142
C.	La matriz ${}^j B^j K_{I,1} C$	146

Índice de cuadros

2.1. Momentos y productos de inercia	29
2.2. Parámetros importantes de la planta del ala	32
3.1. Características de la función no lineal Φ	57
3.2. Características de la partición	58
A.1. Derivadas adimensionales contra longitudinales dimensionales	139
A.2. Derivadas adimensionales contra derivadas laterales/direccionales dimensionales	140

Este trabajo de tesis se deriva del proyecto “Rediseño Electrónico de un avión ultraligero bajo el concepto de vehículos más eléctricos”, propuesta de CONACyT número 114175, presentada por la empresa Aeromarmi para el mejoramiento y actualización de su modelo M1-Stela. Uno de los sub-proyectos de este proyecto fue el diseño de un piloto automático para el M1-Stela, de donde se desprende el planteamiento del control de esta tesis

Capítulo 1

Introducción

En materia de vehículos aéreos mucho se ha avanzado desde que en 1903 los hermanos Wright se convirtieron en los primeros en lograr un vuelo con un avión de movimiento controlado. En las últimas décadas y empujados por los avances en la tecnología aeronáutica, los requisitos de desempeño de aviones modernos se han vuelto más exigentes haciendo a veces necesario el uso de sistemas de control más complejos y muy frecuentemente, planteando retos de diseño más ambiciosos [17].

En la actualidad, aún cuando se han derivado leyes de control muy variadas para resolver los problemas de posicionamiento y navegación de aviones, los controladores de mayor uso son los llamados de ganancias programables (Gain Scheduling). El esquema de control gain scheduling tiene la ventaja de ser sencillo y su eficacia se ha comprobado a través de los años en una variedad de aplicaciones. Estos controladores parten de una descripción lineal por pedazos de la dinámica del vehículo, que se obtiene bajo consideraciones de desacoplamiento de dinámicas traslacionales y rotacionales. Bajo este enfoque es posible regular la velocidad de la nave siempre y cuando el cambio de condiciones de operación sea lento. Los resultados de estabilidad encontrados en la literatura para este tipo de controladores no son válidos cuando existen errores de modelado. Aún más, la relación entre las ganancias del control y su capacidad de conservar la estabilidad ante cambios rápidos en el régimen de conmutados, no ha sido estudiada.

La finalidad del presente trabajo de tesis es presentar el análisis de estabilidad de un controlador híbrido ¹ para regular la orientación y la velocidad de un avión de alas fijas. La naturaleza del controlador es híbrida debido a la interacción entre la dinámica continua del avión y el evento discreto que detona el cambio de régimen de operación. En otras palabras la dinámica continua del sistema tiene transiciones

¹Un sistema híbrido es uno que admite una descripción continua con interacciones discretas de algún tipo. Dentro de esta categoría pueden caer otros controladores estudiados en la literatura como aquellos de estructura variable, continuos por pedazos, algunos impulsivos y algunos conmutados. Muchos de ellos con traslapes importantes y coincidencias, de manera que *algunas veces* pueden usarse los diferentes nombres de manera indistinta. El concepto aquí usado es tomado de acuerdo a la definición de híbrido en [59]

discretas debidas a perturbaciones o a la realización de ciertas tareas [59].

El sistema híbrido bajo estudio, es un simple controlador lineal tipo PI en lazo cerrado con una descripción NO lineal por pedazos del vehículo. La novedad del trabajo se centra en tres aspectos principalmente. Primero, en que se realiza un análisis de estabilidad del sistema no lineal por pedazos, el cual hasta ahora no ha sido abordado en la literatura. Segundo, se estudia el sistema en lazo cerrado bajo la suposición de la existencia de errores de modelado. Tercero, se estudia la relación entre las ganancias del control y su capacidad de estabilizar al sistema ante transiciones rápidas entre dinámicas continuas. Finalmente para ilustrar los resultados se presentan simulaciones numéricas utilizando el modelo del jet F-16.

1.1. Motivación general del problema

La implementación de un sistema de control automático para el posicionamiento de un vehículo aéreo va encaminado hacia la posibilidad de facilitar al conductor aéreo la manipulación segura, eficiente y autónoma de una aeronave; de manera que el piloto humano pueda delegar el mando al control automático para maniobras riesgosas o tediosas y repetitivas. Por ejemplo, una de las principales tareas que debe realizar un avión es la de navegación. Esta tarea implica el control de la actitud², así como el de la velocidad traslacional y rotacional en tres dimensiones con respecto al origen en un marco de referencia inercial (MRI).

La necesidad de contar con aeronaves con mayor fiabilidad y mejor desempeño en aplicaciones civiles y militares, ha dado cabida entre otras cosas, a la creación y perfeccionamiento de sistemas de los esquemas de control. Por ejemplo, entre las aplicaciones civiles los vehículos aéreos no tripulados (VANTs) se usan para monitoreo de fuegos forestales, de pozos petroleros, de la vida salvaje, etc. En el caso de aplicaciones militares éstos se usan para monitoreo de cultivos de droga, espionaje, pruebas de armas, etc. [1]. El control de velocidad y actitud juega un papel importante en la navegación del vehículo y debido a la relevancia de este problema es que se aborda en el presente trabajo de tesis.

Con el fin de resolver la tarea de diseño de un control de velocidad, es importante destacar que al asignar un marco de referencia, la elección de ejes coordenados repercutirá directamente en la definición de las ecuaciones que describen el movimiento del avión. Lo anterior debido a que las fuerzas y momentos aerodinámicos de un avión son producidos por el movimiento relativo de éste con respecto del viento, por lo tanto las ecuaciones que describen su movimiento dependen de la orientación del avión con respecto al flujo de aire. Es una práctica habitual en aeronáutica, definir tres diferentes sistemas de ejes coordenados, estos son ejes fijos en el avión, ejes de estabilidad (desplazados un ángulo de ataque

²En aeronáutica el término actitud se usa para referirse a la orientación del avión con respecto de un marco de referencia inercial

respecto de los ejes de cuerpo) y ejes de viento (desplazados un ángulo de deslizamiento respecto de los ejes de estabilidad). En los ejes del cuerpo el eje axial se alinea con el fuselaje, transversal a estribor y longitudinal con el plano de simetría con x . Partiendo de la configuración anterior se obtienen las restantes configuraciones, al rotar éstos ejes α grados sobre su eje transversal (ejes de estabilidad) y β grados sobre su eje longitudinal (ejes de viento) [2].

Por otro lado resolver la tarea de control de orientación suele ser un trabajo poco fácil ya que ésta se modela de manera no lineal. Aún más, debido al diseño del avión, su descripción es compleja con múltiples entradas y salida (MIMO) y en lo general, presentan un fuerte acoplamiento de las dinámicas longitudinal y rotacional. Lo anterior hace que el diseño de leyes de control para gobernar la orientación y la velocidad sea difícil; mas aún, la transformación de velocidad angular a derivadas de la posición presenta singularidades en el mapa cuando se usan los ángulos de Euler ó redundancia si se usan los cuaterniones.

Finalmente, la orientación y la velocidad del avión son manipuladas mediante actuadores que modifican la posición de las superficies de control (partes móviles que modifican la aerodinámica del avión). Observe que en este caso, el número de salidas es mayor que el número de entradas de control, lo que implica que se tiene un mapa entrada-salida subactuado.

En la literatura se pueden encontrar trabajos que exponen diversos enfoques para abordar el problema de control de orientación y de velocidad en aviones. Algunos mediante el desacoplamiento de la dinámica del avión en dinámica longitudinal y dinámica lateral, método que facilita el estudio de la estabilidad. De estos enfoques, en la siguiente sección se dará énfasis sólo aquellos que presentan una estructura similar (híbrida) a la que estudia este trabajo de tesis, lo anterior con el fin de establecer plenamente la pertinencia y la aportación.

1.2. Estado del arte

Muchos son los retos que plantea el control de la dinámica de vuelo. Algunos problemas típicos en aeronáutica son: regulación y seguimiento de trayectorias (p.ej. en tareas de despegue, aterrizaje, etc.), control de las cualidades de desempeño (p.ej. en variables como velocidad, altitud y consumo de combustible, etc.), rechazo de perturbaciones (p.ej. ante cambios de puntos de operación surgidos por turbulencias o cambios de tarea.), etc. La evolución en el desarrollo de aviones modernos y la extensión en los tiempos de vuelo así como la diversidad de aplicaciones para estos, exigen mejores sistemas de control planteando nuevos retos en el contexto de la teoría de control [44].

En esta sección no se pretende hacer una revisión exhaustiva sobre los diferentes enfoques usados para el control de la dinámica de vuelo. La revisión estará orientada, primero a aquellos trabajos que reportan aplicaciones de control de velocidad u

orientación y segundo a aquellos trabajos que presentan estructuras de control similares al aquí presentado. Para organizar la revisión bibliográfica, la información se divide en enfoques continuos y enfoques no-continuos.

Enfoques continuos

Dentro de los enfoques continuos destacan controladores complejos como son los que se basan en la inversión dinámica del sistema, lógica difusa, control adaptable y control óptimo, los cuales se discuten a continuación.

En el enfoque de inversión dinámica o retroalimentación de linealización, la ley de control reduce globalmente la dinámica de determinadas variables controladas (VC) a integradores. El sistema en lazo cerrado permite que las VC respondan a ordenes específicas de control, mientras que satisfacen una respuesta previamente definida ante perturbaciones. En algunos casos, es posible garantizar cierta robustez [10] e incluso estabilidad para limitaciones físicas de los actuadores [10]. Dentro de los trabajos reportados en la literatura que utilizan inversión dinámica se tiene [26]; en donde el enfoque de inversión dinámica es implementado usando como variables de control los mandos del piloto³ del avión. Las entradas para los mandos del piloto se resuelven considerando dos casos: (i) únicamente movimientos longitudinales, es decir el centro de gravedad del avión se mueve en un plano vertical (velocidad de alabeo nula) (ii) únicamente movimientos laterales, es decir alabeo, viraje y deslizamiento del avión (aceleración angular). Este nuevo procedimiento tiene las ventajas de obtener una menor respuesta oscilatoria, menor magnitud de control y menor número de parámetros de diseño.

En [27] se diseña un control que supone incertidumbre paramétrica. Los autores prueban robustez de una inversión dinámica basada en el diseño de control no lineal para un avión de alto rendimiento, logrando mejorar la respuesta transitoria, reducir la magnitud de control y eliminar el comportamiento de fase no mínima. Finalmente en [28], la inversión dinámica logra la linealización y separación de las respuestas de los comandos del sistema en lazo cerrado, usando conocimiento exacto de la dinámica con fines de retroalimentación, junto con un controlador lineal que impone el comportamiento dinámico deseado del sistema. La robustez requerida se logra a través de un enfoque multi-modelo, así como con medidas locales de robustez (por ejemplo, los márgenes de ganancia y fase). En general la inversión dinámica depende importantemente del conocimiento de la estructura del sistema y la existencia del mapa de transformación depende de manera crucial del modelo y de su diferenciabilidad.

Otro de los enfoques continuos es el basado en lógica difusa. La lógica difusa se utiliza normalmente cuando la complejidad del proceso en cuestión es muy alta y no

³Es decir las superficie móviles ubicadas en la cola horizontal, alas, etc. Éstas modifican la geometría del avión e influyen en la definición de las fuerzas

existen modelos matemáticos precisos, en procesos altamente no lineales y cuando se envuelven definiciones y conocimiento no estrictamente definido (impreciso o subjetivo). En [29] se desarrolla un modelo de lógica difusa proporcional-integral-diferencial (PID) para llevar a cabo la tarea de estabilización, así como las funciones automáticas de maniobra de vuelo. Se ha mostrado que funciona para dinámicas desacopladas del movimiento longitudinal y lateral-direccional de una aeronave, en particular para el X-29. Los controladores de cabeceo, balanceo y viraje se generan mediante el análisis de un modelo matemático que describe las características estáticas y dinámicas de las aeronaves. Cada conjunto de reglas difusas consiste en reglas principales y secundarias. Las reglas secundarias están diseñadas para proporcionar una respuesta rápida con entradas grandes de control, mientras que las reglas principales están diseñadas para hacer ajustes finos que mejoren la estabilidad dinámica.

En [30] la inversión jerárquica dinámica (IDH) se propone junto con un algoritmo recursivo basado en lógica difusa para el diseño del control de vuelo autónomo (AFC) de aviones de ala fija. La IDH presupone sistemas no-lineales afines a los que la inversión dinámica no es aplicable. La ley AFC diseñada con IDH es aplicable en condición de vuelo nominal y algunas otras condiciones de vuelo, reduciendo de manera significativa la carga de trabajo en comparación con el enfoque de ganancias programables. En general estos controladores presentan buen desempeño con suficiente información para su sintonización y adiestramiento. La dificultad en la implementación dependerá de la complejidad de la red (conjunto de reglas usando basadas en lógica difusa) o de la definición de los conjuntos difusos.

En [35] se propone un control adaptable que resulta en un tipo especial de control no-lineal en el que el estado del proceso puede ser separado en dos escalas de tiempo que evolucionan a diferente velocidad. La escala lenta corresponde a los cambios de los parámetros y por consiguiente a la velocidad con la cual los parámetros del regulador son modificados y la escala rápida que corresponde al lazo ordinario de retroalimentación. En [36] se aborda el problema de la verificación de las técnicas de control adaptable para permitir un vuelo seguro en presencia de condiciones adversas. Ya que los sistemas adaptables son no lineales por diseño, los indicadores para la verificación de controladores no se pueden aplicar (ver [36]). En [36] se introduce un conjunto de métricas que comparan el comportamiento incierto entrada-salida de la aeronave bajo la acción de un controlador adaptable a la de un modelo de lazo cerrado lineal.

En [37] se propone una ley de control adaptable discreta para estabilizar, seguir comandos y rechazar de perturbaciones que bajo algunas condiciones, muestra ser eficaz para los sistemas que son inestables, MIMO, y / o de fase no mínima. El algoritmo de control da información sobre el signo de la ganancia a altas frecuencias. Se aplica esta técnica de control adaptativo a un modelo genérico de la NASA de transporte para ilustrar rechazo de perturbaciones de procedencia desconocida. Finalmente en [39] proponen un controlador adaptable basado en la atenuación de

perturbaciones aplicado a un avión F-18 considerando un ángulo de ataque muy grande. Para controlar los cambios en el ángulo de ataque manipulan el vector de fuerza de empuje (sustentación del avión), para lo que estima en línea los estados del sistema así como la incertidumbre de parámetros en la matriz de coeficientes de control. Con este enfoque es posible probar estabilidad, robustez y es ideal para sistemas con mucha incertidumbre.

Los enfoques basados en control óptimo varían dependiendo del criterio de optimalidad, del tipo de dominio de tiempo (continuo o discreto), de la presencia de diversos tipos de restricciones y de cuales variables son manipulables. En [32] se propone un enfoque que encuentra la ruta óptima sujeta a la limitación de posibilidades (ver [32] para una explicación más extensa), lo cual asegura que la probabilidad de colisión con obstáculos esté por debajo de un umbral determinado. Este trabajo va orientado al seguimiento de trayectorias de vehículos autónomos y está limitado a problemas en donde todas las distribuciones de las incertidumbres son de tipo Gaussianas, y suelen dar lugar a planes muy conservadores. En [33] se considera el problema de estabilización para un avión sujeto a grandes cambios del ángulo de ataque. Este caso amerita atención especial, ya que aunque los aviones pueden adquirir mayor fuerza de sustentación, las no linealidades en este régimen son considerablemente mas grandes que en regímenes de poca sustentación. Usando tablas de datos de coeficientes aerodinámicos se diseña una ley de control óptimo no-lineal que estabiliza la actitud del avión. Este último enfoque presenta mejores resultados que las técnicas de control lineal. En general la complejidad del controlador dependerá del criterio de optimalidad y del orden del sistema.

El enfoque de linealización por retroalimentación escalonada (Backstepping), es un método recursivo de diseño que permite el diseño de leyes de control por realimentación en conjunto con funciones de Lyapunov asociadas mediante un procedimiento sistemático. Las bases teóricas de están fuertemente relacionadas con la linealización por realimentación de estado, sin embargo, su ventaja frente aquella es la evitar la cancelación de todas las no linealidades. Estas no linealidades se pueden clasificar como *provechosas* y *perjudiciales*. Las primeras son utilizadas en función de la bondad del diseño, mientras que las segundas se pueden dominar, mediante la inclusión de un amortiguamiento no lineal. La manipulación de las no linealidades hace que por un lado se aumente la flexibilidad de diseño y por otro, al contrario que en la linealización por realimentación de estados, no es necesario modelar todas las no linealidades, ya que no se produce la cancelación total de las mismas. Sin embargo por su misma naturaleza es poco robusto ante perturbaciones.

En [13] se propone un enfoque que permite encontrar una función de Lyapunov simple para un sistema que involucra variables de estado adicionales y al mismo tiempo permita diseñar el control de retroalimentación para garantizar la estabilidad. El controlador puede ser visto como un controlador de múltiples variables para el ángulo de ataque, ángulo de deslizamiento lateral, y la velocidad de rotacional relacionada con el alabeo. El controlador resultante converge a un punto deseado

desde casi todos los puntos de partida en un dominio de operación. Se dan las pautas para el ajuste del controlador de tal manera que permita influir en las características de para elegir una modalidad de oscilaciones. Los modos pueden ser: de periodo corto (Short period mode), de largo periodo (Long period mode) y el así llamado balanceo del holandés (Dutch roll mode) ⁴. Se simulan efectos del ángulo de ataque en maniobras de balanceo a alta velocidad mediante un modelo simplificado del avión para ilustrar el diseño del controlador. En [14] desarrollan una ley de control basada en backstepping adaptable con la finalidad de dar mejores cualidades de vuelo longitudinal para todas las condiciones de vuelo. Usando el procedimiento backstepping sintetizan un nuevo tipo de controlador para lograr respuestas exhaustivas en una amplia gama de condiciones de vuelo. Otras investigaciones implementan la técnica de backstepping adaptable como en [16], [17] que además de tomar en cuenta las consideraciones de backstepping convencional, hacen uso de leyes para estimación de parámetros en línea para lidiar con incertidumbres de modelado. Este enfoque puede ser aplicado a sistemas no-lineales que puedan ser transformados a la forma triangular inferior y en algunos casos las limitaciones mecánicas de las superficies de control no pueden ser manipuladas explícitamente. Otra técnica usada es backstepping por bloques también conocida como backstepping multi-entradas [18], en donde controlan simultáneamente la orientación y la velocidad, mostrando resultados de estabilidad global en control de la orientación y estabilidad local en control de velocidad.

Enfoques continuos por partes

Durante los últimos años, se han ido incrementando las actividades de investigación relativas al análisis de la estabilidad para los denominados “sistemas conmutados” o sistemas continuos por pedazos. Un sistema conmutado es un sistema que consta de un número finito de sub-sistemas y una regla lógica que orquesta la conmutación entre ellos. Debido a lo anterior, es que los sistemas conmutados representan una opción elegible en el diseño de controladores para la dinámica de vuelo.

El enfoque de ganancias-programables es probablemente uno de las técnicas más populares de los enfoques de diseño de control conmutado que ha sido amplia y exitosamente aplicado en campos que van desde la industria aeroespacial hasta el control de procesos. Este esquema de control es definido como el proceso de subdividir un sistema no lineal en una serie de sub-sistemas lineales, linealizando la planta en un número finito de puntos de operación. La eficiencia del enfoque de ganancias programables depende de las características dinámicas del sistema no-lineal y de como pueden ser re-escritas como un conjunto de plantas lineales, con controladores lineales (de ganancias programables) alrededor de un punto de operación [4].

En este contexto existen varios de enfoques cuya base está sentada en el diseño de

⁴Vea [45], [43] para una descripción detallada de estos modos de operación.

ganancias programables, por ejemplo en [5] se presenta un método de diseño de un controlador para hacer frente al problema de minimizar la norma inducida \mathcal{L}_2 del error de regulación, en sistemas lineales de parámetros variables conmutados (LPV). Este trabajo considera una conmutación arbitraria causada por la variación de parámetros y usa una función de Lyapunov común dependiente de los parámetros para obtener condiciones suficientes de estabilidad, sobre la matriz de la desigualdad lineal (LMI) para el sistema conmutado LPV. Se diseña una familia de controladores LPV de acuerdo a las condiciones LMI, y cada uno de ellos es adecuado para cada región de parámetros. El método propuesto LPV de control se aplica al modelo longitudinal de un avión F-16 del cual se tiene un conocimiento exacto de su dinámica.

En [6] se presenta un método sistemático para determinar si es práctico usar diseños de control de vuelo en una amplia región de ángulos de ataque. El enfoque se basa en múltiples funciones de Lyapunov de parámetros variables. Se diseña una familia controladores de LPV y cada uno de ellos es adecuado para un subespacio de parámetros específicos. El estado del controlador se reinicia para garantizar las condiciones de estabilidad con la función de Lyapunov propuesta cuando un evento de conmutación se produce. Se estudian dos lógicas de conmutación dependientes de los parámetros, conmutación de histéresis y conmutación con un tiempo promedio de permanencia. El esquema propuesto de control LPV se aplica a un modelo de aviones F-16 con diferentes objetivos de vuelo y bajo una partición de la dinámica con respecto a ángulos de ataque bajos y altos.

En [7] se reescribe un modelo longitudinal del avión como un sistema LPV. Con el fin de reducir el trabajo computacional, todas las derivadas de estabilidad, excepto la que relaciona la fuerza de empuje con el ángulo de ataque, son representados por planos lineales que están en función del ángulo de ataque y la altitud. Los parámetros están acotados, por lo que mediante una interpolación es posible cubrir todos los posibles valores de las derivadas, por lo tanto es posible garantizar la estabilidad en amplios rangos de operación. La dinámica se describe mediante tres parámetros: ángulo de ataque, altitud y la fuerza debida al alabeo. Por último se determina el diseño de la ganancia H-infinito. La ganancia de control en cada instante de tiempo es una combinación lineal entre las ganancias de control con los límites entre los sub-sistemas. Mediante simulaciones se verifican que la aeronave es capaz de seguir una trayectoria de referencia y mantiene la estabilidad.

En la literatura se pueden encontrar diversos trabajos relacionados con la técnica de ganancias programables que relajan la restricción del enfoque de ganancias programables clásico con el propósito de relajar las restricción sobre la operación del sistema cerca del punto de equilibrio, manteniendo la estructura básica del enfoque de ganancias programables. Por ejemplo en [8] proponen un procedimiento para la interpolación del espacio de estados, los controladores lineales invariantes en el tiempo para la síntesis de controladores de ganancias programables. El método de interpolación se basa en la parametrización de Youla del espacio de estado y genera

un controlador de ganancia programada que es estable localmente en cada punto de funcionamiento de una planta no lineal. El método de interpolación también proporciona orientación sobre la selección de los puntos en los que operan los controladores lineales invariantes en el tiempo.

En [9] presentan una estrategia de conmutación de los controladores de la ganancia programable para sistemas LPV. El rango de operación se divide en pequeños sub-espacios pequeñas que se cubren con una serie de convexos, se propone un procedimiento de síntesis de LMI basados en controladores de ganancia programables para la conmutación de uno a otro en la línea de intersección con el convexo vecino. Este método presenta la propiedad de que la conmutación genera una acción suave de las señales de la entrada de control. En [22] proponen un método para identificar las regiones de inestabilidad en el sistema de lazo cerrado, influyen en el impacto del sistema de control generando superficies de equilibrio en regiones de operación específicas. La creación y destrucción de equilibrios en el sistema de control permite visualizar y encontrar la estabilidad del control a lazo cerrado y asociarla con la estabilidad de lazo abierto. Por último en relación a este enfoque en [23] y [24] dan solución a determinado número de tareas para el avión con la metodología de [22], proponiendo un punto de equilibrio para cada tarea con la finalidad de obtener un controlador global no lineal para todo el sistema.

Finalmente, una estrategia que ha cobrado popularidad en los últimos años y que es capaz de garantizar estabilidad del sistema ante perturbaciones impulsivas, tipo escalón o incluso ante una amplia variedad de tareas y modelos, es la basada en sistemas híbridos. Los controladores basados en este enfoque toman su nombre de la interacción entre el estado continuo y el estado discreto del algoritmo de control ⁵ y existen una gran variedad de ellos dependiendo del tipo de interacción. Cuando ocurren variaciones en el modelo del controlador (continuo) detonadas por algún evento, por ejemplo la existencia de una perturbación o la realización de cierta tarea, éste controlador adopta el nombre de controlador híbrido conmutado y tiene la ventaja de ser altamente adaptable a las condiciones de vuelo.

En [40] proponen un enfoque de control híbrido con backstepping incorporando el análisis de ganancias- \mathcal{L}_2 para el control de actitud del sistema de un avión con una perturbaciones externas e incertidumbres de modelado. El controlador propuesto logra un buen rendimiento y la atenuación de perturbaciones desconocidas. Finalmente el controlador implementa la fórmula de cuaternión para interpolación entre las rotaciones, facilitando la tarea de controlar la actitud del avión en regiones de gran desviación de la actitud y regiones pequeñas de desviación de la velocidad. En [41] proponen un método de control híbrido adaptivo que mejora el desempeño de los sistemas de control de seguimiento de vuelo. Este método está basado en una estimación de parámetros en línea por redes neuronales. La estimación de parámetros se basa en dos enfoques: (1) una ley de control adaptiva derivada

⁵De acuerdo a la definición en [59]

del método directo de Lyapunov que asegura que el error de seguimiento sea acotado y (2) un método recursivo de cuadrados mínimos que reduce el error de modelado. Finalmente en [42] se propone el diseño de un control híbrido que aborda el problema de adaptación indirecta usando el algoritmo recursivo de cuadrados mínimos (RLS). El control híbrido tiene dos modalidades control de vuelo que son de manera directa e indirecta. Utilizando un modelo no-lineal completo del avión, demuestran la eficacia de la arquitectura de control híbrido ante cambios drásticos en la dinámica de vuelo.

Las leyes de control y métodos de diseño para control de vuelo han evolucionado desde estructuras simples de retroalimentación de forma fija con ganancias sintonizadas en vuelo hasta complejas leyes de control de retroalimentación multivariable, diseñadas con herramientas modernas de control multivariable, que de manera eficaz compensan la respuesta de los comandos del avión (superficies de control), respuesta a perturbaciones y las características de robustez de la combinación estructura-controlador en lazo cerrado. El paradigma dominante en el diseño de control de vuelo se basa en el enfoque divide y vencerás, enfoque común para muchas tareas complicadas de ingeniería [10]. Esto motiva la propuesta del presente trabajo, al diseñar un control híbrido-conmutado.

1.3. Objetivos y metodología

El objetivo principal de este proyecto es probar que usando una ley de control lineal tipo PI junto con una descripción no lineal por pedazos del avión es posible regular la velocidad del avión, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} V_T \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{T_{ref}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

donde $V_T = |\mathbf{V}_T|$ es la magnitud de la velocidad traslacional del avión, β y α son los ángulos aerodinámicos, $\omega \triangleq [P, Q, W]$ componentes de la velocidad angular y $V_{T_{ref}}$ es una velocidad deseada a alcanzar. Además es posible regular la orientación, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{ref} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ref} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

donde η es la componente escalar del cuaternión y $\boldsymbol{\varepsilon}$ contiene las componentes del cuaternión que describen la orientación. η_{ref} y $\boldsymbol{\varepsilon}_{ref}$ son referencias deseadas. La orientación sólo es ambigua en un número finito de puntos donde el mapa es redundante. Para lograr el objetivo principal de control se plantea el uso de un

controlador multi-lazo, en el cual un primer lazo de control se encargue del problema de estabilización de cuerpo (Objetivo 1.1) y un segundo lazo cumpla con la tarea de regulación de orientación (Objetivo 1.2). En particular se plantean las siguientes metas para solucionar los problemas anteriores:

- **Partición del dominio.** Establecer un criterio para la división del espacio de estados (dominio) en regiones de operación usando un criterio de conmutación. La partición del dominio permite usar, dentro de cada descripción continua, el enfoque de sistemas singularmente perturbados para realizar el análisis de estabilidad por pedazos.
- **Análisis del sistema singularmente perturbado.** El sistema no lineal del avión es reescrito en forma de sistema singularmente perturbado usando para ello las ganancias del controlador. Una de las finalidades del análisis de la estabilidad usando este enfoque es precisamente, encontrar las condiciones para la cual es válida esta interpretación ⁶.
- **Probar Existencia y unicidad de un único punto de equilibrio.** Para garantizar estabilidad exponencial del punto de equilibrio es necesario probar que todos los dominios comparten un único punto de equilibrio, dada una partición cualquiera del dominio.
- **Establecer condiciones de estabilidad de cada condición (modo) de vuelo.** El sistema no lineal bajo la acción del controlador se analiza por partes. Primero se encuentran condiciones de estabilidad para el lazo de control de velocidad y luego del lazo de control de orientación. Con base en el enfoque de sistemas singularmente perturbados se concluye sobre la estabilidad del sistema no lineal bajo ambos lazos.
- **Estabilidad del sistema conmutado.** La idea es encontrar las condiciones sobre el tiempo de residencia promedio de cada modo, de manera que se garantice la estabilidad del sistema conmutado.
- **Evaluación numérica de la ley de control.** Simulaciones numéricas del esquema de control en un avión F-16 son realizadas con la finalidad de ilustrar los resultados teóricos y de ilustrar el desempeño en lazo cerrado.

1.3.1. Tareas relacionadas con el alcance de los objetivos

El propósito de esta sección es describir brevemente el procedimiento que se siguió para alcanzar los objetivos del proyecto. La primera tarea es establecer el modelo no lineal. Se reescribe el modelo no lineal en forma de sistema singularmente perturbado. Este paso se realiza en dos partes, primero se obtiene el sistema singularmente perturbado del sistema no lineal bajo la acción del

⁶En [47], [58] se muestra que este enfoque puede ser usado en sistemas en lazo cerrado cuando los parámetros del controlador varían dentro de un intervalo

control de velocidad únicamente. Las ganancias del primer controlador garantizan la posibilidad de esta reescritura. En un segundo paso se agrega el lazo de control de orientación y se obtiene un segundo sistema singularmente perturbado ahora, usando las ganancias del segundo lazo.

La segunda tarea consiste en establecer un criterio para la división del espacio de estados. Se identifican las condiciones de operación para cada modo de vuelo en el cual se va a trabajar. Lo anterior con el objetivo de cubrir la totalidad el espacio de estados. Con el fin de contar con un sistema conmutado bien definido se tiene la restricción de que la unión de todos los dominios de cada modo de vuelo sea igual al espacio de estados.

La tercera tarea consiste en estudiar el sistema en lazo cerrado con la finalidad de establecer las condiciones de estabilidad. Con base en la teoría de sistemas singularmente perturbados se analiza la dinámica rápida y la dinámica lenta del sistema. Se concluye sobre la estabilidad del sistema singularmente perturbado y finalmente sobre la estabilidad del sistema no lineal.

Finalmente para ilustrar resultados se realizan simulaciones numéricas. Un par de modos de vuelo son elegidos para ilustrar los resultados teóricos. Las simulaciones son realizadas con la ayuda de Simulink de Matlab y un modelo de seis grados de libertad.

1.4. Aportaciones

La aportación principal de esta tesis es mostrar que un simple controlador lineal tipo PI en lazo cerrado con una descripción no lineal por pedazos del vehículo es capaz de garantizar estabilidad asintótica de velocidad y que además la orientación puede regularse en todo el dominio excepto de un número finito de puntos dados por la redundancia del mapa de cuaterniones. La novedad del trabajo se centra en tres aspectos principalmente. Primero, en que se realiza un análisis de estabilidad del sistema no lineal por pedazos, el cual hasta ahora no ha sido abordado en la literatura. Segundo, se estudia el sistema en lazo cerrado bajo la suposición de la existencia de errores de modelado. Tercero, se estudia la relación entre las ganancias del control y su capacidad de estabilizar al sistema ante transiciones rápidas entre dinámicas continuas. En particular, debido a la naturaleza del controlador (híbrido) este es altamente adaptable a las condiciones de vuelo.

Por otro lado se listan las siguientes aportaciones :

- Se plantea un criterio de partición del dominio.
- Se prueba la existencia de un punto de equilibrio único en lazo cerrado para todas las particiones del dominio.

- Se deriva un resultado de estabilidad asintótica de velocidad usando control lineal y un modelo no lineal por pedazos. El modelo incluye errores de modelado y perturbaciones no lineales.
- Se muestra que cuando el mapa de orientación es no redundante, es posible regular la orientación con controladores lineales.

Para llevar a cabo el análisis del sistema en lazo cerrado se usa una partición del dominio dentro de la cual es admisible una descripción del sistema continua no lineal (descrita por ecuaciones diferenciales con o sin control). Siempre que la trayectoria del sistema detone un cambio en el dominio de operación, el comportamiento continuo cambia. Con el fin de tener un sistema híbrido bien definido, se escoge tener un y sólo un comportamiento dinámico continuo por cada participación del dominio y la unión de los dominios forman el espacio de estados. El criterio de conmutación es determinado puede ser dependiente del tiempo y/o el estado.

Se propone una estructura de control en cascada resolver simultáneamente el problema de regulación de velocidad y control de orientación. El problema de actitud se formula mediante la restricción cinemática que relaciona la velocidad angular del cuerpo con cuaterniones, evitando de esta manera el inconveniente de múltiples singularidades en una misma condición de operación, como puede ser el caso de la descripción que utiliza ángulos de Euler. Se muestra que el control propuesto es capaz de estabilizar la dinámica no lineal del avión a pesar de incertidumbres, siempre y cuando cumplan con ser funciones Lipschitz de manera local en cada partición del dominio.

Para ilustrar las ventajas del control propuesto se utilizan simulaciones numéricas con el modelo de un avión F-16; debido a la disponibilidad de información con la que se cuenta para este modelo.

1.5. Organización de la tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se hace una revisión de la teoría de análisis para cuerpo rígido (rotación y consideraciones aerodinámicas). Las ecuaciones de movimiento de un avión son la base sobre la cual se construye la estructura básica conceptual de la dinámica de vuelo. Se establece el modelo en ejes de cuerpo y el modelo en ejes de viento. Se explica el modelo no lineal que será utilizado en simulaciones para probar la estrategia de control.

El Capítulo 3 contiene el planteamiento del problema de control. Este capítulo plantea los problemas del control de velocidad y orientación en aviones. Se plantean los objetivos de control y se muestra la estrategia de control propuesta, su estructura y su motivación.

El Capítulo 4 contiene los resultados teóricos ilustrados con simulaciones numéricas. Como resultado del análisis del sistema en lazo cerrado se establecen dos resultados principales que hablan sobre la estabilidad para cada modo de vuelo y para el sistema híbrido conmutado. Estos resultados serán ilustrados con imágenes de las simulaciones numéricas, realizadas con el programa Simulink de Matlab. Se presenta la prueba formal de cada resultado.

Finalmente en el Capítulo 5 se resumen las principales contribuciones de este trabajo de tesis y se derivan conclusiones al respecto. En este capítulo se exponen las ventajas y desventajas de la estrategia de control propuesta. Se dan las conclusiones sobre el trabajo desarrollado y se discuten líneas de trabajo a futuro.

Capítulo 2

Modelado

Por definición un cuerpo rígido es un sistema de un número infinito con partículas, tal que las distancias relativas entre cada par de ellas permanece constante al ser sometido a la acción de fuerzas y pares. Aunque bajo determinadas condiciones todos los sistemas presentan elasticidad, para propósitos prácticos en algunas ocasiones es posible considerarlos como cuerpos rígidos. Mas aún, un cuerpo rígido no puede consistir en un grupo finito de partículas, si no mas bien tendrá una distribución continua. El comportamiento de las partículas de la distribución se puede estudiar mediante la aplicación de leyes de movimiento.

El movimiento de un avión considerando éste como cuerpo rígido puede ser complementado involucrando las restricciones debidas a la navegación, perturbaciones atmosféricas, así como la dinámica del sistema de control de forma simultánea para determinadas configuraciones del avión. Las ecuaciones generales de movimiento de un avión son de seis grados de libertad y relacionan las fuerzas y momentos de perturbación, considerando el fuselaje rígido y simétrico con una distribución de masa uniforme. Las perturbaciones de fuerzas y momentos a su vez se deben a efectos aerodinámicos, efectos gravitacionales, movimiento de controles aerodinámicos (mandos o superficies de control), efectos de propulsión y efectos de perturbaciones atmosféricas [2].

De manera general, el contar con la posibilidad de realizar pruebas numéricas de desempeño previas a la implementación de un controlador en aviones, reduce costos de fabricación, dando una buena aproximación a un análisis real. En el caso del presente trabajo el alcance de las simulaciones se limitará a evaluación del desempeño del controlador.

En este capítulo se verán conceptos básicos sobre aerodinámica y aeronáutica, luego se derivarán las ecuaciones de movimiento del avión considerándolo como cuerpo rígido sujeto a fuerzas y momentos de perturbación.

2.1. Marcos y sistemas coordenados

El trabajo aquí presentado únicamente considera el vuelo atmosférico normal¹. En éste, se mide el movimiento del avión en relación a un marco fijo en tierra. La convención aceptada para la definición de ejes fijos en tierra define que un punto de referencia o_0 en la superficie terrestre como el origen de un sistema que sigue la convención de la mano derecha de ejes ortogonales (o_0, x_0, y_0, z_0) donde el vector $\overline{o_0x_0}$ apunta hacia el norte, el vector $\overline{o_0y_0}$ apunta hacia el este y $\overline{o_0z_0}$ apunta verticalmente hacia abajo a lo largo del vector gravedad. Los ejes convencionales de la tierra se ilustran en la Fig. 2.1.

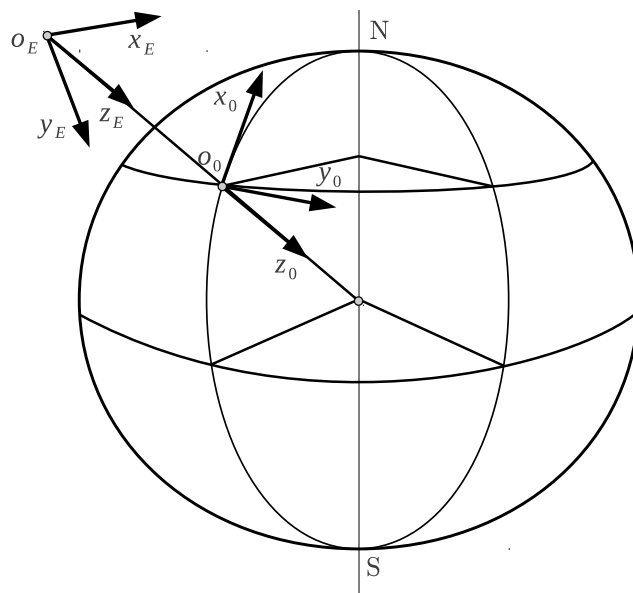


Figura 2.1: Sistema de ejes de referencia fijos en tierra (Figura tomada de [2])

Es evidente que el plano (o_0, x_0, y_0) define el plano horizontal local, que es tangente a la superficie de la tierra. Así, la trayectoria de vuelo de una avión volando en la atmósfera en las cercanías del punto de referencia o_0 puede ser completamente descrito por sus coordenadas en este sistema de ejes. Por lo tanto, se asume una tierra plana, donde la vertical está “vinculada” al vector de la gravedad. Este modelo es bastante adecuado para ubicaciones de vuelo, aunque es mejor para aplicaciones de navegación y aplicaciones de desempeño donde las trayectorias de vuelo son de interés primordial.

¹Se entiende por vuelo normal, al movimiento del avión bajo la influencia de perturbaciones atmosféricas como cambio en la dirección del viento de tipo escalón y de magnitud finita.

La consideración más común de vuelo en el avión es vuelo recto y nivelado. Esta condición asume que el vuelo se realiza en una altitud constante en un plano y cualquiera que sea el movimiento posterior de la aeronave, la actitud se puede determinar con respecto a la horizontal. De acuerdo a la Fig. 2.1, el plano horizontal está definido por (o_E, x_E, y_E) y es paralelo al plano (o_0, x_0, y_0) en la superficie terrestre. La única diferencia es que el vector $\overline{o_E x_E}$ apunta hacia el norte y el vector $\overline{o_E z_E}$ apunta hacia abajo, ambos de manera arbitraria. Por lo tanto basta con poner el origen o_E en el punto más conveniente en la atmósfera, que usualmente coincide con el origen del marco de referencia fijo en el avión. El sistema (o_E, x_E, y_E) definido como antes está constituido por los llamados ejes de trayectoria de referencia a tierra, asociados al vector de gravedad y proporciona el marco de referencia inercial para el movimiento de aviones en distancias cortas.

2.1.1. Definición de ejes de aerodinámicos

Ya que el movimiento del avión está asociado a un marco de referencia fijo en tierra es importante estudiar los sistemas de ejes asociados a este marco de referencia. Los sistemas de ejes ortogonales fijos en el avión son habitualmente definidos usando la regla de la mano derecha. Así, cuando la aeronave se altera de su condición de vuelo inicial, los ejes se mueven con el marco de referencia y el movimiento se cuantificará en términos de variables de perturbación referidas a los ejes en movimiento.

El sistema de ejes más general es conocido como *ejes de cuerpo* (body axes) y se denota por el subíndice b^2 . En la Fig.2.2 se puede ver que es un sistema de ejes fijo en el avión denotado por (x_b, y_b, z_b) . Por convención se elige el eje x_b paralelo a la línea horizontal de referencia del fuselaje, el eje y_b queda dirigido a estribor (derecha del avión viendo hacia el frente desde la cola hacia la nariz) y el eje z_b de verticalmente hacia abajo. El plano de simetría del avión está formado por los ejes (x_b, z_b) . El origen o de los ejes está fijo en un punto de referencia conveniente el cual es usualmente el centro de gravedad (cg) o el centro de masa (cm). El punto de referencia no tiene que ser necesariamente el cm , puede ser el centro aerodinámico o cualquier punto de referencia significativo acorde a las necesidades de diseño o análisis.

A menudo es conveniente definir un conjunto de ejes fijos en el avión de manera que el eje $\overline{o x_b}$ es paralelo al vector de velocidad total V_T como se muestra en la Fig.2.2. Tales ejes son llamados *ejes aerodinámicos de estabilidad* (stability axes) o *ejes aerodinámicos de viento* (wind axes) si el viento desplaza este vector de velocidad y se denotan por los subíndices s^3 y w^4 respectivamente.

²El subíndice b viene del inglés *body*.

³El subíndice s viene del inglés *stability*.

⁴El subíndice w viene del inglés *wind*.

En vuelo simétrico a velocidad constante, los ejes de estabilidad son sólo una versión particular de los ejes de cuerpo. Éstos se obtienen mediante una rotación alrededor del eje $\overline{oy_b}$ de los ejes de cuerpo en estado estacionario, a través de α_e (ángulo de ataque en estado estacionario) hasta que el eje $\overline{ox_b}$ se alinea con el vector de velocidad y se convierte en $\overline{ox_s}$ (ver Fig.2.2). Los ejes de viento se obtienen mediante una rotación alrededor del eje $\overline{oz_s}$ de los ejes de estabilidad en estado estacionario, a través de β (ángulo de deslizamiento) hasta que el eje $\overline{ox_s}$ se alinea con el vector de velocidad y se convierte en $\overline{ox_w}$ (ver Fig.2.2).

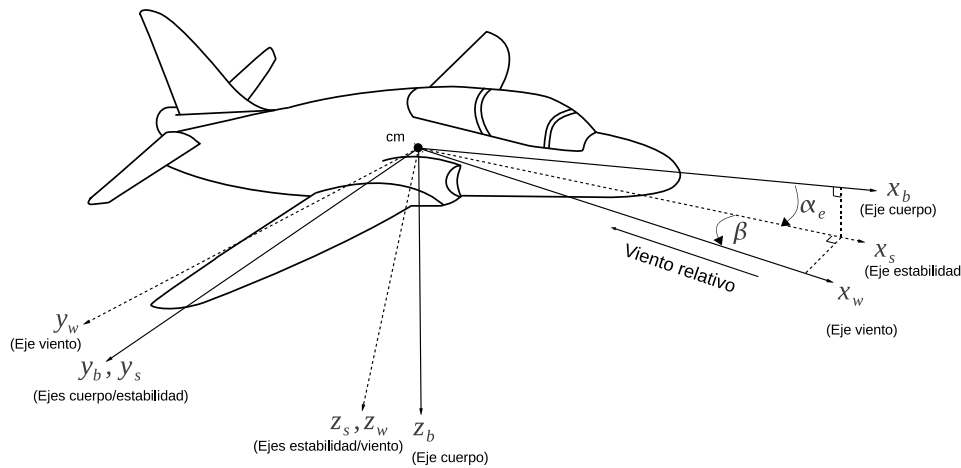


Figura 2.2: Definición de ejes de cuerpo, ejes aerodinámicos y ángulos aerodinámicos

El objetivo de estas rotaciones es alinear el vector de velocidad total V_T con el vector de viento relativo, tal que V_T tendrá la misma magnitud y dirección pero sentido contrario al viento relativo. El flujo de aire se caracteriza mediante el vector de viento relativo. Debido a que las fuerzas y los momentos dependen de las velocidades angulares y éstas a su vez del movimiento del avión con respecto al flujo de viento relativo, el uso de ejes aerodinámicos, introduce el uso de los ángulos aerodinámicos α_e y β como variables en la descripción de las ecuaciones de velocidad.

La elección de ejes de cuerpo, estabilidad o viento dependerá del uso que se le dé a las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, cuando se parte de principios básicos, es preferible el uso de ejes del cuerpo ya que las ecuaciones resultantes pueden adaptarse para nuevas aplicaciones. Es relativamente sencillo simplificar las ecuaciones en ejes del cuerpo a la forma de ejes de viento si la aplicación así lo requiere. Por otro lado, partir de las ecuaciones de viento para extender al caso más general no es tan fácil.

Cuando es necesario realizar mediciones experimentales en un avión real o en un

modelo, algunos autores piensan que es preferible utilizar el sistema de ejes de cuerpo. Dado que el equipo de medición instalado en el avión da la ubicación precisa de ésta en términos de ejes de cuerpo, la opción más adecuada es elegir ejes de cuerpo. De manera similar, la mayoría de las mediciones y cálculos aerodinámicos se hacen con referencia al vector de viento relativo. Por ejemplo, al trabajar en el túnel de viento la referencia obvia es hacer coincidir el eje del túnel con el vector de velocidad. Por lo tanto, para las investigaciones aerodinámicas que conciernen ecuaciones de movimiento son preferibles los eje de viento. Tradicionalmente todos los datos aerodinámicos usados en las ecuaciones del movimiento están dados con referencia a los ejes de viento.

Por lo anterior, es necesario disponer de herramientas que permitan transformar los datos entre diferentes ejes de referencia, como matrices de rotación que arrojen el cambio de coordenadas adecuado. La matriz $C_{s/b}$ en (2.1a) muestra la rotación de ejes de cuerpo a ejes de estabilidad. La matriz $C_{w/s}$ en (2.1b) muestra la rotación de ejes de estabilidad a ejes de viento. La matriz (2.1c) muestra el resultado de multiplicar (2.1a) por (2.1b) (*i.e.* $C_{s/b}C_{w/s}$). Para ver mayor detalle sobre el origen de las matrices y las operaciones entre éstas el lector puede referirse a [45] y [43], el presente trabajo se limita a dar las herramientas básicas para la comprensión del material presentado.

$$C_{s/b} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_e & 0 & \sin \alpha_e \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_e & 0 & \cos \alpha_e \end{bmatrix} \quad (2.1a)$$

$$C_{w/s} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1b)$$

La matriz de rotación de ejes de cuerpo a ejes de viento es:

$$C_{w/b} = C_{s/b}C_{w/s} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_e \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha_e \cos \beta \\ -\cos \alpha_e \sin \beta & \cos \beta & \sin \alpha_e \sin \beta \\ -\sin \alpha_e & 0 & \cos \alpha_e \end{bmatrix} \quad (2.1c)$$

Por lo tanto la elección de ejes cobra importancia de acuerdo a la funcionalidad que tenga para la condición de vuelo que se desee investigar, ya que el resultado final no depende de la elección del sistema de ejes (como se verá mas adelante). Sin embargo, al incluir los datos para su uso en las ecuaciones de movimiento del avión es muy común que algunos datos se den con referencia a los ejes de viento y algunos otros con referencia a los ejes del cuerpo [2].

2.1.2. Orientación y posición del avión

Los ángulos definidos por la rotación de la mano derecha sobre los tres ejes de un sistema coordinado se llaman ángulos de Euler. El sentido de las rotaciones y del

orden en que éstas son consideradas sobre los tres ejes, son muy importantes ya que los ángulos no obedecen a la ley conmutativa. La actitud de un avión se define como la orientación angular de los ejes fijos en el fuselaje con respecto a los ejes de la tierra. Los ángulos de la actitud, por lo tanto, son una aplicación particular de los ángulos de Euler.

Con referencia a la Fig. 2.3, suponga rotaciones sucesivas partiendo de $(ox_0y_0z_0)$ que son los ejes de referencia y $(ox_3y_3z_3)$ que son ejes fijos en el avión (cuerpo, estabilidad o viento). Así una rotación de alrededor del eje ox_3 hasta $(ox_2y_2z_2)$, mediante el ángulo ϕ (ángulo de alabeo), genera un movimiento de *alabeo*⁵. Una rotación alrededor del eje oy_2 hasta (o, x_1, y_1, z_1) , mediante el ángulo θ (ángulo de cabeceo), genera un movimiento de *cabeceo*⁶. Una rotación alrededor del eje oz_1 hasta (o, x_0, y_0, z_0) , mediante el ángulo ψ (ángulo de viraje), genera un movimiento de *viraje*⁷. Cuando la actitud del avión se considera con respecto a la tierra (o, x_0, y_0, z_0) coinciden con (o, x_E, y_E, z_E) .

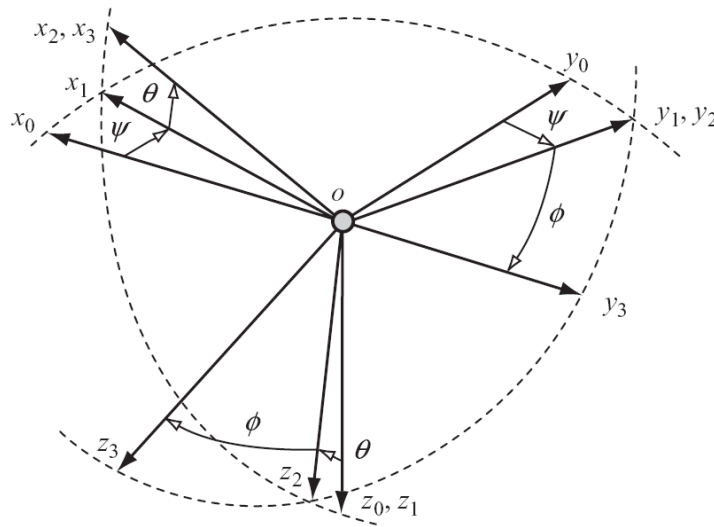


Figura 2.3: Ángulos de Euler

Si (ox_3, oy_3, oz_3) representa los componentes de un punto en el sistema de ejes $(ox_3y_3z_3)$ y (ox_E, oy_E, oz_E) representa los componentes del mismo punto transformados en el sistema de ejes $(ox_0y_0z_0)$ entonces los puntos de interés serían,

⁵Alabeo: rotación del avión alrededor del eje longitudinal x .

⁶Cabeceo: rotación del avión alrededor del eje lateral y .

⁷Viraje o guiñada: rotación del avión alrededor del eje vertical z .

por ejemplo, valores de la aceleración, velocidad, desplazamiento, etc. Asuma $p_E = (ox_E, oy_E, oz_E)$, donde el subíndice E se refiere a la tierra (del inglés Earth) y $p_b = (ox_b, oy_b, oz_b)$, donde el subíndice b hace referencia al cuerpo (fuselaje) del avión. Resolviendo a través de cada rotación en el orden correcto, con referencia a la Fig. 2.3, se puede mostrar que (ver [43] para mayor detalle) [2]:

$$\mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_E \quad (2.2)$$

Sean C_ϕ , C_θ y C_ψ las matrices de rotación mostradas en (2.2) respectivamente de izquierda a derecha, entonces (2.2) se reescribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}_b = [C_\phi][C_\theta][C_\psi]\mathbf{p}_E \quad (2.3)$$

donde C_ϕ , C_θ y C_ψ , son matrices que rotan mediante los ángulos ϕ , θ y ψ respectivamente, tal como se muestran en (2.2).

La transformación completa de \mathbf{p}_E a \mathbf{p}_b se realiza mediante la matriz $C_{b/E} = [C_\phi][C_\theta][C_\psi]$, la cual es resultado de la multiplicación de las matrices en (2.2) y es conocida como la matriz de dirección de cosenos [45]. $C_{b/E}$ está dada como sigue:

$$C_{b/E} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ (-\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi) & (\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi) & \sin\phi\cos\theta \\ (\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi) & (-\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi) & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2.1.3. Ecuaciones de Euler y cuaterniones

Una vez que se han establecido los marcos de referencia y sistemas coordenados, la trayectoria de vuelo de una aeronave puede ser completamente descrita por sus coordenadas en estos sistemas.

Para seguir la trayectoria de vuelo con respecto a un marco de referencia fijo en tierra, se necesitan componentes de velocidad en este marco las cuales están dadas mediante la transformación del vector de velocidad. El vector de velocidad puede ser transformado usando las matrices de rotación de ejes dadas en (2.2) y (2.4).

Se define el marco de referencia fijo en tierra como F_E y el marco de referencia fijo en el avión como F_b . El subíndice b hace referencia al fuselaje del avión y el subíndice E hace referencia a la tierra (del inglés *earth*). Dada una orientación del avión en F_b con respecto a F_E , ésta se describe por las rotación estándar de viraje (ψ), cabeceo (θ) y alabeo (ϕ).

También se tienen las derivadas en tiempo de los ángulos dadas por $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$. Se considera un marco de referencia fijo en tierra, usando dos marcos de referencia inerciales intermedios cuyas velocidades angulares relativas están dadas por el cambio de los ángulos de Euler y la propiedad aditiva de la velocidad angular. El vector $\omega_{b/E}$ expresa las componentes de la velocidad angular del marco F_b con respecto al marco de referencia F_E [45]. Entonces $\omega_{b/E}$ se define como sigue:

$$\omega_{b/E} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_\phi \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.5)$$

donde C_ϕ y C_θ son matrices de rotación para cada ángulo de Euler especificado en el subíndice, tal como están definidas en (2.2). Las componentes de la velocidad angular por convención se denotan como sigue:

$$\omega_{b/E} = [P, Q, R]^T \quad (2.6)$$

donde P, Q y R son las componentes de la velocidad angular en ejes de cuerpo. En adelante el subíndice b/E será omitido, ya que el marco de referencia siempre es el inercial (tierra) y el marco fijo en el avión será considerando el sistema de ejes del cuerpo a menos que se indique lo contrario.

Aplicando operaciones básicas de algebra lineal en (2.5) con C_ϕ y C_θ como en (2.2) se tiene:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

El símbolo P es la razón de cambio de alabeo, Q de cabeceo y R de viraje. La transformación inversa está dada por :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

En (2.7) la matriz de rotación se vuelve singular en las llamadas *representaciones singulares*. La realización de cualquier tipo de proceso en que la orientación cambie los ángulos de Euler es ambigua y/o incompleta debido a las singularidades de éstos. Bajo retroalimentación la presencia de estas singularidades pueden dar como resultado cambios instantáneos de orientación hasta de 180° cuando se pasa por una singularidad. Por ello se evita usar la descripción con ángulos de Euler para las rotaciones secuenciales. Los cuaterniones no sufren de estos problemas. Aunado a lo anterior se tienen 12 posibles secuencias diferentes para la rotación de los ángulos

de Euler (xyz, yxz, zxy , etc.), tal que no hay un conjunto “más simple” o “correcto” de ángulos de Euler. Para obtener un conjunto de ángulos de Euler, se debe saber la secuencia de rotación que se está utilizando y atenerse a ella (para mayor detalle ver [45]).

Una forma alternativa para describir la orientación es utilizar el cuaternión unitario. Aunque la representación con cuaterniones presenta ambigüedad cuando η es 1 o -1, ésta ofrece ventajas ante las singularidades de los ángulos de Euler ya que presenta una alternativa más compacta para describir la orientación. El cuaternión está constituida de dos partes: una dada por la componente escalar η y otra dada por los componentes de la parte imaginaria $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$ que pueden representarse como vectores con una dirección en el espacio, dirigidos a lo largo de los ejes x, y, z respectivamente.

A continuación se muestra la relación del cuaternión con los ángulos de Euler:

$$\begin{aligned}\eta &= \cos(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) + \sin(\psi/2) \sin(\theta/2) \sin(\phi/2) \\ \varepsilon_1 &= \cos(\psi/2) \sin(\theta/2) \cos(\phi/2) + \sin(\psi/2) \sin(\theta/2) \cos(\phi/2) \\ \varepsilon_2 &= \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) + \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \sin(\phi/2) \\ \varepsilon_3 &= \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\phi/2) - \cos(\psi/2) \sin(\theta/2) \sin(\phi/2)\end{aligned}\quad (2.9)$$

donde $[\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T$ es un vector unitario. Tomando la derivada de ambos lados de (2.9), la descripción con cuaterniones reduce (2.8) a un vector dado por (2.10) como se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}[\eta I_3 + S(\boldsymbol{\varepsilon})]\boldsymbol{\omega}_{b/E} \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\omega}_{b/E}\end{aligned}\quad (2.10)$$

donde I_3 es la matriz identidad, de dimensión 3×3 . La matriz $S(\boldsymbol{\varepsilon})$ es una matriz de *producto-cruz* inducida por el vector $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T$. La matriz $S(\boldsymbol{\varepsilon})$ es antisimétrica, definida como:

$$S(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}\quad (2.11)$$

El nombre de *producto-cruz* viene del hecho de que el producto cruz entre dos vectores ($\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\omega}_{b/E}$ en este caso) se puede expresar como el producto de una matriz antisimétrica por un vector, es decir $S(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\omega}_{b/E}$ (ver apéndice A de [44]).

2.2. Ecuaciones de movimiento de un avión rígido y simétrico

Las ecuaciones de movimiento de un avión son la base sobre la cual se desarrolla el estudio de la dinámica de vuelo. La dinámica de vuelo trata sobre el estudio del movimiento de un avión y su respuesta ante entradas de control o perturbaciones

externas tal como turbulencia atmosférica. Un avión tiene seis grados de libertad descritos por tres movimientos traslacionales y tres angulares asociados a cada uno de los ejes (x, y, z) del marco de referencia fijo en el cuerpo del avión.

Las ecuaciones generales que describen el movimiento de un avión se basan en dos premisas principales, la primera considera que el avión es un cuerpo rígido y la segunda considera que el avión es simétrico (*i.e.* si el avión se parte por la mitad verticalmente, el plano de simetría es xz , ver Fig. 2.2). El objetivo es aplicar la segunda ley de movimiento de Newton a los seis grados de libertad del avión, la cual simplemente establece lo siguiente:

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = \text{fuerza de perturbación} \quad (2.12)$$

La masa y la aceleración se vuelven momento de inercia y aceleración angular respectivamente para los grados de libertad rotacionales, mientras que la fuerza de perturbación se vuelve momento de perturbación o par de fuerza de perturbación. Por lo tanto la derivación de las ecuaciones de movimiento requiere que la ecuación (2.12) sea expresada en términos de las variables de movimiento adecuadas.

La primera tarea al adecuar (2.12) a un model completamente descriptivo es definir las componentes de la aceleración inercial resultado de la aplicación de las componentes de la fuerza de perturbación al avión. Considere el movimiento referido a un conjunto de ejes ortogonales $(oxyz)$ con el origen o coincidente con el cg de un cuerpo rígido arbitrario como se muestra en la Fig.2.4. El cuerpo y por lo tanto los ejes se mueven con respecto a un marco de referencia externo tal como los ejes de la tierra (también conocidos como *inerciales*). Las componentes de velocidad y fuerza a lo largo de los ejes ox , oy y oz son denotadas (U, V, W) y (X, Y, Z) respectivamente. Las componentes de velocidad angular y momentos de fuerza a lo largo de los mismos ejes son denotadas (P, Q, R) y (L, M, N) respectivamente. El punto p en la Fig.2.4 es un punto elegido de manera arbitraria dentro del cuerpo con coordenadas (x, y, z) . Las componentes de velocidad y aceleración relativas a los ejes del cuerpo del punto p , se denotan (u, v, w) y (a_x, a_y, a_z) respectivamente.

Las componentes de la velocidad en el punto p con respecto al origen o están dadas por:

$$\begin{aligned} u &= \dot{x} - Ry + Qz \\ v &= \dot{y} - Pz + Rx \\ w &= \dot{z} - Qx + Py \end{aligned} \quad (2.13)$$

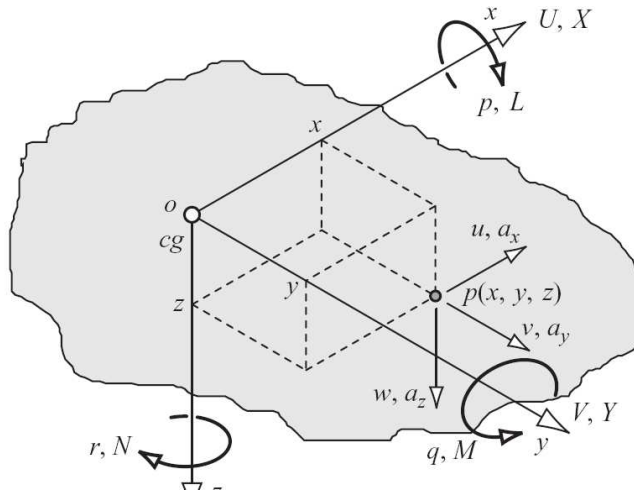
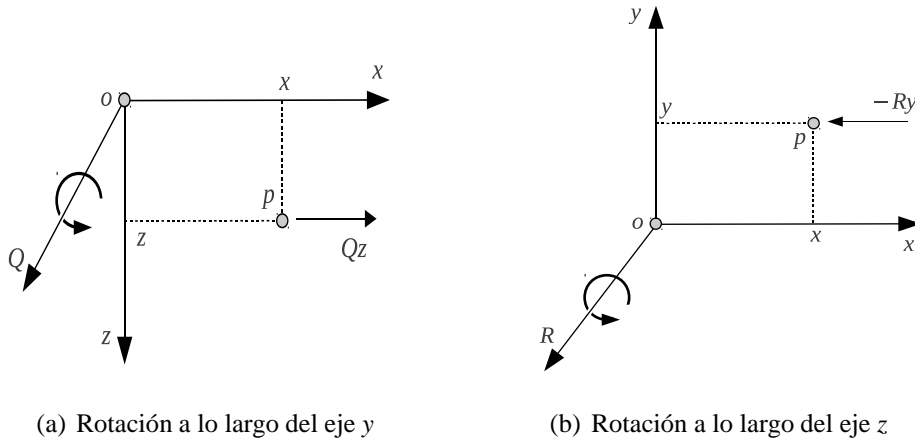


Figura 2.4: Movimiento relativo a ejes de cuerpo generales



(a) Rotación a lo largo del eje y

(b) Rotación a lo largo del eje z

Figura 2.5: Componentes de la velocidad debidas al movimiento giratorio

Se puede ver que cada una de las componentes de la velocidad comprende un término lineal en \dot{u} , \dot{v} y \dot{w} más dos términos adicionales que involucran la velocidad traslacional y la velocidad angular. El origen de los términos debidos al movimiento de rotación en la componente u se ilustran en la Fig.2.5. Tanto $-Ry$ como Qz representan componentes de velocidades tangenciales actuando sobre una línea a través de $p(x,y,z)$ paralela al eje ox . Los términos faltantes debidos al movimiento de rotación en las componentes restantes de la velocidad (*i.e.* v y w) se determinan de forma similar, ya que el cuerpo mostrado en la Fig. 2.4 representa el avión el cual se asume rígido.

De esta manera se puede concluir que las derivadas a lo largo de los ejes x , y y z son:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \quad (2.14)$$

y las ecuaciones (2.13) se reducen a

$$\begin{aligned} u &= Qz - Ry \\ v &= Rx - Pz \\ w &= Py - Qx \end{aligned} \quad (2.15)$$

Las componentes de la aceleración correspondientes en $(p(x, y, z))$ relativas a o son:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{u} - Rv + Qw \\ a_y &= \dot{v} - Pw + Ru \\ a_z &= \dot{w} - Qu + Pv \end{aligned} \quad (2.16)$$

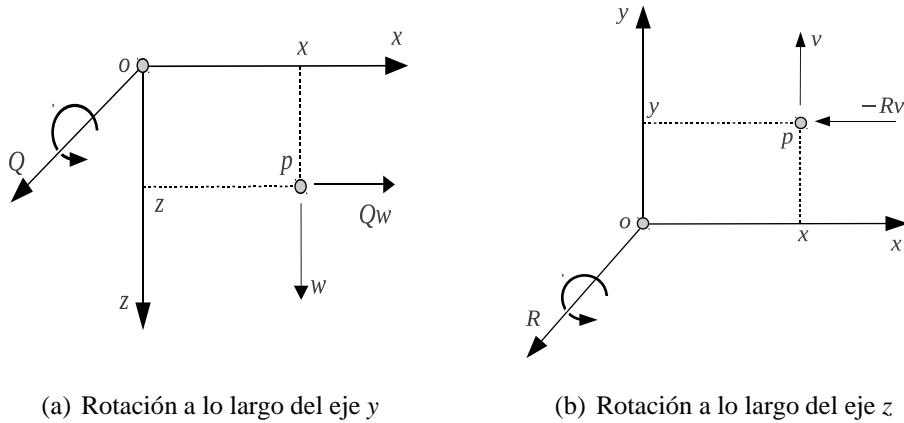


Figura 2.6: Componentes de la aceleración debidas al movimiento giratorio

Nuevamente es posible observar que cada una de las componente de la velocidad comprende un termino lineal en \dot{u} , \dot{v} y \dot{w} más dos términos adicionales que involucran la velocidad traslacional y la velocidad angular. El origen de los términos debidos al movimiento de rotación en la componente a_x se ilustran en la Fig. 2.6. Tanto $-Rv$ cómo Qw representan componentes de aceleraciones tangenciales actuando sobre una línea a través de $p(x, y, z)$ paralela al eje ox . Las aceleraciones surgen de la interacción entre las componentes de la velocidad traslacional con las componentes de la velocidad angular. Los términos de la aceleración debidos al movimiento rotatorio en las dos componentes restantes de la aceleración (*i.e.* a_y y a_z) se determinan de forma similar.

Las componentes de la velocidad absoluta o inercial (u', v', w') del punto $p(x, y, z)$ se obtienen mediante la superposición de las componentes de la velocidad asociada al cg (U, V, W) en las componentes de la velocidad local (u, v, w). Entonces

$$\begin{aligned} u' &= U + u = U + Qz - Ry \\ v' &= V + v = V + Rx - Pz \\ w' &= W + w = W + Py - Qx \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde las expresiones para (u, v, w) se sustituyen de las ecuación (2.15). Las componentes de la aceleración inercial (a'_x, a'_y, a'_z) en el punto $p(x, y, z)$ se obtiene de forma similar, simplemente sustituyendo las expresiones para (u', v', w') en (2.17) en lugar de (u, v, w) en las ecuaciones (2.16), mientras que

$$\begin{aligned} a'_x &= \dot{u}' - Rv' + Qw' \\ a'_y &= \dot{v}' - Pw' + Ru' \\ a'_z &= \dot{w}' - Qu' + Pv' \end{aligned} \quad (2.18)$$

Diferenciando (2.17) con respecto al tiempo, ya que en (2.15) se asume un cuerpo rígido, entonces

$$\begin{aligned} \dot{u}' &= \dot{U} + \dot{Q}z - \dot{R}y \\ \dot{v}' &= \dot{V} + \dot{R}x - \dot{P}z \\ \dot{w}' &= \dot{W} + \dot{P}y - \dot{Q}x \end{aligned} \quad (2.19)$$

Las componentes de la aceleración inercial del punto $p(x, y, z)$ del cuerpo rígido se obtienen sustituyendo (2.17) y (2.19) en (2.18), el modelo se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} a'_x &= \dot{U} - RV + QW - x\{Q^2 + R^2\} + y\{PQ - \dot{R}\} + z\{PR + \dot{Q}\} \\ a'_y &= \dot{V} - PW + RU + x\{PQ + \dot{R}\} - y\{P^2 + R^2\} + z\{QR - \dot{P}\} \\ a'_z &= \dot{W} - QU + PV + x\{PR - \dot{Q}\} + y\{QR + \dot{P}\} - z\{P^2 + Q^2\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) se puede utilizar para determinar la aceleración que se mediría por acelerómetros convenientemente alineada situados en cualquier punto de la estructura del avión y definido por las coordenadas (x, y, z).

2.2.1. Ecuaciones generales de fuerza

Considere δm un incremental de masa en el punto $p(x, y, z)$ del cuerpo rígido. Las componentes incrementales de la fuerza que actúa sobre la masa se obtienen aplicando la segunda ley de Newton con el diferencial de masa a (2.12) y están dadas por ($\delta m a'_{x'}, \delta m a'_{y'}, \delta m a'_{z'}$). Entonces las componentes de la fuerza total (X, Y, Z)

que actúan en el cuerpo se obtienen con la sumatoria de los incrementales de fuerza en todo el cuerpo rígido, donde

$$\begin{aligned}\Sigma \delta m a'_x &= X \\ \Sigma \delta m a'_y &= Y \\ \Sigma \delta m a'_z &= Z\end{aligned}\tag{2.21}$$

Ya que el origen de los ejes coinciden con el centro de gravedad, sustituyendo las expresiones para las componentes de la aceleración inercial (a'_x, a'_y, a'_z) de (2.20) en (2.21) se tiene :

$$\Sigma \delta m x = \Sigma \delta m y = \Sigma \delta m z = 0\tag{2.22}$$

Por lo tanto, las componentes de la fuerza total resultante que actúan en el cuerpo rígido están dadas por:

$$\begin{aligned}m\{\dot{U} - RV + QW\} &= X \\ m\{\dot{V} - PW + RU\} &= Y \\ m\{\dot{W} - QU + PV\} &= Z\end{aligned}\tag{2.23}$$

donde m es la masa total del cuerpo rígido.

Las ecuaciones en (2.23) representan la ecuaciones de fuerza de un cuerpo rígido en general y describen el movimiento de su cg , ya que el origen del sistema de ejes está alineado con el cg del cuerpo. En algunas aplicaciones a menudo es conveniente ubicar el origen del sistema de ejes en algún otro punto que no sea el centro de gravedad del avión. En estos casos, la condición en (2.22) no se aplica y las ecuaciones (2.23) incluyen más términos.

2.2.2. Ecuaciones generales de momentos

Ahora considere las ecuaciones de pares de fuerza actuando en el incremental de masa δm en el punto $p(x, y, z)$ del cuerpo rígido. Las componentes del incremental de fuerza generan componentes del incremental de par de fuerza alrededor de cada uno de los tres ejes del cuerpo rígido y mediante la suma de éstos en todo el cuerpo se obtiene las ecuaciones de los pares de fuerza.

Las ecuaciones de momento viene de la realización de la forma de rotación de la segunda ley de Newton del movimiento.

Por ejemplo, el par de fuerza total L arreglado del eje ox se obtiene mediante la sumatoria de los momentos incrementales en todo el cuerpo.

$$\delta m \{y a'_z - z a'_y\} = l_b\tag{2.24}$$

Sustituyendo a'_z y a'_y obtenidos en (2.20) en (2.24), tomando en cuenta que (2.22) se aplica, entonces después de algunas operaciones algebraicas (2.24) se puede reescribir como sigue:

$$l_b = \dot{P} \sum \delta m \{y^2 + z^2\} + QR \sum \delta m \{y^2 - z^2\} + \{R^2 - Q^2\} \sum \delta m yz - \{PQ + \dot{R}\} \sum \delta m xz + \{PR - \dot{Q}\} \sum \delta m xy \quad (2.25)$$

Los términos dentro de la sumatoria en (2.25) tiene unidades de momento de inercia, por lo que es conveniente definir conjuntos de productos y momento de inercia agrupados como se muestra en la tabla (2.1). Entonces (2.25) puede ser reescrita como sigue:

$$I_x \dot{P} - \{I_y - I_z\} QR + I_{xy} \{PR - \dot{Q}\} - I_{xz} \{PQ + \dot{R}\} + I_{yz} \{R^2 - Q^2\} = l_b \quad (2.26)$$

Los momento totales M y N alrededor de los ejes oy y oz respectivamente se obtiene mediante la sumatoria de los momentos incrementales en todo el cuerpo.

$$\begin{aligned} \delta m \{za'_x - xa'_z\} &= m_b \\ \delta m \{xa'_y - ya'_x\} &= n_b \end{aligned} \quad (2.27)$$

$I_x = \sum \delta m \{y^2 + z^2\}$	Momento de inercia alrededor del eje ox
$I_y = \sum \delta m \{x^2 + z^2\}$	Momento de inercia alrededor del eje oy
$I_z = \sum \delta m \{y^2 + x^2\}$	Momento de inercia alrededor del eje oz
$I_{xy} = \sum \delta m xy$	Producto de inercia alrededor del eje ox y oy
$I_{xz} = \sum \delta m xz$	Producto de inercia alrededor del eje ox y oz
$I_{yz} = \sum \delta m yz$	Producto de inercia alrededor del eje oy y oz

Tabla 2.1: Momentos y productos de inercia

Sustituyendo a'_x , a'_y y a'_z obtenidos en (2.20) en (2.27), señalando nuevamente que (2.22) se aplica y haciendo uso de las definiciones de inercia dadas en la Tabla (2.1), entonces el momento M a lo largo del eje oy está dado por

$$I_y \dot{Q} + \{I_x - I_z\} PR + I_{yz} \{PQ - \dot{R}\} + I_{xz} \{P^2 - R^2\} - I_{xy} \{QR + \dot{P}\} = m_b \quad (2.28)$$

y el momento N a lo largo del eje oz está dado por

$$I_z \dot{R} - \{I_x - I_y\} PQ - I_{yz} \{PR + \dot{Q}\} + I_{xz} \{QR + \dot{P}\} + I_{xy} \{Q^2 - P^2\} = n_b \quad (2.29)$$

Las ecuaciones (2.26), (2.28) y (2.29) representan las ecuaciones generales de momentos de un cuerpo rígido y describen el movimiento de rotación alrededor de

los ejes ortogonales a través de su cg ya que el origen de los ejes del sistema se alinea con el centro de gravedad en el cuerpo.

Las ecuaciones de momentos se pueden simplificar cuando un cuerpo rígido en general representa el cuerpo del avión, ya que se supone que el avión es simétrico respecto al plano oxz y que la masa se distribuye uniformemente. Como resultado los productos de inercia $I_{xy} = I_{yz} = 0$. Entonces la ecuaciones de momentos se simplifican de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_x \dot{P} - \{I_y - I_z\}QR - I_{xz}\{PQ + \dot{R}\} &= l_b \\ I_y \dot{Q} + \{I_x - I_z\}PR + I_{xz}\{P^2 - R^2\} &= m_b \\ I_z \dot{R} - \{I_x - I_y\}PQ + I_{xz}\{QR + \dot{P}\} &= n_b \end{aligned} \quad (2.30)$$

Las ecuaciones (2.30) describen el movimiento de alabeo, cabeceo y viraje (L, M, N) respectivamente. Otra simplificación se puede hacer si se supone que los ejes cuerpo del avión están alineados a los ejes principales de inercia. En este caso especial el producto de inercia restante I_{xz} también es cero. Esta simplificación no es de uso frecuente debido a la dificultad para determinar con precisión los ejes de inercia principales. Sin embargo, la simetría de la aeronave señala que I_{xz} es generalmente mucho menor que I_x, I_y e I_z y a menudo puede ser despreciado.

2.3. Componentes de Fuerzas y momentos

En conjunto, las ecuaciones (2.23) y (2.30) constituyen el modelo general de ecuaciones de seis grados de libertad del movimiento de un fuselaje rígido que tiene una distribución simétrica y masa uniforme. Un mayor desarrollo de las ecuaciones de movimiento requiere que los términos en el lado derecho de las ecuaciones describan adecuadamente las fuerzas y momentos de perturbación. El enfoque tradicional es suponer que las fuerzas y los momentos de perturbación se deben a los efectos aerodinámicos, los efectos de la gravedad, el movimiento de los controles de aerodinámicos, los efectos de propulsión y los efectos de las perturbaciones atmosféricas. Agrupando las ecuaciones (2.23) y (2.30) de tal manera que incluyan las contribuciones anteriores, estas ecuaciones pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m\{\dot{U} - RV + QW\} &= X_a + X_g + X_c + X_p + X_d \\ m\{\dot{V} - PW + RU\} &= Y_a + Y_g + Y_c + Y_p + Y_d \\ m\{\dot{W} - QU + PV\} &= Z_a + Z_g + Z_c + Z_p + Z_d \\ I_x \dot{P} - \{I_y - I_z\}QR - I_{xz}\{PQ + \dot{R}\} &= l_a + l_g + l_c + l_p + l_d \\ I_y \dot{Q} + \{I_x - I_z\}PR + I_{xz}\{P^2 - R^2\} &= m_a + m_g + m_c + m_p + m_d \\ I_z \dot{R} - \{I_x - I_y\}PQ + I_{xz}\{QR + \dot{P}\} &= n_a + n_g + n_c + n_p + n_d \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde el subíndice a denota efectos aerodinámicos, el subíndice g denota efectos de la gravedad, el subíndice c denota efectos de los controles, el subíndice p

denota efectos de la propulsión y el subíndice d denota efectos de perturbaciones atmosféricas. El subíndice b para las componentes de los momentos se omite ya que de acuerdo al contexto se entiende que éstas están en ejes de cuerpo. Es conveniente agrupar las componentes de fuerzas y momento aerodinámicos, así como las componentes debidas a la propulsión como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_T &\triangleq [X_p, Y_p, Z_p] \\ \mathbf{F}_A &\triangleq [X_a, Y_a, Z_a]\end{aligned}\quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_T &\triangleq [l_p, m_p, n_p] \\ \mathbf{M}_A &\triangleq [l_a, m_a, n_a]\end{aligned}\quad (2.33)$$

Las ecuaciones (2.31) describen el movimiento generalizado del avión sujeta a la aplicación propuesta. Las ecuaciones son no lineales, además los términos en el lado derecho de las ecuaciones debe ser reemplazados con expresiones adecuadas que pueden ser difíciles de determinar en lo general.

2.3.1. Ecuaciones adimensionales de movimiento

Tradicionalmente, el desarrollo de las ecuaciones de movimiento y la investigación de la estabilidad y el control que implica su uso han sido firmemente fijadas en el ámbito de la aerodinámica. Muchos fenómenos aerodinámicos son mejor explicados en términos de *coeficientes aerodinámicos adimensionales*, por ejemplo, el coeficiente de sustentación⁸, número Mach, número de Reynolds, etc. y muchas veces este método ofrece el único medio práctico para lograr resultados debido a la complejidad de los diseños. La ventaja de este enfoque es que las propiedades aerodinámicas del avión pueden ser completamente descritas en términos de los parámetros adimensionales, los cuales son independientes de la geometría del fuselaje y las condiciones de vuelo.

Un coeficiente de sustentación de 0.5, por ejemplo, tiene exactamente el mismo significado si se aplica a un Boeing 747 o a un Cessna 150. Esto a su vez conduce al concepto de la *derivada adimensional* que es sólo otro coeficiente aerodinámico y puede ser interpretado de la misma manera. Sin embargo, las ecuaciones de movimiento adimensionales son de poca utilidad para la dinámica de vuelo moderna que no sea como un medio para explicar el origen de las derivadas adimensionales.

Las ecuaciones de movimiento se vuelven adimensionales dividiendo cada ecuación entre un parámetro generalizado de fuerza o momento, según proceda. A veces las ecuaciones adimensionales de movimiento se conocen como *ecuaciones aerodinámicas normalizadas* y los coeficientes de las derivadas correspondientes son conocidos

⁸La sustentación es la fuerza generada sobre un cuerpo que se desplaza a través de un fluido con dirección perpendicular a la de la velocidad de la corriente incidente.

como *derivadas aero-normalizadas*. Así las fuerzas y momentos adimensionales en general tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{A,T} &= \mathbf{F}_T + \bar{q}S[C_X, C_Y, C_Z]^T \\ \mathbf{M}_{A,T} &= \mathbf{M}_T + \bar{q}S[bC_l, \bar{c}C_m, bC_n]^T\end{aligned}\quad (2.34)$$

donde $C_X, C_Y, C_Z, C_l, C_m, C_n$ son los coeficientes adimensionales en cada uno de los ejes del marco de referencia (xyz) y por consiguiente las derivadas que los contengan será derivadas adimensionales. La presión aerodinámica se denota como \bar{q} , S, b y \bar{c} son parámetros del ala como se puede ver en la Tabla 2.2 y la Fig.2.7

Parámetro	Descripción
b	Envergadura del ala (es decir de punta a punta)
c	cuerda del ala (varía a lo largo de la envergadura)
\bar{c}	cuerda media del ala
S	Área del ala (total)
λ	Estrechamiento (cuerda del perfil en el encastre/cuerda del perfil en la punta)
Λ	Ángulo de flecha
$AR = b^2/S$	Alargamiento

Tabla 2.2: Parámetros importantes de la planta del ala

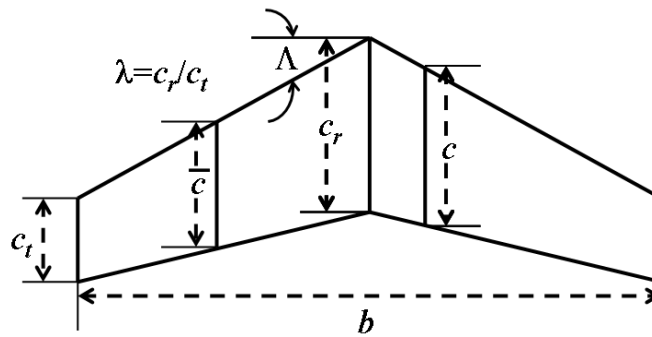


Figura 2.7: Forma de la planta del ala

Las derivadas adimensionales o aero-normalizadas se denotan $X_u, X_{\dot{w}}, X_w, X_q, X_{\delta_e}$, etc. Para mayor comodidad, las definiciones de todas las derivadas aerodinámicas adimensionales de estabilidad y derivadas de control asociadas al modelo general en ejes de cuerpo, pueden ser consultadas en el Apéndice 2 de [2].

Las ecuaciones en ejes de viento ayudarán a derivar un modelo de pequeñas perturbaciones simple que puede ser usado para análisis y diseño [45]. Entonces

$X_D, X_L, X_Y, X_I, X_m, X_n$ son los coeficientes adimensionales en cada uno de los ejes del marco de referencia en ejes de viento (x_w, y_w, z_w) y por consiguiente las derivadas que los contengan será derivadas adimensionales para el modelo en ejes de viento. En la siguiente sección se presenta el modelo no lineal general y el modelo en ejes de viento.

2.4. Modelo no lineal en ejes de cuerpo y ejes de viento

Las secciones previas establecen el marco teórico adecuado para interpretar y comprender de manera concisa las ecuaciones que describen el movimiento de seis grados de libertad de un avión. Sin embargo es necesario, presentar las ecuaciones en forma adecuada para su tratamiento y análisis con el esquema de control propuesto. El modelo no lineal general tomado de [44] se muestra a continuación:

Ecuaciones de fuerza

$$\begin{aligned}\dot{U} &= RV - QW - g \sin(\theta) + \{X_a + X_p + X_c\}/m \\ \dot{V} &= RV - QW - g \sin(\theta) \sin(\phi) + \{Y_a + Y_p + Y_c\}/m \\ \dot{W} &= QU - PV - g \cos(\phi) \cos(\theta) + \{Z_a + Z_p + Z_c\}/m\end{aligned}\quad (2.35)$$

donde (U, V, W) son componentes de la velocidad traslacional, (P, Q, R) componentes de la velocidad angular, (ϕ, θ, ψ) ángulos de Euler, (X_a, X_p, X_c) componentes de fuerza asociadas a la aerodinámica, a la propulsión y al control en el eje x (ver Sección 2.3 y Fig.2.2) y respectivamente para los ejes y y z ; m es la masa del avión. La dinámica del avión se complementa con las ecuaciones que relacionan los momentos angulares que están dados por

$$\begin{aligned}\Gamma \dot{P} &= I_{xz} \{I_x - I_y + I_z\} PQ - \{I_z(I_z - I_y) + I_{xz}^2\} QR + I_z l_b + I_{xz} n_b \\ I_y \dot{Q} &= \{I_z - I_x\} PR - I_{xz} \{P^2 - R^2\} + m_b \\ \Gamma \dot{R} &= \{I_x - I_y\} I_x + I_{xz}^2\} PQ - I_{xz} \{I_x - I_y + I_z\} QR + I_{xz} l_b + I_x n_b \\ \Gamma &\triangleq I_x I_z - I_{xz}^2\end{aligned}\quad (2.36)$$

donde I_x, I_y, I_z y I_{xz} momentos y productos de inercia (ver Tabla 2.1). La dinámica del avión está sujeta a la siguiente expresión que relaciona las velocidades angulares con los ángulos de Euler. Estas son las ecuaciones de cinemática:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= P + \tan \theta \{Q \sin \phi + R \cos \phi\} \\ \dot{\theta} &= Q \cos \phi - R \sin \phi \\ \dot{\psi} &= \{Q \sin \phi + R \cos \phi\} / \cos \theta\end{aligned}\quad (2.37)$$

Las ecuaciones (2.35)-(2.37) constituyen el modelo generalizado de ecuaciones de movimiento (de seis grados de libertad) para una aviación en ejes de cuerpo. Note que el subíndice b se suprime de todas las expresiones dado que es la notación común a menos que se indique lo contrario.

En el presente trabajo por conveniencia para el análisis, se utilizan las ecuaciones de movimiento dadas en ejes de viento, debido a que dan información sobre los ángulos aerodinámicos. Como se mencionó antes, reescribir el modelo con respecto a los ejes de viento nos da ventajas frente al modelo de ejes de cuerpo para simulación y análisis, características que serán útiles para el trabajo desarrollado. El modelo no lineal en ejes de viento se obtiene partiendo de las ecuaciones dadas para los ejes fijos en el cuerpo (para mayor detalle ver [45] y [43]). El modelo no lineal en ejes de viento tomado de [45] se denota con el subíndice w , en los términos que así lo requieran.

Las ecuaciones de fuerza en ejes de viento están dadas como sigue:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_T &= F_T \cos(\alpha + \alpha_T) \cos \beta - D + mg_1 \\ m\dot{\beta}V_T &= -F_T \cos(\alpha + \alpha_T) \sin \beta - C + mg_2 - mV_T R_w \\ m\dot{\alpha}V_T \cos \beta &= -F_T \sin(\alpha + \alpha_T) - L + mxg_3 + mV_T \{Q \cos \beta - P_w \sin \beta\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde la velocidad total del avión $V_T = |\mathbf{V}_T|$ con $\mathbf{V}_T \triangleq [U, V, W]$. La fuerza total que actúa en el avión $F_T = |\mathbf{F}_T|$ con \mathbf{F}_T como en (2.32). Los términos $\{D_a, D_c\}$ se agrupan en D ; los términos $\{C_a, C_c\}$ se agrupan en C y los términos $\{L_a, L_c\}$ se agrupan en L , donde D, C y L son variables en ejes de viento. Finalmente las componentes de la gravedad X_g, Y_g , y Z_g en ejes de cuerpo están dadas por g_1, g_2 y g_3 en ejes de viento, estos términos se discuten en la siguiente sección., respectivamente como sigue:

Observación 1 *Es importante dejar claro de que de (2.38) y (2.39) (ecuaciones de movimiento en ejes de viento) si la velocidad $V_T = 0$ implicaría que el no hay viento. Lo anterior viene del hecho de que las rotaciones de los ejes de cuerpo tiene como objetivo alinear el vector de viento con el vector de velocidad; entonces esta rotación no tendría sentido.*

Las ecuaciones de momentos en ejes de viento están dadas como sigue

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_w \\ \dot{Q}_w \\ \dot{R}_w \end{bmatrix} = -\dot{\alpha} \begin{bmatrix} -R_w \\ 0 \\ P_w \end{bmatrix} + \frac{1}{\Gamma} J_w \{ \mathbf{M}_{a,c,p} - \boldsymbol{\omega}_w \times J_w^{-1} \boldsymbol{\omega}_w \} \quad (2.39)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_w$ es una matriz antisimétrica de $\boldsymbol{\omega}_w$. Las componentes de los momentos aerodinámicos en ejes de viento se denotan por $\mathbf{M}_{a,c,p} = [l_a^w + l_c^w + l_p^w; m_a^w + m_c^w + m_p^w; n_a^w + n_c^w + n_p^w]$. Los subíndices a, c y p denotan componentes en ejes de viento para términos aerodinámicos, términos de control y debidos a la propulsión. Además J_b es la matriz de inercia en ejes de viento

$$J_b \triangleq \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

La matriz de inercia en ejes de viento, la cual se obtiene con la matriz de rotación (2.1c) es la siguiente:

$$J_w = C_{w/b} J_b C_{b/w} = \begin{bmatrix} I'_x & 0 & -I'_{xz} \\ 0 & I'_y & 0 \\ -I'_{xz} & 0 & I'_z \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} I'_x &= I_x \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{xz} \sin 2\alpha \\ I'_y &= I_y \\ I'_z &= I_x \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{xz} \sin 2\alpha \\ I'_{xz} &= \frac{1}{2} \{ I_x - I_z \} \sin 2\alpha + I_{xz} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (2.42)$$

Las ecuaciones de cinemática utilizando la descripción de cuaterniones están dadas como en (2.10) y (2.11) y aquí se transcriben por conveniencia. Se definen las siguientes variables $\vartheta \triangleq [\eta, \boldsymbol{\varepsilon}]^T$ y

$$T(\vartheta) \triangleq \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \\ \frac{1}{2} [\boldsymbol{\eta} I - S(\boldsymbol{\varepsilon})] \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

De aquí en adelante es bien sabido que las componentes de la velocidad angular son tomadas con respecto a un marco de referencia inercial fijo en tierra, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{w/E}$ será denotada como $\boldsymbol{\omega}_w$. Las ecuaciones de la orientación se reescriben como sigue:

$$\dot{\vartheta} = T(\vartheta) \boldsymbol{\omega}_w \quad (2.44)$$

En la siguiente sección se desarrolla una breve explicación sobre cada uno de los términos que describen las ecuaciones (2.38) y (2.39) de fuerzas y momentos en ejes de viento.

2.4.1. Coeficientes de fuerzas y momentos en ejes de viento

Para estudiar el comportamiento dinámico del avión, las ecuaciones de movimiento se escriben en función de las variables en ejes de viento: Velocidad del viento (V_T) y ángulos aerodinámicos (α, β). Una manera conveniente de introducir estas variables es tratar los ejes de viento como un marco de referencia que rota con respecto al marco de referencia fijo en el cuerpo (ver Sección 2.1.1). La velocidad angular entonces involucran $\dot{\beta}$ y $\dot{\alpha}$. Aunado a lo anterior, la fuerza de resistencia, sustentación y viento cruzado cada una de ellas aparece en ecuaciones de estado separadas. Antes de discutir cada componente de las fuerzas y momentos, se da el cambio de notación de los ejes de cuerpo a los ejes de viento. Desafortunadamente las componentes de momentos en ejes de viento son denotados de manera universal por minúsculas y los símbolos para los coeficientes adimensionales son los mismos en ejes de viento o de cuerpo [45].

Fuerzas:

$$\mathbf{F}^w \equiv \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix} \equiv C_{w/b} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \equiv C_{w/b} \mathbf{F}^b \quad (2.45)$$

Coeficientes adimensionales de fuerza:

Ejes de viento	C_D	C_Y	C_L	
Ejes de estabilidad	C_D	C_Y	C_L	(2.46)
Ejes de cuerpo	C_X	C_Y	C_Z	

usualmente para hacer referencia a C_z se usa $-C_N$

Momentos:

$$\mathbf{M}^b = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^s = \begin{bmatrix} l^s \\ m \\ n^s \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^w = \begin{bmatrix} l^w \\ m^w \\ n^w \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

En (2.47) debido a la rotación $n^s = n^w$.

Coeficientes de momentos adimensionales:

$$C_l, C_m, C_n \quad (2.48)$$

Por convención se usa la misma notación para todos los sistemas [45]. Por otro lado las derivadas de momentos en ejes de estabilidad tiene la misma forma que las derivadas en ejes de viento.

En conjunto, las ecuaciones (2.38) y (2.39) constituyen el modelo general de ecuaciones de seis grados de libertad del movimiento de un fuselaje rígido que tiene una distribución simétrica y masa uniforme en ejes de viento. El desarrollo de las ecuaciones de movimiento requiere que los términos D, C, L, l_w, m_w y n_w requieren ser descritos adecuadamente. El enfoque tradicional es suponer que las

fuerzas y los momentos de perturbación se deben a los efectos aerodinámicos, los efectos de la gravedad, el movimiento de los controles de aerodinámicos, los efectos de propulsión y los efectos de las perturbaciones atmosféricas. Agrupando las ecuaciones (2.38) y (2.39) de tal manera que incluyan las contribuciones anteriores, estas ecuaciones pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
m\dot{V}_T &= D_a + g_1 + D_c + D_p + D_d \\
m\dot{\beta}V_T - mV_T R_w &= C_a + g_2 + C_c + C_p + C_d \\
m\dot{\alpha}V_T \cos \beta - mV_T \{Q \cos \beta - P_w \sin \beta\} &= L_a + g_3 + L_c + L_p + L_d \\
J_w \{\dot{P}_w - \dot{\alpha}R_w\} - P_w Q_w I'_{xz} - Q_w R_w I'_y + R_w Q_w I'_z &= L_a^w + L_g^w + L_c^w + L_p^w + L_d^w \\
J_w \{\dot{Q}_w\} + P_w \{R_w I'_z + P_w I'_{xz}\} + R_w \{P_w I'_{xz} + P_w I'_z\} &= M_a^w + M_g^w + M_c^w + M_p^w + M_d^w \\
J_w \{\dot{R}_w - \dot{\alpha}P_w\} - P_w Q_w I_w + Q_w P_w I'_y - R_w Q_w I'_{xz} &= N_a^w + N_g^w + N_c^w + N_p^w + N_d^w
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Las fuerzas y los momentos que actúan en el avión se definen en términos de coeficientes aerodinámicos adimensionales. En el caso de los ejes de viento los coeficientes son funciones de los ángulos aerodinámicos, así como del número de Mach y el número de Reynolds. Aún más si se considera que el avión no es un cuerpo rígido esto tiene directa repercusión sobre los coeficientes (este no es el caso del presente trabajo). En la práctica los coeficientes aerodinámicos dependen de la altitud (en vuelos atmosféricos), de la deflexión de las superficies de control y de la propulsión. Lo anterior debido a que la deflexión de las superficies de control cambia la curvatura de las alas por ejemplo y esto a su vez afecta la fuerza de sustentación, el momento y la fuerza de resistencia.

En términos generales, los coeficientes adimensionales de fuerzas y momentos en ejes de viento tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\text{resistencia, } D &= \bar{q} S C_D \\
\text{sustentación, } L &= \bar{q} S C_L \\
\text{fuerza de viento cruzado, } C &= \bar{q} S C_Y \\
\text{momento de alabeo, } l^w &= \bar{q} S b C_l \\
\text{momento de cabeceo, } m^w &= \bar{q} S \bar{c} C_m \\
\text{momento de viraje, } n^w &= \bar{q} S b C_n
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Los *coeficientes longitudinales* (Relacionados con la fuerza de sustentación L , fuerza de resistencia D y momento de cabeceo l_w) dependen principalmente de α y los *coeficientes laterales-direccionales* (Relacionados con el movimiento de alabeo m_w , movimiento de viraje n_w y fuerza de deslizamiento o de viento cruzado C) dependen principalmente de β . A continuación se describen brevemente los términos que componen (2.49)

2.5. Consideraciones sobre las ecuaciones de movimiento

Se considera una atmósfera sin perturbación tal que:

$$D_d = L_d = C_d = L_d^w = M_d^w = N_d^w = 0 \quad (2.51)$$

2.5.1. Términos gravitacionales

La fuerza denominada “peso” (mg) que actúa en un avión debe ser analizada mediante los componentes que actúan en cada uno de los tres ejes del mismo. Cuando el avión es perturbado, estas componentes pueden variar en función de las variaciones de altitud haciendo así una contribución al movimiento. La contribución de la gravedad en (2.49) se obtiene resolviendo el peso del aeroplano en los ejes de viento. Por análisis usualmente se considera que el origen de los ejes de viento del avión coincide con el cg , por lo que no existe ningún momento generado por el peso alrededor de los ejes y por lo tanto

$$L_g^w = M_g^w = N_g^w = 0 \quad (2.52)$$

En ejes de viento los términos de gravedad están dados por

$$C_{w/b}[X_g, Y_g, Z_g]^T = [g_1, g_2, g_3]^T \quad (2.53)$$

donde $[X_g, Y_g, Z_g]$ son las componentes de la gravedad en ejes de cuerpo, por lo tanto:

$$\begin{aligned} g_1 &= g\{-\cos\alpha\cos\beta\sin\theta + \sin\beta\sin\phi\cos\theta + \sin\alpha\cos\phi\cos\theta\} \\ g_2 &= g\{\cos\alpha\sin\beta\sin\theta + \cos\beta\sin\phi\cos\theta - \sin\alpha\sin\beta\cos\phi\cos\theta\} \\ g_3 &= g\{\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\phi\cos\theta\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde g es el valor standard de la gravedad ($9,80665m/s^2$).

2.5.2. Términos aerodinámicos

Describir de forma explícita los cambios aerodinámicos que ocurren durante una perturbación supone un reto importante en vista de las interacciones presentes en el movimiento del avión.

El procedimiento usual es asumir que la fuerza aerodinámica y los términos de momento en las ecuaciones (2.49) son dependientes de variables de movimiento y sus derivadas solamente. Matemáticamente, es convenientemente expresado como una función que comprende la suma de un número de series de Taylor, cada serie involucra una variable de movimiento o derivada de una variable de movimiento.

Los componentes de las variables de las velocidades y los ángulos aerodinámicos lineales son (V_T, α, β) y los componentes de las variables para las velocidades

angulares son (P, Q, R) con respecto a los ejes del avión $(ox_w y_w z_w)$. El término aerodinámico D_a , por ejemplo, de la ecuación de fuerza axial puede ser expresado en términos de (V_T, α, β) y (P, Q, R) como sigue :

$$\begin{aligned}
D_a = & D_{a_e} + \left\{ \frac{\partial D}{\partial V_T} V_T + \frac{\partial^2 D}{\partial V_T^2} \frac{V_T^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial V_T^3} \frac{V_T^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial V_T^4} \frac{V_T^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha^2} \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial \alpha^3} \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial \alpha^4} \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial^2 D}{\partial \beta^2} \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial \beta^3} \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial \beta^4} \frac{\beta^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial P} P + \frac{\partial^2 D}{\partial P^2} \frac{P^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial P^3} \frac{P^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial P^4} \frac{P^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial Q} Q + \frac{\partial^2 D}{\partial Q^2} \frac{Q^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial Q^3} \frac{Q^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial Q^4} \frac{Q^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial R} R + \frac{\partial^2 D}{\partial R^2} \frac{R^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial R^3} \frac{R^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial R^4} \frac{R^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \dot{V}_T} \dot{V}_T + \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{V}_T^2} \frac{\dot{V}_T^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial \dot{V}_T^3} \frac{\dot{V}_T^3}{3!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\alpha}^2} \frac{\dot{\alpha}^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial \dot{\alpha}^3} \frac{\dot{\alpha}^3}{3!} + \dots \right\} \\
& + \text{términos de las series } \dot{\beta}, \dot{P}, \dot{Q} \text{ y } \dot{R}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

donde D_{a_e} es un término constante y usualmente los términos asociados a $\dot{V}_T, \dot{\beta}, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}$ y los términos de las series de derivadas de orden superior son cero. Para algunas tareas y condiciones de movimiento las variables de movimiento son pequeñas para prácticamente todos los aviones, por lo anterior usualmente únicamente los primeros términos en cada una de las funciones de series son significativos. Adicionalmente se ha encontrado que los términos que involucran $\dot{\alpha}$ son significativos. De acuerdo a lo anterior la ecuación (2.55) se puede ver como sigue:

$$\begin{aligned}
D_a = & D_{a_e} + \left\{ \frac{\partial D}{\partial V_T} V_T + \frac{\partial^2 D}{\partial V_T^2} \frac{V_T^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial V_T^3} \frac{V_T^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial V_T^4} \frac{V_T^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha^2} \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial \alpha^3} \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial \alpha^4} \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial^2 D}{\partial \beta^2} \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial \beta^3} \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial \beta^4} \frac{\beta^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial P} P + \frac{\partial^2 D}{\partial P^2} \frac{P^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial P^3} \frac{P^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial P^4} \frac{P^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial Q} Q + \frac{\partial^2 D}{\partial Q^2} \frac{Q^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial Q^3} \frac{Q^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial Q^4} \frac{Q^4}{4!} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{\partial D}{\partial R} R + \frac{\partial^2 D}{\partial R^2} \frac{R^2}{2!} + \frac{\partial^3 D}{\partial R^3} \frac{R^3}{3!} + \frac{\partial^4 D}{\partial R^4} \frac{R^4}{4!} + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Por comodidad la ecuación (2.56) se expresará de una manera más simplificada como sigue:

$$D_a = D_{a_e} + \sum D_a(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) \tag{2.57}$$

donde $\Sigma D(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R)$ representa las series de derivadas de D con respecto a $(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R)$. El mismo procedimiento se sigue para desarrollar los términos asociados a cada una de las componentes de fuerza y pares aerodinámicos.

Observación 2 *Es muy importante recalcar en este punto que los términos aerodinámicos que se muestran en (2.55) están representados por términos diferenciables, esto implica necesariamente que estos son continuos y localmente Lipschitz.*

Como los parámetros de la ecuación (2.56) dependen del tipo de avión (ala, geometría, configuración, etc.) es que se utilizan términos adimensionales. A continuación se muestra como pasar de derivadas dimensionales a derivadas adimensionales considerando el caso particular del término $D'_\alpha = \frac{\partial D}{\partial V_T}$. Estas derivadas tienen la misma estructura ya sea en ejes de cuerpo o en ejes de viento con el respectivo cambio de variables; por lo que por convención en la literatura es nombrada como [45](ver pp. 120) :

$$X_V = \frac{\partial D}{\partial V_T} \quad (2.58)$$

De acuerdo a (2.34) el coeficiente adimensional se obtiene al multiplicar por $\bar{q}S$. Considere $C_{D_V} \triangleq V_{T_e} \frac{\partial D}{\partial V_T}$, el coeficiente adimensional. Entonces la derivada adimensional de (2.58) es

$$X_V = -\bar{q}SC_{D_V} \quad (2.59)$$

Una descripción breve de todas las derivadas y todos los coeficientes aerodinámicos con notación en ejes de viento se pueden encontrar en el Apéndice A del presente trabajo de tesis.

En modelo en ejes de viento para el movimiento y orientación del avión descrito por (2.38), (2.39) y (2.44), será el modelo utilizado para realizar el análisis de estabilidad y para las simulaciones que ilustrarán los resultados de este análisis. En el siguiente capítulo se formulará el problema a resolver en esta tesis.

2.5.3. Términos aerodinámicos de control

Los controles aerodinámicos principales son el elevador⁹, alerones¹⁰ y el timón¹¹, para referirse a ellas se les denomina *superficies de control*.

Observación 3 Es habitual cuantificar el efecto de las superficies de control en términos de las derivadas del control aerodinámicas, ya que las fuerzas y momentos generados por deflexiones de las superficies de control se derivan de los cambios de las condiciones aerodinámicas. Lo anterior puede ser verificado en las siguientes referencias [45], [43], [44].

La consideración de que para algunas tareas y condiciones de movimiento las variables de movimiento son pequeñas para prácticamente todos los aviones, también se aplican a los términos de control. En general sin considerar ninguna condición de vuelo en particular D_c , C_c y L_c tendrían la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} D_c &= \frac{\partial D}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial D}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial D}{\partial \delta_a} \delta_a \\ C_c &= \frac{\partial C}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial C}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial C}{\partial \delta_a} \delta_a \\ L_c &= \frac{\partial L}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a \end{aligned} \quad (2.60)$$

Además es importante hacer notar que no todas las componentes de fuerzas y momentos tendrán dependencias con todas las superficies de control ya que estas dependerán de la condición de vuelo. Por ejemplo, de manera particular las componentes de fuerza en la condición de vuelo recto tienen las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} D_c &= \frac{\partial D}{\partial \delta_e} \delta_e \\ C_c &= \frac{\partial C}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial C}{\partial \delta_a} \delta_a \\ L_c &= \frac{\partial L}{\partial \delta_e} \delta_e \end{aligned} \quad (2.61)$$

La estructura general de las componentes de momentos debidas al control son:

$$\begin{aligned} L_c &= \frac{1}{I_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{1}{I_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{1}{I_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_e} \delta_e \\ M_c &= \frac{1}{I_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{1}{I_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{1}{I_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_e} \delta_e \\ N_c &= \frac{1}{I_x} \frac{\partial n^w}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{1}{I_x} \frac{\partial n^w}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{1}{I_x} \frac{\partial n^w}{\partial \delta_e} \delta_e \end{aligned} \quad (2.62)$$

⁹Superficie móvil ubicada en la cola horizontal del avión.

¹⁰Superficies móviles ubicadas en la ala del avión.

¹¹Superficie móvil ubicada en la cola vertical del avión.

donde δ_a , δ_e y δ_r representan la deflexión (*i.e.* el ángulo) de los alerones, elevador y timón, respectivamente. Las ecuaciones mostradas describen los efectos de los controles aerodinámicos con respecto a la condición de compensado vigente, por ello es importante notar que los ángulos de control δ_a , δ_e y δ_r se miden con respecto a la configuración de equilibrio $\delta_{a,e}$, $\delta_{e,e}$ y $\delta_{r,e}$.

Los términos de control aerodinámico en el resto de las ecuaciones de movimiento están reunidos de forma similar. Si es necesario estudiar la respuesta de un avión ante otros controles aerodinámicos, por ejemplo, flaps, spoilers, dispositivos en el borde de ataque, etc. entonces los términos adicionales pueden ser añadidas a las ecuaciones (2.61) y (2.62) según sea necesario. Igual que antes, las derivadas dimensionales se pueden hacer adimensionales multiplicando por los términos adecuados (ver Apéndice A de esta tesis).

Observación 4 *Observe que en (2.60) y (2.62) las entradas de control operan de forma lineal lo que garantiza que la expresión de las ecuaciones de movimiento es afín.*

2.5.4. Términos de potencia

La propulsión del motor se denota como T (del inglés *Thrust*) y es usualmente controlada por la posición¹² del del acelerador δ_T . El desplazamiento positivo de la palanca del acelerador en general en es el sentido de un impulso hacia adelante, así se tiene un incremento en la propulsión.

Para obtener las ecuaciones en ejes de viento es necesario multiplicar por las matrices de rotación como sigue:

$$\mathbf{F}_{a,c,p}^w = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_T \cos(\alpha + \alpha_T) \\ 0 \\ F_T \sin(\alpha + \alpha_T) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ C \\ L \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$F_T = |\mathbf{F}_T|$ con $\mathbf{F}_T = [V_T, \alpha, \beta]^T$. En este caso los términos de fuerza asociados a la propulsión están dados por el primer término de (2.63). En cuanto a los controles aerodinámicos, los cambios de energía se miden con respecto a la configuración de compensado vigente. Por lo tanto F_T cuantifica la perturbación de propulsión en relación con el ajuste de compensado F_{T_e} , entonces los términos que involucran estas

¹²La posición del acelerador controla la entrada de combustible entre 0-100%, donde 100% corresponde a la inyección máxima de combustible.

variables en las ecuaciones (2.38) también son parte de los términos de propulsión generados por la rotación de ejes de cuerpo a ejes de viento.

El movimiento de la palanca del acelerador provoca un cambio en la propulsión que a su vez da lugar a un cambio en las componentes de fuerza y momento que actúa sobre el avión. Es conveniente describir matemáticamente estos efectos en términos de derivadas de la potencia del motor. Las componentes de fuerza debidas a la propulsión de forma general pueden ser expresadas como sigue

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{\partial D}{\partial \delta_T} \delta_T \\ Y_p &= \frac{\partial C}{\partial \delta_T} \delta_T \\ Z_p &= \frac{\partial L}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.64)$$

Por ejemplo en el caso particular de vuelo recto y nivelado tanto para fuerza como para momentos:

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{\partial F_T}{\partial \delta_T} \delta_T \\ Y_p &= 0 \\ Z_p &= 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Las componentes de momentos debidas a la propulsión de manera general pueden ser expresadas como sigue:

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{\partial l_p^w}{\partial \delta_T} \delta_T \\ M_p &= \frac{\partial m_p^w}{\partial \delta_T} \delta_T \\ N_p &= \frac{\partial n_p^w}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.66)$$

Igual que antes, las derivadas dimensionales de (2.64) y (2.66) se pueden hacer adimensionales multiplicando por los términos adecuados (ver Apéndice A de esta tesis).

Entonces la primera ecuación de (2.49) con cada uno de los términos previamente desarrollados se puede escribir como

$$\begin{aligned} m\dot{V}_T &= D_{a_e} + \sum D_a(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) - g \cos \alpha \cos \beta \sin \theta \\ &\quad + g \sin \beta \sin \phi \cos \theta + g \sin \alpha \cos \phi \cos \theta \\ &\quad + \frac{\partial D}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial D}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial D}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial D}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.67)$$

La segunda ecuación de (2.49) queda:

$$\begin{aligned} m\dot{\beta}V_T - mV_T R_w &= C_{a_e} + \sum C_a(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) + g \cos \alpha \sin \beta \sin \theta \\ &\quad + g \cos \beta \sin \phi \cos \theta - g \sin \alpha \sin \beta \cos \phi \cos \theta \\ &\quad + \frac{\partial C}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial C}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial C}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial C}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.68)$$

La tercer ecuación de (2.49) es:

$$\begin{aligned} m\dot{\alpha}V_T \cos \beta - mV_T \{Q \cos \beta - P_w \sin \beta\} &= L_{a_e}^w + \sum L_a^w(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) \\ &+ g \sin \alpha \sin \theta + g \cos \alpha \cos \phi \cos \theta \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{\partial L}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.69)$$

La cuarta ecuación de (2.49) queda:

$$\begin{aligned} J_w \{ \dot{P}_w - \dot{\alpha} R_w \} - P_w Q_w I'_{xz} - Q_w R_w I'_y + R_w Q_w I'_z &= l_{a_e}^w + \sum l^w(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) \\ &+ \frac{1}{I'_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{1}{I'_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_r} \delta_r \\ &+ \frac{1}{I'_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial l^w}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.70)$$

La quinta ecuación de (2.49) queda:

$$\begin{aligned} J_w \dot{Q}_w + P_w \{ R_w I'_z + P_w I'_{xz} \} + R_w \{ P_w I'_{xz} + P_w I'_z \} &= m_{a_e}^w + \sum m^w(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) \\ &+ \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_r} \delta_r \\ &+ \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial m^w}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.71)$$

La ultima ecuación de (2.49) queda:

$$\begin{aligned} J_w [\dot{R}_w - \dot{\alpha} P_w] - P_w Q_w I_w + Q_w P_w I'_y - R_w Q_w I'_{xz} &= n_{a_e}^w + \sum n^w(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) \\ &+ \frac{1}{I'_x} \frac{\partial n^w}{\partial \delta_a} \delta_a + \frac{1}{I'_x} \frac{\partial n^w}{\partial \delta_r} \delta_r \\ &+ \frac{1}{I'_x} \frac{\partial n^w}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial n^w}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.72)$$

De acuerdo a lo desarrollado previamente, el vector de estados está dado por las variables de estado de fuerzas y momentos es posible entonces reescribir las ecuaciones de fuerza y momentos como:

$$x = [V_T, \beta, \alpha, P_w, Q_w, R_w]^T \quad (2.73)$$

y el vector de entradas de control como:

$$u = [\delta_T, \delta_e, \delta_a, \delta_r]^T \quad (2.74)$$

La matriz de estados $g(x)$ se obtiene de las ecuaciones (2.67)-(2.72).

$$g(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\{D_{a_e} + \sum D_a(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) \\ -g \cos \alpha \cos \beta \sin \theta + g \sin \beta \sin \phi \cos \theta + g \sin \alpha \cos \phi \cos \theta\} \\ \{1/mV_T\}\{mV_TR + C_{a_e} + \sum C_a(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) \\ +g \cos \alpha \sin \beta \sin \theta + g \cos \beta \sin \phi \cos \theta - g \sin \alpha \sin \beta \cos \phi \cos \theta\} \\ \{1/mV_T \cos \beta\}\{mV_T\{Q \cos \beta - P \sin \beta\} + L_{a_e} + \sum L_a(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R) \\ +g \sin \alpha \sin \theta + g \cos \alpha \cos \phi \cos \theta + \frac{\partial L}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r\} \\ J_w^{-1}\{PQI'_{xz} + QRI'_y + RQI'_z + l'_{a_e} + \sum l^w(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R)\} + \dot{\alpha}R \\ J_w^{-1}\{-P\{RI'_z + PI'_{xz}\} - R\{PI'_{xz} + RI'_z\} + m'_{a_e} + \sum m^w(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R)\} \\ J_w^{-1}\{PQI'_z - QPI'_y + RQI'_{xz} + n'_{a_e} + \sum n^w(V_T, \beta, \alpha, P, Q, R)\} + \dot{\alpha}P \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Por comodidad los subíndices w se suprimen ya que se entiende que se habla del modelo en ejes de viento

La matriz B está dada como sigue:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial \delta_T} & \frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial \delta_e} & \frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial \delta_a} & \frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial \delta_r} \\ \frac{1}{mV_T} \frac{\partial C}{\partial \delta_T} & \frac{1}{mV_T} \frac{\partial C}{\partial \delta_e} & \frac{1}{mV_T} \frac{\partial C}{\partial \delta_a} & \frac{1}{mV_T} \frac{\partial C}{\partial \delta_r} \\ \frac{1}{mV_T \cos \beta} \frac{\partial L}{\partial \delta_T} & \frac{1}{mV_T \cos \beta} \frac{\partial L}{\partial \delta_e} & \frac{1}{mV_T \cos \beta} \frac{\partial L}{\partial \delta_a} & \frac{1}{mV_T \cos \beta} \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \\ J_w^{-1} \frac{\partial l^w_p}{\partial \delta_T} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_e} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_a} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial l^w}{\partial \delta_r} \\ J_w^{-1} \frac{\partial m^w_p}{\partial \delta_T} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_e} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_a} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_r} \\ J_w^{-1} \frac{\partial m^w_p}{\partial \delta_T} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_e} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_a} & J_w^{-1} \frac{1}{I'_x} \frac{\partial m^w}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

adicionalmente (2.76) considera que $V_T \neq 0$ y $\beta \neq \pi/2$, tal que el sistema se puede escribir como :

$$\dot{x} = g(x) + Bu \quad (2.77)$$

Las ecuaciones (2.38), (2.39) representan el modelo no lineal de ecuaciones de movimiento para un avión de seis grados de libertad en ejes de viento y (2.44) la orientación del mismo. Este modelo se usará para estudiar la estabilidad, además observe que es lineal en el control de acuerdo a la Observación 4.

En el siguiente capítulo se formulará el problema a resolver en esta tesis.

Capítulo 3

Formulación del problema de control y estructura del controlador

En este capítulo se realiza el planteamiento formal del problema de control de movimiento del avión. Primero se formula el problema de estabilización de cuerpo, el cual implica la regulación de las velocidades rotacionales a cero y luego se formula el problema de orientación bajo la descripción propuesta en el capítulo anterior.

El presente capítulo está constituido de dos partes principalmente. En la primera parte se discuten brevemente las dificultades asociadas al control de la aeronave y en la segunda, se plantean las consideraciones más importantes para la derivación de la estructura de control.

3.1. Objetivo de Control

Con el fin de plantear convenientemente el problema de control de movimiento, se utilizará la descripción dinámica del avión descrita por las ecuaciones (2.38), (2.39), del capítulo anterior. Como se discutió en el Capítulo 2, este modelo se le conoce como de seis grados de libertad porque relaciona la dinámica traslacional con la rotacional, las cuales por separado admiten una descripción no lineal de orden tres.

Bajo la consideración de diferenciabilidad de los esfuerzos y pares actuando sobre avión¹ se reescriben las ecuaciones (2.38), (2.39), considerando dos términos. El primer término representará la aproximación lineal de dinámica de movimiento alrededor de un punto de operación definido en el dominio Ω_j , este punto es arbitrario y en general diferente de x_{ref} (vea [45]). El segundo aglomerará los términos de orden dos y mayores. Estas últimas están principalmente constituidas por algunas derivadas aerodinámicas y no linealidades asociadas al movimiento del avión como cuerpo rígido.

¹Esta consideración es común en aeronáutica. De hecho como hemos visto, la descripción de esfuerzos y pares aerodinámicos se describe precisamente por derivadas. Vea Ecuaciones (2.56) (2.55).

Como paso previo en la derivación de las ecuaciones de este modelo considere la aproximación lineal del modelo del avión dada por :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.1)$$

donde las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} están dadas cómo sigue:

$$\mathbf{A} = m \begin{bmatrix} X_{V+X_{T_v}} \cos(\alpha_e + \alpha_T) & 0 & X_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_\beta & 0 & Y_p & 0 & Y_r - V_{T_e} \\ Z_V - X_{T_v}(\alpha_e + \alpha_T) & 0 & Z_\alpha & 0 & V_{T_e} + Z_q & 0 \\ 0 & \mu L_\beta + \sigma_1 N_\beta & 0 & \mu L_p + \sigma_1 N_p & 0 & \mu L_r + \sigma_1 N_r \\ M_V + M_{T_v} & 0 & M_\alpha + M_{T\alpha} & 0 & M_q & 0 \\ 0 & \mu N_\beta + \sigma_2 L_\beta & 0 & \mu N_p + \sigma_2 L_p & 0 & \mu N_r + \sigma_2 L_r \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B} = m \begin{bmatrix} X_{\delta_r} \cos(\alpha_e + \alpha_T) & X_{\delta_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{\delta_a} & Y_{\delta_y} \\ X_{\delta_r} \sin(\alpha_e + \alpha_T) & Z_{\delta_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu L_{\delta_a} + \sigma_1 N_{\delta_a} & \mu L_{\delta_r} + \sigma_1 N_{\delta_r} \\ M_{\delta_r} & M_{\delta_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu N_{M_{\delta_a}} + \sigma_2 L_{\delta_a} & \mu N_{\delta_r} + \sigma_2 L_{\delta_r} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde los elementos de la matriz \mathbf{A} y \mathbf{B} son derivadas adimensionales dadas por coeficientes adimensionales. Por claridad, la descripción detallada de las derivadas adimensionales se muestra en las tablas del Apéndice A de esta tesis. El lector interesado en los detalles de cálculo y derivación de estos parámetros se referencia al Capítulo 3 de [45]. Aquí solamente se hará notar que ellas corresponden a un punto de operación en particular, no necesariamente igual a la referencia.

La elección de salida se hace con base en la instrumentation típica disponible en el avión y en esta tesis se elige:

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Por lo tanto $y = [V_T \ P_w \ Q_w \ R_w]^T$.

Ya que el vector de estados está dado por:

$$x = [V_T \ \beta \ \alpha \ P_w \ Q_w \ R_w]^T \quad (3.6)$$

donde $V_T = |\mathbf{V}_T|$ es un escalar que representa la magnitud de la velocidad traslacional del avión, β y α ángulos aerodinámicos y, $\omega_{w/E} \triangleq [P_w, Q_w, R_w]$ componentes de la velocidad angular. El vector de entradas de control está dado por:

$$u^T = [\delta_T \ \delta_e \ \delta_a \ \delta_r] \quad (3.7)$$

donde δ_T es la posición del acelerador², δ_e es la posición del elevador, δ_a posición de alerones y δ_r posición del rudder³.

Dado el comportamiento dinámico del avión descrito en el Capítulo 2; si el efecto de las no linealidades admite la descripción siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \Phi(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

Entonces la ecuación (3.8) puede usarse para analizar las limitaciones o cualidades del uso de controladores lineales tipo PI en la estabilidad del avión. En este caso la función $\Phi(\mathbf{x})$ agrupa las no linealidades del modelo debidas a la descripción del avión como cuerpo rígido, a los pares y fuerzas aerodinámicos y puede incluso ser parcialmente compuesta por incertidumbres paramétricas o estructurales provenientes exclusivamente de funciones de los estados. Las consideraciones mas importantes sobre $\Phi(\mathbf{x})$ se dan mas adelante.

La descripción de la dinámica no lineal del avión como en (3.8) considerando que la entrada de control es lineal es usada en la literatura para resolver problemas de control de movimiento usando por ejemplo controladores no lineales H_∞ [18], [17] y otros [51], [13], [52], [53].

La descripción en (3.8) no pierde generalidad porque sigue conteniendo las mismas no linealidades que las ecuaciones (2.38)- (2.44); ésta es simplemente una forma de reescribir el sistema que es común en muchos ámbitos, vea por ejemplo [47]. En esta tesis se opta por esta descripción (3.8) para facilitar el análisis de estabilidad, lo cual constituye una elección de gran valía pues como se verá más adelante, simplifica el análisis y la interpretación de las acciones del controlador.

Los problemas que se abordan en esta tesis son los de estabilización de cuerpo y regulación de orientación en aviones de ala fija. Estabilización de cuerpo es

²Valores mas grandes implican uso mayor de combustible.

³Parte móvil del ala vertical del avión ubicada en la cola.

un término acuñado en aeronáutica que se refiere a la regulación de velocidad rotacional a cero (usualmente bajo condiciones de regulación de la magnitud de la velocidad traslacional). Observe que una condición necesaria (pero no suficiente) para regular la orientación del avión es la estabilización de cuerpo. Esta observación la utilizaremos más adelante para derivar la estructura del control.

Objetivos principales *El objetivo de esta tesis es doble. Por un lado se desea probar que un control lineal PI puede regular la velocidad del avión descrita como V_T y $[P, Q, R]$. Es decir:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} V_T \\ P_w \\ Q_w \\ R_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{Tref} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

para todo $x \in D$, donde $D = \cup \Omega_j$. Por otro lado, es posible regular la orientación, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{ref} \\ \varepsilon_{ref} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde η_{ref} y ε_{ref} son componentes deseadas de referencia para el cuaternión.

Los anteriores son los objetivos que se persiguen con la estrategia de control propuesta. Con el fin de tener una mejor comprensión del problema abordado en el presente trabajo de tesis se abordan las dificultades a las que se hace frente cuando se plantean objetivos de control de actitud en aviones.

3.1.1. Dificultades que presenta el control de actitud de un avión de ala fija

Además de las perturbaciones inherentes a los sistemas reales como incertidumbres de los parámetros o de la dinámica del modelo, para lograr el objetivo de control se debe tener en cuenta otros factores importantes como son:

- (i) **Mapa entrada-salida subactuado.**
- (ii) **Ambigüedad o singularidad en la descripción de la orientación**
- (iii) **Orden del sistema**
- (iv) **No linealidades inherentes al sistema**

Mapa entrada-salida subactuado. Cuando los objetivos de control se reducen únicamente al límite en (3.9), es decir estabilización de cuerpo, se tiene un mapa entrada-salida completamente actuado. Ya que se tiene el mismo número de variables de control y el mismo número de estados para controlar (*i.e.* la dimensión de u es igual a la dimensión de y). Si el límite en (3.10) se incluye entonces el mapa entrada-salida se vuelve subactuado, ya que se tiene menor número de entradas de control que variables a controlar (*i.e.* $u \in \mathbb{R}^4$, $y \in \mathbb{R}^4$ y $\vartheta \in \mathbb{R}^4$). Una opción para solucionar este problema es usar un esquema de control multi-lazo.

Singularidad o redundancia en la descripción de la orientación. La orientación del avión se describe mediante ángulos de Euler o cuaterniones, los cuales presentan singularidades o redundancias en su descripción respectivamente. Pese a que los cuaterniones presentan algunas ventajas con respecto a los ángulos de Euler, aún así es necesario tener en cuenta que su redundancia representa limitaciones para resolver el problema de control. En aquellos puntos donde la salida es redundante, no es posible garantizar el objetivo de control por muy sofisticada que la ley de control pueda ser. Esta limitación se presenta en todas las descripciones de orientación.

Orden del sistema. Como se vió con anterioridad, las ecuaciones que describen la dinámica del avión son de orden seis. Se tienen tres ecuaciones de movimiento para los componentes traslacionales y otras tres para los rotacionales, las cuales cuentan con un mínimo de 60 parámetros. Se ha elegido un controlador lineal PI, debido a su simplicidad y facilidad de uso, además de no que no incrementa de manera significativa el orden del sistema⁴.

No linealidades inherentes al sistema. La descripción de las ecuaciones de movimiento es una descripción no lineal inherente por un lado, al movimiento del avión como cuerpo rígido y por el otro, a la naturaleza de las fuerzas y pares aerodinámicos.

Una vez establecidos los objetivos de control y comprendidas las limitaciones que imponen las dificultades anteriores en este punto es pertinente preguntarse ¿Qué estructura de control nos permite alcanzar los objetivos planteados y al mismo tiempo, lidiar con los inconvenientes previamente abordados? En la siguiente sección se pretende dar una respuesta a esta pregunta.

3.2. Propuesta de control

Como se vió en la revisión bibliográfica los controladores más usados en la actualidad son los llamados de ganancias programables (gain scheduling). Estos enfoques hacen uso de una descripción lineal del avión usualmente bajo la simplificación del no acoplamiento entre dinámicas traslacionales y rotacionales.

⁴Es importante mencionar que conforme aumenta el orden del sistema, también aumenta el tiempo muerto aparente, lo cual es una consideración importante para el desarrollo del control de un sistema [54].

El resultado es un diseño lineal local el cual es relativamente bueno alrededor de una zona de operación. El dominio entonces se divide en un conjunto de regiones de operación para el cual la descripción lineal es viable. Estos controladores son muy usados debido a su simplicidad y facilidad de diseño. Aún más, se ha reportado en la literatura que acciones integrales son usadas para eliminar el sesgo originado por imprecisiones en el modelo y otras perturbaciones. Sin embargo, no ha sido estudiado el efecto de las no linealidades en la estabilidad de este sistema y en la efectividad del proceso de regulación de velocidad.

Observación 5 *La aportación principal de esta tesis es mostrar que un simple controlador lineal tipo PI en lazo cerrado con una descripción no lineal por pedazos del vehículo es capaz de garantizar estabilidad de la velocidad y que además la orientación puede regularse en todo el dominio excepto de un número finito de puntos dados por la redundancia del mapa de cuaterniones. La novedad del trabajo se centra en tres aspectos principalmente. Primero, en que se realiza un análisis de estabilidad del sistema no lineal por pedazos, el cual hasta ahora no ha sido abordado en la literatura. Segundo, se estudia el sistema en lazo cerrado bajo la suposición de la existencia de errores de modelado. Tercero, se estudia la relación entre las ganancias del control y su capacidad de estabilizar al sistema ante transiciones rápidas entre dinámicas continuas.*

Para lograr los objetivos de control y dado el mapa entrada-salida subactuado observado en la sección anterior, se propone el uso de una ley de control lineal PI⁵ multi-lazo. El primer lazo resuelve el problema de estabilización de cuerpo (Objetivo 3.9), mientras que el segundo lazo cumple con la tarea de regulación de orientación (Objetivo 3.10).

Los dos lazos de control se diseñan sobre un sistema continuo, que en lazo cerrado constituye cada uno de los diferentes modos del sistema. Cada modo representa al avión bajo una tarea determinada y un criterio de conmutación se encarga de activar otro modo. Anteriormente se dijo que se usaría una descripción no lineal que consta de una parte lineal y otra no lineal, la conveniencia de ello ahora se ve claramente. Puesto que la parte lineal puede corresponder a un punto de operación arbitrario dentro de un dominio. Este punto es arbitrario debido a que se usa una descripción no lineal y no existen restricciones de dominios pequeños o condiciones de conmutación lenta o lineal (vea [4]). El criterio de conmutación ajusta el controlador acorde a las exigencias de la condición de vuelo (modo de

⁵Proporcional e integral en el error de regulación.

vuelo). Un esquema de control híbrido se propone con la finalidad de abarcar todas las condiciones (modos) de vuelo. El sistema híbrido está integrado de varios subsistemas continuos (avión + control) y una ley de conmutación que permite cambiar el controlador acorde a la condición de vuelo.

3.2.1. Ley de control

Se propone una ley de control lineal tipo PI

$$u = u_1 + u_2 \quad (3.11)$$

donde u es el vector de entradas de control $[\delta_T \ \delta_e \ \delta_a \ \delta_r]$ en un punto de operación. u_1 representa el lazo de control para regulación de velocidad y estabilización de cuerpo (primer lazo de control, y u_2 el lazo de control de orientación (segundo lazo de control). u_1 y u_2 están dadas como sigue:

$$u_1 = -{}^jK_{p,1}e_y - {}^j\varepsilon_1^j K_{I,1} \int e_y \quad \text{con } j = 1 \dots s \quad (3.12)$$

y

$$u_2 = -{}^jK_{p,2}e_\delta - {}^j\varepsilon_2^j K_{I,2} \int e_\delta \quad \text{con } j = 1 \dots s \quad (3.13)$$

donde

j es el número de modos tal que se tienen s diferentes modos.

${}^jK_{p,1} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ganancia proporcional para el primer lazo de control (regulación de velocidad) del modo j .

${}^jK_{I,1} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ganancia integral para el primer lazo de control (regulación de velocidad) del modo j .

${}^jK_{p,2} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ganancia proporcional para el segundo lazo de control (regulación de orientación) del modo j .

${}^jK_{I,2} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ganancia integral para el segundo lazo de control (regulación de orientación) del modo j .

${}^j\varepsilon_1$, parámetro de perturbación asociado a ${}^jK_{I,1}$ del modo j .

${}^j\varepsilon_2$, parámetro de perturbación asociado a ${}^jK_{I,2}$ del modo j .

Es importante observar de las expresiones (3.12) y (3.13), que la ganancia integral ha sido parametrizada por conveniencia como ${}^j\varepsilon_1^j K_{I,1}$ y ${}^j\varepsilon_2^j K_{I,2}$ respectivamente. Ya que ${}^j\varepsilon_1$ y ${}^j\varepsilon_2$ son escalares siempre es posible hacer la parametrización. Como se verá más adelante, precisamente la pregunta a responder en el análisis de estabilidad en lazo cerrado, es sobre los valores de estas ganancias que garanticen la estabilidad asintótica de la referencia.

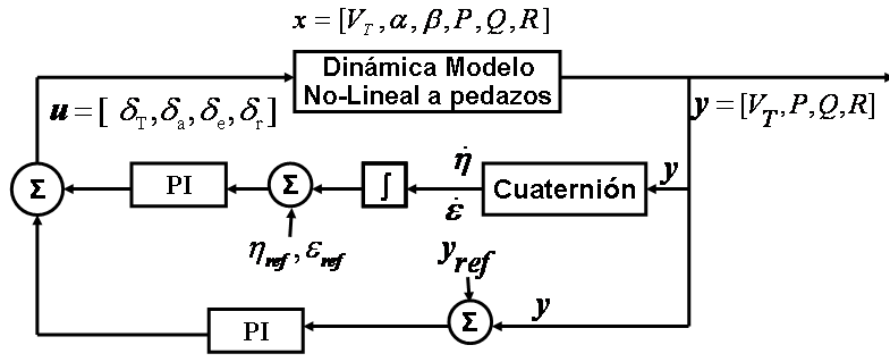


Figura 3.1: Estructura del controlador considerando un modo de vuelo j

La estructura del controlador propuesto se muestra en la Fig. 3.1.

En la Fig. 3.1 se muestra un diagrama esquemático donde se aprecian los dos lazos de control que integran el controlador multi-lazo para un modo de vuelo j . La regulación de velocidad con estabilización del cuerpo se realiza por la retroalimentación de salida simple (lazo externo de la Fig. 3.1). La regulación de la orientación (lazo interno de la la Fig. 3.1) se realiza extrayendo de la salida las componentes de la velocidad angular $[P, Q, R]$ y utilizando el mapa que relaciona éstas con las componentes de los cuaterniones.

Cada *control de modo* consta de un controlador multi-lazo y, ya que la dinámica del avión tiene varios modos de vuelo ($j = 1 \dots s$) requiere de un criterio de conmutación. Este criterio puede depender de la tarea: *p.ej.* vuelo recto y nivelado, vuelta a nivel, ascenso a nivel, descenso, etc.; así como de variables como la altura, el ángulo de ataque, el ángulo de deslizamiento, el número Match entre otras.

Como se puede ver en la Fig.3.3 el controlador híbrido consta de varios controles de modo, los cuales abarcan las s condiciones de vuelo, así como de un criterio de conmutación que se puede ajustar a restricciones de rendimiento y seguridad de la aeronave. Mediante este criterio de conmutación es posible garantizar la adaptabilidad del controlador ante perturbaciones. Es pertinente aclarar que los subsistemas continuos están definidos por la acción total del controlador sobre el avión como se puede ver en la Figura 3.3 y el estado discreto por el evento de conmutación (instantáneo) sobre el cual no se tiene control aunque se establece por diseño.

Para abarcar todo el espacio de estados se considera, la así llamada en la literatura, filosofía de "divide y vencerás", mediante una partición del espacio de estados en dominios. La partición del dominio se hace considerando principalmente la dinámica no lineal del sistema. El criterio para diseñar la partición se realiza bajo la suposición

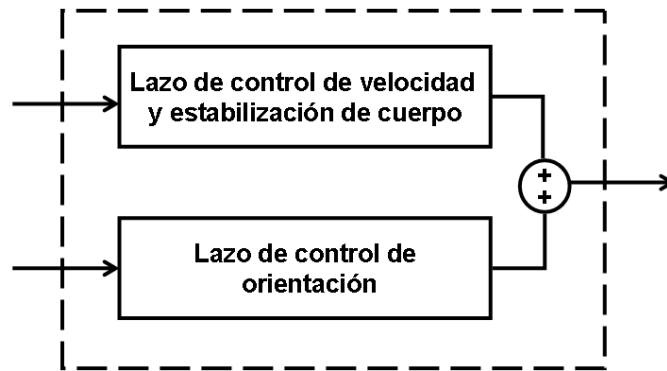


Figura 3.2: Estructura de control para cada modo de vuelo

de que el dominio puede ser subdividido en un número finito de subconjuntos $^j\Omega_j$ con $j = 1, 2, \dots, s$ por medio de una familia de superficies de conmutación. El valor de la señal de conmutación σ , determina el modo activo para cada valor de j . Las características de la partición, así como su motivación se hará evidente en el siguiente capítulo, ya que ésta es necesaria para el tipo de análisis de estabilidad establecido en el trabajo.

En resumen con base en las exigencias de los objetivos de control (3.9) y (3.9) y considerando las dificultades asociadas al diseño de leyes de control de movimiento del avión, se propone una estructura de control híbrido conmutado. El control híbrido conmutado consta de un criterio de conmutación y de s controles correspondientes a cada modo. Cada control de modo está constituido de dos lazos de control asignados para resolver los objetivos de control. Cada lazo de control consta de una ley de control lineal PI.

En la siguiente sección se dan las consideraciones más importantes a tener en cuenta en el diseño del criterio de conmutación usado en el trabajo de tesis aquí presentado.

3.2.2. Criterio de conmutación

La construcción del mecanismo de conmutación se obtiene de una partición del espacio continuo de estados en un número finito de regiones de operación, la cual puede provenir de una familia o conjunto de superficies de conmutación. En cada una de estas regiones se tiene una descripción continua de la dinámica del sistema (la dinámica en un modo de vuelo), descrita por ecuaciones diferenciales con un control (control de modo). Cuando la trayectoria (*i.e.* comportamiento del avión) del sistema cambia de condición, la dinámica continua del sistema salta instantáneamente a un

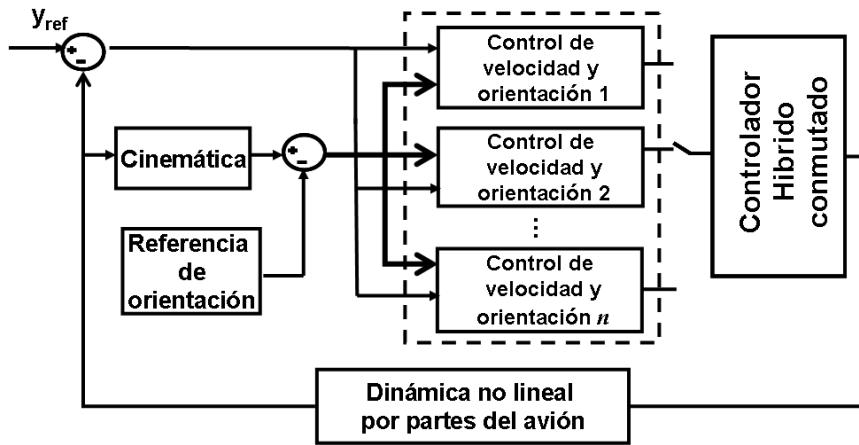


Figura 3.3: Esquema de control híbrido-conmutado

nuevo dominio. El evento de conmutación es un evento discreto detonado por el estado del avión la cual define el siguiente modo activo.

La ley de conmutación en el caso del presente trabajo se diseña bajo condiciones de variaciones en la velocidad total del avión V_T , considerando una velocidad de referencia como límite entre diferentes regiones de operación. Lo anterior con el fin de obtener un ejemplo sencillo de conmutación útil en la tarea de simulación. La ley de conmutación se muestra en la Fig.3.4, la cual muestra el diagrama a bloques de la lógica de conmutación.

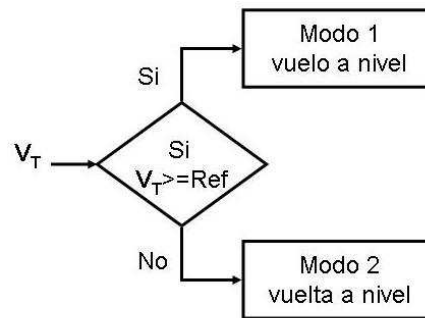


Figura 3.4: Lógica de conmutación

En el caso más simple, el dominio de operación completo puede ser construido mediante la unión de los conjuntos definidos por las superficies de conmutación. De esta manera, con una descripción continua por partes del sistema y con un criterio

de conmutación. . Lo anterior motiva la elección de un dominio adecuado tal que se garantice sobre todo la estabilidad del sistema en presencia de incertidumbres paramétricas o de modelado. La siguiente sección se ocupa de describir las no linealidades que a su vez determinan las características de la partición.

3.3. Requerimientos de la propuesta de control

El análisis del sistema en lazo cerrado se hace mediante la consideración de una partición del espacio de estados. La parte no lineal del modelo reescrito motiva la partición del espacio de estados. La partición surge como efecto de considerar que las no linealidades están representadas mediante una función $\Phi(x)$.

En este apartado se describen consideraciones importantes sobre la partición del espacio de estados que garantizan la solución del problema planteado. La partición del espacio está en función de las no linealidades del modelo.

3.3.1. Función no lineal $\Phi(x)$

La función Φ se define como una función que agrupa las no linealidades del modelo debidas a la descripción del avión como cuerpo rígido, a los pares y fuerzas aerodinámicos, así como incertidumbres paramétricas o estructurales , es decir incertidumbres de modelado dependientes únicamente del los estados tal que $\Phi = \Phi(x)$. El valor de esta función varía de acuerdo a los estados x .

En esta tesis se parte del hecho de que $\Phi(x)$ cumple con lo siguiente:

Tabla 3.1: Características de la función no lineal Φ

1. La función Φ	Es continuamente diferenciable con respecto a x
2. La función Φ	Es localmente Lipschitz en x

Observación 6 *De acuerdo a las características de Φ listadas en la Tabla 3.1, se puede pensar que esta función puede ser cualquiera; lo que puede provocar que ésta crezca sin límite en el dominio.*

En vista de lo anterior, una partición del domino es motivada por la necesidad de garantizar que Φ sea acotada. La pregunta obvia que surge es entonces ¿Que características deberá tener esta partición en orden de preservar las características deseadas para Φ ?

3.3.2. Partición del dominio

La partición del dominio surge para satisfacer las necesidades de acotamiento de Φ . La partición del dominio se hace por lo tanto debido a la dinámica no lineal del sistema. La partición se realiza bajo la suposición de que el dominio puede ser dividido en subconjuntos Ω_j con $j = 1, 2, \dots, s$ por medio de un criterio de conmutación, donde el subíndice j representa el sub-sistema activo. El criterio de conmutación puede ser dependiente del estado o del tiempo; sin embargo, como se muestra en [59] cualquier criterio dependiente del estado tiene una representación equivalente en tiempo. Usando esta observación, la secuencia de conmutación σ_c se define en la literatura como una colección de pares que indica que sub-sistema l_k está activo en el intervalo $\varpi_k = t_k - t_{k-1}$.

$$\sigma_c = \{(l_1, \varpi_1), (l_2, \varpi_2), \dots\} \quad (3.14)$$

En esta tesis se estudiarán las restricciones sobre θ_k que hacen el origen del sistema conmutado asintóticamente estable, así como la relación que existe entre esta variable y las ganancias de control. De acuerdo a lo anterior, la partición debe tener la siguientes características:

Tabla 3.2: Características de la partición

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. En el dominio Ω_j, la función Φ es acotada para todo x 2. $\Omega_j \subseteq D$ donde D es el espacio de estados 3. $D = \cup_j \Omega_j$ |
|---|

Es importante observar que la división del dominio de operación establecida en la Tabla 3.2 motiva establecer la existencia de un punto de equilibrio único para todas las particiones si el objetivo de control (3.9) quiere alcanzarse.

Observación 7 *Observe que la existencia de un punto de equilibrio único es una condición necesaria para la estabilidad asintótica.*

Por diseño entonces, se desea garantizar la existencia de un punto de equilibrio único atractivo, de tal manera que sin importar en que partición del dominio se inicie, la trayectoria siempre converja asintóticamente a éste. Para garantizar la existencia de un punto de equilibrio único se usará el principio de contracción de mapas. Este principio tomado de [61] se cita a continuación con el fin de dar precedentes para el análisis de estabilidad abordado en el siguiente capítulo.

Principio de contracción de mapas Sea $B_a = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < a\}$ denota la bola abierta de radio a centrada en el origen en \mathbb{R}^d . Si la función

$$g : B_a \mapsto \mathbb{R}^d$$

satisface

H1. Existe una constante $r < 1$ tal que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq r\|x - y\|$$

para todas $x, y \in B_a$

H2. $\|g(0)\| < (1 - r)a$

Entonces la ecuación

$$x = g(x)$$

Tiene exactamente una solución.

Sobre la hipótesis 1 (H1). Esta hipótesis es la responsable de la palabra “contracción” en la proposición. Ya que $r < 1$ (es crucial que $r < 1$), la distancia entre las imágenes $g(x)$ y $g(y)$ de x y y es más pequeña que la distancia original entre x y y . Así, la función g contrae distancias. Cuando la dimensión es $d > 1$ se tiene una matriz $\rho(x) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]_{1 < i, j < d}$ de primeras derivadas de la función g . Hay una medida del tamaño de esta matriz llamada la norma de la matriz y se denota $\|\rho(x)\|$ tal que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{t \in B_a} \|\rho(x)\|$$

La hipótesis *H1* se reduce a $\|\rho(x)\| < r < 1$ para todo $t \in B_a$. En términos generales, *H1* fuerza que la derivada de g sea suficientemente pequeña, lo cual obliga a la derivada de $x - g(x)$ a estar acotada fuera de cero.

Sobre la hipótesis 2 (H2). Si g sólo toma valores que estén fuera de B_a , entonces no es posible que $x = g(x)$ tenga una solución. Así que es requisito que $g(x)$ este en B_a al menos para algunos valores de $x \in B_a$. Esta hipótesis es en realidad un poco más fuerte que esto:

$$\|g(x)\| = \|g(x) - g(0) + g(0)\| \leq \|g(x) - g(0)\| + \|g(0)\| < r\|x - 0\| + (1 - r)a$$

por *H1* y *H2*. Por lo tanto, para toda x en B_a , es decir todas las x con $\|x\| < a$, $\|g(x)\| < ra + (1 - r)a = a$. Con la hipótesis $g : B_a \mapsto B_a$. De manera general, *H2* requiere que $g(x)$ sea suficientemente pequeña para al menos un x .

Observe que del Principio de contracción de mapas, r se puede interpretar como la constante de Lipschitz, lo que implica que ésta sea menor que 1. La existencia de

un punto de equilibrio puede ser demostrada utilizando el teorema de contracción de mapas [61] bajo la siguiente condición

$$\|\nabla_{e_x} g(e_x)\| < 1 \quad (3.15)$$

donde $\nabla_{e_x} g(e_x)$ representa la derivada de $g(e_x)$ con respecto a e_x .

La información aquí presentada será de utilidad más adelante para el los resultados del análisis de estabilidad.

Capítulo 4

Aportaciones principales

En este capítulo se muestra la aportación principal del trabajo de tesis, la cual es mostrar que un simple controlador lineal tipo PI en lazo cerrado con la descripción no lineal por pedazos del vehículo (3.8) es capaz de garantizar estabilidad asintótica de la referencia de velocidad y que además la orientación puede regularse en todo el dominio excepto de un número finito de puntos dados por la redundancia del mapa de cuaterniones.

Para llevar a cabo el análisis del sistema en lazo cerrado se usa una partición del dominio dentro de la cual es admisible una descripción del sistema continua no lineal (descrita por ecuaciones diferenciales con o sin control). Siempre que la trayectoria del sistema detone un cambio en el dominio de operación, el comportamiento continuo cambia. Con el fin de tener un sistema híbrido bien definido, se escoge tener un sólo un comportamiento dinámico continuo por cada participación del dominio y la unión de los dominios forman el espacio de estados. La estabilidad del sistema en cada dominio de operación se establece formalmente en el Lema 1.

El criterio de conmutación puede ser dependiente del tiempo y/o el estado sin embargo tiene que cumplir un requerimiento de estadía mínima que se muestra en el Lema 2, como aportación importante, que depende de las ganancias del controlador. Con el fin de ilustrar las ventajas del control propuesto se utilizan simulaciones numéricas con el modelo de un avión F-16; principalmente debido a la disponibilidad de información con la que se cuenta para este modelo.

4.1. Estabilidad de modo y del esquema de control híbrido

La dinámica no lineal por partes del sistema se estabiliza usando dos lazos de control, cada lazo usa una ley de control lineal tipo PI. Un lazo cumple el objetivo de regulación de velocidad y el otro de la orientación.

Primero se establece la prueba formal de estabilidad del sistema no lineal en cada pedazo y luego se estudia la estabilidad del sistema conmutado como dependiente de una secuencia y se establecen condiciones suficientes de estabilidad. La naturaleza del controlador (híbrido) permite que el dominio de operación cambie, siempre que la trayectoria del sistema lo requiera y por tanto el comportamiento continuo cambia. Esto motiva el análisis de las condiciones para garantizar estabilidad del sistema continuo por partes con la acción del control híbrido, dando cabida al tiempo de residencia promedio en cada modo o dominio de operación.

Las ecuaciones que describen el movimiento del avión se reescriben cómo una parte lineal dada por (3.8) y (3.1) más una parte no lineal representada por ${}^j\Phi(x)$, más la descripción de la orientación (2.44). El modelo reescrito es:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \Phi(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \dot{\vartheta} &= \mathbf{T}(\vartheta)\boldsymbol{\omega}_w\end{aligned}\quad (4.1)$$

Recordando que $x = [V_T, \beta, \alpha, P_w, Q_w, R_w]^T$, $y = [V_T, P_w, Q_w, R_w]^T$, $\vartheta = [\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$ y $\boldsymbol{\omega}_{w/E} = [P_w, Q_w, R_w]$. Ya que la acción de control utiliza el error de regulación es importante definir el sistema (4.1) en términos de este error. Entonces considere el error de regulación está dado como:

$$e_y = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{ref} \quad (4.2)$$

con $Ce_x = e_y$. El sistema (4.1) no lineal en variables de error está definido como:

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= {}^jAe_x + {}^jBu + {}^j\Phi_1(e_x) \\ e_y &= Ce_x \\ \dot{e}_\vartheta &= T(e_\vartheta)\boldsymbol{\omega}_e\end{aligned}\quad (4.3)$$

con

$${}^j\Phi_1(e_x) \triangleq {}^j\Phi(e_x + x_{ref}) + Ax_{ref} \quad (4.4)$$

donde:

$e_x = x - x_{ref} \in \mathbb{R}^6$, vector de estados.

${}^jA \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, matriz de estados, evaluada en el punto de operación (constante).

${}^jB \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$, matriz de control, evaluada en el punto de operación (constante).

${}^j C \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$, matriz de salida.

$e_y = C e_x \in \mathbb{R}^4$, vector de salida.

${}^j \Phi_1(e_x)$, vector que contiene no linealidades.

$u = u_1 + u_2$, ley de control continua.

u_1 , lazo de control de velocidad (estabilización de cuerpo).

u_2 , lazo de control de orientación.

$e_{\vartheta} = [\vartheta - \vartheta_{ref}]$, error de la orientación usando cuaterniones.

j , superíndice que denota modo (condición) de vuelo.

$\omega_e = \omega_w - \omega_{wref}$, error de regulación de la velocidad angular.

La ley de control se denota como u , ésta considera el control de velocidad y estabilización de cuerpo denotado con el subíndice 1 (primer lazo de control) y el control de orientación denotado con el subíndice 2 (segundo lazo de control). Esta expresión puede reescribirse como:

$$u = -{}^j K_{p,1} e_y - {}^j \epsilon_1 {}^j K_{I,1} \int e_y - {}^j K_{p,2} e_{\vartheta} - {}^j \epsilon_2 {}^j K_{I,2} \int e_{\vartheta} \quad (4.5)$$

para $j = 1, 2, \dots, s$ y donde

$u \in \mathbb{R}^4$, ley de control considerando el primer y segundo lazos de control.

${}^j K_{p,1} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ganancia proporcional para control de velocidad y estabilización de cuerpo (primer lazo de control) c.

${}^j K_{I,1} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ganancia integral para control de velocidad y estabilización de cuerpo (primer lazo de control) para el modo j .

${}^j K_{p,2} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ganancia proporcional para control de orientación (segundo lazo de control) para el modo j .

${}^j K_{I,2} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, ganancia integral para control de orientación (segundo lazo de control) para el modo j .

${}^j \epsilon_1$, parámetro de perturbación asociado a ${}^j K_{I,1}$

${}^j \epsilon_2$, parámetro de perturbación asociado a ${}^j K_{I,2}$

Observe que:

$$\begin{aligned} u_1 &= -{}^j K_{p,1} e_y - {}^j \epsilon_1 {}^j K_{I,1} \int e_y \\ u_2 &= -{}^j K_{p,2} e_{\vartheta} - {}^j \epsilon_2 {}^j K_{I,2} \int e_{\vartheta} \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1.1. Preliminares

Primero se dan algunas proposiciones que serán utilizadas más tarde en la prueba del Lema 1. Como primer paso, el problema de control se resolverá bajo las siguientes suposiciones

Suposiciones

- S1.** La tripleta $({}^jA, {}^jB, {}^jC)$ es controlable y observable para todo $j = 1, 2, \dots, s$.
- S2.** El dominio de operación cumple con lo estipulado en la Tabla 3.2.
- S3.** $\Phi_1(e_x)$ cumple con lo estipulado en la Tabla 3.1.

Partiendo de las suposiciones anteriores las condiciones de estabilidad para cada modo de vuelo se establecen en el Lema 1 y las condiciones de estabilidad para el sistema conmutado se establecen en el Lema 2.

El análisis sobre la estabilidad del sistema se realiza en dos partes. Primero se analiza el sistema bajo la acción del primer lazo de control (control de velocidad); luego se incorpora el segundo lazo de control (control de orientación) y se analiza nuevamente el sistema.

Considere el modelo con las ecuaciones de movimiento sin las ecuaciones de orientación, ya que el primer lazo controla únicamente la velocidad con estabilización de cuerpo. De (4.3), las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= {}^jAe_x + {}^jBu_1 + {}^j\Phi_1(e_x) \\ e_y &= Ce_x \end{aligned} \quad (4.7)$$

El primer lazo de control, es decir el lazo de control de velocidad es:

$$u_1 = -{}^jK_{p,1}e_y - {}^j\epsilon_1^j K_{I,1} \int e_y \quad (4.8)$$

El sistema (4.7) en lazo cerrado con (4.8) está dado como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= {}^jAe_x - {}^jB^jK_{p,1}Ce_x + e_s + {}^j\Phi_1(e_x) \\ \dot{e}_s &= -{}^j\epsilon_1^j B^j K_{I,1} Ce_x \\ e_y &= Ce_x \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observación 8 *Note que la segunda ecuación de (4.9) es un integrador que proviene de la acción integral del primer lazo de control.*

El sistema (4.9) reescrito en espacio de estados es:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} {}^jA_1 & I \\ -{}^j\varepsilon_1 {}^jB {}^jK_{I,1} C & 0_{6 \times 6} \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} {}^j\Phi_1(e_x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde

$$e = [e_x, e_s] \in \mathbb{R}^{12} \quad (4.11)$$

y

$${}^jA_1 \triangleq {}^jA - {}^jB {}^jK_{p,1} C \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (4.12)$$

El punto de equilibrio de (4.10) está dado por:

$${}^jA_1 e_x + e_s + {}^j\Phi_1(e_x) = 0 \quad (4.13)$$

$$-{}^j\varepsilon_1 {}^jB {}^jK_{I,1} C e_x = 0 \quad (4.14)$$

En estado estacionario la acción integral es constante, es decir:

$$\dot{e}_s = 0 \Rightarrow e_s = b_{I,1} \quad (4.15)$$

donde $b_{I,1}$ es una constante.

Sustituyendo (4.15) en (4.13) para obtener el punto de equilibrio se tiene la siguiente ecuación implícita

$$e_{x,eq} = -{}^jA_1^{-1} [b_{I,1} + {}^j\Phi_1(e_{x,eq})] \triangleq g(e_{x,eq}) \quad (4.16)$$

Los valores propios de (4.12), de acuerdo al Teorema 3 de [62], pueden ser **asignados arbitrariamente**¹. Por lo tanto se escogen reales negativos, haciendo la matriz jA_1 Hurwitz y por lo tanto invertible (ver detalles en Proposición 2).

De (4.16) se puede ver que $-b_{I,1} = {}^jA_1 e_x + {}^j\Phi_1(e_x)$. Entonces por cada $e_{x,eq}$ existe un único $b_{I,1}$, ya que $b_{I,1}$ es lineal en $b_{I,1}$. Sin embargo para lo inverso no es necesariamente cierto. Para probar que por cada $b_{I,1}$ existe un único $e_{x,eq}$ se formula la siguiente proposición que mostrará las condiciones necesarias para cumplir con lo anterior.

¹Con valores propios complejos conjugados para asegurar que ${}^jK_{p,1}$ sea real.

Proposición 1 La ecuación (4.16) es una función uno a uno si se satisface que

$$\|jA_1^{-1}\| < \frac{1}{jL_{d1}}$$

donde $jA_1 \triangleq jA - jB^j K_{p,1} C$ y jL_{d1} la constante de Lipschitz asociada a $j\Phi_1(e_x)$.

Demostración. Por el Principio de contracción de mapas [61], el punto de equilibrio (4.16) es único si la siguiente condición se satisface

$$\|\nabla_{e_x, eq} g(e_x, eq)\| < 1 \quad (4.17)$$

Ya que $\Phi_1(e_x, eq)$ es diferenciable, la derivada de (4.16) puede ser acotada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|-jA_1^{-1} \nabla_{e_x, eq} j\Phi_1(e_x, eq)\| &< \|jA_1^{-1}\| \|\nabla_{e_x, eq} j\Phi_1(e_x, eq)\| \\ &< \|jA_1^{-1}\| jL_{d1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Entonces para que (4.18) satisfaga (4.17) se requiere que :

$$\|jA_1^{-1}\| jL_{d1} < 1 \quad (4.19)$$

□

La expresión (4.19) puede simplificarse aún más, para ello considere que una matriz invertible M satisface:

$$\frac{1}{\|M^{-1}\|} \leq \|M\| \quad (4.20)$$

Con lo anterior (4.19) se puede acotar de la siguiente manera

$$jL_{d1} < \frac{1}{\|jA_1^{-1}\|} \leq \|jA_1\| \quad (4.21)$$

Sea

$$j\bar{K}_{p,1} = j\gamma^j K_{p,1} \quad (4.22)$$

donde ${}^j\gamma > 0$ es una constante. Entonces

$$\|{}^jA_1\| = \|{}^jA - {}^jB^j\bar{K}_{p,1}C\| = \left\| {}^j\gamma \left(\frac{{}^jA}{{}^j\gamma} - {}^jB^jK_{p,1}C \right) \right\| \quad (4.23)$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned} \left\| {}^j\gamma \left(\frac{{}^jA}{{}^j\gamma} - {}^jB^jK_{p,1}C \right) \right\| &\leq |{}^j\gamma| \left\| \left(\frac{{}^jA}{{}^j\gamma} - {}^jB^jK_{p,1}C \right) \right\| \\ {}^jL_{d1} &< {}^j\gamma \left\| \frac{{}^jA}{{}^j\gamma} - {}^jB^jK_{p,1}C \right\| \end{aligned} \quad (4.24)$$

De (4.24) se puede ver que si ${}^j\gamma \rightarrow \infty$ entonces ${}^j\gamma \left\| \frac{{}^jA}{{}^j\gamma} - {}^jB^jK_{p,1}C \right\| \rightarrow \infty$. De (4.24) se puede concluir que con ${}^j\gamma$ suficientemente grande, la condición en (4.19) se satisface.

Proposición 2 *Existen valores propios reales negativos de jA_1 , tal que $\nabla_{e_x} e_s$ es positiva definida.*

Demostración. De las Ecuación (4.13) y (4.14) se tiene:

$$e_s = -{}^jA_1 e_x - {}^j\Phi_1(e_x) \quad (4.25)$$

(4.25) representa la variedad de los puntos de equilibrio $e_{x,eq}$ en función del estado relacionado con la variable de integración e_s . Derivando (4.25), con respecto de e_x se tiene:

$$\nabla_{e_x} e_s = [-({}^jA - {}^jB^jK_{p,1}{}^jC) - \nabla_{e_x} {}^j\Phi_1(e_x)] \quad (4.26)$$

Bajo las suposiciones S1 a S3, $\nabla_{e_x} {}^j\Phi_1(e_x)$ es siempre acotada en el dominio Ω_j . Por otro lado si la la matriz ${}^jA - {}^jB^jK_{p,1}{}^jC$ es Hurwitz, i.e jA_1 tiene valores propios negativos, la matriz $-{}^jA_1$ sea positiva definida (valores propios positivos). De acuerdo al Teorema 3 de [62], es posible asignar los valores propios de jA_1 si las siguientes condiciones se satisfacen:

- i La tripleta ${}^j(A, B, C)$ es controlable y observable (S1).
- ii Satisface $p \triangleq n - r - m + 1 \leq 0$, de donde $e_x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ y $e_y \in \mathbb{R}^m$.

Por otro lado, ya que $e_x \in \mathbb{R}^6$, $u \in \mathbb{R}^4$ y $e_y \in \mathbb{R}^4$, la condición (ii) se satisface con $p = -1$. Entonces la matriz ${}^jA_1 = {}^jA - {}^jB {}^jK_{p,1} {}^jC$ es de polos asignables ya que siempre es posible hallar una matriz real ${}^jK_{p,1}$ tal que jA_1 es Hurwitz.

Aun más, si ${}^j\bar{K}_{p,1} = {}^j\gamma {}^jK_{p,1}$ para un ${}^j\gamma$ suficientemente grande el término jA_1 “predominará” sobre valor de $\nabla_{e_x} e_s$ el cual es acotado en Ω_j . De lo anterior, se concluye que existe un valor suficientemente grande de ${}^j\gamma$ que hace a la matriz $\nabla_{e_x} e_s$ positiva definida y por lo tanto existe su inversa y también es positiva definida (i.e. $[\nabla_{e_x} e_s]^{-1}$).

□

Una vez establecido lo anterior, las contribuciones de este trabajo se resumen en dos Lemas. El Lema 1 establece las condiciones para garantizar estabilidad del punto de equilibrio en un dominio de operación Ω_j bajo una acción continua multi-lazo. El Lema 2 establece las condiciones para garantizar la estabilidad del sistema continuo por pedazos bajo un criterio de conmutación dado. A continuación se establecen éstos lemas con sus respectivas demostraciones formales.

4.1.2. Estabilidad para cada partición del dominio: Lema de estabilidad de modo

El análisis sobre la estabilidad del sistema se realiza en dos partes. Primero se analiza el sistema bajo la acción del primer lazo de control (control de velocidad); luego se incorpora el segundo lazo de control (control de orientación) y se analiza nuevamente el sistema.

Lema 1. Estabilidad del esquema de control de modo *Considere el sistema no lineal (4.3) bajo la acción del controlador (4.5) definido en una partición del dominio Ω_j . Sean las matrices ${}^j\bar{K}_{1,i} = {}^j\epsilon_i {}^jK_{1,i} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y ${}^j\bar{K}_{p,i} = {}^j\gamma {}^jK_{p,i} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que ${}^j\bar{K}_{p,i}$ satisface la Proposición 1 y la Proposición 2. Si S1 a S3 se cumplen; entonces existe $0 < {}^j\epsilon_1 < \epsilon_{max}$ y $0 < {}^j\epsilon_2 < \epsilon_{max}$, tal que el origen de (4.3) es exponencialmente estable.*

Demostración. Asuma que S1 a S3 se satisfacen, aún más ${}^jK_{p,1}$ cumple con lo establecido en la Proposición 1. Defina

$$\begin{aligned} z &\triangleq [e_x - e_{x,eq}] \\ w &\triangleq [e_s - e_{s,eq}] \end{aligned} \quad (4.27)$$

para trasladar el equilibrio al origen. Adicionalmente, interprete ${}^j\varepsilon_1 > 0$ como parámetro de perturbación², el sistema se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^jA_1 & I \\ -{}^jB^j\varepsilon_1^jK_{I,1}C & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^j\Phi_2(z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Observación 9 Debido al cambio de variables (4.27) el sistema (4.28) tiene un punto de equilibrio en el origen, lo que implica que $\Phi_2(0) = 0$.

con ${}^j\Phi_2(z) \triangleq [A - {}^jB^j\varepsilon_1^jK_{p,1}C]e_{x,eq} + {}^j\Phi_1(z + e_{x,eq}) + e_{s,eq}$.

Observación 10 Con el fin de escribir el sistema (4.28) en la forma de un sistema singularmente perturbado convencional (ver [47]) es necesario establecer una nueva escala de tiempo. Las variables $z(t)$ y $w(t)$ pasan de ser funciones del tiempo t a ser funciones de una nueva escala de tiempo $t' = {}^j\varepsilon_1 t$ y por consiguiente la expresión de la derivada tiene que cambiar (i.e. de $\frac{dz}{dt}$ a $\frac{dz}{dt'}$ y de igual manera para w). Sin embargo, para evitar confusiones e identificar más fácilmente que variables son funciones de t y de t' , se introducirá la siguiente notación para establecer lo siguiente:

$$\begin{aligned} z(t) &\triangleq z & dz/dt &\triangleq \dot{z} \\ z(t') &\triangleq z & dz/dt' &\triangleq z' \end{aligned}$$

Lo mismo para el estado w .

Sea $t' = {}^j\varepsilon_1 t$ una nueva escala de tiempo, redefiniendo las variables $z(t) = z(t'/{}^j\varepsilon_1)$ y $w(t) = w(t'/{}^j\varepsilon_1)$, la derivadas son ${}^j\varepsilon_1 z' = {}^j\varepsilon_1 dz/dt'$ y ${}^j\varepsilon_1 w' = {}^j\varepsilon_1 dw/dt'$ respectivamente. Entonces la ecuación (4.28) se puede reescribir como sigue:

$$\begin{bmatrix} {}^j\varepsilon_1 z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^jA_1 & I \\ -{}^jB^jK_{I,1}C & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^j\Phi_2(z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Como se dijo (4.29) tiene un punto de equilibrio en $(z, w) = (0, 0)$. Note que $(z, w) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t' \rightarrow \infty$ implica que $(z, w) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para valores

²En [47] se muestra que siempre es posible hacer esta interpretación usando una acción de control apropiada.

suficientemente pequeños de ${}^j\varepsilon_1 > 0$ el sistema (4.29) es singularmente perturbado en su forma estándar.

Si en (4.28) se hace ${}^j\varepsilon_1 = 0$, la dinámica de w ya está en su punto de equilibrio el cual es $w = 0$ (ver Observación 9). Por lo tanto :

$$\dot{z} = A_1 z + {}^j\Phi_2(z) \quad (4.30)$$

De (4.12) ${}^jA_1 = {}^jA - {}^jB^jK_{p,1}C$. Entonces (4.30) se puede escribir como :

$$\dot{z} = ({}^jA - {}^jB^jK_{p,1}C)z + {}^j\Phi_2(z) \quad (4.31)$$

El sistema (4.31) es llamado de *capa límite*. Observe que (4.31) puede verse como el esquema de control bajo acción puramente proporcional.

Por otro lado si en (4.29) se fija el parámetro ${}^j\varepsilon_1 = 0$, se tiene lo siguiente:

$$0 = {}^jA_1 z + w + {}^j\Phi_2(z) \quad (4.32)$$

$$w' = -{}^jB^jK_{I,1}Cz \quad (4.33)$$

(4.32) tiene una estructura semejante a (4.13), entonces (4.32) puede ser interpretada como la función que relaciona el equilibrio de z con w y entonces se cumple que

$$z = -{}^jA_1^{-1}[w + {}^j\Phi_2(z)] \quad (4.34)$$

(4.34) es una función implícita de w y se observa que por cada valor de z hay un sólo valor de w ³. Lo opuesto no necesariamente es cierto (*i.e.* por cada valor de w hay un sólo valor de z) debido a que z aparece de manera no lineal. Sin embargo (4.34) es una función uno a uno si se satisface el principio de contracción de mapas. Las condiciones para que esto suceda se encuentran en la Proposición 1. Si éstas se cumplen (*e.g.* usando ${}^j\gamma$ suficientemente grande) entonces existe una función h tal que:

$$z \triangleq h(w) \quad (4.35)$$

De esta manera, sustituyendo (4.35) en (4.33) se tiene:

$$w' = -{}^jB^jK_{I,1}Ch(w) \quad (4.36)$$

El sistema (4.36) es conocido cómo *sistema reducido* y tiene un punto de equilibrio en el origen⁴. Observe que (4.36) puede verse como el esquema de control bajo

³Debido a que w aparece de manera lineal.

⁴Recuerde que se ha realizado un cambio de coordenadas para asegurar precisamente este hecho.

acción puramente integral. Finalmente observe que el sistema de capa límite y el sistema reducido están en diferentes escalas de tiempo.

Las propiedades de estabilidad del sistema que representa el modelo del avión en lazo cerrado con u_1 se pueden derivar analizando la estabilidad de los sistemas de capa límite (4.31) y sistema reducido(4.36) asociados a éste.

Primero se estudian las propiedades de estabilidad del sistema de *capa límite* (4.31). De acuerdo a las condiciones del Lema, jA_1 es Hurwitz entonces existe una función de Lyapunov dada por:

$${}^jV_1 = z^T {}^jP_1 z \quad (4.37)$$

donde ${}^jP_1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ definida positiva tal que su derivada en tiempo es negativa definida, esto es

$${}^j\dot{V}_1(z) = -z^T {}^jQ_1 z$$

donde ${}^jQ_1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6} > 0$. Por otro lado, calculando la derivada en tiempo de (4.37) pero ahora a lo largo de las trayectorias de (4.31) se tiene:

$$\begin{aligned} {}^j\dot{V}_1(z) &= z^T {}^jP_1 \dot{z} + \dot{z}^T {}^jP_1 z \\ {}^j\dot{V}_1 &= -z^T {}^jQ_1 z + 2z^T {}^jP_1 {}^j\Phi_2(z) \end{aligned} \quad (4.38)$$

De la Observación 9 se tiene la siguiente propiedad de Lipschitz para $\Phi(z)$:

$$\|{}^j\Phi_2(z)\| < {}^jL_1 \|z\| \quad (4.39)$$

donde jL_1 es la constante Lipschitz asociada a ${}^j\Phi_2(z)$. Entonces la derivada de la función de Lyapunov en (4.38) puede ser acotada como :

$${}^j\dot{V}_1 \leq -z^T {}^jQ_1 z + 2\|z\|^2 \|{}^jP_1\| L_1 \quad (4.40)$$

Observe que $z^T {}^jQ_1 z$ es positiva definida, por lo que :

$$\begin{aligned} {}^j\dot{V}_1 &\leq -\|z\|^2 \|{}^jQ_1\| + 2\|z\|^2 \|{}^jP_1\| L_1 \\ {}^j\dot{V}_1 &\leq (-\|{}^jQ_1\| + 2L_1 \|{}^jP_1\|) \|z\|^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Recuerde que jQ_1 y jP_1 son matrices positivas definidas.

Para que (4.41) se cumpla, el término $(-\|{}^jQ_1\| + 2L_1\|{}^jP_1\|)$ tiene que ser negativo. Entonces:

$$\begin{aligned} -\|{}^jQ_1\| + 2L_1\|{}^jP_1\| &\leq 0 \\ 2L_1\|{}^jP_1\| &\leq \|{}^jQ_1\| \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por otro lado $\|{}^jQ_1\| = \|{}^jA_1^T{}^jP_1 + {}^jP_1{}^jA_1\|$ y ${}^j\bar{K}_{p,1} = {}^j\gamma^jK_{p,1}$ con ${}^j\gamma > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|{}^jQ_1\| &= \|{}^jA_1^T{}^jP_1 + {}^jP_1{}^jA_1\| \\ &= \left\| j\gamma \left[\frac{{}^jA}{j\gamma} - jB^j\bar{K}_{p,1}C \right]^T jP_1 + j\gamma^jP_1 \left[\frac{{}^jA}{j\gamma} - jB^j\bar{K}_{p,1}C \right] \right\| \\ &\leq \|j\gamma\| \left\| \left[\frac{{}^jA}{j\gamma} - jB^j\bar{K}_{p,1}C \right]^T jP_1 + jP_1 \left[\frac{{}^jA}{j\gamma} - jB^j\bar{K}_{p,1}C \right] \right\| \end{aligned} \quad (4.43)$$

De (4.43) se puede ver que $\lim_{j\gamma \rightarrow \infty} \|{}^jQ_1\| = \infty$. De lo anterior se puede concluir que para ${}^j\gamma$ suficientemente grande el origen del sistema de capa límite (4.31) es exponencialmente estable.

Para estudiar la estabilidad del *sistema reducido* (4.36) observe que el mapa del equilibrio $z = h(w)$ está dado implícitamente por (4.34) y explícitamente por (4.35). Las propiedades de estabilidad del sistema reducido (4.36) se analizan definiendo la siguiente función escalar:

$${}^jV_2 = \frac{1}{2}w^T w \quad (4.44)$$

Considere $E \triangleq jB^jK_{I,1}C$. La derivada de jV_2 a lo largo de (4.31) está dada por

$$\begin{aligned} {}^j\dot{V}_2 &= \frac{1}{2}w'^T w + \frac{1}{2}w^T w' \\ &= \frac{1}{2}[-jB^jK_{I,1}Ch(w)]^T w + \frac{1}{2}w^T [-jB^jK_{I,1}Ch(w)] \\ &= -\frac{1}{2}[jB^jK_{I,1}Ch(w)]^T w - \frac{1}{2}w^T [jB^jK_{I,1}Ch(w)] \\ &= -w^T [jB^jK_{I,1}Ch(w)] \\ &= -w^T E h(w) \end{aligned} \quad (4.45)$$

La estructura de ${}^jh(w)$ ya se ha estudiado en la Proposición 2 y se ha mostrado que la matriz $\nabla_{e_x} e_s$, así como su inversa son positivas definidas. Ya que se ha mostrado que $\nabla_w h(w) = [\nabla_{e_x} e_s]^{-1}$ es positiva definida (con el respectivo cambio de variables (4.27)); entonces $h(w)$ será positiva definida también.

Por otro lado la matriz $(jB^jK_{I,1}C) \in \mathbb{R}^6$ no es de rango completo debido a la construcción de la matriz C ; es decir que la matriz $(jB^jK_{I,1}C) \in \mathbb{R}^6$ a lo sumo será positiva semidefinida (ver Apéndice C). Lo anterior permite concluir que ${}^j\dot{V}_2$ es positiva semidefinida. En este caso no se puede mostrar estabilidad asintótica del

origen mediante el método directo de Lyapunov, por ellos se utiliza el principio de invariancia.

Por en principio de invariancia de LaSalle [47], se sabe que las trayectorias del sistema (4.36) se irán al conjunto invariante más grande tal que ${}^j\dot{V}_2 = 0$. Se puede usar la Proposición 1 para mostrar que el origen es el único punto en donde esto se cumple. Primero porque existe un mapa uno a uno $h(w) = z$ y segundo porque el cambio de coordenadas introducido en (4.27) asegura para $z = 0$ entonces $w = 0$. Por lo tanto mediante el principio de invarianza [47] se puede concluir que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Hasta aquí, la estabilidad asintótica del origen del sistema (4.10) puede ser concluida usando el Teorema 3 en [58]. Las propiedades de estabilidad de los sistemas de capa límite y reducido, junto con la naturaleza de la función ${}^j\Phi_2(z)$ (Lipschitz) implican, según [58], la existencia de un parámetro $\varepsilon_{max} > 0$ tal que para todo $0 < {}^j\varepsilon_1 < \varepsilon_{max}$ el origen del sistema (4.10) es asintóticamente estable, con una función escalar:⁵

$${}^jV_3 = \frac{({}^jV_1 + {}^jV_2)}{{}^j\varepsilon_1} \quad (4.46)$$

Observación 11 *Note que el resultado anterior, implica que para valores de ε_1 tal que $0 < {}^j\varepsilon_1 < \varepsilon_{max}$ (ganancias integrales bajas) es posible regular la velocidad del avión en todo el dominio Ω_j . Ello implica que si $[P_{ref}, Q_{ref}, R_{ref}] = [0, 0, 0]$, la orientación ya está fija, pero determinada por la trayectoria que haya seguido el avión hasta la referencia.*

Para mostrar que el sistema es capaz de alcanzar una orientación deseada es necesario estudiar el sistema (4.7) bajo ambos lazos de control: velocidad y orientación. El sistema con la acción de los dos controladores se puede reescribir también en forma de singularmente perturbado al interpretar a la ganancias del segundo lazo como un nuevo parámetro de perturbación. Para establecer las ecuaciones que describen a tal sistema, primero recuerde que la entrada de control para el segundo control de orientación es

$$u_2 = -{}^jK_{p,2}e_\vartheta - {}^j\varepsilon_2 {}^jK_{I,2} \int e_\vartheta \quad (4.47)$$

⁵En [58] se muestra porque ésta es la forma de la función de Lyapunov, aquí simplemente nos limitaremos a usar este resultado.

donde $e_{\vartheta} = \vartheta - \vartheta_{ref}$ es el error de la orientación. Considere el sistema (4.3) bajo al acción de control (4.5). La ecuación a lazo cerrado está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= f(\sigma) - \Lambda(e_{\vartheta}; {}^j K_{p,2}) + \bar{B}(\rho) \\ \dot{e}_{\vartheta} &= T(e_{\vartheta})[P, Q, R]^T \\ \dot{\rho} &= -{}^j \varepsilon_2 {}^j K_{I,2} e_{\vartheta}\end{aligned}\tag{4.48}$$

donde $\sigma^T = [e_x, e_s]$, $f(\sigma)$ es el lado derecho de (4.29), $\bar{B}(\rho) \triangleq [{}^j B \rho, 0]^T$ y

$$\Lambda(e; {}^j K_{p,2}) \triangleq \begin{bmatrix} {}^j B {}^j K_{p,2} e_{\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}\tag{4.49}$$

Para probar que (4.48) tiene un punto de equilibrio único, considere ésta en estado estacionario como sigue:

$$0 = f(\sigma_{eq}) - \Lambda(e_{\vartheta,eq}; {}^j K_{p,2}) + \bar{B}(\rho_{eq})\tag{4.50}$$

$$0 = T(e_{\vartheta,eq})[P, Q, R]^T\tag{4.51}$$

$$0 = {}^j \varepsilon_2 {}^j K_{I,2} e_{\vartheta,eq}\tag{4.52}$$

De (4.52) se puede ver que $e_{\vartheta,eq} = 0$ ya que ${}^j K_{I,2}$ es de rango completo. Observe que $T(0) = 0$ y $\Lambda(0; {}^j K_{p,2}) = 0$. $\bar{B}(\rho_{eq})$ es una constante, así el punto de equilibrio se reduce lo siguiente

$$0 = f(\sigma_{eq}) + \bar{B}(\rho_{eq})\tag{4.53}$$

Observe que la variedad de puntos de equilibrio encontrada en (4.53) es exactamente igual al del caso anterior (avión con el primer lazo de control) pero ahora trasladado una constante $\bar{B}(\rho_{eq})$. Puede usarse entonces la Proposición 1, para establecer la unicidad del punto de equilibrio. En vista de lo anterior, existe un mapa uno a uno sobre todas las formas de la acción integral provenientes del error de orientación en estado estacionario en el punto de equilibrio siempre y cuando no ocurran singularidades en el mapa de orientación. Es decir por cada acción integral en estado estacionario existe uno y sólo un punto de equilibrio y viceversa. Finalmente observe que el punto de equilibrio es compartido por todos los modos.

Una vez establecida la unicidad del punto de equilibrio para el sistema de lazo cerrado bajo ambos lazos de control (control de velocidad y orientación), y de la misma manera que antes, es posible hacer el siguiente cambio de variables $\tilde{\sigma} \triangleq \sigma - \sigma_{eq}$, $\tilde{\rho} \triangleq \rho - \rho_{eq}$ y $\tilde{e}_{\vartheta} \triangleq e_{\vartheta} - e_{\vartheta,eq}$. Entonces el sistema a lazo cerrado puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\sigma}} &= f(\tilde{\sigma}) - \Lambda(\tilde{e}_\vartheta; {}^j K_{p,2}) + \bar{B}(\tilde{\rho}) \\
\dot{\tilde{e}}_\vartheta &= T(\tilde{e}_\vartheta)[P, Q, R]^T \\
\dot{\tilde{\rho}} &= -{}^j \varepsilon_2 {}^j K_{I,2} \tilde{e}_\vartheta
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Asuma $\tau' = {}^j \varepsilon_2 t$ como una nueva escala de tiempo, nuevamente redefine las variables en (4.54) como $\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}(\tau'/{}^j \varepsilon_2)$, $\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(\tau'/{}^j \varepsilon_2)$ y $\tilde{e}_\vartheta(t) = \tilde{e}_\vartheta(\tau'/{}^j \varepsilon_2)$. Considere $\tilde{\sigma}' \triangleq d\tilde{\sigma}/d\tau'$, $\tilde{\rho}' \triangleq d\tilde{\rho}/d\tau'$ y $\tilde{e}'_\vartheta \triangleq d\tilde{e}_\vartheta/d\tau'$. Las derivadas son ${}^j \varepsilon_2 \tilde{\sigma}' = {}^j \varepsilon_2 d\tilde{\sigma}/d\tau'$, ${}^j \varepsilon_2 \tilde{\rho}' = {}^j \varepsilon_2 d\tilde{\rho}/d\tau'$ y ${}^j \varepsilon_2 \tilde{e}'_\vartheta = {}^j \varepsilon_2 d\tilde{e}_\vartheta/d\tau'$. Entonces la ecuación (4.28) se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}
{}^j \varepsilon_2 \tilde{\sigma}' &= f(\tilde{\sigma}') - \Lambda(\tilde{e}'_\vartheta; {}^j K_{p,2}) + \bar{B}(\tilde{\rho}') \\
{}^j \varepsilon_2 \tilde{e}'_\vartheta &= T(\tilde{e}'_\vartheta)[P, Q, R]^T \\
\tilde{\rho}' &= -{}^j K_{I,2} \tilde{e}'_\vartheta
\end{aligned} \tag{4.55}$$

El sistema (4.55) tiene entonces, su punto de equilibrio en $(\tilde{\sigma}, \tilde{e}_\vartheta, \tilde{\rho}) = (0, 0, 0)$. Observe que $(\tilde{\sigma}, \tilde{e}_\vartheta, \tilde{\rho}) \rightarrow (0, 0, 0)$ cuando $\tau' \rightarrow \infty$ implica que $(\tilde{\sigma}, \tilde{e}_\vartheta, \tilde{\rho}) \rightarrow (0, 0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para valores suficientemente pequeños de ${}^j \varepsilon_1 > 0$ y ${}^j \varepsilon_2 > 0$ el sistema (4.55) está en la forma de un sistema singularmente perturbado, donde $\tilde{\sigma}'$ y $\tilde{\rho}'$ son la variable lenta y la variable rápida respectivamente.

El sistema reducido y de capa límite están dados como sigue respectivamente:

$$\tilde{\rho}' = -{}^j K_{I,2} {}^j K_{p,2}^{-1} \tilde{\rho} \tag{4.56}$$

$$\dot{\tilde{\sigma}} = f(\tilde{\sigma}) \tag{4.57}$$

La estabilidad del sistema de capa límite (4.57) se puede derivar de la estabilidad del sistema (4.28) ya que se trata del mismo sistema. Como ya vimos (4.28) es exponencialmente estable para $0 < {}^j \varepsilon_1 < \varepsilon_{max}$. Además tiene una función de Lyapunov ${}^j V_3 = -\tilde{\sigma}^T {}^j P_3 \tilde{\sigma}$ asociada a éste, (que es en realidad ${}^j V_3 = ({}^j V_1 + {}^j V_2)/{}^j \varepsilon_1$) tal que ${}^j \dot{V}_3 = -\tilde{\sigma}^T {}^j Q_3 \tilde{\sigma}$ con ${}^j Q_3$ definida positiva.

La estabilidad exponencial del sistema reducido (4.56) puede establecerse escogiendo adecuadamente el producto de ganancias ${}^j K_{I,2} {}^j K_{p,2}$ tal que este sea Hurwitz. Debido a lo anterior, existe una función de Lyapunov ${}^j V_4 = \tilde{\rho}^T {}^j P_4 \tilde{\rho}$ asociada a (4.56), tal que ${}^j \dot{V}_4 = -\tilde{\rho}^T {}^j Q_4 \tilde{\rho}$.

Las propiedades de estabilidad de los sistemas de capa límite y reducido, junto con la naturaleza de la función ${}^j \Phi(\tilde{z}, T_L)$ (Lipschitz) mediante la aplicación del Teorema 3 en [58] implica la existencia de un parámetro $\varepsilon_{max} > 0$ tal que para todo $0 < {}^j \varepsilon_2 < \varepsilon_{max}$ el origen del sistema (4.48) es asintóticamente estable, con una función de escalar

$${}^j V_{tot} = ({}^j V_3 + {}^j V_4)/{}^j \varepsilon_2 = ({}^j V_1 + {}^j V_2)/({}^j \varepsilon_1 {}^j \varepsilon_2) + {}^j V_4/{}^j \varepsilon_2 \tag{4.58}$$

□

Hasta aquí se ha probado la estabilidad del origen del sistema no lineal para cada modo de vuelo con retroalimentación dinámica lineal. Este hecho permite establecer que es posible regular la velocidad lineal V_T así como la orientación con ganancias integrales y proporcionales adecuadas.

4.1.3. Estabilidad del equilibrio en la unión de las particiones: Lema de estabilidad del sistema conmutado

Las condiciones del Lema 1 garantizan la estabilidad de cada modo de vuelo; sin embargo éstas no constituyen condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del sistema bajo conmutación. Para ello, es necesario estudiar la dinámica del sistema continuo por pedazos bajo la acción de eventos discretos de conmutación.

Como se explicó anteriormente, el criterio de conmutación puede depender del tiempo, del espacio o de ambos. En [59] se muestra como un criterio dependiente del estado puede transformarse en uno dependiente del tiempo y ambas admiten una descripción en términos de secuencias de conmutación como las discutidas al inicio de este capítulo. El criterio de conmutación lo define el diseñador del controlador y una vez en operación el piloto no tiene acceso o control sobre él, es por lo tanto una función a la cual no es posible manipular y se define en la etapa de diseño. Debido a lo anterior, es necesario encontrar las condiciones sobre el mecanismo de conmutación para que el sistema híbrido sea estable. Lo anterior motiva el planteamiento del Lema 2, el cual tiene como objetivo caracterizar un tiempo mínimo promedio de permanencia en cada sub-sistema que permita garantizar la estabilidad asintótica del origen.

Observación 12. *Para derivar el resultado del Lema 2 se utilizó el Teorema 3.2 en [59], el cual establece un tiempo promedio mínimo de residencia para garantizar estabilidad asintótica de un punto de equilibrio común. En sistemas híbridos conmutados es común encontrar condiciones de conmutación bajo las cuales aunque los sub-sistemas sean estables, el sistema híbrido es inestable. Es claro que si los sub-sistemas son estables (como lo establece el Lema 1), permanecer suficiente tiempo en cada uno de ellos garantizará la estabilidad. El resultado del Lema 2, establece una relación entre el tiempo de permanencia promedio mínimo en cada sub-sistema con las ganancias de retroalimentación. Esto es, usando ganancias más grandes, el sistema conmutado puede rechazar perturbaciones que*

impliquen tiempos de permanencia más pequeños. Ello representa una contribución importante de esta tesis.

La estructura del control híbrido se muestra nuevamente la Fig. 4.1 a manera de recordatorio.

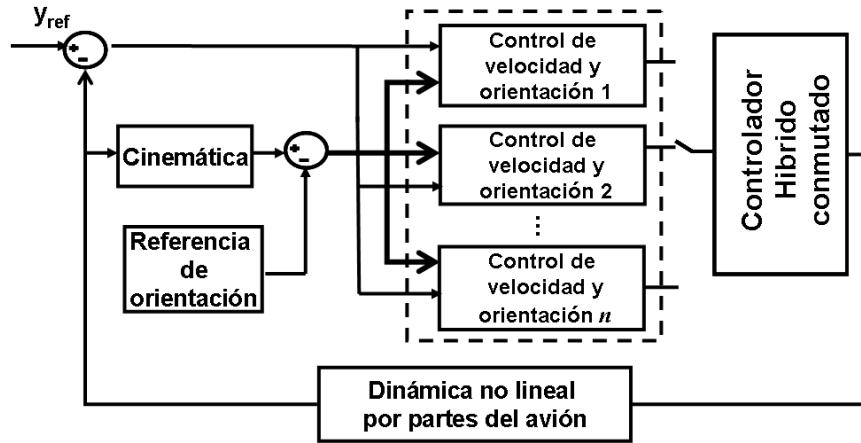


Figura 4.1: Esquema de control híbrido conmutado

Lema 2. Estabilidad del esquema de control Híbrido *El esquema de control híbrido mostrado en la Fig.4.1, garantiza estabilidad asintótica del origen de la familia de sistemas descritos por las ecuaciones en lazo cerrado (4.54), si las condiciones del Lema 1 se satisfacen para cada $j = 1 \dots s$ (donde s es el número total de modos) y si el tiempo de residencia promedio en el modo activo es $\tau > \tau_{min}$*

con $\tau_{min} \triangleq (\log(\mu)\lambda_{Pmax})/\lambda_{Qmin}$ donde $\mu \triangleq \max_j \left\{ \frac{1}{\|jP_{tot}\|} \right\} \lambda_{Pmax}$,

$$jP_{tot} \triangleq \text{diag} \left[\frac{jP_1}{j\epsilon_1^j \epsilon_2}, \frac{jF}{j\epsilon_1^j \epsilon_2}, \frac{jP_4}{j\epsilon_2} \right],$$

$$\lambda_{Pmax} \triangleq 3 \max_j \left\{ \frac{\lambda_{max}(jP_1)}{j\epsilon_1^j \epsilon_2}, \frac{\lambda_{max}(jF)}{j\epsilon_1^j \epsilon_2}, \frac{\lambda_{max}(jP_4)}{j\epsilon_2} \right\},$$

$$\lambda_{Qmin} \triangleq \min_j \left\{ \frac{\lambda_{min}({}^j Q_1)}{j \varepsilon_1^j \varepsilon_2}, \frac{\lambda_{min}(FD^{-1})^j L_h}{j \varepsilon_1^j \varepsilon_2}, \frac{\lambda_{min}({}^j Q_4)}{j \varepsilon_2} \right\}$$

Demostración. Aplicando el Teorema 3.2 en [59] para establecer condiciones de estabilidad del sistema híbrido, es necesario probar que para cada ${}^j V_{tot}$ existen dos funciones clase \mathcal{K}_∞ α_1 y α_2 , independientes de j , tal que

$$\alpha_1(\boldsymbol{\pi}) \leq {}^j V_{tot}(\boldsymbol{\pi}) \leq \alpha_2(\boldsymbol{\pi}) \quad (4.59)$$

donde $\boldsymbol{\pi}^T = [\tilde{z}, \tilde{w}, \tilde{\rho}]$.

Además es necesario establecer la existencia de las constantes κ y μ , tal que las siguientes condiciones se satisfacen

$${}^j \dot{V}_{tot} \leq -\kappa {}^j V_{tot} \quad (4.60)$$

$${}^j V_{tot} \leq \mu {}^i V_{tot} \quad \forall i, j \in J \quad (4.61)$$

Para mayor detalle sobre porque las condiciones del enunciado anterior deben satisfacerse ver Teorema 3.2 de [59]. Tenga en cuenta que en la prueba aquí presentada se considera que κ es equivalente a $2\lambda_0$ del Teorema 3.2 de [59].

Para continuar es necesario partir del hecho de que las condiciones del Lema 1 se satisfacen. Observe que, en este caso, para cada modo de vuelo existe una función de Lyapunov de la forma ${}^j V_{tot} = ({}^j V_3 + {}^j V_4)/j \varepsilon_2 = ({}^j V_1 + {}^j V_2)/(j \varepsilon_1^j \varepsilon_2) + {}^j V_4/j \varepsilon_2$. Observe que ésta tiene forma cuadrática por lo que la existencia de las funciones clase \mathcal{K} (4.59) se satisface de manera trivial. En otras palabras

$$\begin{aligned} {}^j V_{tot}(\boldsymbol{\pi}) &\leq \frac{\lambda_{max}({}^j P_1)}{j \varepsilon_1^j \varepsilon_2} \tilde{z}^T \tilde{z} + \frac{\lambda_{max}({}^j F)}{j \varepsilon_1^j \varepsilon_2} \tilde{w}^T \tilde{w} + \frac{\lambda_{max}({}^j P_4)}{j \varepsilon_2} \tilde{\rho}^T \tilde{\rho} \\ &\leq \lambda_{Pmax} \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\pi} \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde $\lambda_{Pmax} \triangleq 3 \max\left\{ \frac{\lambda_{max}({}^j P_1)}{j \varepsilon_1^j \varepsilon_2}, \frac{\lambda_{max}({}^j F)}{j \varepsilon_1^j \varepsilon_2}, \frac{\lambda_{max}({}^j P_4)}{j \varepsilon_2} \right\}$.

El mismo procedimiento se puede seguir para una cota inferior de la función de Lyapunov $\lambda_{Pmin} \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\pi} \leq {}^j V_{tot}(\boldsymbol{\pi})$ donde $\lambda_{Pmin} = 3 \min_j \left\{ \frac{\lambda_{min}({}^j P_1)}{j \varepsilon_1^j \varepsilon_2}, \frac{\lambda_{min}({}^j F)}{j \varepsilon_1^j \varepsilon_2}, \frac{\lambda_{min}({}^j P_4)}{j \varepsilon_2} \right\}$.

Por lo tanto es posible establecer que ${}^j \dot{V}_{tot} \leq -\lambda_{Qmin} \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\pi}$, aún más haciendo uso de (4.62), la derivada de la función de Lyapunov puede ser acotada como sigue:

$${}^j \dot{V}_{tot}(\boldsymbol{\pi}) \leq -\frac{\lambda_{Qmin}}{\lambda_{Pmax}} V_{tot}(\boldsymbol{\pi}) \quad (4.63)$$

Por lo tanto es posible establecer que ${}^j\dot{V}_{tot} \leq -\kappa {}^jV_{tot}$ con $\kappa = \lambda_{Qmin}/\lambda_{Pmax}$. Para establecer la existencia de μ , primero observe que en virtud de la desigualdad (4.62) es posible asegurar lo siguiente

$$\begin{aligned}
{}^jV_{tot}(\boldsymbol{\pi}) &\leq \lambda_{Pmax} \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\pi} \\
&\leq \lambda_{Pmax} \boldsymbol{\pi}^T [{}^iP_{tot}/\|{}^iP_{tot}\|] \boldsymbol{\pi} \\
&\leq (\lambda_{Pmax}/\|{}^iP_{tot}\|) (\boldsymbol{\pi}^T {}^iP_{tot} \boldsymbol{\pi}) \\
{}^jV_{tot}(\boldsymbol{\pi}) &\leq \max_i [\lambda_{Pmax}/\|{}^iP_{tot}\|] {}^iV_{tot}(\boldsymbol{\pi})
\end{aligned} \tag{4.64}$$

para $i, j \in J = \{1, 2, \dots\}$, tenga en cuenta que $\frac{{}^iP_{tot}}{\|{}^iP_{tot}\|}$ es una matriz unitaria. De (4.64), $\mu = \max_i [\lambda_{Pmax}/\|{}^iP_{tot}\|]$ y usando el Teorema 3.2 en [59] se puede establecer un tiempo de residencia promedio en términos de las constantes ${}^j\epsilon_1, {}^j\epsilon_2$ como:

$$\tau_{min} \triangleq \frac{\log(\mu) \lambda_{Pmax}}{\lambda_{Qmin}} \tag{4.65}$$

Entonces siempre que $\tau > \tau_{min}$ el origen del sistema es asintóticamente estable.

□

4.2. Resultados numéricos

Esta sección tiene como objetivo mostrar los resultados de las simulaciones numéricas que ilustran las cualidades del control estudiado en esta tesis.

Las simulaciones numéricas se realizan con un sistema continuo por pedazos. Cada *modo* está descrito por un sistema de ecuaciones de la forma (4.3) bajo la ley de control (4.5). El sistema por pedazos puede estar integrado por dos o más modos, de tal manera que éstos cubran el total de las condiciones de vuelo para el avión. En el caso de las simulaciones aquí presentadas, únicamente se consideran dos modos de vuelo por cada sistema por pedazos. Las simulaciones son implementadas en Simulink de Matlab. Las condiciones y parámetros empleados en las simulaciones así como modelo del avión programado en Simulink y su integración con la propuesta de control son incluidos en el Apéndice B.

Para una mejor interpretación de los resultados teóricos se evalúa el desempeño de la propuesta de control en estado transitorio y estacionario utilizando datos del avión F16. En el modelo se toma en cuenta la actualización de los parámetros como funciones de α , β , \bar{q} y el coeficiente de empuje para una partición determinada del dominio (es decir un modo de vuelo). Esta partición se puede calcular fuera de línea teniendo en cuenta las restricciones de seguridad y requisitos de rendimiento para una tarea determinada.

La discusión de los resultados numéricos se da con base en cinco pruebas representativas que ayudaran a explicar los resultados teóricos.

- (i) Efecto de K_p
- (ii) Efecto de K_i
- (iii) Efecto del tiempo de residencia (τ).
- (iv) Variaciones de la referencia V_T
- (v) Respuesta ante perturbaciones

Para desarrollar las simulaciones numéricas se toman en cuenta cuatro modos de vuelo que son

- (a) *Modo* 1: vuelo crucero a baja velocidad
- (b) *Modo* 2: vuelo crucero a alta velocidad
- (c) *Modo* 3: vuelta a nivel a baja velocidad
- (d) *Modo* 4: vuelta a nivel a alta velocidad

Las simulaciones se realizan en dos partes: (i) la primera parte comprende la conmutación *Modo* 1 y el *Modo* 2, y (ii) la segunda parte la conmutación entre el *Modo* 3 y el *Modo* 4. El criterio de conmutación se basa en las variaciones de la velocidad V_T . El límite de conmutación entre modos está dado por $L_{sw} = 325 \text{ ft/seg}$.

En la tarea de vuelo crucero, para valores de V_T menores al límite (*i.e.* $V_T < L_{sw}$) se activa el *Modo 1* (vuelo crucero a baja velocidad). Para valores de V_T mayores o iguales al límite (*i.e.* $V_T \geq L_{sw}$) se activa el *Modo 2* (vuelo crucero a alta velocidad). La evaluación de los resultados en las condiciones de vuelo crucero bajo la propuesta de control se asienta en el análisis de las siguientes variables: velocidad traslacional (V_T), las componentes de la velocidad angular (P, Q, R), que corresponden al primer lazo de control, la orientación que se da mediante las componentes del cuaternión $[\eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]$ y las entradas de control $[\delta_T, \delta_e, \delta_a, \delta_r]$.

En la tarea de vuelta a nivel, para valores de V_T menores al límite ($V_T < L_{sw}$) se activa el *Modo 3* (vuelta a nivel a baja velocidad). Para valores de V_T mayores o iguales al límite ($V_T \geq L_{sw}$) se activa el *Modo 4* (vuelo crucero a alta velocidad). La evaluación de los resultados en las condiciones de vuelta a nivel se basa en el análisis de la velocidad traslacional (V_T) y las componentes de la velocidad angular (P, Q, R) que corresponden al primer lazo de control. En estas condiciones no se tiene control sobre la orientación, ya que eso implicaría la ejecución de tareas para seguimiento de trayectorias lo cual sale de los alcances de los objetivos del presente proyecto. La interpretación física de la actuación del avión en condiciones de vuelta a nivel corresponde a un movimiento del avión sobre su eje axial con las alas a nivel.

El comportamiento de la orientación se analiza mediante las componentes del cuaternión. El cuaternión contiene dos partes distintas, una dada por la componente escalar η y otra dada por los componentes de la parte imaginaria $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ que pueden representarse como vectores con una dirección en el espacio, dirigidos a lo largo de los ejes x, y, z respectivamente. La interpretación física de la parte real y la parte imaginaria de un cuaternión adquieren sentido si se les considera de manera separada, pero no la yuxtaposición de los dos en un mismo ente matemático [60]. En este sentido el componente escalar η denotará el sentido de la rotación, siendo -1 si gira de acuerdo a rotación convencional para cada uno de los ejes del avión (ver Sección 2.2). Debido a lo anterior y de acuerdo a los modos de vuelo aquí abordados, la parte imaginaria adquiere mayor relevancia para el análisis de resultados por lo que la componente escalar no se muestra en los resultados.

4.2.1. Efecto de ganancia proporcional

En esta sección se muestra el desempeño del controlador ante variaciones de las ganancias proporcionales mediante su impacto sobre las variables de control, primero bajo conmutación entre el *Modo 1* y *Modo 2* y luego bajo conmutación entre el *Modo 3* y *Modo 4*.

Cada modo está dotado con dos controladores jPI_i , recordando que j denota el modo e i denota el lazo de control. El jPI_1 controla el seguimiento de velocidad y estabilización de cuerpo y el jPI_2 controla la orientación. Cada jPI_i está dotado de una ganancia proporcional $^jK_{p,i}$ y una ganancia integral $^jK_{I,i}$, resultado de la sintonización para cada modo. Para efectos de esta prueba se considera el sistema bajo acción puramente proporcional es decir $^jK_{I,i} \equiv 0$.

Primero se considera la conmutación entre dos condiciones de velocidad crucero. La primera condición es vuelo crucero a baja velocidad (Modo1) y la segunda vuelo crucero a alta velocidad (Modo2). Para la vuelta a nivel se considera conmutación entre dos condiciones, la primera es una condición de vuelo a nivel a baja velocidad (Modo3) y la segunda vuelo a nivel a alta velocidad (Modo4).

Para realizar variaciones sobre $^jK_{p,i}$, estas serán parametrizadas mediante una constante $^j\gamma$ que ayudará a incrementar o decrementar su valor. A cada $^jK_{p,i}$ le corresponde una constante tal que

- $^1\gamma$. Constante para $^1K_{p,1}$ (control de velocidad en el Modo 1).
- $^1\gamma$. Constante para $^1K_{p,2}$ (control de orientación en el Modo 1).
- $^2\gamma$. Constante para $^2K_{p,1}$ (control de velocidad en el Modo 2).
- $^2\gamma$. Constante para $^2K_{p,2}$ (control de orientación en el Modo 2).
- $^3\gamma$. Constante para $^1K_{p,1}$ (control de velocidad en el Modo 3).
- $^4\gamma$. Constante para $^2K_{p,1}$ (control de velocidad en el Modo 4).

Todas las constantes $^j\gamma$ crecen en la misma medida, es decir, si $^j\gamma = 1$ entonces $\{^1\gamma = 1, ^2\gamma = 1\}$. Si $^j\gamma = 3$, entonces $\{^1\gamma = 3, ^2\gamma = 3\}$.

Las gráficas referentes a la velocidad angular muestran sus tres componentes (P, Q, R) dadas en *rad/seg*. Las gráficas relativas al comportamiento de la velocidad traslacional (V_T) se dan en *ft/seg*. Las gráficas que muestran las componentes de la orientación del avión son adimensionales. Las gráficas que muestran las entradas de control, muestran la deflexión de $[\delta_e, \delta_a, \delta_r]$ en grados y δ_T en (%).

En la tarea de velocidad crucero se desea que la velocidad angular alcance una referencia deseada dada por ($P = Q = R = 0$), una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo, debido a que es también la señal de conmutación y finalmente se desea que las componentes de la orientación ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$) y por tanto la componente constante permanecerá siempre en $\eta = -1$,

como se explicó previamente. En la tarea de vuelta a nivel se desea que la velocidad angular alcance una referencia deseada dada por ($P = Q = 0$) y $R = R_{REF}$, una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo ya que también es la señal de conmutación. Finalmente ya que no se tiene control sobre la orientación, no se presentarán datos relativos a las componentes de la actitud. Para las pruebas aquí presentadas se considerara que $R_{REF} = 6$.

A continuación se discutirán los efectos de la variación de la ganancia proporcional con base en las gráficas que muestran el desempeño de la velocidad angular, la velocidad traslacional, las variables de control y los componentes de la orientación en el caso correspondiente.

Efecto de ganancia proporcional para conmutación en vuelo crucero

La Fig.4.2 y la Fig.4.3 muestran el desempeño de la velocidad angular, velocidad traslacional, orientación y entradas de control para una ganancias proporcionales. Estas simulaciones son realizadas bajo ganancia puramente proporcional dada como ${}^jK_{p,i}$, ${}^jK_{p,i}$ y ${}^jK_{I,i} \equiv 0$. La interpretación física de la tarea que realiza el avión es vuelo recto y nivelado con cambios de velocidad en su recorrido tal que se acelera y desacelera mientras avanza en línea recta.

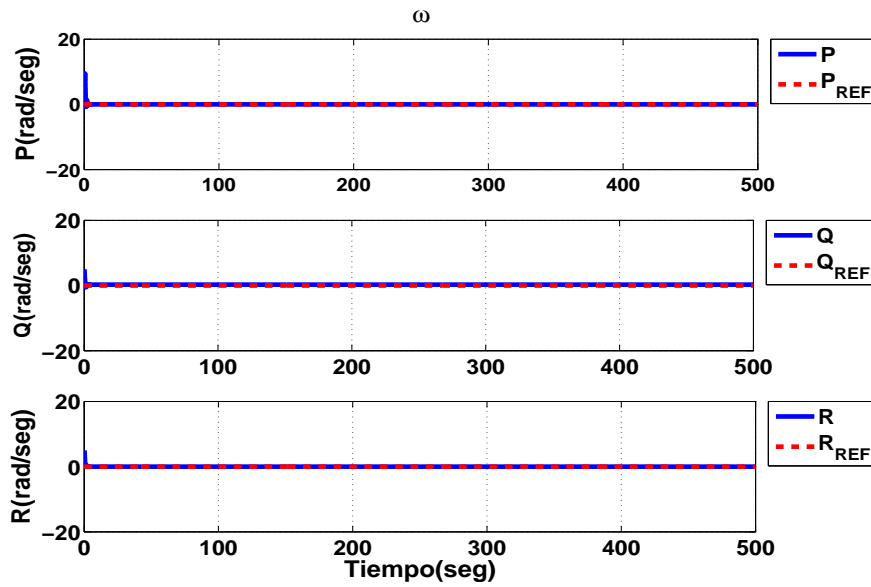
La Figuras 4.2 y 4.3 muestran el efecto de una ganancia dada por $0,5 * {}^jK_{I,i}$, que es considera en un rango de ganancias proporcionales bajas. En la figura 4.2(a) se pueden ver las componentes de la velocidad angular, las cuales parten de una condición inicial de $5rad/seg$ y llegan a su referencia sin ningún problema. Mientras que la velocidad traslacional V_T mostrada en la figura 4.2(b) la cual parte de una condición inicial de $310ft/seg$, no logra alcanzar la velocidad de referencia ($P = Q = R = 0$) debido al error en estado estacionario. En la Figura 4.3(a) es posible ver que la orientación del avión permanece constante y llega a su referencia sin ningún problema para las componentes ϵ_1 y ϵ_2 , sin embargo la componente ϵ_3 oscila alrededor de la referencia. El efecto sobre ϵ_3 es consecuencia de singularidades en el mapa entre las componentes de la aceleración angular y las componentes de las derivadas del cuaternión, efecto que no se puede eliminar únicamente bajo acción proporcional. En la Fig.4.3(b) se puede ver que las entradas de control no tiene saturación, así que su respuesta va acorde a los requerimientos de la dinámica del sistema.

Los valores de las ganancias proporcionales ${}^jK_{p,i}$ son resultado de la sintonización y tienen un valor fijo en cada partición Ω_j (ver valores numéricos en el Apéndice B de esta tesis). El rango de baja ganancia proporcional con ${}^j\bar{K}_{p,i} = {}^j\gamma {}^jK_{p,i}$ se considera cuando ${}^j\gamma$ oscila entre $0 - 1$, lo cual se puede interpretar como rangos menores al valor fijo de la ganancia proporcional. El rango de ganancia proporcional intermedia se considera cuando ${}^j\gamma$ oscila entre $1 - 2$, es decir del valor fijo de la ganancia proporcional hasta el doble de ésta (Rango de ganancia óptima). Finalmente el

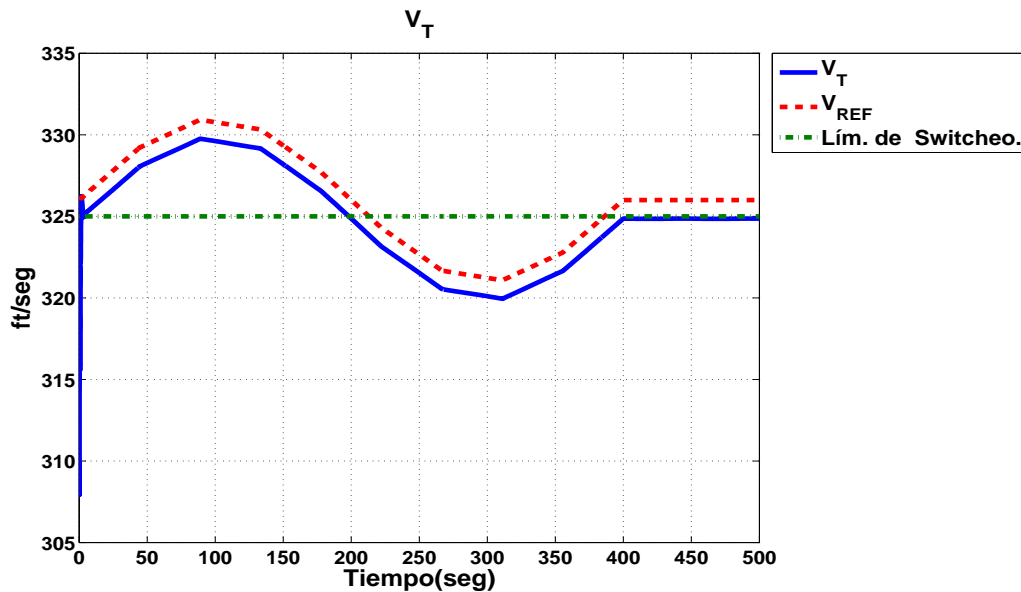
rango de ganancia proporcional alta comprende valores de $j\gamma$ mayores al doble de la ganancia base $^jK_{p,i}$ fija.

Los efectos de incrementar las ganancias proporcionales gradualmente no son mostrados, sin embargo como se espera, conforme la ganancia proporcional incrementa el sesgo de error disminuye hasta un límite en el cual se pierde estabilidad. Por otro lado es posible encontrar un rango de ganancias proporcionales que proveen un buen desempeño y permiten alcanzar las referencia propuestas. Del análisis de resultados se pudo observar que el margen de variación entre una ganancia que asegure la estabilidad del sistema y una que no lo haga es pequeño. Lo anterior motiva la incorporación de ganancias integrales en los controladores que permitan ampliar el margen de estabilidad bajo acción proporcional, disminuyendo el valor de las ganancias proporcionales sin inducir un mal desempeño en el sistema.

SÓLO GANANCIA PROPORCIONAL EN VELOCIDAD CRUCERO



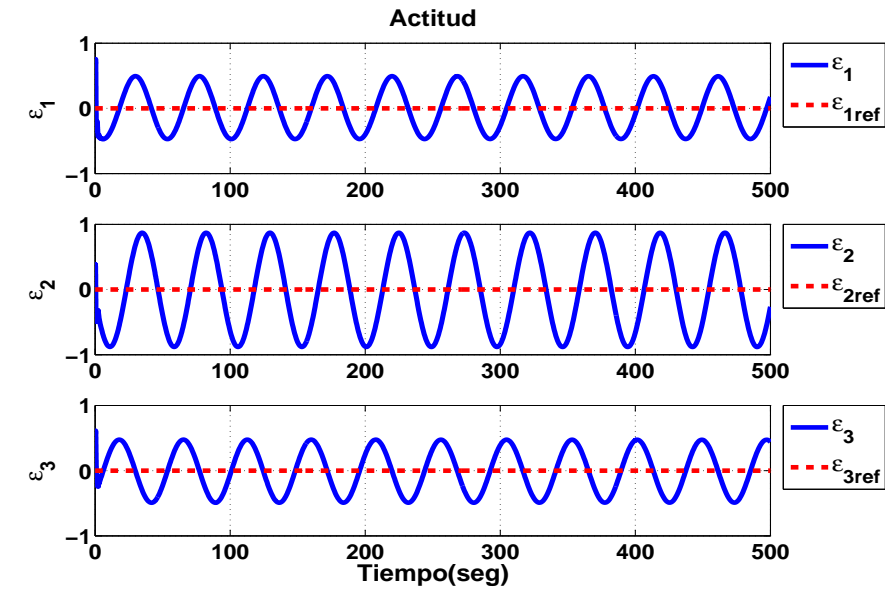
(a)



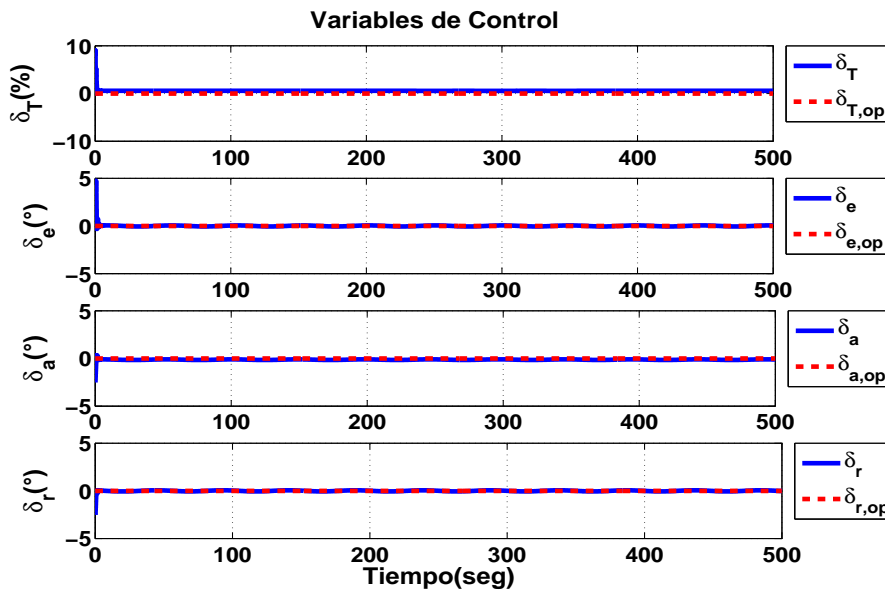
(b)

Figura 4.2: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Con ${}^jK_{I,i} = 0$ se evalúan efectos de variaciones en ${}^jK_{p,i}$ parametrizada con ${}^j\gamma = 0,5$. Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, el primero en 210 *seg* y el segundo en 390 *seg*. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . V_T parte de una condición inicial de 310 *ft/seg* y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 *rad/seg*.

SÓLO GANANCIA PROPORCIONAL EN VELOCIDAD CRUCERO



(a)



(b)

Figura 4.3: Dinámica de (a) la actitud y (b) las entradas de control, en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Con ${}^jK_{I,i} = 0$ se evalúan efectos de variaciones en ${}^jK_{p,i}$ parametrizada con ${}^j\gamma = 0,5$. Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, el primero en 210 *seg* y el segundo en 390 *seg*. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Cada componente de la actitud tiene una condición inicial de 0.5.

Efecto de ganancia proporcional para conmutación en vuelta a nivel

La Fig.4.4 y la Fig.4.5 muestran el desempeño de la velocidad angular, velocidad traslacional y las entradas de control para una ganancia proporcional. Estas simulaciones son realizadas bajo ganancia puramente proporcional dada como ${}^jK_{p,1}$, ${}^jK_{p,1}$ y ${}^jK_{I,i} \equiv 0$. Como se dijo antes, en este modo de vuelo no se tiene control sobre la orientación. La interpretación física de la tarea que realiza el avión es un movimiento sobre su eje axial con las alas a nivel con cambios de velocidad al efectuar la tarea tal que se acelera y desacelera mientras gira sobre su eje axial.

La Fig.4.4 y la Fig.4.5 muestran el efecto de una ganancia dada por $0,5 * {}^jK_{I,1}$, considerada en el rango de ganancias proporcionales bajas. En la figura 4.4(a) se pueden ver que las componentes de la velocidad angular no alcanzan la referencia propuesta ($P = Q = 0$ y $Q = 6rad/seg$). Cada componente de la velocidad angular parte de una condición inicial de $5rad/seg$. La velocidad traslacional V_T mostrada en la figura 4.4(b), no logra alcanzar la velocidad de referencia debido al error en estado estacionario. La Fig.4.5 muestra que la respuesta va acorde a los requerimientos de la dinámica del sistema. Es importante destacar que las entradas de control no están limitadas.

Los efectos de incrementar las ganancias proporcionales gradualmente no son mostrados, sin embargo como se espera, conforme la ganancia proporcional incrementa el sesgo de error disminuye hasta un límite en el cual se pierde estabilidad. Por otro lado es posible encontrar un rango de ganancias proporcionales que proveen un buen desempeño y permiten alcanzar las referencias propuestas. Igual que en el modo de vuelta a nivel se pudo observar que el margen de variación entre una ganancia que asegure la estabilidad del sistema y una que no lo haga es pequeño. Lo anterior motiva la incorporación de ganancias integrales en los controladores que permitan ampliar el margen de estabilidad bajo acción proporcional, disminuyendo el valor de las ganancias proporcionales sin inducir un mal desempeño en el sistema.

Los valores de las ganancias proporcionales ${}^jK_{p,i}$ son resultado de la sintonización y tienen un valor fijo en cada partición Ω_j (ver valores numéricos en el Apéndice B de esta tesis). El rango de baja ganancia proporcional con ${}^j\bar{K}_{p,i} = {}^j\gamma {}^jK_{p,i}$ se considera cuando ${}^j\gamma$ oscila entre $0 - 1$, lo cual se puede interpretar como rangos menores al valor fijo de la ganancia proporcional. El rango de ganancia proporcional intermedia se considera cuando ${}^j\gamma$ oscila entre $1 - 2$, es decir del valor fijo de la ganancia proporcional hasta el doble de ésta (Rango de ganancia óptima). Finalmente el rango de ganancia proporcional alta comprende valores de ${}^j\gamma$ mayores al doble de la ganancia base ${}^jK_{p,i}$ fija.

SÓLO GANANCIA PROPORCIONAL EN VUELTA A NIVEL

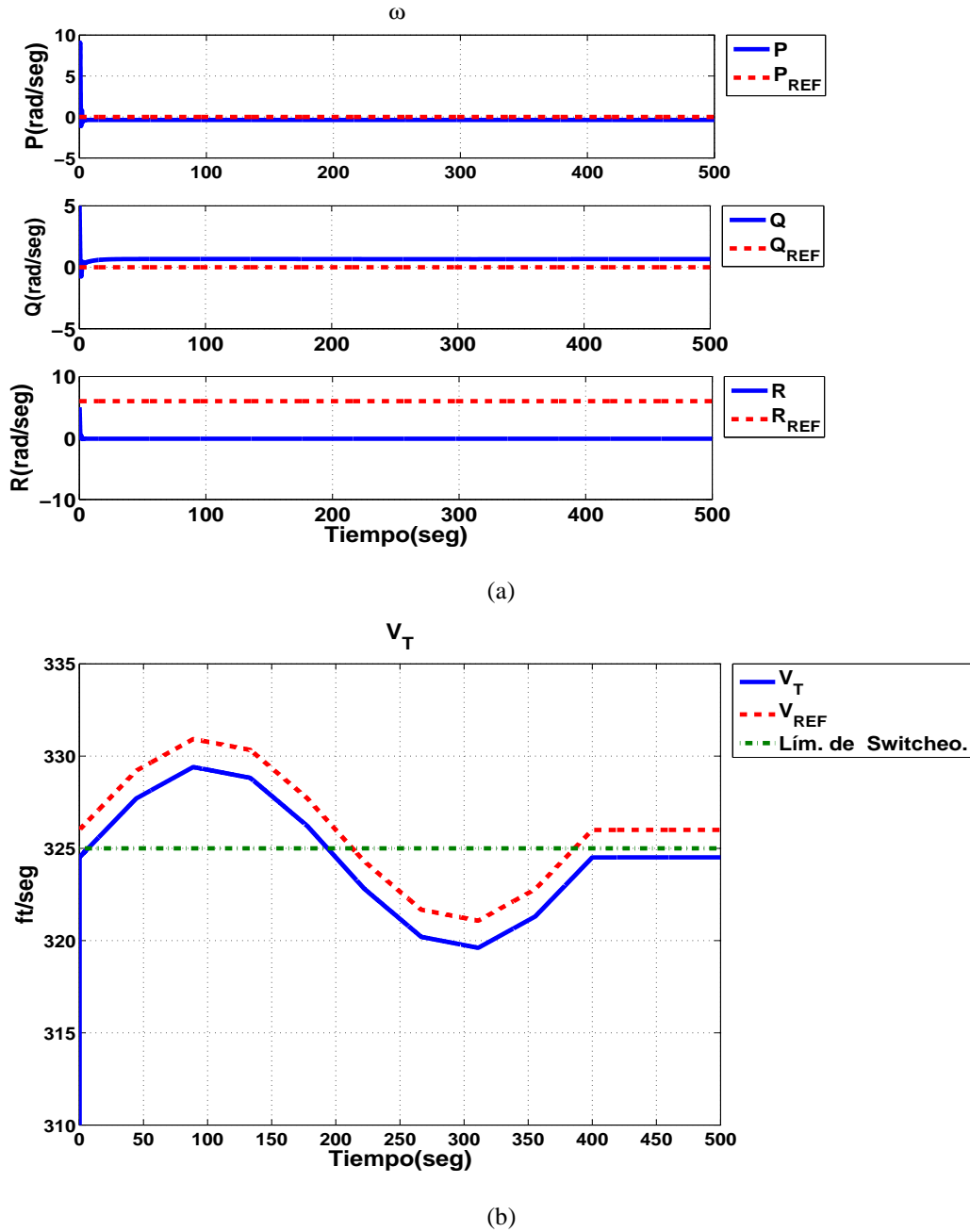


Figura 4.4: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Con $^jK_{I,i} = 0$ se evalúan efectos de variaciones en $^jK_{p,i}$ parametrizada con $^j\gamma = 0,5$. Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, el primero en 210 *seg* y el segundo en 390 *seg*. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . V_T parte de una condición inicial de 310 *ft/seg* y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 *rad/seg*.

SÓLO GANANCIA PROPORCIONAL EN VUELTA A NIVEL

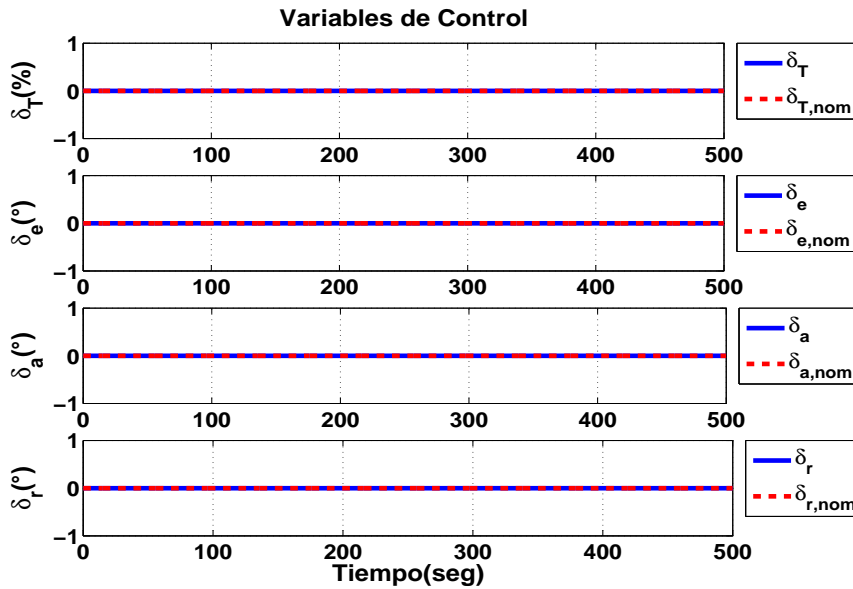


Figura 4.5: Dinámica las entradas de control, en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Con ${}^jK_{I,i} = 0$ se evalúan efectos de variaciones en ${}^jK_{p,i}$ parametrizada con ${}^j\gamma = 0,5$. Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, el primero en 210 *seg* y el segundo en 390 *seg*. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Cada componente de la actitud tiene una condición inicial de 0.5.

4.2.2. Efecto de ganancia integral con ganancia proporcional fija

En esta sección se muestran los efectos de la ganancia integrales mediante su impacto sobre las variables de control, primero bajo conmutación entre el *Modo 1* y *Modo 2* y luego bajo conmutación entre el *Modo 3* y *Modo 4*.

Cada modo está dotado con dos controladores jPI_i , recordando que j denota el modo e i denota el lazo de control. El jPI_1 controla el seguimiento de velocidad y estabilización de cuerpo y el jPI_2 controla la orientación. Cada jPI_i está dotado de una ganancia proporcional ${}^jK_{p,i}$ y una ganancia integral ${}^jK_{I,i}$, resultado de la sintonización para cada modo. Para efectos de esta prueba se considera el sistema bajo acción proporcional e integral, con una ganancia proporcional fija (${}^jK_{p,i} = fija$) que garantice la estabilidad en todos los casos.

Primero se considera la conmutación entre dos condiciones de velocidad crucero. La primera condición es vuelo crucero a baja velocidad (*Modo1*) y la segunda vuelo crucero a alta velocidad(*Modo2*). Para la vuelta a nivel se considera conmutación entre dos condiciones, la primera es una condición de vuelo a nivel a baja velocidad

(Modo3) y la segunda vuelo a nivel a alta velocidad(Modo4).

Para realizar variaciones sobre ${}^jK_{I,i}$, estas serán parametrizadas mediante una constante ${}^1\varepsilon_i$ que ayudará a incrementar o decrementar su valor. A cada ${}^jK_{I,i}$ le corresponde una constante tal que

${}^1\varepsilon_1$. Constante para ${}^1K_{I,1}$ (control de velocidad en el Modo 1).

${}^1\varepsilon_2$. Constante para ${}^1K_{I,2}$ (control de orientación en el Modo 1).

${}^2\varepsilon_1$. Constante para ${}^2K_{I,1}$ (control de velocidad en el Modo 2).

${}^2\varepsilon_2$. Constante para ${}^2K_{I,2}$ (control de orientación en el Modo 2).

${}^3\varepsilon_1$. Constante para ${}^3K_{I,1}$ (control de velocidad en el Modo 3).

${}^4\varepsilon_1$. Constante para ${}^4K_{I,1}$ (control de velocidad en el Modo 4).

Todas las constantes ${}^j\varepsilon_{p,i}$ crecen en la misma medida, es decir que si ${}^j\varepsilon_p, j = 1$, entonces $\{{}^1\varepsilon_{I,1} = 1, {}^1\varepsilon_{I,2} = 1, {}^2\varepsilon_{I,1} = 1, {}^2\varepsilon_{I,2} = 1\}$. Si ${}^j\varepsilon_p, j = 3$, entonces $\{{}^3\varepsilon_{I,1} = 3, {}^4\varepsilon_{I,1} = 3\}$.

Las gráficas referentes a la velocidad angular muestran sus tres componentes (P, Q, R) dadas en *rad/seg*. Las gráficas relativas al comportamiento de la velocidad traslacional (V_T) se dan en *ft/seg*. Las gráficas que muestran las componentes de la orientación del avión son adimensionales. Las gráficas que muestran las entradas de control , muestran la deflexión de $[\delta_e, \delta_a, \delta_r]$ en grados y δ_T en (%).

En la tarea de velocidad crucero se desea que la velocidad angular alcance una referencia deseada dada por ($P = Q = R = 0$), una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo, debido a que es también la señal de conmutación y finalmente se desea que las componentes de la orientación ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$) y por tanto la componente constante permanecerá siempre en $\eta = -1$, como se explicó previamente.

En la tarea de vuelta a nivel se desea que la velocidad angular alcance una referencia deseada dada por ($P = Q = 0$) y $R = R_{REF}$, una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo ya que también es la señal de conmutación. Finalmente ya que para este caso no se tiene control sobre la orientación, no se presentarán datos relativos a las componentes de la actitud. Para las pruebas aquí presentadas se considera que $R_{REF} = 6$.

A continuación se discutirán los efectos de la variación de la ganancia integral con base en las gráficas que muestran el desempeño de la velocidad angular, la velocidad traslacional, las variables de control y los componentes de la orientación para el caso correspondiente.

Efecto de ganancia integral para conmutación en vuelo crucero con ganancia proporcional fija

La Fig.4.6 y la Fig.4.7 muestran el desempeño de la velocidad angular, velocidad traslacional, orientación y entradas de control para un valor de ganancias integral. Estas simulaciones son realizadas bajo acción proporcional e integral. La ganancia proporcional dada como ${}^jK_{p,i} = \text{fija}$ y una ganancia integral ${}^j\epsilon_i {}^jK_{I,i}$. En este caso la interpretación física de la tarea que realiza el avión es vuelo recto y nivelado con cambios de velocidad en su recorrido tal que se acelera y desacelera mientras avanza en línea recta.

Las Figuras 4.6 y 4.7 muestran el efecto de una ganancia dada por $0,1 * {}^jK_{I,i}$. En la Fig.4.6(a) se pueden ver las componentes de la velocidad angular, las cuales llegan a su referencia ($P = Q = R = 0$) con un pequeño sesgo. Cada componente de la velocidad angular parte de una condición inicial de $5\text{rad}/\text{seg}$.

La velocidad traslacional V_T mostrada en la Fig.4.6(b), no presenta ninguna dificultad para alcanzar la velocidad de referencia. Mientras que en la Fig. 4.7(a) es posible ver que la orientación del avión alcanza la posición de referencia lentamente para las tres componentes de la orientación. En la Fig.4.7(b) se puede ver que la respuesta de las variables de control va acorde a los requerimientos de la dinámica del sistema, ya que estas variables no tiene saturación.

Los efectos de incrementar la ganancia integral gradualmente no son mostrados. Sin embargo, es posible intuir que si la ganancia integral sigue creciendo se pierde estabilidad pese a que no se muestran simulaciones en esta sección.

Los valores de las ganancias integrales ${}^jK_{I,i}$ son resultado de la sintonización y tienen un valor fijo en cada partición Ω_j (ver valores numéricos en el Apéndice B de esta tesis). El rango de baja ganancia integral se considera cuando ${}^j\epsilon_i$ oscila entre $0 - 1$, lo cual se puede interpretar como rangos menores al valor fijo de la ganancia integral. El rango de ganancia integral intermedia se considera cuando ${}^j\epsilon_i$ oscila entre $1 - 4$, es decir del valor fijo de la ganancia proporcional hasta el cuádruple de ésta (Rango de ganancia óptima). Finalmente el rango de ganancia integral alta comprende valores de ganancias mayores al cuádruple de la ganancia base ${}^jK_{I,i}$ fija.

GANANCIA PROPORCIONAL + GANANCIA INTEGRAL EN VELOCIDAD CRUCERO

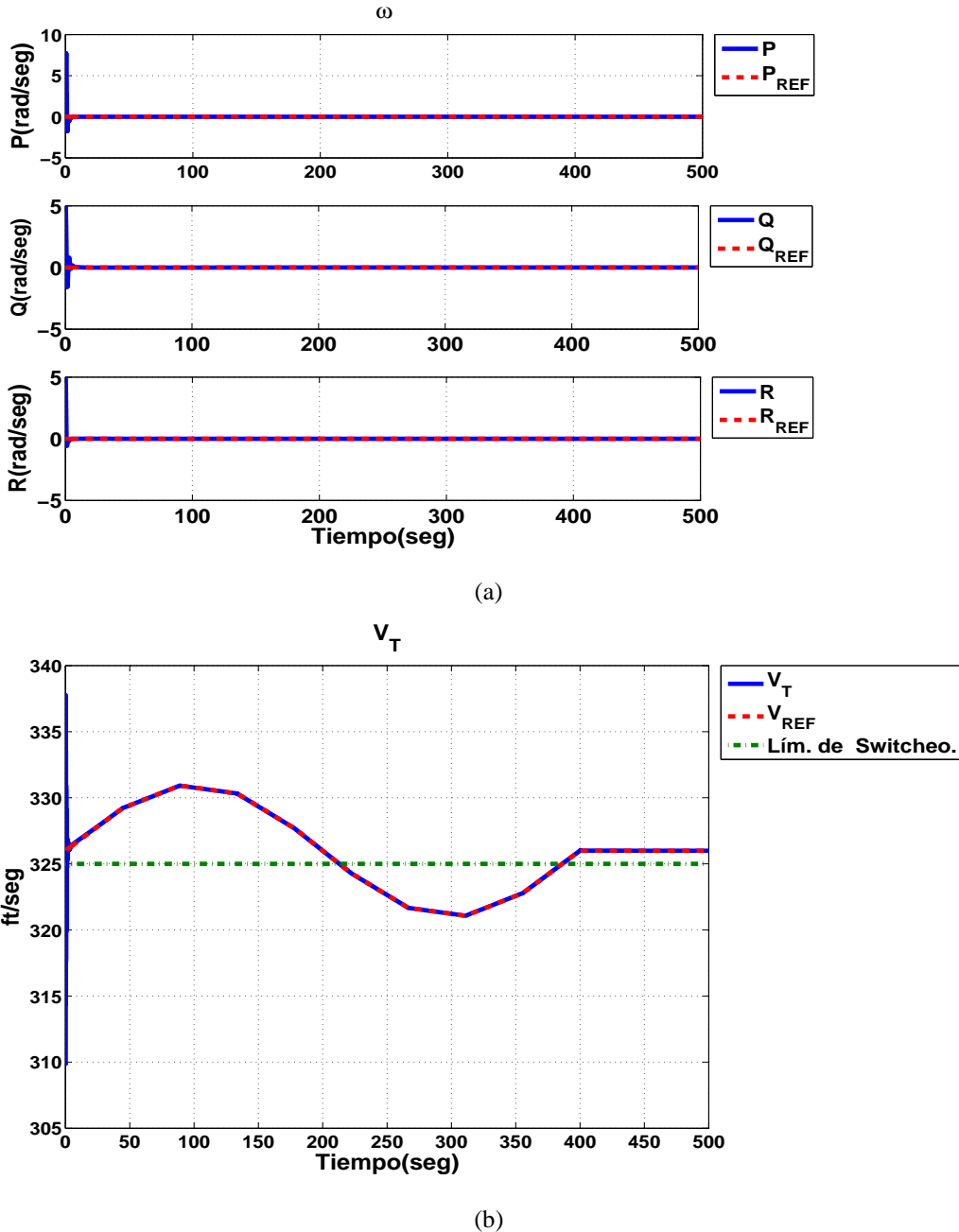


Figura 4.6: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Con ${}^jK_{p,i}$ = fija se evalúan efectos de variaciones en ${}^jK_{I,i}$ parametrizada con ${}^j\epsilon_{I,i} = \{{}^1\epsilon_{I,1} = 0,1, {}^1\epsilon_{I,2} = 0,1, {}^2\epsilon_{I,1} = 0,1, {}^2\epsilon_{I,2} = 0,1\}$. Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, el primero en 210 seg y el segundo en 390 seg. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg.

GANANCIA PROPORCIONAL + GANANCIA INTEGRAL EN VELOCIDAD CRUCERO

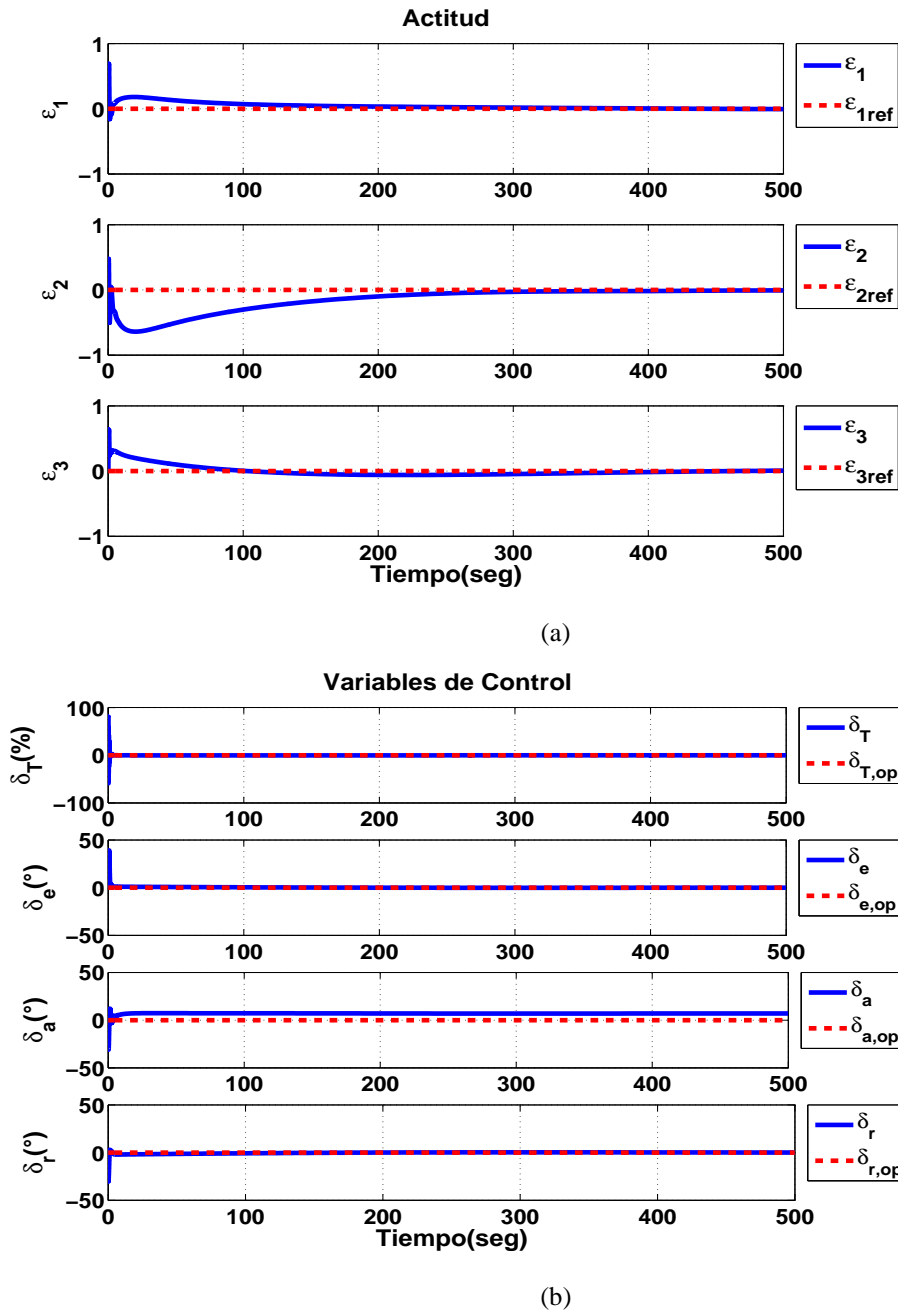


Figura 4.7: Dinámica de (a) la actitud y (b) las entradas de control, en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Con ${}^jK_{p,i} = fija$ se evalúan efectos de variaciones en ${}^jK_{I,i}$ parametrizada con ${}^j\epsilon_{I,i} = \{{}^1\epsilon_{I,1} = 0,1, {}^1\epsilon_{I,2} = 0,1, {}^2\epsilon_{I,1} = 0,1, {}^2\epsilon_{I,2} = 0,1\}$. Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, el primero en 210 *seg* y el segundo en 390 *seg*. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Cada componente de la actitud tiene una condición inicial de 0.5.

Efecto de ganancia integral para conmutación en vuelta a nivel con ganancia proporcional fija

La Fig.4.8 y la Fig.4.9 muestran el desempeño de la velocidad angular, velocidad traslacional y variables de control para una ganancia integral. Estas simulaciones son realizadas bajo la acción de una ganancia integral dada como ${}^j\varepsilon_1 {}^jK_{I,1}$ y una ganancia proporcional ${}^jK_{p,i} = \text{fija}$. En este caso la interpretación física de la tarea que realiza el avión es una movimiento sobre su eje axial con las alas a nivel con cambios de velocidad al efectuar la tarea tal que se acelera y desacelera mientras gira sobre su eje axial.

Las Figuras 4.8 y 4.9 muestran los efectos de una ganancia dada por $1 * {}^jK_{I,i}$. En la figura 4.8(a) se pueden ver las componentes de la velocidad angular, las cuales llegan a su referencia. La velocidad traslacional V_T mostrada en la figura 4.8(b), no presenta ninguna dificultad para alcanzar la velocidad de referencia. En la Fig.4.9 se puede ver que las entradas de control no tiene saturación, así que su respuesta va acorde a los requerimientos de la dinámica del sistema.

Al igual que antes, los efectos de incrementar la ganancia integral gradualmente no son mostrados. Sin embargo, es posible intuir que si la ganancia integral sigue creciendo se pierde estabilidad pese a que no se muestran simulaciones en esta sección.

Los valores de las ganancias integrales ${}^jK_{I,i}$ son resultado de la sintonización y tienen un valor fijo en cada partición Ω_j (ver valores numéricos en el Apéndice B de esta tesis). El rango de baja ganancia integral se considera cuando ${}^j\varepsilon_1$ oscila entre $0 - 1$, lo cual se puede interpretar como rangos menores al valor fijo de la ganancia integral. El rango de ganancia integral intermedia se considera cuando ${}^j\varepsilon_1$ oscila entre $1 - 4$, es decir del valor fijo de la ganancia proporcional hasta el cuádruple de ésta (Rango de ganancia óptima). Finalmente el rango de ganancia integral alta comprende valores de ganancias mayores al cuádruple de la ganancia base ${}^jK_{I,1}$ fija.

GANANCIA PROPORCIONAL + GANANCIA INTEGRAL EN VUELTA A NIVEL

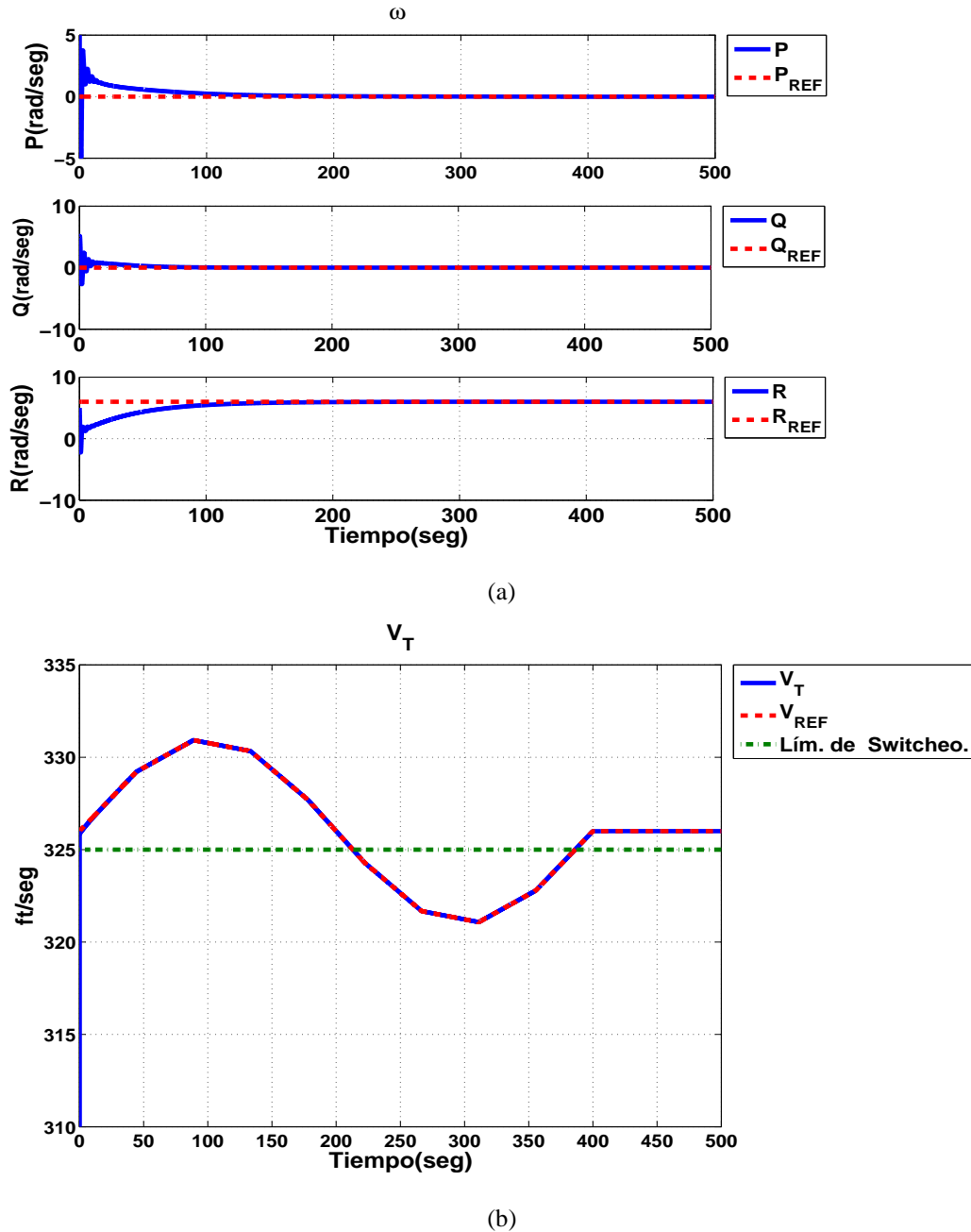


Figura 4.8: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelta a nivel en baja y alta velocidad. Con ${}^jK_{p,i}$ = fija se evalúan efectos de variaciones en ${}^jK_{I,i}$ parametrizada con ${}^j\varepsilon_{I,i} = \{{}^1\varepsilon_{I,1} = 1, {}^1\varepsilon_{I,2} = 1, {}^2\varepsilon_{I,1} = 1, {}^2\varepsilon_{I,2} = 1\}$. Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, el primero en 210 seg y el segundo en 390 seg. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg.

GANANCIA PROPORCIONAL + GANANCIA INTEGRAL EN EN VUELTA A NIVEL

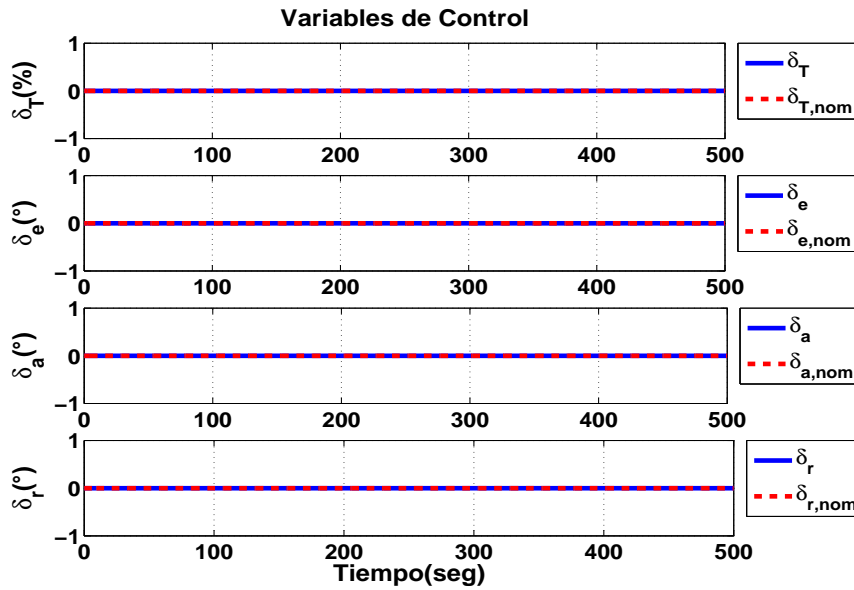


Figura 4.9: Dinámica las entradas de control, en condiciones de vuelta a nivel en baja y alta velocidad. Con ${}^jK_{p,i} = fija$ se evalúan efectos de variaciones en ${}^jK_{I,i}$ parametrizada con ${}^j\epsilon_{I,i} = \{{}^1\epsilon_{I,1} = 1, {}^1\epsilon_{I,2} = 1, {}^2\epsilon_{I,1} = 1, {}^2\epsilon_{I,2} = 1\}$. Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, el primero en 210 *seg* y el segundo en 390 *seg*. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Cada componente de la actitud tiene una condición inicial de 0.5.

4.2.3. Efecto de variaciones del tiempo de residencia en la conmutación

En esta sección se muestra el desempeño del controlador ante variaciones en el tiempo de residencia en cada modo, mediante su impacto sobre las variables de control, bajo conmutación entre el *Modo 1* y *Modo 2* y bajo conmutación entre el *Modo 3* y *Modo 4*. Para efectos de esta prueba se considera el sistema bajo acción proporcional e integral, con ganancias proporcionales e integrales fijas (${}^jK_{p,i} = fija$ y ${}^jK_{I,i} = fija$) que garantizan la estabilidad en todos los casos.

Como se explico antes, el tiempo de residencia depende de la parametrización de las ganancias integrales de cada lazo en cada modo. De acuerdo a la parametrización para la sintonización el tiempo de residencia mínimo es de $\tau = 10$.

Las gráficas referentes a la velocidad angular muestran sus tres componentes (P, Q, R) dadas en *rad/seg*. Las gráficas relativas al comportamiento de la velocidad traslacional (V_T) se dan en *ft/seg*. Las gráficas que muestran las componentes de la orientación del avión son adimensionales. Las gráficas que muestran las entradas de control, muestran la deflexión de $[\delta_e, \delta_a, \delta_r]$ en grados y δ_T en (%).

En la tarea de velocidad crucero se desea que la velocidad angular alcance una referencia deseada dada por ($P = Q = R = 0$), una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo, debido a que es también la señal de conmutación y finalmente se desea que las componentes de la orientación ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$) y por tanto la componente constante permanecerá siempre en $\eta = -1$, como se explicó previamente.

En la tarea de vuelta a nivel se desea que la velocidad angular alcance una referencia deseada dada por ($P = Q = 0$) y $R = R_{REF}$, una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo ya que también es la señal de conmutación. Finalmente ya que para este caso no se tiene control sobre la orientación, no se presentarán datos relativos a las componentes de la actitud. Para las pruebas aquí presentadas se considera que $R_{REF} = 6$.

A continuación se discutirán los efectos de variaciones en el tiempo de residencia con base en las gráficas que muestran el desempeño de la velocidad angular, variables de control, velocidad traslacional y los componentes de la orientación en el caso correspondiente.

Efecto de variaciones del tiempo de residencia para conmutación en vuelo crucero

Las Figuras 4.10-4.13, muestran el desempeño de la velocidad angular, velocidad traslacional, orientación y variables de control para dos diferentes tiempos de residencia. En estas simulaciones se considera la acción de ganancia integral como ${}^jK_{p,i} = fija$ y la ganancia proporcional ${}^jK_{I,i} = fija$. En este caso la interpretación física de la tarea que realiza el avión es vuelo recto y nivelado con cambios de velocidad en su recorrido tal que se acelera y desacelera mientras avanza en línea recta.

La Fig. 4.10 muestra la actuación para un tiempos de residencia que no cumplen con el tiempo de residencia mínimo establecido previamente. En este caso el tiempo de residencia es menor al mínimo establecido. En las Fig.4.10(a) se puede ver que la velocidad angular presenta un buen desempeño bajo estas condiciones de conmutación al igual que la velocidad traslacional mostrada en la Fig.4.10(b). Por otro lado las componentes de la orientación bajo éstas condiciones de conmutación muestran una respuesta oscilatoria para un tiempo de residencia menor al establecido, como se puede ver en la Fig.4.11(a). La Fig.4.11(b) muestra la respuesta de las variables de control, la cual va acorde a los requerimientos de la dinámica del sistema, considerando que las variables de control no tienen saturación.

La Fig.4.12 muestran la actuación para un tiempo de residencia igual al mínimo requerido. Las Fig.4.12(a) muestra la actuación de la velocidad angular con un tiempo de residencia igual al mínimo, presentando buen desempeño. Las velocidad traslacional mostrada en la Fig.4.12(b) para un tiempo de residencia igual al mínimo presenta un buen desempeño y alcanzan su referencia. Las componentes de la orientación bajo éstas condiciones presentan mayor oscilación en la respuesta que disminuyen conforme se incrementa el tiempo de residencia, como se puede ver en la Fig.4.13(a). La Fig.4.13(b) muestra la respuesta de las variables de control, la cual va acorde a los requerimientos de la dinámica del sistema, considerando que las variables de control no tienen saturación.

Los efectos de tiempos de residencia mayores al tiempo de residencia promedio mínimo no son mostrados. Sin embargo, de los resultados analizados se concluye que es posible garantizar la estabilidad, aún si el tiempo de residencia no satisface el criterio mínimo establecido (Lema 2), no así el desempeño.

TIEMPO DE RESIDENCIA CON GANANCIA PROPORCIONAL E INTEGRAL FIJAS EN VELOCIDAD CRUCERO

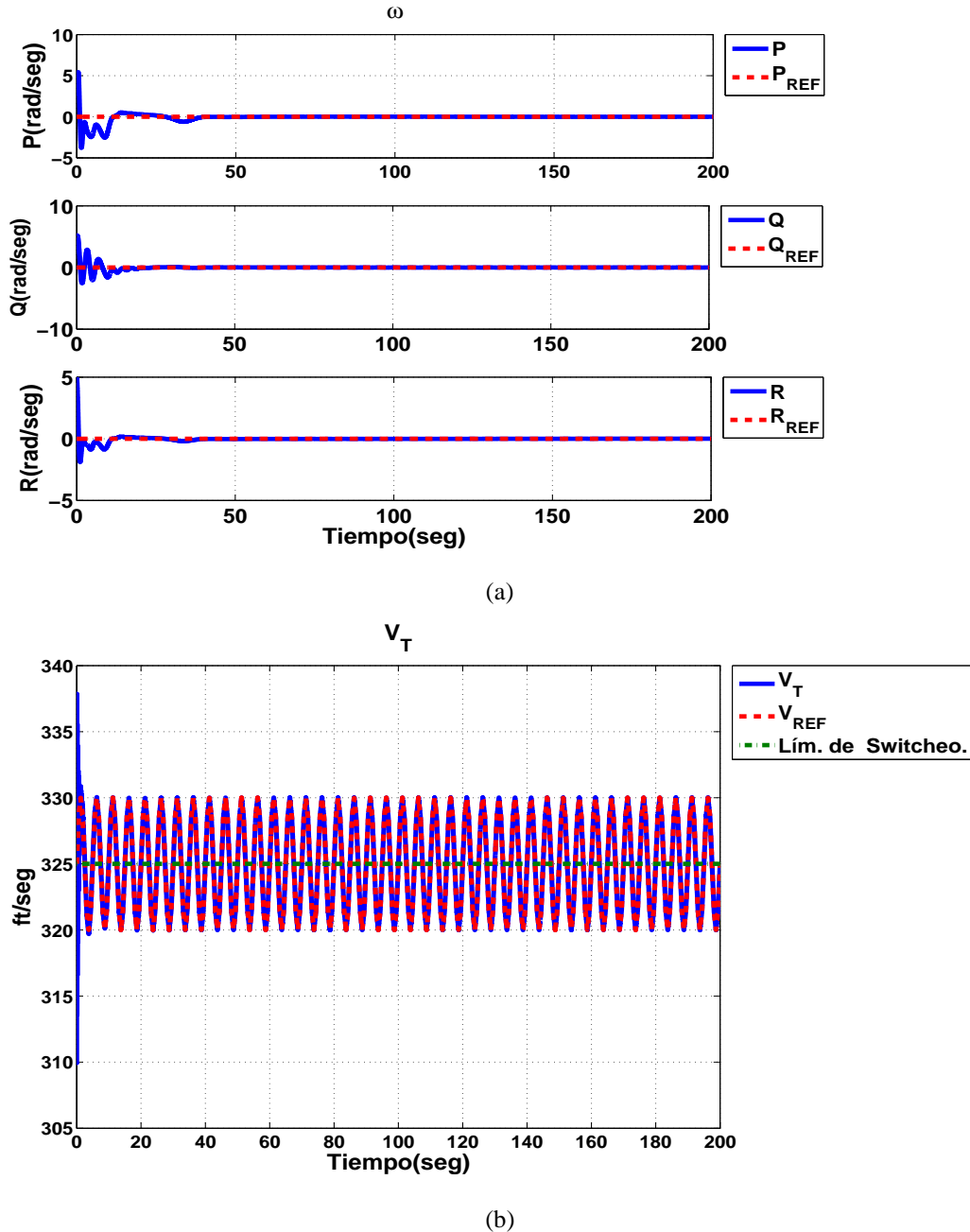


Figura 4.10: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Se evalúan efectos debidos a un tiempo de permanencia que no satisface la exigencia del tiempo de residencia mínimo, $\tau = 2,5\text{seg}$. Se considera $^jK_{p,i}$ =fija y $^jK_{I,i}$ =fija. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Se aprecian varios eventos de conmutación entre modos. V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg .

TIEMPO DE RESIDENCIA CON GANANCIA PROPORCIONAL E INTEGRAL FIJAS EN VELOCIDAD CRUCERO

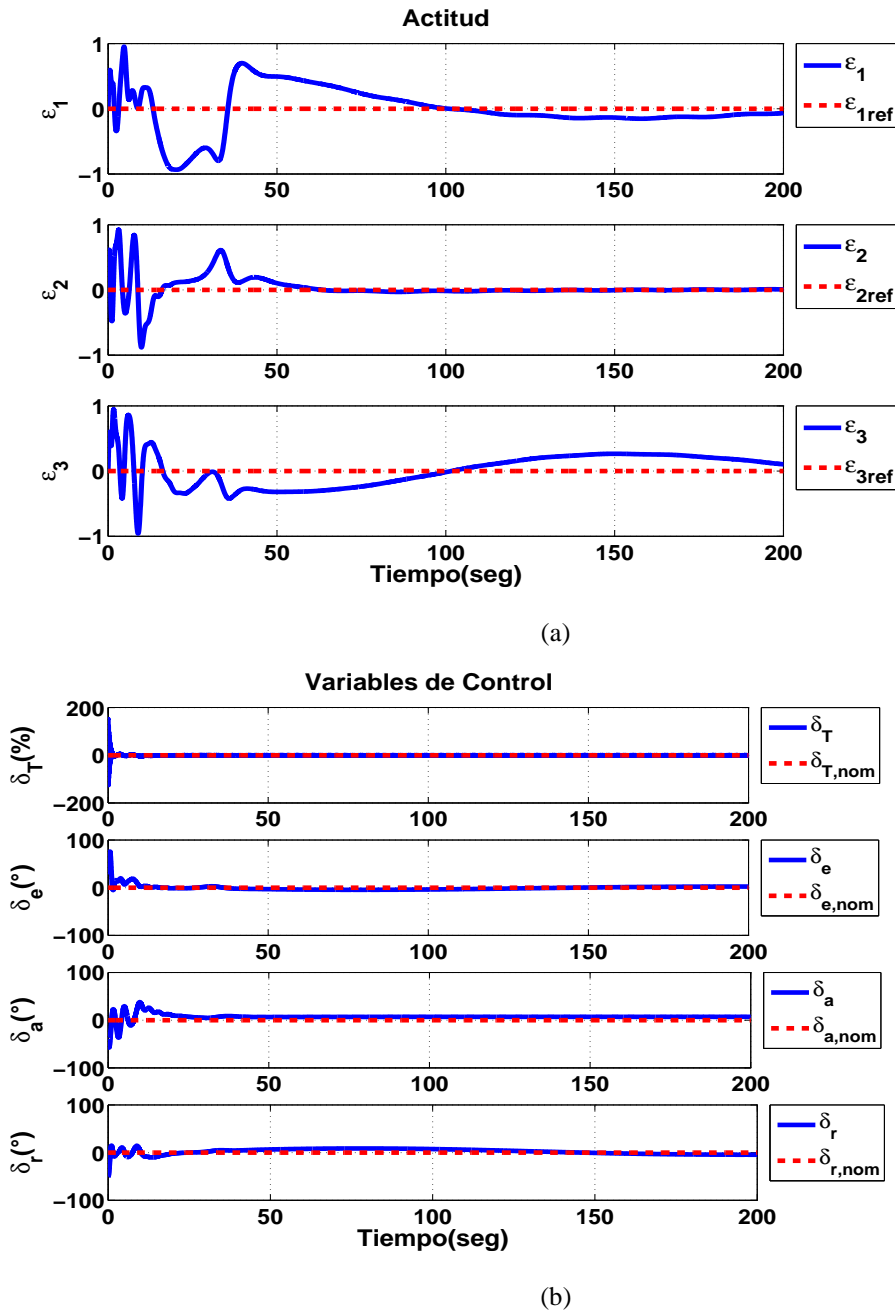


Figura 4.11: Dinámica de (a) la actitud y (b) las entradas de control, en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Se evalúan efectos debidos a un tiempo de permanencia que no satisface la exigencia del tiempo de residencia mínimo, $\tau = 2,5 \text{ seg}$. Se considera ${}^j K_{p,i}$ =fija y ${}^j K_{I,i}$ =fija. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Se aprecian varios eventos de conmutación entre modos. Cada componente de la actitud tiene una condición inicial de 0.5.

TIEMPO DE RESIDENCIA CON GANANCIA PROPORCIONAL E INTEGRAL FIJAS EN VELOCIDAD CRUCERO

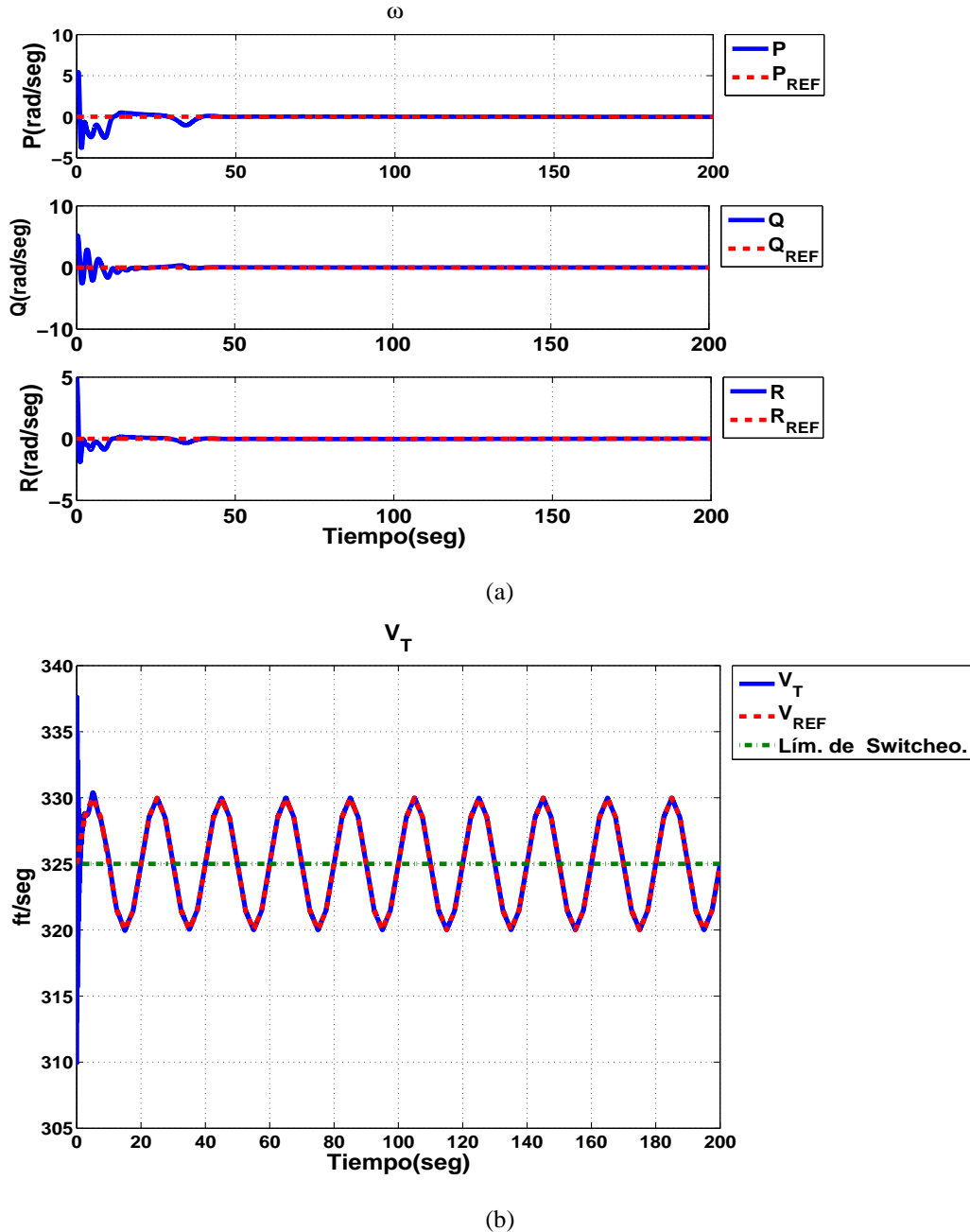


Figura 4.12: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Se evalúan efectos debidos a un tiempo de permanencia que satisface la exigencia del tiempo de residencia mínimo, $\tau = 10\text{seg}$. Se considera $^jK_{p,i}$ =fija y $^jK_{I,i}$ =fija. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Se aprecian varios eventos de conmutación entre modos. V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg .

TIEMPO DE RESIDENCIA CON GANANCIA PROPORCIONAL E INTEGRAL FIJAS EN VELOCIDAD CRUCERO

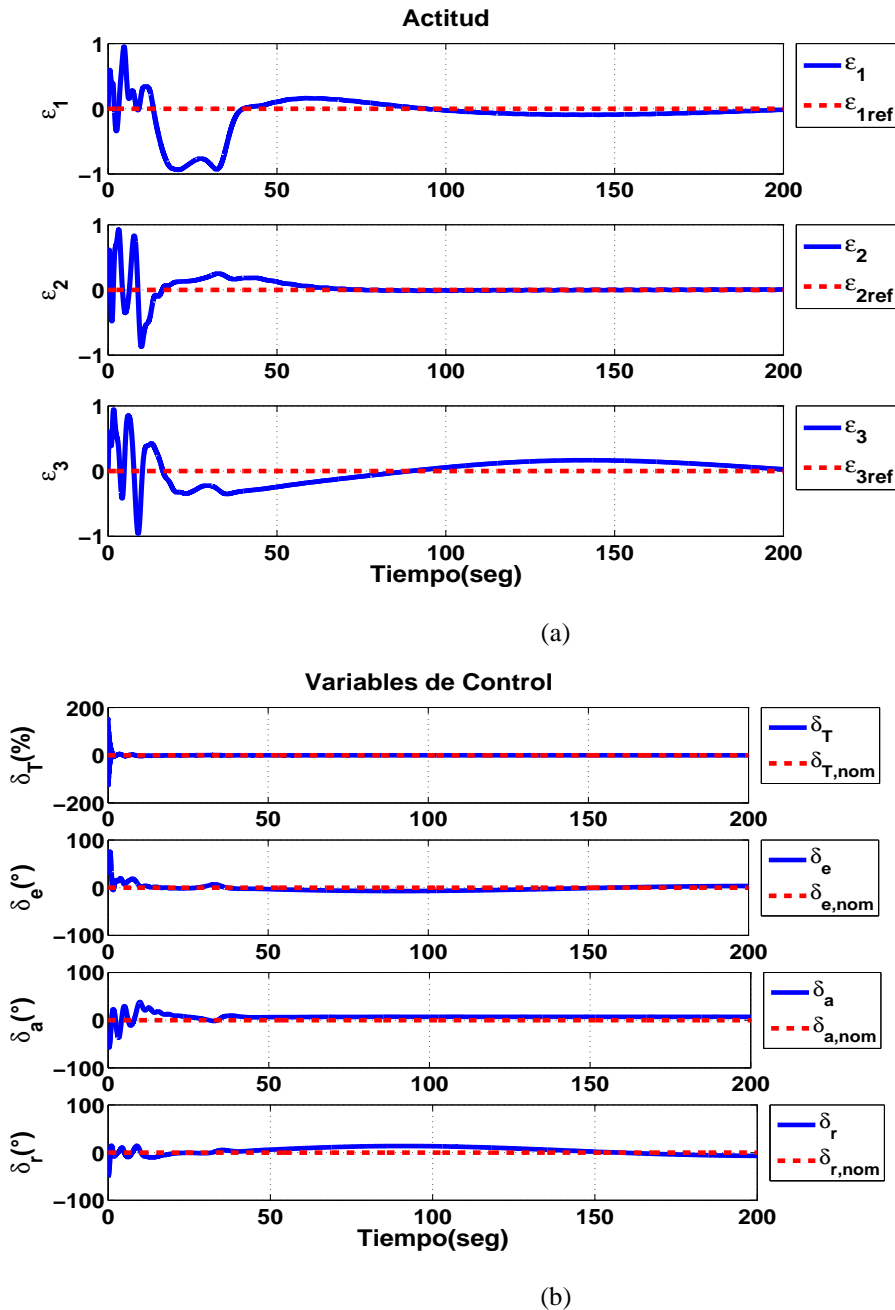


Figura 4.13: Dinámica de (a) la actitud y (b) las entradas de control, en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Se evalúan efectos debidos a un tiempo de permanencia que satisface la exigencia del tiempo de residencia mínimo, $\tau = 10\text{seg}$. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Se aprecian varios eventos de conmutación entre modos. Cada componente de la actitud tiene una condición inicial de 0.5.

Efecto de variaciones del tiempo de residencia para conmutación en vuelta a nivel

En las Figuras 4.14-4.17 se muestra el desempeño de la velocidad angular, velocidad traslacional, orientación y variables de control para dos diferentes tiempos de residencia. Estas simulaciones son realizadas bajo la acción de una ganancia integral ${}^jK_{p,i} = fija$ y una ganancia proporcional ${}^jK_{I,i} = fija$. En este caso la interpretación física de la tarea que realiza el avión es una movimiento sobre su eje axial con las alas a nivel con cambios de velocidad al efectuar la tarea tal que se acelera y desacelera mientras gira sobre su eje axial.

La Fig.4.14 muestran la actuación para un tiempo de residencia que no cumplen con el tiempo de residencia promedio mínimo establecido previamente. En otras palabras el tiempo de residencia es menor al mínimo establecido. En la Fig.4.14(a) se puede ver que la velocidad angular presenta un buen desempeño bajo estas condiciones de conmutación. La velocidad traslacional mostrada en la Fig.4.14(b) también muestra buen desempeño. En la Fig.4.15 se pueden ver las variables de control, cuyo desempeño va acorde las exigencias de la dinámica del avión. Los actuadores no se simulan con limitadores para la salida de la señal de control.

La Fig.4.16 muestra la actuación para un tiempos de residencia igual al mínimo requerido. La Fig. 4.16(a) muestra la actuación de la velocidad angular con un tiempo de residencia igual al mínimo, mostrando un buen desempeño. La velocidad traslacional mostrada en la Fig.4.16(b) para un tiempo de residencia igual al mínimo presenta un buen desempeño y alcanzan su referencia. En la Fig.4.17 se pueden ver las variables de control, cuyo desempeño va acorde las exigencias de la dinámica del avión. Los actuadores no se simulan con limitadores para la salida de la señal de control.

Los efectos de tiempos de residencia mayores al tiempo de residencia promedio mínimo no son mostrados. Sin embargo, de los resultados analizados se concluye que es posible garantizar la estabilidad, aún si el tiempo de residencia no satisface el criterio mínimo establecido (Lema 2), no así el desempeño. En este caso es importante analizar el desempeño de las variables de control mostradas en las Figuras 4.15 y 4.17, las cuales son un indicador claro de que es necesario establecer una nueva partición Ω_j en donde las variables de control no se salgan de sus valores máximos de operación. Lo anterior implica establecer un nuevo modo en donde las condiciones simuladas satisfagan no sólo condiciones de estabilidad si no también de operación de los mandos del avión (alergones, elevadores, etc.).

TIEMPO DE RESIDENCIA CON GANANCIA PROPORCIONAL E INTEGRAL FIJAS EN VUELTA A NIVEL

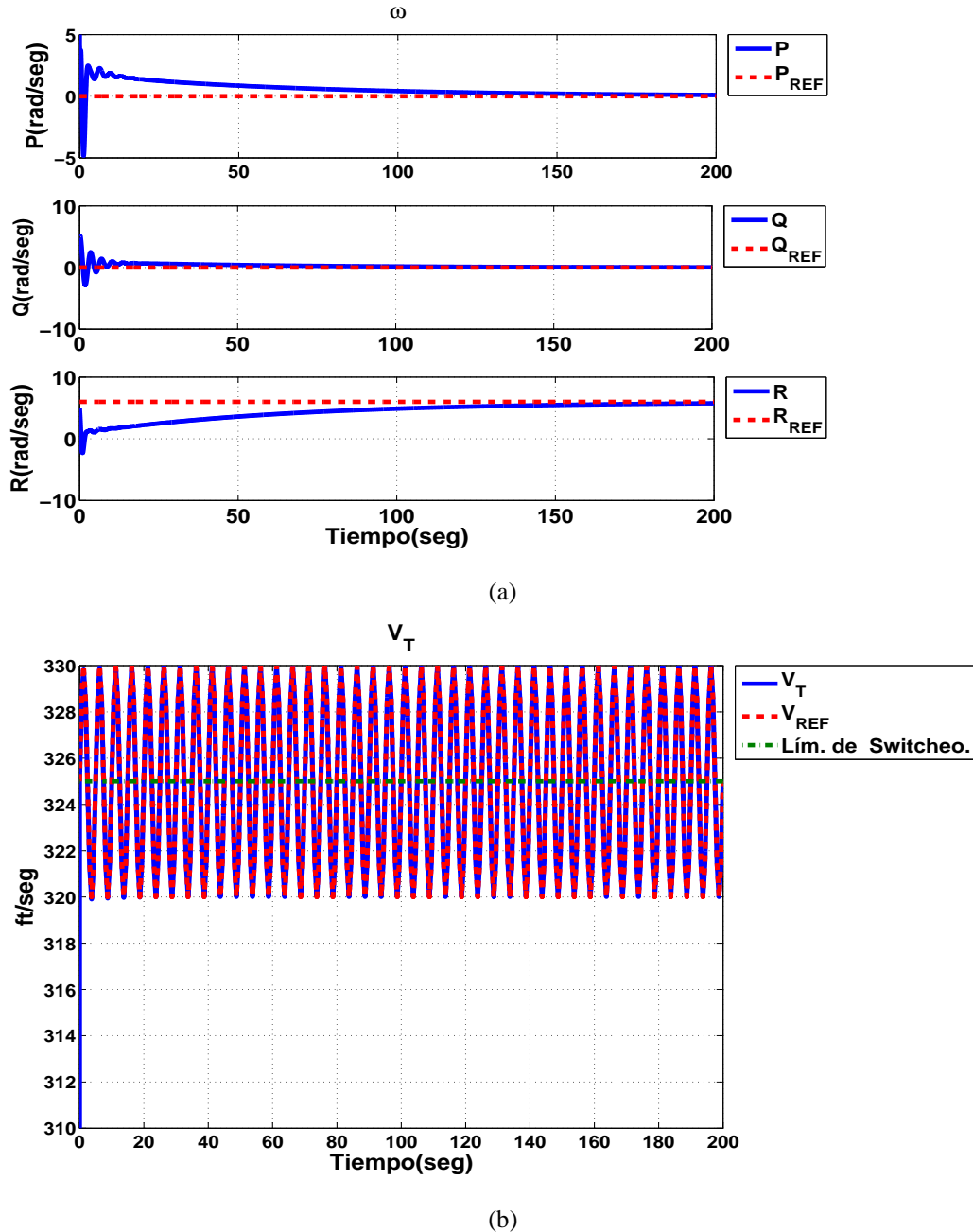


Figura 4.14: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelta a nivel en baja y alta velocidad. Se evalúan efectos debidos a un tiempo de permanencia que no satisface la exigencia del tiempo de residencia mínimo, $\tau = 2,5\text{seg}$. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Se aprecian varios eventos de conmutación entre modos. V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg .

TIEMPO DE RESIDENCIA CON GANANCIA PROPORCIONAL E INTEGRAL FIJAS EN VUELTA A NIVEL

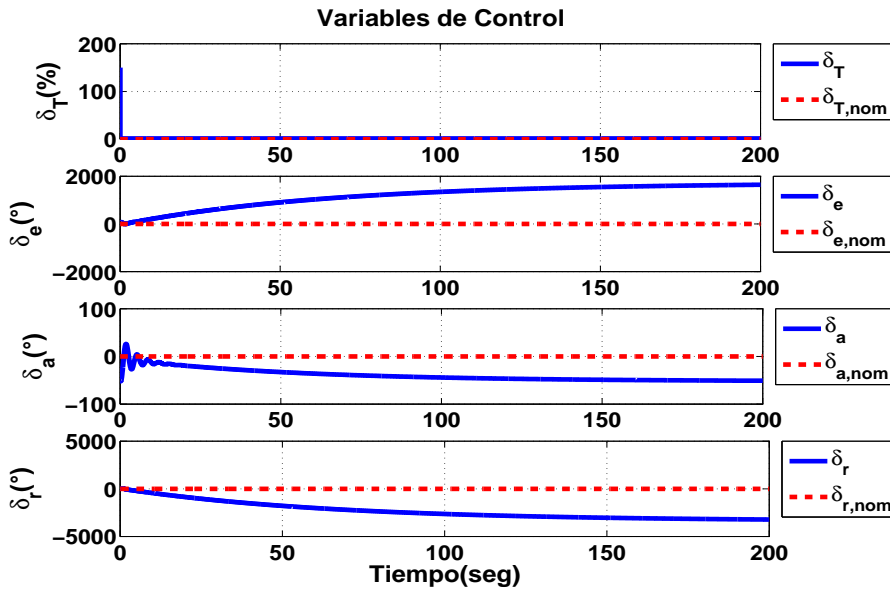


Figura 4.15: Dinámica de las entradas de control, en condiciones de vuelta a nivel en baja y alta velocidad. Se evalúan efectos debidos a un tiempo de permanencia que no satisface la exigencia del tiempo de residencia mínimo, $\tau = 2,5\text{seg}$. Se considera $^jK_{p,i}$ =fija y $^jK_{I,i}$ =fija. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Se aprecian varios eventos de conmutación entre modos.

TIEMPO DE RESIDENCIA CON GANANCIA PROPORCIONAL E INTEGRAL FIJAS EN VUELTA A NIVEL

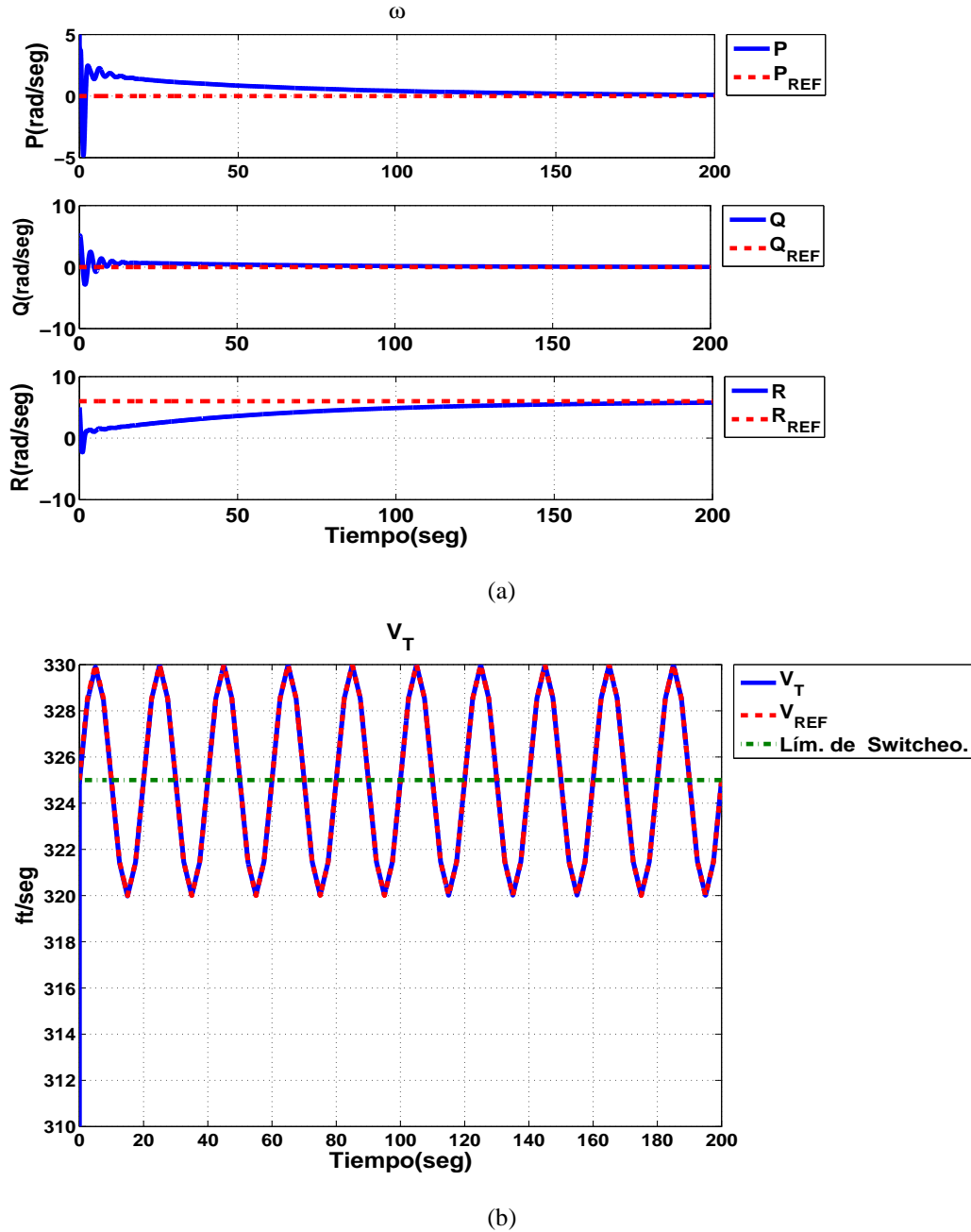


Figura 4.16: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelta a nivel en baja y alta velocidad. Se evalúan efectos debidos a un tiempo de permanencia que satisface la exigencia del tiempo de residencia mínimo, $\tau = 10\text{seg}$. Se considera $^jK_{p,i}$ =fija y $^jK_{I,i}$ =fija. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Se aprecian varios eventos de conmutación entre modos. V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg .

TIEMPO DE RESIDENCIA CON GANANCIA PROPORCIONAL E INTEGRAL FIJAS EN VUELTA A NIVEL

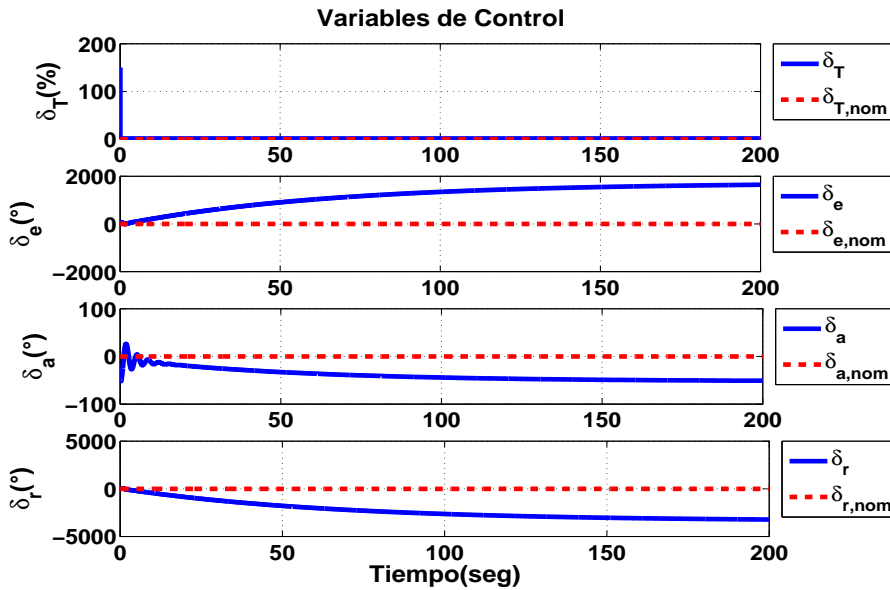


Figura 4.17: Dinámica de las entradas de control, en condiciones de vuelta a nivel en baja y alta velocidad. Se evalúan efectos debidos a un tiempo de permanencia que satisface la exigencia del tiempo de residencia mínimo, $\tau = 10\text{seg}$. Se considera $^jK_{p,i} = \text{fija}$ y $^jK_{I,i} = \text{fija}$. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Se aprecian varios eventos de conmutación entre modos.

4.2.4. Efectos de cambios en la referencia

En esta sección se muestra el desempeño del controlador ante variaciones en la señal de conmutación, mediante su impacto sobre las variables de control, bajo conmutación entre el *Modo 1* y *Modo 2* y bajo conmutación entre el *Modo 2* y *Modo 3*. Para efectos de esta prueba se considera el sistema bajo acción proporcional e integral, con ganancia proporcional e integral fijas ($^jK_{p,i} = \text{fija}$ y $^jK_{I,i} = \text{fija}$) que garantizan la estabilidad en todos los casos.

Las gráficas referentes a la velocidad angular muestran sus tres componentes (P, Q, R) dadas en rad/seg . Las gráficas relativas al comportamiento de la velocidad traslacional (V_T) se dan en ft/seg . Las gráficas que muestran las componentes de la orientación del avión son adimensionales. Las gráficas que muestran las entradas de control, muestran la deflexión de $[\delta_e, \delta_a, \delta_r]$ en grados y δ_T en (%).

En la tarea de velocidad crucero se desea que la velocidad angular alcance una referencia deseada dada por ($P = Q = R = 0$), una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo, debido a que es también la señal de

conmutación y finalmente se desea que las componentes de la orientación ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$) y por tanto la componente constante permanecerá siempre en $\eta = -1$, como se explicó previamente.

En la tarea de vuelta a nivel se desea que la velocidad angular alcance una referencia deseada dada por ($P = Q = 0$) y $R = R_{REF}$, una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo ya que también es la señal de conmutación. Finalmente ya que para este caso no se tiene control sobre la orientación, no se presentarán datos relativos a las componentes de la actitud. Para las pruebas aquí presentadas se considera que $R_{REF} = 6$.

A continuación se discutirán los efectos de variaciones en la señal de conmutación con base en las gráficas que muestran el desempeño de la velocidad angular, la velocidad traslacional, variables de control y los componentes de la orientación en el caso correspondiente.

Efectos de cambios de la señal de referencia en vuelo crucero

Las Figuras 4.18-4.21 muestran el desempeño de la velocidad angular, velocidad traslacional y orientación para diferentes señales de conmutación en velocidad crucero. Estas simulaciones son realizadas bajo la acción de ganancia integral dada como ${}^jK_{p,i} = fija$ y una ganancia proporcional ${}^jK_{I,i} = fija$. En este caso la interpretación física de la tarea que realiza el avión es vuelo recto y nivelado con cambios de velocidad en su recorrido tal que se acelera y desacelera mientras avanza en línea recta.

Las Figuras 4.18 -4.21 muestran la actuación de las variables para dos señales de conmutación con cambios rápidos en tiempo para velocidad crucero. En las Figuras 4.18(a) y 4.20(a) se puede ver que la velocidades angulares presenta un buen desempeño bajo estas condiciones al igual que las velocidades traslacionales mostradas en las Figuras 4.18(b) y 4.20(b). Mientras las componentes de la orientación bajo éstas condiciones presentan el mismo desempeño estable, cómo se puede ver en las Figuras 4.19(a) y 4.21(a). En las Figuras 4.19(b) y 4.21(b) se pueden ver las variables de control, cuyo desempeño va acorde las exigencias de la dinámica del avión. Los actuadores no se simulan con limitadores para la salida de la señal de control.

Los efectos de señales con variaciones lentas en tiempo no se muestran entre estos resultados ya que las simulaciones anteriores están realizadas bajo el criterio de variación lenta en tiempo de la señal de conmutación. De los resultados analizados se puede ver que el sistema preserva estabilidad pese a transiciones rápidas en la señal de conmutación.

CAMBIOS EN LA SEÑAL DE CONMUTACIÓN EN VELOCIDAD CRUCERO

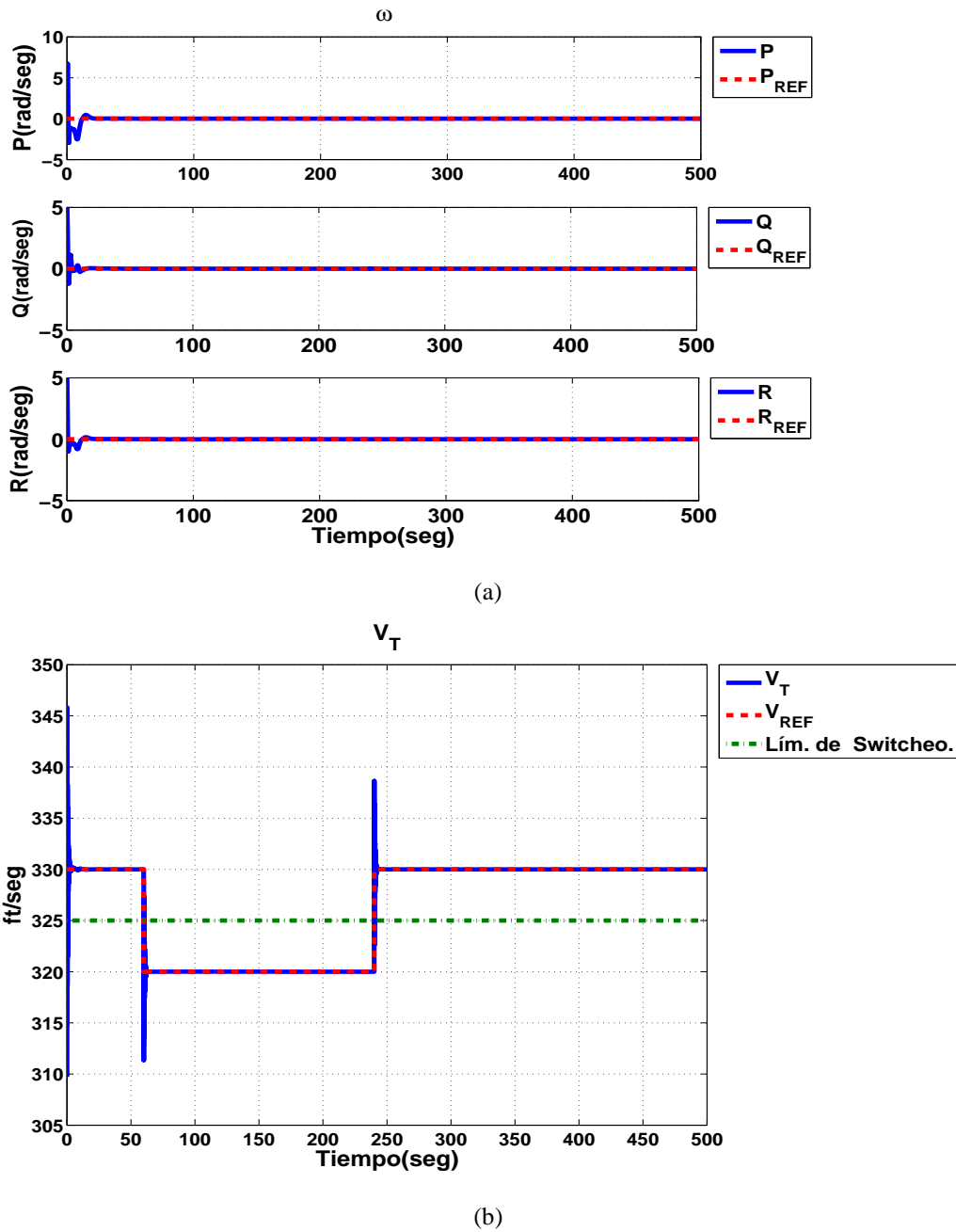


Figura 4.18: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija. Se evalúan efectos debidos a una señal de conmutación V_T con cambios rápidos en tiempo (señal cuadrada). Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, en 60seg y el segundo en 240seg. V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg.

CAMBIOS EN LA SEÑAL DE CONMUTACIÓN EN VELOCIDAD CRUCERO

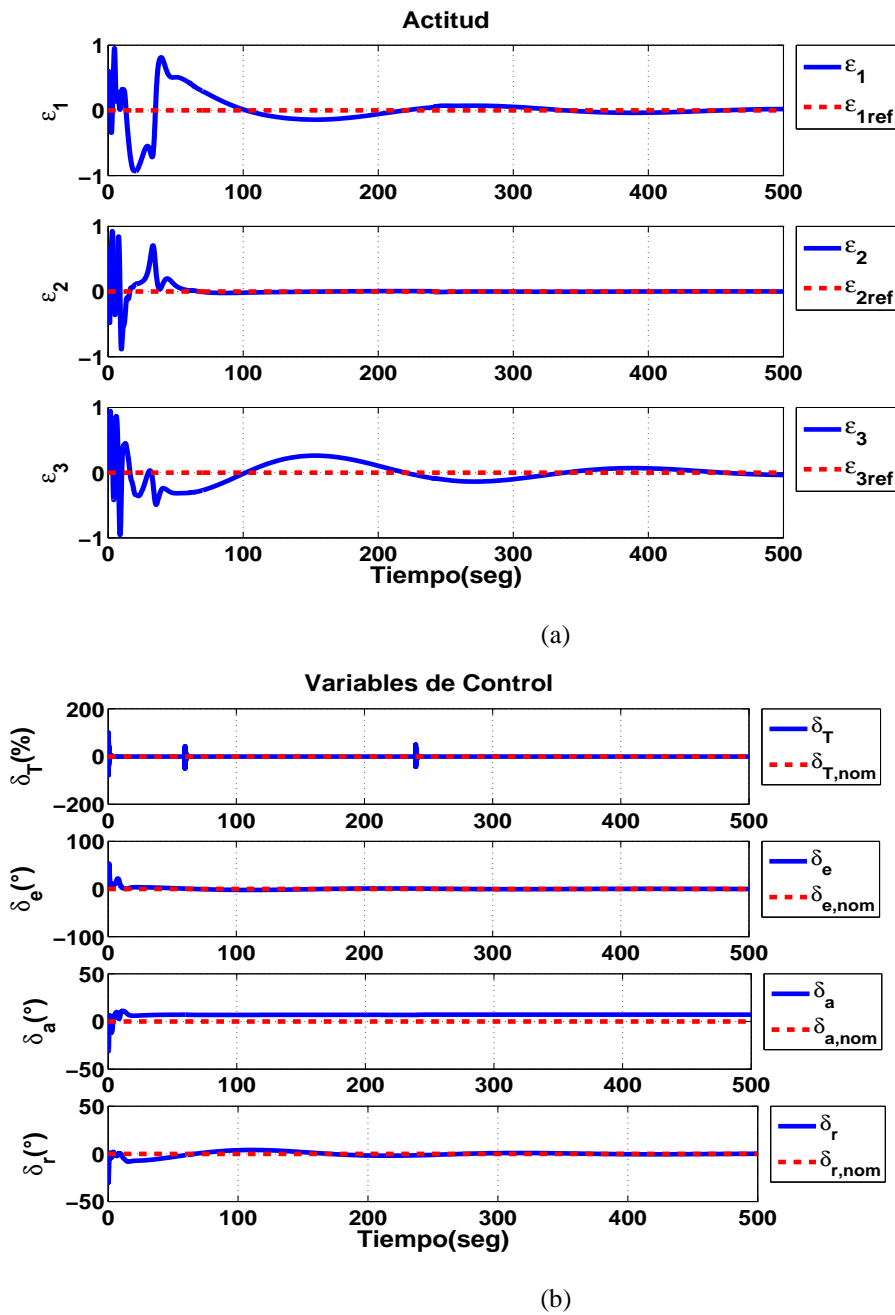


Figura 4.19: Dinámica de (a) la actitud y (b) las entradas de control, en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Se considera ${}^jK_{p,i}$ = fija y ${}^jK_{I,i}$ = fija. Se evalúan efectos debidos a una señal de conmutación V_T con cambios rápidos en tiempo (señal cuadrada). Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, en 60seg y el segundo en 240seg. Cada componente de la actitud tiene una condición inicial de 0.5.

CAMBIOS EN LA SEÑAL DE CONMUTACIÓN EN VELOCIDAD CRUCERO

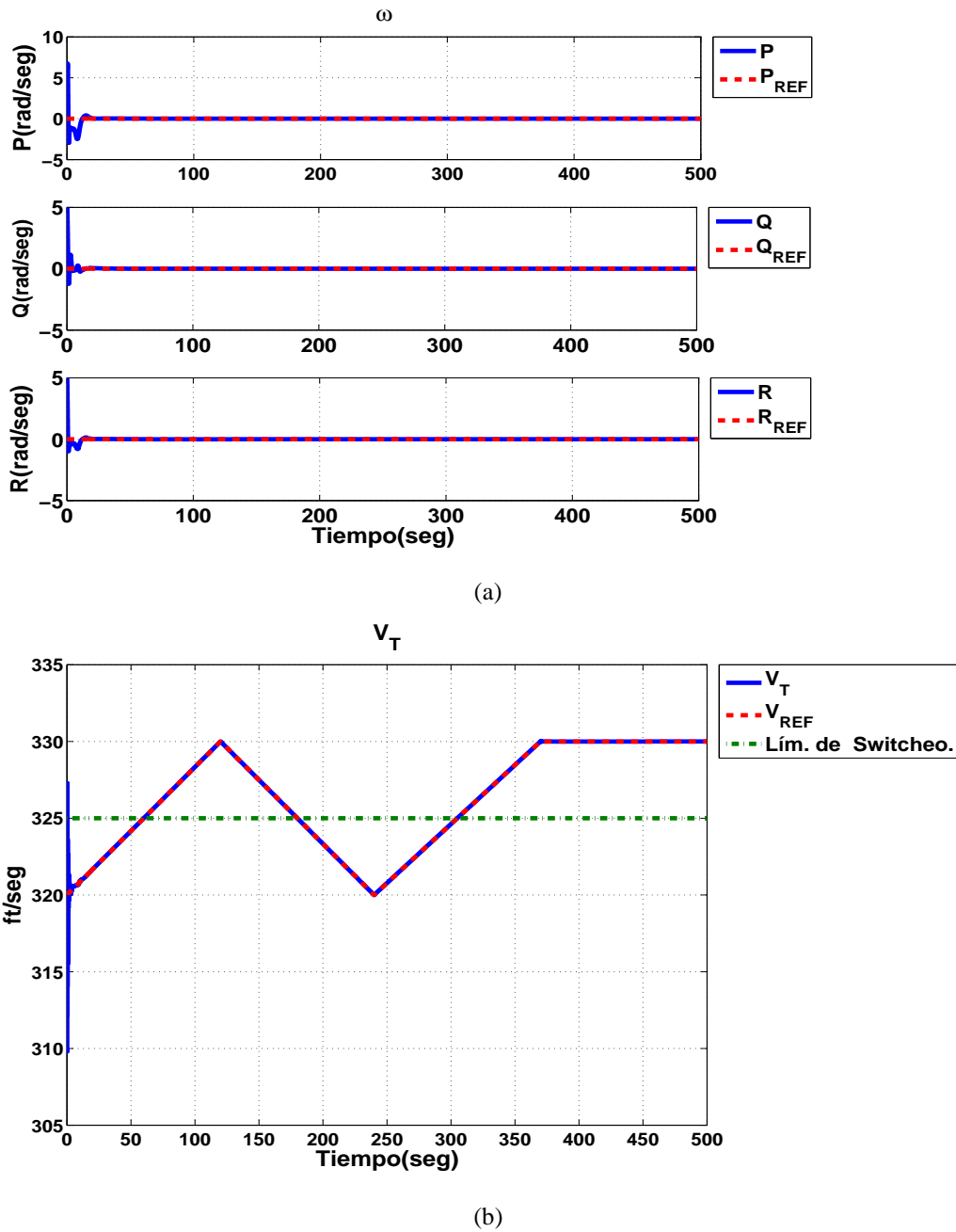


Figura 4.20: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija. Se evalúan efectos debidos a una señal de conmutación V_T con cambios rápidos en tiempo (señal triangular). Se aprecian tres eventos de conmutación entre modos, en 60seg, 180seg y 310seg. V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg.

CAMBIOS EN LA SEÑAL DE CONMUTACIÓN EN VELOCIDAD CRUCERO

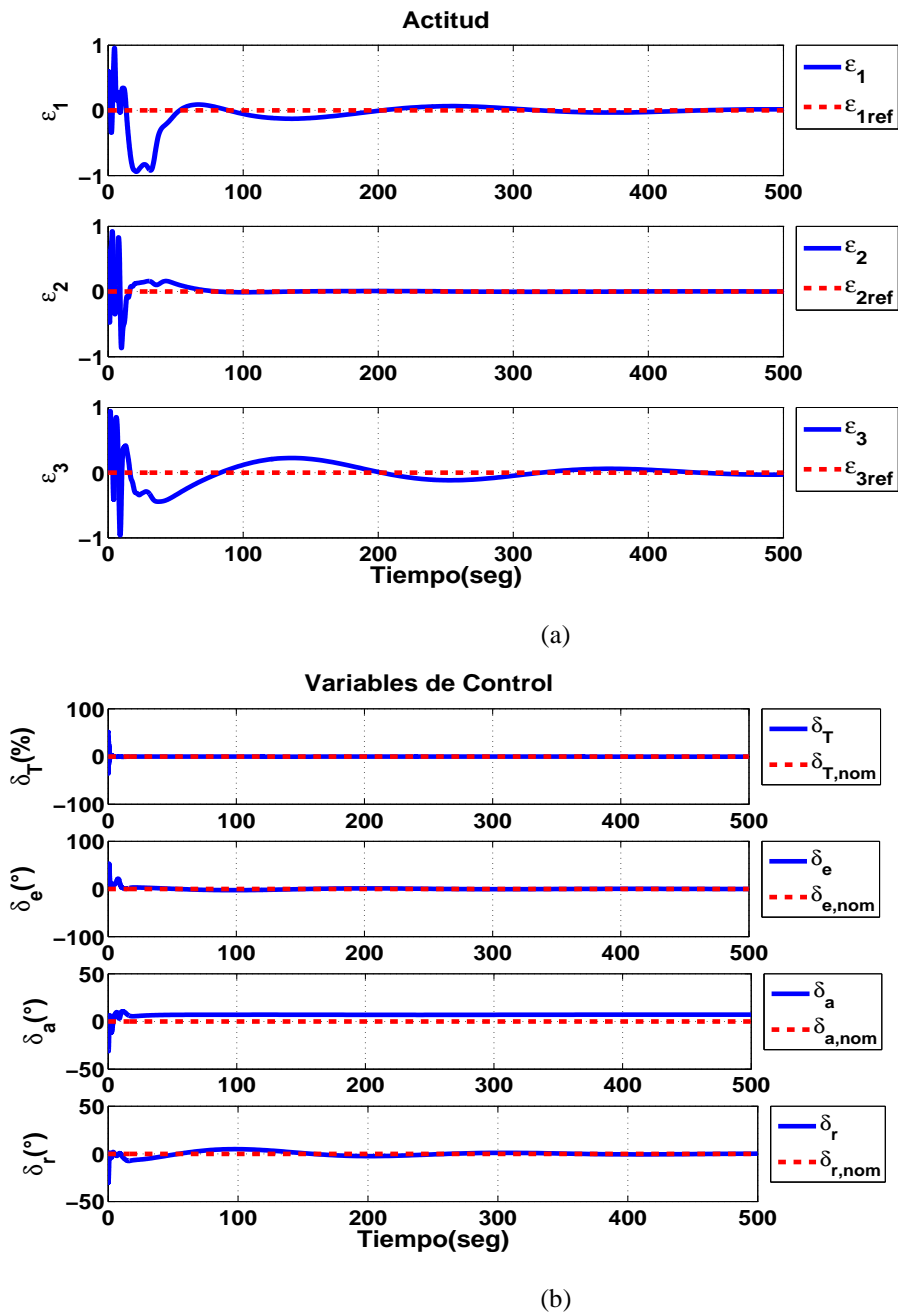


Figura 4.21: Dinámica de (a)la actitud y (b)las entradas de control, en condiciones de vuelo crucero a baja y alta velocidad. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija. Se evalúan efectos debidos a una señal de conmutación V_T con cambios rápidos en tiempo (señal triangular). Se aprecian tres eventos de conmutación entre modos, en 60seg , 180seg y 310seg . Cada componente de la actitud tiene una condición inicial de 0.5.

Efectos de cambios de la señal de referencia en vuelta a nivel

Las Figuras 4.22-4.25 muestran el desempeño de la velocidad angular, velocidad traslacional y variables de control para cuatro diferentes señales de conmutación en vuelta a nivel. Estas simulaciones son realizadas bajo la acción de ganancia integral dada como ${}^jK_{p,1} = fija$ y una ganancia proporcional ${}^jK_{I,1} = fija$. En este caso la interpretación física de la tarea que realiza el avión es una movimiento sobre su eje axial con las alas a nivel con cambios de velocidad al efectuar la tarea tal que se acelera y desacelera mientras gira sobre su eje axial.

Las Figuras 4.22-4.25 muestran la actuación de las variables para dos señales de conmutación con cambios rápidos en tiempo. En las Figuras 4.22(a) y 4.24(a) se puede ver que la velocidades angulares presenta un buen desempeño bajo estas condiciones al igual que las velocidades traslacionales mostradas en las Figuras 4.22(b) y 4.24(a). En las Figuras 4.23 y 4.25 se pueden ver las variables de control, cuyo desempeño va acorde las exigencias de la dinámica del avión. Los actuadores no se simulan con limitadores para la salida de la señal de control.

Los efectos de señales con variaciones lentas en tiempo no se muestran entre estos resultados ya que las simulaciones anteriores están realizadas bajo el criterio de variación lenta en tiempo de la señal de conmutación. De los resultados analizados se puede ver que el sistema preserva estabilidad pese a transiciones rápidas en la señal de conmutación. Nuevamente es importante analizar el desempeño de las variables de control mostradas en las Figuras 4.23 y 4.25, las cuales muestran que es necesario establecer una nueva partición Ω_j en donde las variables de control no se excedan los valores máximos de operación. Lo anterior implica establecer un nuevo modo en donde las condiciones simuladas satisfagan no sólo condiciones de estabilidad si no también de operación de los mandos del avión (alergones, elevadores, etc.).

CAMBIOS DE LA SEÑAL DE CONMUTACIÓN EN VUELTA A NIVEL

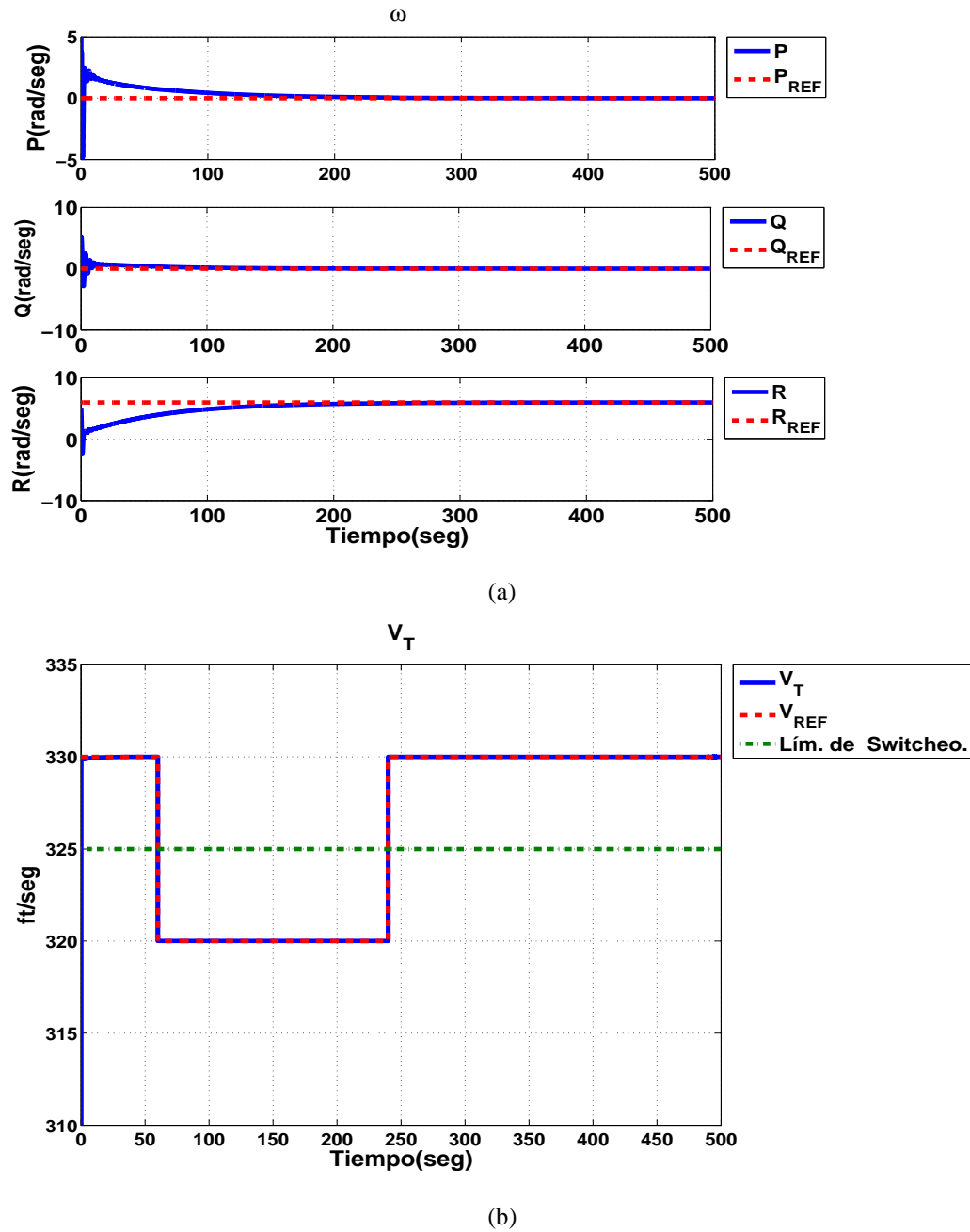


Figura 4.22: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelta a nivel a baja y alta velocidad. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija. Se evalúan efectos debidos a una señal de conmutación V_T con cambios rápidos en tiempo (señal cuadrada). Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, en 60seg y el segundo en 240seg . V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg .

CAMBIOS DE LA SEÑAL DE CONMUTACIÓN EN VUELTA A NIVEL

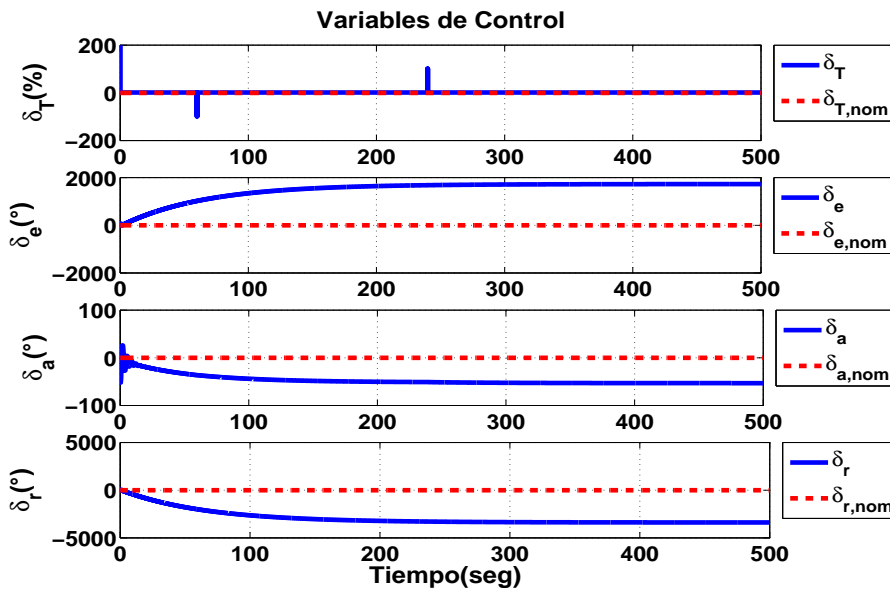


Figura 4.23: Dinámica de (a) la actitud y (b) las entradas de control, en vuelta a nivel a baja y alta velocidad. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija. Se evalúan efectos debidos a una señal de conmutación V_T con cambios rápidos en tiempo (señal cuadrada). Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, en 60seg y el segundo en 240seg.

CAMBIOS DE LA SEÑAL DE CONMUTACIÓN EN VUELTA A NIVEL

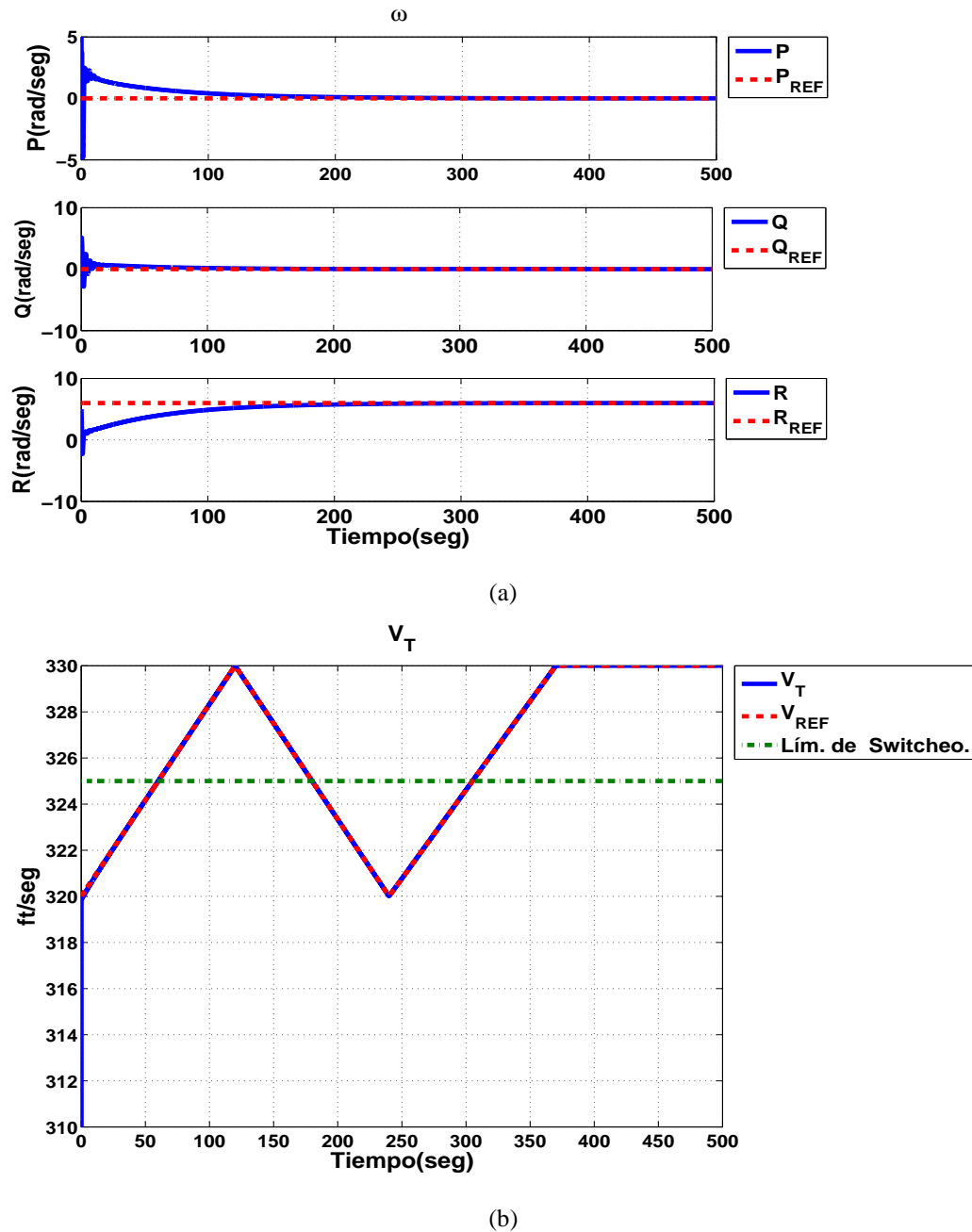


Figura 4.24: Dinámica de (a) ω y (b) V_T , en condiciones de vuelta a nivel a baja y alta velocidad. Se considera ${}^jK_{p,i} = \text{fija}$ y ${}^jK_{I,i} = \text{fija}$. Se evalúan efectos debidos a una señal de conmutación V_T con cambios rápidos en tiempo (señal triangular). Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, en 60seg y el segundo en 240seg . V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg .

CAMBIOS DE LA SEÑAL DE CONMUTACIÓN EN VUELTA A NIVEL

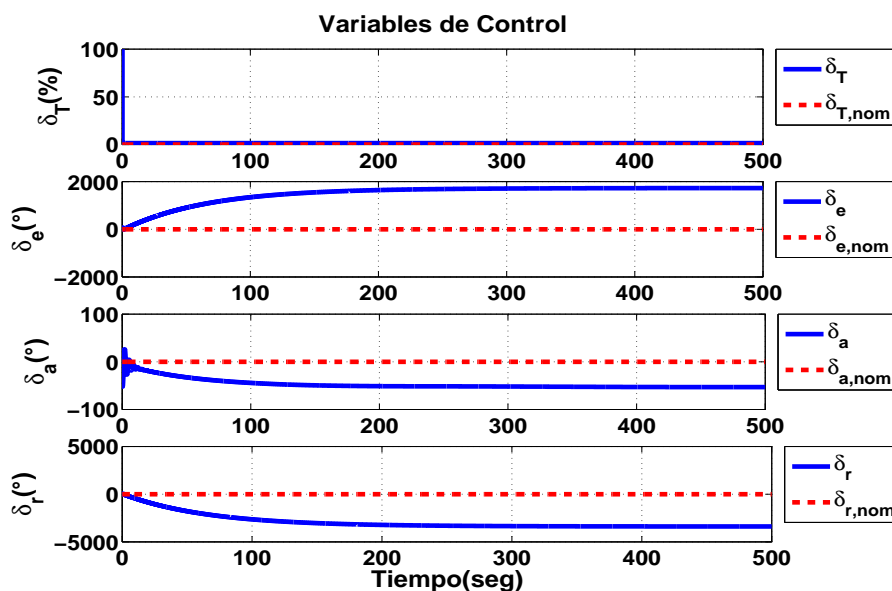


Figura 4.25: Dinámica de (a) la actitud y (b) las entradas de control, en condiciones de de vuelta a nivel a baja y alta velocidad. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija. Se evalúan efectos debidos a una señal de conmutación V_T con cambios rápidos en tiempo (señal triangular). Se aprecian dos eventos de conmutación entre modos, en 60seg, 180seg y 310seg.

4.2.5. Efectos de diferentes perturbaciones no lineales

En esta sección se muestra el desempeño del controlador ante perturbaciones dependientes de los estados. Estas perturbaciones son inducidas en las componentes de aceleración del vector de estados (*i.e.* sobre \dot{x}). los efectos de las perturbaciones se analizan mediante las componentes de la velocidad angular, las variables de control y las componentes del cuaternión. Se considera conmutación entre el *Modo 1* y *Modo 2* únicamente. Para efectos de esta prueba se considera el sistema bajo acción proporcional e integral, con ganancias proporcionales e integrales fijas (${}^jK_{p,i}$ = fija y ${}^jK_{I,i}$ = fija) que garantizan la estabilidad.

Las gráficas referentes a la velocidad angular muestran sus tres componentes (P, Q, R) dadas en *rad/seg*. Las gráficas relativas al comportamiento de la velocidad traslacional (V_T) se dan en *ft/seg*. Las gráficas que muestran las componentes de la orientación del avión son adimensionales y están en el rango de $-1a1$. Las gráficas que muestran las entradas de control , muestran la deflexión de $[\delta_e, \delta_a, \delta_r]$ en grados y δ_T en (%).

En la tarea de velocidad crucero se desea que la velocidad angular alcance una

referencia deseada dada por ($P = Q = R = 0$), una velocidad traslacional de referencia V_{REF} , la cual varía en tiempo, debido a que es también la señal de conmutación y finalmente se desea que las componentes de la orientación ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$) y por tanto la componente constante permanecerá siempre en $\eta = -1$.

Las gráficas correspondientes a $[\dot{V}_T, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}]$ se muestran en comparación con el tipo de perturbaciones a las cuales son sometidas. Se consideran dos tipos de perturbaciones, las primeras consideran funciones cuadráticas dependientes de los estados y las segundas consideran funciones exponenciales dependientes de los estados. Debido a que únicamente es posible rechazar perturbaciones acotadas en un dominio como se dijo antes, estas perturbaciones son acotadas de tal manera que el sistema sea capaz de preservar estabilidad; sin embargo no se puede garantizar el desempeño.

Las componentes de $\dot{\omega}$ y \dot{V}_T son presentadas en comparación con las perturbaciones con la finalidad de observar la relación entre la amplitud de las perturbaciones contra la amplitud de las señales a perturbar.

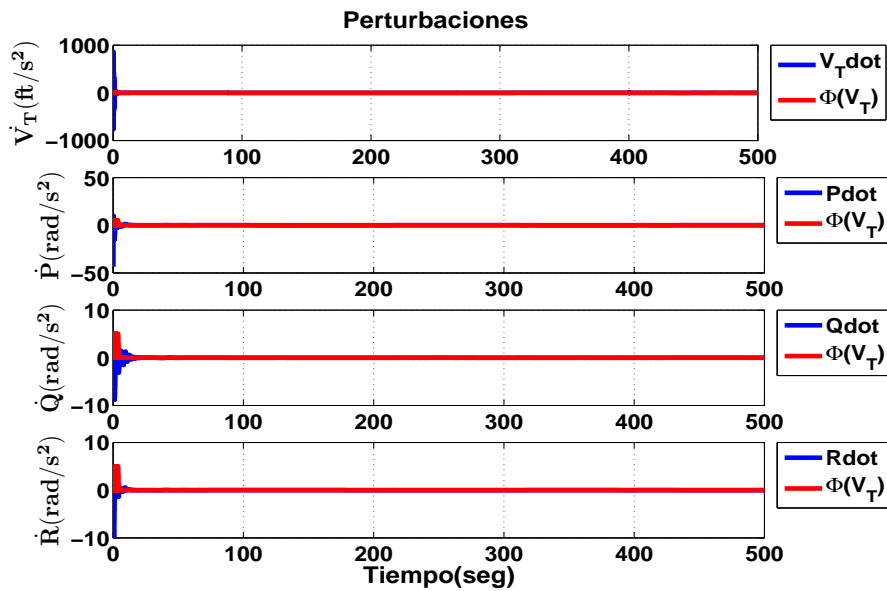
Efectos de perturbaciones de tipo cuadráticas

Las Figuras 4.26, 4.27 y 4.31 muestran el impacto de perturbaciones de tipo cuadráticas, las cuales depende de los estados. La Fig.4.26(a) muestra las variables de perturbación que son inducidas sobre las componentes de la aceleración angular en comparación con las componentes de la aceleración angular. La Fig.4.26(b) muestra el desempeño de las componentes de la velocidad angular, las cuales pese a mostrar un desempeño poco deseable no se inestabilizan.

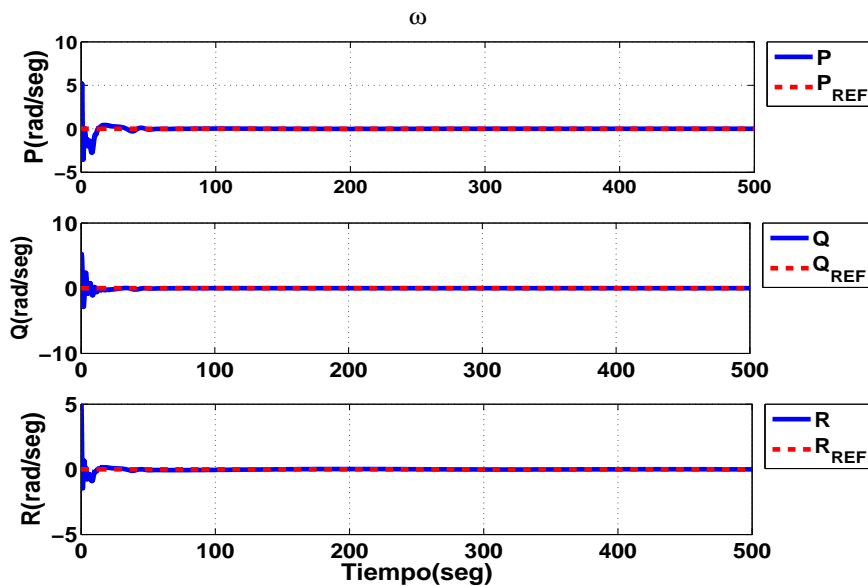
La velocidad traslacional mostrada en la Fig.4.27(b) al igual que la velocidad angular muestra un desempeño poco deseable pero estable. La Fig.4.27(a) muestran el impacto de las perturbaciones sobre el desempeño y estabilidad de las componentes de la orientación, en este caso se puede ver que la componente en ε_1 se inestabiliza, lo cual se puede interpretar como que el avión sube y baja sobre su eje vertical, es decir cambios de posición en x . Lo anterior deja ver que se activa un modo oscilatorio del avión. Finalmente la Fig.4.28 muestra las variables de control, las cuales actúan de acuerdo a los requerimientos del sistema.

Ya que en la conmutación en vuelta a nivel se tiene menores variables de control, se considera que es más ilustrativo presentar resultados de perturbación en condiciones de velocidad crucero. Por lo anterior no se muestran resultados sobre el impacto de perturbaciones en vuelta a nivel.

EFFECTOS DE PERTURBACIONES CUADRÁTICAS EN VELOCIDAD CRUCERO



(a)



(b)

Figura 4.26: Dinámica de (a) La dinámica de \dot{V}_T y $\dot{\omega}$ y amplitud de las perturbaciones en comparación con la amplitud de cada componente de la aceleración angular y traslacional en condiciones de vuelo crucero (b) Dinámica de la velocidad angular. Se considera ${}^j K_{p,i}$ =fija y ${}^j K_{I,i}$ =fija y perturbaciones de tipo cuadráticas dependientes de los estados. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg.

EFFECTOS DE PERTURBACIONES CUADRÁTICAS EN VELOCIDAD CRUCERO

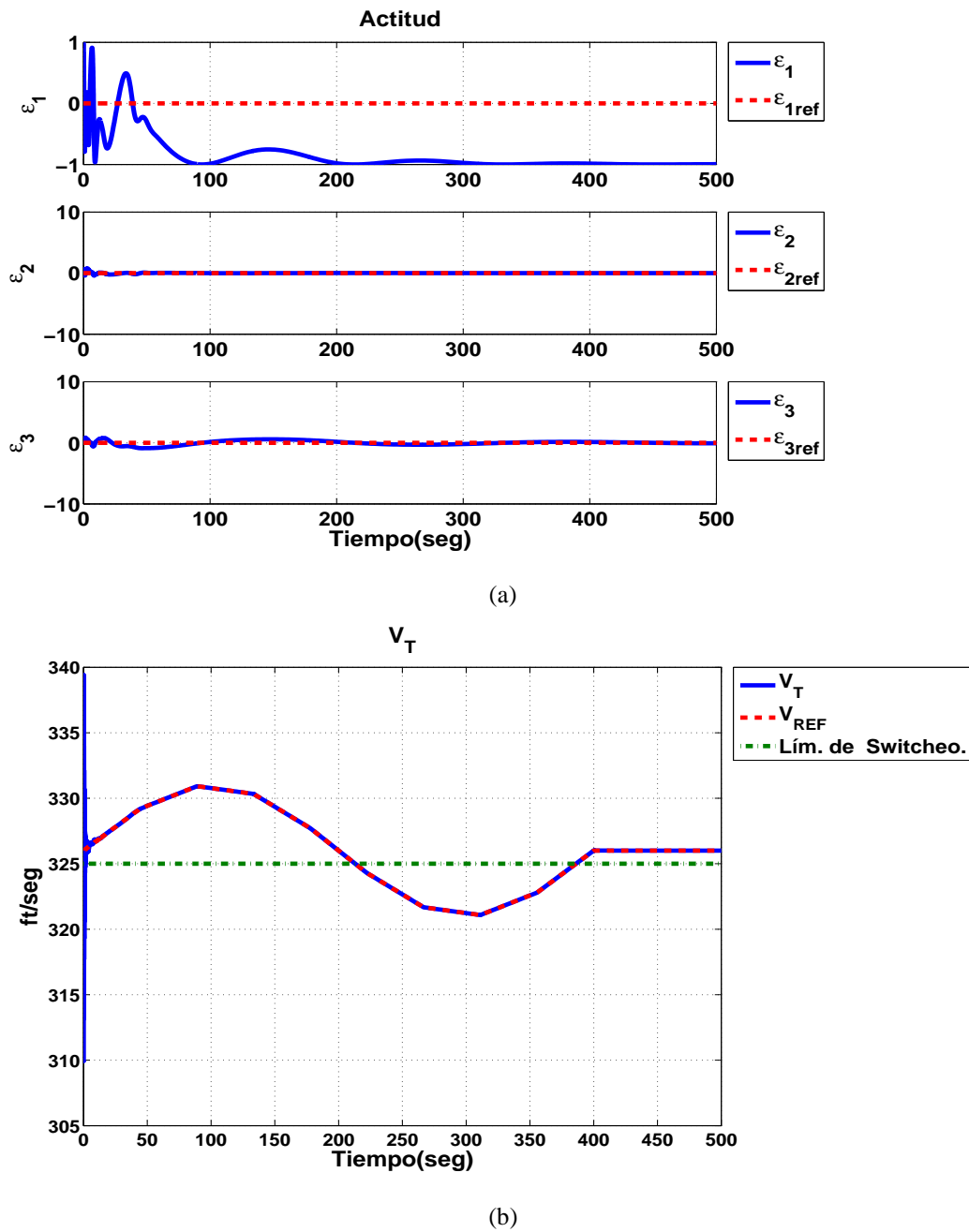


Figura 4.27: Dinámica de (a) La actitud (b) Dinámica de la velocidad traslacional. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija y perturbaciones de tipo exponenciales dependientes de los estados. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y la actitud de 0.5.

EFFECTOS DE PERTURBACIONES CUADRÁTICAS EN VELOCIDAD CRUCERO

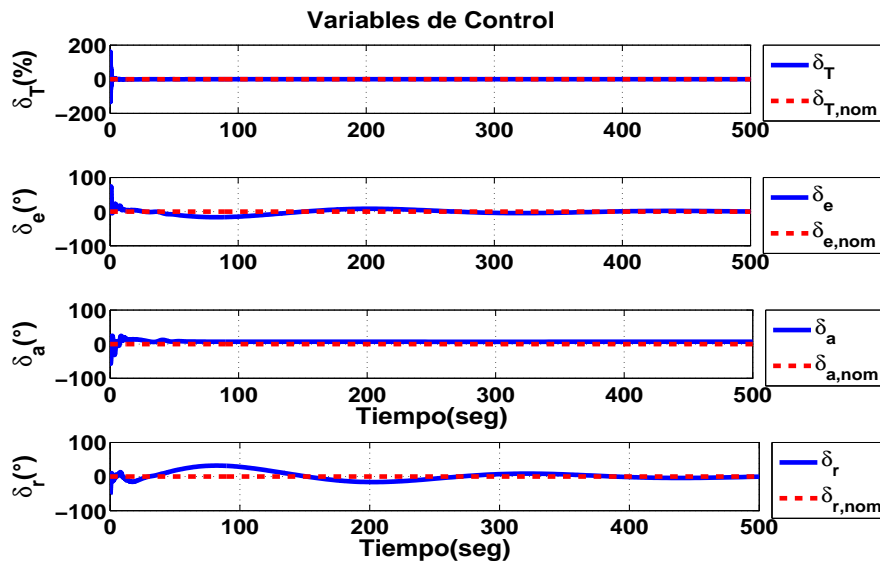


Figura 4.28: Dinámica de las entradas de control en condiciones de vuelo crucero. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija y perturbaciones de tipo cuadráticas dependientes de los estados. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T .

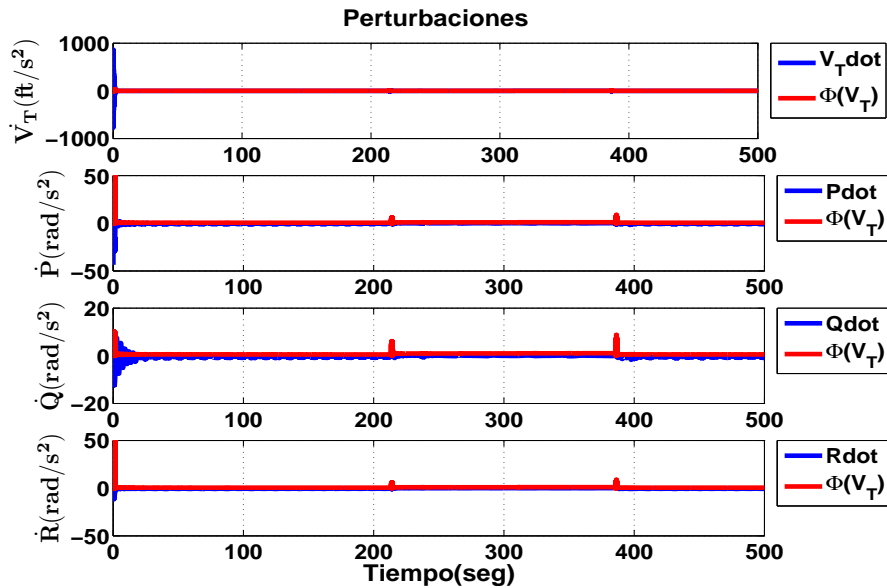
Efectos de perturbaciones de tipo exponenciales

Las Figuras 4.29, 4.30 y 4.31, muestran el impacto de perturbaciones de tipo exponenciales, las cuales depende de los estados. La Fig.4.26(a) muestra las variables de perturbación que son inducidas sobre las componentes de la aceleración angular en comparación con las componentes de la aceleración angular. La Fig.4.29(b) muestra el desempeño de las componentes de la velocidad angular, las cuales pese a mostrar un desempeño poco deseable no se inestabilizan.

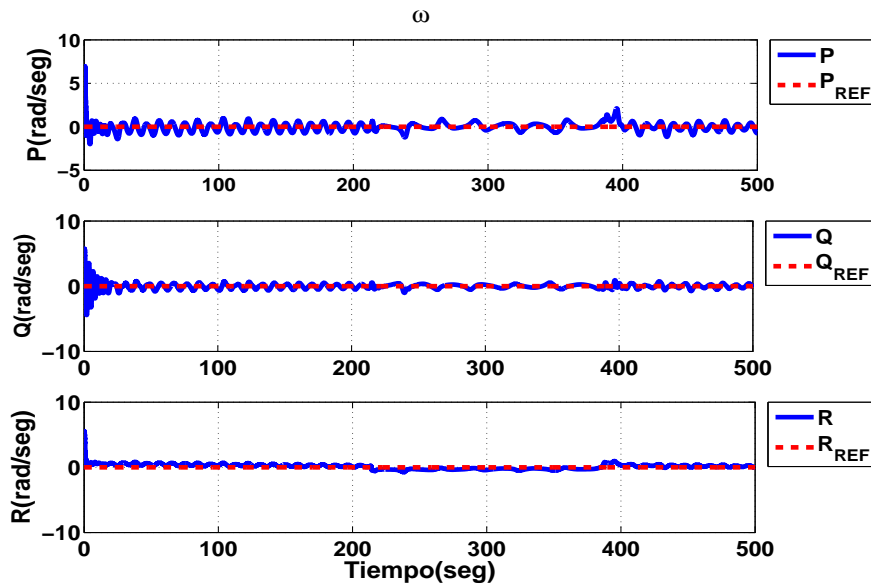
La velocidad traslacional mostrada en la Fig.4.30(b) al igual que la velocidad angular muestra un desempeño poco deseable pero estable. La Fig.4.30(a) muestran el impacto de las perturbaciones sobre el desempeño y estabilidad de las componentes de la orientación, al igual que antes se puede ver que la componente en ϵ_1 se inestabiliza, lo cual se puede interpretar como que el avión sube y baja sobre su eje vertical, es decir cambios de posición en x . Lo anterior deja ver que se activa un modo oscilatorio del avión. Finalmente la Fig.4.31 muestra las variables de control, las cuales actúan de acuerdo a los requerimientos del sistema.

Igual que antes únicamente se presentan resultados de perturbaciones en condiciones de velocidad crucero.

EFFECTOS DE PERTURBACIONES EXPONENCIALES EN VELOCIDAD CRUCERO



(a)



(b)

Figura 4.29: Dinámica de (a) La dinámica de \dot{V}_T y $\dot{\omega}$ y amplitud de las perturbaciones en comparación con la amplitud de cada componente de la aceleración angular y traslacional en condiciones de vuelo crucero (b) Dinámica de la velocidad angular. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija y perturbaciones de tipo exponenciales dependientes de los estados. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . Cada componente de ω parte de una condición inicial de 5 rad/seg.

EFFECTOS DE PERTURBACIONES EXPONENCIALES EN VELOCIDAD CRUCERO

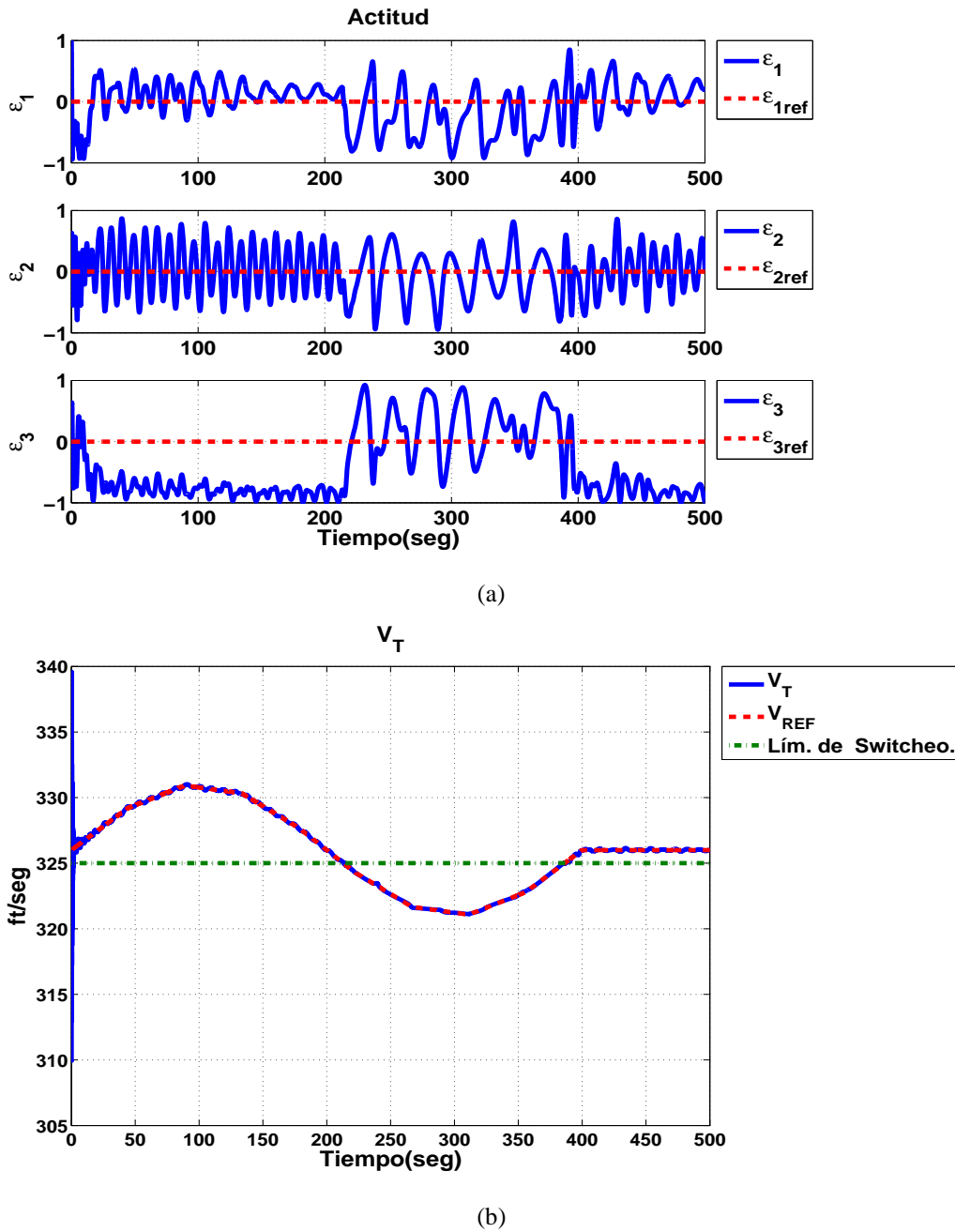


Figura 4.30: Dinámica de (a) La actitud (b) Dinámica de la velocidad traslacional. Se considera ${}^jK_{p,i}$ =fija y ${}^jK_{I,i}$ =fija y perturbaciones exponenciales dependientes de los estados. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T . V_T parte de una condición inicial de 310 ft/seg y la actitud de 0.5 .

EFFECTOS DE PERTURBACIONES EXPONENCIALES EN VELOCIDAD CRUCERO

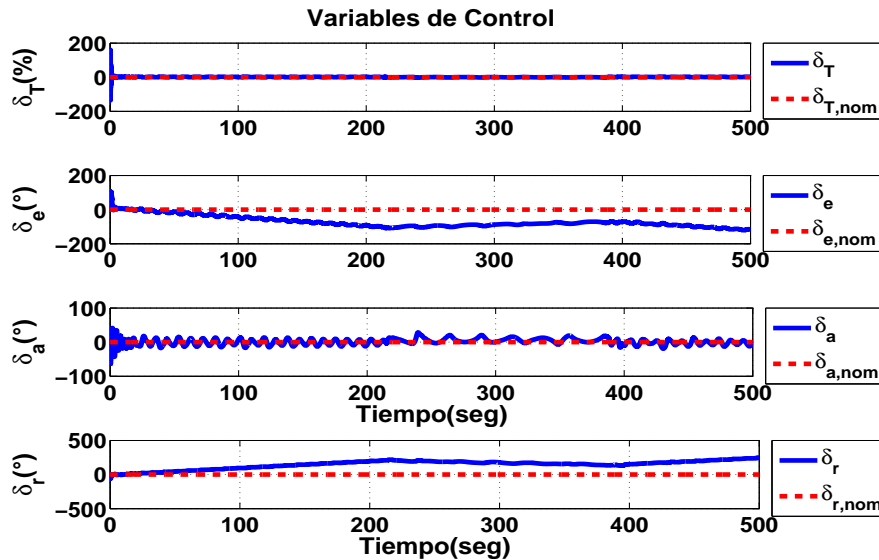


Figura 4.31: Dinámica de las entradas de control en condiciones de vuelo crucero. Se considera ${}^j K_{p,i}$ =fija y ${}^j K_{I,i}$ =fija y perturbaciones de tipo exponenciales dependientes de los estados. Criterio de conmutación basado en cambios en la velocidad V_T .

4.3. Discusión final

Los resultados principales de este capítulo son resumidos en dos lemas principales. Cada lema presenta su demostración formal, además se muestran resultados de simulaciones numéricas para ilustrar los resultados teóricos.

Del Lema 1 se prueba la existencia de un punto de equilibrio único en lazo cerrado para todas las particiones del dominio, motivadas por las no linealidades del modelo. Por otro lado se deriva un resultado de estabilidad para el control de velocidad usando un control lineal y un modelo no lineal por pedazos. El modelo incluye errores de modelado y perturbaciones no lineales. Lo anterior si el sistema puede reescribirse como en (3.8). Las condiciones del Lema 1 garantizan la estabilidad en cada modo de vuelo.

Del Lema 2 se establece una relación entre el tiempo de permanencia promedio y las ganancias del controlador con el fin de garantizar la estabilidad del sistema híbrido conmutado en lazo cerrado, se muestra que bajo un criterio de conmutación dependiente de los estados es posible operar de manera estable bajo condiciones de tiempo de permanencia promedio más pequeños. Las condiciones en el Lema 2 garantizan la estabilidad del sistema conmutado.

Por otro lado del análisis de los resultados de las simulaciones numéricas, se muestra que es posible garantizar la estabilidad del sistema bajo acción puramente proporcional, pero conforme ésta crece llega a un límite en el cual su efecto es perjudicial sobre la estabilidad y el desempeño del sistema, induciendo un comportamiento oscilatorio que desestabiliza el sistema. Además el margen de valores para las ganancias que estabilizan o desestabilizan al sistema conmutado es muy pequeño por lo cual se ve la necesidad de incluir ganancias integrales que permitan abrir este margen de valores.

En el sistema bajo una acción proporcional-integral, con una ganancia $^jK_{p,i}$ fija que garantice la estabilidad del sistema conmutado, se puede ver que los efectos de la ganancia integral ayudan a reducir el sesgo de las variables del sistema para alcanzar una referencia deseada. Lo anterior mejora el desempeño del sistema. Por otro lado si la ganancia integral se incrementa demasiado llega a un límite cuyo impacto provoca efectos negativos sobre el desempeño del sistema induciendo un comportamiento oscilatorio.

El sistema es sometido a diversas referencias de la señal de conmutación (dada por V_T), las cuales se representan como funciones cuya dinámica varía con el tiempo. En algunos casos la señal de referencia varía de forma lenta y en otros de forma rápida. De las simulaciones es posible observar que el sistema preserva estabilidad pese a transiciones rápidas en la señal de conmutación.

Cada modo del sistema (*i.e.* cada condición de vuelo) fue sometida a diferentes tiempos de residencia, mostrando que la condición impuesta por el Lema 2 no es de necesidad, sino de suficiencia. Pese a que el sistema fue simulado bajo condiciones que no cumplían con el criterio mínimo del tiempo de permanencia establecido, fue posible preservar la estabilidad.

Finalmente para probar la robustez del sistema ante perturbaciones, se inducen funciones dependientes de los estados con dinámicas cuadráticas y exponenciales que son adicionadas sobre cada uno de los estados. Lo anterior deja ver que es posible rechazar algún tipo de perturbaciones sin perder la estabilidad, lo cual afectaría el desempeño del sistema de manera negativa, sin embargo se inducen algunos modos oscilatorios.

La discusión presentada en este capítulo da una pauta para las conclusiones del trabajo de tesis aquí desarrollado, las cuales serán debidamente establecidas en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se resumen los resultados de este trabajo de tesis, así como aspectos importantes que conciernen al uso del controlador aquí presentado. La discusión sobre el trabajo a futuro sobre la implementación del controlador híbrido en aplicaciones aeronáuticas y de otros tipos, se trata en una sección al final del capítulo.

5.1. Conclusiones y logros

La aportación principal de esta tesis es mostrar que un simple controlador lineal tipo PI en lazo cerrado con una descripción NO lineal por pedazos del avión es capaz de garantizar estabilidad global de velocidad y que además, la orientación puede regularse en todo el dominio excepto de un número finito de puntos dados por la redundancia del mapa de cuaterniones.

La novedad del trabajo se centra en tres aspectos principalmente. Primero, en que se realiza un análisis de estabilidad del sistema no lineal por pedazos, el cual hasta ahora no ha sido abordado en la literatura. Segundo, se estudia el sistema en lazo cerrado bajo la suposición de la existencia de errores de modelado. Tercero, se estudia la relación entre las ganancias del control y su capacidad de estabilizar al sistema ante transiciones rápidas entre dinámicas continuas. En particular, debido a la naturaleza del controlador (híbrido) este es altamente adaptable a las condiciones de vuelo.

Por otro lado se listan las siguientes aportaciones :

- Se prueba la existencia de un punto de equilibrio único en lazo cerrado para todas las particiones del dominio.
- Se deriva un resultado de estabilidad de velocidad usando control lineal y un modelo no lineal por pedazos. El modelo incluye errores de modelado y perturbaciones no lineales.

- Se establece una relación entre el tiempo de permanencia promedio y las ganancias del controlador con el fin de garantizar la estabilidad del sistema híbrido en lazo cerrado. Se muestra que aumentar las ganancias del controlador, permite operar de manera estable bajo condiciones de tiempo de permanencia promedio más pequeños.
- Se muestra que cuando el mapa de orientación es no redundante, es posible regular la orientación usando controladores lineales.

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado se usa una partición del dominio dentro de la cual es admisible una descripción del sistema continua no lineal. Siempre que la trayectoria del sistema detone un cambio en el dominio de operación, el comportamiento continuo cambia. Con el fin de tener un sistema híbrido bien definido, se escoge tener un y sólo un comportamiento dinámico continuo por cada participación del dominio, además la unión de los dominios forman el espacio de estados. El criterio de conmutación puede ser dependiente del tiempo, del estado y/o de ambos. Con base en resultados de [59]; es posible mostrar que en bajo cualquiera que sea el tipo del criterio de conmutación, éste admite una descripción equivalente en términos de secuencia. Se muestra en esta tesis que si cada sub-sistema continuo está activo en promedio una cota mínima de tiempo, el origen del sistema será asintóticamente estable.

Se propone una estructura de control en cascada para resolver el problema de regulación de velocidad y orientación en un sistema subactuado. El problema de control de actitud se formula usando la restricción cinemática que relaciona la velocidad angular del cuerpo con cuaterniones, mitigando de esta manera el inconveniente de la redundancia. Se muestra que el control propuesto es capaz de estabilizar la dinámica no lineal del avión a pesar de perturbaciones debidas a la incertidumbre paramétrica o estructural del modelo, siempre y cuando estas sean diferenciables en cada partición del dominio. Las contribuciones se muestran principalmente en los resultados del Lema 1, referente a la estabilidad par cada modo de vuelo y el Lema 2, sobre la estabilidad del sistema conmutado.

Para ilustrar las ventajas del control propuesto se utilizan simulaciones numéricas con el modelo de un avión F-16; debido a la disponibilidad de información con la que se cuenta para este modelo, para fines de comparación con otros resultados en la literatura.

Con base en los resultados obtenidos en los Lemas 1 y 2, así con en las simulaciones numéricas, se plantean las siguientes conclusiones:

1. El modelo del avión admite una descripción no lineal por pedazos dada por la Ecuación (4.3). Aún más, este sistema bajo la ley de control (4.5) puede interpretarse como sistema singularmente perturbado, usando para este fin las ganancias integrales del controlador.

2. Se muestra que el esquema de control (4.5) garantiza estabilidad asintótica de la referencia de orientación y de velocidad de una descripción del avión como no lienal por pedazos.
3. Los resultados de los Lemas 1 y 2 dan garantía de estabilidad ante incertidumbre paramétrica o estructurales dependientes de los estados, siempre que ésta admita una descripción de la forma (3.8).
4. De acuerdo a las simulaciones numéricas es posible verificar que bajas ganancias proporcionales resultan en la inestabilidad del sistema; esto es, bajo condiciones en las cuales no se cumplen las condiciones del Lema 1.
5. Las simulaciones numéricas permiten verificar que altas ganancias integrales resultan en la inestabilidad del sistema; esto es, bajo condiciones en las cuales no se cumplen las condiciones del Lema 1.
6. Las simulaciones dan evidencia numérica de que las condiciones establecidas por el Lema 2 son sólo condiciones suficientes para asegurar la estabilidad del sistema conmutado. Lo anterior luego de someter al sistema a un régimen de conmutación muy rápido¹ sin observarse inestabilidades.
7. Es posible verificar numéricamente la robustez del controlador ante perturbaciones provenientes de incertidumbre, así como algunas perturbaciones aleatorias variantes en tiempo, con dinámicas lentas o rápidas.

Finalmente de esta tesis se derivan los siguientes productos:

- (a) Un artículo aceptado en la revista "Mathematical Problems in Engineering Aerospace and Sciences" editada por Cambridge Scientific Publishers (UK), en espera de publicación durante el 2011.
- (b) El artículo que lleva por título "Hybrid Tracking Control of Fixed Wing Aerial Vehicles" y que formó parte de los trabajos presentados en el congreso "Problems in Engineering, Aerospace and Sciences" (ICNPAA) en Sao Jose Dos Campos, Brasil.
- (c) Un artículo sometido al AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics.

5.2. Trabajo Futuro

Como se describe anteriormente la aportación principal de éste trabajo está sentada sobre resultados de estabilidad asintótica para cada modo de vuelo y para el esquema de control híbrido. Lo anterior con aplicaciones en aviones de ala fija. Aún es necesario profundizar en las aplicaciones a modelos más complejos considerando perturbaciones elásticas y combinaciones más complejas de los mandos de control (tabs, spoilers, diferentes tipos de alas, etc.).

¹Es decir bajo un régimen que no cumple las condiciones del Lema 2

Debido a que el Lema 1 únicamente alude a la existencia de ganancias que estabilizan el modo de vuelo en lazo cerrado, es necesario trabajar en la implementación de una metodología práctica que permita tener un modo rápido para calcular los márgenes en los cuales las ganancias sean efectivas en la tarea de estabilización. Lo anterior adquiere importancia ya que esta tarea tiene que repetirse para cada modo de vuelo haciéndola laboriosa.

Por otro lado, aún es necesario trabajar en el problema de seguimiento de trayectorias, lo cual sería un paso natural después del trabajo aquí desarrollado y por tanto trabajar en cuestiones de desempeño sobre el sistema conmutado incluyendo la dinámica de todos los modos de vuelo, incluso bajo condiciones de entradas de control acotadas.

Bibliografía

- [1] R.W. Beard, T.W. McLain, D.B. Nelson, D. Kingston , D. Johanson, “Decentralized Cooperative Aerial Surveillance Using Fixed-Wing Miniature UAVs”, *Proc. IEEE* , vol. 94, no. 7, pp. 1306 - 1324, Jul. 2006.
- [2] M.V. Cook, *Flight Dynamics Principles*, 2nd ed., Oxford, UK: Elsevier, 2007.
- [3] J. H. Blakelok, *Automatic Control of aircraft and missiles*, 2nd ed., NY: John Wiley and Sons, Inc., 1991.
- [4] W.E. Leithead, “Survey of gain-scheduling analysis and design”, *Int. Journal Control* , vol. 73, no. 11, pp. 1001 - 1025, 2000.
- [5] X. He, G.M. Dimirovski, J. Zhao “Control of switched LPV systems using common Lyapunov function method and F-16 aircraft application”, *Systems Man and Cybernetics Conf. IEEE*, Istanbul, 2010, pp. 386-392.
- [6] L. Bei, W. Fen, K. S. Wan , “Switching LPV Control of An F-16 Aircraft via Controller State Reset”, *Trans. Control Sys. Technol.*, vol. 14, no. 2, Mar. 2006.
- [7] J. Ousingsawat “H-infinity Gain Scheduling Control for Aircraft Trajectory Tracking using Linear Parameter Varying Model”, *Journal KMITNB*, vol. 17, no. 1, pp. 10-17, Jan. 2007.
- [8] D.J. Stilwell, “State-Space Interpolation for a Gain-Scheduled Autopilot”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 24, no.3, pp. 460-465, Jun. 2001.
- [9] S. Takashi : “Hybrid Control of Gain-Scheduling and Switching: A Design Example of Aircraft Control”, *American Control Conf.*, Denver, Co. 2003, pp. 4639-4644.
- [10] D. Enns , D. Bugajskia, R. Hendricka, G. Stein “Dynamic Inversion: an Envolving Methodology for Flight Control Design”, *Int. Journal of Control*, vol. 59, no. 1, pp. 71-91, 1994.
- [11] J.S. Dittrich, E.N. Johnson, “Multi-sensor Navigation System for an Autonomous Helicopter ”, *Proc. Digital Avionics Systems Conf.* , vol. 2, pp. 8C1-1 - 8C1-19, 2002.
- [12] Am Cho et al., “Fully Automatic Taxiing, Takeoff and Landing of a UAV using a Single-Antenna GPS Receiver only”, *Proc. Int. Control, Automation and Sys. Conf.*, Seoul, Kr. 2007, pp. 821 - 825.

- [13] O. Härkengard, T. Glad , “Vector Backstepping Design for Flight Control”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, San Francisco, Cal. 2007, pp. 1-10.
- [14] H.S. Ju, C.C. Tsai, S.W. Liu, “Design of Longitudinal Axis Full Envelope Control Law by Adaptive Backstepping”, *Proc. Int. Conf. Networking, Sensing and Control*, Taipei, Tw. 2004, pp.755-760.
- [15] T. Glad,O. Härkengard, “Backstepping control of a rigid body”, *Proc. IEEE Decision and Control Conf.* , Las Vegas, NV. 2002, pp. 3944-3945.
- [16] Bing-Wei Su, Yung-Feng Cao, “ Design of adaptive Backstepping Flight control System of a UAV”, *J. NAnjin University Aeronautics and Astronautics*, vol. 1, pp. 250-253, Mar. 2001.
- [17] L. Sonneveldt, Q. P. Chu, J. A. Mulder, “Nonlinear Flight Control Design Using Constrained Adaptive Backstepping”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 30, no. 2, pp. 322-336, 2007.
- [18] J. Robinson, U. Nilsson, “Design of a Nonlinear Autopilot for Velocity and Attitude Control using Block Backstepping”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, San Francisco, Cal. 2005, pp. 322-336.
- [19] J. Farrell, M. Sharma, M. Polycarpou, “Backstepping-Based Flight Control with Adaptive Function Approximation”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 28, no. 6, pp. 1089-1102, Aug. 2005.
- [20] S. Bi; H. Ji; S. Chen, “Robust attitude Control of aircraft Based on partitioned Backstepping”, *Int. Control and Automation Conf.*, Christchurch, New Zeland 2009, pp. 1757 - 1760.
- [21] D. J. Leith, W. E. Leithead, “Gain-Scheduled Control: Relaxing Slow Variation Requirements by Velocity-Based Design”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, no. 6, pp. 988-1000, Feb. 2000.
- [22] Richardson, T., Lowenberg, M., DiBernardo, M., and Charles, G., “Design of a Gain-Scheduled Flight Control System Using Bifurcation Analysis”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 29, no. 2, pp. 444-453, 2006.
- [23] Chih-Cheng Peng et al., “ZPETC Path-Tracking gain-scheduling design and real-time multi-task flight simulation for the automatic transition of tilt-rotor aircraft”, *Robotics Automation and Mechatronics Conf.*, Singapore, 2010, pp. 118-123.
- [24] N. Hammoudi, M. Lowenberg, “Dynamic Gain Scheduled Control of an F16 Model”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Honolulu, Hi. 2008, pp. 18-21.

- [25] Ren W.; Beard R.W., “CLF-based tracking control for UAV kinematic models with saturation constraints”, *Proc. IEEE Decision and Control conf.*, Maui, Hi. 2004, pp. 3924 - 3929.
- [26] R. Padhi, S. Balakrishnan, “Implementation of Pilot Commands in Aircraft Control: A New Approach Based on Dynamic Inversion”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Austin, Tex. 2003, pp. 11-14.
- [27] Tripathi A., Padhi R., “Robustness Study of a Dynamic Inversion Control Law for a High Performance Aircrafts”, *Proc. IEEE Int. Conf. Aerospace Science and Technology*, Bangalore, Io. 2008, pp. 26-28.
- [28] Looye G., Hans-Dieter J. “Design of Robust Dynamic Inversion Control Laws using Multi-Objective Optimization”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Monterey, Cal. 2002, pp. 1-10.
- [29] Luo Jia, Lan Edward, “Fuzzy Logic Controllers for Aircraft Flight Control ”, *International Series in Intelligent Technologies*, vo.3, 1995, pp. 85-124.
- [30] K. Peng, K. Y. Lum, E. K. Poh, D. Li, “Flight Control Design Using Hierarchical Dynamic Inversion and Quasi-steady States”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Honolulu, Hi. 2008, pp. 18-21.
- [31] Ioan Ursu, Felicia Ursu, “An intelligent ABS control based on fuzzy logic. Aircraft application”, *Proc. of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics*, Alba Iulia, Ro. 2003.
- [32] L. Blackmore, “A Probabilistic Particle Control Approach to Optimal, Robust Predictive Control”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Keystone, Col. 2006, pp. 21-24.
- [33] Y. Yamato, N. Sakamoto, M. Takahama, “Attitude stabilization of an aircraft via nonlinear optimal control based on aerodynamic data”, *ICCAS-SICE*, 2009, pp. 1806 - 1811.
- [34] D.F. Bassi, W. Fink, “Optimal attitude control parameters via Stochastic Optimization Framework for autonomous aircraft”, *Aerospace conference*, 2009, pp. 1-8.
- [35] Rubio F.R. y López M.J., *Control Adaptivo Y Robusto*, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, España 1996.
- [36] V. Stepanyan, K. Krishnakumar, N. Nguyen, L. V.n Eykeren, “Stability and Performance Metrics for Adaptive Flight Control”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Chicago, Il. 2009, pp. 10-13.
- [37] M. Santillo, M. Holzel, J. Hoagg, D. Bernstein, “Adaptive Control of the NASA Generic Transport Model Using Retrospective Cost Optimization”, *Proc. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Chicago, Il. 2009.

- [38] B. Andrievsky, A. Fradkov, “Combined adaptive autopilot for an UAV flight control”, *Proceedings of the 2002 International Conference on Control Applications*, Glaswog, Scotland, UK: 2002, pp. 290 - 291.
- [39] Dillon C.H., Speyer J.L., “Design of a Robust adaptive longitudinal flight control”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 23, no.1, pp. 325-331, 2000.
- [40] Zha Xu, Hu Yunan, Cui Pingyuan, “Hybrid control of backstepping incorporated with L_2 -gain analysis for aircraft attitude”, *Int. Congr. on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China 2004, pp. 5462 - 5465.
- [41] N. Nguyen, M. Bakhtiari-Nejad, Y. Huang, “Hybrid Adaptive Flight Control with Bounded Linear Stability Analysis”, *Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Hilton Head, Car. 2007.
- [42] S. F. Campbell , N.T. Nguyen , J. Kaneshige , K. Krishnakumar, “Parameter Estimation for a Hybrid Adaptive Flight Controller”, *Unmanned Unlimited Conference*, Seattle, Wa. 2009.
- [43] J. Roskam, *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls. Part I*, 3rd ed., NY:John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- [44] B. Etkin, L. D. Reid, “*Dynamics of Flight Stability and Control*”, 3rd ed., Lawrence, KS:Design, Allalysis and Research Corporation, 2001.
- [45] B.L. Stevens and F.L. Lewis. “*Aircraft Control and Simualtion*”, 2nd ed., NY:John Wiley and Sons, Inc., 2003.
- [46] A.I. Carmona, “*Aerodinámica y actuaciones del avión*”, 1st ed., ES: Ediciones Paraninfo, 2004.
- [47] K., Khalil Hassan “*Nonlinear control theroy*”, 3rd ed., NJ: Prentice Hall, 2002.
- [48] B. Garabat. (2011, Jan) *Datcom+* [Online]. Disponible: <http://www.holycows.net/datcom/>
- [49] *Digital Datcom Users Manual versión 1.2 Vol I*, 2nd ed., Public Domain Aeronautical Software, Santa Cruz, CA: 1999.
- [50] Wikipedia. (2010, March) *F-16 jet* [Online]. Disponible: <http://en.wikipedia.org/wiki/GeneralDynamicsF-16FightingFalcon>
- [51] Y. Takahara, S.M. Rock, “ Nonlinear Flight control using forebody tangential blowing”, *Journal of Guidance, Navigation and Control*, vol. 24, no.6, pp. 1157-1166, 2001.
- [52] Kung Chien-Chung and Yang Ciann-Dong, “ F-16 Nonlinear H_∞ Control”, *Proc. IEEE Decision and Control Conf.*, Las Vegas, Nevada 2002.

- [53] Kim Ki-Seok and Kim Youdan, “ Robust Backstepping control for Slew maneuver using nonlinear tracking function”, *IEEE Transactions on Control Sys. Technology*, vol. 11, no. 6, pp. 822 - 829, 2003.
- [54] C. Smith, A. Corripio, *Control Automático De Procesos (Teoría y Práctica)*, 2nd ed., MX: Limusa, 1991.
- [55] Gómez-Estern, F. (2002), *Control de sistemas no lineales basado en la estructura hamiltoniana; Escuela Superior de Ingenieros*, PhD. dissertation, Escuela Superior de Ingenieros, Sevilla Univ., 2001.
- [56] F. Gómez-Bravo, F. Cuesta y A. Ollero , *Planificación de trayectorias en robots móviles basada en técnicas de control de sistemas no holonómos*. Disponible: <http://www.cea-ifac.es/actividades/jornadas/XXIV/documentos/ro/174.pdf>
- [57] J. García de Jalón, E. Bayo , “*Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real Time Challenge*”(Mechanical Engineering Series), Santa Barbara, Cal: Springer Verlag, 1993.
- [58] F. Hoppensteadt, “Singular Perturbations on the Infinite interval”, *Trans. American Mathematical society* , vol. 123, No. 2, Jun 1966, pp. 521-535.
- [59] D. Liberzon, “Switching in Systems and Control”, 1rst ed., Boston, UK: Birkhauser publisher, 2003.
- [60] G. Matínez, P. Benoit, “Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial”, *Latin-American Journal of Physics Education*, vol. 2, no. 2, pp. 201-208, 2008.
- [61] A.N. Kolmogorov, S.V. Formin , *Elements of the theory of the functional analysis-I: Metric and normed sapaces*, Mineola , NY: Courier Dover Publications, 1957.
- [62] H. Kimura , “ Pole Assignment by Gain Output Feedback”, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 20, no. 4, pp. 509 - 516, Jan. 1975.

Apéndices

Apéndice A

Tablas derivadas aerodinámicas

Los coeficientes dimensionales para las derivadas de estabilidad y derivadas laterales se incluyen en las siguientes dos tablas que nos ayudan a encontrar fácilmente el valor de los coeficientes aerodinámicos adimensionales. Los nombres y las derivadas longitudinales de estabilidad relativamente más importantes se muestran en las siguientes dos tablas.

Las derivadas de estabilidad son estimadas de las propiedades geométricas, de las pendientes de los coeficientes aerodinámicos, del movimiento perturbado de un avión en pruebas de vuelo o de modelos probados en túneles de viento. Los coeficientes aerodinámicos son en general funciones no lineales. Para una aeronave dada las derivadas de estabilidad varían de acuerdo con los ángulos aerodinámicos (α, β), número Mach (efectos de compresión), empuje (efectos de la propulsión) y presión dinámica (efectos aeroelásticos).

Se pueden encontrar en la literatura la descripción de los métodos para determinar las derivadas aerodinámicas como en [43]. Las derivadas de estabilidad obtenidas de pruebas de vuelo son usualmente presentadas en gráficas aplicadas en condiciones de vuelo compensado, por ejemplo a una altitud dada haciendo variaciones del número Mach. Sin embargo una serie de puntos a lo largo de una curva en particular podría corresponder a diferentes combinaciones de empuje, ángulo de ataque y posición del elevador, puede ser aceptable para identificar cualidades de vuelo, pero representa dificultades para las simulaciones al construir una tabla con el valor de las derivadas. Estas tablas han sido tomadas de [45]. Para mayor detalle de los coeficientes y derivadas aerodinámicas el lector puede dirigirse a las referencias [45] y [43].

Derivadas	
$X_V = \frac{-\bar{q}S}{\bar{m}V_{T_e}}(2C_{D_e} + C_{D_V})$	$C_{D_V} \equiv V_{T_e} \frac{\partial C_D}{\partial V_T}$
$X_{T_V} = \frac{\bar{q}S}{\bar{m}V_{T_e}}(2C_{T_e} + C_{T_V})$	$C_{T_V} \equiv V_{T_e} \frac{\partial C_T}{\partial V_T}$
$X_\alpha = \frac{\bar{q}S}{\bar{m}}(C_{L_e} - C_{D_\alpha})$	$C_{D_\alpha} \equiv \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}$
$X_{\delta_e} = \frac{-\bar{q}S}{\bar{m}}C_{D_{\delta_e}}$	$C_{D_{\delta_e}} \equiv \frac{\partial C_D}{\partial \delta_e}$
$Z_V = \frac{-\bar{q}S}{\bar{m}V_{T_e}}(2C_{L_e} + C_{L_V})$	$C_{L_V} \equiv V_{T_e} \frac{\partial C_L}{\partial V_T}$
$Z_\alpha = \frac{-\bar{q}S}{\bar{m}}(C_{D_e} + C_{L_\alpha})$	$C_{L_\alpha} \equiv \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$
$Z_{\dot{\alpha}} = \frac{-\bar{q}S}{\bar{m}}C_{L_{\dot{\alpha}}}$	$C_{L_{\dot{\alpha}}} \equiv \frac{2V_{T_e}}{\bar{c}} \frac{\partial C_L}{\partial \dot{\alpha}}$
$Z_q = \frac{-\bar{q}S\bar{c}}{2\bar{m}V_{T_e}C_{L_q}}$	$C_{L_q} \equiv \frac{2V_{T_e}}{\bar{c}} \frac{\partial C_L}{\partial Q}$
$Z_{\delta_e} = \frac{-\bar{q}S\bar{c}}{\bar{m}}C_{L_{\delta_e}}$	$C_{L_{\delta_e}} \equiv \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e}$
$M_V = \frac{-\bar{q}S\bar{c}}{J_Y V_{T_e}}(2C_{m_e} + C_{m_V})$	$C_{m_V} \equiv V_{T_e} \frac{\partial C_m}{\partial V_T}$
$M_{T_V} = \frac{-\bar{q}S\bar{c}}{J_Y V_{T_e}}(2C_{m_T} + C_{m_{T_V}})$	$C_{m_{T_V}} \equiv V_{T_e} \frac{\partial C_{m_T}}{\partial V_T}$
$M_\alpha = \frac{-\bar{q}S\bar{c}}{J_Y}C_{m_\alpha}$	$C_{m_\alpha} \equiv \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$
$M_{\dot{\alpha}} = \frac{-\bar{q}S\bar{c}}{J_Y} \frac{\bar{c}}{2V_{T_e}}C_{m_{\dot{\alpha}}}$	$C_{m_{\dot{\alpha}}} \equiv \frac{2V_{T_e}}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}}$
$M_q = \frac{-\bar{q}S\bar{c}}{J_Y} \frac{\bar{c}}{2V_{T_e}}C_{m_q}$	$C_{m_{\dot{\alpha}}} \equiv \frac{2V_{T_e}}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial Q}$
$M_{\delta_e} = \frac{-\bar{q}S\bar{c}}{J_Y}C_{m_{\delta_e}}$	$C_{m_{\delta_e}} \equiv \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e}$

Tabla A.1: Derivadas adimensionales contra longitudinales dimensionales

Derivadas	
$Y_\beta = \frac{-\bar{q}S}{\bar{m}}C_{Y_\beta}$	$C_{Y_\beta} \equiv \frac{\partial C_Y}{\partial \beta}$
$Y_p = \frac{\bar{q}Sb}{2\bar{m}V_{Te}}C_{Y_p}$	$C_{Y_p} \equiv \frac{2V_{Te}}{b} \frac{\partial C_Y}{\partial P}$
$Y_r = \frac{\bar{q}Sb}{2\bar{m}V_{Te}}C_{Y_r}$	$C_{Y_r} \equiv \frac{2V_{Te}}{b} \frac{\partial C_Y}{\partial R}$
$Y_{\delta_r} = \frac{\bar{q}S}{\bar{m}}C_{Y_{\delta_r}}$	$C_{Y_{\delta_r}} \equiv \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_r}$
$Y_{\delta_a} = \frac{\bar{q}S}{\bar{m}}C_{Y_{\delta_a}}$	$C_{Y_{\delta_a}} \equiv \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_a}$
$L_\beta = \frac{\bar{q}Sb}{J'_x}C_{l_\beta}$	$C_{l_\beta} \equiv \frac{\partial C_l}{\partial \beta}$
$L_p = \frac{\bar{q}Sb}{J'_x} \frac{b}{2V_{Te}}C_{l_p}$	$C_{l_p} \equiv \frac{2V_{Te}}{b} \frac{\partial C_l}{\partial P}$
$L_r = \frac{\bar{q}Sb}{J'_x} \frac{b}{2V_{Te}}C_{l_r}$	$C_{l_r} \equiv \frac{2V_{Te}}{b} \frac{\partial C_l}{\partial R}$
$L_{\delta_a} = \frac{\bar{q}Sb}{J'_x}C_{l_{\delta_a}}$	$C_{l_{\delta_a}} \equiv \frac{\partial C_l}{\partial \delta_a}$
$L_{\delta_r} = \frac{\bar{q}Sb}{J'_x}C_{l_{\delta_r}}$	$C_{l_{\delta_r}} \equiv \frac{\partial C_l}{\partial \delta_r}$
$N_\beta = \frac{\bar{q}Sb}{J'_z}C_{n_\beta}$	$C_{n_\beta} \equiv \frac{\partial C_n}{\partial \beta}$
$N_p = \frac{\bar{q}Sb}{J'_z} \frac{b}{2V_{Te}}C_{n_p}$	$C_{n_p} \equiv \frac{2V_{Te}}{b} \frac{\partial C_n}{\partial P}$
$N_r = \frac{\bar{q}Sb}{J'_z} \frac{b}{2V_{Te}}C_{n_r}$	$C_{n_r} \equiv \frac{2V_{Te}}{b} \frac{\partial C_n}{\partial R}$
$N_{\delta_a} = \frac{\bar{q}Sb}{J'_z}C_{n_{\delta_a}}$	$C_{n_{\delta_a}} \equiv \frac{\partial C_n}{\partial \delta_a}$
$N_{\delta_r} = \frac{\bar{q}Sb}{J'_z}C_{n_{\delta_r}}$	$C_{n_{\delta_r}} \equiv \frac{\partial C_n}{\partial \delta_r}$

Tabla A.2: Derivadas adimensionales contra derivadas laterales/direccionales dimensionales

Apéndice B

Datos de las simulaciones numéricas

Este anexo se ocupa de mostrar los valores numéricos utilizados para obtener las simulaciones de los resultados del Capítulo 4. Las tablas de datos aerodinámicos y algoritmos de interpolación asociados a estas tablas que proporcionan los valores de los coeficientes aerodinámicos adimensionales del avión F-16 fueron obtenidos usando el código fuente del apéndice A de [45].

La condición de conmutación está dada por cambios en la velocidad total del avión V_T , debido a que el avión pasa mayor tiempo en la condición de vuelo crucero (vuelo recto con alas a nivel). La Fig.B.2 muestra el esquema implementado en simulaciones con ayuda de SIMULINK de MATLAB.

B.1. Avión F-16

Para poder obtener resultados sobre la estrategia de control, se utilizan los datos del avión F-16. Así que se hará una breve descripción de éste tipo de avión. El F-16 fighting falcon de General dynamics, es un jet de multi-propósito de combate, desarrollado por “General dynamics” para la Fuerza Aérea de Estados Unidos. Diseñado como un ultraligero de combate, se convirtió en un avión de de multiples aplicaciones.

El F-16 es un avión de un sólo motor, supersónico, multi-aplicaciones táctico. El F-16 fue diseñado para ser un avión de combate rentable “caballo de batalla” que pudiera realizar varios tipos de misiones. Es mucho más pequeño y más ligero que sus predecesores, aunque utiliza la aerodinámica y aviónica de éstos. Utiliza tecnología fly-by-wire (RSS/PF) del sistema de control de vuelo, para lograr un rendimiento mejorado en maniobras de vuelo. El F-16 es ágil y puede alcanzar una velocidad máxima superior a Mach 2.

El diseño del F-16 cuenta con una forma en la planta del ala tipo delta recortada con una combinación fuselaje-ala, cuenta con dispositivos de control del vórtice. Esta dotado de entradas de aire para suministrar el flujo de aire para el motor de la turbina de propulsión. Es un avión convencional de tres superficies móviles dadas por la cola horizontal o “estabilizador” , un par de aletas ventrales al borde de salida del ala (alergones) y una superficie móvil en la cola vertical (estabilizador vertical o rudder). Además cuenta con una burbuja sin marco para una mejor visibilidad y un tren de aterrizaje de tipo triciclo retráctil (rueda orientable en la nariz).

Finalmente la palanca de control esta ubicada de manera lateral para facilitar el control durante maniobras de combate.

B.2. Valores numéricos y diagramas de simulaciones

Con base en las exigencias de los objetivos de control (3.9) y (3.9) y considerando las dificultades asociadas al diseño de leyes de control de movimiento del avión, se propone una estructura de control híbrido conmutado. El control híbrido conmutado consta de un criterio de conmutación y de s controles correspondientes a cada modo. Cada control de modo está constituido de dos lazos de control asignados para resolver los objetivos de control. Cada lazo de control consta de una ley de control lineal PI.

A continuación se muestran los valores numéricos del sistema usado para las simulaciones, así como los valores numéricos de las ganancias proporcionales e integrales de los PI's de cada lazo de control.

Datos Vuelo recto y nivelado

A continuación se muestran los valores numéricos utilizados en las simulaciones para la conmutación entre el Modo 1 y Modo 2 (*i.e.* $j = 1, 2$).

$$A = \begin{bmatrix} -0,127 & -235 & -0,0028 & 5e-5 & -9,51 & 2e-4 & 0,314 \\ -7e-4 & -,969 & 1,5e-5 & -4e-5 & ,908 & -1e-5 & -2e-4 \\ 1e-8 & 2e-5 & -,322 & ,298 & 8e-7 & -,948 & -3e-8 \\ -3e-7 & -,00248 & -62,5 & -3 & 3e-4 & 1,99 & 0 \\ 9e-4 & -4,56 & 9,2e-5 & 0 & -1,58 & -,00287 & 0 \\ -3e-6 & -,00188 & 7,67 & -,262 & ,00254 & -,629 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

La dinámica de la propulsión se asume en estado estacionario.

$$B = \begin{bmatrix} -0,3413 & 6e-6 & -,244 & 2e-5 \\ 0,0002 & 0 & -,00209 & 0 \\ 0,0000 & 3e-4 & 2e-8 & 8e-4 \\ 0 & -,645 & 0 & ,126 \\ 0 & 0 & -,199 & 0 \\ 0 & -,018 & 0 & -,0657 \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Las ganancias proporcionales ${}^jK_{p,i}$ e integrales ${}^jK_{I,i}$ para el lazo de control de velocidad ($i = 1$) y lazo de control de orientación ($i = 2$) son matrices reales tal que ${}^jK_{p,i}, {}^jK_{I,i} \in \mathbb{R}^4$.

Datos Vuelta a nivel

$$A_g = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9e-3 & -0,9693 & -3,35e-04 & -4e-05 & 0,9 & -1e-05 \\ -2e-08 & 2e-05 & -0,3219 & 0,298 & 8e-07 & -0,948 \\ -3e-07 & -24,8e-04 & -62,5 & -3 & 3e-04 & 1,99 \\ 0 & -4,55955 & 5,42e-04 & 0 & -1,58 & -2,87e-03 \\ -3e-06 & -1,88e-01 & 7,67 & -0,262 & 2,54e-03 & -6,29e-01 \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

La dinámica de la propulsión se asume en estado estacionario.

$$B_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7609 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0000 & 0 & 2e-8 & 0 \\ 0,0003 & 0 & 0 & 0,1 \\ -0,9783 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,0033 & -0,018 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

Recuerde que en este modo no se tiene lazo de control de orientación. Las ganancias proporcionales ${}^jK_{p,1}$ e integrales ${}^jK_{I,1}$ para el lazo de control de velocidad son matrices reales tal que ${}^jK_{p,1}, {}^jK_{I,1} \in \mathbb{R}^4$.

Para ambos casos las matrices siguientes son las mismas :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.5)$$

$$D = 0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (B.6)$$

El criterio de conmutación esta dada programada como se muestra en la figura B.1. El valor de la referencia es 325 ft/seg, por lo que para velocidades mayores permanece en el Modo-1 o Modo-3 y para velocidades menores el sistema permanece en la Modo-2 o Modo-4, según sea el caso de la simulaciones. Finalmente en la Fig.B.2 se muestra el modelo del avión programado en SIMULINK junto con el criterio de conmutación.

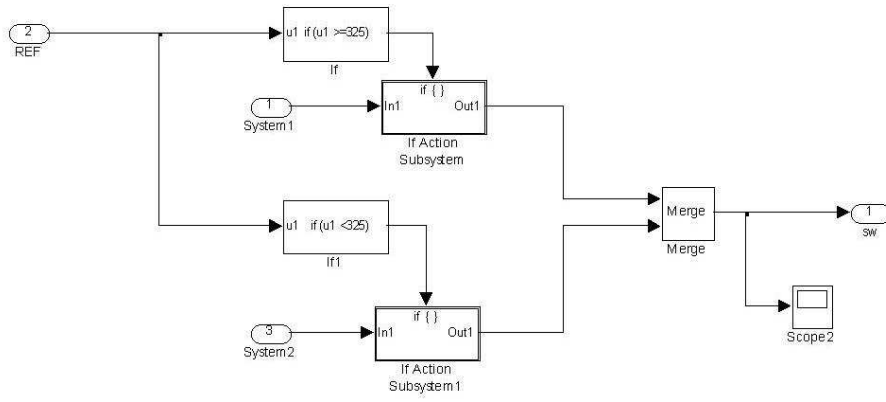


Figura B.1: Ley de conmutación

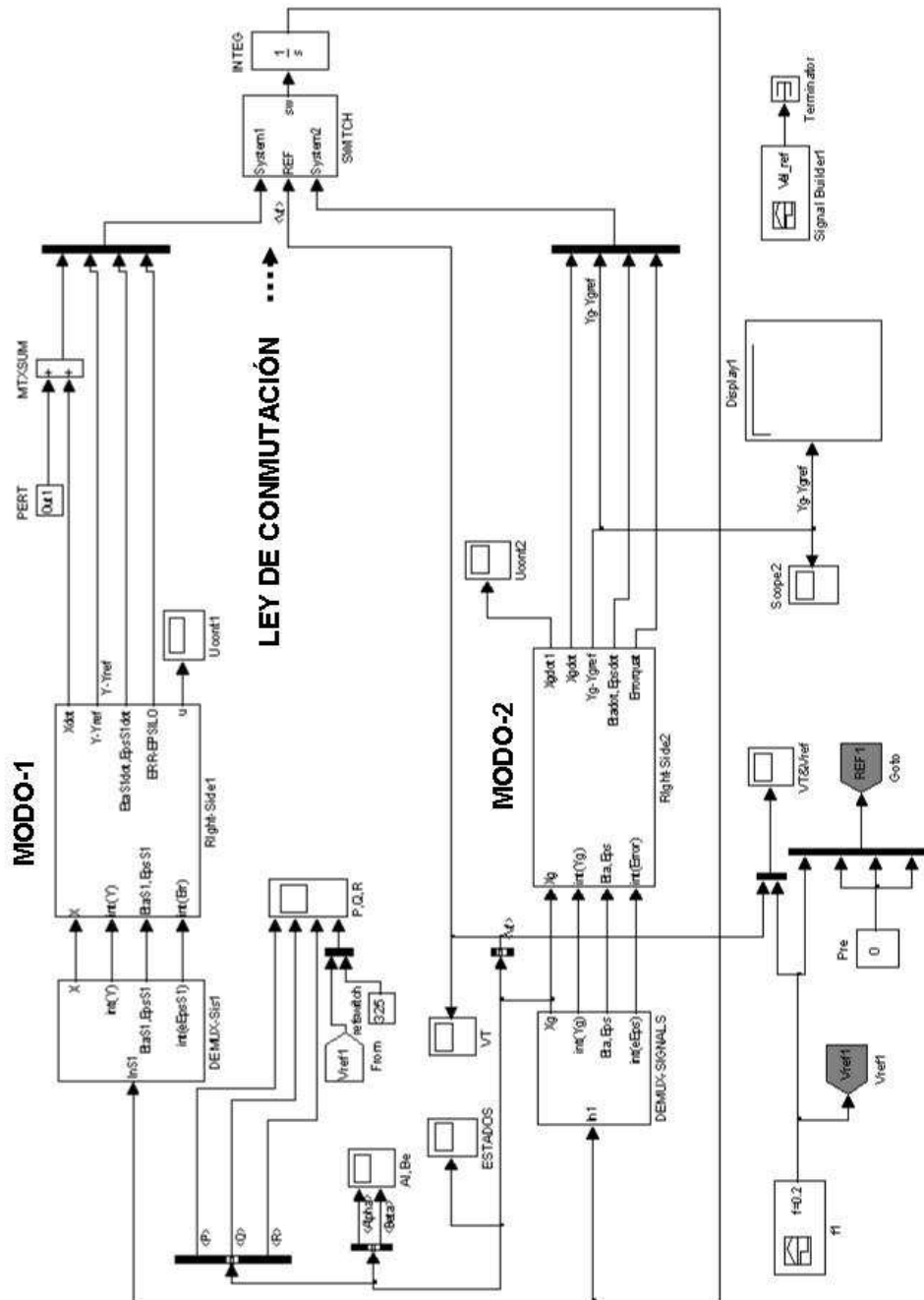


Figura B.2: Modelo del avión

Apéndice C

La matriz ${}^jB^j K_{I,1} C$

Proposición 3 *Existen valores propios reales positivos de la matriz ${}^jB^j K_{I,1} C$, tal que ésta es positiva semidefinida.*

Demostración. Sean la matriz C , $K_{I,1}$ y ${}^jB^j$ como sigue:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$K_{I,1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

y

$${}^jB^j = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Observe que la matriz C tiene dos columnas llenas de ceros . Al aplicar operaciones básicas de algebra lineal, la matriz $K_{I,1} C$ es

$${}^jK_{I,1}C = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & 0 & 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & 0 & 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

Entonces dada la estructura de jB , la matriz ${}^jB^jK_{I,1}C$ es

$${}^jB^jK_{I,1}C = \begin{bmatrix} \sum b_1jk_{j1} & 0 & 0 & \sum b_1jk_{j2} & \sum b_1jk_{j3} & \sum b_1jk_{j4} \\ \sum b_2jk_{j1} & 0 & 0 & \sum b_2jk_{j2} & \sum b_2jk_{j3} & \sum b_2jk_{j4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum b_6jk_{j1} & 0 & 0 & \sum b_6jk_{j2} & \sum b_6jk_{j3} & \sum b_6jk_{j4} \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

donde $j = 1, \dots, 4$. Note que las columnas 2 y 3 de ${}^jB^jK_{I,1}C$ son cero. Los valores de la ganancia integral se pueden asignar arbitrariamente (16 valores), lo que implica que es posible asignar la estructura de 16 entradas de la matriz ${}^jB^jK_{I,1}C$. La matriz ${}^jB^jK_{I,1}C$ tiene 36 elementos, de los cuales 12 son ceros (de las columnas 2 y 3) y 16 elementos asignables mediante las entradas de ${}^jK_{I,1}$, por lo que en total se tiene 8 elementos que no se pueden asignar. Ahora suponga que se eligen valores de ${}^jK_{I,1}$ para que la matriz ${}^jB^jK_{I,1}C$ tenga la siguiente forma:

$${}^jB^jK_{I,1}C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & a_6 & a_7 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

con $\lambda_j > 0$. Entonces se escogen valores de ${}^jK_{I,1}$ tales que la estructura de la matriz quede asignada en el primero, cuarto, quinto y sexto renglón, es decir una “matriz diagonal”. Los valores $a_1 - a_8$ son los valores que no se pueden asignar y pueden tener cualquier valor. Ya que los λ_j son arbitrarios, entonces pueden elegirse reales positivos. Dada la estructura de la matriz en (C.6) sus valores propios son $\{0, 0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, lo cual la hace positiva semidefinida y por lo tanto el rango máximo que podrá tener es 4.

□