



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Estudio Comparativo de Técnicas de Identificación
Aplicadas a Sistemas Mecánicos**

Tesis que presenta

Nayeli Maira López Alanis

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Directores de la Tesis:

Dr. Arturo Zavala Río

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2010



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Estudio Comparativo de Técnicas de Identificación Aplicadas a Sistemas Mecánicos** presentada para obtener el Grado de Maestra en Ciencias Aplicadas en la opción Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Nayeli Maira López Alanis** y aprobada el **15 de Julio de 2010** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
(Codirector de la tesis)

Dr. Jesús Leyva Ramos
(Presidente de la tesis)

Dr. Daniel Ulises Campos Delgado
(Sinodal de la tesis)

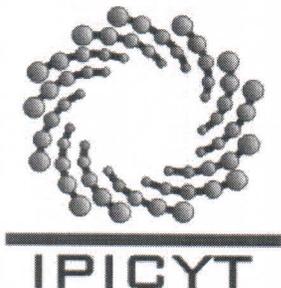
Dr. Hugo Cabrera Ibarra
(Sinodal de la tesis)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección de los Drs. Arturo Zavala Río y David Antonio Lizárraga Navarro.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número de registro 211442 y un apoyo financiero cuya clave del proyecto es CB-2005-01-48281.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 020 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos esta asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 15 días del mes de julio del año 2010, se reunió a las 17:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Jesús Leyva Ramos	Presidente	IPICYT
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Secretario	IPICYT
Dr. Daniel Ulises Campos Delgado	Sinodal externo	UASLP
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCION DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustenta la C.

Nayeli Maira López Alanis

sobre la Tesis intitulada:

Estudio Comparativo de Técnicas de Identificación Aplicadas a Sistemas Mecánicos

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Arturo Zavala Río
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

El Jurado, después de deliberar, determino

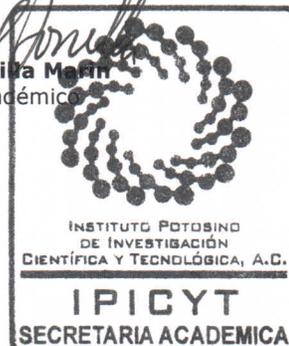
APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 18:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., Mexico, a los 15 días del mes de julio de 2010.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento de Asuntos Escolares

Dr. Marcial Bohira Morán
Secretario Académico



Dedicatorias

A mi mami por todo su amor, su esfuerzo y lucha constante por tratar de hacer de mi una mejor persona, gracias... te amo.

A mis hermanos Alberto y Jocelin, por tantas risas y buenos momentos que hemos pasado juntos, por tolerarme y ser mis mejores aliados ante las dificultades de la vida, los amo.

A Christian por tantos momentos inolvidables, amor, apoyo incondicional, y por caminar a mi lado durante estos años.

Creo en sol... incluso cuando no brilla; creo en el amor... incluso cuando no se muestra; creo en Dios... incluso cuando no habla.

Agradecimientos

A mis asesores Dr. Arturo Zavala Río y Dr. David Antonio Lizárraba Navarro por el tiempo invertido en este trabajo de tesis, pero sobre todo por su paciencia y apoyo brindado durante la realización del mismo.

A CONACyT por el apoyo económico brindado durante el desarrollo de esta tesis.

Contenido

Constancia de aprobación de la tesis	Página iii
Créditos institucionales	Página v
Acta de examen	Página vii
Dedicatorias	Página ix
Agradecimientos	Página xi
Abreviaturas	Página xv
Resumen	Página xvii
Abstract	Página xvii
Índice general	Página xix

Abreviaturas

MC	Mínimos Cuadrados
VI	Variabes Instrumentales
MDI	Modelo Dinámico Implícito
MRDF	Modelo de Regresión de Dinámica Filtrada
MREP	Modelo de Regresión de Energía Proporcionada
MRPF	Modelo de Regresión de Potencia Filtrada
PER	Promedio del Error Relativo
MER	Máximo Error Relativo
PEA	Promedio del error Absoluto
t_c	tiempo de convergencia

Resumen

En este trabajo se compara varios métodos y modelos de identificación para sistemas mecánicos. En particular se consideran los métodos de (1) mínimos cuadrados y (2) variables instrumentales, así como cuatro modelos de regresión: **(a)** Modelo Dinámico Implícito (MDI); **(b)** Modelo de Regresión de Dinámica Filtrada (MRDF); **(c)** Modelo de Regresión de Energía Proporcionada (MREP) y **(d)** Modelo de Regresión de Potencia Filtrada (MRPF). El primer método se implementa con los cuatro modelos, mientras que el segundo sólo con los dos primeros, es decir, el MDI y el MRDF. La comparación se realiza tanto mediante simulaciones numéricas como con datos experimentales obtenidos mediante una plataforma experimental que implementa un péndulo motorizado. Se definen cuatro criterios para la comparación cuantitativa de los métodos y modelos, a saber: **(a)** Promedio del error relativo; **(b)** Máximo error relativo; **(c)** Promedio del error absoluto de la posición y **(d)** Tiempo de convergencia. Se reportan los resultados de forma sintética y se obtienen, entre otras, las siguientes conclusiones: (1) los modelos basados en el principio de la conservación de la energía son sensibles al tipo de entrada que excita al sistema; (2) el método de mínimos cuadrados, a pesar de ser óptimo dentro de la clase de estimadores lineales sin sesgo, presenta cierta sensibilidad al ruido y a entradas que no excitan lo suficientemente al sistema; (3) el método de variables instrumentales es una alternativa útil para contrarrestar el efecto de ruido en las señales medidas.

Abstract

This work, in the framework of system identification techniques, presents a comparison of several methods and models commonly used for the identification of mechanical systems. In particular, the two methods used are (1) least squares and (2) instrumental variables, and the four regression models considered are **(a)** Implicit Dynamics Method (IDM); **(b)** Filtered Dynamics Regression Method (FDRM); **(c)** Supplied Energy Regression Model; and **(d)** Filtered Power Regression Model. The first method is implemented with all four models, whereas the second is only implemented with the first two models, namely IDM and FDRM. The comparisons are made both via numerical simulations and analysis of measured data obtained from an experimental platform which implements an actuated (motorized) pendulum. Four different criteria are employed to carry out the quantitative comparisons, to wit: **(a)** Mean relative error; **(b)** Maximum relative error; **(c)** Mean absolute value of position errors; and **(d)** Convergence (or settling) time. The results are reported in a concise way and conclusions are finally drawn. The results are presented in a synthesized manner and we obtain, among others, the following conclusions: (1) the models based on the energy conservation principle are sensible to the type of input that excites the system; (2) the least squares method, despite being optimal within the class of estimadores lineales sin sesgo, shows certain sensibility to noise and input signals which don't produce a significant excitation on the system; (3) the instrumental variables method is a useful alternative for reducing the effect of noise in the measured signals.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Principios e importancia de la identificación	1
1.2. Antecedentes teóricos	1
1.2.1. Concepto de robot manipulador	2
1.2.2. Modelo cinemático	3
1.2.3. Modelo dinámico	4
1.2.4. Modelado de la fricción	5
1.2.5. Propiedad de linealidad en los parámetros de la energía total y el modelo dinámico de un robot manipulador	6
1.3. Identificación del modelo	8
1.4. Objetivo de la tesis	8
2. Identificación	10
2.1. Métodos de identificación	10
2.1.1. Mínimos cuadrados	10
2.1.2. Variables instrumentales	14
2.2. Modelos de identificación	15
2.2.1. Modelo dinámico implícito	16
2.2.2. Modelo de regresión de dinámica filtrada	17
2.2.3. Modelo de regresión de energía proporcionada	17
2.2.4. Modelo de regresión de potencia filtrada	18
2.3. Modelos de identificación aplicados a un péndulo simple.	19
3. Simulaciones	24
3.1. Entorno de Simulación	24
3.2. Mínimos cuadrados	25
3.3. Variables instrumentales	28
4. Implementación experimental	33
4.1. Entorno Experimental	33
4.2. Mínimos cuadrados	34
4.3. Variables instrumentales	34

5. Estudio Comparativo	38
5.1. Criterios de evaluación	38
5.2. Resultados simulados	39
5.2.1. Mínimos cuadrados	40
5.2.2. Variables instrumentales	45
5.3. Resultados experimentales	48
5.3.1. Mínimos cuadrados	49
5.3.2. Variables instrumentales	50
6. Conclusiones	53

Capítulo 1

Introducción

El propósito de este capítulo es el de presentar los conceptos básicos para realizar el estudio de las técnicas de identificación paramétrica aplicados a sistemas mecánicos. En primer término se presentan los principios e importancia de la identificación, seguido de los antecedentes teóricos. Posteriormente se explica la identificación del modelo y por último se dan los objetivos de la tesis.

1.1. Principios e importancia de la identificación

Para simular o controlar los movimientos de un robot manipulador adecuadamente y con precisión, es necesario disponer de su modelo dinámico con tanta exactitud como sea posible. Esto implica conocer los parámetros del modelo dinámicos del sistema. Aunque existen esquemas de control robusto que pueden tolerar algunos errores en la exactitud de los parámetros del modelo dinámicos, otros suponen su conocimiento preciso. Los valores exactos de los parámetros del modelo dinámicos normalmente son desconocidos, incluso para el fabricante del robot manipulador. Una forma de resolver este problema es desmantelar los componentes del robot manipulador y realizar una serie de medidas, para evaluar los parámetros del modelo dinámicos. Esta técnica no es fácil de implementar y podría ser imposible para todo fin práctico medir las cantidades relevantes [3, 6, 2].

Para estimar los parámetros del modelo dinámicos de un robot manipulador, se utilizan técnicas de identificación paramétrica, en las cuales es importante mencionar que se consume una cantidad considerable de tiempo y esfuerzo. Pero es necesario, ya que se debe recordar que una buena identificación lleva a un buen control o a una buena simulación [12, 11].

1.2. Antecedentes teóricos

La finalidad de esta sección es presentar los conceptos básicos necesarios para realizar el estudio de la identificación paramétrica aplicada a robots manipuladores. En primer término se presenta el concepto de robot manipulador, seguido del modelo dinámico y cinemático, posteriormente se comenta el modelado de la fricción. Por último se menciona la propiedad de linealidad en los parámetros de la energía total y el modelo dinámico de un robot manipulador.

1.2.1. Concepto de robot manipulador

En la literatura se cuenta con varias definiciones de robots manipuladores. En este trabajo de tesis se adoptará la siguiente definición: mecánicamente un robot manipulador es un brazo mecánico articulado formado de eslabones conectados a través de uniones o articulaciones que permiten un movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos [13].

El mecanismo de un robot manipulador consiste de dos distintos subsistemas, uno es el efector final y el otro es la estructura mecánica articulada (ver figura 1.1). El primero constituye la interfaz con la cual el robot interactúa con su ambiente; este dispositivo está previsto para manipular objetos o para transformarlos. El segundo traslada al efector final a una posición y orientación dadas, con la velocidad y aceleración deseadas [6].

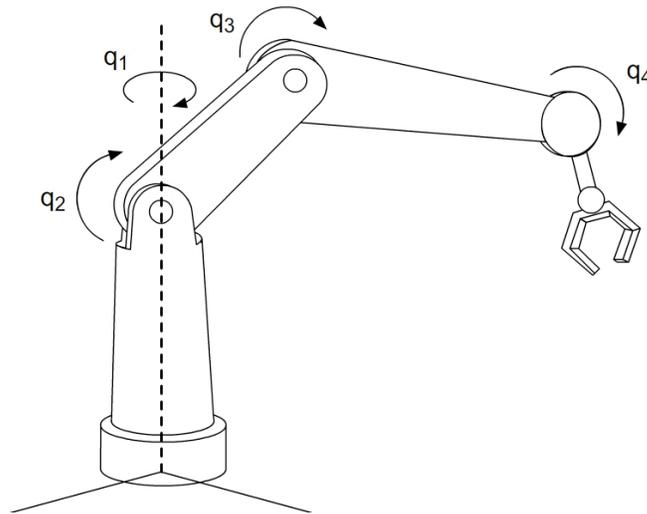


Figura 1.1: Robot manipulador de cuatro grados de libertad [13].

El movimiento de cada articulación puede ser traslacional o rotacional. Bajo consideraciones razonables, el número de articulaciones en un manipulador determina el número de grados de libertad. Las variables q_1 , q_2 , q_3 y q_4 mostradas en la figura 1.1, se refieren a las posiciones articulares del robot. Dichas posiciones articulares, previa definición de un marco de referencia adecuado, denotan en consecuencia las posiciones, ya sean angulares o traslacionales, de cada una de las articulaciones del robot. Para propósitos analíticos, las posiciones articulares se agrupan para formar el vector de posiciones articulares q [13]:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

A cada articulación del robot le corresponde un actuador, que puede ser de naturaleza electromecánica, neumática o hidráulica. Dichos actuadores tienen como objetivo generar fuerzas o pares, produciendo el movimiento de los eslabones y, en consecuencia, el movimien-

to del robot como un todo. El conjunto de fuerzas y pares generados por los actuadores del robot son agrupados para fines analíticos en el vector τ , esto es [13]:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

1.2.2. Modelo cinemático

El modelo cinemático de un robot manipulador contiene la descripción de las posiciones del manipulador con respecto a un marco de referencia fijo pero ignorando las fuerzas que causan el movimiento de la estructura. En la figura 1.2, se muestra un diagrama abstracto de un robot manipulador de n grados de libertad. Tradicionalmente, se coloca un marco de referencia Cartesiano de tres dimensiones en cualquier lugar de la base del robot, siendo denotado aquí por $[x_0 \ y_0 \ z_0]^T$ [2, 6].

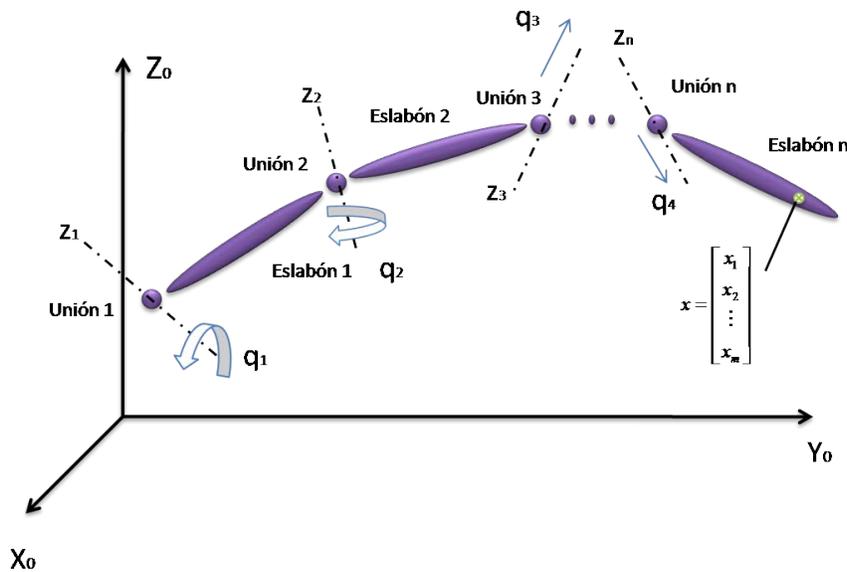


Figura 1.2: Diagrama abstracto de un robot manipulador de n grados de libertad [13].

Cinemática directa: Esta consiste en el cálculo de la posición y orientación del efector final con respecto al marco de la base, en función de los ángulos que existen entre las articulaciones. Es una relación de la forma:

$$x = f(q) \quad (1.3)$$

donde q es el vector de posiciones articulares y x es el vector de coordenadas cartesianas del efector final, el cual está representado por la siguiente ecuación:

$$x = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Cinemática Inversa: El problema cinemático inverso consiste en calcular los posibles conjuntos de ángulos entre las articulaciones a través de los cuales es posible llevar al efector final del robot a una configuración de posición y orientación dadas. La relación entre la posición cartesiana x y la posición articular q está representada por la siguiente ecuación:

$$q = f^{-1}(x). \quad (1.5)$$

Este problema es mucho más complejo que en el caso de la cinemática directa por las siguientes razones:

- Las ecuaciones a resolver son en general no lineales, para las cuales no siempre es posible encontrar una solución que pueda expresarse explícitamente.
- Podrían existir múltiples soluciones, incluso una infinidad de ellas.
- Podría no haber soluciones, dependiendo de la estructura cinemática del robot manipulador.

1.2.3. Modelo dinámico

El modelado dinámico de un robot manipulador establece una relación dinámica entre las fuerzas ejercidas en la estructura y la posición, la velocidad y la aceleración de las uniones. Existen dos métodos para obtener el modelo dinámico: el método de Lagrange y el método de Newton - Euler. El primero es más simple y sistemático. El último se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del robot. Sin embargo, este último es más eficiente desde un punto de vista computacional. En este trabajo de tesis se utiliza, para obtener las ecuaciones dinámicas, el método de Lagrange [13, 2].

Considérese un robot manipulador que se compone de n eslabones como se muestra en la Figura 1.2. El Lagrangiano L de un robot manipulador de n grados de libertad se define como la diferencia entre su energía cinética K y su energía potencial U :

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q). \quad (1.6)$$

La ecuación de movimiento de Lagrange para un robot manipulador de n grados de libertad, considerando fuerzas de fricción entre las uniones de los eslabones, es:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right] - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = \tau - f(\dot{q}) \quad (1.7)$$

donde τ es el vector de fuerzas y pares generados por los actuadores del robot (ecuación (1.2)). $L(q, \dot{q})$ es el Lagrangiano (ecuación (1.6)) y $f(\dot{q})$ es el vector que representa la fricción en las uniones, el cual se supone desacoplado en el sentido de que f_i depende únicamente de \dot{q}_i :

$$f(\dot{q}) = \begin{bmatrix} f_1(\dot{q}_1) \\ f_2(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ f_n(\dot{q}_n) \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de robots manipuladores de n grados de libertad requiere el cálculo de la energía cinética y la energía potencial. La energía cinética $K(q, \dot{q})$ de un robot manipulador se expresa como:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (1.9)$$

donde $M(q)$ de $n \times n$ es denominada matriz de inercia, la cual cumple con la propiedad de ser simétrica definida positiva para todo $q \in \mathfrak{R}^n$ y la energía potencial $U(q)$ depende del vector de posiciones articulares q . Por lo tanto, el Lagrangiano $L(q, \dot{q})$ dado por la ecuación (1.7), es en este caso:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - U(q) \quad (1.10)$$

y con esta forma para el Lagrangiano, la ecuación de movimiento de Lagrange (ecuación (1.7)) puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = \tau - f(\dot{q}). \quad (1.11)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones anteriores, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q, \dot{q})\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = \tau - f(\dot{q}) \quad (1.12)$$

o de modo compacto

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau \quad (1.13)$$

donde $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathfrak{R}^n$ son los vectores de posiciones, velocidades y aceleraciones articulares, respectivamente, $M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del manipulador, y $\tau, C(q, \dot{q})\dot{q}, g(q), f(\dot{q}) \in \mathfrak{R}^n$ son vectores de fuerzas y pares externos, centrífugos y de Coriolis, de gravedad y de fricción, respectivamente, con $C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ denominada matriz de Coriolis y $g(q)$ obtenido como el gradiente de la energía potencial del robot.

1.2.4. Modelado de la fricción

Cuando los eslabones de un robot manipulador entran en movimiento, se producen fuerzas de fricción que se oponen a este movimiento. El estudio de estas fuerzas es algo complicado, ya que depende de varios factores como la naturaleza de los materiales en contacto, lubricación entre ellos, temperatura, etc. Para modelar el vector de fricción en las uniones del robot manipulador, representado por $f(\dot{q})$ en la ecuación (1.13), es común ver en la literatura modelos estáticos. Un modelo estático clásico de fricción es aquél que combina los

fenómenos de fricción viscosa y de Coulomb. La fricción viscosa representa una fuerza linealmente relacionada con la velocidad del eslabón. La fricción de Coulomb es una fuerza que tiene una amplitud constante con respecto al cambio de velocidad del eslabón, pero el signo de la fuerza cambia al invertir la dirección de esta velocidad. En la figura 1.3 se muestra la relación funcional entre las fuerzas de fricción viscosa y la fricción de Coulomb con respecto a la velocidad.

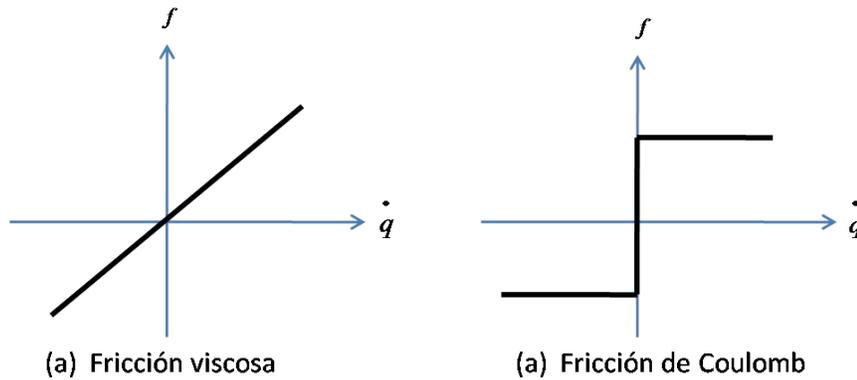


Figura 1.3: Gráfica de la fricción en función de la velocidad.

Una representación que se encuentra frecuentemente en la literatura para el modelado de las fuerzas de fricción es la siguiente:

$$f(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}) \quad (1.14)$$

donde f_v y f_c son matrices de $n \times n$ diagonales definidas positivas. Los elementos de la diagonal de f_v corresponden a los parámetros de fricción viscosa mientras que los de f_c a los de fricción de Coulomb. La función signo viene dada por:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1.2.5. Propiedad de linealidad en los parámetros de la energía total y el modelo dinámico de un robot manipulador

Una particularidad importante de la energía total y el modelo dinámico de un robot manipulador es que pueden expresarse en términos lineales de los parámetros del modelo dinámicos. Esta característica es básica para realizar la identificación de estos sistemas.

La energía total E de un robot manipulador de n grados de libertad es la suma de sus energías cinética K y potencial U :

$$E(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) + U(q) \quad (1.15)$$

donde q representa el vector de posiciones articulares dado por la ecuación (1.1).

En el caso de las energías K y U la linealidad con respecto a los parámetros del modelo dinámicos se da de la siguiente forma:

$$K(q, \dot{q}) = \varphi_K(q, \dot{q})^T \theta_K \quad (1.16)$$

$$U(q) = \varphi_U(q)^T \theta_U \quad (1.17)$$

donde φ_K y φ_U son funciones vectoriales de $p_1 \times 1$ y $p_2 \times 1$ respectivamente, θ_K y θ_U vectores de $p_1 \times 1$ y $p_2 \times 1$ que contienen los parámetros del modelo dinámicos del robot manipulador.

Por lo tanto, la energía total (ecuación (1.15)) puede escribirse como una regresión lineal en los parámetros del modelo dinámicos:

$$E(q, \dot{q}) = \varphi_E(q, \dot{q})^T \theta_E \quad (1.18)$$

donde $\varphi_E(q, \dot{q})^T = [\varphi_K(q, \dot{q})^T \ \varphi_U(q)^T]$ y $\theta_E = [\theta_K^T \ \theta_U^T]^T$.

Usando las ecuaciones (1.16) y (1.17), se tiene que el Lagrangiano $L(q, \dot{q})$ del robot manipulador puede expresarse como:

$$L(q, \dot{q}) = \varphi_L(q, \dot{q})^T \theta_E \quad (1.19)$$

donde

$$\varphi_L(q, \dot{q})^T = [\varphi_K(q, \dot{q})^T \ -\varphi_U(q)^T]. \quad (1.20)$$

Así de las ecuaciones de Lagrange (ecuación (1.7)) se obtiene:

$$\left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial q} \right] \theta_E = \tau - f(\dot{q}). \quad (1.21)$$

Para la fricción de las uniones del robot manipulador, en este trabajo de tesis se consideran la fricción de Coulomb y la fricción viscosa. Estas fricciones son lineales con respecto a sus coeficientes, por lo tanto se tiene que:

$$f(\dot{q}) = \varphi_F(\dot{q}) \theta_F \quad (1.22)$$

donde φ_F es una matriz $n \times 2n$ dependiente de \dot{q} y θ_F es un vector de $2n \times 1$, el cual contiene los coeficientes de fricción de Coulomb y viscosa. Por lo tanto la ecuación (1.21) se puede escribir como:

$$\left[\left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial q} \right] \ \varphi_F(\dot{q}) \right] \theta = \tau \quad (1.23)$$

donde

$$\theta = [\theta_E^T \ \theta_F^T]^T \quad (1.24)$$

denota el vector de los parámetros del modelo dinámicos y de fricción.

Finalmente comparando las ecuaciones (1.13), (1.23) se obtiene la propiedad fundamental de la dinámica de un robot de ser lineal con respecto a sus parámetros del modelo dinámicos [13]. Así, se obtiene:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = \tau \quad (1.25)$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es una matriz $n \times p$ cuyos elementos están definidos por los términos del lado izquierdo de la ecuación (1.25), θ es un vector $p \times 1$ el cual contiene los parámetros de fricción y los parámetros del modelo dinámicos del robot manipulador.

1.3. Identificación del modelo

La identificación de sistemas se define de varias formas en la literatura científica. La definición más usada, es la que establece a la identificación de un sistema como el proceso de determinar los valores de los parámetros que caracterizan sus propiedades físicas de acuerdo con un criterio determinado [12].

En el presente trabajo se estudian varios esquemas que han sido propuestos en la literatura para identificar los parámetros del modelo dinámicos de robots manipuladores. Estos métodos presentan varias características en común:

1. La consideración de la propiedad de linealidad en los parámetros del modelo del robot.
2. Estimación de los parámetros analizando las salidas generadas por entradas conocidas.
3. La estimación de los valores de los parámetros usando técnicas de regresión lineal. Una estructura posee regresión lineal cuando la salida estimada puede representarse por la ecuación:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta \quad (1.26)$$

donde $\varphi(t)$ está determinado por los términos del modelo del sistema, el cual es conocido como vector de regresión y θ es el vector de parámetros.

1.4. Objetivo de la tesis

El objetivo principal de este trabajo de tesis es documentar técnicas de identificación paramétrica aplicadas a sistemas mecánicos y realizar un análisis comparativo del cual se pueda concluir cuáles de tales técnicas resultan más o menos eficientes y las razones que conducen a ello.

Para poder llevar a cabo la identificación paramétrica de un sistema mecánico, es necesario tener un modelo que represente con exactitud su comportamiento. Este modelo puede ser dinámico o estar basado en el principio de la conservación de la energía. En la modelación se suele evitar el uso directo del valor de la aceleración de las uniones del robot y para ello se suele sustituir este valor por medio de integrales o filtros que eviten su calculo. En el presente trabajo se considerarán los siguientes modelos de identificación de sistemas mecánicos [6, 11, 3]:

- Modelo dinámico implícito
- Modelo de regresión de dinámica filtrada
- Modelo de regresión de energía proporcionada
- Modelo de regresión de potencia filtrada.

Los métodos de identificación son los algoritmos que estiman los valores de los parámetros desconocidos del sistema. En este trabajo se considerarán los siguientes métodos de identificación paramétrica:

- Método de mínimos cuadrados
- Método de variables instrumentales

Capítulo 2

Identificación

El objetivo de este capítulo es presentar los métodos y los modelos de identificación que se documentarán y analizarán en este trabajo de tesis. En la primera parte se presentan dos métodos de identificación: el método de mínimos cuadrados y variables instrumentales. En la segunda parte se presentan cuatro modelos de identificación: modelo dinámico implícito, modelo de regresión de dinámica filtrada, modelo de regresión de energía filtrada y modelo de regresión de potencia filtrada. Por último, en la tercera parte se especifica cómo se evita calcular el valor de la aceleración realizando los desarrollos de los modelos de identificación utilizando la dinámica de un péndulo simple.

2.1. Métodos de identificación

La identificación paramétrica se lleva a cabo a través de un algoritmo matemático que asume una modelación específica del sistema. Dos métodos serán presentados en esta sección.

2.1.1. Mínimos cuadrados

El método de mínimos cuadrados es una técnica básica para estimación de parámetros. Consiste en buscar los parámetros desconocidos de tal forma que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y calculados, sea un mínimo. El método puede ser aplicado a una gran variedad de casos de estudio en muy diversas áreas del conocimiento. Es particularmente simple si el modelo tiene la propiedad de ser lineal en los parámetros. Consideremos el siguiente modelo de regresión [5]:

$$\hat{y}(k) = \varphi(k)^T \theta \quad (2.1)$$

donde $\hat{y}(k)$ representa la variable de salida calculada, $\varphi(k)$ un vector $p \times 1$ del sistema el cual está formado por elementos plenamente determinados, y θ es el vector $p \times 1$ de parámetros desconocidos. El modelo es indexado por la variable k , que toma valores en \mathbb{N} y denota el tiempo de muestreo. El problema consiste en determinar los parámetros de tal manera que la salida del modelo en la ecuación (2.1) sea lo más cercana posible a la variable medida $y(k)$

de acuerdo al criterio de mínimos cuadrados. Así pues, los parámetros desconocidos θ son estimados de tal forma que se minimice una la siguiente función de “costo” [5]:

$$V(\theta, k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (y(i) - \varphi^T(i)\theta)^2 \quad (2.2)$$

Algoritmo fuera de línea

El cálculo fuera de línea de los parámetros del modelo dinámicos de un sistema por el método de mínimos cuadrados, es utilizado en aquellas aplicaciones en que no se requiere un ajuste continuo del modelo. Para poder expresar la solución analítica al problema de mínimos cuadrados, se define la siguiente notación [5]:

$$Y(k) = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(k)]^T \quad (2.3)$$

$$E(k) = [\varepsilon(1) \ \varepsilon(2) \ \dots \ \varepsilon(k)]^T \quad (2.4)$$

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(k) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$P(k) = (\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1} = \left(\sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) \right)^{-1}. \quad (2.6)$$

donde k es el índice que corresponde a la lectura “actual”, $\varepsilon(i)$ es el error residual en el muestreo i definido como

$$\varepsilon(i) = y(i) - \hat{y}(i) = y(i) - \varphi^T(i)\hat{\theta} \quad (2.7)$$

siendo $\hat{\theta} \in \mathfrak{R}^p$ el vector de parámetros estimados. Nótese que $P(k)$ está definida si y sólo si $\Phi^T(k)\Phi(k)$ es invertible, i.e., las columnas de $\Phi(k)$ son linealmente independientes.

Habiendo definido esta notación, la función de costo (ecuación (2.2)) puede escribirse como:

$$V(\theta, k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \varepsilon^2(i) = \frac{1}{2} E^T(k)E(k) = \frac{1}{2} \|E(k)\|^2 \quad (2.8)$$

donde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ y $E(k)$ se define mediante

$$E(k) = Y(k) - \hat{Y}(k) = Y(k) - \Phi(k)\hat{\theta} \quad (2.9)$$

La solución al problema de mínimos cuadrados es dada por el siguiente teorema.

Teorema 1 (Minimización de la función V , [5]) Para todo $k \in \mathbb{N}$, la función $\theta \mapsto V(\theta, k)$ admite un mínimo en todo vector $\hat{\theta}$ tal que

$$\Phi^T(k)\Phi(k)\hat{\theta} = \Phi^T(k)Y(k) \quad (2.10)$$

Más aún, si $\Phi^T(k)\Phi(k)$ es no singular, entonces el mínimo $\hat{\theta}$ es único y está dado por:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1} \Phi^T(k)Y(k) \quad (2.11)$$

Algoritmo en línea

Existen aplicaciones para las cuales es necesario hacer la identificación de los parámetros del sistema en tiempo real. El método de mínimos cuadrados fuera de línea requiere de una memoria que aumenta con el número N de muestras, ya que se requiere almacenar N vectores $\varphi(k)$. Esto hace que aumente el número de renglones N de la matriz Φ . Para solucionar este problema se utiliza un algoritmo recursivo. La idea principal de los algoritmos recursivos es que las ecuaciones pueden ser arregladas de tal manera que los resultados obtenidos para el muestreo $k-1$ puedan ser usados para obtener la estimación en el muestreo k .

Sea $\hat{\theta}(k-1)$ la estimación de mínimos cuadrados basada en la muestra $k-1$. Asumiendo que la matriz $\Phi^T(i)\Phi(i)$ es no singular para $i = 1, \dots, k$, y considerando la ecuación (2.6), podemos escribir que [5]:

$$P(k) = (\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1} = \left(\sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) \right)^{-1} \quad (2.12)$$

$$P^{-1}(k) = \Phi^T(k)\Phi(k) = \sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) = \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)\varphi^T(i) + \varphi(k)\varphi^T(k) \quad (2.13)$$

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k) \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.11) se tiene que

$$\hat{\theta}(k) = \left(\sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \varphi(i)y(i) \right) = P(k) \left(\sum_{i=1}^k \varphi(i)y(i) \right) \quad (2.15)$$

lo cual se puede escribir de la siguiente forma

$$\hat{\theta}(k) = P(k) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)y(i) + \varphi(k)y(k) \right) \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)y(i) = P^{-1}(k-1)\hat{\theta}(k-1) \quad (2.17)$$

De la ecuación (2.14) obtenemos

$$P^{-1}(k-1) = P^{-1}(k) - \varphi(k)\varphi^T(k) \quad (2.18)$$

Sustituyendo la ecuación (2.18) en (2.17)

$$\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)y(i) = (P^{-1}(k) - \varphi(k)\varphi^T(k))\hat{\theta}(k-1) \quad (2.19)$$

La estimación en el muestreo k puede ser escrita como:

$$\hat{\theta}(k) = P(k) [P^{-1}(k)\hat{\theta}(k-1) - \varphi(k)\varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) + \varphi(k)y(k)] \quad (2.20)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - P(k)\varphi(k)\varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) + P(k)\varphi(k)y(k) \quad (2.21)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\varphi(k)(y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)) \quad (2.22)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)\varepsilon(k) \quad (2.23)$$

donde

$$K(k) = P(k)\varphi(k) \quad (2.24)$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \quad (2.25)$$

Para terminar de obtener el método recursivo, es necesario obtener una ecuación recursiva para $P(k)$ y se utiliza el siguiente Lema de Inversión del álgebra matricial.

Lema 1 (Inversión Matricial, [5]) Sean A, B, C y D matrices cuadradas $k \times k$ tales que A, C y $C^{-1} + DA^{-1}B$ sean invertibles. Entonces $A + BCD$ es invertible, y

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (2.26)$$

Demostración: Multiplicando de manera directa se encuentra que [5]

$$(A + BCD)^{-1}(A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1})$$

$$= I + BCDA^{-1} - B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} - BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (2.27)$$

$$= I + BCDA^{-1} - BC(C^{-1} + DA^{-1}B)(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (2.28)$$

$$= I \square \quad (2.29)$$

Usando la ecuación (2.14) se obtiene:

$$P(k) = (P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k))^{-1} \quad (2.30)$$

Aplicando el Lema de inversión matricial a $P(k)$, considerando que C en la Eq. (2.26) es la matriz identidad, se tiene que:

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1)\varphi(k)(I + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k))^{-1}\varphi^T(k)P(k-1) \quad (2.31)$$

Esto implica que:

$$K(k) = P(k)\varphi(k) = P(k-1)\varphi(k)(I + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k))^{-1} \quad (2.32)$$

Los cálculos recursivos son resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 2 (Estimación por mínimos cuadrados recursivo, [5]). *Suponga que la matriz $\Phi(k)$ es de rango completo, i.e., $\Phi^T(k)\Phi(k)$ es invertible para todo $k \geq k_0$. Dados $\hat{\theta}(k_0)$ y $P(k_0) = (\Phi^T(k_0)\Phi(k_0))^{-1}$, el vector $\hat{\theta}(k) = (\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1}\Phi^T(k)Y(k)$ satisface también las siguientes ecuaciones recursivas*

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)(y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)) \quad (2.33)$$

$$K(k) = P(k)\varphi(k) = P(k-1)\varphi(k)(I + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k))^{-1} \quad (2.34)$$

$$P(k) = (I - K(k)\varphi^T(k))P(k-1) \quad (2.35)$$

2.1.2. Variables instrumentales

El método de variables instrumentales se puede utilizar cuando no se está interesado en modelar las perturbaciones. La forma del algoritmo es similar al de mínimos cuadrados sustituyendo el vector $\Phi^T(N)$ por otro $\tilde{\Phi}^T(N)$ que no está correlacionado con $\varepsilon(k)$. En su versión recursiva, se suele inicializar con los parámetros estimados por el método de mínimos cuadrados, debido a que una inadecuada elección de los parámetros iniciales puede dar lugar a una identificación defectuosa. Este método proporciona mejores resultados que el algoritmo de mínimos cuadrados en aquellos casos en que existe algún tipo de correlación entre el ruido y la salida del sistema [8].

Algoritmo fuera de línea

Consideremos nuevamente el modelo dado por la ecuación (2.1):

$$\hat{y}(k) = \varphi(k)^T \theta$$

La estimación de $\hat{\theta}$ por el método de mínimos cuadrados queda determinado, para cada valor del índice de muestreo k , por la ecuación (2.11):

$$\hat{\theta}(k) = (\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1}\Phi^T(k)Y(k)$$

Debido a la correlación entre $\varphi(k)$ y el error de predicción $\varepsilon(k)$, la estimación por el método de mínimos cuadrados no tiende a θ en casos típicos. Lo que se hace para resolver este problema es que se sustituye Φ^T en la ecuación (2.11) por $\tilde{\Phi}^T = \tilde{\Phi}^T(k) = (\tilde{\varphi}(1) \tilde{\varphi}(2) \dots \tilde{\varphi}(k))$ donde $\tilde{\varphi}(k)$ está correlacionada con las variables de regresión pero

no está correlacionada con el ruido de medición. A $\tilde{\varphi}$ se le llama variable instrumental. Así, la estimación de θ para el método de variables instrumentales queda determinado por:

$$\hat{\theta}(k) = (\tilde{\Phi}^T(k)\Phi(k))^{-1}\tilde{\Phi}^T(k)Y. \quad (2.36)$$

Existen diferentes maneras para calcular $\tilde{\Phi}(k)$ [7]. En este trabajo de tesis se obtiene de un modelo auxiliar que calcula las salidas del sistema sin ruido y esta representado por la ecuación que modela el comportamiento del sistema [7].

Algoritmo en línea

Alternativamente una representación recursiva del método de variables instrumentales, está dada de la siguiente manera [4]:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)(y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)) \quad (2.37)$$

$$K(k) = P(k)\varphi(k) = P(k-1)\tilde{\varphi}(k)(I + \varphi^T(k)P(k-1)\tilde{\varphi}(k))^{-1} \quad (2.38)$$

$$P(k) = (I - K(k)\varphi^T(k))P(k-1) \quad (2.39)$$

2.2. Modelos de identificación

Como se mencionó en el Capítulo 1, el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad puede ser representado por la ecuación:

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta \quad (2.40)$$

la cual cuenta con la propiedad de linealidad en los parámetros del modelo dinámicos. Además, los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales, pueden ser aplicados al modelo matemático de esta ecuación como ya se mencionó anteriormente.

Existe un inconveniente cuando se quiere aplicar directamente el método de mínimos cuadrados o el de variables instrumentales a la ecuación (2.40), y es que se necesita conocer el valor de la aceleración de las uniones del robot manipulador. Esto es complicado, puesto que típicamente no se cuenta con acelerómetros, pues resultan muy costosos, y la alternativa para estimar las aceleraciones, a saber, la difereciación numérica es muy sensible al ruido. Para resolver este inconveniente en la literatura se han propuesto varios modelos de identificación. En este trabajo de tesis se consideran cuatro modelos, dos de los cuales utilizan la propiedad de linealidad del modelo dinámico en el vector de parámetros θ y los otros dos utilizan la propiedad de linealidad de la función de la energía mecánica en los parámetros del modelo.

2.2.1. Modelo dinámico implícito

En el modelo dinámico implícito se parte de la propiedad de linealidad en los parámetros del modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, el cual está representado por la ecuación (2.40). Esta ecuación, como ya se mencionó, es equivalente a la ecuación (1.23), de donde tenemos:

$$\left[\left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial q} \right] \varphi_F(\dot{q}) \right] \theta = \tau. \quad (2.41)$$

A través de este modelo es posible realizar la identificación sin necesidad de calcular la aceleración de las uniones del robot manipulador. Para lograrlo, se integran ambos lados de la ecuación (2.41), obteniendo:

$$\left[\left[\int_0^t \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\partial \varphi_L(q(\sigma), \dot{q}(\sigma))}{\partial \dot{q}} \right] d\sigma - \int_0^t \frac{\partial \varphi_L(q(\sigma), \dot{q}(\sigma))}{\partial q} d\sigma \right] \int_0^t \varphi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta = \int_0^t \tau(\sigma) d\sigma \quad (2.42)$$

$$\left[\left[\frac{\partial \varphi_L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \varphi_L(q(0), \dot{q}(0))}{\partial \dot{q}} - \int_0^t \frac{\partial \varphi_L(q(\sigma), \dot{q}(\sigma))}{\partial q} d\sigma \right] \int_0^t \varphi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta = \int_0^t \tau(\sigma) d\sigma \quad (2.43)$$

Considerando $\frac{\partial \varphi_L}{\partial \dot{q}}(q(0), \dot{q}(0)) = 0$, se obtiene

$$\tau_I = Y_I(q, \dot{q}) \theta \quad (2.44)$$

donde

$$\tau_I = \int_0^t \tau(\sigma) d\sigma \quad (2.45)$$

$$Y_I(q, \dot{q}) = \left[\left[\frac{\partial \varphi_L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}} - \int_0^t \frac{\partial \varphi_L(q(\sigma), \dot{q}(\sigma))}{\partial q} d\sigma \right] \int_0^t \varphi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta \quad (2.46)$$

La ecuación (2.44) representa el modelo dinámico implícito, el cual, ya no depende de la aceleración de la uniones del robot manipulador.

Considerando el método de mínimos cuadrados, el error de predicción para este modelo está definido como:

$$\varepsilon(k) = \tau_I(k) - Y_I(q, \dot{q})(k) \hat{\theta}(k-1). \quad (2.47)$$

2.2.2. Modelo de regresión de dinámica filtrada

La idea principal de este modelo de regresión de dinámica filtrada consiste en aplicar un filtro de primer orden a ambos lados de la ecuación (2.41), con el objetivo de evitar calcular la aceleración de las uniones del robot manipulador. La función de transferencia del filtro se muestra en la ecuación (2.48), donde $\lambda > 0$:

$$f(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}. \quad (2.48)$$

Aplicando este filtro de primer orden a ambos lados de la ecuación (2.41) obtenemos:

$$\left[\left[\frac{\lambda}{s + \lambda} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\lambda}{s + \lambda} \frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial q} \right] \frac{\lambda}{s + \lambda} \varphi_F(\dot{q}) \right] \theta = \frac{\lambda}{s + \lambda} \tau \quad (2.49)$$

$$\left[\left[\frac{\lambda s}{s + \lambda} \left[\frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\lambda}{s + \lambda} \frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial q} \right] \frac{\lambda}{s + \lambda} \varphi_F(\dot{q}) \right] \theta = \frac{\lambda}{s + \lambda} \tau \quad (2.50)$$

Por lo tanto, el modelo de regresión de dinámica filtrada puede ser escrito como:

$$\tau_f = Y_f(q, \dot{q}) \theta \quad (2.51)$$

donde

$$\tau_f = \frac{\lambda}{s + \lambda} \tau \quad (2.52)$$

$$Y_f(q, \dot{q}) \theta = \left[\left[\frac{\lambda s}{s + \lambda} \left[\frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\lambda}{s + \lambda} \frac{\partial \varphi_L(q, \dot{q})}{\partial q} \right] \frac{\lambda}{s + \lambda} \varphi_F(\dot{q}) \right] \theta \quad (2.53)$$

Tomando en cuenta el método de mínimos cuadrados, mencionado anteriormente, podemos obtener la expresión del error de predicción para este modelo de regresión:

$$\varepsilon(k) = \tau_f(k) - Y_f(q, \dot{q})(k) \hat{\theta}(k-1) \quad (2.54)$$

2.2.3. Modelo de regresión de energía proporcionada

El modelo de regresión de energía proporcionada se basa en el principio de conservación de la energía, que establece que la energía mecánica total suministrada a un robot manipulador es igual al cambio de la energía interna del sistema.

La energía mecánica del sistema se define como la suma de la energía potencial y la energía cinética. Como se vio en el Capítulo 1, la energía cinética de un robot manipulador depende de la posición y la velocidad de las uniones y la energía potencial depende sólo de la posición. Así pues, la energía mecánica del robot manipulador se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$E(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) + U(q) \quad (2.55)$$

Aplicando el principio de la conservación de la energía a un robot manipulador considerando fuerzas disipativas (fricción), se obtiene que la energía suministrada al sistema, menos la energía disipada, es igual al cambio interno de la energía del mismo:

$$\int_0^t \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma - \int_0^t \dot{q}(\sigma)^T f(\dot{q}(\sigma)) d\sigma = E(q(t), \dot{q}(t)) - E(q(0), \dot{q}(0)) \quad (2.56)$$

En el instante $t = 0$, se considera que la energía interna del sistema es cero, así que:

$$E(q(0), \dot{q}(0)) = 0 \quad (2.57)$$

y por lo tanto se obtiene:

$$\int_0^t \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma = E(q(t), \dot{q}(t)) + \int_0^t \dot{q}(\sigma)^T f(\dot{q}(\sigma)) d\sigma. \quad (2.58)$$

Como se comentó en el Capítulo 1, sabemos que la energía total y las fuerzas de fricción de un robot manipulador son lineales con respecto a sus parámetros del modelo dinámicos, por lo tanto la Ecuación (2.58) se puede escribir como:

$$\int_0^t \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma = \varphi_E(q(t), \dot{q}(t))^T \theta_E + \varphi_F^T(\dot{q}(t)) \theta_F \quad (2.59)$$

y finalmente de esta propiedad fundamental se obtiene:

$$\int_0^t \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma = \left[\varphi_E(q(t), \dot{q}(t))^T \int_0^t \dot{q}(\sigma)^T \varphi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta \quad (2.60)$$

Esta ecuación representa el modelo de regresión de energía proporcionada, donde $\theta = [\theta_E^T \ \theta_F^T]^T$. Cabe hacer la observación de que este modelo no depende de las aceleraciones de las uniones del robot manipulador.

El error de predicción usando el algoritmo de mínimos cuadrados para este modelo de regresión se define por la ecuación:

$$\varepsilon(k) = \int_0^{kh} \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma - \left[\varphi_E(q, \dot{q})^T(k) \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^T \varphi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \hat{\theta}(k-1) \quad (2.61)$$

donde h denota el periodo de muestreo.

2.2.4. Modelo de regresión de potencia filtrada

El modelo de regresión de potencia filtrada utiliza, al igual que el modelo de regresión de energía proporcionada, el principio de conservación de energía. Este último establece que la energía mecánica total aplicada a un robot manipulador, es igual al cambio interno de la energía del sistema.

La idea principal del modelo de regresión de potencia filtrada es filtrar ambos lados del modelo de regresión de energía proporcionada, con la finalidad de remplazar las integrales.

La función de transferencia para el filtro utilizado en este modelo de regresión es dado por la ecuación (2.62), donde $\lambda > 0$.

$$f(s) = \frac{\lambda s}{s + \lambda} \quad (2.62)$$

Aplicando el filtro a ambos lados de la ecuación (2.60), se tiene:

$$\frac{\lambda s}{s + \lambda} \int_0^t \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma = \left[\frac{\lambda s}{s + \lambda} \Phi_E(q(t), \dot{q}(t))^T \frac{\lambda s}{s + \lambda} \int_0^t \dot{q}(\sigma)^T \Phi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta \quad (2.63)$$

y finalmente se obtiene:

$$\frac{\lambda}{s + \lambda} \tau(t)^T \dot{q}(t) = \left[\frac{\lambda s}{s + \lambda} \Phi_E(q(t), \dot{q}(t))^T, \frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{q}^T \Phi_F(\dot{q}) \right] \theta \quad (2.64)$$

Esta ecuación representa el modelo de regresión de potencia filtrada, el cual es lineal en los parámetros del modelo dinámicos y no depende de la aceleración de las uniones.

El error escalar de predicción para el modelo de regresión de potencia filtrada, aplicada al método de mínimos cuadrados está definido por la siguiente ecuación (2.65).

$$\varepsilon(k) = \frac{\lambda}{s + \lambda} (\tau^T \dot{q})(k) - \left[\frac{\lambda s}{s + \lambda} \Phi_E(q, \dot{q})^T(k), \frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{q}^T \Phi_F(\dot{q})(k) \right] \hat{\theta}(k-1) \quad (2.65)$$

Notese que un filtro pasa altas se comporta similarmente a un diferenciador numérico para bajas frecuencias pero el filtro debido al factor $s + \lambda$ no tiene la sensibilidad al ruido que tiene el diferenciador.

2.3. Modelos de identificación aplicados a un péndulo simple.

Sea

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

1

la dinámica del péndulo simple está definida por la siguiente ecuación:

$$J\ddot{q} + mgl_c \sin(q) + f_v \dot{q} + f_{c1} s(\dot{q}) - f_{c2} s(-\dot{q}) = \tau \quad (2.67)$$

donde q denota la posición angular del eslabón, m la masa del péndulo, l_c la longitud desde la unión al centro de masa del eslabón (ver figura 2.1), $J = ml_c^2 + I$, I es el momento de inercia

¹Notese que $s(x) = 1 - \mu(-x)$, donde $\mu(x)$ es la función escalón, i.e.

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

con respecto al centro de masa, g la aceleración de gravedad, f_v el término de la fricción viscosa, f_{c1} y f_{c2} son los valores de fuerza de fricción seca (i.e. de Coulomb) que se oponen al movimiento en sentido positivo y negativo, respectivamente del péndulo. Los parámetros dinámicos y de fricción quedan determinados por: $\theta_1 = J$, $\theta_2 = mgl_c$, $\theta_3 = f_v$, $\theta_4 = f_{c1}$ y $\theta_5 = f_{c2}$.

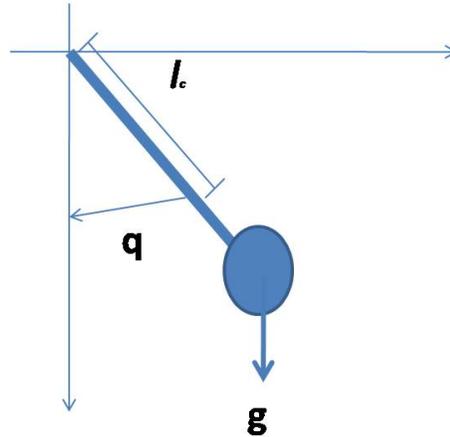


Figura 2.1: Péndulo simple.

Debido a que se puede realizar una parametrización de las energías cinética y potencial, el vector de parámetros estimados para el caso del péndulo simple queda definido por:

$$\theta_E = [\theta_1 \quad \theta_2]^T \quad (2.68)$$

$$\theta_F = [\theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5]^T \quad (2.69)$$

$$\theta = [\theta_E^T \quad \theta_F^T]^T. \quad (2.70)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.67) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta = \tau \quad (2.71)$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = [\ddot{q} \quad \sin(q) \quad \dot{q} \quad s(\dot{q}) \quad -s(-\dot{q})]$.

Modelo dinámico implícito

Como ya se ha mencionado en el modelo dinámico implícito para no utilizar el valor de la aceleración de la unión del péndulo simple en el proceso de identificación se integran ambos lados de la ecuación (2.71).

$$\int_0^{kh} \tau d\sigma =$$

$$\left[\int_0^{kh} \ddot{q}(\sigma) d\sigma \int_0^{kh} \sin(q(\sigma)) d\sigma \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) d\sigma \int_0^{kh} s(\dot{q}(\sigma)) d\sigma - \int_0^{kh} s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta \quad (2.72)$$

donde se ha considerado que $\dot{q}(0) = 0$, y así se obtiene la ecuación (2.73) la cual ya no depende de la aceleración de la unión del péndulo.

$$\int_0^{kh} \tau d\sigma = \left[\dot{q} \int_0^{kh} \sin(q(\sigma)) d\sigma \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) d\sigma \int_0^{kh} s(\dot{q}(\sigma)) d\sigma - \int_0^{kh} s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta. \quad (2.73)$$

Al aplicar este método de identificación al péndulo simple, el error de predicción queda definido como:

$$\varepsilon(k) = \tau_I(k) - Y_I(q, \dot{q})(k) \hat{\theta}(k-1) \quad (2.74)$$

donde

$$\tau_I(k) = \int_0^{kh} \tau d\sigma \quad (2.75)$$

$$Y_I(q, \dot{q})(k) = \left[\dot{q} \int_0^{kh} \sin(q(\sigma)) d\sigma \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) d\sigma \int_0^{kh} s(\dot{q}(\sigma)) d\sigma - \int_0^{kh} s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \quad (2.76)$$

Modelo de regresión de dinámica filtrada

En el modelo de regresión de dinámica filtrada, se aplica a ambos lados de la ecuación (2.71) el filtro dado por la ecuación (2.48), obtenemos:

$$\frac{\lambda}{s+\lambda} \tau = \left[\frac{\lambda}{s+\lambda} \ddot{q} \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \sin(q) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q} \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} s(\dot{q}) \quad - \frac{\lambda}{s+\lambda} s(-\dot{q}) \right] \theta \quad (2.77)$$

$$\frac{\lambda}{s+\lambda} \tau = \left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \dot{q} \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \sin(q) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q} \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} s(\dot{q}) \quad - \frac{\lambda}{s+\lambda} s(-\dot{q}) \right] \theta \quad (2.78)$$

De esta manera se evita usar la aceleración de la unión del péndulo simple.

Utilizando este método de identificación al péndulo simple, el error de predicción se define como:

$$\varepsilon(k) = \tau_f(k) - Y_f(q, \dot{q})(k) \hat{\theta}(k-1) \quad (2.79)$$

donde

$$\tau_f(k) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \tau \quad (2.80)$$

$$Y_f(q, \dot{q})(k) = \left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \dot{q} \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \sin(q) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q} \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} s(\dot{q}) \quad - \frac{\lambda}{s+\lambda} s(-\dot{q}) \right] \quad (2.81)$$

Modelo de regresión de energía proporcionada

La energía mecánica del péndulo simple se expresa como $E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}J\dot{q}^2 + mgl_c(1 - \cos(q))$, aplicando el principio de la conservación de la energía dado por la ecuación (2.56) y recordando que se considera $E(q(0), \dot{q}(0)) = 0$, se obtiene:

$$\int_0^{kh} \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma =$$

$$\frac{1}{2}J\dot{q}^2 + mgl_c(1 - \cos(q)) + f_v \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) \dot{q}(\sigma) d\sigma + f_{c1} \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(\dot{q}(\sigma)) d\sigma - f_{c2} \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma. \quad (2.82)$$

Como se ha mencionado, la energía total y las fuerzas de fricción son lineales respecto a sus parámetros del modelo dinámicos, por lo tanto la ecuación (2.82) se puede escribir como:

$$\int_0^{kh} \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma =$$

$$\left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 \quad 1 - \cos(q) \quad \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^2 d\sigma \quad \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \quad - \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta \quad (2.83)$$

la cual no depende de la aceleración de la unión del péndulo simple.

El error de predicción para este método aplicado al péndulo simple se define como:

$$\varepsilon(k) = \int_0^{kh} \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma - \left[\Phi_E(q, \dot{q})^T(k) \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^T \Phi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \hat{\theta}(k-1) \quad (2.84)$$

donde

$$\left[\Phi_E(q, \dot{q})^T(k) \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^T \Phi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] =$$

$$\left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 \quad 1 - \cos(q) \quad \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^2 d\sigma \quad \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \quad - \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \quad (2.85)$$

Modelo de regresión de potencia filtrada

Como ya se ha mencionado el modelo de regresión de potencia filtrada también se basa en el principio de la conservación de la energía. Por lo tanto, se realizan los mismo desarrollos que en el modelo de regresión de energía proporcionada para llegar a la ecuación (2.83). La diferencia entre estos dos modelos es que en el modelo de regresión de potencia filtrada con la finalidad de eliminar las integrales se utiliza el filtro dado por la ecuación (2.62) y se aplica en ambos lados de la ecuación (2.83), de esta forma se obtiene:

$$\frac{\lambda s}{s+\lambda} \int_0^{kh} \tau(\sigma)^T \dot{q}(\sigma) d\sigma =$$

$$\frac{\lambda s}{s+\lambda} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 \quad 1 - \cos(q) \quad \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^2 d\sigma \quad \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \quad - \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right] \theta \quad (2.86)$$

$$\frac{\lambda}{s+\lambda} \tau^T \dot{q} =$$

$$\left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \quad - \frac{\lambda s}{s+\lambda} (1 - \cos(q)) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}^2 \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q} s(\dot{q}) \quad - \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q} s(-\dot{q}) \right] \theta \quad (2.87)$$

Así la ecuación (2.87) no depende de la aceleración de la unión del péndulo simple y tampoco es necesario integrar.

El error de predicción para este modelo aplicado a un péndulo simple se define como:

$$\varepsilon(k) = \frac{\lambda}{s+\lambda} (\tau^T \dot{q})(k) - \left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \Phi_E(q, \dot{q})^T(k), \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}^T \Phi_F(\dot{q})(k) \right] \hat{\theta}(k-1) \quad (2.88)$$

donde

$$\left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \Phi_E(q, \dot{q})^T(k), \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}^T \Phi_F(\dot{q})(k) \right] =$$

$$\left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \frac{1}{2} \dot{q}^2 \quad - \frac{\lambda s}{s+\lambda} (1 - \cos(q)) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}^2 \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q} s(\dot{q}) \quad - \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q} s(-\dot{q}) \right] \quad (2.89)$$

Capítulo 3

Simulaciones

En el presente capítulo se presenta la simulación de los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales para determinar los parámetros dinámicos de un robot manipulador de un grado de libertad (péndulo simple). Los cuatro modelos lineales utilizados en cada uno de los métodos son los citados en el capítulo 2. Como ya se ha mencionado, la finalidad es realizar una comparación de estas técnicas de identificación. Para no restar claridad, únicamente se presentan en forma general cada una de las técnicas implementadas en un sistema mecánico simple (péndulo actuado) y en el siguiente capítulo se hará un estudio comparativo entre los resultados obtenidos bajo diferentes criterios.

3.1. Entorno de Simulación

Se realizaron simulaciones numéricas de las técnicas de identificación para un péndulo simple. Con la finalidad de que los resultados simulados sean un poco más cercanos a la realidad, a las salidas de la posición y velocidad del modelo del péndulo se les agregó señales de ruido blanco, el cual se genera por medio de una distribución normal de números aleatorios. En la figura 2.1 se muestra el diagrama esquemático de un péndulo.

Como ya se mencionó en el Capítulo 2 la dinámica del péndulo simple está definida por la ecuación (2.71):

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta = \tau$$

donde

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = [\ddot{q} \quad \sin(q) \quad \dot{q} \quad s(\dot{q}) \quad -s(-\dot{q})]$$

$$\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5]^T = [J \quad mgl_c \quad f_v \quad f_{c1} \quad f_{c2}]^T$$

y $s(\cdot)$ fue definida en la Ecuación (2.66). Para poder llevar a cabo las simulaciones, los valores de los parámetros quedaron determinados como: $\theta_1 = 1.4639 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$, $\theta_2 = 21.31 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\theta_3 = 2.288 \text{ N}$, $\theta_4 = 0.198 \text{ N}$ y $\theta_5 = 0.257 \text{ N}$ (estos valores fueron tomados de [13]).

Para realizar una buena identificación es importante elegir cuidadosamente las trayectorias de entrada que van a estimular al sistema. Éstas deben ser tales que lo exciten lo suficiente, para poder obtener toda la información posible de sus salidas. En este trabajo de tesis

no se profundiza en este punto. Por lo tanto, para realizar la selección de las entradas que excitan el sistema no se utilizó ninguna metodología analítica. Se probaron varias entradas para realizar las simulaciones y las que se implementaron en este trabajo son (las entradas seleccionadas se tomaron o se inspiraron de [13, 10, 1]):

$$\tau_1 = 1.5 \sin(6t) \quad (3.1)$$

$$\tau_2 = 2.5 \sin(t) - \cos(4t) \quad (3.2)$$

$$\tau_3 = (1 - \exp^{-0.8t})29.0 + 68 \sin(16t + 0.1) + 9 \sin(20t + 0.15) \quad (3.3)$$

En todas las simulaciones se tomó el mismo tiempo de muestreo, el cual fue de $h = 0.005s$. Las condiciones iniciales del péndulo, midiendo el ángulo con respecto a su posición en el eje vertical hacia abajo (ver figura 2.1), fueron tomadas como $q = 0$, y $\dot{q} = 0$.

3.2. Mínimos cuadrados

Empleando el método de mínimos cuadrados recursivo, se utilizaron las siguientes condiciones iniciales: $P(0) = \text{diag}(10^6 \ 10^6 \ 10^6 \ 10^6 \ 10^6)$ y para el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}(0) = [20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20]^T$. A continuación, para cada uno de los métodos se muestra: el vector de regresión y la gráfica de $\hat{\theta}$ con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . La amplitud de la potencia de la densidad espectral del ruido blanco agregada a la posición y velocidad del péndulo es de 10^{-8} .

Modelo dinámico implícito.

Para este modelo el vector de regresión está determinado por:

$$Y_I(q, \dot{q}) = \left[\dot{q} \int_0^{kh} \sin(q(\sigma)) d\sigma \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) d\sigma \int_0^{kh} s(\dot{q}(\sigma)) - \int_0^{kh} s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma \right]. \quad (3.4)$$

En la figura 3.1a se presenta una gráfica de los resultados simulados para la estimación del vector $\hat{\theta}$, con el modelo dinámico implícito, para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . Las simulaciones se efectuaron en un tiempo de 50s. En esta figura se puede observar que al excitar el sistema con la entrada τ_1 , los parámetros $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_5$ convergen de manera aceptable a los valores de θ_4 y θ_5 , mientras que $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ no presentan una evolución convergente deseable y presentan considerables oscilaciones. Al excitar el sistema con la entrada τ_2 todos los parámetros convergen adecuadamente a excepción de $\hat{\theta}_3$ que presenta pequeñas oscilaciones. Por último, al excitar el sistema con la entrada τ_3 se observa que los que presentan problemas de convergencia son los parámetros correspondientes a la fricción seca (i.e. Coulomb), ya que muestran una aparente divergencia con respecto a los valores de θ_4 y θ_5 , incluso $\hat{\theta}_5$ es negativo.

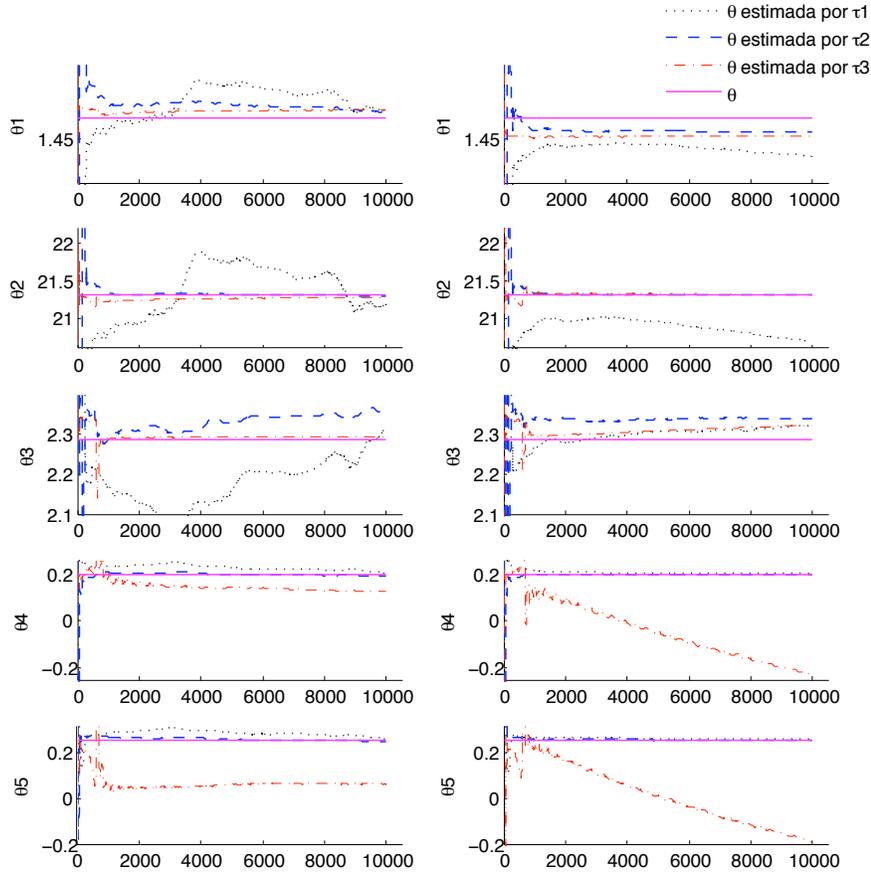


Figura 3.1: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 para los modelos: (a) MDI (modelo dinámico implícito) y (b) MRDF (modelo de regresión de dinámica filtrada).

Modelo de regresión de dinámica filtrada.

Se escogió a prueba y error el valor de $\lambda = 5Hz$ y el vector de regresión para este caso es:

$$Y_F(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda s}{s + \lambda} \dot{q} & \frac{\lambda}{s + \lambda} \sin(q) & \frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{q} & \frac{\lambda}{s + \lambda} s(\dot{q}) & -\frac{\lambda}{s + \lambda} s(-\dot{q}) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

En la figura 3.1b se presenta las gráficas de $\hat{\theta}$ de las simulaciones para el modelo de regresión de dinámica filtrada para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 , en un tiempo de $t = 50s$. Cuando se excita el sistema con la entrada τ_1 se observa una buena convergencia en todos los parámetros que corresponden a las fricciones (viscosa y Coulomb), pero $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ se alejan de manera considerable de θ_1 y θ_2 . Con la entrada τ_2 se observa una convergencia aceptable para todos los parámetros. Finalmente, usando τ_3 como entrada se observa que a pesar de que se logra una buena estimación de $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$, los parámetros $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_5$ presentan una aparente divergencia con respecto a θ_4 y θ_5 .

Modelo de regresión de energía proporcionada.

En el caso de este modelo el vector de regresión queda definido como:

$$\left[\begin{array}{c} \Phi_E(q, \dot{q})^T \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^T \Phi_F(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \\ \frac{\dot{q}^2}{2} \quad 1 - \cos(q) \quad \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^2 d\sigma \quad \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(\dot{q}(\sigma)) d\sigma \quad - \int_0^{kh} \dot{q}(\sigma) s(-\dot{q}(\sigma)) d\sigma \end{array} \right] \quad (3.6)$$

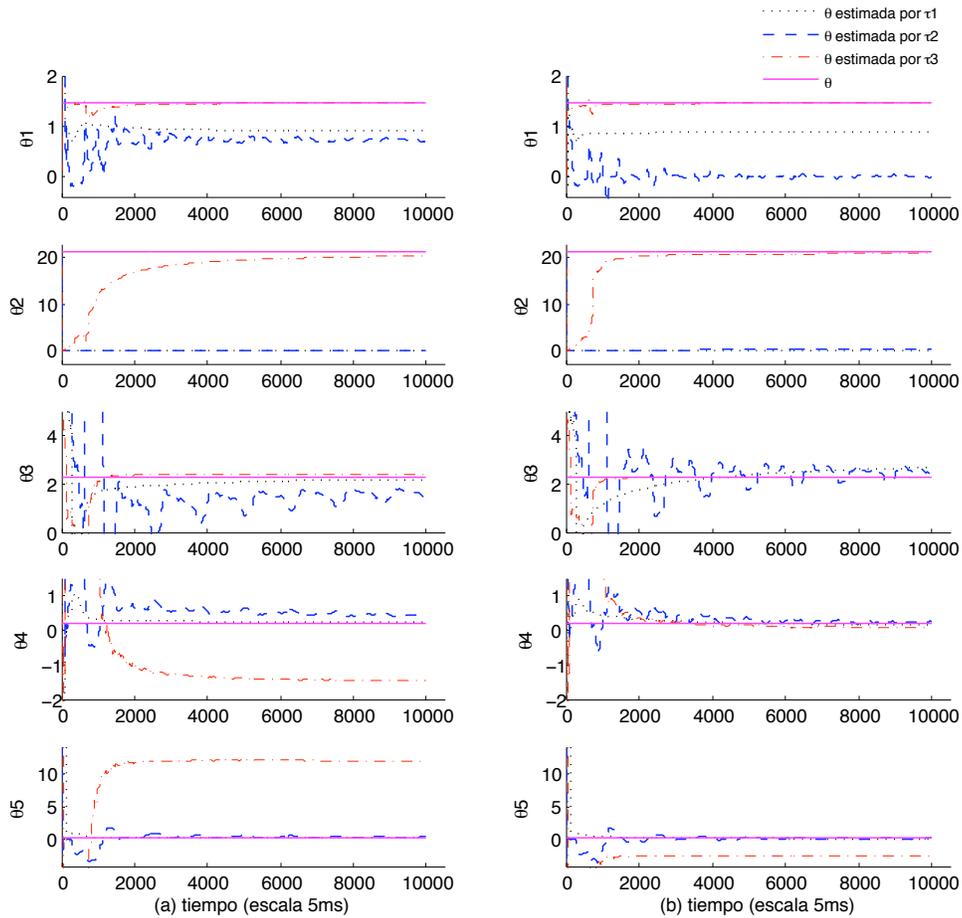


Figura 3.2: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 para los modelos: (a) MREP (modelo de regresión de energía proporcionada) y (b) MRPF (modelo de regresión de potencia filtrada).

En la figura 3.2a se muestra las gráficas del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el modelo de regresión de energía proporcionada para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 , en un tiempo de $t = 50s$. Se observa que en este modelo de identificación las entradas τ_1 y τ_2 no excitan lo suficiente al sistema ya que el parámetro $\hat{\theta}_2$ tiende a cero. Excitando el sistema con la entrada

τ_3 se puede observar que $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ convergen de manera aceptable a los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 . Sin embargo, $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_5$ convergen pero no a los valores de θ_4 y θ_5 .

Modelo de regresión de potencia filtrada.

Se escogió el valor de $\lambda = 5Hz$. El vector de regresión está definido por:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\lambda s}{s+\lambda} \Phi_E(q, \dot{q}^T) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}^T \Phi_F(\dot{q}) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{\lambda s}{s+\lambda} \frac{\dot{q}^2}{2} \quad \frac{\lambda s}{s+\lambda} - \cos(q) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}(\sigma)^2 \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}(\sigma) s(\dot{q}(\sigma)) \quad - \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}(\sigma) s(-\dot{q}(\sigma)) \end{array} \right] \quad (3.7)$$

En la figura 3.2b se presenta la gráfica de $\hat{\theta}$ para este modelo de regresión; al igual que en los modelos anteriores usando las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . El tiempo de simulación es de $t = 50s$. En el modelo de regresión de potencia filtrada se obtuvo un resultado similar al modelo de regresión de energía proporcionada ya que también se observa que las entradas τ_1 y τ_2 no excitan lo suficiente al sistema puesto que el parámetro $\hat{\theta}_2$ tiende a cero. Al excitar el sistema con la entrada τ_3 todos los parámetros estimados convergen adecuadamente, a excepción de $\hat{\theta}_5$ que converge pero no al valor de θ_5 .

3.3. Variables instrumentales

En esta sección se presentan las simulaciones numéricas para los modelos dinámico implícito y el de regresión de dinámica filtrada utilizando el método de variables instrumentales. Se da una breve explicación de la razón por la cual, para este método, se descartan los modelos de regresión de energía proporcionada y potencia filtrada.

De la sección 3.1, se observa que al realizar la estimación del vector de parámetros $\hat{\theta}$ con el método de mínimos cuadrados, los modelos de regresión de energía proporcionada y el de potencia filtrada son muy sensibles al tipo de entrada que se escoge para excitar al sistema. Para un adecuado funcionamiento de estos modelos es necesario escoger una entrada de excitación persistente.

La elección de una entrada de excitación persistente no es un asunto trivial, es un problema de optimización no lineal, en el cual se tienen que considerar los grados de libertad del robot manipulador, las velocidades y aceleraciones máximas de las uniones, etcétera. Por ello para cada sistema es necesario crear su propia entrada de excitación persistente, pues una entrada que funciona bien en un sistema dado no necesariamente trabajara bien en otro sistema. Encontrar una entrada de excitación persistente para los modelos basados en el principio de la conservación de la energía es mucho más complicado en comparación al MDI y al MRDF, ya que son mucho más sensibles a las entradas que excitan al sistema. Como ya se mencionó, la elección de la entrada de excitación persistente no se trata en este trabajo de tesis. Por lo tanto, se ha decidido descartar los modelos basados en el principio de la conservación de la energía del método de variables instrumentales y de la parte experimental.

Se utilizaron las siguientes condiciones iniciales para el método de variables instrumentales: $P(0) = \text{diag}(10^4 \ 10^4 \ 10^4 \ 10^4 \ 10^4)$, para el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}(0) = [20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20]^T$. Como ya se mencionó, durante la fase inicial, este método es muy sensible a las condiciones iniciales de $\hat{\theta}(0)$ y $P(0)$. Por lo tanto, en todas las simulaciones efectuadas, de 0 a 1 segundo se utilizó el método de mínimos cuadrados, conmutando al de variables instrumentales en $t = 1$ segundo. La duración de las simulaciones es de $t = 50$ segundos. El vector de regresión para los dos modelos es el mismo que en el caso del método de mínimos cuadrados, al igual que el vector de regresión para los modelos auxiliares. Con la finalidad de poder comparar los dos métodos de identificación, en las siguientes gráficas se muestra los parámetros estimados para los modelos dinámico implícito y el de regresión de dinámica filtrada con los métodos de VI y MC para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 presentadas en la sección 3.1 (Ecs. (3.1)-(3.3)). La amplitud de la potencia de la densidad espectral del ruido blanco agregada a la posición y velocidad del péndulo es de 10^{-6} .

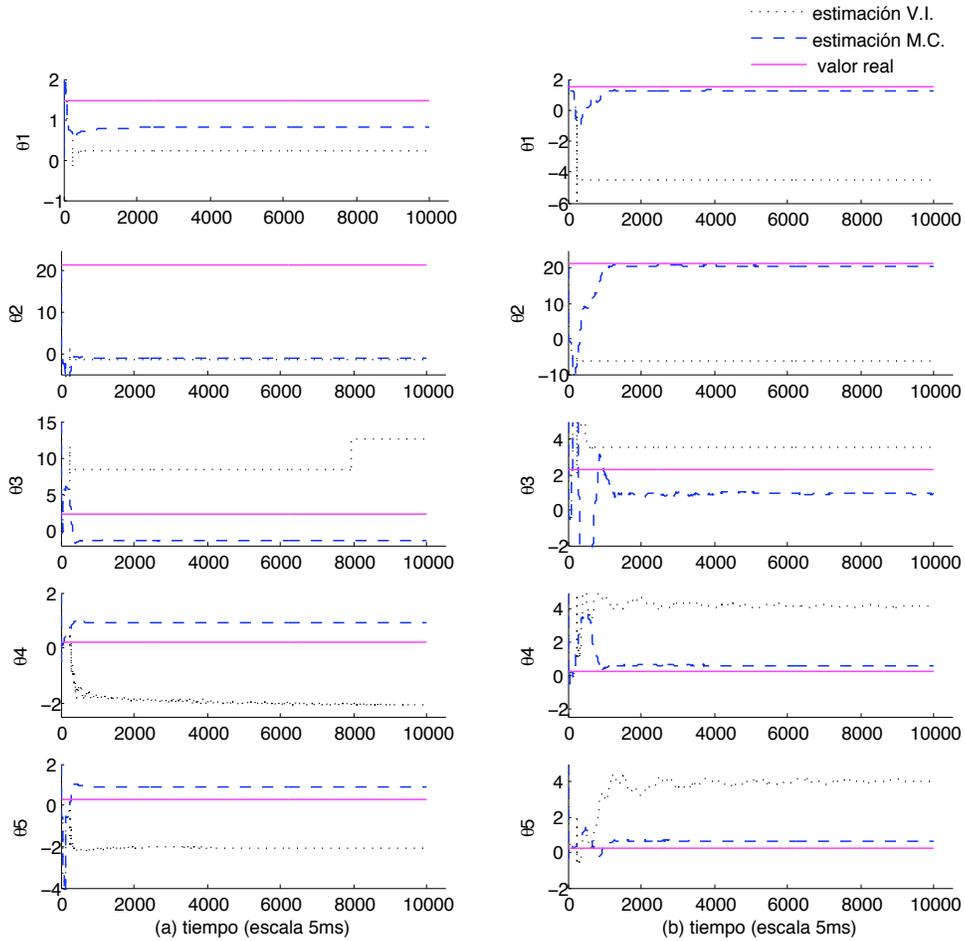


Figura 3.3: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con el MDI para el método de mínimos cuadrados (MC) y variables instrumentales (VI) con las entradas: (a) τ_1 y (b) τ_2 .

Modelo dinámico implícito.

En las figuras 3.3a, 3.3b y 3.4 se muestra la evolución del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el modelo dinámico implícito con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente. Se simuló simultáneamente los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales con la finalidad de poder compararlos. Es importante mencionar que los dos métodos se simuló respetando las condiciones iniciales mencionadas en la sección 3.2.

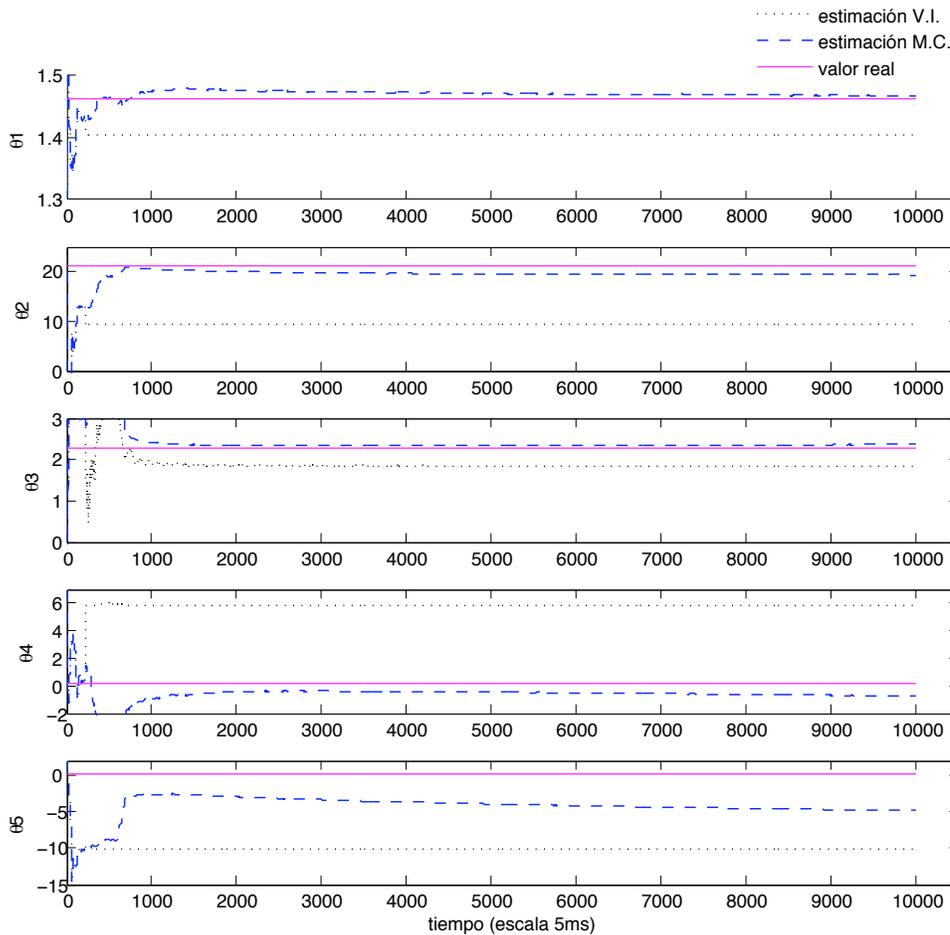


Figura 3.4: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con el MDI para el método de mínimos cuadrados (MC) y variables instrumentales (VI) con la entrada τ_3

La señal de ruido blanco introducida al sistema es mayor que en el caso de las simulaciones realizadas con el método de mínimos cuadrados en la sección ???. Utilizando el método de mínimos cuadrados se observa en las figuras 3.3a, 3.3b y 3.4 que al cambiar las condiciones iniciales y aumentar la señal de ruido blanco introducida al sistema, el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se desvía del valor del vector θ . Al excitar el sistema con la entrada τ_1 los parámetros estimados $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ son negativos. Usando la entrada τ_2 todos los parámetros estimados son positivos, pero como ya se mencionó, se alejan de manera considerable del valor del vector θ . Por último, con la entrada τ_3 los parámetros estimados correspondientes a la fricción de Coulomb son negativos. Por lo tanto, se puede decir que al aumentar el ruido blanco introducido al sistema el método de mínimos cuadrados ya no es tan exacto al realizar

la estimación paramétrica.

Analizando las figuras 3.3a, 3.3b y 3.4 se observa que al utilizar el método de variables instrumentales con este modelo (modelo dinámico implícito), todos los parámetros convergen a valores bastante alejados del valor del vector θ . Con las tres entradas la estimación del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ es mejor utilizando el método de mínimos cuadrados que utilizando variables instrumentales.

Modelo de regresión de dinámica filtrada.

Se escogió $\lambda = 5Hz$. El vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para este modelo con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 , se muestra en la figura 3.5a, 3.5b y 3.6 respectivamente. Con la finalidad de comparar los métodos de variables instrumentales y mínimos cuadrados se realizaron las simulaciones simultáneamente

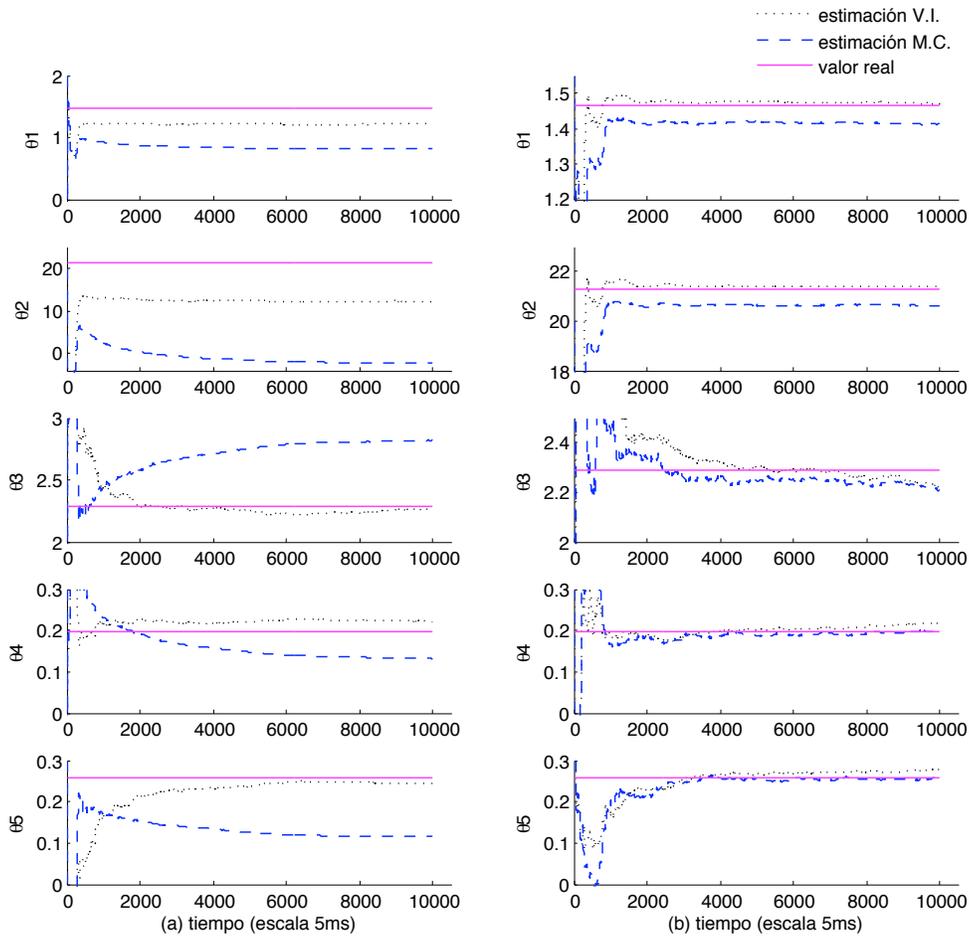


Figura 3.5: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con el MRDF para el método de mínimos cuadrados (MC) y variables instrumentales (VI) con las entradas: (a) τ_1 y (b) τ_2 .

Al igual que en el modelo dinámico implícito los dos métodos se simularon respetando las condiciones iniciales mencionadas en la sección 3.2. El método de mínimos cuadrados

no es tan eficiente cuando se aumenta la señal de ruido blanco introducida al sistema. Al comparar de manera gráfica los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales, se observa que con las tres entradas el método de variables instrumentales es más eficiente. Es decir, el vector de parámetros estimado $\hat{\theta}$ se acerca más al valor del vector θ utilizando el método de variables instrumentales.

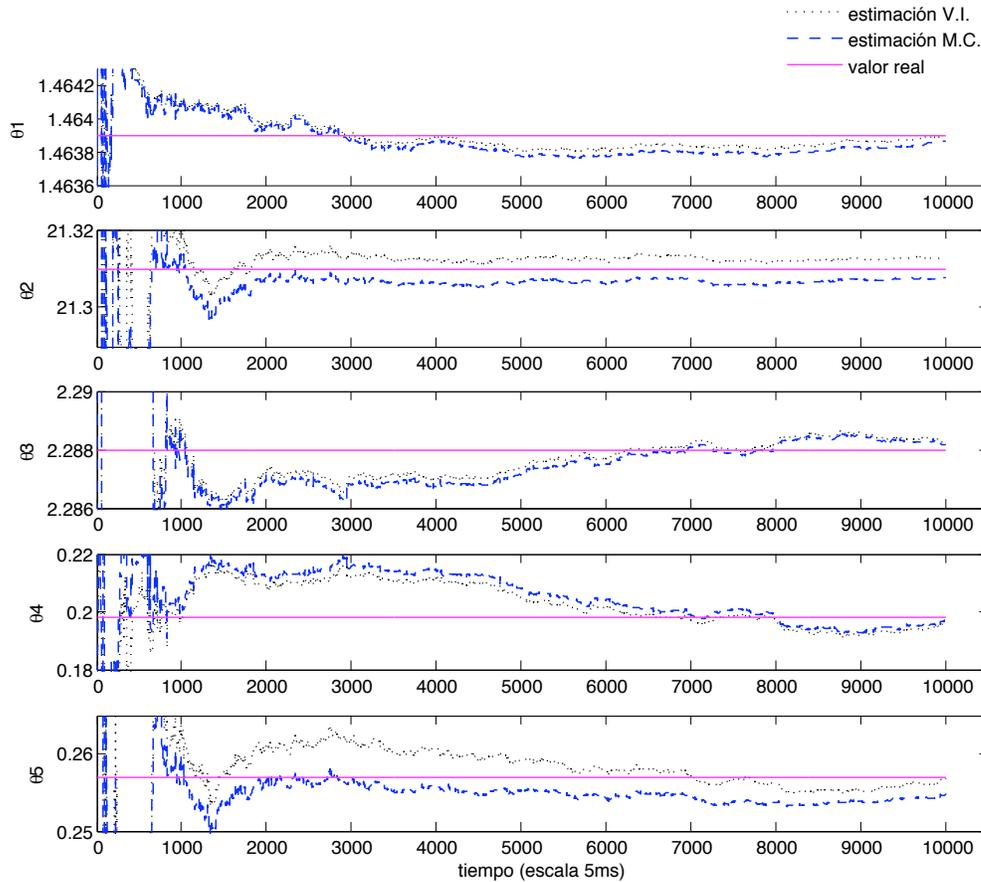


Figura 3.6: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con el MRDF para el método de mínimos cuadrados (MC) y variables instrumentales (VI) con la entrada τ_3

Capítulo 4

Implementación experimental

En este capítulo se presentan los desarrollos experimentales de los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales para determinar los parámetros del modelo dinámico de un péndulo actuado (Mechatronics Kit). Se utilizaron estos dos métodos para los modelos: dinámico implícito y de regresión de dinámica filtrada. Los modelos de regresión de energía proporcionada y de potencia filtrada no se incluyen en la parte experimental. Como ya se mencionó en el Capítulo 3, son más sensibles a la entrada que se escoge para excitar el sistema. Se muestran de forma general cada una de las técnicas implementadas y en el capítulo 5 se hará un estudio comparativo entre los resultados obtenidos bajo diferentes criterios.

4.1. Entorno Experimental

Para poder aplicar los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales de manera experimental se utilizó el Mechatronics Kit (Quanser Consulting Inc.), el cual es un sistema físico que se puede montar como un péndulo actuado. Esta configuración consta de una barra rígida que está sujeta por uno de sus extremos por medio de un motor CD. El Mechatronics Kit se conecta a una computadora por medio del puerto paralelo a través del cual se comunica. El sistema de control se implementa mediante una tarjeta de la compañía Texas Instruments. Este dispositivo está desarrollado para la enseñanza e investigación del control e identificación en tiempo real.

Para poder llevar a cabo la identificación de los parámetros del modelo dinámico del péndulo implementado a través del Mechatronics Kit, se optó por excitar el sistema y almacenar en disco duro los vectores de posición, velocidad y la entrada (excitación del sistema). Estos datos después fueron analizados fuera de línea por medio de Simulink en Matlab, utilizando los métodos y modelos ya mencionados.

Para medir la posición del péndulo simple, el Mechatronics Kit utiliza un encoder óptico. La velocidad del eslabón es estimada en tiempo real a partir de su posición por la siguiente ecuación de diferencias:

$$\dot{q}(k) \cong \frac{q(k) - q(k-1)}{h}. \quad (4.1)$$

La entrada que se utilizó para excitar el sistema es $\tau_1 = 1.5 \sin(6t)$. El tiempo de muestreo para guardar los vectores de posición y velocidad del péndulo fue de $h = 0.005s$. El tiempo

de muestreo en las simulaciones usando el método de mínimos cuadrados fue de $h = 0.005s$ y para el método de variables instrumentales de $h = 0.015s$. El intervalo de tiempo durante el cual se almacenó los vectores de posición y velocidad fué $t = 44s$. De manera similar al caso del capítulo anterior, las condiciones iniciales del péndulo, midiendo el ángulo con respecto a su posición en el eje vertical hacia abajo, fueron tomadas como $q(0) = \dot{q}(0) = 0$.

4.2. Mínimos cuadrados

Las condiciones iniciales que se utilizaron en el método de mínimos cuadrados son: $P(0) = \text{diag}(10^3 \ 10^3 \ 10^3 \ 10^3 \ 10^3)$ y para el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}(0) = (20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20)$. El vector de regresión para cada uno de los modelos queda determinado de la misma forma que en el capítulo 3. A continuación, se muestran las gráficas de los parámetros estimados para el péndulo subactuado con el método de mínimos cuadrados para los modelos dinámico implícito y de regresión de dinámica filtrada.

Modelo dinámico implícito.

En la figura 4.1 se presentan las gráficas de los parámetros estimados del péndulo actuado, utilizando el modelo dinámico implícito. Se puede observar que los parámetros $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_5$ no convergen a los valores adecuados, mientras que $\hat{\theta}_2$ si lo hace. Es importante mencionar que $\hat{\theta}_3$ se desía hacia valores negativos. Este parámetro corresponde al valor de la fricción viscosa y normalmente es positivo. Con lo cual se puede decir que este modelo de identificación no es adecuado para la estimación paramétrica. En el capítulo 5 se aplican criterios de evaluación para este modelo.

Modelo de regresión de dinámica filtrada.

Se observa en la figura 4.1 que a diferencia del modelo dinámico implícito, en el modelo de regresión de dinámica filtrada todos los parámetros convergen. Sin embargo, es necesario hacer notar que al igual que en el modelo anterior, el parámetro θ_3 es negativo. Como ya se mencionó, debería tener un valor positivo ya que representa la fricción viscosa del péndulo actuado. En el capítulo 5 se aplican criterios que determinan con qué tanta exactitud se estimaron los parámetros del modelo dinámicos del sistema.

4.3. Variables instrumentales

Para realizar la estimación paramétrica de manera experimental con el método de variables instrumentales se utilizaron las siguientes condiciones iniciales: $P(0) = \text{diag}(10^4 \ 10^4 \ 10^4 \ 10^4 \ 10^4)$ para el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}(0) = (20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20)$. De igual manera que en las simulaciones, de 0 a 1 segundo se utilizó el método de mínimos cuadrados, conmutando al de variables instrumentales en $t = 1$ segundo. La duración de las simulaciones es de $t = 44$ segundos. Los vectores de regresión para los dos modelos y los vectores de regresión de los modelos auxiliares quedan determinados de la misma forma que en el Capítulo 3. En seguida se muestran las gráficas de los parámetros estimados para el

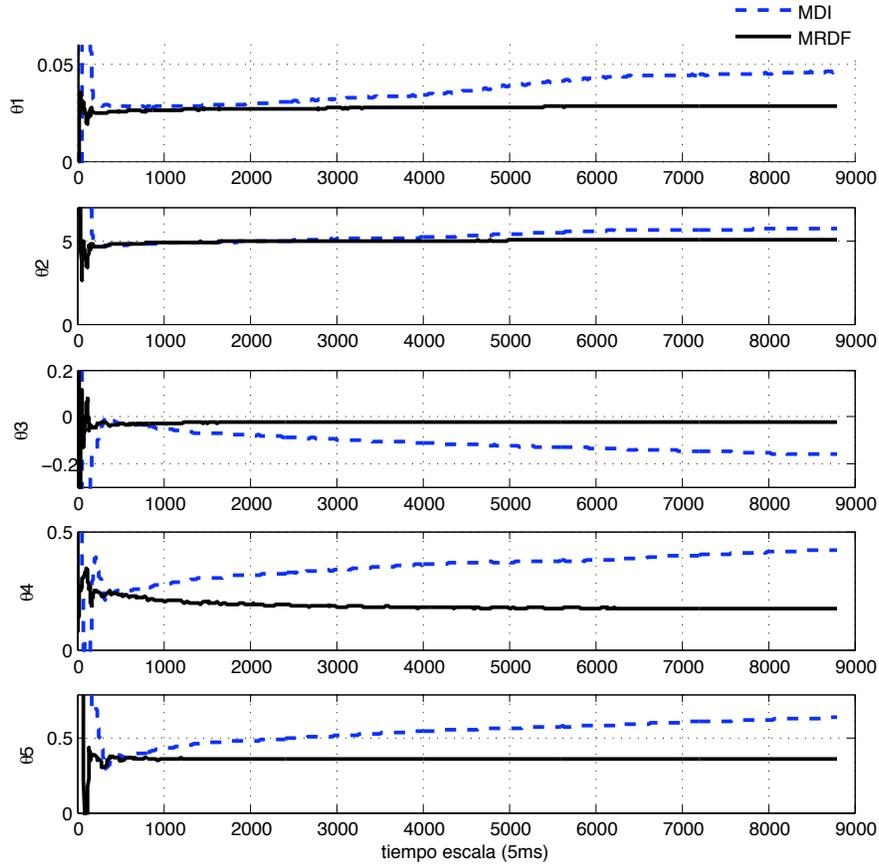


Figura 4.1: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con la entrada τ_1 para los modelos MDI (modelo dinámico implícito) y MRDF (modelo de regresión de dinámica filtrada).

péndulo actuado por el método de variables instrumentales para los modelos dinámico implícito y el de regresión de dinámica filtrada.

Modelo dinámico implícito.

En la figura 4.2 se muestran las gráficas del vector de parámetros estimados del péndulo actuado para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales, usando el modelo dinámico implícito. Se puede observar que con el método de variables instrumentales todos los parámetros convergen, pero $\hat{\theta}_3$ es negativo. Utilizando las mismas condiciones iniciales con el método de mínimos cuadrados se observa que ningún estimador presenta una evolución convergente deseable y $\hat{\theta}_3$ también es negativo. En el Capítulo 5 se presentan criterios de evaluación para verificar con qué tanta exactitud se ha realizado la estimación paramétrica con el método de variables instrumentales.

Modelo de regresión de dinámica filtrada.

Para este modelo se muestra en la figura 4.3 las gráficas del vector de parámetros esti-

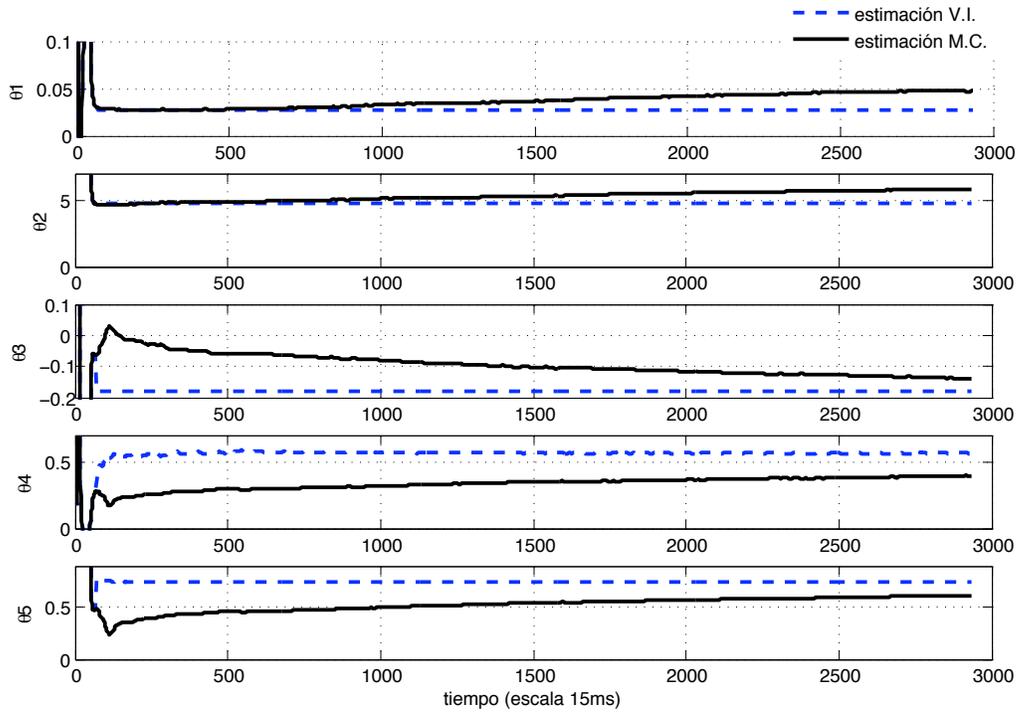


Figura 4.2: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con la entrada τ_1 para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales utilizando el MDI (modelo dinámico implícito).

mados del péndulo actuado usando los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales. Analizando la gráfica 4.3 se puede observar que utilizando el método de mínimos cuadrados todos los parámetros logran una buena convergencia, pero nuevamente el valor de $\hat{\theta}_3$ que corresponde a la fricción viscosa del péndulo actuado, es negativo. Por otro lado, al utilizar variables instrumentales todos los parámetros logran una buena convergencia. En el Capítulo 5 se discute a detalle qué tan efectivo es utilizar el método de variables instrumentales con el modelo de regresión de dinámica filtrada.

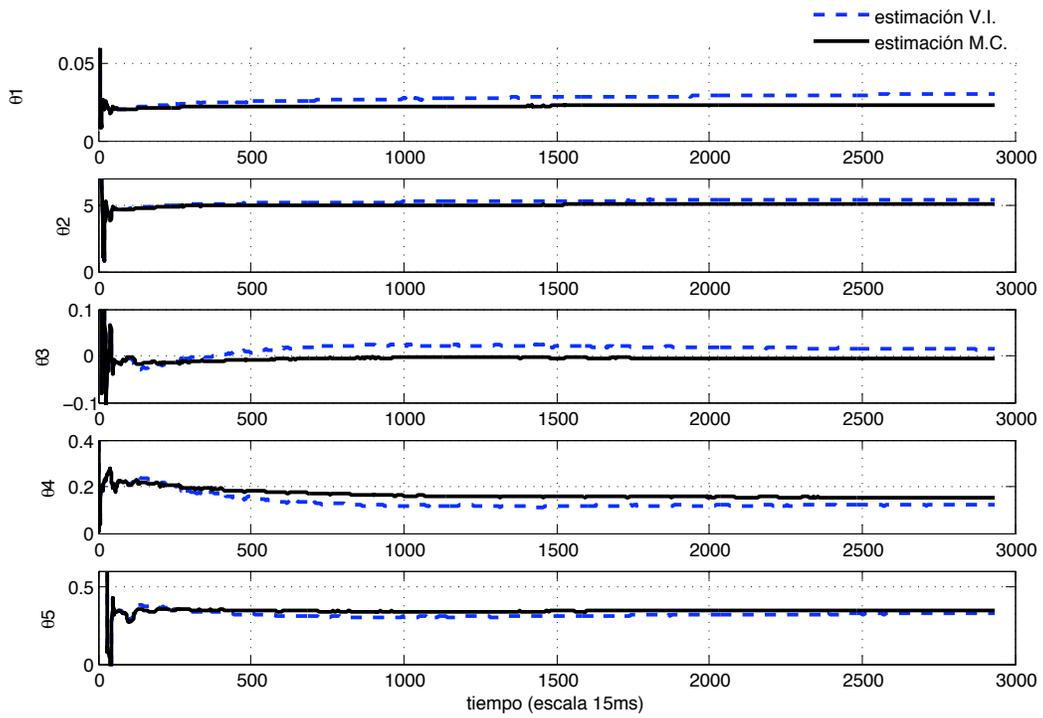


Figura 4.3: Vector estimado $\hat{\theta}(k)$ con la entrada τ_1 para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales utilizando el MRDF (modelo de regresión de dinámica filtrada)

Capítulo 5

Estudio Comparativo

El objetivo de este capítulo es presentar un estudio comparativo de los resultados simulados y experimentales para los modelos utilizando los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales. En la primera sección se definen los criterios de evaluación sobre los cuales serán analizados cada uno de los modelos con su respectivo método de identificación. En la segunda sección se presenta el análisis para los resultados simulados y por último, en la tercera sección se presenta el estudio comparativo de los resultados experimentales.

5.1. Criterios de evaluación

Para evaluar el desempeño de los diferentes métodos y modelos se utilizaron cuatro criterios: promedio del error relativo, máximo error relativo, promedio del error absoluto de la posición y tiempo de convergencia. Los dos primeros (promedio del error relativo y el máximo error relativo) requieren el conocimiento del vector de parámetros reales θ del sistema, a diferencia de los dos últimos criterios (promedio del error absoluto de la posición y tiempo de convergencia). Por lo tanto, en las simulaciones se utilizarán los cuatro criterios para evaluar la eficiencia de la estimación del vector de parámetros del modelo dinámico del péndulo simple. Por otro lado, en la implementación experimental sólo se utilizarán el promedio del error absoluto de la posición y el tiempo de convergencia, ya que se desconocen los parámetros del modelo dinámico del péndulo implementado a través del Mechatronics Kit.

1. **Promedio del error relativo [9].** Es el promedio del error relativo de los parámetros estimados con respecto a los parámetros exactos, θ^* :

$$\epsilon_{i,ER} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\theta_i^* - \hat{\theta}_i(k)}{\theta_i^*} \right|, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (5.1)$$

donde θ_i^* representa el vector de parámetros reales, $\hat{\theta}_i$ el vector de parámetros estimados y N el número total de muestras. Este criterio representa un promedio de la inexactitud relativa en la estimación de los parámetros; mientras más pequeño sea este valor, más próximos estarán los parámetros a los valores reales.

2. **Máximo error relativo [9].** El máximo error relativo de los parámetros queda determinado como:

$$\varepsilon_{i,max} = \text{máx} \left\{ \frac{\theta_i^* - \hat{\theta}_i(k)}{\theta_i^*} : k = 1, \dots, N \right\}, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (5.2)$$

donde θ_i^* representa el vector de parámetros reales, $\hat{\theta}_i$ el vector de parámetros estimados y N el número total de muestras. Este criterio representa el máximo valor de la inexactitud en la estimación de los parámetros. Al igual que el promedio del error relativo, mientras más pequeño sea este valor, se estará realizando una mejor estimación de los parámetros.

3. **Promedio del error absoluto de la posición [9].** El promedio del error absoluto se calcula simulando el vector de salida q usando los parámetros estimados y comparándolo con el q real del modelo, el cual proporciona una alternativa significativa para validar la exactitud de la estimación paramétrica. El promedio del error absoluto entre estas posiciones es definido como:

$$PEA = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |q^*(k) - q^c(k)| \quad (5.3)$$

donde q_i^* es la posición real del actuador, q_i^c es la posición simulada y N el número total de muestras. En el presente trabajo, para calcular este criterio de evaluación se utiliza la siguiente entrada en lazo abierto:

$$\tau = 10 \sin(t) + 11 \cos^2(3t) + 8 \sin^2(5t) \quad (5.4)$$

4. **Tiempo de convergencia [9].** El tiempo de convergencia se evalúa por medio de la diferencia entre los parámetros estimados en los tiempos t y $t - 1$. Se considera que el parámetro estimado ha llegado a la convergencia cuando el valor absoluto de esta diferencia es menor a $\eta = 0.01$. Así, se obtiene la siguiente ecuación para obtener el tiempo de convergencia:

$$t_{c,i} \triangleq \text{mín} \{ n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n, |\hat{\theta}_i(k) - \hat{\theta}_i(k-1)| < \eta_i \}, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (5.5)$$

donde t_c representa el tiempo de convergencia, $\hat{\theta}(k)$ el vector de parámetros estimados en el tiempo t , $\hat{\theta}(k-1)$ el vector de parámetros estimados en el tiempo $k-1$ y N el número total de muestras.

5.2. Resultados simulados

En esta sección se realiza un estudio comparativo de los resultados simulados para los cuatro modelos (MDI, MRDF, MREP y MRPF) utilizando los métodos de mínimos cuadrados

y variables instrumentales. Para realizar el estudio comparativo se utilizan los cuatro criterios de evaluación mencionados en la sección anterior (promedio del error relativo, máximo error relativo, promedio del error absoluto de la posición y tiempo de convergencia). Las condiciones iniciales para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales son las mencionadas en las secciones 4.2 y 4.3, respectivamente.

5.2.1. Mínimos cuadrados

Para facilitar la comparación de los cuatro modelos con el método de mínimos cuadrados, se presenta en el Cuadro 5.1 los valores del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el modelo dinámico implícito y el modelo de regresión de dinámica filtrada. En el Cuadro 5.2 se muestran los valores del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el modelo de regresión de energía proporcionada y el modelo de regresión de potencia filtrada. En los Cuadros 5.3, 5.4 y 5.5 se muestran los valores de los criterios de evaluación obtenidos para los cuatro modelos con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente.

Modelo dinámico implícito.

Se observa en el Cuadro 5.1 que al comparar el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ por las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 , se realiza una mejor estimación de $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_5$ con la entrada τ_1 ; $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ con la entrada τ_2 y $\hat{\theta}_3$ por la entrada τ_3 . Estos resultados no proporcionan suficiente información acerca de cuál entrada realiza la mejor estimación del vector de parámetros θ , por ello la importancia de presentar los criterios de evaluación.

	valor real	MDI			MRDF		
		τ_1	τ_2	τ_3	τ_1	τ_2	τ_3
θ_1	1.4639	1.4688	1.4679	1.4691	1.4379	1.4542	1.4513
θ_2	21.31	21.1386	21.2931	21.2832	20.6900	21.3175	21.3237
θ_3	2.288	2.3112	2.3523	2.2937	2.3222	2.3383	2.3226
θ_4	0.198	0.2038	0.1915	0.1261	0.2027	0.1988	-0.2289
θ_5	0.257	0.2629	0.2509	0.0638	0.2599	0.2577	-0.1895

Tabla 5.1: Estimaciones del vector de parámetros $\hat{\theta}$ para el MDI y el MRDF con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 .

	valor real	MREP			MRPF		
		τ_1	τ_2	τ_3	τ_1	τ_2	τ_3
θ_1	1.4639	0.9015	0.7029	1.4601	0.8740	0	1.4506
θ_2	21.31	-0.0173	-0.1097	20.4163	-0.0045	0.0859	20.9354
θ_3	2.288	2.1764	1.3156	2.3909	2.6720	2.1896	2.2734
θ_4	0.198	0.2297	0.4845	-1.4562	0.1423	0.2418	0.0640
θ_5	0.257	0.2370	0.5029	11.8376	0.1440	0.2875	-2.3695

Tabla 5.2: Estimaciones del vector de parámetros $\hat{\theta}$ para el MREP y el MRPF con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 .

De los Cuadros 5.3, 5.4 y 5.5 se observa que la entrada que presenta un menor promedio

del error relativo (*PER*) es la entrada τ_2 , después τ_1 y por último τ_3 . La entrada que presenta un menor valor del máximo error relativo (*MER*) es τ_3 , le sigue τ_1 y finalmente τ_2 .

Los parámetros $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ no alcanzan convergencia con la entrada τ_1 y el tiempo de convergencia para el resto de los parámetros es grande. Con la entrada τ_2 el parámetro estimado $\hat{\theta}_3$ no alcanza convergencia, $\hat{\theta}_2$ converge hasta $t = 42$ s, mientras que $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_5$ logran convergencia entre $t = 2$ s y $t = 5$ s. Por último, con τ_3 todos los parámetros logran convergencia y el promedio del tiempo de convergencia con esta entrada es de $t = 8.4$ s.

En las Figuras 5.1(a), 5.2(a) y 5.3(a) se observa la respuesta en lazo abierto del modelo dinámico implícito para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente. En los tres casos se observa que la simulación con los parámetros estimados sigue de manera visiblemente cercana la forma de la respuesta de la simulación con los parámetros reales. El promedio del error absoluto de la posición para la entrada τ_1 es de 0.5634, para τ_2 es de 0.1382 y para τ_3 es de 0.3248.

Tomando en cuenta los criterios de evaluación se llega a la conclusión de que la entrada que realiza una mejor estimación paramétrica para este modelo es τ_2 .

Modelo de regresión de dinámica filtrada.

Al comparar el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ calculado por las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 , se observa en el Cuadro 5.1, que se realiza una mejor estimación de $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_5$ con la entrada τ_2 y de $\hat{\theta}_3$ con la entrada τ_1 .

	MDI			MRDF			MREP			MRPF		
	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c
θ_1	0.01	0.82	19.0	0.02	1.05	3.0	0.40	0.53	12.0	0.43	1.10	5.0
θ_2	0.02	0.36	-	0.03	1.62	-	1.00	1.00	4.0	1.00	1.00	2.0
θ_3	0.08	0.10	-	0.05	0.03	7.9	0.24	1.75	32.0	0.23	1.34	-
θ_4	0.17	10.78	47.0	0.07	3.74	3.0	0.68	15.07	9.0	0.58	14.59	22
θ_5	0.15	0.96	47.0	0.06	2.38	3.0	1.22	3.04	11.0	1.34	2.41	24.01

Tabla 5.3: Criterios de evaluación: promedio del error relativo (*PER*), máximo error relativo (*MER*) y tiempo de convergencia (t_c). Para los cuatro modelos se utilizó la entrada τ_1 .

Se observa de los Cuadros 5.3, 5.4 y 5.5 que la entrada que presenta un menor promedio del error relativo (*PER*) es la entrada τ_2 , después τ_1 y por último τ_3 . La entrada que presenta un menor valor del máximo error relativo (*MER*) es τ_1 , le sigue τ_2 y finalmente τ_3 .

Al excitar el sistema con la entrada τ_1 se observa que los parámetros $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ no alcanzan convergencia, los parámetros $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_4$ y $\hat{\theta}_5$ alcanzan convergencia en tiempos considerablemente grandes. Al realizar la estimación paramétrica con la entrada τ_2 el parámetro que no alcanza convergencia es $\hat{\theta}_3$. Por último, todos los parámetros logran convergencia con la entrada τ_3 y el promedio del tiempo de convergencia es de 7.033 s.

En las Figuras 5.1(b), 5.2(b) y 5.3(b) se observa la respuesta en lazo abierto del modelo de regresión de dinámica filtrada para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente. En los tres casos se observa que la simulación con los parámetros estimados sigue de manera visiblemente cercana la forma de la respuesta de la simulación con los parámetros reales. El promedio del

error absoluto de la posición para la entrada τ_1 es de 2.0768, para τ_2 es de 0.1463 y para τ_3 es de 0.9906.

Por todo lo mencionado anteriormente se llega a la conclusión que la entrada que realiza una mejor estimación paramétrica para el modelo de regresión de dinámica filtrada es τ_2 .

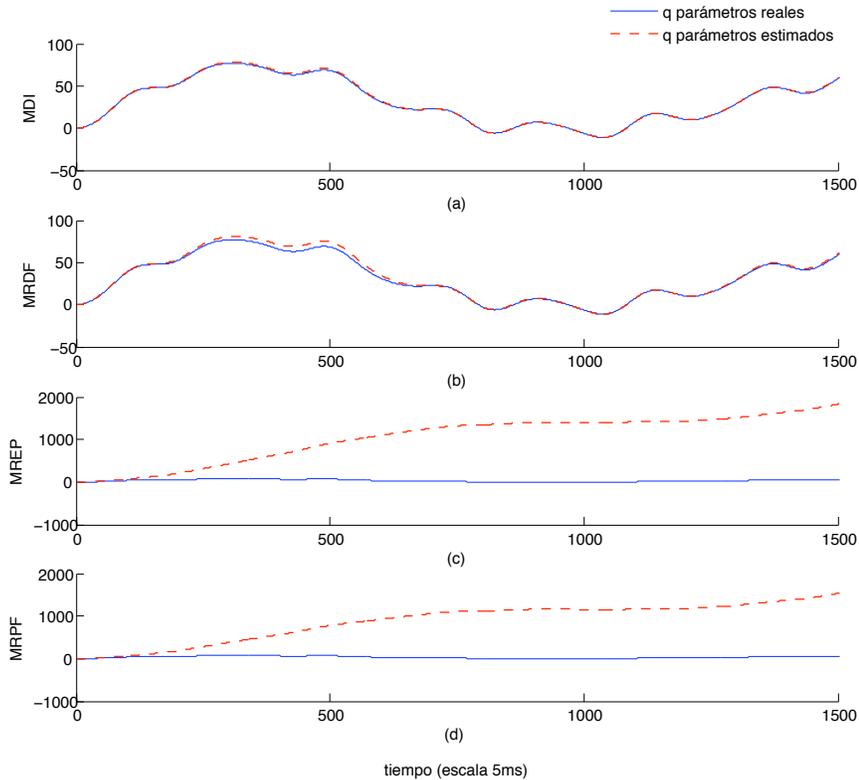


Figura 5.1: Respuesta en lazo abierto de la posición del péndulo utilizando los parámetros reales y los estimados para (a) MDI, (b) MRDF, (c) MREP y (d)MRPF; con la entrada τ_1 .

Modelo de regresión de energía proporcionada.

Para este modelo en el Cuadro 5.2 se muestra el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ por las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . Se observa que este modelo no es tan eficiente ya que cuando se excita el sistema con las entradas τ_1 y τ_2 el parámetro $\hat{\theta}_2$ es negativo, además de que se desvía considerablemente del valor de θ_2 . Al excitar el sistema con la entrada τ_3 los parámetros correspondientes a la fricción de Coulomb se alejan demasiado de su valor real, $\hat{\theta}_4$ es negativo mientras que $\hat{\theta}_5$ toma un valor grande y diverge con respecto al valor de θ_5 .

Analizando la información de los Cuadros 5.3, 5.4 y 5.5 es evidente que este modelo presenta un promedio del error relativo y un máximo error relativo mayor en comparación con el modelo dinámico implícito y el modelo de regresión de dinámica filtrada. Esto se debe a que el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se aleja considerablemente del valor del vector θ para las tres entradas que excitan al sistema.

Excitando el sistema con la entrada τ_1 el promedio del tiempo de convergencia es de 13.6

	MDI			MRDF			MREP			MRPF		
	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c
θ_1	0.01	0.32	3.0	0.01	0.96	3.0	0.57	1.12	-	1.00	1.40	-
θ_2	0.003	0.19	45	0.01	1.90	10.0	1.00	1.00	-	0.99	1.00	-
θ_3	0.05	0.16	-	0.04	4.79	5.75	0.69	2.37	-	0.45	1.99	-
θ_4	0.07	11.94	5.00	0.06	7.73	4.0	2.85	4.86	-	1.79	4.58	-
θ_5	0.06	1.70	2.00	0.04	0.001	2.0	1.77	13.33	-	1.67	14.42	-

Tabla 5.4: Criterios de evaluación: promedio del error relativo (PER), máximo error relativo (MER) y tiempo de convergencia (t_c). Para los cuatro modelos se utilizó la entrada τ_2 .

s, utilizando τ_2 ninguno de los parámetros converge y con la entrada τ_3 todos los parámetros convergen a excepción de $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_5$.

En las Figuras 5.1(c), 5.2(c) y 5.3(c) se observa la respuesta en lazo abierto del modelo de regresión de energía proporcionada para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente. En los tres casos se observa que la simulación con los parámetros estimados difiere notablemente de la respuesta de la simulación con los parámetros reales. Esta situación es de esperarse porque, como ya se mencionó, el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se aleja considerablemente del valor del vector θ . Esto provoca que el promedio del error absoluto de la posición sea muy grande para las tres entradas, para la entrada τ_1 es de 1345.8, para τ_2 es de 2152.7 y para τ_3 es de 38.4322.

Es importante mencionar que para el modelo de regresión de energía proporcionada ninguna de las entradas realiza una buena estimación, pero tomando en cuenta los criterios de evaluación, la entrada τ_3 es la que produce valores estimados más cercanos a los del vector θ .

Modelo de regresión de potencia filtrada.

En el Cuadro 5.2 se muestra el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ por las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . Cuando se excita el sistema con las entradas τ_1 y τ_2 el modelo no es eficiente ya que los parámetros $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ no son cercanos a θ_1 y θ_2 . Utilizando la entrada τ_3 se realiza una buena estimación de los parámetros $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$. Sin embargo, no sucede lo mismo con los parámetros que corresponden a la fricción de Coulomb donde incluso θ_5 es negativo.

	MDI			MRDF			MREP			MRPF		
	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c
θ_1	0.005	1.91	2.0	0.01	1.80	2.0	0.02	0.89	12	0.01	1.07	8
θ_2	0.002	0.13	7.0	0.001	0.25	14.1	0.17	1.00	-	0.09	1.00	34.99
θ_3	0.01	0.06	6.0	0.01	0.92	5.0	0.14	3.23	12	0.09	2.45	10
θ_4	0.32	0.37	12.3	1.24	18.23	-	14.19	34.38	40.6	6.73	59.44	-
θ_5	1.22	0.88	14.7	1.41	1.81	-	44.17	248.21	-	13.4	573.42	-

Tabla 5.5: Criterios de evaluación: promedio del error relativo (PER), máximo error relativo (MER) y tiempo de convergencia (t_c). Para los cuatro modelos se utilizó la entrada τ_3 .

Debido a que el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se aleja considerablemente del valor

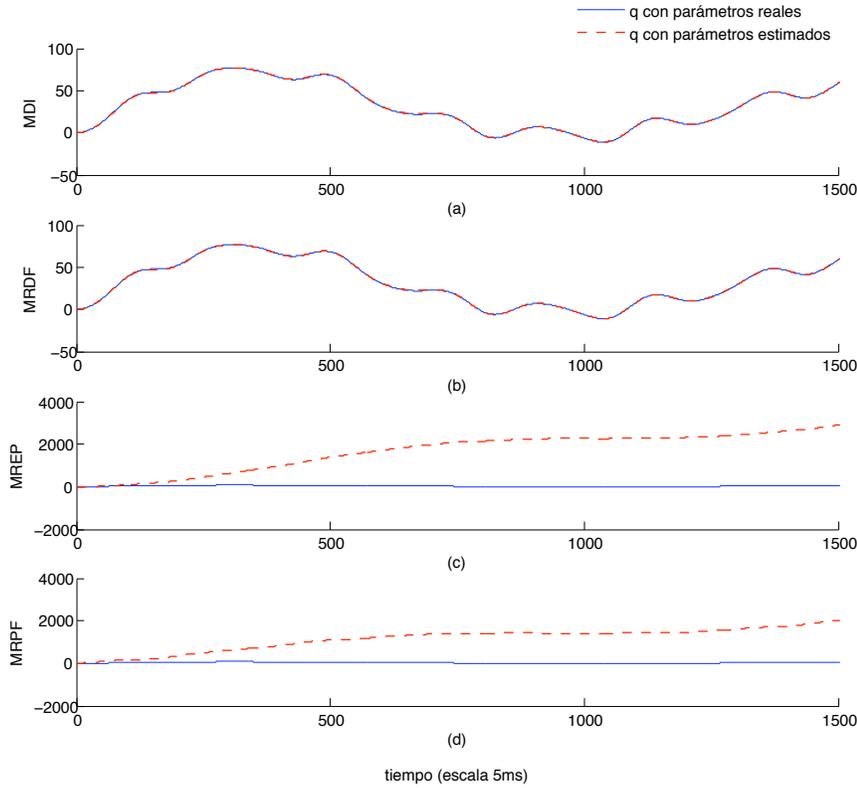


Figura 5.2: Respuesta en lazo abierto de la posición del péndulo utilizando los parámetros reales y los estimados para (a) MDI, (b) MRDF, (c) MREP y (d)MRPF; con la entrada τ_2 .

del vector θ cuando se excita el sistema con las entradas τ_1 y τ_2 , en los Cuadros 5.3, 5.4 y 5.5 se observa que el promedio del error relativo y el máximo error relativo es mayor en comparación con la entrada τ_3 . Cuando se excita el sistema con la entrada τ_1 todos los parámetros alcanzan convergencia a excepción de θ_3 , al utilizar la entrada τ_2 ningún parámetro converge y con τ_3 solo los parámetros que corresponden a la fricción de Coulomb no convergen.

En las Figuras 5.1(d), 5.2(d) y 5.3(d) se observa la respuesta en lazo abierto del modelo de regresión de potencia filtrada para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente. Al excitar el sistema con las entradas τ_1 y τ_2 se observa que la simulación con los parámetros estimados no sigue la forma de la respuesta de la simulación con los parámetros reales. Esta situación es conforme a lo esperado ya que el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se aleja considerablemente del valor del vector θ . Esto provoca que el promedio del error absoluto de la posición sea muy grande para las dos entradas, para la entrada τ_1 es de 1117.6 y para τ_2 es de 1459.6. Sin embargo, utilizando los parámetros estimados por la entrada τ_3 la respuesta en lazo abierto para este modelo logra un mejor seguimiento de la forma de la respuesta que la correspondiente al MREP.

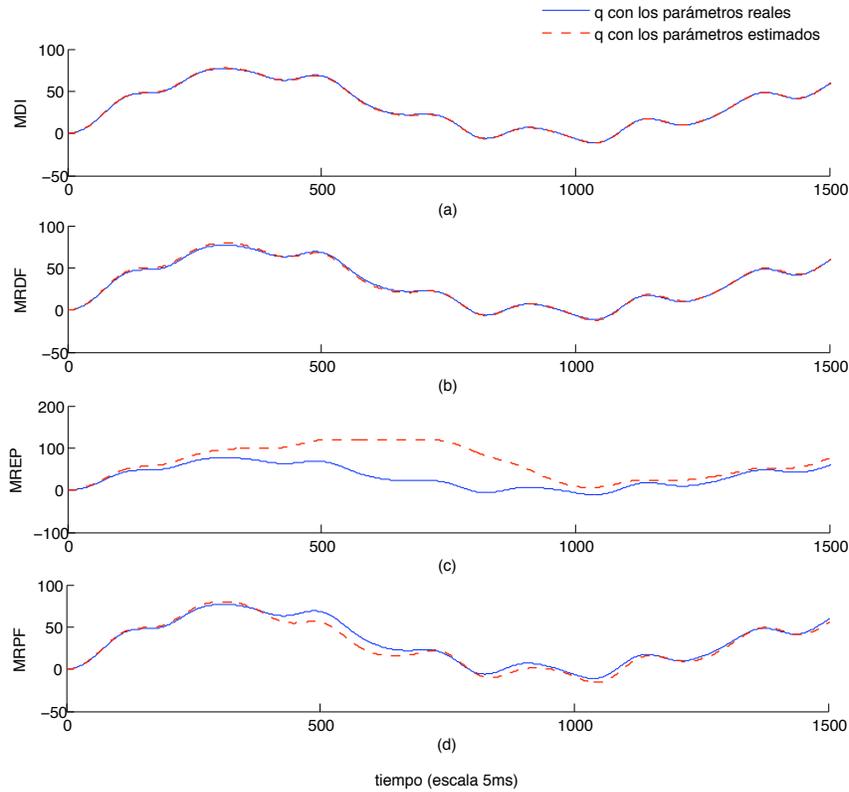


Figura 5.3: Respuesta en lazo abierto de la posición del péndulo utilizando los parámetros reales y los estimados para (a) MDI, (b) MRDF, (c) MREP y (d)MRPF; con la entrada τ_3 .

5.2.2. Variables instrumentales

En el Cuadro 5.6 se muestran los valores del vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ para el modelo dinámico implícito y el modelo de regresión de dinámica filtrada utilizando el método de variables instrumentales. En los Cuadros 5.6, 5.7 y 5.8 se muestran los valores de los criterios de evaluación obtenidos para los dos modelos con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente.

	valor real	MDI			MRDF		
		τ_1	τ_2	τ_3	τ_1	τ_2	τ_3
θ_1	1.4639	0.2069	-4.4750	1.4055	1.2142	1.4712	1.4639
θ_2	21.31	-1.5583	-6.1741	9.4647	12.2334	21.3831	21.3131
θ_3	2.288	12.5285	3.5417	1.8467	2.2654	2.2220	2.2882
θ_4	0.198	-2.0606	4.1192	5.8347	0.2215	0.2189	0.1957
θ_5	0.257	-2.1001	4.1439	-10.1269	0.2439	0.2781	0.2568

Tabla 5.6: Estimaciones del vector de parámetros $\hat{\theta}$ para el MDI y el MRDF con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 .

Modelo dinámico implícito.

Se observa del Cuadro 5.6, que utilizando el modelo dinámico implícito el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ se aleja del valor del vector θ . Es evidente que se realiza una muy mala estimación paramétrica, ya que con las tres entradas hay parámetros estimados que incluso son negativos.

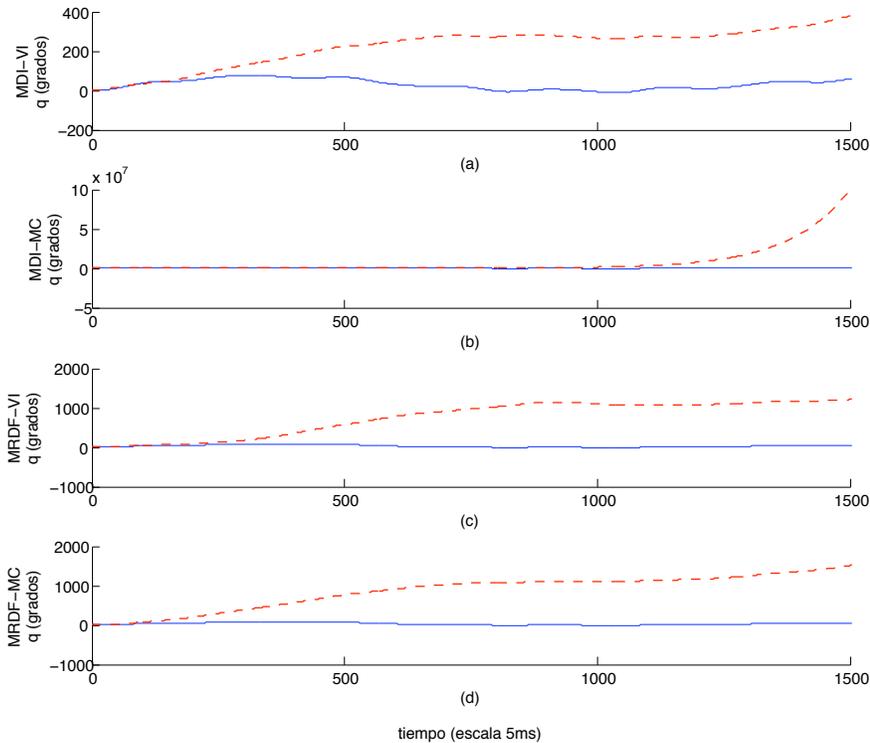


Figura 5.4: Respuesta en lazo abierto de la posición del péndulo utilizando los parámetros reales y los estimados para (a) MDI, (b) MRDF, (c) MREP y (d)MRPF; con la entrada τ_1 .

	MDI			MRDF		
	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c
θ_1	0.849	1.12	2.9	0.17	4.70	9.7
θ_2	1.07	1.31	2.9	0.43	1.34	-
θ_3	3.00	1.17	2.9	0.06	1.27	-
θ_4	10.59	11.51	-	0.15	2.48	10.0
θ_5	8.99	18.13	41.0	0.20	2.47	11.0

Tabla 5.7: Criterios de evaluación: promedio del error relativo (PER), máximo error relativo (MER) y tiempo de convergencia (t_c). Para los cuatro modelos utilizando la entrada τ_1 .

De los Cuadros 5.7, 5.8 y 5.9 se observa que para el método de variables instrumentales se obtiene valores grandes del promedio del error relativo y del máximo error relativo. Esto es debido a que no se realiza una buena estimación paramétrica con este modelo.

Con la finalidad de comparar la diferencia entre los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales, en las Figuras 5.4(a)(b), 5.5(a)(b) y 5.6(a)(b) se observa la respuesta en lazo abierto usando ambos métodos con el modelo dinámico implícito para las entradas

	MDI			MRDF		
	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c
θ_1	3.97	7.82	2.9	0.02	3.49	9.0
θ_2	1.28	1.47	3.9	0.03	1.45	-
θ_3	0.58	1.31	5.0	0.09	2.74	-
θ_4	19.96	3.74	-	0.12	19.39	16.9
θ_5	13.29	3.61	-	0.13	0.68	15.9

Tabla 5.8: Criterios de evaluación: promedio del error relativo (PER), máximo error relativo (MER) y tiempo de convergencia (t_c). Para los cuatro modelos utilizando la entrada τ_2 .

τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente. En la figura 5.4(a)(b) se observa que ninguno de los dos métodos sigue la respuesta en lazo abierto para este modelo. Por lo tanto, con la entrada τ_1 el promedio del error absoluto de la posición es grande para los dos métodos: para mínimos cuadrados es de 4.0×10^8 y para variables instrumentales es de 252.97. En la Figura 5.5(a)(b) podemos ver que utilizando el valor de los parámetros estimados por el método de variables instrumentales, no sigue la respuesta en lazo abierto de la posición. Sin embargo, usando el valor de los parámetros estimados por el método de mínimos cuadrados, se observa que sí sigue la respuesta en lazo abierto de la posición. Esto lleva a obtener los siguientes promedios del error absoluto de la posición con la entrada τ_2 : para mínimos cuadrados es de 4.54 y para variables instrumentales 1.2×10^8 . Por último, la respuesta en lazo abierto de la posición con los parámetros estimados con la entrada τ_3 , se comporta de una manera similar que con τ_2 , como se observa en la Figura 5.5(a)(b). Obteniendo los siguientes valores para los promedios del error absoluto de la posición con esta entrada son: para mínimos cuadrados es de 16.93 y para variables instrumentales 580.69.

Modelo de regresión de dinámica filtrada.

En el Cuadro 5.6 se observa que a diferencia del modelo dinámico implícito, para el modelo de regresión de dinámica filtrada el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ es bastante cercano al valor del vector θ . Es importante mencionar que para este modelo al realizar la estimación paramétrica con las tres entradas ninguno de los parámetros estimados es negativo.

Comparando los dos modelos utilizando el método de variables instrumentales, se observa de los Cuadros 5.7, 5.8 y 5.9 que los valores del promedio del error relativo y del máximo error relativo son pequeños para el modelo de regresión de dinámica filtrada. Evidentemente estos se debe a que se realiza una mejor estimación paramétrica con este modelo que con el modelo dinámico implícito.

En las Figuras 5.4(c)(d), 5.5(c)(d) y 5.6(c)(d), se observa la respuesta en lazo abierto usando ambos métodos con el modelo regresión de dinámica filtrada para las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente. En la figura 5.4(c)(d) se observa que ninguno de los dos métodos sigue la respuesta en lazo abierto para este modelo. Por lo tanto, con la entrada τ_1 el promedio del error absoluto de la posición es grande para los dos métodos: para mínimos cuadrados es de 938.4146 y para variables instrumentales es de 1.09×10^3 . En la Figura 5.5(c)(d) podemos ver que para los dos métodos se obtiene un seguimiento de la respuesta en lazo abierto, se aprecia que el seguimiento es mejor para el método de variables instrumentales.

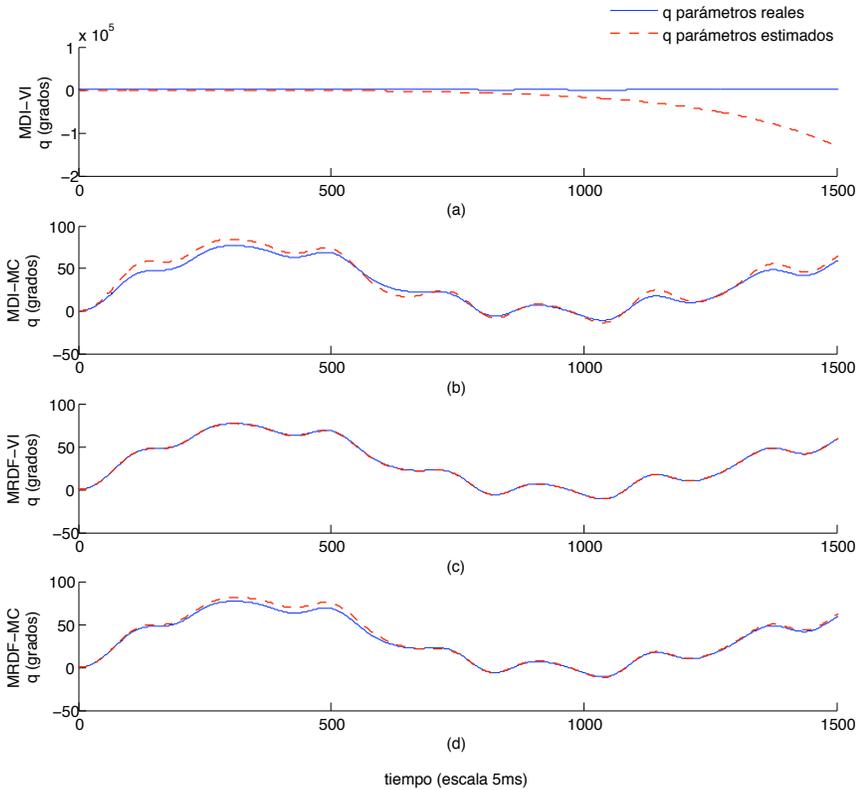


Figura 5.5: Respuesta en lazo abierto de la posición del péndulo utilizando los parámetros reales y los estimados para (a) MDI, (b) MRDF, (c) MREP y (d)MRPF; con la entrada τ_2 .

Los promedios del error absoluto de la posición con la entrada τ_2 : para mínimos cuadrados es de 2.37 y para variables instrumentales es de 0.22. Por último, la respuesta en lazo abierto de la posición con los parámetros estimados con la entrada τ_3 , se comporta de una manera similar que con τ_2 , pero en este caso en la Figura 5.5(c)(d) no se alcanza apreciar en cual se realiza un mejor seguimiento de la respuesta en lazo abierto de la posición. Se obtienen los siguientes valores para los promedios del error absoluto de la posición con esta entrada son: para mínimos cuadrados es de 0.03 y para variables instrumentales 0.0065.

5.3. Resultados experimentales

En esta sección se presenta un estudio comparativo de los resultados experimentales para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales, utilizando los modelos dinámico implícito y el de regresión de dinámica filtrada. Como ya se mencionó, en la implementación experimental se descartan los modelos de regresión de energía proporcionada y el de potencia filtrada. El estudio comparativo se realiza entre los resultados obtenidos bajo dos criterios de evaluación: el promedio del error absoluto de la posición y el tiempo de convergencia. Debido a que se desconocen los valores de los parámetros del modelo dinámico del péndulo implementado a través del Mechatronics Kit, se descartan los criterios de evaluación del promedio del error relativo y el máximo error relativo. Las condiciones iniciales

	MDI			MRDF		
	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c
θ_1	3.97	7.82	2.9	0.02	3.49	9.0
θ_2	1.28	1.47	3.9	0.03	1.45	-
θ_3	0.58	1.31	5.0	0.09	2.74	-
θ_4	19.96	3.74	-	0.12	19.39	16.9
θ_5	13.29	3.61	-	0.13	0.68	15.9

Tabla 5.9: Criterios de evaluación: promedio del error relativo (PER), máximo error relativo (MER) y tiempo de convergencia (t_c). Para los cuatro modelos utilizando la entrada τ_3 .

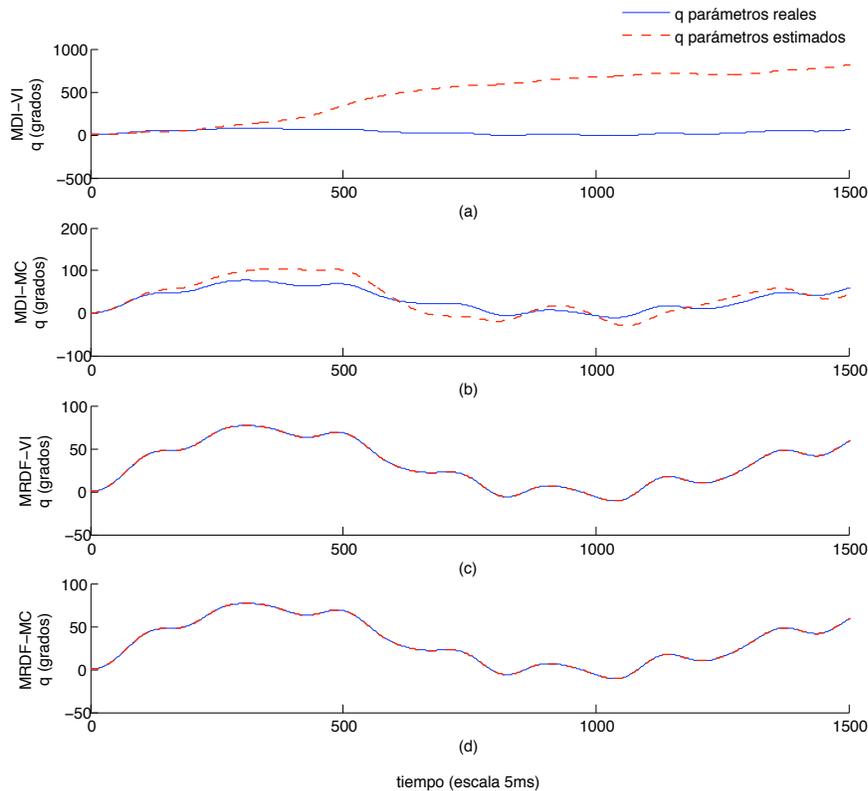


Figura 5.6: Respuesta en lazo abierto de la posición del péndulo utilizando los parámetros reales y los estimados para (a) MDI, (b) MRDF, (c) MREP y (d)MRPF; con la entrada τ_3 .

para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales son las mencionadas en las secciones 4.2 y 4.3, respectivamente.

5.3.1. Mínimos cuadrados

Para el método de mínimos cuadrados, en el Cuadro 5.11 se muestran los tiempos de convergencia y las estimaciones del vector de parámetros $\hat{\theta}$ para los modelos dinámico implícito y de regresión de dinámica filtrada con la entrada τ_1 . Se observa que la estimación del parámetro correspondiente a la fricción viscosa es negativo para ambos modelos.

	MDI			MRDF		
	PER	MER	t_c	PER	MER	t_c
θ_1	0.04	5.99	2.9	0.001	2.00	1.98
θ_2	0.55	1.12	5.0	0.003	1.17	7.01
θ_3	0.20	1.08	20.8	0.0046	1.41	3.99
θ_4	28.00	7.04	5	0.06	2.54	7.01
θ_5	40.25	57.36	-	0.49	0.69	5.0

Tabla 5.10: Criterios de evaluación: promedio del error relativo (PER), máximo error relativo (MER) y tiempo de convergencia (t_c). Para los cuatro modelos utilizando la entrada τ_3 .

	MDI		MRDF	
	τ_1	t_c	τ_1	t_c
θ_1	0.0459	2.005	0.0283	2.005
θ_2	5.7225	43.79	5.0389	23.995
θ_3	-0.1621	7.985	-0.0233	3
θ_4	0.4232	21.925	0.1728	9.305
θ_5	0.6419	24	0.3631	5.875

Tabla 5.11: Tiempo de convergencia (t_c) y $\hat{\theta}$ para el MDI y el MRDF con la entrada τ_1 .

En la Figura 5.7 se muestra la comparación de la respuesta en lazo abierto de la posición real del péndulo implementado a través del Mechatronics Kit y la posición simulada utilizando los parámetros estimados por los modelos dinámico implícito y el de regresión de dinámica filtrada. Recordemos que la entrada en lazo abierto para aplicar el criterio del promedio del error absoluto de la posición viene dada por:

$$\tau = 10 \sin(t) + 11 \cos^2(3t) + 8 \sin^2(5t)$$

Ninguno de los dos modelos realiza una buena estimación paramétrica. En la figura 5.7 se observa que la simulación con los parámetros estimados no sigue la forma de la respuesta en lazo abierto obtenida experimentalmente. El promedio del error absoluto de la posición para el modelo dinámico implícito es de 3.1191 y para el modelo de regresión de dinámica filtrada es de 4.8120, en ambos es un valor grande debido a que idealmente debería de ser cero.

5.3.2. Variables instrumentales

Para el método de variables instrumentales, en el Cuadro 5.12 se muestran los tiempos de convergencia y las estimaciones del vector de parámetros $\hat{\theta}$ para los modelos dinámico implícito y de regresión de dinámica filtrada con la entrada τ_1 . Usando el modelo de regresión de dinámica filtrada todos los parámetros estimados son positivos; con el modelo dinámico implícito el parámetro correspondiente a la fricción viscosa es negativo.

La Figura 5.8 muestra una comparación entre la posición real del péndulo implementado por el Mechatronics Kit y la posición simulada con los parámetros identificados obtenidos

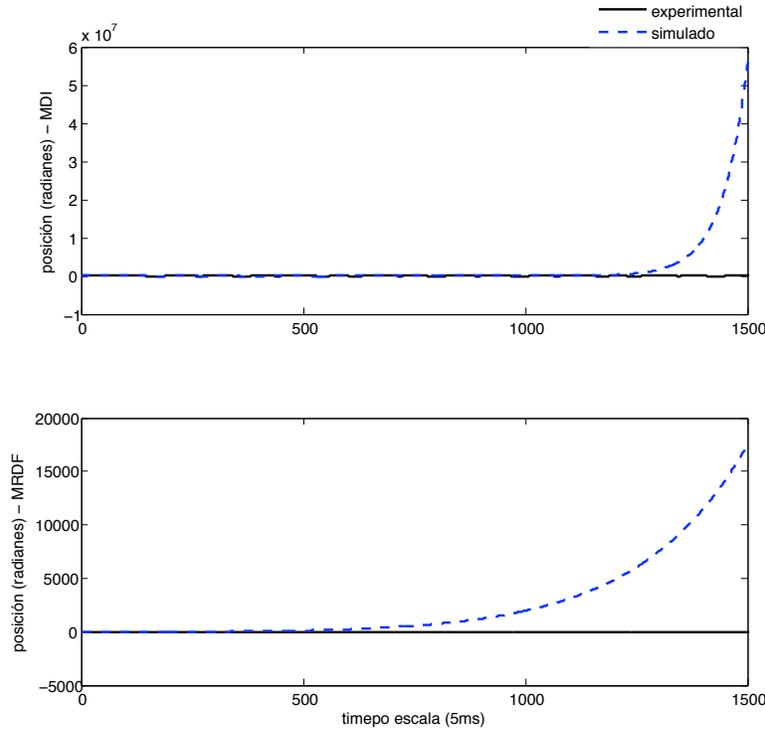


Figura 5.7: Respuesta en lazo abierto para el MDI y el MRDF

con los modelos dinámico implícito y el de regresión de dinámica filtrada. La entrada utilizada en este caso es la misma que se usó para el método de mínimos cuadrados.

El modelo dinámico implícito no realiza una buena estimación paramétrica; como ya se mencionó, el parámetro que corresponde al valor de la fricción viscosa es negativo y la respuesta en lazo abierto simulada no sigue la forma obtenida experimentalmente. El promedio del error absoluto para este modelo es de 1.6032.

La figura 5.8 ilustra que la simulación con los parámetros estimados por el modelo de regresión de dinámica filtrada, sigue la forma de la respuesta experimental obtenida del péndulo implementado a través del Mechatronics Kit. El promedio del error absoluto de la posición es de 0.0424 y el promedio del tiempo de convergencia de los parámetros es de 14.772 segundos.

	MDI		MRDF	
	τ_1	t_c	τ_1	t_c
θ_1	0.0277	0	0.0299	0
θ_2	4.7257	2.025	5.4200	43.005
θ_3	-0.1791	3.015	0.0143	8.01
θ_4	0.5631	8.235	0.1223	13.515
θ_5	0.7448	3.015	0.3261	9.33

Tabla 5.12: Tiempo de convergencia (t_c) y $\hat{\theta}$ para el MDI y el MRDF con la entrada τ_1 .

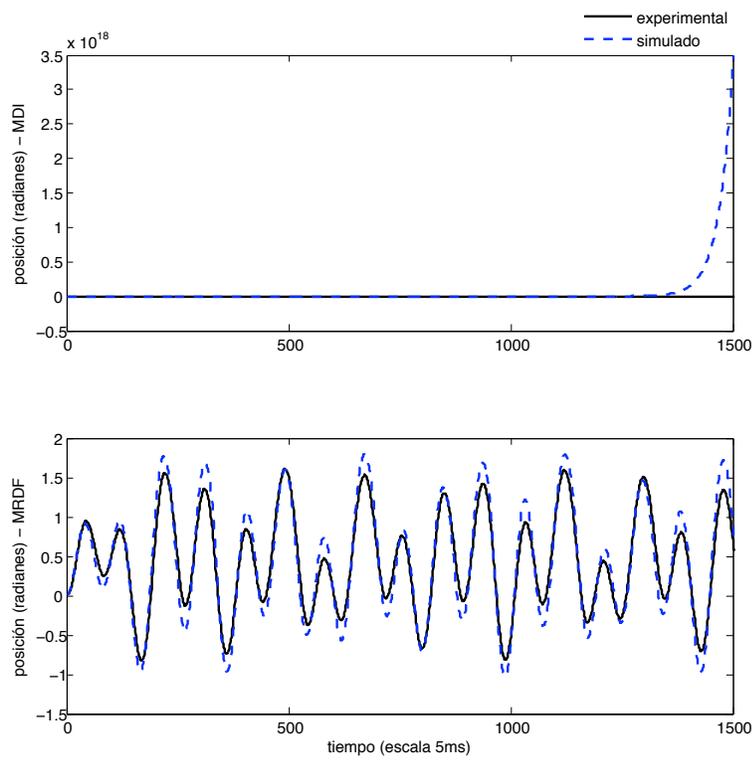


Figura 5.8: Respuesta en lazo abierto experimental y simulada para el MDI y el MRDF

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas de esquemas de identificación aplicados a un péndulo. Los esquemas de identificación están compuestos por dos algoritmos: mínimos cuadrados y variables instrumentales. Para el algoritmo de mínimos cuadrados se consideraron cuatro modelos: modelo dinámico implícito, modelo de regresión de dinámica filtrada, modelo de energía proporcionada y el modelo de regresión de potencia filtrada. Para el algoritmo de variables instrumentales se consideraron dos modelos: modelo dinámico implícito y modelo de regresión de dinámica filtrada.

Un aspecto muy importante en la identificación de sistemas mecánicos es la elección de una señal de entrada que excite lo suficiente al sistema. A tales señales se les conoce como entradas de excitación persistentes, las cuales mejoran la tasa de convergencia y la inmunidad al ruido en la estimación de mínimos cuadrados y variables instrumentales. Como ya se ha mencionado, en este trabajo de tesis no se trata este importante tema. Sin embargo, se probaron los métodos y modelos de identificación con varias señales.

De los cuatro criterios de evaluación utilizados en este trabajo de tesis, el promedio del error absoluto de la posición es el que evalúa de manera más efectiva el desempeño de los diferentes métodos y modelos. En el Cuadro 6.1 se muestra el promedio del error absoluto de la posición para el método de mínimos cuadrados con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . En el Cuadro 6.2 se presenta el promedio del error absoluto de la posición para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . En el Cuadro 6.3 se dan los valores del promedio del error absoluto de la posición para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales con la entradas τ_1 , utilizando datos experimentales.

Modelo	Mínimos cuadrados		
	τ_1	τ_2	τ_3
MDI	0.5634	0.1382	0.3248
MRDF	2.0768	0.1463	0.9906
MREP	1345.8	2152.7	38.4322
MRPF	1117.6	1459.6	4.3265

Tabla 6.1: Promedio del error absoluto de la posición para el método de mínimos cuadrados con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . La amplitud de la potencia de la densidad espectral del ruido blanco agregada a la posición y velocidad del péndulo es de 10^{-8} .

Analizando el Cuadro 6.1 se encuentra que para el método de mínimos cuadrados cuando las señales de ruido no son significativas (La amplitud de la potencia de la densidad espectral del ruido blanco agregada a la posición y velocidad del péndulo es de 10^{-6}), el modelo que se acerca más a los valores del vector θ es el dinámico implícito, esto se cumple para las tres entradas. De estas entradas, la que realiza una mejor estimación de los parámetros del modelo dinámicos es τ_2 . Los modelos basados en el principio de la conservación de la energía son los que presentan un mayor valor en el promedio del error absoluto de la posición, esto se debe a que son más sensibles al tipo de entrada que se escoge para excitar el sistema.

Modelo	Mínimos cuadrados			Variables instrumentales		
	τ_1	τ_2	τ_3	τ_1	τ_2	τ_3
MDI	4×10^8	4.5463	16.9	252.9	1.2×10^5	580.69
MRDF	1.09×10^3	2.3775	0.0307	938.14	0.2218	0.0065

Tabla 6.2: Promedio del error absoluto de la posición para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales con las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 . La amplitud de la potencia de la densidad espectral del ruido blanco agregada a la posición y velocidad del péndulo es de 10^{-6} .

Los resultados del Cuadro 6.2, fueron obtenidos con una amplitud de la potencia de la densidad espectral del ruido blanco mayor que los resultados mostrados en el Cuadro 6.1. Se observa que cuando el ruido aumenta el modelo de regresión de dinámica filtrada es superior al modelo dinámico implícito con ambos métodos. El método de mínimos cuadrados es muy sensible al ruido, sobre todo cuando la entrada de excitación persistente no es del todo adecuada para el sistema. Cuando se utiliza una entrada que excita lo suficiente al sistema, el método de mínimos cuadrados se hace un poco más inmune a las señales de ruido. Lo anterior se comprueba con la entrada τ_3 utilizando el modelo de regresión de dinámica filtrada, donde el promedio del error relativo de la posición es pequeño en comparación con las entradas τ_1 y τ_2 .

El método de variables instrumentales ayuda cuando las señales de ruido no permiten realizar una buena identificación. Esto se observa comparando en el Cuadro 6.2 los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales, ya que este último método presenta un promedio del error relativo de la posición menor que en el caso de mínimos cuadrados. Analizando el Cuadro 6.2, se concluye que el modelo regresión de dinámica filtrada con el método de variables instrumentales son los que presentan los mejores resultados cuando las señales de ruido son grandes.

Modelo	Mínimos cuadrados	Variables instrumentales
	τ_1	τ_1
MDI	3.1191	1.6032
MRDF	4.8120	0.0424

Tabla 6.3: Promedio del error absoluto de la posición para los métodos de mínimos cuadrados y variables instrumentales con la entradas τ_1 , utilizando datos experimentales.

En el Cuadro 6.3 se comprueban los resultados obtenidos por medio de simulaciones numéricas, ya que, se observa que al utilizar datos experimentales de la posición y la ve-

locidad del péndulo, el método de variables instrumentales con el modelo de regresión de dinámica filtrada es el que presenta un menor promedio del error absoluto de la posición.

Las posibles causas por las que algunos métodos o modelos no realizan una buena estimación paramétrica son:

- Las variables que representan velocidades en los regresores no son medidas de manera directa por un sensor, sino que son estimadas por diferenciación numérica.
- Para el modelo considerado, la entrada puede no ser lo suficientemente persistentemente excitante.
- En el caso de mínimos cuadrados, las señales de ruido en las mediciones son demasiado grandes y sesgan la estimación de los parámetros.

Bibliografía

- [1] Daniel Jerome Block, *Thesis: Mechanical design and control of the pendubot*, B.S., University of Illinois, 1991.
- [2] B. Siciliano C. Canudas and G. Bastin, *Theory of robot control*, Springer, London.
- [3] M. Gautier, *Dynamic identification of robots with power model*, April 1997.
- [4] R. Isermann, *Digital control systems, volumen 2*, Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Bjorn Wittenmark Karl J. Astrom, *Adaptive control*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [6] W. Khalil and E. Dombre, *Modeling, identification and control of robots*, Kogan Page Science, London and Sterling VA.
- [7] I. D. Landau, *System identification and control design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [8] L. Ljung, *System identification. theory for the user*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ 07458.
- [9] Kyung-Jo Park, *Fourier-based optimal excitation trajectories for the dynamic identification of robots*.
- [10] Shankar Sastry Ping Hsu, Marc Bodson and Bradley Paden, *Adaptive identification and control for manipulators without using joint accelerations*, 1987.
- [11] F. Reyes and R. Kelly, *Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot*, *Robotica* **15**, 563–571.
- [12] F. Rodríguez y M. López, *Control adaptivo y robusto*, Secretariado de publicaciones de la Universidad de Sevilla, Porvenir, 27 - 41013 Sevilla.
- [13] R. Kelly y V. Santibañez, *Automática y robótica. control de movimiento de robots manipuladores*, Prentice Hall, Madrid.