

---

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

**Redes Booleanas**

Tesis que presenta

**Roberto Rafael Rivera Durón**

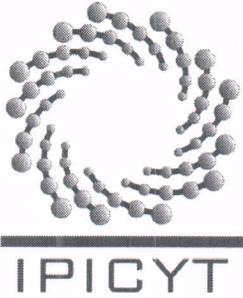
Para obtener el grado de

**Maestro en Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

Dr. Eric Campos Cantón

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2013



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Redes booleanas**” presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Roberto Rafael Rivera Durón** y aprobada el **dos de julio del dos mil trece** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dr. Eric Campos Cantón**  
Director de la tesis

**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Jurado en el Examen

**Dr. Isaac Campos Cantón**  
Jurado en el Examen

**Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez**  
Jurado en el Examen

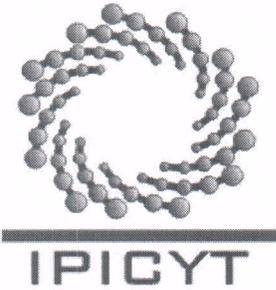


IPICYT

## Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Eric Campos Cantón.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología No. de registro CONACYT-262196 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 001 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 2 días del mes de julio del año 2013, se reunió a las 13:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Marcial Bonilla Marín</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Eric Campos Cantón</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Isaac Campos Cantón</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>
<b>Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Roberto Rafael Rivera Durón**

sobre la Tesis intitulada:

*Redes booleanas*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Eric Campos Cantón**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 14:07 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 2 días del mes de julio de 2013.

**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas-Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico



# Dedicatorias

A mi madre y mi hermana.

# Agradecimientos

Primeramente, a Dios, quien hace posible todas las cosas, por permitirme hacer lo que me gusta.

A toda mi familia, tanto los que están físicamente conmigo como quienes lo están espiritualmente. A mi mamá y mi hermana, gran parte de que este objetivo se haya logrado es gracias a ustedes.

A mi asesor, el Dr. Eric Campos Cantón, por todo el apoyo recibido siempre de su parte, por compartir su conocimiento conmigo, por tener la disposición siempre para ayudarme y por su amistad. Es un verdadero placer trabajar bajo su asesoría.

A mis profesores del IPICYT. Al Dr. Femat y al Dr. Barajas, por sus enseñanzas. Al grupo de investigación de Biodinámica y Sistemas no lineales, por sus consejos y enseñanzas durante los seminarios.

Al IPICYT y su personal, por permitirme realizar mis estudios de maestría. A CONACYT, por el apoyo recibido durante este lapso.

A mis compañeros y amigos de generación, tanto de maestría como de doctorado, por su compañía y su apoyo. En especial a Ángeles, Eduardo, Ismael, Héctor, Bahía, Pablo, Luis y Adriana por su amistad, por ser mis compañeros en los desvelos. Para ustedes todo mi agradecimiento, mi admiración y mi respeto.

A Francisco Cárdenas por tu apoyo, asesorías y tu amistad.

A mis compañeros y amigos de otras generaciones por sus consejos y por ayuda. A mis compañeras y amigas de otras Divisiones, por su apoyo y su compañía.

A mis amigos de toda la vida, en especial a Óscar, Ángel, Alicia y Memo, por apoyarme siempre. A Marie, por tu amistad, por todo el apoyo incondicional que me das y por estar al pendiente de mí.

Y finalmente, a todos los que creen en mí.

# Lista de tablas

3.1	Valores que puede tomar $f$ de (3.2), y tablas de verdad para la salida $Y(f)$ de (3.3). . . . .	23
3.2	Valores que puede tomar $f$ después de la sustitución $A_1 = A_2 = A$ , y tablas de verdad para la salida $Y(f)$ . . . . .	25
3.3	Sistema de desigualdades para obtener una compuerta AND en la salida $Y(f)$ luego de la sustitución $A_1 = A_2 = A = 1.5$ . . . . .	25
3.4	Valores de $b$ para obtener las posibles compuertas lógicas. . . . .	25
3.5	Tabla de verdad para la compuerta NAND. . . . .	28

# Lista de figuras

2.1	Grafo utilizado por Eüler . . . . .	5
2.2	Tipos de grafo . . . . .	6
2.3	Distintos tipos de grafo . . . . .	6
2.4	Caminata a lo largo de un grafo . . . . .	7
2.5	Clasificación de los sistemas dinámicos . . . . .	11
2.6	Modelo del clima en la era cuaternaria propuesto por Ghil . . . . .	13
2.7	Sistema conservativo . . . . .	17
2.8	Sistema disipativo . . . . .	17
3.1	Topología, evolución temporal y densidad espectral de la potencia de la red Booleana en estudio . . . . .	22
3.2	Diagrama de bifurcación de la red Booleana . . . . .	23
3.3	Diagrama esquemático de la Celda Lógica Reconfigurable . . . . .	24
3.4	Celda lógica reconfigurable en configuración AND . . . . .	26
3.5	Celda lógica reconfigurable en configuración OR . . . . .	26
3.6	Celda lógica reconfigurable en configuración NAND . . . . .	26
3.7	Celda lógica reconfigurable en configuración NOR . . . . .	27
3.8	Celda lógica reconfigurable en configuración XOR . . . . .	27
3.9	Alternativas para obtener una compuerta XNOR . . . . .	29
3.10	Celda lógica reconfigurable en configuración XNOR . . . . .	29
3.11	Circuito de retardo . . . . .	30
3.12	Evolución temporal de la red para cuando presenta retardos racionales . . . . .	32
3.13	Tiempo de respuesta característico de la compuerta XNOR . . . . .	32
3.14	Evolución temporal de la red para cuando presenta retardos racionales des- pués de compensar . . . . .	33
3.15	Evolución temporal de la red para cuando presenta retardos irracionales . . . . .	34
3.16	Simulación numérica de una red Booleana con retardos racionales . . . . .	35
3.17	Simulación numérica de una red Booleana con retardos irracionales . . . . .	35
3.18	Diagrama de bifurcación en el caso de tener solamente retardos racionales . . . . .	36
3.19	Diagrama de bifurcación en el caso de tener solamente retardos irracionales . . . . .	37
4.1	Ejemplos de sincronización . . . . .	42
4.2	Dibujo de Huygens . . . . .	42
4.3	Diagrama esquemático de dos circuitos de Chua acoplados en configuración unidireccional . . . . .	43

4.4	Diagrama esquemático de dos circuitos de Chua acoplados en configuración bidireccional . . . . .	44
4.5	Posibles regímenes de sincronización de dos relojes de péndulo . . . . .	45
4.6	Esquema de la sincronización forzada . . . . .	46
4.7	Esquema de sincronización forzado propuesto para dos redes Booleanas . .	48
4.8	Topología para la sincronización de dos redes Booleanas . . . . .	48
4.9	Comparativo de los estados de cada red Booleana . . . . .	49
4.10	Errores entre los estados . . . . .	50

# Resumen

En el año 2009, Zhang et al, publican un circuito simple de compuertas lógicas no reguladas por una señal de reloj que muestra un comportamiento caótico. La red que presentan consta de tres nodos, los cuales implementan con compuertas lógicas comerciales. Como resultados obtienen que la evolución temporal del voltaje en cualquier nodo presenta un patrón no repetitivo con claras transiciones binarias y sensibilidad a las condiciones iniciales. La topología de la red contiene lazos de retroalimentación con retardos inconmensurables lo que produce que la dinámica de los estados tengan pulsos de muy corta duración, un régimen en el cual las variaciones de los retardos producen caos. El estudio de este tipo de red es importante debido a que puede ser utilizado en la generación de secuencias pseudo-aleatorias, sistemas de comunicación, entre otros.

En la presente tesis se estudia la red Booleana presentada por Zhang et al, implementada con compuertas lógicas de estructura flexible, es decir, un circuito capaz de ejecutar cualquier tipo de operación lógica. Se modela la red Booleana por medio de Ecuaciones Booleanas con Retardo, que son una clase de sistemas dinámicos en la cual las variables de estado son discretas y el tiempo en que evolucionan es continuo. Además, se propone una forma de sincronizar dos redes Booleanas bajo el esquema de sincronización forzada.

# Abstract

In 2009, Zhang et al, published a simple circuit of logic gates not regulated by a clock signal which shows chaotic behavior. The network consists of three nodes, which they implement with commercial logic gates. Results they obtained that the temporal evolution of the voltage at any node has a non-repeating pattern with clear binary transitions and sensitivity to initial conditions. The topology of the network contains feedback loops with incommensurate time delays, it produces dynamics states with very short duration pulses, a regime in which variations of delays produce chaos. Studing this type of network is important because it can be used in the generation of pseudo-random sequences, communications systems, among others.

In this thesis we study the Boolean network by Zhang et al, implemented with flexible structure logic gates, i.e. a circuit capable of running any type of logical operation. Boolean network is modeled using Boolean Delay Equations, which are a class of dynamical system in which state variables are discrete and time is continuous. Also, we propose a method to synchronize two Boolean networks under forced synchronization scheme.

# Contenido

Constancia de aprobación de la tesis	iii
Créditos institucionales	v
Acta de examen	vii
Dedicatorias	ix
Agradecimientos	xi
Lista de tablas	xiii
Lista de figuras	xv
Resumen	xviii
Abstract	xx
Introducción	1
Preliminares teóricos	5
Red Booleana	19
Sincronización	41
Conclusiones y trabajo futuro	51
Bibliografía	53

# Capítulo 1

## Introducción

Un sistema complejo es una colección de elementos interactuando cuyo comportamiento y propiedades en conjunto no son claros. Las redes complejas pueden ser representadas por un grafo matemático en la cual cada elemento es representado por un nodo, y la influencia que un elemento tiene sobre otro es representada por un enlace entre los nodos correspondientes. Los elementos en una red compleja puede tener propiedades individuales uniformes o diversas, es decir, los nodos pueden ser idénticos o diferentes. Las interacciones entre los elementos pueden tomar la misma o varias formas. Esta vaga definición de redes complejas aplica a sistemas estudiados en una gran variedad de disciplinas científicas. Por ejemplo, los circuitos electrónicos, las redes de regulación genética, el sistema nervioso, los mercados económicos pueden ser considerados redes complejas. Estudiar los modelos matemáticos de las redes complejas puede aclarar la estructura de los sistemas del mundo real. Los modelos matemáticos pueden involucrar herramientas como la teoría de dinámica no lineal, estadística, probabilidad, teoría de la información, etc. Tradicionalmente, los científicos han utilizado estas herramientas para estudiar varios tipos de sistemas físicos y matemáticos, y en las últimas dos década ha habido un notable interés en el estudio de las redes complejas [1].

El estudio de las redes complejas tiene dos aspectos importantes: la estructura y la dinámica del estado. Los objetivos pueden incluir una descripción cualitativa adecuada de los patrones de conexión, el entendimiento de la dinámica de la formación de la red y la construcción de estrategias de reconexión que sean capaces de mejorar el desempeño de la red. Por ejemplo, Watts y Strogatz propusieron un modelo para las redes de mundo pequeño que emula el alto agrupamiento y la longitud de camino pequeño que se ve en las redes sociales [2]. Otro ejemplo es el modelado de las redes de escala libre, las cuales presentan la característica de que una pequeña porción de sus nodos está conectada a una gran número de nodos mientras que la mayoría tiene escasas conexiones. El número de conexiones que cada nodo tiene, es decir su grado de nodo, sigue una distribución en ley de potencias. Varios modelos matemáticos han tenido éxito en la construcción de redes de escala libre utilizando procedimientos iterativos simples, como el propuesto por Barabási y Albert [3]. Tanto el trabajo de Watts y Strogatz como el de Barabási y Albert han sido fundamentales en la investigación de la ciencia de las redes.

El segundo aspecto del estudio de redes es la dinámica de las variables de estado asociadas con los nodos de la red. Estas variables pueden describir, por ejemplo, la expresión de un gen en una red de regulación, el estado de infección de una persona en una red de transmisión

de una enfermedad, o la excitación de una neurona en el sistema nervioso. Las interacciones exactas que presentan estos sistemas del mundo real son desconocidas, por lo tanto, la teoría de la dinámica de las redes complejas requiere de un modelo simple pero lo suficientemente rico que modele el comportamiento complejo de los sistemas del mundo real.

Stuart Kauffman propuso una red Booleana aleatoria (RBNs) síncrona como un modelo para las redes de regulación genética [4]. En este modelo cada nodo está asociado con una variable de estado binario, determinada por una función lógica. Kauffman encontró evidencia numérica de que las RBNs pueden ser clasificadas en fases ordenadas, desordenadas y críticas según el número de sus atractores, el tamaño del atractor y la respuesta a pequeñas perturbaciones. Kauffman además supuso que las redes biológicas deberían ser robustas a pequeñas perturbaciones, pero lo suficientemente flexibles para responder a algún estímulo. El trabajo de Kauffman inspiró a muchos investigadores a estudiar las propiedades y aplicaciones de las redes Booleanas.

Se han utilizado las redes Booleanas en el modelado de sistemas que exhiben un comportamiento de conmutación, tales como los circuitos lógicos y las redes de regulación genética, en los cuales es muy útil asumir que las variables de estado del sistema toman sólo dos valores, 0 lógico y 1 lógico, determinados por funciones Booleanas. Los modelos Booleanos síncronos incluyen un proceso externo como un reloj que actualice las variables de estado o un dispositivo que seleccione el orden en que cada estado se actualice. El espacio de estados de tales modelos síncronos es discreto y finito y el tiempo en que evolucionan es discreto. Por lo tanto, estos modelos sólo pueden tener atractores periódicos [5]. Por otro lado, en muchos sistemas del mundo real, la información entre elementos se propaga con retardos que pueden ser diferentes para cada enlace. Este tipo de sistemas pueden modelarse como una red Booleana asíncrona, también llamada red Booleana autónoma. En estas redes, el comportamiento futuro es determinado por las transiciones del estado en el pasado, por lo tanto el tiempo en que evoluciona es continuo.

El presente trabajo de tesis se enfoca en el estudio de la red Booleana autónoma propuesta en [5],[6]. Esta red consiste de tres nodos realizados con compuertas lógicas comerciales de alta velocidad. La evolución temporal del voltaje en cualquier nodo de la red presenta un patrón no repetitivo con transiciones booleanas. Esta red presenta además sensibilidad a las condiciones iniciales. Ya que la red presenta ciclos de retroalimentación con retardos inconmensurables, ésta evoluciona hacia estados dinámicos con anchos de pulso muy cortos, un régimen en la cual los retardos generan caos.

El objetivo general de la tesis consiste en construir una red booleana capaz de generar comportamiento complejo por medio de introducir retardos en la interconexión entre sus nodos. Es decir, la investigación se basa en la construcción y estudio de la red propuesta en [5]. A diferencia de lo presentado por los autores donde cada nodo es una compuerta lógica comercial, en este trabajo cada nodo está construido con un circuito de estructura flexible capaz de comportarse como una compuertas lógica variable dependiendo de un parámetro de configuración. Otra diferencia importante respecto al trabajo publicado en el que los retardos son generados incluyendo un número par de compuertas negadoras (NOT), en este trabajo los retardos pueden tomar cualquier valor dentro de los reales positivos. Por otro lado, el parámetro de bifurcación utilizado en [5] es el voltaje de alimentación de las compuertas lógicas, mientras que en esta tesis el voltaje de alimentación de las compuertas se mantiene fijo y se toma como parámetro de bifurcación alguno de los retardos. También se tiene como

objetivo sincronizar un par de redes Booleanas. Como objetivos particulares se tienen:

1. Implementar electrónicamente compuestas lógicas reconfigurables.
2. Construir la red Booleana con compuertas lógicas reconfigurables.
3. Caracterizar la red Booleana en base a sus retardos.
4. Sincronización de dos redes Booleanas.

El contenido de esta tesis está estructurado de la siguiente manera. El capítulo 2 aborda los preliminares teóricos sobre teoría de grafos, sistemas dinámicos y ecuaciones Booleanas con retardo que serán útiles para el entendimiento del tema de investigación principal descrito en el capítulo posterior. El capítulo 3 presenta la red Booleana autónoma que motiva el trabajo de tesis y su caracterización basada en la teoría de las ecuaciones Booleanas con retardo. El capítulo 4 trata la teoría acerca del fenómeno de sincronización en sistemas dinámicos y su implementación en la sincronización de redes Booleanas. Finalmente, el capítulo 5 resume las conclusiones acerca de la tesis.

# Capítulo 2

## Preliminares teóricos

### 2.1. Teoría de grafos

#### 2.1.1. Grafos y digrafos

Un *grafo*  $G = (V, E)$  es un par ordenado de conjuntos. Los elementos de  $V$  son llamados vértices o nodos. Los elementos de  $E \subseteq V \times V$  son llamados enlaces o aristas. Al conjunto  $V$  se le llama el conjunto de los vértices o nodos, mientras que a  $E$  se le llama el conjunto de los enlaces o aristas [7].

Se puede etiquetar los vértices del grafo [7]. Si  $(v_1, v_2) \in E$  es un enlace de un grafo  $G = (V, E)$ , se dice que  $v_1$  y  $v_2$  son vértices *adyacentes*. Por notación, se suele escribir el enlace  $(v_1, v_2)$  como  $v_1v_2$ . El enlace  $v_1v_2$  se dice ser *incidente* con los vértices  $v_1$  y  $v_2$ . En la Figura 2.1 se muestra el ejemplo del grafo que utilizó Eüler para representar el problema de los puentes de Königsberg. En este grafo los nodos representan algún lugar, ya sea tierra continental o una isla, mientras que los enlaces representan los siete puentes con que contaba Königsberg.

Un *enlace dirigido* es un enlace tal que uno de sus nodos es el nodo de partida y el otro nodo es el nodo de llegada. Un *grafo dirigido o digrafo* es aquel grafo que presenta al menos un enlace dirigido [7]. En la Figura 2.2, (a) se muestra un ejemplo de grafo no dirigido ya que sus enlaces no presentan dirección. Mientras que (b) representa un grafo dirigido o digrafo ya que posee enlaces dirigidos.

Es importante distinguir si un grafo  $G$  es dirigido o no dirigido. Si  $G$  es un grafo no

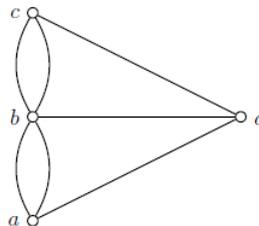


Figura 2.1: Grafo utilizado por Eüler para visualizar el problema de los puentes de Königsberg

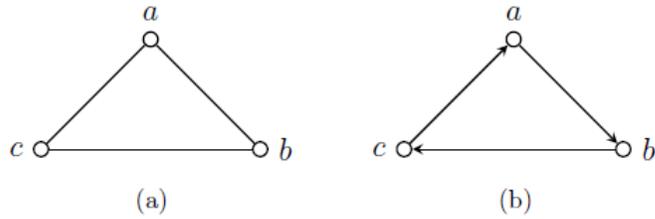


Figura 2.2: Tipos de grafo. (a) Grafo no dirigido. (b) Grafo dirigido o digrafo

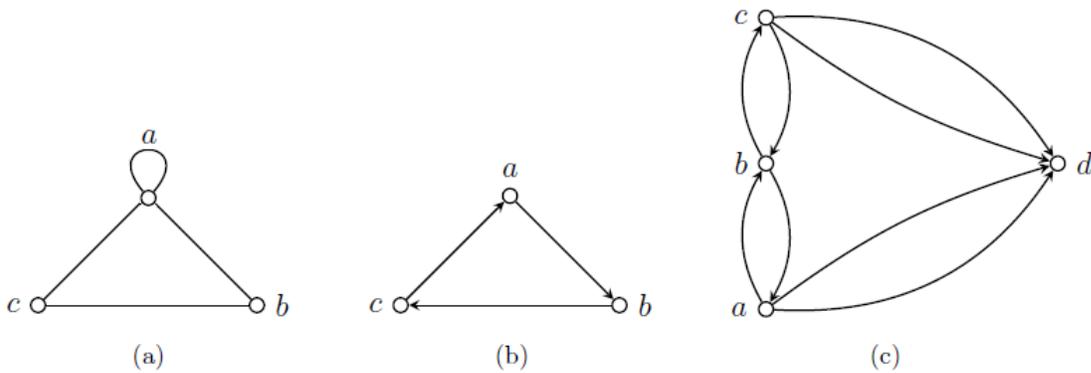


Figura 2.3: Distintos tipos de grafo. (a) Grafo no simple. (b) Grafo dirigido simple. (c) Multigrafo. Multigrafo

dirigido y  $v_1v_2 \in E(G)$ , entonces  $v_1v_2$  y  $v_2v_1$  representan el mismo enlace. En el caso de que  $G$  es un grafo dirigido, entonces  $v_1v_2$  y  $v_2v_1$  representan un enlace distinto [7].

En un grafo no dirigido se define al *grado de un nodo*  $k(v)$  como el número de enlaces que dicho nodo tiene. Un grafo no dirigido en el cual cada nodo tiene el mismo grado, es decir, el mismo número de enlaces, se llama grafo regular. Si  $G$  es un digrafo entonces cada nodo tiene dos grados de nodo. El *grado de nodo de entrada* de  $v$  es el número de enlaces tales que  $v$  es el nodo de llegada de tales enlaces. El *grado de nodo de salida* de  $v$  es el número de enlaces tales que  $v$  es el nodo de salida de tales enlaces [7].

Un *grafo simple* es un grafo que no tiene autociclos ni múltiple enlaces. Se define autociclo cuando en un nodo se conecta consigo mismo. Por múltiple enlaces se entiende cuando un nodo tiene enlaces repetidos [7]. Cuando un grafo posee múltiple enlaces se le conoce como *multigrafo*. En la Figura 2.3, en (a) se representa a un grafo no simple o complejo ya que presenta un autociclo. (b) muestra un grafo dirigido simple ya que no presenta ni autociclos ni enlaces repetidos. (c) es un multigrafo dirigido ya que posee enlaces dirigidos repetidos.

Dos grafos,  $G_1$  y  $G_2$  se dice que son isomórficos, si existe una correspondencia uno a uno entre los nodos de  $G_1$  y los nodos de  $G_2$  con la propiedad de que el número de enlaces que uniendo cualquier par de nodos de  $G_1$  es igual al número de enlaces uniendo cualquier par de nodos de  $G_2$ .

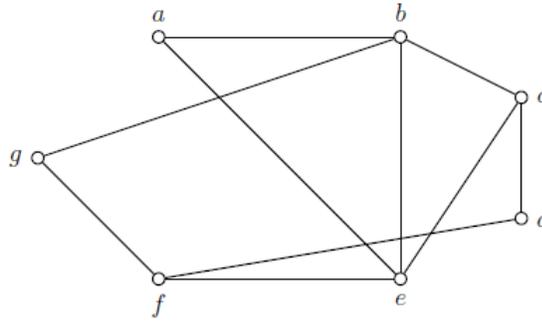


Figura 2.4: Caminata a lo largo de un grafo

### 2.1.2. Caminata, recorrido y camino

Si  $u$  y  $v$  son dos vértices de un grafo  $G$ , una *caminata*  $u - v$  es una secuencia de nodos que comienza en  $u$  y termina en  $v$ . Para el grafo mostrado en la Figura 2.4, un ejemplo de caminata  $a - e$  es  $a, b, c, b, e$ . Debe notarse que los nodos consecutivos en una caminata son adyacentes. En una caminata se pueden tener vértices repetidos. El número de enlaces en una caminata se llama la longitud de la caminata [7]. Por ejemplo, la caminata  $a, b, c, b, e$  tiene longitud 4.

Un *recorrido* es una caminata sin enlaces repetidos [7]. Por ejemplo, en la Figura 2.4, la caminata  $a - b : a, b, c, d, f, g, b$  es un recorrido. Este recorrido no tiene enlaces repetidos, pero contiene un nodo repetido. Una caminata que no contiene nodos repetidos se llama *camino*.

### 2.1.3. Representaciones de grafos por medio de matrices

Sea  $G$  un grafo no dirigido con vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y conjunto de enlaces  $E$ . La *matriz de adyacencia* de  $G$  es la matriz de  $n \times n$ ,  $A = [a_{ij}]$  definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in E; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Como  $G$  es un grafo no dirigido, entonces  $A$  es una matriz simétrica. Esto es,  $A$  es una matriz cuadrada tal que  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Para el caso en que  $G$  es un grafo dirigido con vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y conjunto de enlaces  $E$ . La *matriz de adyacencia* de  $G$  es la matriz de  $n \times n$ ,  $A = [a_{ij}]$  definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in E; \\ -1, & \text{si } v_j v_i \in E; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Sea  $G$  un grafo dirigido con conjunto de enlaces  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  y conjunto de vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . La *matriz de incidencia* de  $G$  es la matriz de  $n \times m$ ,  $B = [b_{ij}]$  definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } v_i \text{ es el nodo inicial de } e_j; \\ 1, & \text{si } v_i \text{ es el nodo final de } e_j; \\ 2, & \text{se } e_j \text{ es un autociclo en } v_i; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Debe notarse que cada columna de  $B$  corresponde a un enlace, mientras que cada renglón corresponde a un vértice.

En el caso de un grafo no dirigido con conjunto de enlaces  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  y conjunto de vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . La *matriz de incidencia no orientada* de  $G$  es la matriz de  $n \times m$ ,  $B = [b_{ij}]$  definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ es incidente a } e_j; \\ 2, & \text{si } e_j \text{ es un autociclo en } v_i; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

La *matriz de grado* de un grafo  $G = (V, E)$  es una matriz diagonal  $D$  de  $n \times n$  cuya entrada  $i$ -ésima es el grado del  $i$ -ésimo nodo en  $V$ . La *matriz Laplaciana*  $\mathcal{L}$  de  $G$  es la diferencia entre la matriz de grado y la matriz de adyacencia:

$$\mathcal{L} = D - A$$

En otras palabras, para un grafo simple no dirigido,  $\mathcal{L} = [l_{ij}]$  está dada por

$$l_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } i \neq j \text{ y } v_i v_j \in E; \\ d_i, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

## 2.2. Teoría de Sistemas Dinámicos

### 2.2.1. Nociones históricas

El análisis de los sistemas dinámicos es un tema estudiado por muchas disciplinas, pero originalmente fue estudiado únicamente por la Física. Este estudio comenzó en el siglo XVII, cuando Newton inventó las ecuaciones diferenciales, descubrió las leyes del movimiento y gravitación universal y las combinó para explicar las leyes de Kepler para el movimiento planetario. Específicamente, Newton resolvió el problema de dos cuerpos, es decir, el problema de calcular el movimiento de la Tierra alrededor del sol. Las generaciones subsecuentes de matemáticos y físicos trataron de extender los métodos analíticos de Newton al problema de tres cuerpos pero fueron incapaces de obtener fórmulas explícitas para el movimiento de tres cuerpos [8].

Un avance decisivo llegó con el trabajo de Poincaré a finales de los 1800s. Poincaré introdujo un nuevo punto de vista que enfatizaba las cuestiones cualitativas en lugar de las cuantitativas. Por ejemplo, en lugar de preguntarse por las posiciones exactas de los planetas en cualquier tiempo, Poincaré se preguntó si el sistema solar era estable para siempre, o si algunos planetas se irían al infinito. Poincaré desarrolló una herramienta geométrica poderosa para analizar estas preguntas. Poincaré fue también la primer persona en vislumbrar la

posibilidad de caos, en el cual un sistema determinístico exhibe comportamiento no periódico que presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, haciendo imposible la predicción a largo plazo [8]. En 1892, con el trabajo de tesis doctoral de Lyapunov, *The General Problem of Motion Stability*, se establecieron los conceptos fundamentales para determinar la estabilidad de sistemas y de trayectorias.

Posteriormente, en la segunda mitad del siglo XX, el estudio de los sistemas dinámicos se concentró en los osciladores no lineales y en sus aplicaciones en Física e Ingeniería. Estos osciladores no lineales fueron fundamentales en el desarrollo de tecnologías como radios, radares y láseres. Por el lado teórico, los osciladores no lineales impulsaron la invención de nuevas técnicas matemáticas, pioneros de esta actividad fueron Andronov, Cartwright, van der Pol y Levinson. Mientras tanto, los métodos geométricos de Poincaré fueron extendidos gracias a los trabajos de Birkhoff y posteriormente de Kolmogorov, Arnol'd y Moser [8].

La invención de computadoras en los 1950s permitió experimentar con ecuaciones en una forma no antes hecha. En 1963, Lorenz descubrió caos en un modelo climático. Lorenz encontró que las soluciones de sus ecuaciones nunca convergían a un punto de equilibrio o a un estado periódico para cierto conjunto de valores de parámetros, es decir, las soluciones continuaban oscilando en una forma irregular y no periódica. El trabajo de Lorenz tuvo impacto hasta 1970s. Ruelle y Takens propusieron una nueva teoría para la turbulencia en fluidos basada en el estudio del espacio de estados y definen el surgimiento de atractores extraños. Años más tarde, May encontró ejemplos de caos en mapas iterados. En la misma década, Feigenbaum descubrió que existen indicios de regularidad en el comportamiento de transición del comportamiento regular al comportamiento caótico. Winfree aplicó métodos geométricos a las oscilaciones biológicas, especialmente a ritmos circadianos. A finales de los 1970s y principios de 1980s, Mandelbrot programó una computadora para visualizar los resultados de la iteración de los mapas y produjo impresionantes gráficas de los fractales [8].

A partir del año 1990, con el trabajo de Pecora y Carrol [9], el estudio del fenómeno de sincronización usando sistemas dinámicos con comportamiento caótico se disparó, dando origen a diferentes tipos de sincronización.

### 2.2.2. Definición de sistema dinámico

Se puede pensar en un sistema dinámico como un sistema que tiene una evolución temporal. Los sistemas dinámicos son sistemas cuyas *variables de estado* siguen una serie de reglas temporales. La representación del espacio donde se desenvuelven las variables de estado se conoce como espacio de estados o espacio de fase.

Sea  $M$  el espacio de estados y  $x \in M$  un estado inicial del proceso, y  $g^t x$  denota el estado del proceso en tiempo  $t$ , cada que su estado inicial es  $x$ . Cada cada real  $t$  esto define un mapa:

$$g^t : M \rightarrow M$$

del espacio de estados en sí mismo. El mapa  $g^t$ , llamado el mapa  $t$ -avance, mapea cada estado  $x \in M$  a una nueva etapa  $g^t x \in M$ . Por ejemplo,  $g^0$  es el mapa identidad el cual deja a cada punto de  $M$  en su posición original. Más aún

$$g^{t+s} = g^t g^s$$

partiendo de que el estado  $y = g^s x$ , al cual va  $x$  después de un tiempo  $s$ , posterior a un tiempo  $t$  va al estado  $z = g^t y$  como el estado  $z = g^{t+s} x$  al cual va  $x$  después de un tiempo  $t + s$ .

Una familia  $\{g^t\}$  de mapas del conjunto  $M$  en sí mismo, etiquetado por el conjunto de todos los números reales ( $t \in \mathbb{R}$ ), es llamado un *grupo monoparamétrico de transformaciones* de  $M$  si

$$g^{t+s} = g^t g^s \tag{2.1}$$

para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  y  $g^0$  es el mapa identidad.

Un par  $(M, \{g^t\})$  que consiste de un conjunto  $M$  y de un grupo monoparamétrico  $\{g^t\}$  de transformaciones de  $M$  en si mismo es llamado un flujo. El conjunto  $M$  es llamado el espacio fase del flujo, y sus elementos son llamados puntos fase.

Sea  $x \in M$  cualquier punto fase, y considere el mapa

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \phi(t) = g^t x \tag{2.2}$$

de la recta real al espacio fase. Entonces el mapa 2.2 es llamado el movimiento del punto  $x$  bajo la acción del flujo  $(M, \{g^t\})$ .

La imagen de  $\mathbb{R}$  bajo la acción del mapa (2.2) es llamada la curva de fase del flujo  $(M, \{g^t\})$ . Por lo tanto la curva de fase es un subconjunto del espacio de fase.

Un *sistema dinámico* es un grupo monoparamétrico de transformaciones  $g$  actuando sobre un espacio  $M$ . Esto es, hay un mapa

$$g : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

$$g(t, x) = g^t x, \tag{2.3}$$

### 2.2.3. Una clasificación de los sistemas dinámicos

Es posible clasificar a los sistemas respecto al tipo de variables de estado que poseen, esto es, si las variables de estado pertenecen a un espacio de fase continuo o discreto; de igual manera un sistema dinámico puede ser de tiempo discreto o continuo.

En un sistema dinámico cuyas variables de estado son continuas, el espacio de estados es un continuo de puntos, generalmente descrito por un conjunto de números reales. En el caso de un sistema dinámico cuyas variables de estado son discretas, el espacio de estados es un conjunto de puntos aislados, generalmente descrito por un vector de enteros.

Una clase de sistemas dinámicos que evolucionan en el tiempo continuo son expresados por medio de ecuaciones diferenciales. Esta clase de sistemas es de tiempo continuo y estados continuos. Por otro lado, está la clase de sistemas dinámicos de tiempo discreto que son representados por medio de ecuaciones en diferencias, también conocido como mapas o mapeos iterados. Esta clase de sistemas son de tiempo discreto y estados continuos. En la Ecuación (2.3) si el sistema evoluciona en tiempo continuo, entonces  $t \in \mathbb{R}^+$ . Si el sistema evoluciona en tiempo discreto, entonces  $t \in \mathbb{Z}$ .

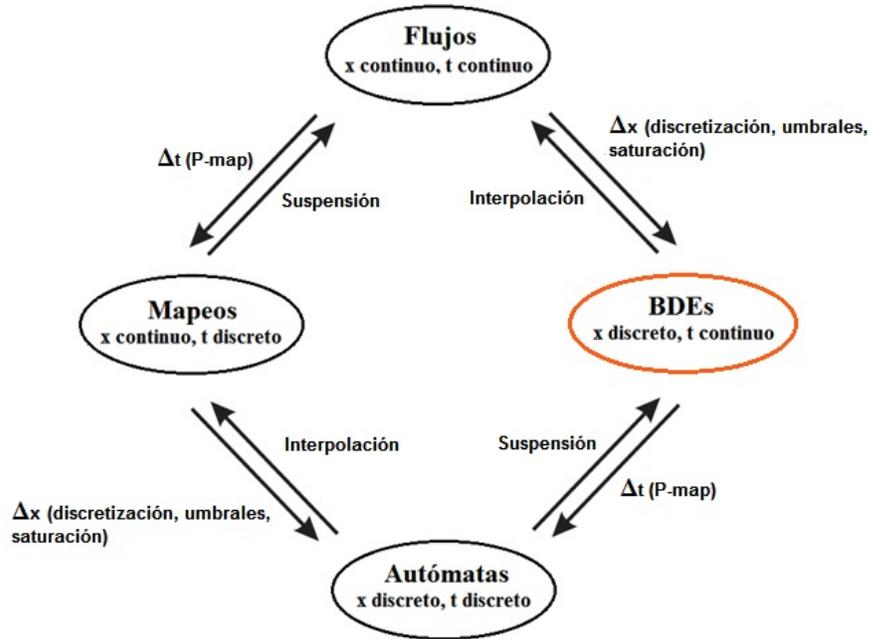


Figura 2.5: Clasificación de los sistemas dinámicos. La discretización de  $t$  se puede lograr mediante el mapeo de Poincaré que lleva de los Flujos a los Mapeos. La conexión opuesta se conoce como suspensión. Para ir de los Mapeos a los Autómatas se utiliza la discretización de  $x$ . La interpolación y el suavizamiento se usa para el caso opuesto. Conexiones similares llevan de las Ecuaciones Booleanas con retardo (BDEs) a los Autómatas y a los Flujos, respectivamente.

Existen dos clases más de sistemas dinámicos de acuerdo a la clasificación que se está tratando, dando en total de cuatro tipos de sistemas dinámicos, como se muestra en la Figura 2.5. Los sistemas en los cuales tanto las variables de estado como el tiempo son continuos son llamados *Flujos*, a esta categoría pertenecen los campos vectoriales, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Ecuaciones Diferenciales Funcionales y Ecuaciones Diferenciales con Retardo. Los sistemas con variables de estado continuas y tiempo discreto son conocidos como *Mapas o Mapeos* e incluyen Ecuaciones en Diferencias Ordinarias y Ecuaciones en Diferencias Parciales. Así, se tiene que la tercer clase de sistemas dinámicos son los *Autómatas* tienen variables de estado discretas y tiempo discreto, a este grupo pertenecen los autómatas celulares y las máquinas de Turing. La clase restante lo conforman los sistemas dinámicos que tienen variables de estado discretas y tiempo continuo [10], a esta clase pertenecen la Ecuaciones Booleanas con Retardo. Las Ecuaciones Booleanas con Retardo (BDEs) se tratarán de manera particular en la próxima sección del presente capítulo.

## 2.2.4. Comportamiento de los sistemas dinámicos

La evolución de un sistema que parte de una condición inicial se puede dividir en dos partes: la respuesta al estado transitorio y la respuesta al estado estacionario. Esta última es utilizado comúnmente para caracterizar el comportamiento del sistema si estas terminan en un conjunto invariante. El comportamiento puede ser:

- Estacionario: El sistema evoluciona a un estado particular y ahí permanece.
- Oscilatorio: El sistema se cicla alrededor de un conjunto fijo de estados (ciclo límite).
- Caótico: El sistema se mueve a través de los estados sin aparente orden.

Un estado estacionario es también llamado un punto de equilibrio. Un sistema permanecerá en un punto de equilibrio a menos que sea perturbado, es decir, sea movido a un estado cercano. Existen tres tipos principales de equilibrio, dependiendo de la respuesta a una perturbación.

- Equilibrio estable: Es cuando cualquier perturbación ocasiona que el sistema sea llevado a una condición inicial alrededor del punto de equilibrio y la oscilación finalmente converge al punto de equilibrio.
- Equilibrio inestable: Cualquier perturbación lleva a la trayectoria a una condición inicial alrededor del punto de equilibrio y ésta se aleja del punto de equilibrio.
- Equilibrio condicionalmente estable: El sistema muestra comportamiento estable o inestable, dependiendo de la forma de la perturbación.

Un atractor que consiste de un estado solo cuyo único sucesor es él mismo, es un estado de equilibrio. Un atractor que consiste de un ciclo de estados es llamado un ciclo límite. El conjunto de los estados que eventualmente llevarán a un atractor es conocido como cuenca de atracción. Lo contrario a un atractor es un repulsor, que es una región del espacio de estados cuyas trayectorias salen pero no entran. Un punto repulsivo es un estado de equilibrio inestable.

## 2.3. Ecuaciones Booleanas con Retardo

### 2.3.1. Origen

Las Ecuaciones Booleanas con Retardo, BDEs por sus siglas en inglés (Boolean Delay Equations), fueron propuestas en el año 1984 por Dee y Ghil en [11], utilizándolas para modelar el clima de la era cuaternaria. Dee y Ghil utilizaron tres variables de estado, siendo éstas, la temperatura global del aire  $T$ , el volumen de hielo en el hemisferio norte  $V$  y la intensidad  $C$  de las corrientes submarinas que provocan que haya agua fría en la superficie de los océanos. Estas variables pueden tomar sólo valores 0 ó 1. En este marco, un periodo glacial puede ser representado por  $V = 1$  y un periodo interglacial por  $V = 0$ . En este

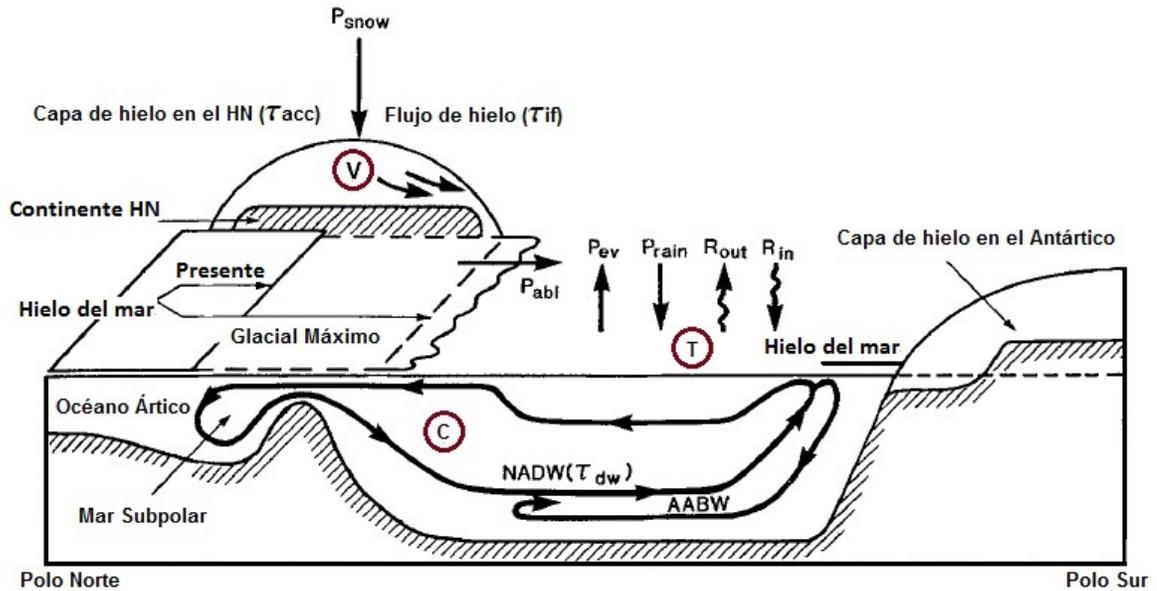


Figura 2.6: Modelo del clima en la era cuaternaria propuesto por Ghil [11].

modelo, las relaciones entre estas tres variables está expresada en términos de Ecuaciones Booleanas con Retardo. Las ecuaciones de este modelo del clima son:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= T(t - \tau_{acc}) \\
 T(t) &= \bar{V}(t - \tau_{if}) \wedge \bar{C}(t - \tau_{dw}) \\
 \bar{C}(t) &= V(t - \tau_{dw}) \wedge \bar{V}(t)
 \end{aligned}$$

donde la unidad del tiempo  $t$  es 1 kiloño, es decir, 1000 años. Este conjunto de ecuaciones representan las relaciones lógicas entre las tres variables y describen la operación de los mecanismo de retroalimentación. Por ejemplo, del sistema de ecuaciones anterior se puede ver que el incremento en las temperaturas produce un ciclo hidrológico activo, el cual, entre otros efectos, produce un incremento en la acumulación del hielo. En la Figura 2.6 se muestra un diagrama esquemático del modelo propuesto por Dee y Ghil, de la figura se puede ver la interacción de las tres variables que forman el modelo ( $V, T, C$ ).

A pesar de lo simplificado que se puede ver el modelo del clima de la era cuaternaria, este modelo fue atractivo por dos razones principales. En primer lugar, el marco de ecuaciones Booleanas con retardo provee de un método riguroso para modelar una red de mecanismo de retroalimentación que caracterizan las interacciones en el sistema del clima. En segundo lugar, el requerimiento de información detallada sobre los procesos físicos considerados se reduce significativamente al utilizar ecuaciones Booleanas con retardo. La teoría de las Ecuaciones Booleanas con Retardo fue formulada por estos autores con el fin de dar precisión matemática a su modelo conceptual del cambio climático, y para permitir el análisis de estos sistemas.

En el modelado clásico de sistemas basado en ecuaciones diferenciales, los parámetros de interacción comúnmente son difíciles de determinar a partir de las leyes físicas básicas y

éstos parámetros tienen una influencia importante en la solución. Esta dificultad no aparece en el modelo de sistemas basado en Ecuaciones Booleanas con Retardo ya que sólo se requiere tener el conocimiento de las escalas de tiempo y de los mecanismos de retroalimentación relevantes. Se debe hacer la aclaración de que las BDEs pueden resultar útiles si se quiere tener una respuesta preliminar, pero esto no significa que reemplazarán a las ecuaciones diferenciales.

A partir de este momento en esta tesis se podrá referir a las Ecuaciones Booleanas con Retardo o BDEs de manera indistinta.

### 2.3.2. Introducción a las BDEs

En varios sistemas de la vida real, como lo son los sistemas biológicos y los sistemas físicos, las interacciones entre las variables del sistema son altamente no lineales. Para algunas de estas variables, se pueden asociar umbrales. Entonces se puede describir el estado del sistema usando un vector de variables Booleanas, es decir, variables que sólo pueden tomar valores de 0 y 1. Las interacciones pueden ser descritas por funciones con valores booleanos.

Las BDEs representan una herramienta de modelado especial creada para la formulación matemática de modelos conceptuales de los sistemas que exhiben un comportamiento basado en umbrales, múltiples retroalimentaciones y distintos retardos. Las BDEs son sistemas dinámicos semi-discretos, donde las variables de estado son discretas, generalmente Booleanas, mientras que el tiempo en que evolucionan es continuo. En otras palabras, las BDEs son ecuaciones de evolución continua para un conjunto de variables discretas. De acuerdo a la clasificación de los sistemas dinámicos según sus variables de estado y el tiempo en que evolucionan son continuos o discretos, como se mostró en la Figura 2.5 que consiste de cuatro grandes clases:

- Flujos: Tienen sus estados  $x$  continuos y el tiempo  $t$  continuo.
- Mapeos: Tienen sus estados  $x$  continuos y el tiempo  $t$  discreto.
- Autómatas: Tienen sus estados  $x$  discretos y el tiempo  $t$  discreto.
- BDEs: Tienen sus estados  $x$  discretos y el tiempo  $t$  continuo.

### 2.3.3. Definición formal de BDEs

Considerando un sistema con  $n$  variables de estado continuas y evaluadas en los reales  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  para el cual existen umbrales  $q_i \in \mathbb{R}$ , entonces a cada variable  $v_i \in \mathbb{R}$  se le asocia una variable Booleana,  $x_i \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$ , es decir, una variable que puede ser un 0 lógico ó 1 lógico, dada por

$$x_i(v_i) = \begin{cases} 0, & v_i \leq q_i \\ 1, & v_i > q_i \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

El conjunto de variables Booleanas  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  da una descripción cualitativa simple del sistema original, y reduce el número de posibles estados a  $2^n$ .

Las ecuaciones que describen la evolución del vector de estado booleano  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n$  debido a las interacciones retardadas entre las variables Booleanas  $x_i \in \mathbb{B}$  tiene la forma

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1(t - \theta_{11}), x_2(t - \theta_{12}), \dots, x_n(t - \theta_{1n})), \\ x_2 = f_2(x_1(t - \theta_{21}), x_2(t - \theta_{22}), \dots, x_n(t - \theta_{2n})), \\ \vdots \\ x_n = f_n(x_1(t - \theta_{n1}), x_2(t - \theta_{n2}), \dots, x_n(t - \theta_{nn})). \end{cases} \quad (2.5)$$

Aquí, cada variable Booleana  $x_i$  es una función del tiempo  $t$ ,  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ , y las funciones  $f_i : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , son las ecuaciones Booleanas que involucran operadores lógicos y retardos. Para cada valor de  $\theta_{ij} \in \mathbb{R}$ , donde  $1 \leq i, j \leq n$ , es el tiempo que le toma a la variable  $x_j$  en afectar a la variable  $x_i$ . Siempre se puede normalizar los retardos  $\theta_{ij}$  para que se encuentren en el intervalo  $(0, 1]$  de manera que el valor más grande que un retardo pueda tener es la unidad.

Ahora se definirá la topología adecuada para el estudio de las BDEs. Se denota por  $\mathbb{B}^n[0, 1]$  el espacio del vector de funciones Booleanas constantes a pedazos.

$$\mathbf{x}(t : 0 \leq t \leq 1) \equiv \mathbf{x} \big|_{[0,1]} \quad (2.6)$$

el sistema puede ser considerado como un endomorfismo

$$\mathcal{F}_f : \mathbb{B}^n[0, 1] \rightarrow \mathbb{B}^n[0, 1] \quad (2.7)$$

Se desea extender este endomorfismo a uno que actúe sobre las soluciones de  $\mathbf{x}(t)$  de (2.5)

$$\mathcal{F}_f : \mathbf{x} \big|_{[t, t+1]} \rightarrow \mathbf{x} \big|_{[t+1, t+2]} \quad (2.8)$$

Por lo tanto,  $\mathbb{B}^n[0, 1]$  es el espacio fase en el cual  $\mathcal{F}_f$  actúa. En el caso boeolano,  $\mathbb{B} \equiv \{0, 1\}$  y  $\mathcal{F}$  actúa sobre  $\mathbb{B}^n[0, 1]$ . La métrica  $L^1$  sobre  $\mathbb{B}^1[0, 1]$ , está definida como

$$d(x, y) \equiv \int_0^1 (x(t) \oplus y(t)) dt = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt \quad (2.9)$$

donde el símbolo  $\oplus$  representa la operación OR-exclusiva (XOR), definida como  $p \oplus q = (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ .

### 2.3.4. Propiedades importantes en la BDEs

Los principales resultados acerca de las BDEs obtenidos por Ghil y Mullhaupt en [12] son:

- Existencia y unicidad de las soluciones. Considere un sistema de BDEs y las condiciones iniciales constantes en un intervalo igual en tamaño que el mayor retardo. Se puede entonces probar por construcción la existencia de una solución única mostrando la ausencia de soluciones con un número infinito de saltos entre 0 y 1 en cualquier intervalo de tiempo finito.

Teorema. Sea  $x(t) \in \mathbb{B}^n[0, 1]$  la condición inicial con saltos en un número finito de puntos. Entonces el sistema tiene una única solución para todo  $t \geq 1$  y para retardos arbitrariamente elegidos  $\Theta = (\theta_{ij}) \in (0, 1]^{n^2}$ .

- Continuidad. El endomorfismo  $F_f : X \rightarrow X$  es continuo para retardos dados. Más aún, el endomorfismo  $F_f : X \times [0, 1]^{n^2} \rightarrow X \times [0, 1]^{n^2}$  es continuo, donde el espacio de los retardos  $[0, 1]^{n^2}$  tiene topología euclidiana usual.
- Lema Pigeon-hole o lema del casillero. Todas las soluciones del sistema (2.5) con retardos racionales son eventualmente periódicos. Por eventualmente se debe entender que un transitivo de longitud finita puede ocurrir antes de que la periodicidad aparezca.

Todos los sistemas de BDEs que poseen sólo retardos racionales pueden ser vistos como un autómatas celular finito. La conmensurabilidad de los retardos crea una partición en el tiempo en segmentos sobre los cuales las variables de estado permanecen constantes y cuya longitud es un múltiplo entero del común denominador de los retardos. Como existe sólo un número finito de dos valores posibles para estos segmentos, la repetición debe ocurrir, y el comportamiento asintótico posible, será un valor eventual constante o la periodicidad.

### 2.3.5. Clasificación de las BDEs

Basados en el lema del casillero, Ghil y Mullhaupt clasificaron los sistemas de BDEs en conservativos y disipativos.

- Conservativos. Todos los sistemas con soluciones que son inmediatamente periódicas, para cualquier conjunto de retardos racionales y cualquier condición inicial, son conservativos. Es decir, un sistema de BDEs es conservativo para un conjunto abierto  $\Omega \subset (0, 1]^{n^2}$  de retardos si todos los retardos en  $\Omega$  son racionales y para cualquier condición inicial el sistema no presenta transitorios.
- Disipativos. Todos los sistemas que no son conservativos, son disipativos.

Un ejemplo simple de un sistema conservativo es

$$x(t) = \bar{x}(t - 1) \tag{2.10}$$

donde la barra sobre la  $x$  representa la operación lógica negación. Las condiciones iniciales de este sistema son  $x(t) = 0$  para  $t < 0$ .

La evolución en el tiempo de este sistema se muestra en la Figura 2.7. Aunque en la figura sólo se muestra la simulación para un periodo corto de tiempo, la evolución del sistema se mantiene oscilando entre 0 y 1. De la figura se puede observar que inmediatamente aparece la periodicidad.

Un ejemplo de un sistema disipativo es

$$x(t) = x(t - 1) \wedge x(t - \theta), 0 < \theta < 1. \tag{2.11}$$

La Figura 2.8 muestra la evolución temporal de este sistema disipativo. Las condiciones iniciales para este sistema son  $x(t) = 0$  para  $t < 0$ . A partir de  $t = 3$  el sistema permanece en 0 infinitamente. Debido a que no existe periodicidad inmediata es que se clasifica a este sistema como disipativo.

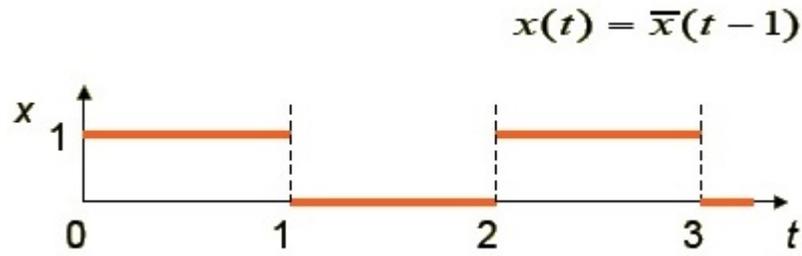


Figura 2.7: Sistema conservativo.

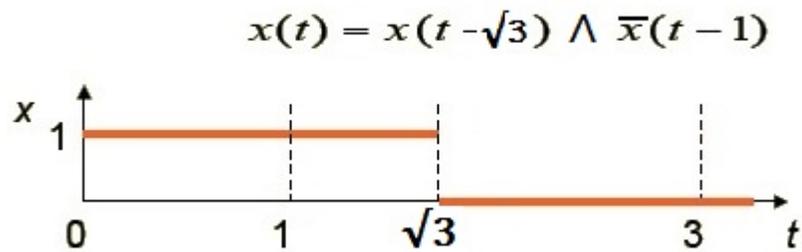


Figura 2.8: Sistema disipativo.

### 2.3.6. Comportamiento asintótico

Los siguientes tipos de comportamiento asintótico se pueden observar en los sistemas de BDEs:

- Punto fijo. La solución llega a uno de los posibles puntos de estado finitos y permanece ahí.
- Ciclo límite. La solución se convierte en periódica después de transcurrido un tiempo finito.
- Complejidad creciente. El número de cambios de estado por unidad de tiempo se incrementa. Este número crece como una potencia positiva y fraccional del tiempo.

# Capítulo 3

## Red Booleana

En el estudio de sistemas dinámicos se pueden encontrar sistemas en los cuales sus estados adquieren un gran número de valores. El comportamiento dinámico resultante de estos sistemas puede ser muy complicado. Por eso es importante contar con herramientas que ayuden a simplificar y a comprender el comportamiento de los sistemas dinámicos. Unas de estas simplificaciones o aproximaciones son las redes Booleanas.

El concepto de red Booleana fue propuesto originalmente a finales de los 1960s por Stuart Kauffman para modelar la regulación genérica a nivel celular. Este tipo de modelos puede capturar la dinámica general de sistemas cuyos estados son continuos. Las redes Booleanas son utilizadas en diferentes disciplinas como lo son la Electrónica, las Ciencias de la Computación, la Teoría de Control, entre otras.

### 3.1. Definición

Una red Booleana consiste de un número de nodos conectados uno con otro a través de enlaces dirigidos o no dirigidos. Cada nodo está asociado con una variable de estado binaria y su valor está determinado por una función lógica Booleana que evalúa los argumentos de todos los nodos que son entrada del nodo en cuestión.

En base a lo anterior, se define una red Booleana en general como una terna

$$BN = (G = (V, E), Q = \{0, 1\}, F = \{f_1, \dots, f_n\}) \quad (3.1)$$

donde:

- $G$  es un grafo dirigido o no dirigido.
- $Q$  es el conjunto de los estados.
- $F$  es el conjunto de las funciones de activación local o también llamadas tablas de verdad.

### 3.2. Clasificación de las redes Booleanas

Existen algunas clasificaciones de las redes Booleanas, algunas de ellas son:

- Redes Booleanas Aleatorias (RBN). A este tipo de redes Booleanas corresponde la propuesta por Kauffman en 1969. Consiste de  $N$  nodos, los cuales pueden tomar valores Booleanos. El estado de cada nodo está determinado por  $K$  conexiones que vienen del mismo o de otros nodos. Las conexiones son hechas de manera aleatoria y permanecen fijas durante la dinámica de la red. La manera en que los nodos se afectan unos a otro no solamente es determinada por sus conexiones, sino también por funciones lógicas, que también son generadas de manera aleatoria y permanecen fijas durante la dinámica de la red.
- Redes Booleanas Síncronas (SBN). Consiste en una red Booleana en la cual todos los estados de sus nodos se actualizan de manera simultánea. Es decir, la actualización de los estados se realiza en paralelo.
- Redes Booleanas Asíncronas o Redes Booleanas Autónomas (ABN). También conocidas como Redes Booleanas en Tiempo Continuo (CTBN). Son un conjunto de nodos con valores Booleanos acoplados por enlaces con retardos de tiempo asociados. Cada nodo se actualiza de acuerdo a una función Booleana de los valores de sus entradas en instantes previos. Son modeladas por medio de Ecuaciones Booleanas con Retardo (BDEs).

La red Booleana objeto de estudio de esta tesis pertenece a las Redes Booleanas Asíncronas, misma que se modelará por medio de Ecuaciones Booleanas con Retardo y cuyo análisis se detalla en secciones posteriores.

### 3.3. Red Booleana en estudio

En [5], Zhang et al. presentan un dispositivo electrónico digital simple que presenta un tipo de caos determinístico, un estado dinámico caracterizado por un espectro de banda ancha, una rápida divergencia de trayectorias cercanas y tiene un amplio espectro de potencia que se extiende a más de 2 GHz. Esta última característica se muestra en la Figura 3.1 (c). Además, muestran un modelo para este dispositivo electrónico basado en transiciones de estado Booleano, en el cual los tiempos de actualización están determinados por la propagación de la señal, dando lugar a lo que denominaron caos Booleano.

La topología de la red propuesta se muestra en la Figura 3.1 (a). Consiste de una red Booleana Autónoma con tres nodos, cada uno de los cuales tiene dos entradas y una salida que se propaga a dos nodos diferentes. El tiempo que le toma a una señal propagarse al nodo  $j$  desde el nodo  $i$  se denota por  $\tau_{ji}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Los nodos 1 y 2 ejecutan la operación lógica OR-exclusiva (XOR), mientras que el nodo 3 ejecuta la operación OR-exclusiva negada (XNOR). Cada retardo del tiempo viene de una combinación de un retardo intrínseco asociado con cada compuerta y del tiempo de la señal de propagación a lo largo del enlace. Para aumentar el tiempo de propagación, los autores incorporan un número par de compuestas negadoras (NOT) o Schmitt triggers en serie, cualquiera de los dos se comporta como un retardo en tiempo.

La red presentada consiste de tres nodos realizados con compuertas lógicas comerciales de alta velocidad. La evolución temporal del voltaje en cualquier nodo del circuito tiene un

patrón no repetitivo con transiciones de estado Booleanas y muestra sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales. Estas transiciones se muestran en la Figura 3.1 (b). Debido a que el circuito incluye lazos de retroalimentación con retardos inconmensurables de tiempo, éste evoluciona instantáneamente a estados dinámicos con ancho de pulso muy cortos, un régimen en el cual las variaciones en los retardos generan caos.

En el mismo artículo, reportan haber encontrado que la dinámica de la red depende del voltaje de alimentación  $V_{cc}$  de las compuertas lógicas, y lo consideran su parámetro de bifurcación. Su hipótesis es que la dinámica observada cambia con el voltaje de alimentación debido a los tiempos característicos de las compuertas lógicas, como son el retardo de la transición, los tiempos en cambiar de 0 a 1 (tiempos de subida), y los tiempos en cambiar de 1 a 0 (tiempos de bajada) ya que todos éstos dependen directamente del voltaje de alimentación. Para hacer la gráfica del diagrama de bifurcación de la red, juntaron una serie de tiempo con duración de  $1\mu s$  en el voltaje del nodo 2 para un valor fijo de  $V_{cc}$  y lo transformaron en una serie de tiempo de la variable Booleana  $x(t) \in \{0, 1\}$  al comparar con un umbral:  $x(t) = 0$ , para  $V(t) < \frac{V_{cc}}{2}$ ;  $x(t) = 1$ , para  $V(t) \geq \frac{V_{cc}}{2}$ . Esto anterior queda representado en la Figura 3.1 (b), la línea roja punteada representa el voltaje de umbral  $\frac{V_{cc}}{2}$ . Posteriormente, analizaron la serie de tiempo Booleano para determinar el tiempo entre transiciones sucesivas de bajo a alto y graficaron los intervalos de transición observada. Luego, fueron variando  $V_{cc}$  en incrementos de 5mV, iniciando en  $V_{cc} = 0.9$  V y finalizando en  $V_{cc} = 3.3$  V. El diagrama de bifurcación obtenido se muestra en la figura 3.2, de él se puede observar que existen regiones de comportamiento complejo, es decir, la franja casi continua de puntos, intercaladas con ventanas de comportamiento periódico.

El objetivo general de la tesis consiste en la construcción de una red booleana capaz de generar comportamiento complejo por medio de introducir retardos en la interconexión entre sus nodos. Es decir, la investigación se basa en la construcción y estudio de la red propuesta en [5]. A diferencia de lo presentado por los autores donde cada nodo es una compuerta lógica comercial, en este trabajo cada nodo está construido con un circuito de estructura flexible capaz de comportarse como una compuertas lógica variable dependiendo de un parámetro de configuración. Otra diferencia importante respecto al trabajo publicado en el que los retardos son generados incluyendo un número par de compuertas negadoras (NOT), en este trabajo los retardos pueden tomar cualquier valor dentro de los reales positivos, es decir,  $\tau_{ji} \in \mathbb{R}^+$ . Por otro lado, el parámetro de bifurcación utilizado en [5] es el voltaje de alimentación de las compuertas lógicas, mientras que en esta tesis el voltaje de alimentación de las compuertas se mantiene fijo y se toma como parámetro de bifurcación los retardos  $\tau_{ji}$ .

### 3.4. Celda lógica reconfigurable

La dinámica no lineal es una fuente importante de una gran variedad de patrones los cuales pueden ser utilizados en dispositivos para representar sistemas naturales o para realizar tareas de cómputo. Es de gran interés desarrollar un tipo de arquitectura que complemente o incluso que sustituya a las arquitecturas estáticas [13]. La tarea principal entonces en este caso, es conseguir compuertas lógicas reconfigurables, también llamadas celdas lógicas reconfigurables o células lógicas reconfigurables.

La celda lógica reconfigurable es un circuito electrónico basado en amplificadores ope-

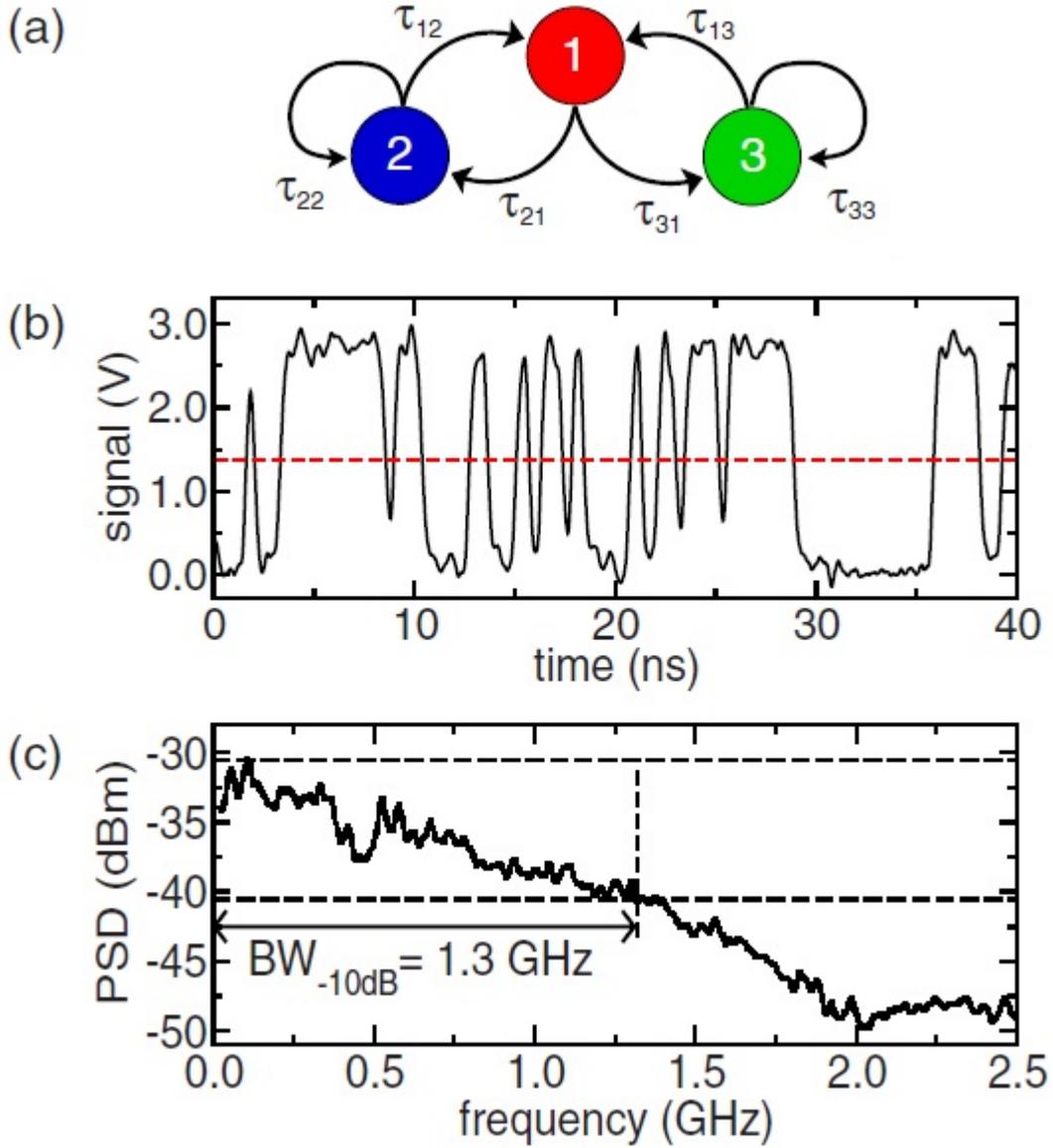


Figura 3.1: (a) Topología de la red Booleana caótica propuesta por Zhang et al. en [5] (b) Evolución temporal del voltaje en algún nodo de la red. (c) Densidad espectral de la potencia (PSD) de la red caótica para un voltaje  $V_{cc} = 2.75$  V.

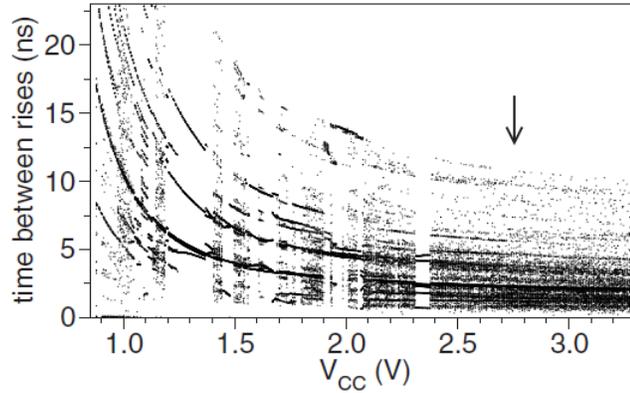


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación de la red Booleana [5]. La flecha que aparece indica el valor de  $V_{cc}$  que da el comportamiento complejo mostrado en (b) de la Figura 3.1.

racionales, con la característica principal de ser un circuito capaz de cambiar su salida de acuerdo con un parámetro de control. Al variar este parámetro de control, la celda lógica se reconfigura de modo que puede comportarse como cualquier compuerta lógica.

El diseño de una celda lógica reconfigurable se basa en un sistema lineal como el siguiente [14]:

$$f(X) = AX + b \quad (3.2)$$

donde  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{B}^2$  y  $b$  es un parámetro en  $\mathbb{R}$ .  $X$  es el vector de entrada, donde cada  $x_i \in \{0, 1\}$  con  $i = 1, 2$  y  $f \in \mathbb{R}$  es la suma del vector de entrada más un offset dado por  $b$ . La salida del sistema está dada por

$$Y(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } |f| < K; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.3)$$

donde  $K \in \mathbb{R}$ . Entonces, la ecuación (3.2) puede tomar los resultados mostrados en la tabla 3.1

$x_1$	$x_2$	$f$	AND	OR	NAND	NOR	XOR
0	0	$b$	0	0	1	1	0
0	1	$A_2 + b$	0	1	1	0	1
1	0	$A_1 + b$	0	1	1	0	1
1	1	$A_1 + A_2 + b$	1	1	0	0	0

Tabla 3.1: Valores que puede tomar  $f$  de (3.2), y tablas de verdad para la salida  $Y(f)$  de (3.3).

La ecuación de salida (3.3) sólo puede tomar valores del conjunto  $\{0, 1\}$ , esto depende de si el valor absoluto de  $f$  es menor que el valor de  $K$ . El sistema dado por (3.2)-(3.3) se puede comportar como compuertas AND, OR, NAND, NOR y XOR, dependiendo del valor

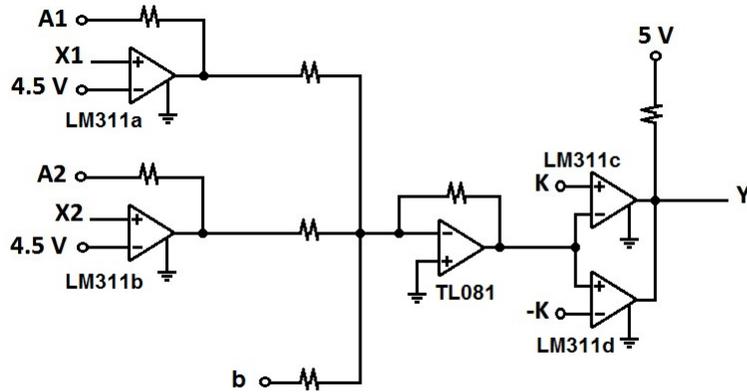


Figura 3.3: Diagrama esquemático de la Celda Lógica Reconfigurable

de los parámetros  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $b$  y  $K$ . Existen de parámetros  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $b$  y  $K$  que satisfacen las ecuaciones (3.2) y (3.3).

El circuito con estructura flexible basado en las ecuaciones (3.2) y (3.3) se muestra en la Figura 3.3. Éste es el circuito de la celda lógica reconfigurable, que puede comportarse como cualquier compuerta lógica, excepto como la compuerta XNOR. El circuito consiste de cuatro comparadores LM311, un amplificador operacional TL081, resistencias y fuentes de voltaje. Su funcionamiento se basa en la premisa que un 0 lógico es representado por un potencial de 0 Volts, mientras que un 1 lógico, es representado por 5 Volts.

El diagrama de la celda lógica reconfigurable puede ser visto en tres bloques principales. Un bloque comparador, un bloque sumador inversor y un bloque detector de ventana. Un primer comparador, denotado en la figura por LM311a, tendrá a su salida un voltaje aproximado al valor de  $A_1$ , si y sólo si  $x_1 > 4.5$  V. En otro caso, su salida será 0 V. De igual manera, otro comparador, denotado en la figura por LM311b, tendrá a su salida un voltaje aproximado al valor de  $A_2$ , si y sólo si  $x_2 > 4.5$  V. Si esta condición no se cumple, su salida será 0 V. La salida de los comparadores LM311a y LM311b, junto con un voltaje, denotado  $b$ , son las entradas de un amplificador operacional, en la figura denotado por TL081, en configuración sumadora-inversora. De tal forma, que la salida de este circuito es el negativo de la suma de  $A_1 + A_2 + b$ . Es decir,  $-A_1 - A_2 - b$ . Finalmente, un detector de ventana formado por dos comparadores, denotados LM311c y LM311d, determina si la salida del sumador inversor se encuentra en el intervalo cerrado  $[-K, K]$ . Si se encuentra en este intervalo, la salida  $Y$  tendrá un voltaje de 5 V. En caso contrario, la salida  $Y$  será 0 V.

Como ya se mencionó anteriormente, los parámetros de la celda lógica configurable son  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $b$  y  $K$ , por motivos de simplificación, se hace la siguiente sustitución  $A_1 = A_2 = A$ , de modo que ahora sólo se tienen tres parámetros por configurar. Debe notarse que la suma  $A_1 + A_2 + b$  depende directamente de los valores  $x_1$  y  $x_2$ . Las variables  $x_1$  y  $x_2$  son las entradas de la compuerta lógica, por lo tanto cada una de ellas sólo puede tomar el valor de 0 ó 1. Tomando en cuenta lo anterior, la suma y la salida  $Y$  será determinada por los valores que tomen  $x_1$  y  $x_2$  y los nuevos valores están mostrados en la Tabla 3.2.

$x_1$	$x_2$	$f$	AND	OR	NAND	NOR	XOR
0	0	$b$	0	0	1	1	0
0	1	$A + b$	0	1	1	0	1
1	0	$A + b$	0	1	1	0	1
1	1	$2A + b$	1	1	0	0	0

Tabla 3.2: Valores que puede tomar  $f$  después de la sustitución  $A_1 = A_2 = A$ , y tablas de verdad para la salida  $Y(f)$ .

Si se fija el valor de  $A = 1.5$  y de  $K = 1$ , entonces el siguiente paso es determinar el valor que debe tener el parámetro  $b$  para obtener cada una de las compuertas lógicas posibles con este circuito. Por ejemplo, para obtener una compuerta AND se debe resolver un sistema de desigualdades como el que se muestra en la Tabla 3.3.

$x_1$	$x_2$	AND
0	0	$b \notin [-1, 1] \Rightarrow (b < -K) \wedge (b > K)$
0	1	$1.5 + b \notin [-1, 1] \Rightarrow (b < -K) \wedge (b > K)$
1	0	$1.5 + b \notin [-1, 1] \Rightarrow (b < -K) \wedge (b > K)$
1	1	$3.0 + b \in [-1, 1] \Rightarrow (b > -K) \wedge (b < K)$

Tabla 3.3: Sistema de desigualdades para obtener una compuerta AND en la salida  $Y(f)$  luego de la sustitución  $A_1 = A_2 = A = 1.5$ .

Después de hacer las operaciones convenientes para la solución de las desigualdades para cada compuerta, se obtuvieron los valores para  $b$  mostrados en la Tabla 3.4.

$A$	$b$	Compuerta obtenida
1.5	-1.8	AND
1.5	-1.2	OR
1.5	-1.1	XOR
1.5	0.0	NAND
1.5	0.3	NOR

Tabla 3.4: Valores de  $b$  para obtener las posibles compuertas lógicas.

En las Figuras 3.4-3.8, se muestra el comportamiento de la celda lógica reconfigurable para las compuertas AND, OR, NAND, NOR, XOR, respectivamente. La señal superior en cada una de las figuras corresponde a la entrada  $x_1$ , la señal intermedia corresponde a la entrada  $x_2$ , mientras que la señal inferior corresponde a la salida de la compuerta  $Y$ . La frecuencia de la señal  $x_1$  es el doble de la frecuencia de la señal  $x_2$ .

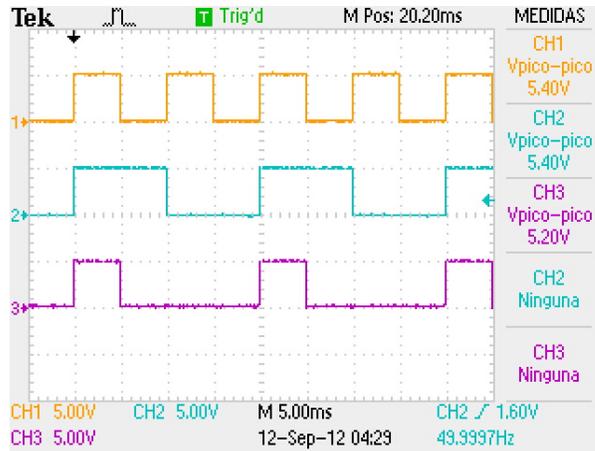


Figura 3.4: Comportamiento experimental de la celda lógica reconfigurable en configuración AND

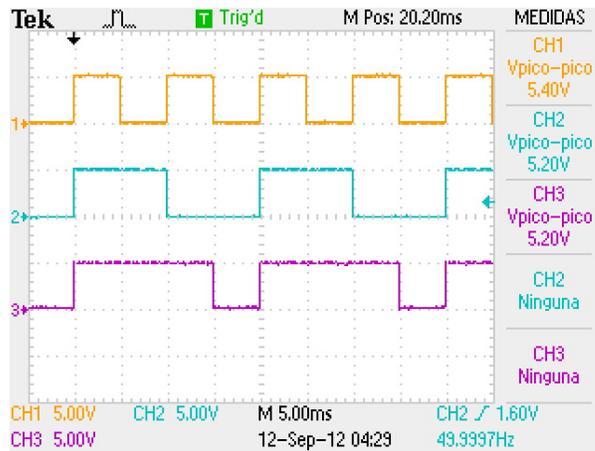


Figura 3.5: Comportamiento experimental de la celda lógica reconfigurable en configuración OR

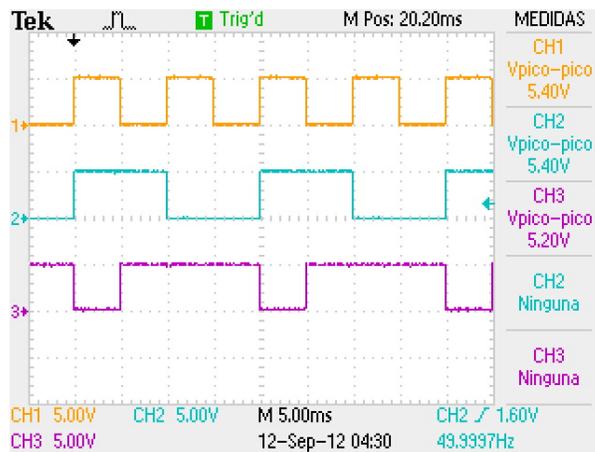


Figura 3.6: Comportamiento experimental de la celda lógica reconfigurable en configuración NAND

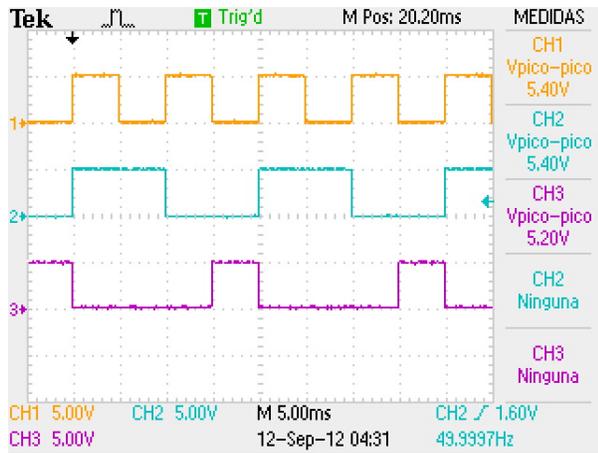


Figura 3.7: Comportamiento experimental de la celda lógica reconfigurable en configuración NOR

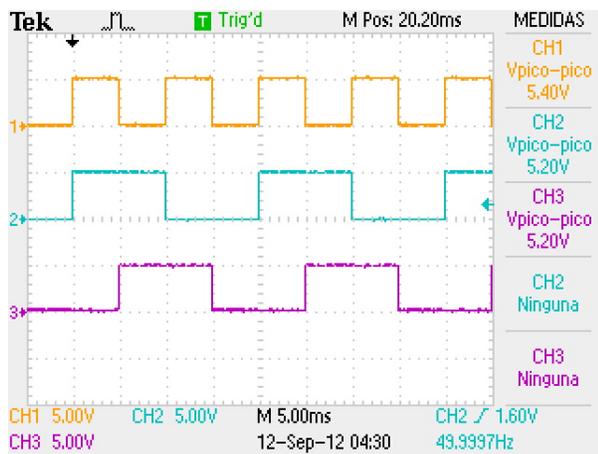


Figura 3.8: Comportamiento experimental de la celda lógica reconfigurable en configuración XOR

### 3.5. Construcción de la Red Booleana con celdas lógicas reconfigurables

El objetivo de tener un circuito con una misma estructura capaz de comportarse como cualquier compuerta lógica es poder implementar la red booleana propuesta por Zhang et al. Como puede notarse, el nodo 3 de la red propuesta es una compuerta XNOR, y esta compuerta no se puede implementar directamente con la celda lógica reconfigurable. Para solucionar este problema se tienen dos alternativas. La primera alternativa consiste en obtener la compuerta XNOR a partir de la compuerta NAND. La segunda opción consiste en obtener la compuerta XNOR a partir de la compuerta XOR.

Para obtener la compuerta XNOR a partir de la compuerta NAND se parte de la tabla de verdad de esta última compuerta. La compuerta NAND es la negación de la compuerta AND. La tabla de verdad de la compuerta NAND se muestra en la Tabla 3.5. De la tabla de verdad se puede ver que si  $x_1 = x_2$ , entonces la salida de la compuerta NAND equivale a la negación de  $x_1 = x_2$ , es decir una compuerta NOT. Entonces la compuerta XNOR puede ser construida negando la salida de una compuerta XOR mediante una compuerta NAND. En la Figura 3.9 (a) se muestra de manera gráfica la forma de obtener la compuerta XNOR a partir de la compuerta NAND.

$x_1$	$x_2$	$(x_1 \wedge x_2)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tabla 3.5: Tabla de verdad para la compuerta NAND.

La otra alternativa que se tiene para construir una compuerta XNOR consiste en agregar una nueva compuerta XOR. Esta nueva compuerta XOR tendrá en una de sus entradas la salida de una XOR con los argumentos originales y en la otra entrada un 1 lógico. Al hacer esto, se niega la compuerta XOR con los argumentos originales. Es decir, se obtiene la compuerta XNOR con la siguiente función booleana

$$(x_1 \oplus x_2)' = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$$

En la Figura 3.9 (b) se muestra la manera de obtener una compuerta XNOR a partir de un par de compuertas XOR.

En la Figura 3.10, se muestra el comportamiento de la celda lógica reconfigurable para la compuerta XNOR. La señal superior corresponde a la entrada  $x_1$ , la señal intermedia corresponde a la entrada  $x_2$ , mientras que la señal inferior corresponde a la salida de la compuerta  $Y$ . La frecuencia de la señal  $x_1$  es el doble de la frecuencia de la señal  $x_2$ .

Una vez obtenida cada una de las compuertas que conforman la red booleana estudiada, el siguiente paso consiste en generar los retardos. Existen diversos métodos para implementar un elemento de retardo. La manera de construir un elemento de retardo en este trabajo es

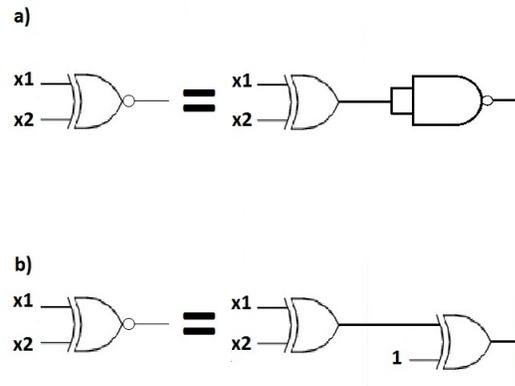


Figura 3.9: Alternativas para obtener una compuerta XNOR

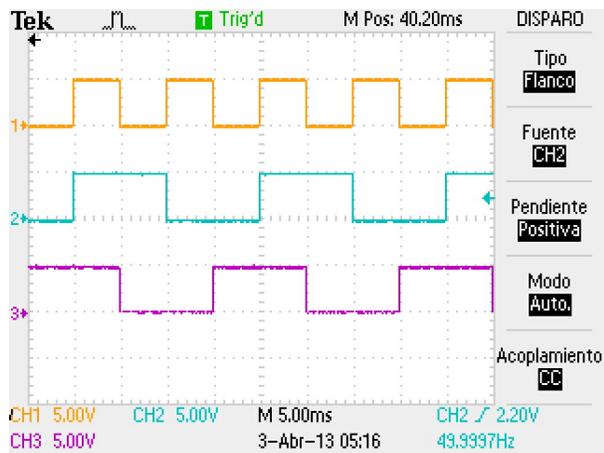


Figura 3.10: Comportamiento experimental de la celda lógica reconfigurable en configuración XNOR

mediante un circuito RC en configuración de un filtro pasa-bajas. Este circuito opera de la siguiente manera, se asume que el capacitor  $C$  está completamente descargado y que en el tiempo  $t = 0$  una corriente comienza a circular por el capacitor vía la resistencia. Ya que el voltaje inicial del capacitor es cero,  $V_C = 0$ , el capacitor está en corto circuito y la corriente máxima que fluye a través del circuito está limitada por la resistencia  $R$ . Esta corriente es conocida como la corriente de carga y se calcula utilizando la fórmula:  $i = V_{en}/R$ . El capacitor entonces se comienza a cargar, el tiempo que le toma al capacitor en alcanzar el 63 % del voltaje máximo posible, es decir,  $0.63V_{en}$ , es conocido como la constante de tiempo  $\tau$ . Entonces el valor del retardo es equivalente a esta constante de tiempo  $\tau$  y se calcula como:

$$\tau = RC$$

El valor del voltaje a través del capacitor,  $V_C$  en cualquier instante de tiempo durante el periodo de carga está dado por:

$$V_C = V_{en}(1 - e^{-t/RC})$$

En la Figura 3.11 (a) se muestra la manera de implementar un retardo por medio de un circuito RC en configuración pasa-bajas. La Figura 3.11 (b) muestra la curva de carga del capacitor, el tiempo que le lleva al capacitor para cargarse hasta el 63 % del voltaje aplicado es la constante de tiempo que se retardará la señal de entrada.

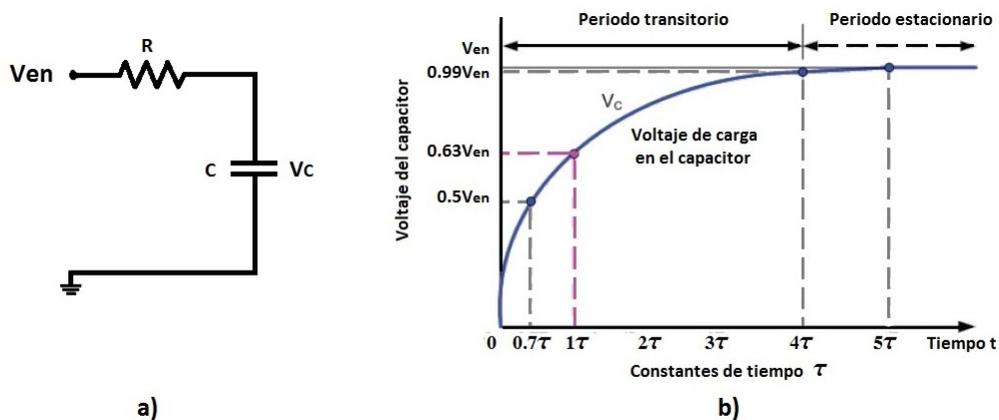


Figura 3.11: Circuito de retardo. a) Circuito de retardo implementado con un filtro pasa-bajas. b) Curva de carga en el capacitor

## 3.6. Análisis de la red Booleana

### 3.6.1. Modelo con Ecuaciones Booleanas con Retardo

El sistema de Ecuaciones Booleanas con Retardo (BDEs) que describen el comportamiento de la red Booleana en estudio son:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_2(t - \tau_{12}) \oplus x_3(t - \tau_{13}) \\
x_2(t) &= x_1(t - \tau_{21}) \oplus x_3(t - \tau_{22}) \\
x_3(t) &= x_1(t - \tau_{31}) \oplus x_3(t - \tau_{33}) \oplus 1
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Aquí,  $x_i(t)$  representa el valor del  $i$ -ésimo componente del vector de estados binarios en el tiempo  $t$  y  $\tau_{ji}$  es el tiempo necesario para que un cambio en la variable de estado  $j$  afecte a la variable  $i$ . Es decir, se puede ver a las variables  $x_i(t - \tau_{ji})$  como elementos de memoria, los cuales representan los estados de los nodos de la red en instantes anteriores.

Para definir las condiciones iniciales es necesario especificar la serie de tiempo de todos los nodos para una cierta duración de tiempo. Por ejemplo, para determinar la serie de tiempo de un nodo  $i$  a partir de un tiempo  $t = 0$  requiere del conocimiento de todas las señales que comenzaron a viajar hacia el nodo  $i$  y que partieron del nodo  $j$  en  $t = -\tau_{ij}$ . Por lo tanto, una condición inicial para (3.4) es la serie de tiempo para todos los nodos en el intervalo  $[-\text{máx}\{\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots, \tau_{in}\}, 0]$ .

### 3.6.2. Retardos racionales e irracionales

A continuación se probarán las propiedades de las BDEs publicadas por Dee, Ghil y Mullhaupt en [11]. Se sabe que si todos los retardos en una red Booleana asíncrona son racionales, entonces el sistema se puede ver como una red Booleana síncrona en cuyo caso la dinámica será eventualmente periódica. El comportamiento no periódico aparece si hay retardos inconmensurables en la red.

Cuando todos los retardos son racionales, debido a que la conmensurabilidad de los retardos divide el eje del tiempo en segmentos sobre los cuales las variables de estado permanecen constantes y cuya longitud es un múltiplo entero del mínimo común denominador de los retardos. En la Figura 3.12 se muestra la gráfica experimental de la evolución temporal del voltaje en la red Booleana cuando posee retardos racionales únicamente. De la figura se puede notar que para el nodo 1 y el nodo 2 la periodicidad es evidente, mientras que el nodo 3 presenta algunos disparos no periódicos. Estos disparos se deben a la forma en que está construida la compuerta XNOR, al estar compuesta por dos compuertas XOR, el tiempo de respuesta característico de la compuerta XNOR es aproximadamente el doble que en las compuertas de los nodos 1 y 2. El tiempo de respuesta característico de la compuerta XNOR es aproximadamente de 158.8 ns. La gráfica del tiempo de respuesta de la compuerta se muestra en la Figura 3.13. La diferencia entre los dos cursores, marcados en la figura como 1 y 2, determina el tiempo de respuesta característico.

Si se desea la supresión de los disparos inducidos por el tiempo de respuesta de la compuerta XNOR, se pueden ajustar los retardos  $\tau_{j3}$ . De esta manera, los retardos en conjunto con el tiempo de respuesta de la compuerta inducen la periodicidad. Esto se muestra en la Figura 3.14.

En el caso de que los retardos sean irracionales, debido a que no existe conmensurabilidad en los retardos, el número de cambios de estado aumenta por unidad de tiempo. En la Figura 3.15 se muestra la gráfica experimental de la evolución temporal del voltaje en los tres nodos de la red Booleana cuando posee retardos irracionales únicamente. Es importante hacer notar

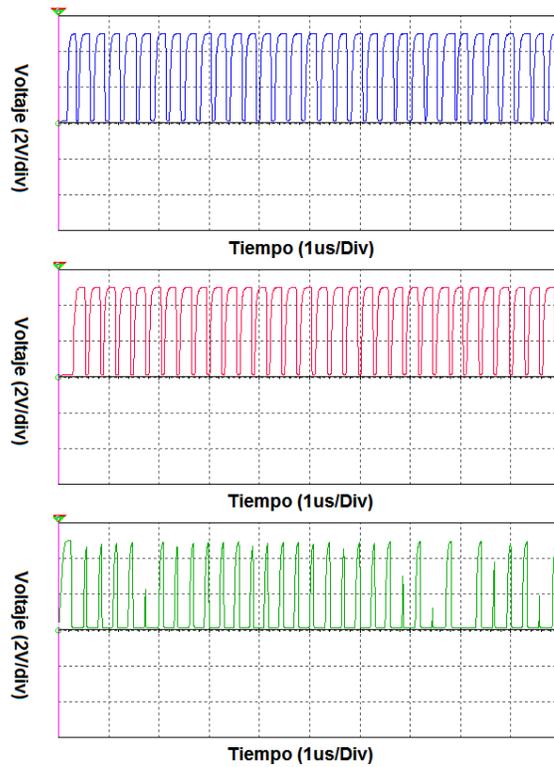


Figura 3.12: Evolución temporal del voltaje de los 3 nodos de la red para cuando presenta retardos racionales. La gráfica superior corresponde al nodo 1, la intermedia al nodo 2 y la inferior al nodo 3.

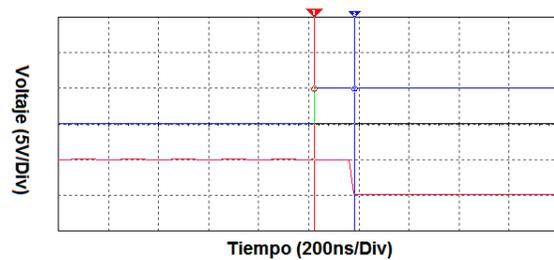


Figura 3.13: Tiempo de respuesta característico de la compuerta XNOR. La gráfica en azul corresponde a la entrada de la compuerta, mientras que la salida se muestra en color rojo.

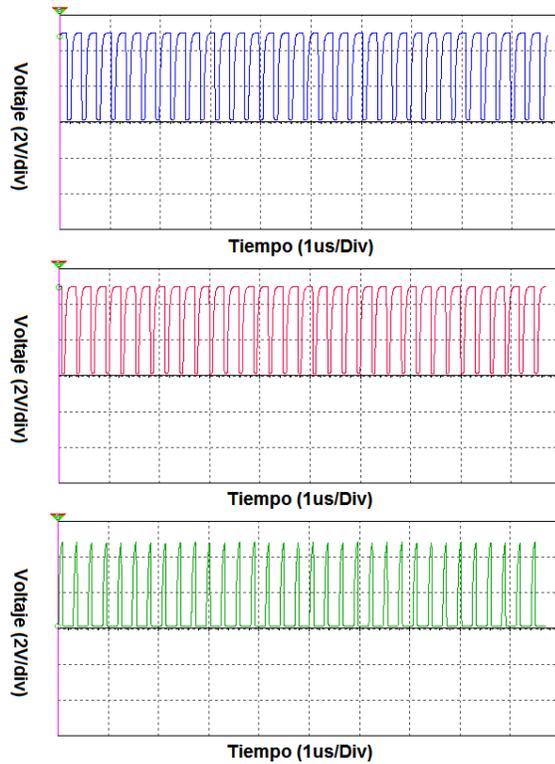


Figura 3.14: Evolución temporal del voltaje de los 3 nodos de la red para cuando presenta retardos racionales. La gráfica superior corresponde al nodo 1, la intermedia al nodo 2 y la inferior al nodo 3. El retardo compensa el tiempo de respuesta de la compuerta para evitar disparos no periódicos.

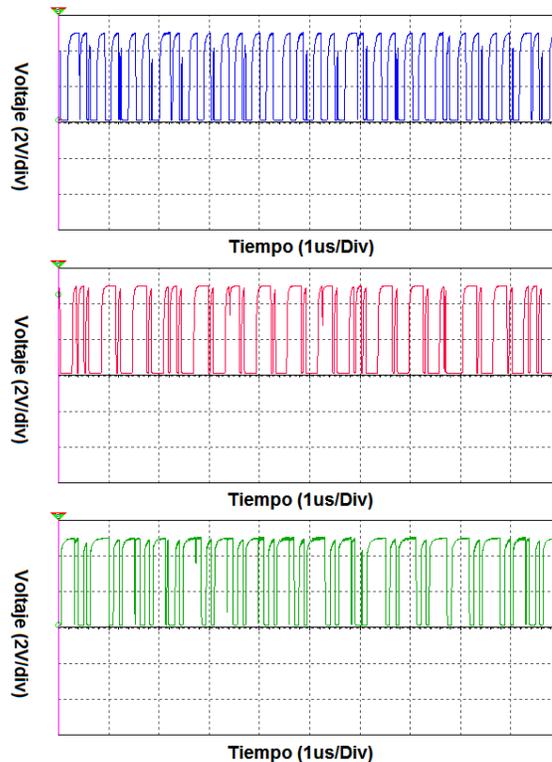


Figura 3.15: Evolución temporal del voltaje de los 3 nodos de la red para cuando presenta retardos irracionales. La gráfica superior corresponde al nodo 1, la intermedia al nodo 2 y la inferior al nodo 3.

que cuando se refiere a retardo irracionales se está considerando una aproximación a ellos ya que numéricamente o experimentalmente no hay manera de garantizar un número irracional. En la figura se puede apreciar que no existe periodicidad en los voltajes de salida de los nodos, de manera que el número de cambios de estado va aumentando considerablemente.

Se realizaron además simulaciones numéricas de la red Booleana. En estas simulaciones, las compuertas lógicas son ideales, es decir, el tiempo de respuesta es casi inmediato. Para el caso en que se tienen solamente retardos periódicos se obtuvo la gráfica mostrada en la Figura 3.16, mientras que para el caso de los retardos irracionales, se obtuvo la gráfica mostrada en la Figura 3.17.

### 3.6.3. Diagramas de bifurcación

Como se explicó en la sección 3.3, en [5], los autores utilizan el voltaje de alimentación de las compuertas como parámetro de bifurcación. Cuando se adquiere una circuito comercial, el fabricante especifica en la hoja de datos el rango de valores de voltaje de alimentación en los que la compuerta funciona correctamente. Al variar el voltaje de alimentación, internamente en el circuito se modifican parámetros como corrientes, tiempos de respuesta, entre otros. Entonces, si se construye una red Booleana con compuertas lógicas comerciales y se hace variar el voltaje de alimentación, se puede llegar a un punto en que el voltaje de la com-

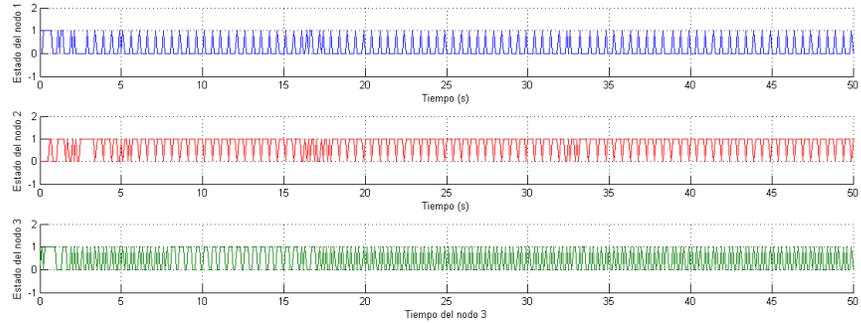


Figura 3.16: Simulación numérica de una red Booleana con retardos racionales. La gráfica superior corresponde al nodo 1, la intermedia al nodo 2 y la inferior al nodo 3.

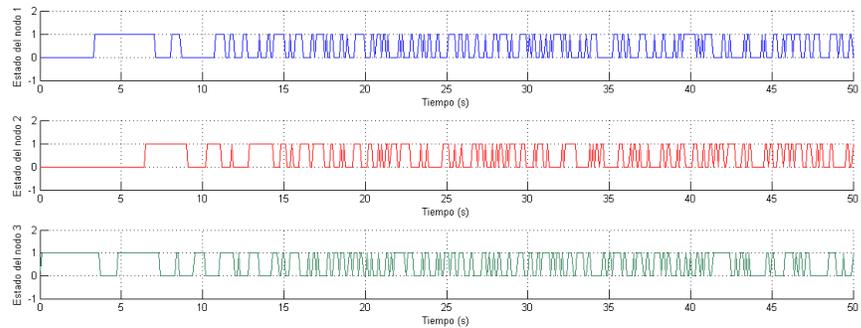


Figura 3.17: Simulación numérica de una red Booleana con retardos irracionales. La gráfica superior corresponde al nodo 1, la intermedia al nodo 2 y la inferior al nodo 3.

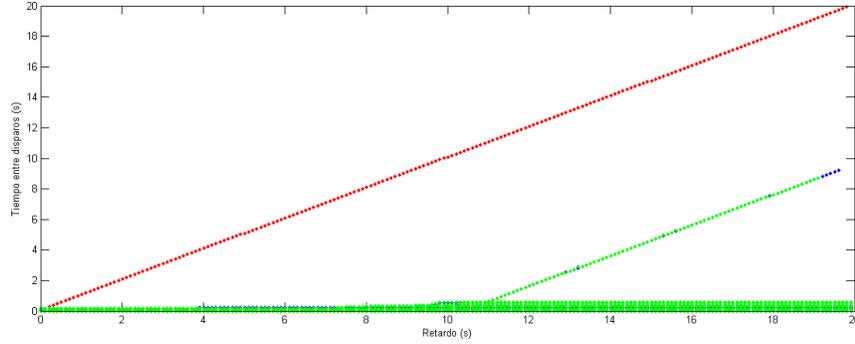


Figura 3.18: Diagrama de bifurcación en el caso de tener solamente retardos racionales.

puerta suministrado no sea el adecuado y se tenga un comportamiento incorrecto. En esta tesis, el voltaje de alimentación de las celdas lógicas reconfigurables se mantiene constante, garantizando que está en el nivel correcto para el funcionamiento de la compuerta. En esta tesis, los parámetros de bifurcación serán los retardos entre las conexiones de los nodos.

Si se toma la señal de salida en cualquiera de sus nodos, se puede definir el tiempo en que sucede un disparo, es decir, el tiempo en que ocurre un cambio de 0 lógico a 1 lógico o viceversa. Si el cambio se da de 0 a 1, se dice que es un disparo en flanco positivo, y el tiempo en que sucede recibe el nombre de tiempo del flanco positivo. En caso contrario, se dice que es un disparo en flanco negativo, y el tiempo en que sucede se llama tiempo del flanco negativo. Si la red se comporta de manera periódica, entonces el conjunto de tiempos de disparo tendrá un número finito y distinguible de elementos. Sin embargo, si la red se comporta de manera compleja, entonces el conjunto de tiempos de disparo tendrá un número no distinguible.

Con base en lo anterior, se realizaron numéricamente los diagramas de bifurcación. Para la red estudiada, se fijaron cinco de los seis retardos que tiene y se fue variando el retardo restante el cual es el parámetro de bifurcación. Para cada valor de retardo se ejecutó la simulación de la red, y se fueron almacenando los tiempos de los flancos positivos para cada uno de los nodos. Posteriormente, se graficaron el tiempo de los flancos positivos contra el valor del retardo variable.

Para una red con únicamente retardos racionales se obtuvo el diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 3.18. En este caso los retardos fijos fueron  $\tau_{31} = \frac{1}{2}$ ,  $\tau_{12} = \frac{1}{5}$ ,  $\tau_{22} = \frac{1}{7}$ ,  $\tau_{13} = \frac{1}{11}$ ,  $\tau_{33} = \frac{1}{13}$ , y el parámetro que se varió fue  $\tau_{21}$ , comenzando en 0.1 y terminando en 20 en incrementos de 0.01. Todas las unidades de estos retardos están en segundos. En esta figura se puede apreciar que el conjunto de los tiempos de disparo es un conjunto distinguible que se puede contar fácilmente, esto es debido a la periodicidad. Para el caso de una red con retardos irracionales se obtuvo la gráfica de la Figura 3.19, en ella se ve que existen valores en que hay periodicidad, pero también se puede ver una nube de puntos en los tiempos de disparo, lo que hace pensar en la posibilidad de un comportamiento caótico. Aquí, los valores de los retardos fijos fueron  $\tau_{31} = \sqrt{2}$ ,  $\tau_{12} = \sqrt{5}$ ,  $\tau_{22} = \sqrt{7}$ ,  $\tau_{13} = \sqrt{11}$ ,  $\tau_{33} = \sqrt{13}$ . El retardo que fue variando fue  $\tau_{21}$ , comenzando en  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  y terminando en 20 en incrementos de  $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ . De igual manera, las unidades de estos retardos están en segundos.

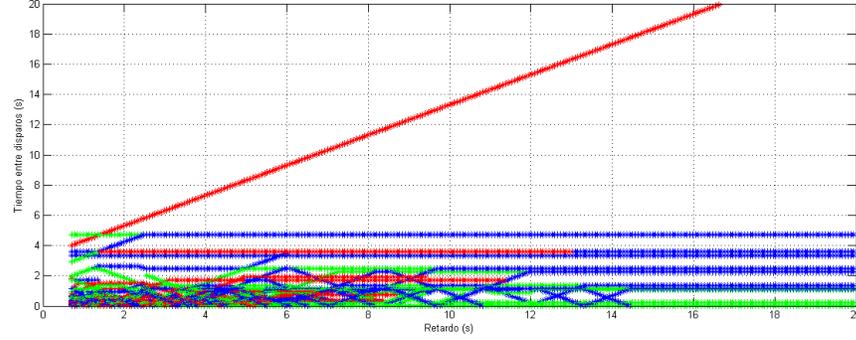


Figura 3.19: Diagrama de bifurcación en el caso de tener solamente retardos irracionales.

### 3.6.4. Puntos fijos

Respecto a la forma de calcular los puntos fijos de la red Booleana en estudio, se propone lo siguiente:

Se parte del supuesto de que existen,  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$  puntos de equilibrio del sistema tal que:

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= x_1(t - \tau) \\ x_2^*(t) &= x_2(t - \tau) \\ x_3^*(t) &= x_3(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $\tau = \max(\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{31}, \tau_{33})$ .

Entonces, se reescriben las BDEs que describen la red Booleana como:

$$x_1^*(t) = x_2^*(t - \tau) \oplus x_3^*(t - \tau) \quad (3.6)$$

$$x_2^*(t) = x_1^*(t - \tau) \oplus x_2^*(t - \tau) \quad (3.7)$$

$$x_3^*(t) = x_1^*(t - \tau) \oplus x_3^*(t - \tau) \oplus 1, \quad (3.8)$$

De la ecuación (3.6), suponiendo que  $x_1^*(t) = 0$  implica que  $x_2^*(t - \tau) = x_3^*(t - \tau)$ . Para el caso en que  $x_2^*(t - \tau) = x_3^*(t - \tau) = 0$ , al sustituir en la ecuación (3.7), se tiene que  $0 = 0 \oplus 0$  y sustituyendo también en la ecuación (3.8),  $0 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$  con lo que se cae en una contradicción. Ahora, para el caso en que  $x_2^*(t - \tau) = x_3^*(t - \tau) = 1$ , sustituyendo en la ecuación (3.7), se tiene que  $1 = 0 \oplus 1$ , lo cual cumple, pero al sustituir en la ecuación (3.8),  $1 = 0 \oplus 1 \oplus 1$  y nuevamente se cae en una contradicción.

Para cualquier combinación posible de estados se obtiene una contradicción de manera que se concluye que la red Booleana no tiene puntos fijos, por lo tanto para cualquier valor de retardos  $\tau_{ij}$  y cualquier condición inicial, la red permanece oscilando de manera indefinida.

### 3.6.5. Derivadas Booleanas y Matriz Jacobiana

De acuerdo con [15] y [16]. La *derivada Booleana parcial de primer orden* de una función Booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con respecto a  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  está definida como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \oplus f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n) \quad (3.9)$$

donde  $\bar{x}_j$  es el complemento Booleano de  $x_j$ .

El *gradiente* de una función Booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , denotado por  $\nabla f$  está definido como el vector de las  $n$  derivadas Booleanas parciales de primer orden de la función con respecto a las  $n$  variables de entrada en el orden adecuado, es decir:

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \quad (3.10)$$

La *matriz Jacobiana* de un sistema de  $n$  funciones Booleanas está definida como una matriz binaria de dimensión  $n \times n$ , denotada por  $J$ , cuyo  $ij$ -ésimo término es  $J_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Así, por ejemplo para calcular la matriz Jacobiana del sistema de BDEs se parte de la ecuación 3.4 y se renombra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1(t) = x_2(t - \tau_{12}) \oplus x_3(t - \tau_{13}) \\ f_2 &= x_2(t) = x_1(t - \tau_{21}) \oplus x_2(t - \tau_{22}) \\ f_3 &= x_3(t) = x_1(t - \tau_{31}) \oplus x_3(t - \tau_{33}) \oplus 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Posteriormente, se definen funciones auxiliares, siendo éstas:

$$\begin{aligned} f_a &= \bar{x}_2(t - \tau_{12}) \oplus x_3(t - \tau_{13}) \\ f_b &= x_2(t - \tau_{12}) \oplus \bar{x}_3(t - \tau_{13}) \\ f_c &= \bar{x}_1(t - \tau_{21}) \oplus x_2(t - \tau_{22}) \\ f_d &= x_1(t - \tau_{21}) \oplus \bar{x}_2(t - \tau_{22}) \\ f_e &= \bar{x}_1(t - \tau_{31}) \oplus x_3(t - \tau_{33}) \oplus 1 \\ f_f &= x_1(t - \tau_{31}) \oplus \bar{x}_3(t - \tau_{33}) \oplus 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz Jacobiana del sistema está definida como:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & f_1 \oplus f_a & f_1 \oplus f_b \\ f_2 \oplus f_c & f_2 \oplus f_c & 0 \\ f_3 \oplus f_d & 0 & f_3 \oplus f_e \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Por la naturaleza de la red que se está estudiando, se debe notar que al evaluar la matriz Jacobiana en cualquier punto se obtiene que cualquiera de las operaciones  $f_i \oplus f_z$ , para  $i = 1, 2, 3$  y  $z \in \{a, b, \dots, f\}$  da como resultado un 1. Por lo tanto, la matriz Jacobiana evaluada en cualquier posible estado de la red es igual a:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Y los valores propios de esta matriz son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ . Se sabe que los exponentes de Lyapunov son una medida cualitativa de la sensibilidad de un sistema a cambios en las condiciones iniciales. Estos exponentes miden la separación exponencial de órbitas cercanas de un sistema. En general, el cálculo de los exponentes de Lyapunov se hace promediando los valores propios de la matriz Jacobiana a lo largo de la órbita. Es natural pensar que si los valores propios de la red Booleana para todo  $t$  tienen el mismo valor, entonces al hacer el promedio, esto implicaría que los exponentes de Lyapunov y los valores propios son los mismos. El sistema cuenta con órbitas divergentes confinadas a tomar valores en un espacio de fase discreto y finito.

# Capítulo 4

## Sincronización

La palabra *sincronización* a menudo es encontrada tanto en el ámbito científico como en el ámbito coloquial. La palabra sincronización proviene de dos palabras griegas, *syn* y *cronos*, que significan, común y tiempo, respectivamente. Tomando en cuenta lo anterior, se puede inferir que el significado que tuvo para los griegos fue: *al mismo tiempo*. Este significado se ha conservado coloquialmente hasta la actualidad y por sincronización se entiende entonces, a una correlación en tiempo de procesos diferentes.

El fenómeno de sincronización es un fenómeno que aparece en los sistemas dinámicos que están interactuando entre sí. Los procesos de sincronización están presentes en la naturaleza y juegan un papel importante en diferentes contextos como la Biología, Ecología, Climatología, Sociología, e inclusive en las artes, como la Danza y la Música. En la Figura 4.1 se muestran dos ejemplos del fenómeno de sincronización en dos contextos diferentes. La Figura 4.1-a) se trata de un marcapasos electrónico que funciona en manera conjunta con las células del corazón para sincronizar el ritmo cardiaco. La Figura 4.1-b) es un ejemplo de sincronización en la industria, se trata de dos robots manipuladores trabajando de manera conjunta para la obtención de un fin específico. La sincronización se ha estudiado en sistemas electrónicos, mecánicos, biológicos, por citar algunos. Sin embargo, en el estudio del fenómeno de sincronización han surgido algunos casos particulares en los cuales no es evidente el estado de sincronización ni la forma de mantener este estado de sincronización.

### 4.1. Antecedentes históricos

Históricamente, la noción de la sincronización data del siglo IV a. de C. cuando Andróstenes, escriba de Alejandro Magno, da testimonio de un sistema biológico rítmico. En su reporte describe cómo en una expedición hecha a la India, las hojas de los árboles de tamarindo se mantenían abiertas durante el día, mientras que en la noche permanecían cerradas [17]. Sin embargo, un análisis más formal del fenómeno de sincronización se realiza hasta el siglo XVII, cuando en 1665, el matemático y físico, inventor del reloj de péndulo, Huygens, descubrió un extraño tipo de comportamiento entre dos péndulos conectados uno con el otro mediante un marco. Los péndulos oscilaban exactamente a la misma frecuencia pero con un desfase de 180 grados. Cuando los péndulos eran perturbados, el estado de desfase desaparecía y continuaba así indefinidamente. Huygens dedujo que la interacción

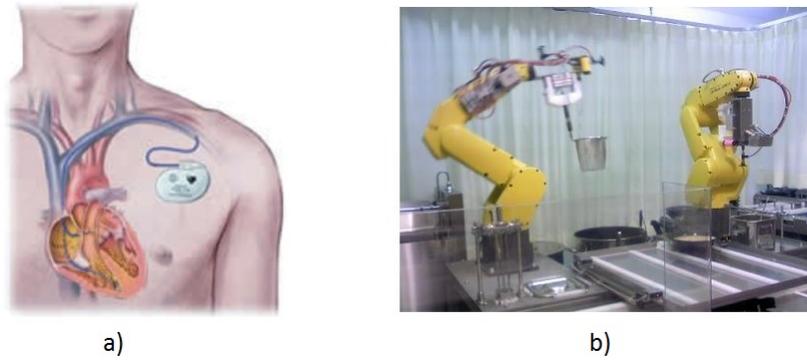


Figura 4.1: Ejemplos de sincronización. a) Marcapasos electrónico para sincronizar el ritmo cardíaco. b) Robots manipuladores trabajando de manera sincronizada en una tarea específica.

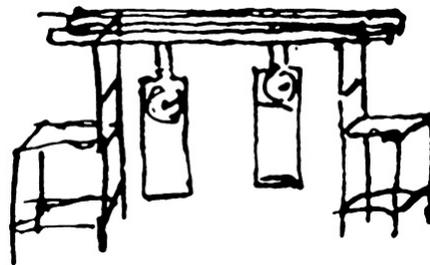


Figura 4.2: Dibujo de Huygens ilustrando sus experimentos con dos péndulos colocados en un soporte común.

crucial para este efecto se debía a los movimientos imperceptibles del marco común que sostenía a los dos péndulos. A partir de ese momento, el fenómeno de sincronización se convirtió en un tema de interés para los científicos.

Posteriormente, a mediados del siglo XIX, John William Strutt, Lord Rayleigh, describe en su tratado *La Teoría del Sonido* el fenómeno de sincronización en sistemas acústicos. Rayleigh observó sincronización mutua en los órganos cuando dos tubos diferentes comenzaban a sonar al unísono, también observó el efecto de extinción cuando el acoplamiento llevaba a la supresión de las oscilaciones [18].

A partir del año 1990, con el trabajo de Pecora y Carroll, la investigación del fenómeno de sincronización se ha enfocado a los sistemas caóticos. Un sistema dinámico es llamado caótico cuando presenta una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto significa que dos trayectorias que surgen de dos condiciones iniciales diferentes muy cercanas, se separan exponencialmente al transcurrir el tiempo. Por esta razón, los sistemas caóticos intrínsecamente se oponen a la sincronización, por lo tanto, aunque dos sistemas idénticos comienzan en condiciones iniciales muy cercanas, éstos evolucionarán en el tiempo de una manera desincronizada, es decir, las diferencias en los estados de los sistemas crecerán exponencialmente.

Los objetivos principales del presente capítulo son: primeramente, resumir los descubri-

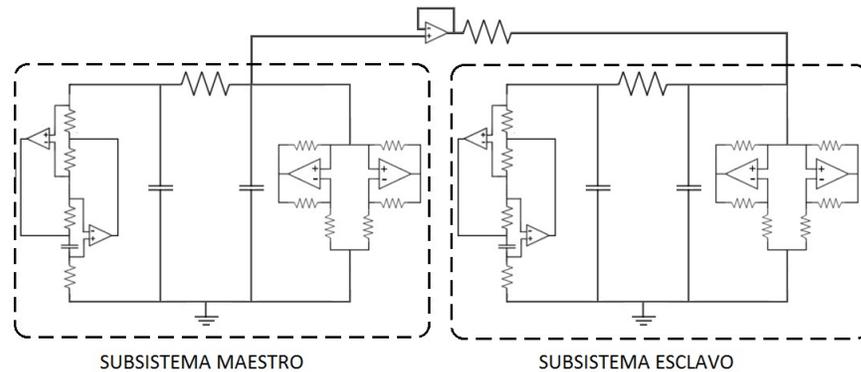


Figura 4.3: Diagrama esquemático de dos circuitos de Chua acoplados en configuración unidireccional.

mientos recientes respecto al estudio de la sincronización de sistemas caóticos acoplados. Posteriormente, explicar la forma que se implementó la sincronización de dos redes Booleanas.

## 4.2. Sincronización de caos

Debido a su alta sensibilidad a las condiciones iniciales, dos sistemas caóticos aislados, aunque sean idénticos, no permanecerán en sincronía. A pesar de esto, Pecora y Carroll [9] mostraron que los sistemas caóticos idénticos con una señal común de acoplamiento sí pueden evolucionar en sincronía. Sin embargo, en su estudio, Pecora y Carroll no garantizaban sincronización en forma robusta, porque aun siendo sistemas dinámicos idénticamente replicados, en la práctica existen inexactitudes e incertidumbres en los parámetros y componentes de cada sistema, lo cual provocaría divergencia en su evolución dinámica.

Como una definición preliminar, se entiende por sincronización de caos al proceso en el cual dos o más sistemas caóticos equivalentes o no equivalentes alcanzan un comportamiento común, debido a un acoplamiento o forzamiento. El proceso de sincronización abarca desde una concordancia completa de trayectorias hasta un aseguramiento de fases.

Un primer aspecto a destacar es que la forma en que se conseguirá la sincronización depende de la configuración del acoplamiento. En este contexto, se pueden distinguir tres casos principales: el acoplamiento unidireccional, el acoplamiento bidireccional y el forzamiento por una señal externa [19]. En el acoplamiento unidireccional, un sistema global está formado por dos subsistemas, que se comportan como maestro o como esclavo. Esto implica que uno de los subsistemas se desarrolla libremente y dirige la evolución del otro. Como resultado, el sistema esclavo es obligado a seguir la dinámica o una función propia de la dinámica del sistema maestro, el cual actúa como una fuerza externa sobre el subsistema esclavo.

En el caso del acoplamiento bidireccional, una situación muy diferente se presenta. En esta configuración ambos subsistemas están acoplados, produciendo un factor de acoplamiento

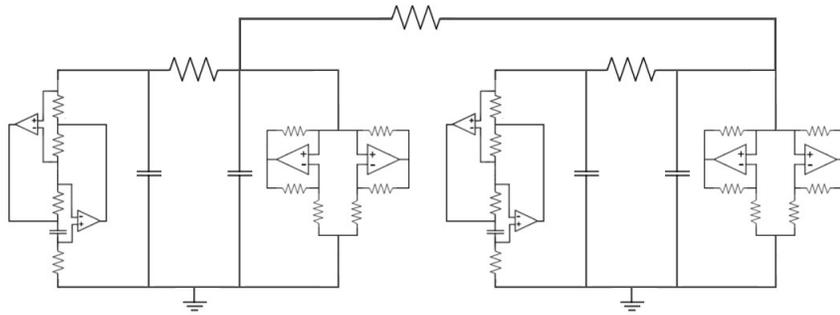


Figura 4.4: Diagrama esquemático de dos circuitos de Chua acoplados en configuración bidireccional

que lleva a un comportamiento mutuo de sincronización. Este tipo de acoplamiento se puede ver fisiológicamente entre el sistema cardiaco y el respiratorio.

El tercer método de acoplamiento consiste de un sistema esclavo forzado por una señal externa. La fuerza externa puede ser originada tanto por un sistema lineal como por un sistema no lineal.

### 4.3. Tipos de sincronización

De acuerdo con [20], entre sistemas caóticos diversos tipos de sincronización han sido descubiertos, estudiados y reportados. Entre estos tipos de sincronización están: La sincronización completa (CS), la sincronización generalizada (GS), la sincronización de fase (PS), la sincronización con retardo (LS), la sincronización intermitente con retardo (ILS), la sincronización imperfecta de fase (IPS), etc.

#### 4.3.1. Sincronización completa (CS)

Cuando se trata con sistemas idénticos acoplados de manera unidireccional, la sincronización aparece como una total igualdad de las variables de estado. A este tipo de sincronización se le conoce como sincronización completa, aunque existen otros nombres con los que se puede encontrar en la literatura, tales como, sincronización convencional o sincronización idéntica. La existencia de la sincronización completa implica que el sistema esclavo olvide la dinámica impuesta por sus condiciones iniciales y evolucione siguiendo al sistema maestro. Establecen que este tipo de sincronización puede ser alcanzada al hacer negativos todos los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo bajo la acción del sistema maestro.

#### 4.3.2. Sincronización generalizada (GS)

Un comportamiento dinámico interesante es el que se conoce como sincronización generalizada (GS), donde dos sistemas caóticos se dice que están sincronizados si existe una

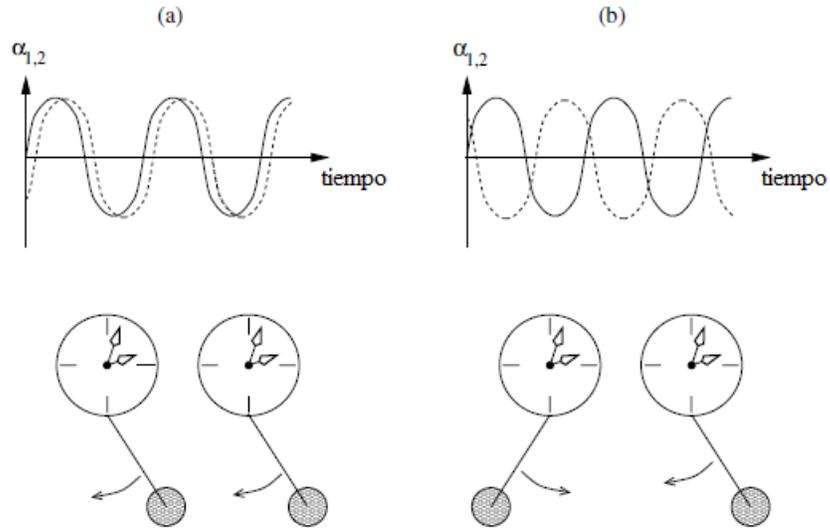


Figura 4.5: Posibles regímenes de sincronización de dos relojes de péndulo. (a) Sincronización en fase,  $\phi_2 - \phi_1 \approx 0$ , (b) Sincronización en antifase,  $\phi_2 - \phi_1 \approx \pi$ .

relación funcional entre los estados de los dos sistemas [20]. Se debe notar que en la GS los dos sistemas caóticos pueden ser diferentes. Por ejemplo, se puede lograr GS entre un sistema de Lorenz y un sistema de Rössler.

### 4.3.3. Sincronización de fase (PS)

La sincronización en fase se utiliza para sistemas de osciladores no idénticos que pueden alcanzar un régimen intermedio donde se produce una unión de las fases, mientras la correlación entre las amplitudes permanece débil, es decir, amplitudes descorrelacionadas. La idea principal de la sincronización en fase es que la frecuencia puede ser *empujada* por una fuerza periódica externa, o al ser acoplada con otro oscilador caótico. Es decir, se dice que existe una sincronización en fase cuando  $\phi_2 - \phi_1 \approx 0$  y cuando  $\phi_2 - \phi_1 \approx \pi$  se dice que existe sincronización en antifase. La Figura 4.5 muestra estos dos posibles regímenes de sincronización.

### 4.3.4. Sincronización de retardo o Lag (LS)

Esta sincronización es un paso entre la sincronización de fase y la sincronización completa. La cuestión radica en que existe un límite asintótico entre el tiempo  $t$ , de salida de un sistema y la salida del otro, esto hace que las fases y las amplitudes vayan unidas, pero con la presencia de un tiempo de retardo [20].

### 4.3.5. Sincronización de retardo intermitente (ILS)

En este tipo de sincronización, los sistemas la mayor parte del tiempo verifican la sincronización de fase, pero existen estallidos intermitentes de comportamientos no sincronización,

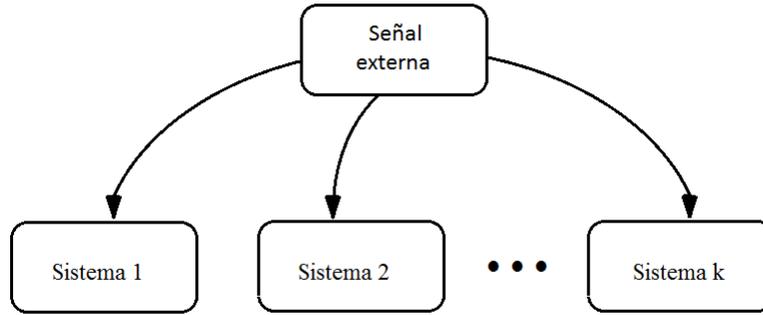


Figura 4.6: Esquema de la sincronización forzada.

debido a que la trayectoria pasa por una región del atractor donde el exponente local de Lyapunov se acorta en alguna dirección y se vuelve positivo [20].

#### 4.3.6. Sincronización imperfecta de fase (IPS)

Esta sincronización ocurre cuando estando fuera del régimen de sincronización de fase, las fases se ajustan.

### 4.4. Sincronización forzada

La idea general de la sincronización consiste en considerar sistemas esclavos forzados como se muestra en la Figura 4.6. Bajo este esquema, el fenómeno de sincronización forzada ocurre cuando las oscilaciones de varios sistemas  $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$  muestran con comportamiento correlacionado debido a que una señal externa es aplicada a estos osciladores [19]. La sincronización forzada puede ser detectada revisando el comportamiento asintótico de los sistemas esclavos de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^{(i)}(t) + (-1)^\eta \mathbf{x}^{(j)}((-1)^{\eta-1}t - \tau)| = 0 \quad (4.1)$$

Para  $i \neq j$ , y  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Los regímenes de sincronización forzada se muestran a continuación:

1. La sincronización forzada idéntica ocurre cuando las órbitas  $\mathbf{x}^{(i)}(t)$  y  $\mathbf{x}^{(j)}(t)$  satisfacen la ecuación (4.1) con  $\mathbf{x}^{(i)}(0) \neq \mathbf{x}^{(j)}(0), \eta = 1, \tau = 0$  y  $\mathbf{x}(t)$  es el flujo de la órbita en el tiempo  $t$ . Es decir, después de un transitorio, las trayectorias de dos órbitas son idénticas e independientes de las condiciones iniciales.
2. La sincronización forzada con retardo ocurre cuando las órbitas  $\mathbf{x}^{(i)}(t)$  y  $\mathbf{x}^{(j)}(t)$  satisfacen la ecuación (4.1) con  $\mathbf{x}^{(i)}(0) \neq \mathbf{x}^{(j)}(0), \eta = 1, \tau \neq 0$ . Las órbitas  $\mathbf{x}^{(i)}(t)$  y

$\mathbf{x}^{(j)}(t)$  están retardadas un tiempo  $\tau$  y se desarrollan asintóticamente. Las órbitas con este comportamiento entran en el mismo atractor, donde una órbita sigue a la otra con un retardo  $\tau$ .

3. La sincronización forzada de fase se encuentra cuando las órbitas oscilan alrededor de un valor constante  $c$ . Para poder entender este tipo de sincronización forzada, primero, se requiere definir la fase de una órbita como:

$$\phi_i(t) = \arctan \left[ \frac{x_v^{(1)}(t)}{x_u^{(i)}(t)} \right], \quad x_v^{(1)}(t), x_u^{(i)}(t) \in \mathbf{x}^{(i)}(t), \quad v \neq u. \quad (4.2)$$

$\phi_i$  y  $\phi_j$  con  $i \neq j$  corresponden a la fase de las órbitas  $\mathbf{x}^{(i)}(t)$  y  $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ , respectivamente. La sincronización de fase ocurre cuando la siguiente desigualdad se satisface:

$$|m_1\phi_i(t) - m_2\phi_j(t)| < c, \quad \text{para } m_1, m_2 \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

La sincronización forzada tiene aplicación en sistemas de comunicación caóticos, donde siempre hay, al menos, dos sistemas forzados involucrados: (1) el transmisor, el cual tiene la señal con la información y la señal forzadora y (2) el receptor, el cual es forzado por la señal portadora del transmisor. El objetivo de los sistemas de comunicación es logrado cuando el transmisor fuerza al receptor a sincronizarse. Como resultado, se puede ver al receptor como un filtro porque su respuesta depende de la salida del transmisor. Por otro lado, el transmisor es forzado por la señal de información, pero debe preservar su autonomía, su comportamiento caótico y no comportarse como un filtro [19].

## 4.5. Sincronización de redes Booleanas

La idea principal de la sincronización forzada consiste en considerar sistemas esclavos forzados por una señal externa. El esquema de sincronización para las redes Booleanas utilizado en esta tesis se muestra en la Figura 4.7. Bajo este esquema la señal forzadora externa que se propone debe ser un tren de pulsos cuadrados, esto es debido a la naturaleza discreta de los estados de la red. Respecto a la forma de acoplar esta señal forzadora externa con las dos redes Booleanas se parte de la red de estudio original mostrada en la Figura 4.8 (a). Para hacer el acoplamiento se introduce un par de nodos a la red. Estos nodos adicionales ejecutan la función Booleana OR. La manera de interconectarlos con los nodos originales de la red se muestra en la Figura 4.8 (b).

De esta nueva topología de red es importante destacar que al agregar los nodos denotados por 4 y 5 si la señal forzadora es un 0 lógico, entonces la nueva red se comporta como la red original propuesta en [5]. Esto se debe a que la compuerta OR con una entrada en cero, entrega a su salida el valor lógico que tiene en su otra entrada.

Para el caso en que la señal forzadora es un pulso cuadrado, cuando el pulso está en alto, es decir, es un 1 lógico, éste entra al nodo 4 y al nodo 5, como ejecutan la función OR, este 1 se ve reflejado en su salida. El nodo 4 propaga el 1 hacia el nodo 1 y hacia el nodo 2, con un retardo en su propagación de  $\tau_{12}$  y  $\tau_{22}$ , respectivamente. Cuando el 1 llega a los nodos 1 y 2, éstos cambia su estado por su complemento. El mismo procedimiento sucede con el

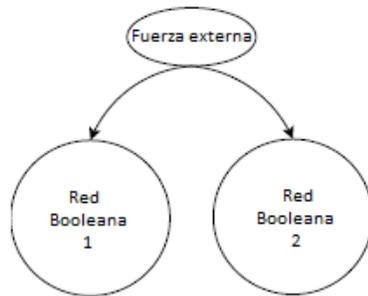


Figura 4.7: Esquema de sincronización forzado propuesto para dos redes Booleanas.

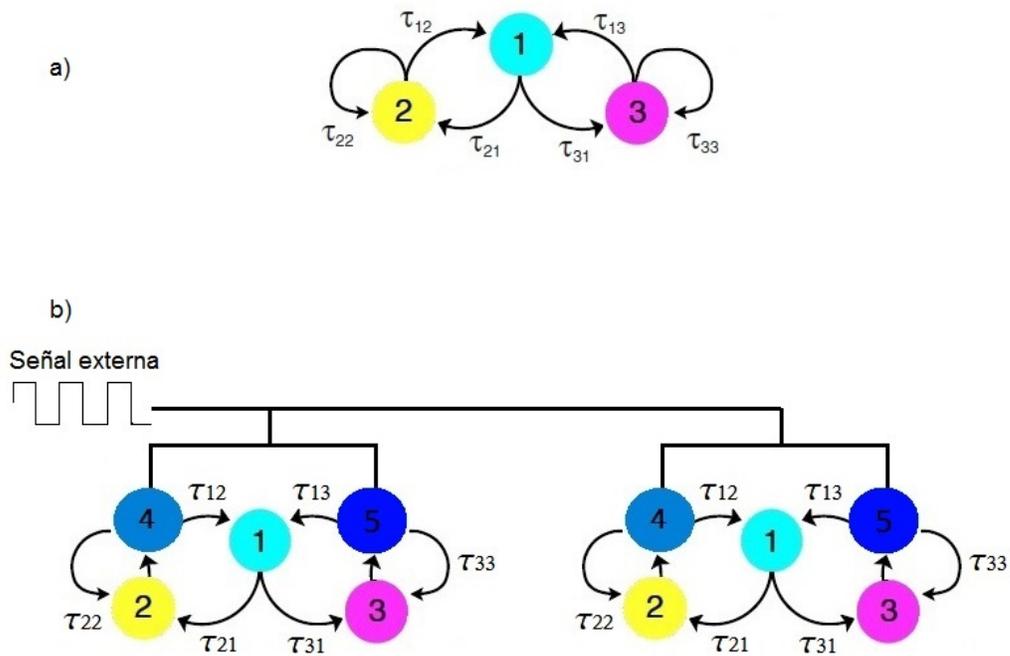


Figura 4.8: Topología para la sincronización de dos redes Booleanas.

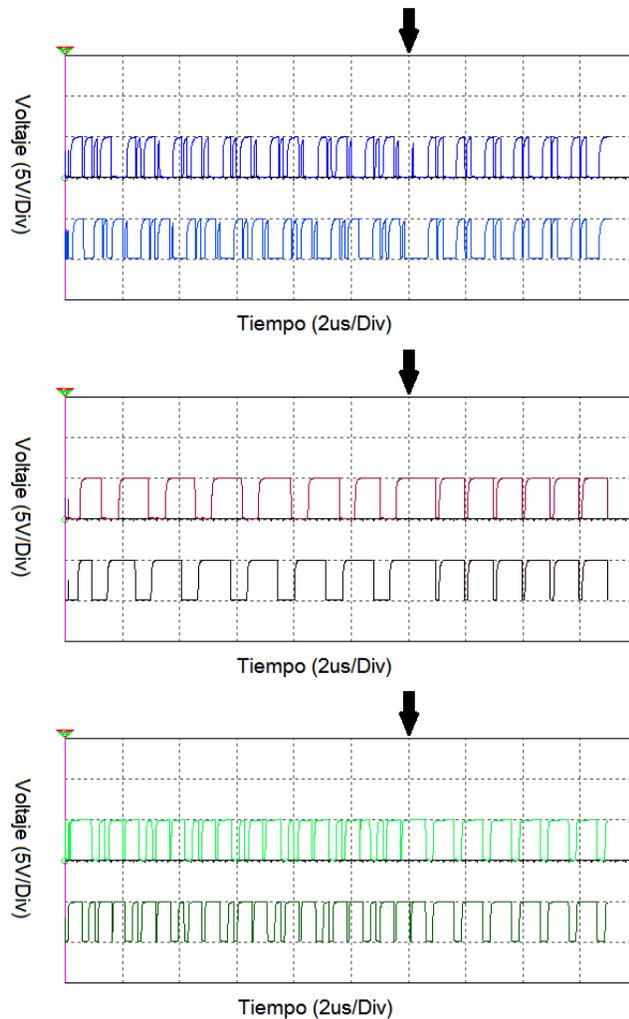


Figura 4.9: Comparativo de los estados de cada red Booleana.

nodo 5, el cual propaga la señal hacia el nodo 1 y hacia el nodo 3. En otras palabras, cuando la señal forzadora se encuentra en 1, los nodos 2 y 3 son forzados a tener el valor de 1. Este procedimiento ocurre simultáneamente en las dos redes, de manera que llega un instante en que las redes tienen el mismo comportamiento. La evolución temporal de los estados se muestra en la Figura 4.9, las flechas sobre las gráficas denotan el instante en que la señal forzadora comienza a actuar.

Partiendo de que la distancia entre dos trayectorias en el espacio de estados Booleano  $\mathbb{B}^n$  está dado como  $d(x, y) \equiv \int_0^1 (x(t) \oplus y(t)) dt = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$  y con la finalidad de detectar el fenómeno de sincronización forzada entre dos redes booleanas esclavas, se utilizaron compuertas lógicas XOR auxiliares. La salida de estas compuestas será un 1 cuando los estados sean diferentes y será un 0 si los estados son iguales. Cuando las dos redes booleanas sincronizan, las salidas de las compuertas lógicas XOR auxiliares tienden a cero. En

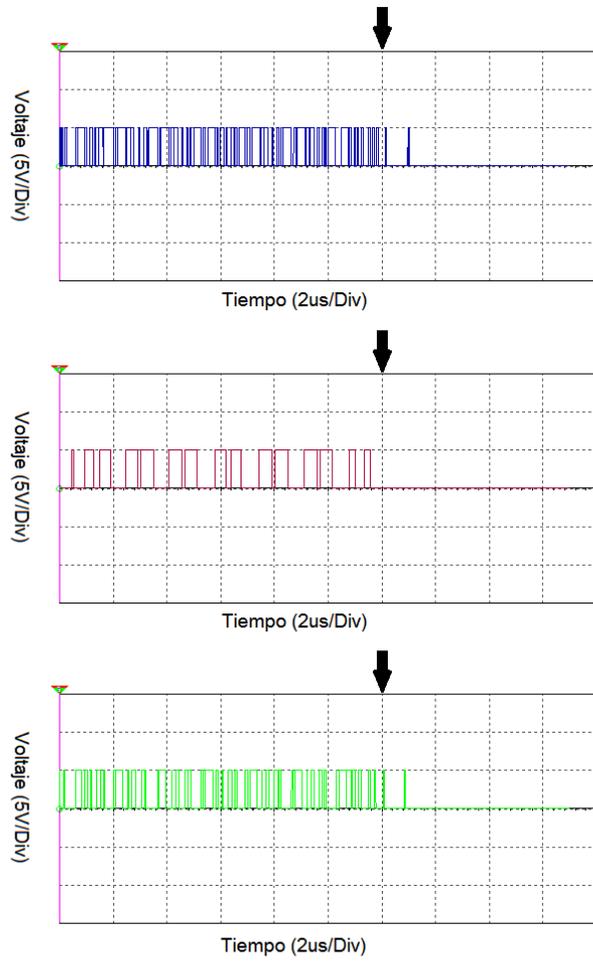


Figura 4.10: Errores entre los estados.

este caso la sincronización que alcanzan se trata de una sincronización completa.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo a futuro

### 5.1. Conclusiones

En esta tesis se estudió una red Booleana que presenta un comportamiento complejo debido a que las interacciones entre sus nodos presentan retardos de tiempo y debido también a los lazos de retroalimentación en la red. Esta red no puede ser modelada como una red Booleana síncrona porque la actualización de sus estados se realiza de manera secuencial, y no de manera paralela como en el caso de una red síncrona. Por esta razón se modeló con Ecuaciones Booleanas con Retardo.

El sistema de Ecuaciones Booleanas con Retardo (BDEs) que se utilizó para modelar la red Booleana, resultó ser una buena aproximación para identificar lo que está sucediendo en una red Booleana en la cual no existen perturbaciones, es decir, una red Booleana ideal. Basados en la teoría de BDEs propuesta por Dee, Ghil y Mullhaupt, se logró comprobar que si se tienen solamente retardos irracionales la red se comporta de manera compleja, esto es debido a que los retardos irracionales afectan directamente en número de transiciones de estado por unidad de tiempo. Sin embargo, en la realidad la red Booleana implementada electrónicamente presenta comportamientos no ideales como el rechazo a pulsos cortos, la asimetría entre estados lógicos y el efecto de degradación.

En cuanto a la sincronización de dos redes Booleanas, se propuso una forma de sincronizar las redes bajo el esquema de sincronización forzada. Utilizando una métrica adecuada para calcular la distancia entre las trayectorias se observó que la diferencia entre los estados de la red tiende a cero, es decir, se logra la sincronización completa que es el caso más sencillo de encontrar.

### 5.2. Trabajo a futuro

El trabajo a futuro referente a la caracterización de la red Booleana introduciendo variables que describan el comportamiento no ideal presente en el circuito. Es decir, plantear mecanismos para el modelado de los tres comportamientos no ideales que presenta en la realidad la red Booleana estudiada.

En esta tesis se presentaron diagramas de bifurcación numéricos para la red Booleana en el caso de que todos los retardos son racionales e irracionales. Sin embargo, no se hicieron

de manera experimental. Una propuesta para trabajo a futuro incluye la manera de realizar un diagrama de bifurcación experimental tomando como parámetro de bifurcación alguno de los retardos de la red.

Respecto a la sincronización de dos redes Booleanas, en esta tesis se utilizó el esquema de sincronización forzada. Como trabajo futuro se puede estudiar la manera de sincronizar redes Booleanas con un acoplamiento unidireccional o con un acoplamiento bidireccional. También sería importante saber bajo qué condiciones se puede lograr sincronización generalizada, es decir, buscar la manera de lograr sincronización en fase, antifase, etc.

Por el comportamiento caótico que presenta esta red Booleana experimental, ésta puede ser utilizada en la generación de secuencias pseudo-aleatorias, y estas secuencias serían una buena manera de lograr algoritmos de encriptación de información o utilizados en sistemas de comunicación.

# Bibliografía

- [1] S. H. Strogatz, “Exploring complex networks,” *Nature*, vol. 410, pp. 268–276, March 2001.
- [2] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of small-world networks,” *Nature*, vol. 393, pp. 440–442, June 1998.
- [3] A. L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, pp. 509–512, October 1999.
- [4] S. A. Kauffman, “Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 22, pp. 437–467, 1969.
- [5] R. Zhang, H. L. D. de S. Cavalcante, Z. Gao, D. J. Gauthier, J. E. S. Socolar, M. M. Adams, and D. P. Lathrop, “Boolean chaos,” *Phys. Rev. E*, vol. 80, October 2009.
- [6] H. L. D. de S. Cavalcante, D. J. Gauthier, J. E. S. Socolar, and R. Zhang, “On the origin of chaos in autonomous boolean networks,” *Philosophical Transactions of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 368, pp. 495–513, 2010.
- [7] D. Joyner, M. V. Nguyen, and N. Cohen, “Algorithmic graph theory.” Free Software Foundation, November 2008.
- [8] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books Publishing, 1994.
- [9] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–825, 1990.
- [10] I. Zaliapin, V. Keilis-Borok, and M. Ghil, “A boolean delay equation model of colliding cascade. part i: Multiple seismic regimes,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 111, pp. 815–837, May 2003.
- [11] D. Dee and M. Ghil, “Boolean difference equations i: Formulation and dynamic behavior,” *SIAM J. Appl. Math*, vol. 44, pp. 111–126, 1984.
- [12] M. Ghil and A. P. Mullhaupt, “Boolean delay equations ii: Periodic and aperiodic solutions,” *J. Stat. Phys.*, no. 41, pp. 125–173, 1985.

- [13] I. Campos-Cantón, E. Campos-Cantón, J. A. Pecina-Sánchez, and H. C. Rosu, “A simple circuit with dynamic logic architecture of basic logic gates,” *Int. J. Bif. and Chaos*, vol. 20, pp. 2547–2551, 2010.
- [14] I. Campos-Cantón, E. Campos-Cantón, H. C. Rosu, and E. Castellanos-Velasco, “Set-reset flip-flop with a simple output logic,” *Circuits Syst Signal Process*, 2010.
- [15] S. Sahoo, P. P. Choudhury, and M. Chakraborty, “Characterization of any non-linear boolean function using a set of linear operators,” pp. 1–12, 2008.
- [16] B. Luque and R. V. Solé, “Lyapunov exponents in random boolean networks,” *Physica A*, no. 284, pp. 33–45, 2000.
- [17] S. H. Strogatz, *Sync: how order emerges from chaos in the universe, nature and daily life*. 1st. ed. ed., 2003.
- [18] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*. 2001.
- [19] J. S. G. Salas, E. Campos-Cantón, F. C. O. Salazar, and I. Campos-Cantón, “Forced synchronization of a self-sustained chaotic oscillator,” *Chaos*, vol. 023136, no. 18, pp. 1–9, 2008.
- [20] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, “The synchronization of chaotic systems,” *Physics Reports*, no. 366, pp. 1–101, 2002.