



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

El Polinomio Corchete en 4-Trenzas

Tesis que presenta

Alejandra del Carmen Arreola Delgado

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

San Luis Potosí, S.L.P., 18 de Enero de 2012



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **El Polinomio Corchete en 4-Trenzas** presentada para obtener el Grado de Maestra en Ciencias Aplicadas en la opción Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Alejandra del Carmen Arreola Delgado** y aprobada el **18 de Enero de 2012** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
(Asesor de tesis)

Dr. Gil Salgado González
(Sinodal)

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
(Sinodal)

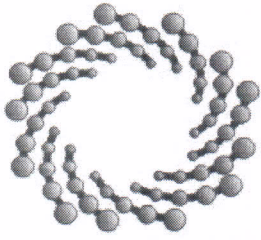
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
(Sinodal)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección de la Dr. Hugo Cabrera Ibarra.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 333589 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 025 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 18 días del mes de enero del año 2012, se reunió a las 17:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Presidente	IPICYT
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Secretario	IPICYT
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	Sinodal	IPICYT
Dr. Gil Salgado González	Sinodal externo	UASLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

Alejandra del Carmen Arreola Delgado

sobre la Tesis intitulada:

El Polinomio Corchete en 4-Trenzas

que se desarrolló bajo la dirección de

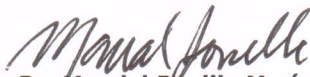
Dr. Hugo Cabrera Ibarra

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 18:10 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los días del mes de de .


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dedicatorias

A mi ángel en el cielo (mi Mamá Alba Delgado) y mi ángel en la tierra (mi Papá Joaquín Arreola).

Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Hugo Cabrera Ibarra por el apoyo incondicional y enseñanzas brindadas.

A mis sinodales el Dr. Gil Salgado González, el Dr. David Antonio Lizárraga Navarro y el Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar por sus aportaciones y comentarios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo de beca de maestría otorgada para realizar mis estudios de posgrado y al Instituto Potosino de Investigación científica y tecnológica (IPICyT) por el apoyo brindado a lo largo de mi estancia.

A mi familia (Marco, Lucía, Joaquín, Gabriel, Francis y Rosario) por siempre apoyarme, a la familia García Cuevas y sobre todo a mis Padres Joaquín y Alba que siempre me dieron una guía espiritual y apoyo incondicional a lo largo de mi vida.

Resumen

Un n -ovillo es una pareja $(B^3; T)$ donde B^3 es la bola unitaria en \mathbb{R}^3 y T es un conjunto de n arcos propiamente encajados en B^3 . Un n -ovillo es llamado racional si, incluso moviendo ∂B^3 , puede ser deformado en un n -ovillo que posee una proyección en donde sus cuerdas no tienen ningún cruce. Las n -trenzas son un subconjunto de los n -ovillos racionales.

El polinomio corchete de Kauffman es un invariante bajo isotopía regular que ha sido usado para obtener una clasificación de las 3-trenzas y de los 2-ovillos racionales, note que las 2-trenzas son un caso particular de los 2-ovillos racionales. En el caso de los 3-ovillos, el polinomio corchete de Kauffman es una función que, dado un 3-ovillo, le asigna cinco polinomios obtenidos de aplicar las relaciones del corchete al ovillo que corresponden a la descomposición del álgebra de los diagramas con una base de cinco 3-ovillos. Por otro lado, para el caso de los 4-ovillos, hay catorce polinomios, en lugar de cinco como en el caso de 3-ovillos, asociados a la base correspondiente de catorce 4-ovillos.

En esta tesis se generaliza, de manera parcial, la clasificación de 3-trenzas al caso de las 4-trenzas. Más aún, dada una 4-trenza se le asocia una matriz, que es un invariante de la 4-trenza, y esta asignación tiene la propiedad de ser un homomorfismo entre las 4-trenzas y las matrices. Con este invariante se hizo la clasificación de algunas familias de 4-trenzas.

Abstract

An n -tangle is a pair (B^3, T) , where B^3 is the 3-ball and T is a set of n disjoint properly embedded arcs in B^3 . An n -tangle is called rational if, by even moving ∂B^3 , it can be deformed into an n -tangle which possesses a projection with no crossings. n -Braids are a subset of rational n -tangles.

The Kauffman bracket polynomial is an invariant under regular isotopy which has been used to obtain a classification of the 3-braids and rational 2-tangles, note that 2-braids are a particular case of rational 2-tangles. In the 3-tangle case, the Kauffman bracket polynomial is a function which, given a 3-tangle, assigns to it five polynomials obtained by applying the bracket relations to the tangle and corresponding to the algebra decomposition of the diagram with certain base of five 3-tangles. On the other hand, for the 4-tangle case there are fourteen polynomials, instead of five as in the 3-tangle case, associated to the corresponding base of fourteen 4-tangles.

In this thesis we partially generalize the classification of 3-braids to 4-braids. Moreover, given a 4-braid a matrix, which is an invariant of the 4-braid, is associated to it and this assignation is a homomorphism between 4-braids and matrices. By using this invariant some 4-braids families are classified.

Índice general

Portada	I
Constancia de aprobación de la tesis	III
Créditos Institucionales	V
Acta de examen	VII
Dedicatoria	IX
Agradecimientos	XI
Resumen	XIII
Abstract	XIV
1. Introducción	2
2. Teoría de Nudos	5
2.1. Nudos	5
2.2. Ovillos.	6
2.2.1. Ovillos racionales.	7
2.3. Trenzas.	7
3. Antecedentes	9
3.1. El polinomio corchete de Kauffman.	9
3.2. Polinomio corchete de 3-ovillos.	11
3.3. 3-Trenzas.	13
3.4. Fracciones continuas	14
4. 4-Ovillos.	17
4.1. Polinomio corchete de Kauffman de 4-ovillos.	17
4.2. Identificación de un invariante.	19
4.3. Polinomio corchete de la suma de dos 4-ovillos.	20
4.4. Matriz de la suma de dos diagramas de 4-ovillos.	24

5. 4-Trenzas.	26
5.1. Clase de equivalencia de una matriz.	26
5.2. Algunas familias de 4-trenzas.	27
5.3. Subconjuntos de 4-trenzas	32
6. Clasificación de un subconjunto de las 4-trenzas.	36
6.1. Matrices asignadas a 4-trenzas que son imagen de I_i e I^s	36
6.2. Matrices asignadas a ciertas sumas de 4-trenzas	53
7. Conclusiones	71
Apéndice	72
A. Implementación del software Maple como ayuda auxiliar en la clasificación de las 4-Trenzas.	73
Bibliografía	76

Capítulo 1

Introducción

La topología es la rama de las matemáticas que estudia aquellas propiedades que se mantienen al deformar un cuerpo, sin romper éste. Una parte importante de la topología se ha dedicado a investigar la teoría de nudos. A pesar de que las personas han estado haciendo uso de nudos desde el inicio de los tiempos, el actual estudio matemático de nudos es relativamente joven, aproximadamente 100 años en contraste con más de 1000 años de estudio de la geometría Euclidiana y de la teoría de números, por ejemplo: en el siglo XIX los físicos se preguntaban sobre la naturaleza de los átomos. Lord Kelvin, uno de los principales físicos de ese tiempo, propuso en 1867 la ambiciosa idea de que los átomos eran vórtices tubulares de éter anudados. Por esta razón las primeras tablas de nudos y enlaces estaban pensadas como una tabla de elementos [8]. Después de que la teoría de Kelvin fue descartada como teoría atómica, el estudio de los nudos se convirtió en una rama de las matemáticas puras.

La teoría de nudos, en esencia, es el estudio de los aspectos geométricos de los tipos de nudos. No sólo se ha desarrollado y crecido la teoría de nudos a través de los años en este aspecto, pero sólo en las matemáticas actuales del estudio de la teoría de nudos ha sido demostrado que tiene aplicaciones en varias ramas de la ciencia, por ejemplo, las moléculas de ADN, física, biología molecular, química, etc. [2].

En 1923, Reidemeister probó que dos diagramas representan a un mismo nudo si y sólo si difieren en una secuencia de movimientos de tres tipos, mostrados en la Figura 1.1. Esto pareció facilitar en gran medida uno de los principales problemas de teoría de Nudos que es el de la equivalencia de los mismos, pero en realidad no fue así. Sin embargo, es útil proyectar los nudos en el plano y después estudiarlos mediante sus diagramas regulares. Para hacer esto necesitamos preguntarnos cómo se transforma el diagrama regular de un nudo; si lo transformamos mediante una isotopía en otro nudo equivalente en posición regular mediante las movidas de Reidemeister podríamos lograr esto. Con la ayuda de dichos movimientos, muchos invariantes de nudos fueron definidos. Para demostrar que algo es un invariante de nudos sólo basta observar que no cambia al aplicarle los movimientos de Reidemeister.

En 1928 la teoría topológica moderna de nudos empieza a tener importancia con uno de sus principales descubrimientos, el polinomio de Alexander de un nudo o enlace, el cual fue un invariante de nudos muy útil y simplificó grandemente la clasificación de los nudos. A partir de aquí se han encontrado importantes aportaciones a la teoría de nudos y como principales impulsores de esta teoría se debe mencionar a Reidemester (1932), H. Seifert, H. Schubert y Ralph H. Fox [9].

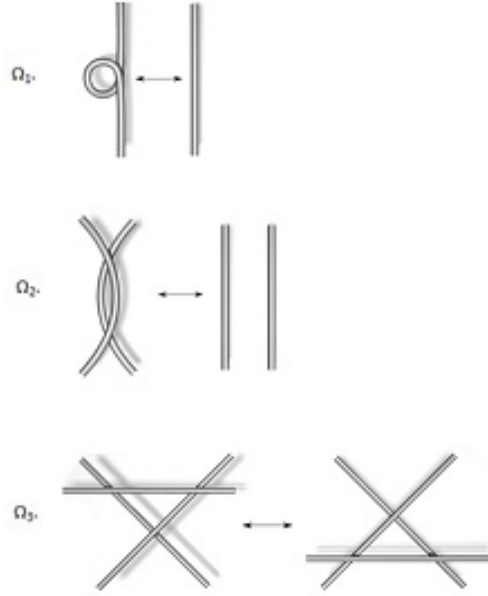


Figura 1.1: Movidas de Reidemeister

A finales de los 60s y en los inicios de los 70s John H. Conway persiguió el objetivo de formar una tabla completa de nudos. Los invariantes de nudos descubiertos hasta ese momento no eran suficientes para lograr este objetivo, por lo que John H. Conway introdujo el concepto de ovillos. Usando esta nueva variación en un nudo, una nueva clase de nudos pudieron ser definidos: nudos algebraicos. Estudiando esta clase de nudos se resolvieron varios problemas locales. Esto dio lugar a un salto más en el nivel de entendimiento de la teoría de nudos [2]. John H. Conway definió que un n-ovillo es una pareja (B^3, T) , en donde B^3 es la bola unitaria en \mathbb{R}^3 , y T es un conjunto de n arcos propiamente encajados en B^3 .

En 1970 nace la teoría combinatoria de nudos donde destaca de manera especial John H. Conway, Vaughan F. R. Jones y Louis H. Kauffman. En particular, en este trabajo se trata el polinomio corchete de Kauffman aplicado a 4-trenzas.

El polinomio corchete de Kauffman es una función del espacio de diagramas no orientados a polinomios el cual se demostró que es un invariante bajo isotopía regular. Dicho polinomio se ha utilizado en la clasificación de los 2-ovillos racionales [3]. En [5] se da una generalización del caso de los 2-ovillos al caso de algunas familias de 3-ovillos. La motivación de este trabajo fue basada en estos resultados, surge la duda ¿El proceso se extiende de igual manera al caso de 4-trenzas?, esta es la pregunta en la que este trabajo se centra.

El objetivo principal de esta tesis es:

Utilizar los resultados obtenidos en cuanto a clasificación que se tienen para 2 y 3-ovillos racionales [3, 5] y generalizarlos al caso de 4-trenzas.

La presente tesis está comprendida de 7 capítulos. En el capítulo 2 se dan los preliminares básicos para la mejor comprensión de este trabajo, así como los conceptos más básicos de la teoría de nudos. En el capítulo 3 encontraremos los antecedentes necesarios para el desarrollo de este trabajo de tesis. En el capítulo 4 se muestra paso a paso el camino para la asignación

de un invariante. En el capítulo 5 se muestran diferentes tipos de familias de 4-trenzas. En el capítulo 6 se ve la clasificación de algunas familias de 4-trenzas. Finalmente en el capítulo 7 se discuten las aportaciones de este trabajo de tesis y se da un panorama sobre el posible trabajo futuro a realizar basándose en lo aquí abordado.

Capítulo 2

Teoría de Nudos

2.1. Nudos

Cuando hablamos de nudos se nos viene a la cabeza la imagen de los nudos de marinero, los enredados cables de electricidad los cuales son muy difíciles de desanudar e incluso unos nudos más simples, como los de las agujetas de nuestros zapatos; este concepto de nudo no se aleja en mucho al concepto matemático de nudo.

Continuando con una precisa interpretación (matemática) de nudo, consideraremos a un nudo como un subconjunto del espacio tridimensional el cual es homeomorfo al círculo Figura 2.1(a). La definición formal es la siguiente:

Definición 1. *Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un nudo, si existe un homeomorfismo entre el círculo unitario S^1 y K . Donde S^1 es el conjunto de puntos (x, y) en el plano \mathbb{R}^2 que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ [4].*

De ahora en adelante, se pensará en esta definición para referirnos a un nudo, y veremos a este como una proyección en el plano como se muestra en la Figura 2.1(b), en la cual se aprecia un nudo en \mathbb{R}^3 y su proyección en el plano \mathbb{R}^2 .

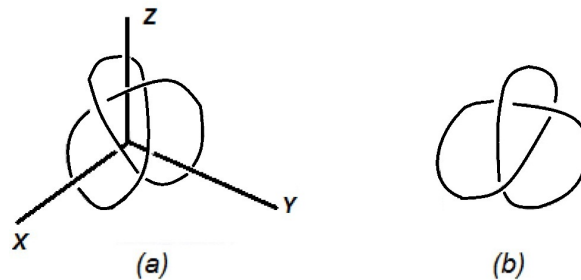


Figura 2.1: (a) nudo trébol, (b) nudo trébol proyección en el plano.

En la Figura 2.2 podemos observar ejemplos de nudos, el primero es el nudo trébol (Figura 2.2(a)), el segundo es uno de los nudos conocidos como el par de Perko (Figura 2.2(b)) y en la última imagen tenemos la micrografía de un nudo de ADN desde un microscopio electrónico (Figura 2.2(c)), el cual es un ejemplo de la aplicación de la teoría de nudos.

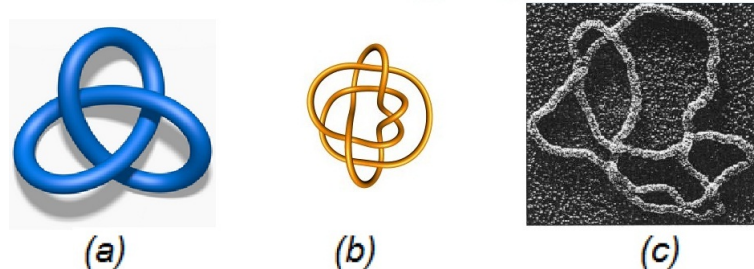


Figura 2.2: (a) nudo trébol, (b) uno de los nudos del par de Perko, (c) vista de ADN.

2.2. Ovillos.

Un ovrillo es una parte de un nudo, por medio de ovillos podemos formar nudos o enlaces de una forma similar al de hacer una construcción de un edificio bloque a bloque. Usando el concepto de ovrillo en nudos, una nueva clase de nudos pueden ser definidos: nudos algebraicos. Sin embargo debido a que existen nudos que no son algebraicos, la clasificación completa de nudos podría no ser realizada. No obstante la investigación de ovillos en la teoría de nudos ha sido de gran importancia. En particular el concepto de ovrillo es una pieza clave para este trabajo ya que su desarrollo está basado en esta parte de la teoría de nudos.

Definición 2. Un n -ovrillo es un par (B^3, T) donde B^3 es una 3-bola y T es un conjunto de n -curvas poligonales disjuntas que interseccionan a B^3 [4]. Ver Figura 2.3.

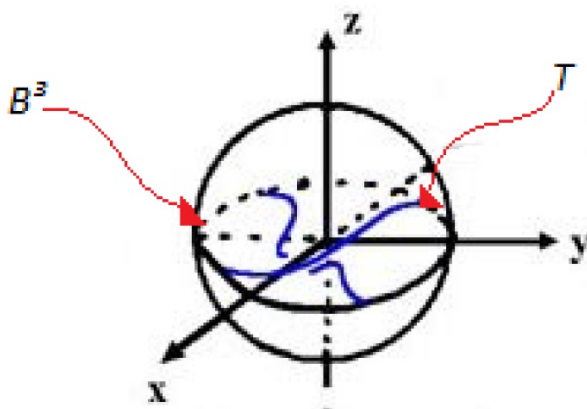


Figura 2.3: Un 2-ovrillo en \mathbb{R}^3

Existen tres tipos de ovillos: racionales, localmente anudados y primos; en este trabajo de tesis nos enfocamos en los ovillos racionales. Al igual que en los nudos, se puede trabajar con una proyección de los ovillos en el plano YZ para mayor facilidad, en la Figura 2.4 se observan tres ejemplos de la proyección de ovillos al plano.

2.2.1. Ovillos racionales.

Cuando hablamos de ovillos racionales nos referimos a los ovillos cuyas cuerdas incrustadas pueden ser deformadas en la vecindad de sus extremos hasta obtener el ovillo trivial, el cual es un ovillo con una proyección en donde sus cuerdas no tienen ningún cruce. En la Figura 2.4 se muestran ejemplos de ovillos racionales.

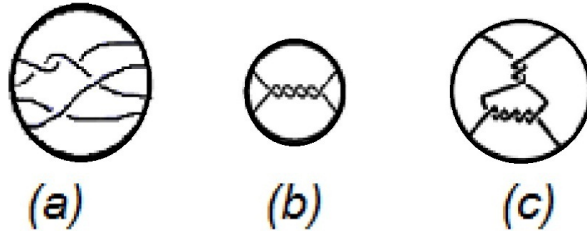


Figura 2.4: (a) 4-ovillo racional, (b) 2-ovillo racional, (c) 2-ovillo racional (proyecciones al plano)

Las trenzas son un subconjunto de los ovillos racionales. Al igual que con los ovillos. Las trenzas son una forma estándar de formar nudos y enlaces, por lo que tienen una gran importancia en la teoría de nudos.

2.3. Trenzas.

Al principio de la década de los 30's, E. Artin introdujo el concepto de trenza para aplicarlo al estudio de los nudos. Más tarde, en los 50's, se encontró que la teoría de trenzas tenía aplicaciones en diferentes áreas y eso impulso nuevas investigaciones al respecto, pero no fue hasta en 1984 cuando este concepto terminó de florecer e inicio con constante actividad en su estudio e investigación de aplicaciones [2]. En este trabajo se pretende clasificar a ciertas familias de trenzas, en lo que abundaremos en los capítulos siguientes; por lo que en esta sección nos introduciremos a los aspectos más básicos de las trenzas.

Definición 3. *Considérese un cubo unitario B en \mathbb{R}^3 . En la tapa izquierda de B señale n puntos A_1, A_2, \dots, A_n y otros n puntos A'_1, A'_2, \dots, A'_n en la tapa del lado derecho. Una n -trenza es una colección de cuerdas no anudadas que van cada una a partir de uno de los puntos A_1, A_2, \dots, A_n de la tapa izquierda de B y llegan cada una a un punto diferente de los n puntos A'_1, A'_2, \dots, A'_n de la tapa derecha, (Figura 2.5) [2].*

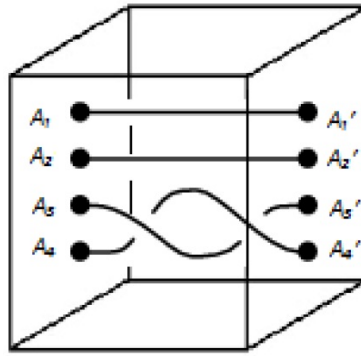


Figura 2.5: Una 4-trenza

De forma similar a los ovillos y nudos, podemos tomar un diagrama regular de trenzas como su proyección en \mathbb{R}^2 , ejemplos de esto se muestran en la Figura 2.6.

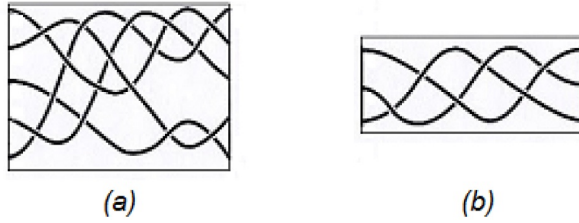


Figura 2.6: (a) Una 5-trenza, (b) 3-trenza (proyecciones en el plano)

Capítulo 3

Antecedentes

3.1. El polinomio corchete de Kauffman.

En 1984, casi medio siglo en que el foco principal de la teoría de nudos eran los derivados de los invariantes por ejemplo, el polinomio de Alexander, Vaughan F.R. Jones anunció el descubrimiento de un nuevo invariante. En lugar de seguir la propagación de la teoría pura de nudos, este nuevo invariante y sus ramificaciones posteriores mostraron conexiones a varias disciplinas aplicadas [2]. El polinomio corchete de Kauffman es esencialmente el polinomio corchete de Jones, sin embargo, este polinomio tiene ciertas propiedades especiales para algunos tipos particulares de nudos, tales como nudos alternantes y enlaces. Consecuentemente con ovillos y trenzas, donde este polinomio ha tenido un gran impacto. En esta sección se verá con mayor detalle las propiedades del corchete de Kauffman.

Si transformamos un diagrama de nudo en otro por medio de las movidas de Reidemeister Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 (Figura 1.1), y sus inversas, entonces éstos son equivalentes. Por esto se busca investigar en qué manera las tres movidas de Reidemeister afectan una función, especialmente desde sus características completamente diferentes en varios de sus aspectos. El modo más natural de definir un invariante es asociar a cada diagrama, un objeto matemático, de manera que el objeto asociado sea el mismo, si dos diagramas difieren en un movimiento de Reidemeister, es decir, si representan el mismo nudo, ovillo o trenza. Uno de estos famosos invariantes fue descubierto por Louis H. Kauffman. El corchete de Kauffman no es realmente un invariante, o mejor dicho, es un invariante bajo isotopía regular, ya que cambia si un diagrama se modifica mediante la movida Ω_1 de Reidemeister. Louis H. Kauffman llegó a la siguiente importante observación.

Definición 4. *Una movida se llama regular si es una movida de Reidemeister del tipo Ω_2 y Ω_3 o su inversas movidas regulares. Entonces, si se puede obtener un diagrama regular D' de la aplicación de un número finito de veces de movidas regulares de Reidemeister a un diagrama regular D de algún nudo, se dice que D y D' son regularmente equivalentes [2].*

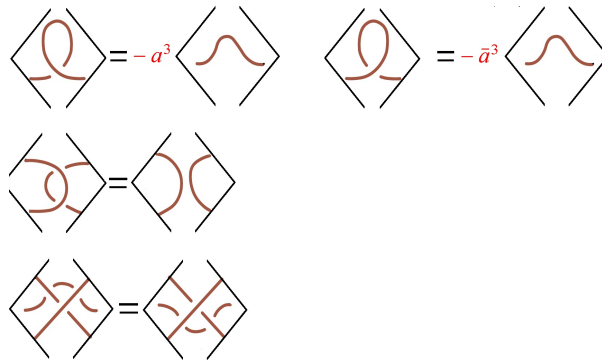
Definición 5. *El polinomio corchete de Kauffman es una función de diagramas no orientados a polinomios de Laurent con coeficientes enteros en una indeterminada a . Esto mapea un diagrama D a $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}]$ y está caracterizado por las siguientes tres condiciones:*

$$\begin{aligned}
1. \quad \langle \bigcirc \rangle &= 1, \\
2. \quad \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= -(\alpha^2 + \alpha^{-2}) \langle D \rangle, \\
3. \quad \langle \times \rangle &= \alpha \langle \succ \rangle + \alpha^{-1} \langle \prec \rangle.
\end{aligned}$$

Figura 3.1: Condiciones del corchete de Kauffman.

Donde \bigcirc es el diagrama del nudo trivial que no tiene cruces y $D \sqcup \bigcirc$ es el diagrama que consta de un diagrama de nudo D en unión disjunta con un diagrama de nudo trivial [1].

En relación con las tres movidas de Reidemeister, el polinomio corchete de Kauffman cumple con las siguientes identidades:



Esto muestra que el polinomio corchete de Kauffman es un invariante bajo isotopía regular [3]. Note que estos diagramas forman parte de un diagrama de nudo u ovrillo y ambos diagramas son idénticos salvo por la parte mostrada.

Cuando tenemos un diagrama de nudo D decimos que su polinomio corchete de Kauffman $\langle D \rangle$ es aquel que obtenemos al aplicar las tres condiciones mostradas en la Figura 3.1 y deshacer sus cruces hasta llegar a un diagrama sin ningún cruce.

Ejemplo 1. En la Figura 3.2 se muestra un ejemplo de la obtención del polinomio corchete de Kauffman en el nudo trébol donde podemos ver claramente que se van deshaciendo los cruces bajo las condiciones mencionadas. En el primer cruce encerrado en un círculo se utiliza la condición 3 de la Figura 3.1, lo que nos da como resultado dos diagramas, cada uno de ellos con el cruce deshecho respectivamente como lo marca la condición; así sucesivamente en cada diagrama que nos resulta al deshacer el diagrama anterior, elegimos un cruce y dependiendo de él utilizamos la condición necesaria hasta llegar a obtener el polinomio asignado al nudo. Como podemos notar el polinomio corchete del nudo trébol es $(a^7 - a^{-5} - a^3)$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \text{Trefoil} \right\rangle &= a \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle + a^{-1} \left\langle \text{Diagram 2} \right\rangle = \\
&= a(-a^3) \left\langle \text{Diagram 3} \right\rangle + a^{-1}(a^{-1}) \left\langle \text{Diagram 4} \right\rangle + a^{-1} \left\langle \text{Diagram 5} \right\rangle + \\
&= [a(-a^3)(-a^3) - a^3 + a^{-2}(-a^3)] \left\langle \text{Circle} \right\rangle = a^7 - a^{-5} - a^3
\end{aligned}$$

Figura 3.2: Corchete del nudo Trébol.

3.2. Polinomio corchete de 3-ovillos.

Al igual que en nudos podemos aplicar el corchete de Kauffman en ovillos hasta deshacer los cruces de las n -curvas dentro del n -ovillo y obtendremos su polinomio; en particular en el caso de 3-ovillos se puede asignar una variación del polinomio corchete, y obtener una base del algebra de los diagramas con las fórmulas recursivas mostradas en Figura 3.1 hasta obtener cero cruces; note que no se usa la condición 1 ya que, por ser ovillo, nunca se llega a tener el nudo trivial. En este caso la base obtenida de la descomposición de los diagramas de 3-ovillos hasta no tener ningún cruce entre sus cuerdas se muestra en la Figura 3.3 y la definición de su polinomio es la siguiente.

Dado un diagrama D de 3-ovillos se define su polinomio corchete como:

$$\langle D \rangle = p_1(D) \langle \hat{p}_1 \rangle + p_2(D) \langle \hat{p}_2 \rangle + p_3(D) \langle \hat{p}_3 \rangle + p_4(D) \langle \hat{p}_4 \rangle + p_5(D) \langle \hat{p}_5 \rangle$$

Donde $p_1(D), \dots, p_5(D)$ son polinomios y $\hat{p}_1 \dots \hat{p}_5$ son los diagramas de 3-ovillos siguientes [1].

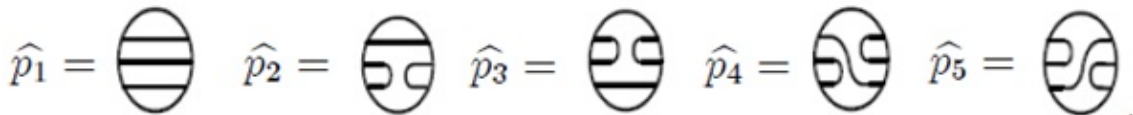


Figura 3.3: Base de cinco 3-ovillos.

Dado el polinomio corchete de 3-ovillos se puede ir en búsqueda de un invariante, el cual en este caso fue el grupo de las matrices.

Dado un diagrama D de 3-ovillos se puede asignar a éste la siguiente matriz:

$$M_3(D) = \begin{pmatrix} p_1(D) + p_4(D) & p_2(D) & 0 \\ p_3(D) & p_1(D) + p_5(D) & 0 \\ 0 & 0 & p_1(D) \end{pmatrix}$$

Donde $p_1(D) \dots p_5(D)$ son los polinomios obtenidos al aplicar las propiedades del polinomio corchete de Kauffman a un 3-ovillo. Por otra parte la matriz $M_3(D)$ es un invariante bajo isotopía regular. En [5] existe un análisis más extenso sobre esto.

De forma similar al polinomio corchete de un diagrama de 3-ovillo, se puede obtener también el polinomio corchete de la suma de dos diagramas. Para esto es necesario ver la siguiente definición.

Definición 6. *Dados dos diagramas de 3-ovillos D_1 y D_2 se puede obtener (a través de estos dos diagramas) un tercero, denotando éste por $D_1 + D_2$, usando la construcción mostrada en la Figura 3.4.*

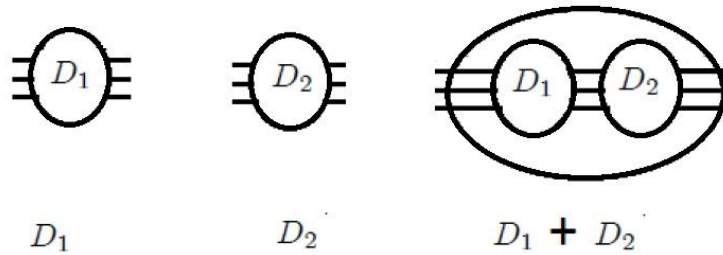


Figura 3.4: Suma de dos digramas de 3-Ovillos.

Dados dos diagramas D_1 y D_2 , el polinomio corchete de su suma es:

$$D_1 + D_2 = (p_1 q_1) \hat{p}_1 + (p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_2 q_5 + p_4 q_2) \hat{p}_2 + (p_1 q_3 + p_3 q_1 + p_3 q_4 + p_5 q_3) \hat{p}_3 + (p_1 q_4 + p_2 q_3 + p_4 q_1 + p_4 q_4) \hat{p}_4 + (p_1 q_5 + p_3 q_2 + p_5 q_1 + p_5 q_5) \hat{p}_5 + (p_2 q_2 + p_4 q_5) \hat{p}_2 + (p_3 q_3 + p_5 q_4) \hat{p}_3 + (p_2 q_4 + p_4 q_3) \hat{p}_4 + (p_3 q_5 + p_5 q_2) \hat{p}_5$$

Donde p_1, p_2, \dots, p_5 y q_1, q_2, \dots, q_5 son los polinomios obtenidos al aplicar las propiedades del polinomio corchete de Kauffman a los 3-villos D_1, D_2 y $\hat{p}_1 \dots \hat{p}_5$ son los diagramas de 3-ovillos mostrados en la Figura 3.3.

Por la definición de $M_3(D)$ se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1. *Dados dos diagramas D_1 y D_2 se tiene:*

$$M_3(D_1 + D_2) = M_3(D_1) M_3(D_2) +$$

$$d \begin{pmatrix} p_4(D_1) & p_2(D_1) & 0 \\ p_3(D_1) & p_5(D_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4(D_2) & p_2(D_2) & 0 \\ p_3(D_2) & p_5(D_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde $d = -(a^2 + a^{-2})$, y

$$M_3(D_i) = \begin{pmatrix} p_1(D_i) + p_4(D_i) & p_2(D_i) & 0 \\ p_3(D_i) & p_1(D_i) + p_5(D_i) & 0 \\ 0 & 0 & p_1(D_i) \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a D_i para $i = 1, 2$.

Ahora bien, si se evalúa a en \sqrt{i} tenemos que $d = -(a^2 + a^{-2}) = 0$, por lo que se define como M'_3 a la matriz M_3 evaluada en $a = \sqrt{i}$ se tiene:

Lema 1. *Dados cualquiera dos diagramas de 3-ovillos D_1 y D_2 se tiene:*

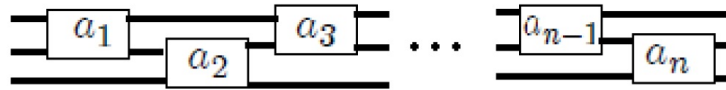
$$M'_3(D_1 + D_2) = M'_3(D_1)M'_3(D_2)$$

Como se menciono en el capítulo anterior, las trenzas son una clase particular de los ovillos racionales, por lo que se puede pensar en éstos como tal.

3.3. 3-Trenzas.

Como se ha visto, la clasificación de algunas familias de las trenzas es el centro de este trabajo. En la actualidad no existe un estudio abundante sobre este tema, sin embargo ya se tiene la clasificación de 2-trenzas y 3-trenzas. A continuación se verán algunas de las clasificaciones estudiadas en [1] sobre 3-trenzas.

Dada una 3-trenza se tiene:



Donde:

$$a_j = \begin{cases} \begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} & |a_j| \text{ cruces } a_j > 0 \\ \begin{array}{l} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} & |a_j| \text{ cruces } a_j < 0 \\ \text{|||} & a_j = 0 \\ \begin{array}{l} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} & |a_j| \text{ cruces } a_j > 0 \\ \begin{array}{l} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} & |a_j| \text{ cruces } a_j < 0 \end{cases}$$

En adelante, para una 3-trenza T , $T \cong \mathcal{T}(a_1, \dots, a_n)$, para algún $a_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, n$.

Lema 2. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$M'_3(T(n)) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M'_3(T(0, n)) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{n}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4. Fracciones continuas

El nombre de ovillos racionales surge del hecho de que para un 2-ovillo se le asigna a éste un número racional; dada esta asignación existe una correspondencia biyectiva entre los 2-ovillos racionales y $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Si se tiene un número $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$ entonces existen cuando mucho dos fracciones continuas que lo representan ([10], p.327). Si $[a_1, \dots, a_n] > 0$ es una fracción continua de q donde $a_n > 1$ entonces $q = [a_1, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_n - 1, 1]$. De esto se desprende la siguiente definición.

Definición 7. Dos fracciones continuas $[a_1, \dots, a_n]$ y $[b_1, \dots, b_m]$ están CL relacionadas si:

$$m = n + 1 \text{ y } a_i = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Utilizando la definición anterior se encuentran las fracciones continuas corta y larga que estén relacionadas entre sí, lo que será de gran utilidad al momento en que, a partir de una matriz, se quiera llegar a una trenza correspondiente a esta matriz.

Dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{Z}$ se define:

$$\begin{aligned} N[a_1] &= a_1 & D[a_1] &= 1 \\ N[a_1, a_2] &= a_2 N[a_1] + 1 & D[a_1, a_2] &= a_2 D[a_1] \\ N[a_1, a_2, a_3] &= a_3 N[a_1, a_2] + N[a_1] & D[a_1, a_2, a_3] &= a_3 D[a_1, a_2] + D[a_1]. \end{aligned}$$

Si $N[a_{-1}] = 0, N[a_0] = 1, D[a_{-1}] = 1$ y $D[a_0] = 0$ se obtienen las siguientes fórmulas:

$$N[a_1, \dots, a_n] = a_n N[a_1, \dots, a_{n-1}] + N[a_1, \dots, a_{n-2}], n \geq 1, \quad (3.1)$$

$$D[a_1, \dots, a_n] = a_n D[a_1, \dots, a_{n-1}] + D[a_1, \dots, a_{n-2}], n \geq 1 \quad (3.2)$$

Note que:

$$\frac{N[a_1, \dots, a_n]}{D[a_1, \dots, a_n]} = [a_1, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Se da la siguiente notación.

$$A_n = [a_1, \dots, a_n] \text{ con } a_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Tomando en cuenta que $A_n = [a_1, \dots, a_n]$ entonces se tiene que para una 3-trenza T , $T \cong \mathcal{T}A_n$. Además se tiene que las fórmulas 3.1 y 3.2 pueden ser vistas como:

$$NA_n = a_n NA_{n-1} + NA_{n-2}, \quad DA_n = a_n DA_{n-1} + DA_{n-2}, \quad n \geq 1, \quad (3.3)$$

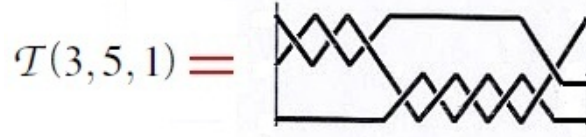
Entonces $NA_n/DA_n = A_n$. Con esta notación se tiene lo siguiente:

Lema 3. Dadas $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \text{para } n \text{ impar} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_n}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} DA_n & iDA_{n-1} & 0 \\ -iNA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \text{Para } n \text{ par} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_2}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_n}{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} DA_{n-1} & iDA_n & 0 \\ -iNA_{n-1} & NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En los siguientes ejemplos se muestran las matrices asociadas a dos 3-trenzas diferentes.

Ejemplo 2. Dada la siguiente trenza:



Por el Lema 3 su matriz M'_3 asociada es:
ya que en este caso $n=3$ y es impar

$$M'_3 = \begin{bmatrix} DA_3 & iDA_2 & 0 \\ -iNA_3 & NA_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:


$$\begin{aligned}
 DA_1 &= D[a_1] = 1 \\
 DA_2 &= D[a_1, a_2] = a_2 D[a_1] = a_2 = 5 \\
 DA_3 &= D[a_1, a_2, a_3] = a_3 D[a_1, a_2] + D[a_1] = a_3(5) + 1 = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NA_1 &= N[a_1] = a_1 = 3 \\
 NA_2 &= N[a_1, a_2] = a_2 N[a_1] + 1 = a_2(3) + 1 = 5(3) + 1 = 16 \\
 NA_3 &= N[a_1, a_2, a_3] = a_3 N[a_1, a_2] + N[a_1] = a_3(16) + 3 = 19
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores se obtiene:

$$M'_3 = \begin{bmatrix} 6 & i5 & 0 \\ -i19 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Dada la siguiente trenza:

$$\mathcal{T}(2, 3, 1, 1) = \text{Diagrama de trenza}$$


Por el Lema 3 su matriz M'_3 asociada es:
dado que $n=4$ se encuentra en el caso n par por lo que:

$$M'_3 = \begin{bmatrix} DA_3 & iDA_4 & 0 \\ -iNA_3 & NA_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} DA_1 &= D[a_1] = 1 \\ DA_2 &= D[a_1, a_2] = a_2 D[a_1] = a_2 = 3 \\ DA_3 &= D[a_1, a_2, a_3] = a_3 D[a_1, a_2] + D[a_1] = a_3(3) + 1 = 4 \\ DA_4 &= D[a_1, a_2, a_3] = a_4 D[a_1, a_2, a_3] + D[a_1, a_2] = a_4(4) + 3 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NA_1 &= N[a_1] = a_1 = 2 \\ NA_2 &= N[a_1, a_2] = a_2 N[a_1] + 1 = a_2(2) + 1 = 3(2) + 1 = 7 \\ NA_3 &= N[a_1, a_2, a_3] = a_3 N[a_1, a_2] + N[a_1] = a_3(7) + 2 = 9 \\ NA_4 &= N[a_1, a_2, a_3, a_4] = a_4 N[a_1, a_2, a_3] + N[a_1, a_2] = a_4(9) + 7 = 16 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores se obtiene:

$$M'_3 = \begin{bmatrix} 4 & i7 & 0 \\ -i9 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En [1] se describe el procedimiento para, dada la matriz, poder obtener la trenza asociada usando las fracciones continuas correspondientes, y que es similar al explicado en el procedimiento 1 de capítulo 6.1.

En este trabajo, al igual que en 2-ovillos y 3-ovillos racionales, se hace una clasificación de algunas familias de las 4-trenzas basándonos en un invariante de 4-trenzas con la ayuda de la herramienta de las fracciones continuas.

Capítulo 4

4-Ovillos.

4.1. Polinomio corchete de Kauffman de 4-ovillos.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el polinomio corchete de Kauffman es aplicado a 3-ovillos, en particular a 3-trenzas, como resultado de esto se obtuvo una base de cinco 3-ovillos sin cruces para el polinomio corchete de 3-ovillos (Figura 3.3). De forma similar, para 4-ovillos se encontró una base de catorce 4-ovillos.

Si se añade una cuerda más a la base de cinco 3-ovillos que se muestra en la Figura 3.3 se obtendrían los 4-ovillos $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_8$ mostrados en la Figura 4.1. Es fácil notar que para cualquier diagrama de 4-ovillo y en particular de una 4-trenza, los ocho 4-ovillos sin cruces obtenida al agregar una cuerda a la base algebraica de cinco 3-ovillos es insuficiente ya que existen más formas de obtener un diagrama de 4-ovillo sin cruces. Como podemos ver en el Ejemplo 4 el resultado de obtener el polinomio corchete de la 4-trenza es ocho diagramas de 4-ovillos sin cruces, de los cuales dos de ellos no corresponden a ninguno de los ocho 4-ovillos mostrados en la Figura 4.1, por lo que se siguió con la búsqueda de una base que correspondiera a un 4-ovillo cualquiera. Así, se encontraron todas las formas posibles de interconectar las cuatro cuerdas de ambos extremos de un 4-ovillo a fin de que no existieran cruces entre ellas. En la Figura 4.2 se muestra la base de los catorce 4-ovillos sin cruces que se encontraron.

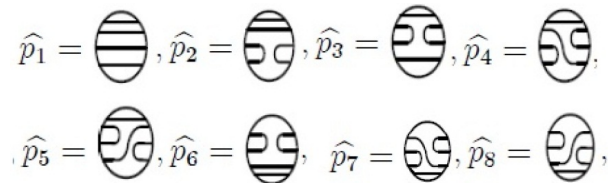


Figura 4.1: ocho diagramas de 4-ovillos sin cruces.

Ejemplo 4. *Veamos el cálculo del polinomio corchete de una 4-trenza:*

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\text{Diagram 1}} \rangle &= a \langle \overline{\text{Diagram 2}} \rangle + a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 3}} \rangle = a(a \langle \overline{\text{Diagram 4}} \rangle + a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 5}} \rangle) + a^{-1}(a \langle \overline{\text{Diagram 6}} \rangle) + \\
a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 7}} \rangle &= a^2(-a^3 \langle \overline{\text{Diagram 8}} \rangle) + a \langle \overline{\text{Diagram 9}} \rangle + a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 10}} \rangle + (-a^3 \langle \overline{\text{Diagram 11}} \rangle) + a^{-2}(a \langle \overline{\text{Diagram 12}} \rangle) + \\
a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 13}} \rangle &= -a^5(a \langle \overline{\text{Diagram 14}} \rangle + a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 15}} \rangle) + a(a \langle \overline{\text{Diagram 16}} \rangle + a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 17}} \rangle) + a^{-1}(a \langle \overline{\text{Diagram 18}} \rangle + \\
a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 19}} \rangle) &= -a^3(a \langle \overline{\text{Diagram 20}} \rangle + a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 21}} \rangle) + a^{-1}(a \langle \overline{\text{Diagram 22}} \rangle + a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 23}} \rangle) - a^3(a \langle \overline{\text{Diagram 24}} \rangle + \\
a^{-1} \langle \overline{\text{Diagram 25}} \rangle) &= a^{-2} \langle \overline{\text{Diagram 26}} \rangle + (-a^4 + 1) \langle \overline{\text{Diagram 27}} \rangle + \langle \overline{\text{Diagram 28}} \rangle + (-a^6 + a^2) \langle \overline{\text{Diagram 29}} \rangle + a^4 \langle \overline{\text{Diagram 30}} \rangle + \\
a^{-2} \langle \overline{\text{Diagram 31}} \rangle &+ (-2a^2 + 2a^{-2}) \langle \overline{\text{Diagram 32}} \rangle + (-a^4 + 1) \langle \overline{\text{Diagram 33}} \rangle
\end{aligned}$$

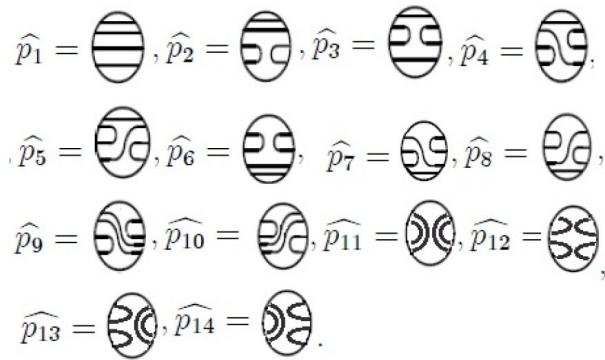


Figura 4.2: Base de 4-ovillos.

Se muestra en el Ejemplo 4 la aplicación de las condiciones del polinomio corchete de Kauffman mostradas en la Figura 3.1, en el cual se puede observar cómo al deshacer cada cruce se va obteniendo un polinomio, donde a diferencia de los nudos, nos queda un ovillo sin cruces pero éste no necesariamente es el ovillo trivial, como en el Ejemplo 1 en el que se obtiene como resultado el nudo trivial; en este ejemplo se puede ver que los 4-ovillos que quedan sin cruces como resultado de la descomposición del álgebra de los diagramas basada en las tres condiciones del polinomio corchete de Kauffman son los correspondientes a \hat{p}_1 ,

$\widehat{p}_2, \widehat{p}_3, \widehat{p}_4, \widehat{p}_6, \widehat{p}_8, \widehat{p}_{12},$ y \widehat{p}_{13} de la Figura 4.2. Con lo anterior se deduce lo siguiente:

Definición 8. Dado D un diagrama de 4-ovillo, se define su polinomio corchete como:

$$\langle D \rangle = p_1(D)\widehat{p}_1 + p_2(D)\widehat{p}_2 + p_3(D)\widehat{p}_3 + p_4(D)\widehat{p}_4 + p_5(D)\widehat{p}_5 + p_6(D)\widehat{p}_6 + p_7(D)\widehat{p}_7 + p_8(D)\widehat{p}_8 + p_9(D)\widehat{p}_9 + p_{10}(D)\widehat{p}_{10} + p_{11}(D)\widehat{p}_{11} + p_{12}(D)\widehat{p}_{12} + p_{13}(D)\widehat{p}_{13} + p_{14}(D)\widehat{p}_{14}.$$

Donde $p_1(D), p_2(D), \dots, p_{14}(D)$ son polinomios que se obtienen al aplicar repetidamente las condiciones del polinomio corchete de Kauffman mostradas en la Figura 3.1 a un 4-ovillo, y $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \dots, \widehat{p}_{14}$ son los diagramas de 4-ovillos mostrados en la Figura 4.2.

Ejemplo 5. Con el resultado obtenido en el Ejemplo 4 y tomando en cuenta la definición anterior, se deduce que el polinomio corchete de esta 4-trenza es:

$$\langle D \rangle = (a^{-2})\widehat{p}_1 + (-a^4 + 1)\widehat{p}_2 + (1)\widehat{p}_3 + (-a^6 + a^2)\widehat{p}_4 + (0)\widehat{p}_5 + (a^{-4})\widehat{p}_6 + (0)\widehat{p}_7 + (a^{-2})\widehat{p}_8 + (0)\widehat{p}_9 + (0)\widehat{p}_{10} + (0)\widehat{p}_{11} + (-a^2 + a^{-2})\widehat{p}_{12} + (-a^4 + 1)\widehat{p}_{13} + (0)\widehat{p}_{14}$$

4.2. Identificación de un invariante.

En el caso de 2-ovillos se encontró un invariante que tiene la propiedad de ser un homomorfismo entre los 2-ovillos y los racionales extendidos $(\mathbb{Q} \cup \infty)$. De forma similar se encontró un invariante que es un homomorfismo entre las 3-trenzas y el grupo de matrices de 3×3 . Y al buscar un invariante que tuviera esta propiedad en el caso de las 4-trenzas se encontró uno que va del conjunto de los 4-ovillos en las matrices 4×4 con entradas en polinomios esto a partir del polinomio corchete de 4-ovillos (Definición 8). Además se puede empezar a ver que un subconjunto de las 4-trenzas son las 3-trenzas con una cuerda fija en los extremos, ya que si no existieran cruces entre la primera y la segunda cuerda o la última y penúltima cuerda de una 4-trenza se podría ver que es una 3-trenza con una cuerda fija Figura 4.3. Además los polinomios de la matriz asignada a los 3-ovillos y en particular a las 3-trenzas forman parte de los polinomios de la matriz que se asigna a continuación a los 4-ovillos racionales.



Figura 4.3: 4-trenzas con una cuerda fija.

Dado un diagrama de 4-ovillo D se puede asignar a éste la siguiente matriz:

$$M_4(D) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1(D) + \mathbf{p}_4(D) & \mathbf{p}_2(D) & p_4(D) & p_9(D) \\ \mathbf{p}_3(D) & \mathbf{p}_1(D) + \mathbf{p}_5(D) & p_3(D) & p_7(D) \\ p_8(D) & p_{10}(D) & \mathbf{p}_1(D) + p_8(D) & p_6(D) \\ p_3(D) & p_5(D) & p_3(D) & p_1(D) + p_7(D) \end{pmatrix}$$

Donde los polinomios $p_1(D), p_2(D), \dots, p_{14}(D)$ son tomados de la Definición 8. En adelante en lugar de escribir $p_i(D)$ con $i = 1, 2, \dots, 14$ se escribirá p_i para simplificar notación. Como se puede notar en la matriz asignada a 4-ovillos se tiene que los polinomios en negrita coinciden con los polinomios de la matriz asignada a 3-ovillos. Tratando de profundizar aún más se puede notar también que si en vez de asignar a cada 2-ovillo un número racional se le asigna una matriz:

$$M_2(D) = \begin{bmatrix} p_1(D) & p_2(D) \\ 0 & p_1(D) \end{bmatrix}$$

Donde los polinomios de esta matriz forman parte de la matriz asignada a 3-ovillos y a su vez estos forman parte de los polinomios de la matriz asignada a 4-ovillos.

También note que la matriz $M_4(D)$ es un invariante bajo isotopía regular debido a que las entradas de la matriz son parte del polinomio corchete de un 4-Ovillo y éste, como se vio en el capítulo anterior, es un invariante bajo isotopía regular, esto es, que es invariante bajo las movidas Ω_2 y Ω_3 de Reidemeister.

4.3. Polinomio corchete de la suma de dos 4-ovillos.

En esta sección se verá como obtener el polinomio corchete de Kauffman de la suma de dos 4-ovillos, lo cual será útil en la búsqueda de un invariante para las 4-trenzas.

Definición 9. *Dados dos diagramas de 4-ovillos D_1 y D_2 se puede obtener (a través de estos dos diagramas) un tercero, denotando ésto por $D_1 + D_2$, usando la construcción mostrada en la Figura 4.4.*

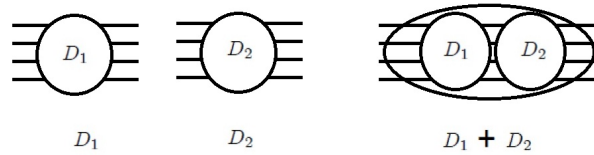


Figura 4.4: Suma de dos digramas de 4-Ovillos.

Suponga que los diagramas de 4-ovillos D_1 y D_2 son de la forma:

$$\langle D_1 \rangle = p_1 \widehat{p}_1 + p_2 \widehat{p}_2 + \dots + p_{14} \widehat{p}_{14}$$

$$\langle D_2 \rangle = q_1 \widehat{p}_1 + q_2 \widehat{p}_2 + \dots + q_{14} \widehat{p}_{14}$$

Donde p_1, p_2, \dots, p_{14} son polinomios y $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \dots, \widehat{p}_{14}$ son los diagramas de 4-ovillos de la Figura 4.2.

Entonces para el diagrama de 4-ovillo $D_1 + D_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \langle D_1 D_2 \rangle = p_1 \langle D_2 \rangle + p_2 \langle D_2 \rangle + p_3 \langle D_2 \rangle + p_4 \langle D_2 \rangle + p_5 \langle D_2 \rangle \\
& + p_6 \langle D_2 \rangle + p_7 \langle D_2 \rangle + p_8 \langle D_2 \rangle + p_9 \langle D_2 \rangle + p_{10} \langle D_2 \rangle + p_{11} \langle D_2 \rangle \\
& + p_{12} \langle D_2 \rangle + p_{13} \langle D_2 \rangle + p_{14} \langle D_2 \rangle = p_1 q_1 \langle \equiv \rangle + p_1 q_2 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_3 \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_1 q_4 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_5 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_6 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_7 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_8 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_9 \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_1 q_{10} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_{11} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_{12} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_{13} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_1 q_{14} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_1 \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_2 q_2 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_3 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_4 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_5 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_6 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_7 \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_2 q_8 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_9 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_{10} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_{11} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_{12} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_2 q_{13} \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_2 q_{14} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_1 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_2 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_3 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_4 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_5 \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_3 q_6 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_7 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_8 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_9 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_{10} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_{11} \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_3 q_{12} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_{13} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_3 q_{14} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_1 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_2 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_3 \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_4 q_4 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_5 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_6 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_7 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_8 \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_9 \langle \overline{\equiv} \rangle \\
& + p_4 q_{10} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_{11} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_{12} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_{13} \langle \overline{\equiv} \rangle + p_4 q_{14} \langle \overline{\equiv} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +p_{10}q_2 \langle \text{Diagram 1} \rangle + p_{10}q_3 \langle \text{Diagram 2} \rangle + p_{10}q_4 \langle \text{Diagram 3} \rangle + p_{10}q_5 \langle \text{Diagram 4} \rangle + p_{10}q_6 \langle \text{Diagram 5} \rangle + p_{10}q_7 \langle \text{Diagram 6} \rangle \\
& +p_{10}q_8 \langle \text{Diagram 7} \rangle + p_{10}q_9 \langle \text{Diagram 8} \rangle + p_{10}q_{10} \langle \text{Diagram 9} \rangle + p_{10}q_{11} \langle \text{Diagram 10} \rangle + p_{10}q_{12} \langle \text{Diagram 11} \rangle + p_{10}q_{13} \langle \text{Diagram 12} \rangle \\
& +p_{10}q_{14} \langle \text{Diagram 13} \rangle + p_{11}q_1 \langle \text{Diagram 14} \rangle + p_{11}q_2 \langle \text{Diagram 15} \rangle + p_{11}q_3 \langle \text{Diagram 16} \rangle + p_{11}q_4 \langle \text{Diagram 17} \rangle + p_{11}q_5 \langle \text{Diagram 18} \rangle \\
& +p_{11}q_6 \langle \text{Diagram 19} \rangle + p_{11}q_7 \langle \text{Diagram 20} \rangle + p_{11}q_8 \langle \text{Diagram 21} \rangle + p_{11}q_9 \langle \text{Diagram 22} \rangle + p_{11}q_{10} \langle \text{Diagram 23} \rangle + p_{11}q_{11} \langle \text{Diagram 24} \rangle \\
& +p_{11}q_{12} \langle \text{Diagram 25} \rangle + p_{11}q_{13} \langle \text{Diagram 26} \rangle + p_{11}q_{14} \langle \text{Diagram 27} \rangle + p_{12}q_1 \langle \text{Diagram 28} \rangle + p_{12}q_2 \langle \text{Diagram 29} \rangle + p_{12}q_3 \langle \text{Diagram 30} \rangle \\
& +p_{12}q_4 \langle \text{Diagram 31} \rangle + p_{12}q_5 \langle \text{Diagram 32} \rangle + p_{12}q_6 \langle \text{Diagram 33} \rangle + p_{12}q_7 \langle \text{Diagram 34} \rangle + p_{12}q_8 \langle \text{Diagram 35} \rangle + p_{12}q_9 \langle \text{Diagram 36} \rangle \\
& +p_{12}q_{10} \langle \text{Diagram 37} \rangle + p_{12}q_{11} \langle \text{Diagram 38} \rangle + p_{12}q_{12} \langle \text{Diagram 39} \rangle + p_{12}q_{13} \langle \text{Diagram 40} \rangle + p_{12}q_{14} \langle \text{Diagram 41} \rangle + p_{13}q_1 \langle \text{Diagram 42} \rangle \\
& +p_{13}q_2 \langle \text{Diagram 43} \rangle + p_{13}q_3 \langle \text{Diagram 44} \rangle + p_{13}q_4 \langle \text{Diagram 45} \rangle + p_{13}q_5 \langle \text{Diagram 46} \rangle + p_{13}q_6 \langle \text{Diagram 47} \rangle + p_{13}q_7 \langle \text{Diagram 48} \rangle \\
& +p_{13}q_8 \langle \text{Diagram 49} \rangle + p_{13}q_9 \langle \text{Diagram 50} \rangle + p_{13}q_{10} \langle \text{Diagram 51} \rangle + p_{13}q_{11} \langle \text{Diagram 52} \rangle + p_{13}q_{12} \langle \text{Diagram 53} \rangle + p_{13}q_{13} \langle \text{Diagram 54} \rangle \\
& +p_{13}q_{14} \langle \text{Diagram 55} \rangle + p_{14}q_1 \langle \text{Diagram 56} \rangle + p_{14}q_2 \langle \text{Diagram 57} \rangle + p_{14}q_3 \langle \text{Diagram 58} \rangle + p_{14}q_4 \langle \text{Diagram 59} \rangle + p_{14}q_5 \langle \text{Diagram 60} \rangle \\
& +p_{14}q_6 \langle \text{Diagram 61} \rangle + p_{14}q_7 \langle \text{Diagram 62} \rangle + p_{14}q_8 \langle \text{Diagram 63} \rangle + p_{14}q_9 \langle \text{Diagram 64} \rangle + p_{14}q_{10} \langle \text{Diagram 65} \rangle + p_{14}q_{11} \langle \text{Diagram 66} \rangle \\
& +p_{14}q_{12} \langle \text{Diagram 67} \rangle + p_{14}q_{13} \langle \text{Diagram 68} \rangle + p_{14}q_{14} \langle \text{Diagram 69} \rangle
\end{aligned}$$

Simplificando esta expresión obtenemos el polinomio corchete de la suma de 4-ovillos.

$$\langle D_1 + D_2 \rangle = (p_1q_1)\widehat{p}_1 + (p_1q_2 + p_2q_1 + p_2q_5 + p_4q_2 + p_4q_{10} + p_9q_5)\widehat{p}_2 + (p_1q_3 + p_3q_1 + p_3q_4 + p_5q_3 + p_3q_8 + p_7q_3)\widehat{p}_3 + (p_1q_4 + p_2q_3 + p_4q_1 + p_4q_4 + p_4q_8 + p_9q_3)\widehat{p}_4 + (p_1q_5 +$$

$$\begin{aligned}
& p_3q_2 + p_3q_{10} + p_5q_1 + p_5q_5 + p_7q_5) \widehat{p}_5 + (p_1q_6 + p_6q_1 + p_6q_7 + p_8q_6 + p_8q_9 + p_{10}q_7) \widehat{p}_6 + \\
& (p_1q_7 + p_3q_9 + p_3q_6 + p_5q_7 + p_7q_1 + p_7q_7) \widehat{p}_7 + (p_1q_8 + p_6q_3 + p_{10}q_{13} + p_8q_1 + p_8q_{94} + \\
& p_8q_8) \widehat{p}_8 + (p_1q_9 + p_2q_7 + p_4q_6 + p_9q_1 + p_9q_7 + p_4q_9) \widehat{p}_9 + (p_1q_{10} + p_6q_5 + p_8q_2 + p_8q_{10} + \\
& p_{10}q_1 + p_{10}q_5) \widehat{p}_{10} + (p_1q_{11} + p_3q_{13} + p_5q_8 + p_5q_{11} + p_7q_4 + p_7q_{11} + p_{11}q_1 + p_{11}q_4 + p_{11}q_8 + \\
& p_{14}q_3) \widehat{p}_{11} + (p_1q_{12} + p_2q_6 + p_2q_{10} + p_2q_{14} + p_6q_2 + p_6q_{14} + p_{10}q_6 + p_{10}q_{10} + p_{10}q_{11} + p_{10}q_{14} + \\
& p_{12}q_1 + p_{12}q_5 + p_{12}q_7 + p_{13}q_2 + p_{13}q_6 + p_{13}q_9 + p_{13}q_{10}) \widehat{p}_{12} + (p_1q_{13} + p_2q_8 + p_2q_{11} + p_4q_{13} + \\
& p_6q_4 + p_6q_{11} + p_8q_{13} + p_9q_{11} + p_{10}q_8 + p_{12}q_3 + p_{13}q_1 + p_{13}q_4 + p_{13}q_8) \widehat{p}_{13} + (p_1q_{14} + p_3q_{12} + \\
& p_5q_6 + p_5q_{10} + p_5q_{14} + p_7q_2 + p_7q_9 + p_9q_{14} + p_{11}q_2 + p_{12}q_6 + p_{11}q_9 + p_{11}q_{10} + p_{14}q_1 + \\
& p_{14}q_7) \widehat{p}_{14} + d[(p_2q_2 + p_4q_5 + p_9q_{10}) \widehat{p}_2 + (p_3q_3 + p_5q_4 + p_7q_8) \widehat{p}_3 + (p_2q_4 + p_4q_3 + p_9q_8) \widehat{p}_4 + \\
& (p_3q_5 + p_5q_2 + p_7q_{10}) \widehat{p}_5 + (p_6q_6 + p_8q_7 + p_{10}q_9) \widehat{p}_6 + (p_3q_7 + p_5q_9 + p_7q_6) \widehat{p}_7 + (p_6q_8 + \\
& p_8q_4 + p_{10}q_4) \widehat{p}_8 + (p_2q_9 + p_4q_7 + p_9q_6) \widehat{p}_9 + (p_6q_{10} + p_8q_5 + p_{10}q_2) \widehat{p}_{10} + (p_3q_{10} + p_5q_{13} + \\
& p_7q_{13} + p_{11}q_3 + p_{11}q_{13} + p_{14}q_4 + p_4q_8 + p_{14}q_{11}) \widehat{p}_{11} + (p_2q_{12} + p_4q_{14} + p_6q_{12} + p_8q_{14} + \\
& p_9q_{12} + p_{10}q_{12} + p_{12}q_2 + p_{12}q_6 + p_{12}q_9 + p_{12}q_{10} + p_{12}q_{14} + p_{13}q_5 + p_{13}q_{12}) \widehat{p}_{12} + (p_2q_{13} + \\
& p_4q_{11} + p_6q_{13} + p_9q_{13} + p_{10}q_{13} + p_{12}q_4 + p_{12}q_8 + p_{12}q_{11} + p_{13}q_3 + p_{13}q_{13}) \widehat{p}_{13} + (p_3q_{14} + \\
& p_5q_{12} + p_7q_{12} + p_{11}q_5 + p_{11}q_7 + p_{11}q_{12} + p_{14}q_2 + p_{14}q_6 + p_{14}q_9 + p_{14}q_{10} + p_{14}q_{11} + p_{14}q_{14}) \widehat{p}_{14}] + \\
& d^2[(p_{11}q_{11} + p_{14}q_{13}) \widehat{p}_{11} + (p_{12}q_{12} + p_{13}q_{14}) \widehat{p}_{12} + (p_{12}q_{13} + p_{13}q_{11}) \widehat{p}_{13} + (p_{11}q_{14} + p_{14}q_{12}) \widehat{p}_{14}].
\end{aligned}$$

4.4. Matriz de la suma de dos diagramas de 4-ovillos.

Al obtener el polinomio corchete de la suma de dos diagramas de 4-ovillos se puede pensar en la existencia de una matriz para la suma de los mismos, basándose en la matriz asignada a un 4-ovillo, y encontrar de forma similar al caso de 3-ovillos un invariante con el cual poder clasificar a las 4-trenzas, por lo que se llego al siguiente teorema.

Teorema 2. *Dados D_1 y D_2 diagramas de 4-ovillos se tiene:*

$$M_4(D_1 + D_2) = M_4(D_1)M_4(D_2) + dPAQ$$

Donde $d = -(a^2 + a^{-2})$,

$$P = \begin{pmatrix} p_4 & p_2 & p_4 & p_9 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_7 \\ p_8 & p_{10} & p_8 & p_6 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_7 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_4 & q_2 & q_4 & q_9 \\ q_3 & q_5 & q_3 & q_7 \\ q_8 & q_{10} & q_8 & q_6 \\ q_3 & q_5 & q_3 & q_7 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned}
M_4(D_1) &= \begin{pmatrix} p_1+p_4 & p_2 & p_4 & p_9 \\ p_3 & p_1+p_5 & p_3 & p_7 \\ p_8 & p_{10} & p_1+p_8 & p_6 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_1+p_7 \end{pmatrix}, \\
M_4(D_2) &= \begin{pmatrix} q_1+q_4 & q_2 & q_4 & q_9 \\ q_3 & q_1+q_5 & q_3 & q_7 \\ q_8 & q_{10} & q_1+q_8 & q_6 \\ q_3 & q_5 & q_3 & q_1+q_7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

las matrices asociadas a los diagramas D_1 y D_2 y a sus polinomios correspondientes.

Demostración. sean D_1 y D_2 dos diagramas de 4-ovillos. Por definición de M_4 y en base al cálculo del polinomio corchete de la suma de dos 4-ovillos se tiene que:

$$M_4(D_1 + D_2) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 + \tilde{p}_4 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_4 & \tilde{p}_9 \\ \tilde{p}_3 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_5 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_7 \\ \tilde{p}_8 & \tilde{p}_{10} & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_8 & \tilde{p}_6 \\ \tilde{p}_3 & \tilde{p}_5 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_7 \end{pmatrix} + dPAQ$$

Donde $d = -(a^2 + a^{-2})$, y

$$P = \begin{pmatrix} p_4 & p_2 & p_4 & p_9 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_7 \\ p_8 & p_{10} & p_8 & p_6 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_7 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} q_4 & q_2 & q_4 & q_9 \\ q_3 & q_5 & q_3 & q_7 \\ q_8 & q_{10} & q_8 & q_6 \\ q_3 & q_5 & q_3 & q_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= p_1q_1, \\ \tilde{p}_2 &= p_1q_2 + p_2q_1 + p_2q_5 + p_4q_2 + p_4q_{10} + p_9q_5, \\ \tilde{p}_3 &= p_1q_3 + p_3q_1 + p_3q_4 + p_5q_3 + p_3q_8 + p_7q_3, \\ \tilde{p}_4 &= p_1q_4 + p_2q_3 + p_4q_1 + p_4q_4 + p_4q_8 + p_9q_3, \\ \tilde{p}_5 &= p_1q_5 + p_3q_2 + p_3q_{10} + p_5q_1 + p_5q_5 + p_7q_5, \\ \tilde{p}_6 &= p_1q_6 + p_6q_1 + p_6q_7 + p_8q_6 + p_8q_9 + p_{10}q_7, \\ \tilde{p}_7 &= p_1q_7 + p_3q_9 + p_3q_6 + p_5q_7 + p_7q_1 + p_7q_7, \\ \tilde{p}_8 &= p_1q_8 + p_6q_3 + p_{10}q_{13} + p_8q_1 + p_8q_{94} + p_8q_8, \\ \tilde{p}_9 &= p_1q_9 + p_2q_7 + p_4q_6 + p_9q_1 + p_9q_7 + p_4q_9, \\ \tilde{p}_{10} &= p_1q_{10} + p_6q_5 + p_8q_2 + p_8q_{10} + p_{10}q_1 + p_{10}q_5. \end{aligned}$$

Si hacemos el cálculo de $M_4(D_1)M_4(D_2)$ tenemos:

$$M_4(D_1)M_4(D_2) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 + \tilde{p}_4 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_4 & \tilde{p}_9 \\ \tilde{p}_3 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_5 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_7 \\ \tilde{p}_8 & \tilde{p}_{10} & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_8 & \tilde{p}_6 \\ \tilde{p}_3 & \tilde{p}_5 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_7 \end{pmatrix}$$

es suficiente notar para finalizar esta demostración que:

$$M_4(D_1 + D_2) = M_4(D_1)M_4(D_2) + dPAQ \quad \square$$

Esta matriz, evaluada en $a = \sqrt{i}$, es un homomorfismo lo cual será muy importante cuando se realice la clasificación de las 4-trenzas y de sus subconjuntos.

Capítulo 5

4-Trenzas.

De igual forma como se vio en la Definición 9 (donde se muestra la construcción de la suma de 4-ovillos), y ya que las trenzas son un subconjunto de los ovillos, podemos notar que es permitida la suma de dos diagramas de 4-trenzas. Por lo que se aplicarán los resultados obtenidos en el capítulo anterior para 4-trenzas.

En este capítulo, basándose en los resultados y deducciones vistos, se realizará una clasificación de algunas familias de 4-trenzas.

5.1. Clase de equivalencia de una matriz.

Si damos valores especiales para a de los polinomios en las entradas de la matriz $M_4(D_1 + D_2)$ en el Teorema 2 como: $a_1 = \sqrt{i}$ (esto implica que $a_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{i}}$ y $-(a_1^2 + a_1^{-2}) = 0$), y $a = a_2 = (1 + i\sqrt{3})/2$ (esto implicaría que $a_2^{-1} = (1 - i\sqrt{3})/2$ y $-(a_2^2 + a_2^{-2}) = 1$). Se Pueden asociar las siguientes matrices a un diagrama de ovillo D :

$$M_a(D) = M_4(D)(\sqrt{i}); \quad M_b(D) = M_4(D)\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

En este trabajo la matriz $M_b(D)$ no es utilizada. La matriz $M_a(D)$ satisface la siguiente propiedad.

Lema 4. *Dados dos diagramas de 4-ovillos D_1 y D_2 se tiene:*

$$M_a(D_1 + D_2) = M_a(D_1)M_a(D_2)$$

Demostración. Esto se deduce del Teorema 2 donde $d = -(a^2 + a^{-2})$ y evaluando $a = \sqrt{i}$. entonces $d = 0$. \square

Es sencillo deducir de la relación que tiene el polinomio corchete de Kauffman con respecto a la movida Ω_1 de Reidemeister visto en el capítulo 3, que si $D_1 \cong D_2$, entonces $M_4(D_1) = (-a)^{3z}M_4(D_2)$ para algún $z \in \mathbb{Z}$ dado que: $(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^3 = 1$ resulta que $M_b(D)$ es un invariante de ovillos. En el mismo sentido se deduce que $M_a(D)$ no es un invariante, sin embargo a partir de él se puede obtener un invariante.

Defínase en $M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$ la siguiente relación de equivalencia.

$$A_1 \sim A_2 \iff A_1 = (-\sqrt{i})^{3z} A_2 \quad z \in \mathbb{Z}, \quad A_1, A_2 \in M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$$

Se denotará la clase de equivalencia de una matriz A bajo la relación de equivalencia por $[A]$. Claramente, si los diagramas de ovillos D_1 y D_2 son equivalentes entonces:

$$[M_a(D_1)] = [M_a(D_2)]$$

Por lo tanto la clase de equivalencia de $[M_a(D_1)]$ es un ovillo invariante. Por el Lema 4 se tiene:

$$[M_a(D_1 + D_2)] = [M_a(D_1)M_a(D_2)] = [M_a(D_1)][M_a(D_2)]$$

Por simplicidad la clase de equivalencia de $[M_a(D_1)]$ se denotará por $M_a(D_1)$.

5.2. Algunas familias de 4-trenzas.

En esta sección se estudiarán los diferentes tipos de cruces y cómo a partir de estos se puede obtener para cada uno su matriz correspondiente M_4 . Además con la ayuda de el Lema 4 y las matrices asignadas a cada diferente tipo de cruce se obtendrán algunas familias de 4-trenzas.

Definición 10. Dada una 4-trenza se tiene:

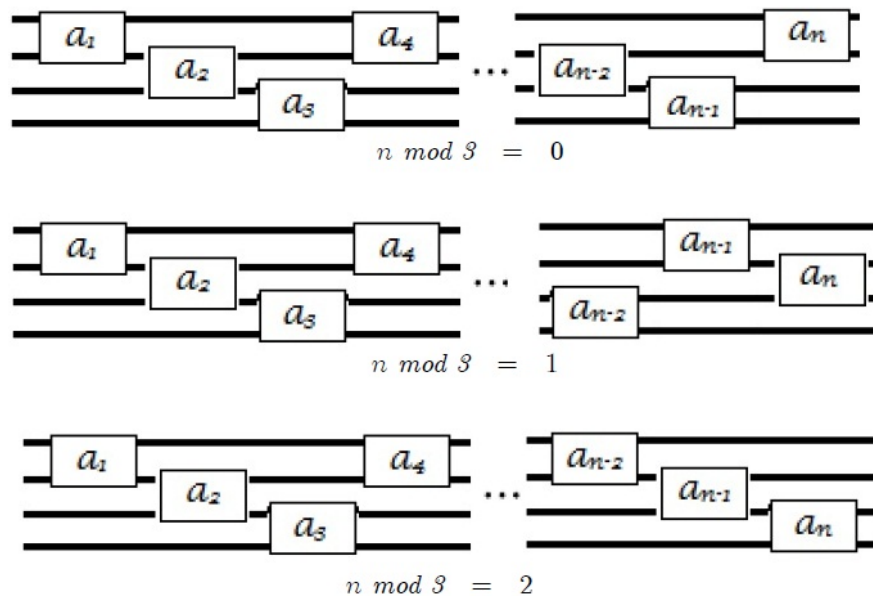


Figura 5.1: Tipos de cruces de 4-trenzas.

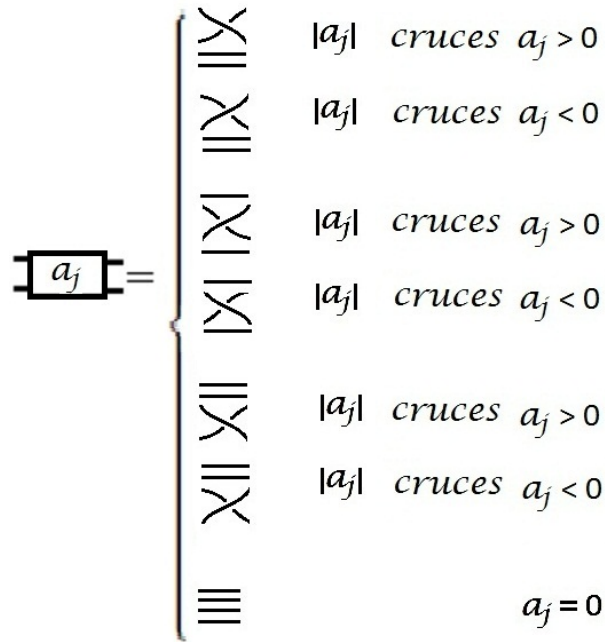


Figura 5.2: Asignación de signo a cruces de 4-trenzas.

En adelante para una 4-trenza T , $T \cong \mathcal{T}(a_1, \dots, a_n)$, para algún $a_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, n$, y dada la notación en el capítulo 3 en la sección de fracciones continuas donde $A_n = (a_1, \dots, a_n)$ entonces para una 4-trenza T , $T \cong TA_n \cong \mathcal{T}(a_1, \dots, a_n)$

Como se puede observar en la Figura 5.2 para una 4-trenza se tienen tres diferentes tipos de cruces. Si se tuviera una 4-trenza de la forma $\mathcal{T}(n) = \equiv$ (4-trenza con cruces en la parte superior) entonces los polinomios correspondientes a los 4-Ovillos $p_2, p_3, p_4, p_5, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}$, y p_{14} serían cero ya que no tiene cruces entre las cuerdas del centro de la 4-trenza ni en sus últimas dos cuerdas. Por lo tanto para una 4-trenza de esta forma la matriz que se asigna a una 4-trenza como ésta sería:

$$M_4(\mathcal{T}(n)) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien si se evalúa a los polinomios p_1 y p_6 en un valor específico como $a = \sqrt{i}$, por el Lema 4 tendríamos que:

$$M_a(\mathcal{T}(n)) = \begin{bmatrix} \sqrt{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i} & \frac{1}{\sqrt{i}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{i} \end{bmatrix}$$

Como se vio en el capítulo 5 en la sección 5.1 Clase de equivalencias de una matriz. $A_1 \sim A_2 \iff A_1 = (-\sqrt{i})^{3z}$ donde $z \in \mathbb{Z}$, y $A_1, A_2 \in M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$, entonces:

$$\begin{aligned}
M_a(\mathcal{T}(n)) &= \begin{bmatrix} \sqrt{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i} & \frac{1}{\sqrt{i}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{i} & \frac{1}{\sqrt{i}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{i} \end{bmatrix} (-\sqrt{i})^3 \\
&= \begin{bmatrix} (-\sqrt{i})^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-\sqrt{i})^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{i})^4 & (-\sqrt{i})^2 \\ 0 & 0 & 0 & (-\sqrt{i})^4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Haciendo esto de forma similar para los diagramas de trenzas de la forma $T(0, n) = \overline{\text{II}}$ (4-trenza con cruces en la parte del centro) y $T(0, 0, n) = \overline{\text{III}}$ (4-trenza con cruces en la parte inferior) y por la asignación de cruces mostrada en la Figura 5.2 se tiene:

Lema 5. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}
M_a(\mathcal{T}(n)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{n}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & M_a(\mathcal{T}(0, n)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{i} & 1 & -\frac{n}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{n}{i} & 0 & -\frac{n}{i} & 1 \end{bmatrix} \\
M_a(\mathcal{T}(0, 0, n)) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{n}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Demostración. Es fácil ver que

$$\begin{aligned}
M_a(\mathcal{T}(0)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & M_a(\mathcal{T}(1)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
M_a(\mathcal{T}(-1)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dado $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(n) &= \overbrace{\mathcal{T}(1) + \dots + \mathcal{T}(1)}^{|n|-\text{veces}} & \mathcal{T}(0,n) &= \overbrace{\mathcal{T}(0,1) + \dots + \mathcal{T}(0,1)}^{|n|-\text{veces}} \\ \mathcal{T}(n) &= \overbrace{\mathcal{T}(0,0,1) + \dots + \mathcal{T}(0,0,1)}^{|n|-\text{veces}} & n > 0 \\ & \text{y} \\ \mathcal{T}(n) &= \overbrace{\mathcal{T}(-1) + \dots + \mathcal{T}(-1)}^{|n|-\text{veces}} & \mathcal{T}(0,n) &= \overbrace{\mathcal{T}(0,-1) + \dots + \mathcal{T}(0,-1)}^{|n|-\text{veces}} \\ \mathcal{T}(n) &= \overbrace{\mathcal{T}(0,0,-1) + \dots + \mathcal{T}(0,0,-1)}^{|n|-\text{veces}} & n < 0 \end{aligned}$$

Por el Lema 4 para $n > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} M_a(\mathcal{T}(n)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{n}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_a(\mathcal{T}(-n)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Lo cual implica

$$M_a(\mathcal{T}(n)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{n}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De forma similar se obtiene

$$\begin{aligned} M_a(\mathcal{T}(0,n)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{i} & 1 & -\frac{n}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{n}{i} & 0 & -\frac{n}{i} & 1 \end{bmatrix}, & n \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ M_a(\mathcal{T}(0,0,n)) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{n}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & n \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{aligned}$$

Esto prueba el lema. □

Con este lema se puede ver fácilmente que si se tiene una trenza $TA_n \cong \mathcal{T}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ donde $n \bmod 3 = 1$ se obtendrá por el Lema 4 la multiplicación de las anteriores tres matrices donde la última matriz multiplicada será $M(\mathcal{T}(n))$, si $n \bmod 3 = 2$ la última matriz

será $M(\mathcal{T}(0,n))$ y si $n \bmod 3 = 0$ será $\mathcal{M}(\mathcal{T}(0,0,n))$. Ahora bien, si se encontraran 4-trenzas que no tuviera cruces en las dos primeras cuerdas o en las dos últimas, entonces la matriz correspondiente a esos cruces sería la matriz identidad (I), y este tipo de 4-trenzas tendrían una forma semejante a las 3-trenzas. A continuación se muestra un ejemplo de lo anterior.

Ejemplo 6. Sea $TA_4 = \mathcal{T}(4,2,0,-3)$ una 4-trenza, las matrices correspondientes a cada uno de sus cruces son:

$$M_a(\mathcal{T}(4)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_a(\mathcal{T}(0,2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{i} & 1 & -\frac{2}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{i} & 0 & -\frac{2}{i} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_a(\mathcal{T}(0,0,0)) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{0}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_a(\mathcal{T}(0,0,0,-3)) = M_a(\mathcal{T}(-3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que:

$$\mathcal{T}(4,2,0,-3) = \mathcal{T}(4) + \mathcal{T}(0,2) + \mathcal{T}(0,0,0) + \mathcal{T}(-3)$$

Por el Lema 4

$$\begin{aligned} M_a(\mathcal{T}(4,2,0,-3)) &= M_a(\mathcal{T}(4) + \mathcal{T}(0,2) + \mathcal{T}(0,0,0) + \mathcal{T}(-3)) \\ &= M_a(\mathcal{T}(4))M_a(\mathcal{T}(0,2))M_a(\mathcal{T}(0,0,0))M_a(\mathcal{T}(-3)) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} M_a(\mathcal{T}(4,2,0,-3)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{i} & 1 & -\frac{2}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{i} & 0 & -\frac{2}{i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{0}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{i} & 1 & -\frac{2}{i} & -6 \\ 8 & 0 & 9 & -\frac{23}{i} \\ -\frac{2}{i} & 0 & -\frac{2}{i} & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En este ejemplo se ve que la última matriz multiplicada es $M_a(\mathcal{T}(n))$ ya que $4 \bmod 3 = 1$.

Ahora se estudiará unos casos especiales de la multiplicación de estas matrices. Si se calcula la matriz de la 4-trenza $\mathcal{T}(0,1,-1,0,1)$ se obtiene:

$$M_a(\mathcal{T}(0,-1,1,0,-1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i} & 1 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & \frac{1}{i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i} & 1 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & \frac{1}{i} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i} & -1 & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{i} & -1 & \frac{1}{i} & 1 \end{bmatrix}$$

A esta 4-trenza se le llamará $E_i \cong \mathcal{T}(0, -1, 1, 0, -1)$ para facilitar la notación. Si se calcula $M(8E_i)$ se obtiene:

$$(M_a(8E_i)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera similar llamaremos $E^s \cong \mathcal{T}(1, -1, 0, 1)$ si se calcula la matriz $M(E^s)$ se tiene:

$$M_a(E^s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i} & 1 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & \frac{1}{i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i} & 1 & \frac{1}{i} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{i} \\ \frac{1}{i} & 0 & \frac{1}{i} & 0 \end{bmatrix}$$

y calculando $(M(E^s))^8 = I$. Note que E_i y E^s son diagramas de 4-trenzas no alternantes.

Con estos resultados y tomando en cuenta esta observación en la siguiente sección se estudiará un subgrupo de las 4-trenzas.

5.3. Subconjuntos de 4-trenzas

Como se vio en el capítulo 4, los polinomios de las entradas de la matriz que es asignada a 2-ovillos ($M_2(D)$) coinciden con los polinomios de las entradas de la matriz asignada a 3-ovillos ($M_3(D)$) y éstos a su vez coinciden con los polinomios de las entradas de la matriz que se asigno a 4-ovillos ($M_4(D)$), no sólo en las matrices se puede notar esto sino también en el polinomio corchete de Kauffman de 2, 3 y 4-ovillos y en el polinomio corchete de la suma de dos diagramas de 2, 3 y 4-ovillos. En el caso de 3-ovillos, si sólo existieran cruces en las primeras dos cuerdas o en las dos últimas, el polinomio corchete de Kauffman sería análogo al polinomio corchete de 2-ovillos. De igual forma esto pasa en el caso de 4-ovillos, lo cual se explicará detenidamente más adelante. Con esto se puede decir que es evidente que los 2-ovillos son subconjunto de los 3-ovillos y a su vez estos son subconjunto de los 4-ovillos. A continuación se muestran las matrices asignadas a los 2, 3 y 4-ovillos, donde se resalta en negritas los polinomios en los que coinciden sus entradas.

$$M_2(D) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix} \quad M_3(D) = \begin{pmatrix} \mathbf{p_1 + p_4} & \mathbf{p_2} & 0 \\ p_3 & \mathbf{p_1 + p_5} & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}$$

$$M_4(D) = \begin{pmatrix} \mathbf{p_1 + p_4} & \mathbf{p_2} & p_4 & p_9 \\ \mathbf{p_3} & \mathbf{p_1 + p_5} & p_3 & p_7 \\ p_8 & p_{10} & \mathbf{p_1 + p_8} & p_6 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_1 + p_7 \end{pmatrix}$$

Se podría especular que la matriz asignada a 3-ovillos (M_3) es una extensión de la matriz que se asigna a 2-ovillos (M_2), y la matriz M_4 una extensión de M_2 y M_3 .

Tomando en cuenta lo anterior se propone la siguiente notación:

Notación 1. Dadas dos 3-trenzadas TA_n y TB_m alternantes se dice que I_i es una función que va de 3-trenzadas a 4-trenzadas ($I_i : \text{3-trenza} \rightarrow \text{4-trenza}$) e I^s es la función ($I^s : \text{3-trenza} \rightarrow \text{4-trenza}$) por lo que aplicando estas funciones a una 4-trenza tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} I_i(TA_n) = \begin{array}{c} \overline{\alpha_1} \\ \overline{\alpha_2} \\ \dots \\ \overline{\alpha_n} \end{array} \\ I^s(TB_m) = \begin{array}{c} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \dots \\ \overline{b_m} \end{array} \end{array} \right\} n, m \text{ impar} \qquad \left. \begin{array}{l} I_i(TA_n) = \begin{array}{c} \overline{\alpha_1} \\ \dots \\ \overline{\alpha_n} \end{array} \\ I^s(TB_m) = \begin{array}{c} \overline{b_1} \\ \dots \\ \overline{b_m} \end{array} \end{array} \right\} n, m \text{ par}$$

Figura 5.3: 4-trenza con cruces en sólo tres de sus cuerdas.

Igualmente se puede obtener el diagrama de la suma de estos dos tipos de 4-trenzadas de igual forma como se mostró en el Capítulo 3 en la Figura 4.4 para ovillos. Lo cual denotamos $I_i(TA_n) + I^s(TB_m)$ y $I^s(TB_m) + I_i(TA_n)$ Figura 5.4

Visualizado esto, ahora se analizará detenidamente el caso en el que una 4-trenza tiene sólo cruces en tres de sus cuerdas.

Lema 6. Sea TA_n un diagrama de 3-trenza e I_i la función definida en Notación 1 entonces:

$$M_4(I_i(TA_n)) = \begin{pmatrix} p_1+p_4 & p_2 & p_4 & 0 \\ p_3 & p_1+p_5 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_1 \end{pmatrix}$$

Donde p_1, \dots, p_5 son los polinomios asociados a los diagramas de 4-ovillos $\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_5$ mostrados en la Figura 4.2

Demostración. Sea M_4 la matriz asignada a una 4-trenza cualquiera

$$M_4(D) = \begin{pmatrix} p_1+p_4 & p_2 & p_4 & p_9 \\ p_3 & p_1+p_5 & p_3 & p_7 \\ p_8 & p_{10} & p_1+p_8 & p_6 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_1+p_7 \end{pmatrix}$$

Donde p_1, p_2, \dots, p_{14} son los polinomios asociados al polinomio corchete de un diagrama de 4-trenza

$$\langle TA_n \rangle = p_1\widehat{p}_1 + p_2\widehat{p}_2 + p_3\widehat{p}_3 + p_4\widehat{p}_4 + p_5\widehat{p}_5 + p_6\widehat{p}_6 + p_7\widehat{p}_7 + p_8\widehat{p}_8 + p_9\widehat{p}_9 + p_{10}\widehat{p}_{10} + p_{11}\widehat{p}_{11} + p_{12}\widehat{p}_{12} + p_{13}\widehat{p}_{13} + p_{14}\widehat{p}_{14}.$$

Es sencillo notar que al aplicar la función I_i a una 3-trenza cualquiera, los polinomios pertenecientes a cada uno de los 4-ovillos $\widehat{p}_6, \dots, \widehat{p}_{14}$ son cero ya que éstos no tienen la

$$\begin{aligned}
I_i(TA_n) + I^s(TB_m) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_1} \\ \text{---} \\ \boxed{a_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_n} \\ \text{---} \\ \boxed{b_1} \\ \text{---} \\ \boxed{b_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_m} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{para } n, m \text{ impar} \\
I_i(TA_n) + I^s(TB_m) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_1} \\ \text{---} \\ \boxed{a_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_n} \\ \text{---} \\ \boxed{b_1} \\ \text{---} \\ \boxed{b_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_m} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{para } n, m \text{ par} \\
I_i(TA_n) + I^s(TB_m) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_1} \\ \text{---} \\ \boxed{a_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_n} \\ \text{---} \\ \boxed{b_1} \\ \text{---} \\ \boxed{b_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_m} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{para } n \text{ impar y } m \text{ par} \\
I_i(TA_n) + I^s(TB_m) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_1} \\ \text{---} \\ \boxed{a_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_n} \\ \text{---} \\ \boxed{b_1} \\ \text{---} \\ \boxed{b_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_m} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{para } n \text{ par y } m \text{ impar} \\
I^s(TB_m) + I_i(TA_n) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_1} \\ \text{---} \\ \boxed{b_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_m} \\ \text{---} \\ \boxed{a_1} \\ \text{---} \\ \boxed{a_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_n} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{para } n, m \text{ impar} \\
I^s(TB_m) + I_i(TA_n) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_1} \\ \text{---} \\ \boxed{b_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_m+a_1} \\ \text{---} \\ \boxed{a_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_n} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{para } n, m \text{ par} \\
I^s(TB_m) + I_i(TA_n) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_1} \\ \text{---} \\ \boxed{b_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_m} \\ \text{---} \\ \boxed{a_1} \\ \text{---} \\ \boxed{a_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_n} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{para } n \text{ par y } m \text{ impar} \\
I^s(TB_m) + I_i(TA_n) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_1} \\ \text{---} \\ \boxed{b_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{b_m+a_1} \\ \text{---} \\ \boxed{a_2} \\ \text{---} \end{array} \dots \begin{array}{c} \text{---} \\ \boxed{a_n} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{para } n \text{ impar y } m \text{ par}
\end{aligned}$$

Figura 5.4: Sumas de 4-trenzas con cruces en sólo tres de sus cuerdas.

forma de la imagen de esta función, esto es, que existen cruces en las dos primeras cuerdas; por lo tanto, al sustituirlo en la matriz asignada se obtiene:

$$M_4(I_i(D)) = \begin{pmatrix} p_1+p_4 & p_2 & p_4 & 0 \\ p_3 & p_1+p_5 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 \\ p_3 & p_5 & p_3 & p_1 \end{pmatrix}$$

□

Lema 7. Sea TA_n un diagrama de 4-trenza e I^s la función definida en la Notación 1 se tiene:

$$M_4(I^s(T(A_n))) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_1 & p_3 & p_7 \\ p_8 & 0 & p_1+p_8 & p_6 \\ p_3 & 0 & p_3 & p_1+p_7 \end{pmatrix}$$

Donde p_1, p_3, p_6, p_7 y p_8 son los polinomios asociados a los diagramas de 4-ovillos $\hat{p}_1, \hat{p}_3, \hat{p}_6, \hat{p}_7$ y \hat{p}_8 mostrados en la Figura 4.2.

Demostración. La demostración de este lema es análoga a la del Lema 6. □

Con estos resultados se puede pensar en buscar una forma con la que se facilite el cálculo de este tipo de matrices y la multiplicación de ellas basándose en el Lema 4 .

Capítulo 6

Clasificación de un subconjunto de las 4-trenzas.

En este capítulo se verá la clasificación de las imágenes de las funciones I_i e I^s descritas en el capítulo anterior, aplicadas a 3-trenzas, donde las imágenes de estas funciones son subconjuntos de las 4-trenzas; lo cual dará como resultado una forma de calcular fácilmente las matrices asignadas a las 4-trenzas que tengan estas formas; y dada una matriz se podrá determinar si pertenece a estos subconjuntos de 4-trenzas, y de ser así, obtener una trenza correspondiente a la matriz.

6.1. Matrices asignadas a 4-trenzas que son imagen de I_i e I^s

Como se vio en el Capítulo 3 dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ entonces se tiene $NA_n/DA_n = A_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Además como se dijo en el capítulo 5 en la sección 5.2 una trenza se denota: $TA_n \cong \mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ para algún $a_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Si se aplican las funciones I_i e I^s a una 3-trenza TA_n cualquiera entonces: $I_i(TA_n) \cong \mathcal{T}(0, a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n)$ e $I^s(TA_n) \cong \mathcal{T}(a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n)$.

Tomando en cuenta esto, en base a los Lemas 4 y 5 y con la ayuda del programa realizado en el software Maple mostrado en el Apéndice A se obtienen los siguientes resultados:

Lema 8. *Dada una 4-trenza de la forma $I_i(TA_n)$, se tiene:*

$$\begin{aligned} \text{para } n \text{ impar } M_4(I_i(TA_n)) &= \begin{pmatrix} DA_n & DA_{n-1} & DA_n - 1 & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} & NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} - 1 & NA_n & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{para } n \text{ par } M_4(I_i(TA_n)) &= \begin{pmatrix} DA_{n-1} & DA_n & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_n - 1 & NA_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Demostración. Usando inducción. Se ve primero si cumple para el caso $n = 1$

$$M_4(I_i(TA_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & 0 & a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

basándose en las fórmulas 3.1 y 3.2 se tiene:

$$\begin{aligned} N[a_0] &= 1, & N[a_1] &= a_1, & N[a_2] &= a_1 a_2 + 1 \\ D[a_0] &= 0, & D[a_1] &= 1, & D[a_2] &= a_2 \end{aligned}$$

por lo que

$$M_4(I_i(TA_1)) = \begin{pmatrix} DA_1 & DA_0 & DA_1 - 1 & 0 \\ NA_1 & NA_0 & NA_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_1 & NA_0 - 1 & NA_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verá ahora el caso $n = 2$

$$M_4(I_i(TA_2)) = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 a_2 + 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_1 a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

basándose en las fórmulas 3.1 y 3.2 se tiene:

$$= \begin{pmatrix} DA_1 & DA_2 & DA_1 - 1 & 0 \\ NA_1 & NA_2 & NA_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_1 & NA_2 - 1 & NA_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se supone cierto para n por hipótesis de inducción, y se muestra para $n + 1$ cuando n es par:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & 0 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_n & 0 & a_n & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} DA_{n-2} & DA_{n-1} & DA_{n-2} - 1 & 0 \\ NA_{n-2} & NA_{n-1} & NA_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_{n-2} & NA_{n-1} - 1 & NA_{n-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_n & 0 & a_n & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} & DA_{n-1} & DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} - 1 & 0 \\ NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} & NA_{n-1} & NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} & NA_{n-1} - 1 & NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} DA_n & DA_{n-1} & DA_n - 1 & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} & NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} - 1 & NA_n & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se muestra para $n + 1$ cuando n es impar.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & 0 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} DA_{n-1} & DA_{n-2} & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_{n-2} & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_{n-2} - 1 & NA_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} DA_{n-1} & DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} - 1 & NA_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} DA_{n-1} & DA_n & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_n - 1 & NA_{n-1} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Lema 9. Dada una 4-trenza de la forma $I^s(TA_n)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\text{para } n \text{ impar } M_4(I^s(TA_n)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_{n-1} & 1 & DA_{n-1} & DA_n - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & NA_n \\ DA_{n-1} & 0 & DA_{n-1} & DA_n \end{pmatrix} \\
\text{para } n \text{ par } M_4(I^s(TA_n)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_n & 1 & DA_n & DA_{n-1} - 1 \\ NA_n - 1 & 0 & NA_n & NA_{n-1} \\ DA_n & 0 & DA_n & DA_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Demostración. Usando inducción. Se ve el caso para $n = 1$

$$M_4(I^s TA_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

basándose en las fórmulas 3.1 y 3.2 vistas en el capítulo 3 se tiene:

$$\begin{aligned}
N[a_0] &= 1, N[a_1] = a_1, N[a_2] = a_1 a_2 + 1 \\
D[a_0] &= 0, D[a_1] = 1, D[a_2] = a_2
\end{aligned}$$

por lo que

$$M_4(I^s(TA_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_0 & 1 & DA_0 & DA_1 - 1 \\ NA_0 - 1 & 0 & NA_0 & NA_1 \\ DA_0 & 0 & DA_0 & DA_1 \end{pmatrix}$$

Ahora se verá el caso $n = 2$

$$M_4(I^s(TA_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & a_2 & 0 \\ a_1 a_2 & 0 & a_1 a_2 + 1 & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & 1 \end{pmatrix}$$

basándose en la fórmulas 3.1 y 3.2 se tiene:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_2 & 1 & DA_2 & DA_1 - 1 \\ NA_2 - 1 & 0 & NA_2 & NA_1 \\ DA_2 & 0 & DA_2 & DA_1 \end{pmatrix}$$

Se supone cierto para n por hipótesis de inducción, y se muestra para $n + 1$ cuando n es par.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_{n-1} & 1 & DA_{n-1} & DA_{n-2} - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & NA_{n-2} \\ DA_{n-1} & 0 & DA_{n-1} & DA_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_{n-1} & 1 & DA_{n-1} & DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} \\ DA_{n-1} & 0 & DA_{n-1} & DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_{n-1} & 1 & DA_{n-1} & DA_n - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & NA_n \\ DA_{n-1} & 0 & DA_{n-1} & DA_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se muestra ahora para $n = K + 1$ cuando K es impar.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_n & 0 & a_n & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_{n-2} & 1 & DA_{n-2} & DA_{n-1} - 1 \\ NA_{n-2} - 1 & 0 & NA_{n-2} & NA_{n-1} \\ DA_{n-2} & 0 & DA_{n-2} & DA_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_n & 0 & a_n & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} & 1 & DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} & DA_{n-1} - 1 \\ NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} & 0 & NA_{n-2} + a_n NA_{n-1} & NA_{n-1} \\ DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} & 0 & DA_{n-2} + a_n DA_{n-1} & DA_{n-1} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DA_n & 1 & DA_n & DA_{n-1} - 1 \\ NA_n - 1 & 0 & NA_n & NA_{n-1} \\ DA_n & 0 & DA_n & DA_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

A partir del Lema 5, de manera similar a los Lemas 8 y 9 se puede obtener facilmente lo siguiente.

Lema 10. *Dada una 4-trenza de la forma $I_i(TA_n)$ se tiene:*

$$M_a(I_i(TA_n)) = \begin{bmatrix} DA_n & -iDA_{n-1} & DA_n - 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} & iNA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} - 1 & iNA_n & 1 \end{bmatrix}, \text{ para } n \text{ impar}$$

$$M_a(I_i(TA_n)) = \begin{bmatrix} DA_{n-1} & -iDA_n & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_n & iNA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_n - 1 & iNA_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \text{ para } n \text{ par}$$

Demostración. Demostración por inducción. Se ve primero para el caso $n = 1$

$$M_a(I_i(TA_1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_1 & 1 & ia_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_1 & 0 & ia_1 & 1 \end{bmatrix}$$

basándose en las fórmulas 2.4 vistas en el capítulo 3 se tiene:

$$\begin{aligned}
N[a_0] &= 1, N[a_1] = a_1, N[a_2] = a_1 a_2 + 1 \\
D[a_0] &= 0, D[a_1] = 1, D[a_2] = a_2
\end{aligned}$$

por lo que

$$M_a(I_i(TA_1)) = \begin{bmatrix} DA_1 & -iDA_0 & DA_1 - 1 & 0 \\ iNA_1 & NA_0 & iNA_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_1 & NA_0 - 1 & iNA_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se ve si cumple para $n = 2$

$$M_a(I_i(TA_2)) = \begin{bmatrix} 1 & -ia_2 & 0 & 0 \\ ia_1 & a_1a_2 + 1 & ia_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_1 & a_1a_2 & ia_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Basándose en las fórmulas 2.4

$$= \begin{bmatrix} DA_1 & -iDA_2 & DA_1 - 1 & 0 \\ iNA_1 & NA_2 & iNA_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_1 & NA_2 - 1 & iNA_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se supone cierto para n por hipótesis de inducción, y se muestra para $n + 1$ cuando n es par.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_1 & 1 & ia_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_1 & 0 & ia_1 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & -ia_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_n & 1 & ia_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_n & 0 & ia_n & 1 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} DA_{n-2} & -iDA_{n-1} & DA_{n-2} - 1 & 0 \\ iNA_{n-2} & NA_{n-1} & iNA_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_{n-2} & NA_{n-1} - 1 & iNA_{n-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_n & 1 & ia_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_n & 0 & ia_n & 1 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} DA_{n-2} - (i^2)a_nDA_{n-1} & -iDA_{n-1} & DA_{n-2} - (i^2)a_nDA_{n-1} - 1 & 0 \\ iNA_{n-2} + ia_nNA_{n-1} & NA_{n-1} & iNA_{n-2} + ia_nNA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_{n-2} + ia_nNA_{n-1} & NA_{n-1} - 1 & iNA_{n-2} + ia_nNA_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} DA_n & -iDA_{n-1} & DA_n - 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} & iNA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} - 1 & iNA_n & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se muestra para $n + 1$ cuando n es impar

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_1 & 1 & ia_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_1 & 0 & ia_1 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_{n-1} & 1 & ia_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_{n-1} & 0 & ia_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -ia_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} DA_{n-1} & -iDA_{n-2} & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_{n-2} & iNA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_{n-2} - 1 & iNA_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -ia_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} DA_{n-1} & -iDA_{n-2} - ia_n DA_{n-1} & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_{n-2} + (-i^2)a_n NA_{n-1} & iNA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_{n-2} + (-i^2)a_n NA_{n-1} - 1 & iNA_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} DA_{n-1} & -iDA_n & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_n & iNA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_n - 1 & iNA_{n-1} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Lema 11. Dada una 4-trenza de la forma $I^s(TA_n)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
M_a(I^s(TA_n)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_{n-1} & 1 & iDA_{n-1} & DA_n - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & -iNA_n \\ iDA_{n-1} & 0 & iDA_{n-1} & DA_n \end{bmatrix}, \quad \text{para } n \text{ impar} \\
M_a(I^s(TA_n)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_n & 1 & iDA_n & DA_{n-1} - 1 \\ NA_n - 1 & 0 & NA_n & -iNA_{n-1} \\ iDA_n & 0 & iDA_n & DA_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{para } n \text{ par}
\end{aligned}$$

Demostración. Demostración por inducción. Se ve el caso para $n = 1$

$$M_a(I^s(TA_1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -ia_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

basándose en las fórmulas 2.4 vistas en el capítulo 3 se tiene:

$$\begin{aligned}
N[a_0] &= 1, \quad N[a_1] = a_1, \quad N[a_2] = a_1 a_2 + 1 \\
D[a_0] &= 0, \quad D[a_1] = 1, \quad D[a_2] = a_2
\end{aligned}$$

por lo que

$$M_a(I^s(TA_1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_0 & 1 & iDA_0 & DA_1 - 1 \\ NA_0 - 1 & 0 & NA_0 & -iNA_1 \\ iDA_0 & 0 & iDA_0 & DA_1 \end{bmatrix}$$

Ahora se ve el caso $n = 2$

$$M_a(I^s(TA_2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_2 & 1 & ia_2 & 0 \\ a_1a_2 & 0 & a_1a_2 + 1 & -ia_1 \\ ia_2 & 0 & ia_2 & 1 \end{bmatrix}$$

basándose en las fórmulas 2.4 se tiene

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_2 & 1 & iDA_2 & DA_1 - 1 \\ NA_2 - 1 & 0 & NA_2 & -iNA_1 \\ iDA_2 & 0 & iDA_2 & DA_1 \end{bmatrix}$$

Se supone cierto para n por hipótesis de inducción, y se muestra para $n + 1$ cuando n es par

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -ia_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_{n-1} & 1 & ia_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_{n-1} & 0 & ia_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -ia_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_{n-1} & 1 & iDA_{n-1} & DA_{n-2} - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & -iNA_{n-2} \\ iDA_{n-1} & 0 & iDA_{n-1} & DA_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -ia_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_{n-1} & 1 & iDA_{n-1} & DA_{n-2} - (i^2)a_nDA_{n-1} - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & -iNA_{n-2} + -ia_nNA_{n-1} \\ iDA_{n-1} & 0 & iDA_{n-1} & DA_{n-2} - (i^2)a_nDA_{n-1} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_{n-1} & 1 & iDA_{n-1} & DA_n - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & -iNA_n \\ iDA_{n-1} & 0 & iDA_{n-1} & DA_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se muestra para $n + 1$ cuando n es impar.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -ia_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -ia_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_n & 1 & ia_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_n & 0 & ia_n & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_{n-2} & 1 & iDA_{n-2} & DA_{n-1} - 1 \\ NA_{n-2} - 1 & 0 & NA_{n-2} & -iNA_{n-1} \\ iDA_{n-2} & 0 & iDA_{n-2} & DA_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ia_n & 1 & ia_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ia_n & 0 & ia_n & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_{n-2} + ia_n DA_{n-1} & 1 & iDA_{n-2} + ia_n DA_{n-1} & DA_{n-1} - 1 \\ NA_{n-2} - (i^2)a_n NA_{n-1} & 0 & NA_{n-2} - (i^2)a_n NA_{n-1} & -iNA_{n-1} \\ iDA_{n-2} + ia_n DA_{n-1} & 0 & iDA_{n-2} + ia_n DA_{n-1} & DA_{n-1} \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_n & 1 & iDA_n & DA_{n-1} - 1 \\ NA_n - 1 & 0 & NA_n & -iNA_{n-1} \\ iDA_n & 0 & iDA_n & DA_{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Con ayuda del Lema 5, la forma de obtener la matriz correspondiente a una 4-trenza es directa. Basta con sustituir la sucesión de números de los diferentes tipos de cruces en sus matrices correspondientes y multiplicar estas matrices entre sí (esto por el Lema 4, análogamente a como se muestra en el Ejemplo 6) aún cuando existan 4-trenzas que no tengan cruces en dos de sus cuerdas. Sin embargo hasta el momento no se ha visto el camino de regreso, esto es, que dada una matriz cualquiera encontrar una trenza correspondiente a esa matriz (tomando en cuenta que a cada matriz no le corresponde necesariamente una trenza). Ahora bien, con la ayuda de los lemas 10 y 11, si tenemos una matriz con la estructura correspondiente a una 4-trenza de la forma I_i o I^s entonces se puede obtener (a partir de este tipo de matrices) sus trenzas correspondientes basándose en el procedimiento 1.

En el siguiente procedimiento se verá como asociar una trenza a una matriz. Cuando una matriz tiene cierta estructura entonces se podrá asociar a ésta una 4-trenza, aquí se mostrará la forma de cómo lograr este objetivo encontrando de esta manera un invariante para un subconjunto de 4-trenzas.

Procedimiento 1. Dada una matriz de la forma:

$$M_a(T) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_5 & x_6 & x_7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & 1 \end{bmatrix}$$

Con $x_1, x_2, \dots, x_{15} \in \mathbb{C}$

Paso 1. El primer paso es descartar la posibilidad de que es una matriz asignada a una 4-trenza que tiene la forma $I^s(TA_n)$ ya que la estructura de la matriz no coincide con la matriz asignada a una 4-trenza como ésta. Ahora, es lógico que ésta es una matriz correspondiente a una 4-trenza de la forma $I_i(TA_n)$ por lo que se reducen las posibilidades a las dos siguientes opciones:

$$M_a(I_i(TA_n)) = \begin{cases} \begin{bmatrix} DA_n & -iDA_{n-1} & DA_n - 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} & iNA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} - 1 & iNA_n & 1 \end{bmatrix} & \text{para } n \text{ impar} \\ \begin{bmatrix} DA_{n-1} & -iDA_n & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_n & iNA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_n - 1 & iNA_{n-1} & 1 \end{bmatrix} & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Dado que al asociar a las fracciones continuas NA_n/DA_n y NA_{n-1}/DA_{n-1} de cualquiera de estas matrices con una sucesión de números se obtiene una 4-trenza correspondiente, y mientras los números complejos corresponda a la estructura de las matrices del Lema 10 ($M_a(I_i(TA_n))$) para n par e impar), se harán los cálculos sin tomar en cuenta los complejos.

Paso 2. Ahora, se calculan las fracciones continuas de las entradas $\frac{x_5}{x_1}$ y $\frac{x_6}{x_2}$ ya que estas representan los valores de NA_n/DA_n y NA_{n-1}/DA_{n-1} independientemente del caso en el que se encuentren. Dado que no se tiene conocimiento de si n es par o impar, y debido a que un número $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas ([10], p.327) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{x_5}{x_1} &= [y_1, y_2, \dots, y_l] = [y_1, y_2, \dots, y_l - 1, 1] \\ \frac{x_6}{x_2} &= [w_1, w_2, \dots, w_m] = [w_1, w_2, \dots, w_m - 1, 1] \end{aligned}$$

Paso 3. Se hace la comparación de las dos fracciones continuas de $\frac{x_5}{x_1}$ y $\frac{x_6}{x_2}$ donde se tienen dos casos.

- Si $m = l + 1$ se esta en el caso en que n es par. Si $y_i = w_i$ con $i = 1, 2, \dots, l$, se dice por la Definición 7 que $[y_1, y_2, \dots, y_l]$ y $[w_1, w_2, \dots, w_m]$ estan \mathcal{CL} relacionadas, entonces:

$$\frac{x_6}{x_2} = [w_1, w_2, \dots, w_m] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{x_5}{x_1} = [y_1, y_2, \dots, y_l] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

pero si al menos un $y_i \neq w_i$, con $i = 1, 2, \dots, l$ entonces se hace la comparación de las fracciones continuas $[y_1, y_2, \dots, y_l - 1, 1]$ y $[w_1, w_2, \dots, w_m - 1, 1]$. Si $y_i = w_i$ con $i = 1, 2, \dots, l - 1$ y además $y_l - 1 = w_{m-1}$ y $1 = w_m - 1$ entonces:

$$\frac{x_6}{x_2} = [w_1, w_2, \dots, w_m - 1, 1] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{x_5}{x_1} = [y_1, y_2, \dots, y_l - 1, 1] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

Por lo tanto una 4-trenza correspondiente a la matriz dada es:

$$I_i(TA_n) = \mathcal{T}[0, a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n] \text{ con } n \text{ par}$$

- Si $l = m + 1$ se esta en el caso en que n es impar. Si $y_i = w_i$ con $i = 1, 2, \dots, m$, se dice por la Definición 7 que $[y_1, y_2, \dots, y_l]$ y $[w_1, w_2, \dots, w_m]$ estan \mathcal{CL} relacionadas, entonces:

$$\frac{x_5}{x_1} = [y_1, y_2, \dots, y_l] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{x_6}{x_2} = [w_1, w_2, \dots, w_m] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

pero si al menos un $y_i \neq w_i$, con $i = 1, 2, \dots, m$ entonces se hace la comparación de las fracciones continuas $[y_1, y_2, \dots, y_l - 1, 1]$ y $[w_1, w_2, \dots, w_m - 1, 1]$. Si $y_i = w_i$ con $i = 1, 2, \dots, m - 1$ y además $w_m - 1 = y_{l-1}$ y $1 = y_l - 1$ entonces:

$$\frac{x_5}{x_1} = [y_1, y_2, \dots, y_l - 1, 1] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{x_6}{x_2} = [w_1, w_2, \dots, w_m - 1, 1] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

Por lo tanto una 4-trenza correspondiente a la matriz dada es:

$$I_i(TA_n) = \mathcal{T}[0, a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n] \text{ con } n \text{ impar}$$

Despues de analizar el procedimiento 1 se muestra a continuación un ejemplo.

Ejemplo 7. Sea la matriz

$$M_a(T) = \begin{bmatrix} 7 & -2i & 6 & 0 \\ 10i & 3 & 10i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10i & 2 & 10i & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es una trenza correspondiente a esta matriz?

Paso 1. Usando el Lema 10 resulta evidente que esta matriz tiene la estructura de una matriz correspondiente a una 4-trenza de la forma $I_i(TA_n)$ por lo que se tienen dos opciones:

$$M_a(I_i(TA_n)) = \begin{cases} \begin{bmatrix} DA_n & -iDA_{n-1} & DA_n - 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} & iNA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} & -iNA_n & 1 \end{bmatrix} & \text{para } n \text{ impar} \\ \begin{bmatrix} DA_{n-1} & -iDA_n & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_n & iNA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_{n-1} & NA_n - 1 & iNA_{n-1} & 1 \end{bmatrix} & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Dado que los números complejos de la matriz dada corresponden a los de una matriz de una 4-trenza de la forma $I_i(TA_n)$, entonces no se tomarán en cuenta para la realización de los cálculos siguientes.

Paso 2. se procede a calcular las fracciones continuas de las entradas $\frac{x_5}{x_1}$ y $\frac{x_6}{x_2}$ de la matriz dada.

$$\frac{x_5}{x_1} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = [1, 2, 3] = [1, 2, 2, 1]$$

$$\frac{x_6}{x_2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = [1, 2] = [1, 1, 1]$$

Paso 3. Se hace la comparación de las dos fracciones continuas obtenidas. De $[1, 2, 3]$ y $[1, 2]$ se comparan los componentes $1 = 1, 2 = 2$; ahora de $[1, 2, 2, 1]$ y $[1, 1, 1]$ se comparan los componentes $1 = 1, 2 \neq 1$ y $2 \neq 1$. Como en el caso de $[1, 2, 3]$ y $[1, 2]$ no se tienen ningún componente comparado diferente por la Definición 7 están CL relacionados. Por lo tanto:

$$\frac{x_5}{x_1} = [1, 2, 3] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n$$

y

$$\frac{x_6}{x_2} = [1, 2] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1}$$

Ya que el número de componentes de los vectores de las fracciones continuas obtenidas de las entradas $\frac{x_5}{x_1}$ es mayor que el de las fracciones obtenidas de $\frac{x_6}{x_2}$ entonces se está en el caso en que n es impar. Y una 4-trenza correspondiente a la matriz dada es $I_i(TA_3) = \mathcal{T}[0, 1, 2, 0, 3]$

Procedimiento 2. Ahora se verá el caso en el que la matriz dada es de la forma:

$$M_a(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & x_7 & x_8 \\ x_9 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & 0 & x_{15} & x_{16} \end{bmatrix}$$

Con $x_1, x_2, \dots, x_{15} \in \mathbb{C}$

Paso 1. Al tener esa estructura la matriz entonces sólo se tiene la posibilidad de que la 4-trenza sea de la forma $I^s(TA_n)$ y esto da dos posibilidades:

$$M_a(I^s(TA_n)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_{n-1} & 1 & iDA_{n-1} & DA_n - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & -iNA_n \\ iDA_{n-1} & 0 & iDA_{n-1} & DA_n \end{bmatrix} \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$$M_a(I^s(TA_n)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_n & 1 & iDA_n & DA_{n-1} - 1 \\ NA_n - 1 & 0 & NA_n & -iNA_{n-1} \\ iDA_n & 0 & iDA_n & DA_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{para } n \text{ par}$$

De manera similar al procedimiento **1** en este caso se harán los cálculos sin tomar en cuenta los complejos.

Paso 2. Calcular las fracciones continuas de $\frac{x_{11}}{x_{15}}$ y $\frac{x_{12}}{x_{16}}$ ya que estas representan los valores de NA_n/DA_n y NA_{n-1}/DA_{n-1} independientemente del caso en el que se encuentren. Dado que no se tiene conocimiento de si n es par o impar, y debido a que un número $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas ([10], p.327) se obtiene:

$$\frac{x_{11}}{x_{15}} = [c_1, c_2, \dots, c_l] = [c_1, c_2, \dots, c_l - 1, 1]$$

$$\frac{x_{12}}{x_{16}} = [b_1, b_2, \dots, b_m] = [b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$$

Paso 3. Se hace la comparación de las dos fracciones continuas de $\frac{x_{11}}{x_{15}}$ y $\frac{x_{12}}{x_{16}}$ donde se tienen dos casos.

- Si $m = l + 1$ se está en el caso en que n es impar. Si $c_i = b_i$ con $i = 1, 2, \dots, l$, se dice por la Definición 7 que $[c_1, c_2, \dots, c_l]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ están \mathcal{CL} relacionadas, entonces:

$$\frac{x_{11}}{x_{15}} = [c_1, c_2, \dots, c_l] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

y

$$\frac{x_{12}}{x_{16}} = [b_1, b_2, \dots, b_m] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

pero si al menos un $c_i \neq b_i$, con $i = 1, 2, \dots, l$ entonces se hace la comparación de las fracciones continuas $[c_1, c_2, \dots, c_l - 1, 1]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$. Si $c_i = b_i$ con $i = 1, 2, \dots, l - 1$ y además $c_l - 1 = b_{m-1}$ y $1 = b_m - 1$ entonces:

$$\frac{x_{11}}{x_{15}} = [c_1, c_2, \dots, c_l - 1, 1] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

y

$$\frac{x_{12}}{x_{16}} = [b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Por lo tanto una 4-trenza correspondiente a la matriz dada es:

$$I^s(TA_n) = \mathcal{T}[a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n]$$

con n impar.

- Si $l = m + 1$ se está en el caso en que n es par. Si $c_i = b_i$ con $i = 1, 2, \dots, m$, se dice por la Definición 7 que $[c_1, c_2, \dots, c_l]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ están \mathcal{CL} relacionadas, entonces:

$$\frac{x_{11}}{x_{15}} = [c_1, c_2, \dots, c_l] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{x_{12}}{x_{16}} = [b_1, b_2, \dots, b_m] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

pero si al menos un $c_i \neq b_i$, con $i = 1, 2, \dots, m$ entonces se hace la comparación de las fracciones continuas $[c_1, c_2, \dots, c_l - 1, 1]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$. Si $c_i = b_i$ con $i = 1, 2, \dots, m - 1$ y además $b_m - 1 = c_{l-1}$ y $1 = c_l - 1$ entonces:

$$\frac{x_{11}}{x_{15}} = [c_1, c_2, \dots, c_l - 1, 1] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{x_{12}}{x_{16}} = [b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

Por lo tanto una 4-trenza correspondiente a la matriz dada es:

$$I^s(TA_n) = \mathcal{T}[0, a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n]$$

con n par.

Se muestra a continuación un ejemplo de cómo utilizar el procedimiento 2.

Ejemplo 8. Sea la matriz

$$M_a(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5i & 1 & 5i & 2 \\ 6 & 0 & 7 & -4i \\ 5i & 0 & 5i & 3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es una trenza correspondiente a esta matriz?

Paso 1. Usando el Lema 11 resulta que esta matriz tiene la estructura de una matriz correspondiente a una 4-trenza de la forma $I^s(TA_n)$ donde se tienen dos opciones:

$$M_a(I^s(T(a_n))) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_{n-1} & 1 & iDA_{n-1} & DA_{n-1} - 1 \\ NA_{n-1} - 1 & 0 & NA_{n-1} & -iNA_n \\ iDA_{n-1} & 0 & iDA_{n-1} & DA_n \end{bmatrix} \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$$M_a(I^s(T(a_n))) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_n & 1 & iDA_n & DA_{n-1} - 1 \\ NA_n - 1 & 0 & NA_n & -iNA_{n-1} \\ iDA_n & 0 & iDA_n & DA_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{para } n \text{ par}$$

Dado que los números complejos de la matriz dada corresponden a los de una matriz de una 4-trenza de la forma $I^s(TA_n)$, entonces no se tomarán en cuenta para la realización de los cálculos siguientes.

Paso 2. se calculan las fracciones continuas de las entradas $\frac{x_{11}}{x_{15}}$ y $\frac{x_{12}}{x_{16}}$ de la matriz dada.

$$\frac{x_{11}}{x_{15}} = \frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = [1, 2, 2] = [1, 2, 1, 1]$$

$$\frac{x_{12}}{x_{16}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = [1, 3] = [1, 2, 1]$$

Paso 3. Se hace la comparación de $[1, 2, 2]$ y $[1, 3]$: $1 = 1, 2 \neq 3$. Ahora de $[1, 2, 1, 1]$ y $[1, 2, 1]$: $1 = 1, 2 = 2$ y $1 = 1$. En este caso las fracciones largas de $\frac{x_{11}}{x_{15}}$ y $\frac{x_{12}}{x_{16}}$, que son: $[1, 2, 1, 1]$ y $[1, 2, 1]$ no tienen ningún componente comparado diferente, entonces por la Definición 7 están \mathcal{CL} relacionadas. Por lo tanto:

$$\frac{x_{12}}{x_{16}} = [1, 2, 1, 1] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n$$

y

$$\frac{x_{11}}{x_{15}} = [1, 2, 1] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1}$$

Ya que el número de componentes de los vectores de las fracciones continuas obtenidas de las entradas $\frac{x_{12}}{x_{16}}$ es mayor que el de las fracciones obtenidas de $\frac{x_{11}}{x_{15}}$ entonces se está en el caso en que n es par. Y una 4-trenza correspondiente a la matriz dada es $I^s(TA_4) = \mathcal{T}[1, 2, 0, 1, 1]$.

Como se ve en los procedimientos 1 y 2 dada una matriz con la estructura correspondiente a una 4-trenza de la forma $I_i(TA_n)$ e $I^s(TA_n)$ a partir de ésta obtendremos una 4-trenza correspondiente. Note que no toda matriz M_a tiene una 4-trenza asociada. Por lo que se obtuvo el siguiente resultado.

Teorema 3. Dados dos diagramas alternantes de trenzas de la forma $I_i(TA_n)$ y $I_i(TB_m)$, entonces $I_i(TA_n) = I_i(TB_m)$ si y sólo si $M_a(I_i(TA_n)) = M_a(I_i(TB_m))$ para $a_n, b_m \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Si $I_i(TA_n) = \mathcal{T}[0, a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, A_n] = \mathcal{T}[0, b_1, b_2, 0, b_3, b_4, 0, \dots, B_m] = I_i(TB_m)$ entonces $m = n$ y $a_i = b_i$ con $i = 1, 2, \dots, n$, además como M_a es invariante por el Lema 10 $M_a(I_i(TA_n)) = M_a(I_i(TB_m))$.

Por otro lado, si $M_a(I_i(TA_n)) = M_a(I_i(TB_m))$ por el Lema 8 si n y m son impares (el caso par es análogo) entonces:

$$\begin{aligned} M_a(I_i(TA_n)) &= \begin{bmatrix} DA_n & -iDA_{n-1} & DA_n - 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} & iNA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNA_n & NA_{n-1} - 1 & iNA_n & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} DB_m & -iDB_{m-1} & DB_m - 1 & 0 \\ iNB_m & NB_{m-1} & iNB_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iNB_m & NB_{m-1} - 1 & iNB_m & 1 \end{bmatrix} = M_a(I_i(TB_m)) \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $(\frac{NA_n}{DA_n}, \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}})$ y $(\frac{NB_m}{DB_m}, \frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}})$ son los mismos pares no ordenados ya que las entradas de las matrices son iguales. Debido a que $\frac{p_s}{q_s}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas [[10], p.327], tenemos que si $[c_1, \dots, c_s] > 0$ es una fracción continua de $\frac{p_s}{q_s}$ donde $c_s > 0$, entonces $\frac{p_s}{q_s} = [c_1, \dots, c_s] = [c_1, \dots, c_s - 1, 1]$, son sólo dos fracciones continuas de $\frac{p_s}{q_s}$. Además si $[c_1, \dots, c_{s-1}] > 0$ es una fracción continua de $\frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}$ donde $c_{s-1} > 0$, entonces también $\frac{p_{s-1}}{q_{s-1}} = [c_1, \dots, c_{s-1}] = [c_1, \dots, c_{s-1} - 1, 1]$, tiene sólo dos fracciones continuas de $\frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}$. Note que si se tienen un par de números racionales no ordenados $(\frac{p_s}{q_s}, \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}})$. Donde $(\frac{p_s}{q_s}, \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}) = ([c_1, \dots, c_s], [c_1, \dots, c_{s-1}])$ o $(\frac{p_s}{q_s}, \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}) = ([c_1, \dots, c_s - 1, 1], [c_1, \dots, c_{s-1} - 1, 1])$, éste determina únicamente la fracción continua $[c_1, \dots, c_s]$ o $[c_1, \dots, c_s - 1, 1]$ por lo tanto para pares no ordenados se tiene:

$$([c_1, \dots, c_s], [c_1, \dots, c_{s-1}]) \neq ([c_1, \dots, c_s - 1, 1], [c_1, \dots, c_{s-1} - 1, 1])$$

De ello se desprende que la fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ determina únicamente la fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ o de la fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$ y $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1} - 1, 1]$ se determina únicamente $[a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$; similarmente se tiene que la fracción continua $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_{m-1}]$ determinan únicamente la fracción continua $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ o de la fracción $[b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_{m-1} - 1, 1]$ se determinan solamente la fracción $[b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$. Puesto que:

$$\frac{NA_n}{DA_n} = [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$$

$$\frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} - 1, 1]$$

y

$$\frac{NB_m}{DB_m} = [b_1, b_2, \dots, b_m] = [b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$$

$$\frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}} = [b_1, b_2, \dots, b_{m-1}] = [b_1, b_2, \dots, b_{m-1} - 1, 1]$$

Y dado que $([a_1, a_2, \dots, a_n], [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}])$ y $([b_1, b_2, \dots, b_m], [b_1, b_2, \dots, b_{m-1}])$ o $([a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1], [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} - 1, 1])$ y $([b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1], [b_1, b_2, \dots, b_{m-1} - 1, 1])$ son los mismos como pares no ordenados, se tiene que la única fracción continua satisface:

$$[b_1, b_2, \dots, b_m] = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

o

$$[b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$$

lo cual implica que $m = n$ y $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, por lo tanto $TA_n = TB_m$. Como las matrices tienen la estructura de una trenza de la forma de la imagen de la función I_i entonces:

$$I_i(TA_n) = \mathcal{T}[0, a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n] = \mathcal{T}[0, b_1, b_2, 0, b_3, b_4, 0, \dots, b_m] = I_i(TB_m)$$

□

Teorema 4. *Dados dos diagramas alternantes de trenzas de la forma $I^s(TA_n)$ y $I^s(TB_m)$, entonces $I^s(TA_n) = I^s(TB_m)$ si y sólo si $M_a(I^s(TA_n)) = M_a(I^s(TB_m))$ para $a_n, b_m \in \mathbb{Z}^+$*

Demostración. Si $I^s(TA_n) = \mathcal{T}[a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n] = \mathcal{T}[b_1, b_2, 0, b_3, b_4, 0, \dots, b_m] = I^s(TB_m)$ entonces $m = n$ y $a_i = b_i$ con $i = 1, 2, \dots, n$, además como M_a es invariante por el Lema 11 $M_a(I^s(TA_n)) = M_a(I^s(TB_m))$.

Por otro lado, si $M_a(I^s(TA_n)) = M_a(I^s(TB_m))$ por el Lema 11 si n y m son pares (el caso n, m impar es análogo) entonces:

$$\begin{aligned} M_a(I^s(TA_n)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDA_n & 1 & iDA_n & DA_{n-1} - 1 \\ NA_n - 1 & 0 & NA_n & -iNA_{n-1} \\ iDA_n & 0 & iDA_n & DA_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ iDB_m & 1 & iDB_m & DB_{m-1} - 1 \\ NB_m - 1 & 0 & NB_m & -iNB_{m-1} \\ iDB_m & 0 & iDB_m & DB_{m-1} \end{bmatrix} = M_a(I^s(TB_m)) \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $(\frac{NA_n}{DA_n}, \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}})$ y $(\frac{NB_m}{DB_m}, \frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}})$ son los mismos pares no ordenados ya que las entradas de las matrices son iguales. Debido a que $\frac{p_s}{q_s}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas [[10], p.327], tenemos que si $[c_1, \dots, c_s] > 0$ es una fracción continua de $\frac{p_s}{q_s}$ donde $c_s > 0$, entonces $\frac{p_s}{q_s} = [c_1, \dots, c_s] = [c_1, \dots, c_s - 1, 1]$, son sólo dos fracciones continuas de $\frac{p_s}{q_s}$. Además si $[c_1, \dots, c_{s-1}] > 0$ es una fracción continua de $\frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}$ donde $c_{s-1} > 0$, entonces también $\frac{p_{s-1}}{q_{s-1}} = [c_1, \dots, c_{s-1}] = [c_1, \dots, c_{s-1} - 1, 1]$, tiene sólo dos fracciones continuas de $\frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}$. Note que si se tienen un par de números racionales no ordenados $(\frac{p_s}{q_s}, \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}})$ donde $(\frac{p_s}{q_s}, \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}) = ([c_1, \dots, c_s], [c_1, \dots, c_{s-1}])$ o $(\frac{p_s}{q_s}, \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}) = ([c_1, \dots, c_s - 1, 1], [c_1, \dots, c_{s-1} - 1, 1])$, éste determina únicamente la fracción continua $[c_1, \dots, c_s]$ o $[c_1, \dots, c_s - 1, 1]$ por lo tanto para pares no ordenados se tiene:

$$([c_1, \dots, c_s], [c_1, \dots, c_{s-1}]) \neq ([c_1, \dots, c_s - 1, 1], [c_1, \dots, c_{s-1} - 1, 1])$$

De ello se desprende que la fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ determina únicamente la fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ o de la fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$ y $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1} - 1, 1]$ se determina únicamente $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1]$; similarmente se tiene que la fracción continua $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_{m-1}]$ determinan únicamente la fracción continua $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ o de la fracción $[b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$ y $[b_1, b_2, \dots, b_{m-1} - 1, 1]$ se determinan solamente la fracción $[b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$. Puesto que:

$$\frac{NA_n}{DA_n} = [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$$

$$\frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} - 1, 1]$$

y

$$\frac{NB_m}{DB_m} = [b_1, b_2, \dots, b_m] = [b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1]$$

$$\frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}} = [b_1, b_2, \dots, b_{m-1}] = [b_1, b_2, \dots, b_{m-1} - 1, 1]$$

Y dado que $([a_1, a_2, \dots, a_n], [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}])$ y $([b_1, b_2, \dots, b_m], [b_1, b_2, \dots, b_{m-1}])$ o $([a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1], [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} - 1, 1])$ y $([b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1], [b_1, b_2, \dots, b_{m-1} - 1, 1])$ son los mismos como pares no ordenados, se tiene que la única fracción continua satisface:

$$[b_1, b_2, \dots, b_m] = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

o

$$[b_1, b_2, \dots, b_m - 1, 1] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$$

lo cual implica que $m = n$ y $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, por lo tanto $TA_n = TB_m$. Como las matrices tienen la estructura de una trenza de la forma de la imagen de la función I^s entonces:

$$I^s(TA_n) = \mathcal{T}[a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n] = \mathcal{T}[b_1, b_2, 0, b_3, b_4, 0, \dots, b_m] = I^s(TB_m)$$

□

6.2. Matrices asignadas a ciertas sumas de 4-trenzas

Se sabe que $NA_n/DA_n = A_n = (a_1, \dots, a_n)$ como se vio en el capítulo 3, similar a esto se tiene que $NB_m/DB_m = B_m$ donde $B_m = (b_1, \dots, b_m)$ con $b_j \in \mathbb{Z}$ con $j = 1, 2, \dots, m$. Tomando en cuenta ésto, y con la ayuda del programa relizado en el software Maple (el cual podemos ver detalladamente en el apéndice A), se deducen los siguientes lemas.

Lema 12. *Dados dos diagramas de trenzas de la forma $I_i(TA_n)$ y $I^s(TB_m)$, con $n, m > 2$ la matriz de la suma es:*

$$M(I_i(TA_n) + I^s(TB_m)) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{pmatrix}$$

Donde para n, m impar :

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= DA_n + DA_{n-1} DB_{m-1} + (DA_n - 1)(NB_{m-1} - 1) \\
A_{1,2} &= DA_{n-1} \\
A_{1,3} &= DA_{n-1} DB_{m-1} + (DA_n - 1)NB_{m-1} \\
A_{1,4} &= DA_{n-1} (DB_m - 1) + (DA_n - 1)NB_m \\
A_{2,1} &= NA_n + NA_{n-1} DB_{m-1} + NA_n (NB_{m-1} - 1) \\
A_{2,2} &= NA_{n-1} \\
A_{2,3} &= NA_{n-1} DB_{m-1} + NA_n NB_{m-1} \\
A_{2,4} &= NA_{n-1} (DB_m - 1) + NA_n NB_m \\
A_{3,1} &= NB_{m-1} - 1 \\
A_{3,3} &= NB_{m-1} \\
A_{3,4} &= NB_m \\
A_{4,1} &= NA_n + (NA_{n-1} - 1) DB_{m-1} + NA_n (NB_{m-1} - 1) + DB_{m-1} \\
A_{4,2} &= NA_{n-1} - 1 \\
A_{4,3} &= (NA_{n-1} - 1) DB_{m-1} + NA_n NB_{m-1} + DB_{m-1} \\
A_{4,4} &= (NA_{n-1} - 1) (DB_{m-1} - 1) + NA_n DB_m
\end{aligned}$$

para n, m par

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= DA_{n-1} + DA_n DB_m + (DA_{n-1} - 1)(NB_m - 1) \\
A_{1,2} &= DA_n \\
A_{1,3} &= DA_n DB_m + (DA_{n-1} - 1)NB_m \\
A_{1,4} &= DA_n (DB_{m-1} - 1) + (DA_{n-1} - 1)NB_{m-1} \\
A_{2,1} &= NA_{n-1} + NA_n DB_m + NA_{n-1} (NB_m - 1) \\
A_{2,2} &= NA_n \\
A_{2,3} &= NA_n DB_m + NA_{n-1} NB_m \\
A_{2,4} &= NA_n (DB_{m-1} - 1) + NA_{n-1} NB_{m-1} \\
A_{3,1} &= NB_m - 1 \\
A_{3,3} &= NB_m \\
A_{3,4} &= NB_{m-1} \\
A_{4,1} &= NA_{n-1} + (NA_n - 1) DB_m + NA_{n-1} (NB_m - 1) + DB_m \\
A_{4,2} &= NA_n - 1 \\
A_{4,3} &= (NA_n - 1) DB_m + NA_{n-1} NB_m + DB_m \\
A_{4,4} &= (NA_n - 1) (DB_m - 1) + NA_{n-1} DB_{m-1}
\end{aligned}$$

para n par y m impar

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= DA_{n-1} + DA_n DB_{m-1} + (DA_{n-1} - 1)(NB_{m-1} - 1) \\
A_{1,2} &= DA_n \\
A_{1,3} &= DA_n DB_{m-1} + (DA_{n-1} - 1)NB_{m-1} \\
A_{1,4} &= DA_n (DB_m - 1) + (DA_{n-1} - 1)NB_m \\
A_{2,1} &= NA_{n-1} + NA_n DB_{m-1} + NA_{n-1}(NB_{m-1} - 1) \\
A_{2,2} &= NA_n \\
A_{2,3} &= NA_n DB_{m-1} + NA_{n-1}NB_{m-1} \\
A_{2,4} &= NA_n (DB_m - 1) + NA_{n-1}NB_m \\
A_{3,1} &= NB_{m-1} - 1 \\
A_{3,3} &= NB_{m-1} \\
A_{3,4} &= NB_m \\
A_{4,1} &= NA_{n-1} + (NA_n - 1)DB_{m-1} + NA_{n-1}(NB_{m-1} - 1) + DB_{m-1} \\
A_{4,2} &= NA_n - 1 \\
A_{4,3} &= (NA_n - 1)DB_{m-1} + NA_{n-1}NB_{m-1} + DB_{m-1} \\
A_{4,4} &= (NA_n - 1)(DB_m - 1) + NA_{n-1}NB_m + DB_m
\end{aligned}$$

para n impar y m par

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= DA_n + DA_{n-1} DB_m + (DA_n - 1)(NB_m - 1) \\
A_{1,2} &= DA_{n-1} \\
A_{1,3} &= DA_{n-1} DB_m + (DA_n - 1)NB_m \\
A_{1,4} &= DA_{n-1} (DB_{m-1} - 1) + (DA_n - 1)NB_{m-1} \\
A_{2,1} &= NA_n + NA_{n-1}DB_m + NA_n(NB_m - 1) \\
A_{2,2} &= NA_{n-1} \\
A_{2,3} &= NA_{n-1}DB_m + NA_nNB_m \\
A_{2,4} &= NA_{n-1}(DB_{m-1} - 1) + NA_nNB_{m-1} \\
A_{3,1} &= NB_m - 1 \\
A_{3,3} &= NB_m \\
A_{3,4} &= NB_{m-1} \\
A_{4,1} &= NA_n + (NA_{n-1} - 1)DB_m + NA_n(NB_m - 1) + DB_m \\
A_{4,2} &= NA_{n-1} - 1 \\
A_{4,3} &= (NA_{n-1} - 1)DB_m + NA_nNB_m + DB_m \\
A_{4,4} &= (NA_{n-1} - 1)(DB_{m-1} - 1) + NA_nNB_{m-1} + DB_{m-1}
\end{aligned}$$

Demostración. Por los Lemas 8 y 9, si los diagramas de trenzas son de la forma $I_i(TA_n)$ y

$I^s(TB_m)$ sus matrices asignadas son:

$$\begin{aligned} \text{para } n \text{ impar } M(I_i(TA_n)) &= \begin{pmatrix} DA_n & DA_{n-1} & DA_n - 1 & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} & NA_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_n & NA_{n-1} - 1 & NA_n & 1 \end{pmatrix} \\ \text{para } n \text{ par } M(I_i(TA_n)) &= \begin{pmatrix} DA_{n-1} & DA_n & DA_{n-1} - 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_n & NA_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ NA_{n-1} & NA_n - 1 & NA_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{para } m \text{ impar } M(I^s(TB_m)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DB_{m-1} & 1 & DB_{m-1} & DB_{m-1} - 1 \\ NB_{m-1} - 1 & 0 & NB_{m-1} & NB_m \\ DB_{m-1} & 0 & DB_{m-1} & DB_m \end{pmatrix} \\ \text{para } m \text{ par } M(I^s(TB_m)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ DB_m & 1 & DB_m & DB_{m-1} - 1 \\ NB_{m-1} - 1 & 0 & NB_m & NB_{m-1} \\ DB_m & 0 & DB_m & DB_{m-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde $n, m \in \mathbb{Z}^+$, si se calcula $M(I_i(TA_n)) \cdot M(I^s(TB_m))$ cuando n y m son impares tenemos

$$M(I_i(TA_n)) \cdot M(I^s(TB_m)) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{pmatrix}$$

Donde

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= DA_n + DA_{n-1} DB_{m-1} + (DA_n - 1)(NB_{m-1} - 1) \\ A_{1,2} &= DA_{n-1} \\ A_{1,3} &= DA_{n-1} DB_{m-1} + (DA_n - 1)NB_{m-1} \\ A_{1,4} &= DA_{n-1} (DB_{m-1} - 1) + (DA_n - 1)NB_m \\ A_{2,1} &= NA_n + NA_{n-1} DB_{m-1} + NA_n (NB_{m-1} - 1) \\ A_{2,2} &= NA_{n-1} \\ A_{2,3} &= NA_{n-1} DB_{m-1} + NA_n NB_{m-1} \\ A_{2,4} &= NA_{n-1} (DB_{m-1} - 1) + NA_n NB_m \\ A_{3,1} &= NB_{m-1} - 1 \\ A_{3,3} &= NB_{m-1} \\ A_{3,4} &= NB_m \\ A_{4,1} &= NA_n + (NA_{n-1} - 1)DB_{m-1} + NA_n (NB_{m-1} - 1) + DB_{m-1} \\ A_{4,2} &= NA_{n-1} - 1 \\ A_{4,3} &= (NA_{n-1} - 1)DB_{m-1} + NA_n NB_{m-1} + DB_{m-1} \\ A_{4,4} &= (NA_{n-1} - 1)(DB_{m-1} - 1) + NA_n DB_m \end{aligned}$$

por el Lema 12

$$= M(I_i(TA_n) + I^s(TB_m))$$

La demostración en los casos cuando n, m son par; n par m impar y n impar m par es análoga al caso anterior. \square

Lema 13. *Dados dos diagramas de trenzas de la forma $I^s(TB_m)$ y $I_i(TA_n)$, con $n, m > 2$, la matriz de la suma es:*

$$M(I^s(TB_m) + I_i(TA_n)) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{pmatrix}$$

Donde para n, m impar

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= DA_n \\ A_{1,2} &= DA_{n-1} \\ A_{1,3} &= DA_n - 1 \\ A_{2,1} &= DA_n DB_{m-1} + NA_n + NA_n(DB_m - 1) \\ A_{2,2} &= DA_{n-1}DB_{m-1} + (NA_{n-1} - 1) + (NA_{n-1} - 1)(DB_m - 1) \\ A_{2,3} &= DB_{m-1}(DA_n - 1) + NA_n + DB_{m-1} + NA_n(DB_m - 1) \\ A_{2,4} &= DB_m - 1 \\ A_{3,1} &= (NB_{m-1} - 1)DA_n + NA_n + NB_m \\ A_{3,2} &= (NB_{m-1} - 1)DA_{n-1} + NB_m(NA_{n-1} - 1) \\ A_{3,3} &= (DA_n - 1)(NB_{m-1} - 1) + NB_{m-1} + NA_n NB_m \\ A_{3,4} &= NB_m \\ A_{4,1} &= DA_n DB_{m-1} + NA_n DB_m \\ A_{4,2} &= DA_{n-1}DB_{m-1} + (NA_{n-1} - 1)DB_m \\ A_{4,3} &= DB_{m-1}(DA_n - 1) + DB_{m-1} + NA_n DB_m \\ A_{4,4} &= DB_m \end{aligned}$$

para n, m par

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= DA_{n-1} \\
A_{1,2} &= DA_n \\
A_{1,3} &= DA_{n-1} - 1 \\
A_{2,1} &= DA_{n-1}DB_m + NA_{n-1} + NA_{n-1}(DB_{m-1} - 1) \\
A_{2,2} &= DA_nDB_m + NA_n + (NA_n - 1)(DB_{m-1} - 1) \\
A_{2,3} &= DB_m(DA_{n-1} - 1) + NA_{n-1} + DB_m + NA_{n-1}(DB_{m-1} - 1) \\
A_{2,4} &= DB_{m-1} - 1 \\
A_{3,1} &= (NB_m - 1)DA_{n-1} + NA_{n-1} + NB_{m-1} \\
A_{3,2} &= (NB_m - 1)DA_n + NB_{m-1}(NA_n - 1) \\
A_{3,3} &= (DA_{n-1} - 1)(NB_m - 1) + NB_m + NA_{n-1}NB_{m-1} \\
A_{3,4} &= NB_{m-1} \\
A_{4,1} &= DA_{n-1}DB_m + NA_{n-1}DB_{m-1} \\
A_{4,2} &= DA_nDB_m + (NA_n - 1)DB_{m-1} \\
A_{4,3} &= DB_m(DA_{n-1} - 1) + DB_m + NA_{n-1}DB_{m-1} \\
A_{4,4} &= DB_{m-1}
\end{aligned}$$

para m impar y n par

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= DA_{n-1} \\
A_{1,2} &= DA_n \\
A_{1,3} &= DA_{n-1} - 1 \\
A_{2,1} &= DA_{n-1}DB_{m-1} + NA_{n-1} + NA_{n-1}(DB_m - 1) \\
A_{2,2} &= DA_nDB_{m-1} + NA_n + (NA_n - 1)(DB_m - 1) \\
A_{2,3} &= DB_{m-1}(DA_{n-1} - 1) + NA_{n-1} + DB_{m-1} + NA_{n-1}(DB_m - 1) \\
A_{2,4} &= DB_m - 1 \\
A_{3,1} &= (NB_{m-1} - 1)DA_{n-1} + NA_{n-1} + NB_m \\
A_{3,2} &= (NB_{m-1} - 1)DA_n + NB_m(NA_n - 1) \\
A_{3,3} &= (DA_{n-1} - 1)(NB_{m-1} - 1) + NB_{m-1} + NA_{n-1}NB_m \\
A_{3,4} &= NB_m \\
A_{4,1} &= DA_{n-1}DB_{m-1} + NA_{n-1}DB_m \\
A_{4,2} &= DA_nDB_{m-1} + (NA_n - 1)DB_m \\
A_{4,3} &= DB_{m-1}(DA_{n-1} - 1) + DB_{m-1} + NA_{n-1}DB_m \\
A_{4,4} &= DB_m
\end{aligned}$$

para m par y n impar

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= DA_n \\
A_{1,2} &= DA_{n-1} \\
A_{1,3} &= DA_n - 1 \\
A_{2,1} &= DA_n DB_m + NA_n + NA_n(DB_{m-1} - 1) \\
A_{2,2} &= DA_{n-1}DB_m + NA_{n-1} + (NA_{n-1} - 1)(DB_{m-1} - 1) \\
A_{2,3} &= DB_m(DA_n - 1) + NA_n + DB_m + NA_n(DB_{m-1} - 1) \\
A_{2,4} &= DB_{m-1} - 1 \\
A_{3,1} &= (NB_m - 1)DA_n + NA_n + NB_{m-1} \\
A_{3,2} &= (NB_m - 1)DA_{n-1} + NB_{m-1}(NA_{n-1} - 1) \\
A_{3,3} &= (DA_n - 1)(NB_m - 1) + NB_m + NA_n NB_{m-1} \\
A_{3,4} &= NB_{m-1} \\
A_{4,1} &= DA_n DB_m + NA_n DB_{m-1} \\
A_{4,2} &= DA_{n-1}DB_m + (NA_{n-1} - 1)DB_{m-1} \\
A_{4,3} &= DB_m(DA_n - 1) + DB_m + NA_n DB_{m-1} \\
A_{4,4} &= DB_{m-1}
\end{aligned}$$

Demostración. La demostración de este Lema es análoga a la del Lema 12 □

Recordando del Capítulo 3. Dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $NA_n/DA_n = A_n = [a_1, \dots, a_n]$ y $NA_n = N[a_1, \dots, a_n]$ y $DA_n = D[a_1, \dots, a_n]$.

tomando en cuenta esto se deducen los siguientes dos lemas, los cuales serán de gran ayuda al momento de obtener unas 4-tranzas correspondientes a la matriz de la suma $I_i(T(a_n)) + I^s(T(b_m))$.

Lema 14. *Dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tenemos*

$$N[a_1, \dots, a_n] = N[a_n, \dots, a_1]$$

Demostración. Demostración por inducción. Veamos primero para el caso $n = 1$

$$N[a_1] = a_1$$

Suponemos cierto para $n = K$

$$N[a_1, \dots, a_k] = a_k N[a_1, \dots, a_{k-1}] + N[a_1, \dots, a_{k-2}] = N[a_k, \dots, a_2] + N[a_k, \dots, a_3] = N[a_k, \dots, a_1]$$

por hipótesis de inducción y mostremos para $n = K + 1$.

$$\begin{aligned}
N[a_1, \dots, a_{k+1}] &= a_{k+1}N[a_1, \dots, a_k] + N[a_1, \dots, a_{k-1}] \\
&= a_{k+1}(a_1N[a_k, \dots, a_2] + N[a_k, \dots, a_3]) + N[a_1, \dots, a_{k-1}] \\
&= N[a_{k+1}]N[a_1]N[a_k, \dots, a_2] + N[a_{k+1}]N[a_k, \dots, a_3] + \\
&\quad N[a_1]N[a_{k-1}, \dots, a_2] + N[a_{k-1}, \dots, a_3] \\
&= a_1(N[a_{k+1}]N[a_k, \dots, a_2] + N[a_{k-1}, \dots, a_2]) + \\
&\quad N[a_{k+1}]N[a_3, \dots, a_k] + N[a_3, \dots, a_{k-1}] \\
&= a_1(N[a_{k+1}]N[a_2, \dots, a_k] + N[a_2, \dots, a_{k-1}]) + \\
&\quad N[a_3, \dots, a_{k+1}] \\
&= a_1N[a_2, \dots, a_k] + N[a_3, \dots, a_{k+1}] \\
&= N[a_{k+1}, \dots, a_1]
\end{aligned}$$

□

Además podemos deducir de las formulas 3.1 y 3.2 que:

$$N[a_1, a_2, \dots, a_n] = D[x, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Tomando en cuenta ésto se obtiene lo siguiente:

Lema 15. *Dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tenemos:*

$$\frac{NA_n}{NA_{n-1}} = [a_n, \dots, a_1]$$

Demostración. Dado $NA_n = [a_1, \dots, a_n]$ por el Lema 14 se tiene

$$N[a_1, \dots, a_n] = N[a_n, \dots, a_1]$$

y

$$N[a_1, \dots, a_{n-1}] = N[a_{n-1}, \dots, a_1] = D[x, a_{n-1}, \dots, a_1]$$

Como x puede tener cualquier valor, si $x = a_n$ entonces

$$D[x, a_{n-1}, \dots, a_1] = D[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$$

Por lo anterior se tiene que:

$$\frac{N[a_1, \dots, a_n]}{N[a_1, \dots, a_{n-1}]} = \frac{N[a_n, \dots, a_1]}{D[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]} = [a_n, \dots, a_1]$$

□

Con los Lemas 8 y 9 si se tienen trenzas de la forma $I^s(TA_n)$ e $I_i(TB_m)$ se puede obtener su matriz, y a su vez al tener las matrices que tengan la estructura correspondiente a este tipo de trenzas se puede llegar a la trenza que le corresponde. Asimismo si tuviéramos una de las matrices de suma de las combinaciones de estos tipos de trenzas, por los Lemas 12 y 13 obtendríamos también las matrices correspondientes a estas sumas, por lo que surge la pregunta ¿será posible, a partir de una matriz de alguna de las dos formas características vistas en los lemas 12 y 13, obtener la trenza que corresponde a dicha matriz? Basándose en esta cuestión se encontró el siguiente procedimiento con el cual es posible llegar a una trenza correspondiente a cualquiera de las matrices de las sumas de trenzas que se muestran en la Figura 5.2.

En los procedimientos 3 y 4 se muestra la forma de asociar una matriz con la estructura mostrada en los Lemas 12 y 13 a una 4-treza con las formas que se muestran en la Figura 5.2. Como ya se menciona es sencillo si tenemos una 4-treza de este tipo encontrar su matriz, esto gracias a los Lemas 12 y 13. Ahora se verá el camino de regreso, esto es, que a partir de una matriz con alguna de las dos estructuras mostradas en los lemas 12 y 13 encontrar la 4-treza que le corresponde.

Note que en los Lemas 12 y 13 se tiene que $a_n, b_m \in \mathbb{Z}$ y $n, m > 2$, esto debido a que con estas restricciones se garantiza que las matrices mantengan la estructura mostrada.

Procedimiento 3. Dada una matriz

$$M_4(TA_n) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{pmatrix}$$

donde $a_n \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ y $n > 2$.

Paso 1. Si $A_{3,2} = 0$ entonces por el Lema 12 sabemos que es la matriz de la suma $(M(I_i(TA_n) + I^s(TB_m)))$, por lo que tenemos 4 diferentes opciones de matrices: cuando n, m son impar; n, m son par; n par m impar y n impar m par. Con base a estas cuatro formas se puede deducir de las entradas de la matriz que se muestran en el Lema 12 lo siguiente:

$$\begin{array}{l} n, m \text{ impar} \left\{ \begin{array}{l} A_{1,2} = DA_{n-1} \\ A_{2,2} = NA_{n-1} \\ A_{3,3} = NB_{m-1} \\ A_{3,4} = NB_m \end{array} \right. \quad n, m \text{ par} \left\{ \begin{array}{l} A_{1,2} = DA_n \\ A_{2,2} = NA_n \\ A_{3,3} = NB_m \\ A_{3,4} = NB_{m-1} \end{array} \right. \\ n \text{ par } m \text{ impar} \left\{ \begin{array}{l} A_{1,2} = DA_n \\ A_{2,2} = NA_n \\ A_{3,3} = NB_{m-1} \\ A_{3,4} = NB_m \end{array} \right. \quad n \text{ impar } m \text{ par} \left\{ \begin{array}{l} A_{1,2} = DA_{n-1} \\ A_{2,2} = NA_{n-1} \\ A_{3,3} = NB_m \\ A_{3,4} = NB_{m-1} \end{array} \right. \end{array}$$

Con esto se siguen con los pasos para obtener las dos 4-trenzas $I_i(TA_n)$ e $I^s(TB_m)$ correspondientes a la suma de la matriz dada $(I_i(TA_n) + I^s(TB_m))$.

Paso 2. Dado que tenemos conocimiento previo de como deben ser las entradas de las diferentes formas de matrices y debido a que un número $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas ([10], p.327), entonces se calculan las fracciones continuas de las entradas $\frac{A_{2,2}}{A_{1,2}}$, ya que estas serán igual a NA_n/DA_n o NA_{n-1}/DA_{n-1} dependiendo de en cual

caso de las cuatro opciones mostradas en el Lema 12 en el que se encuentre la matriz, lo cual ayudará a tener conocimiento de los componentes del vector que corresponderán a la 4-trenza de la forma $I_i(TA_n)$.

$$\frac{A_{2,2}}{A_{1,2}} = [x_1, x_2, \dots, x_k] = [x_1, x_2, \dots, x_k - 1, 1]$$

Paso 3. Si $A_{3,3} > A_{3,4}$ por los Lemas 14 y 15 entonces:

$$\frac{A_{3,3}}{A_{3,4}} = \frac{NB_m}{NB_{m-1}} = \frac{N[b_m, \dots, b_1]}{D[b_m, b_{m-1}, \dots, b_1]} = [b_m, \dots, b_1] = [b_m, \dots, b_1 - 1, 1]$$

Pero si $A_{3,3} < A_{3,4}$ entonces:

$$\frac{A_{3,4}}{A_{3,3}} = \frac{NB_m}{NB_{m-1}} = \frac{N[b_m, \dots, b_1]}{D[b_m, b_{m-1}, \dots, b_1]} = [b_m, \dots, b_1] = [b_m, \dots, b_1 - 1, 1]$$

Paso 4. Por el Lema 14 se sabe que:

$$\begin{aligned} N[b_m, \dots, b_1] &= N[b_1, \dots, b_m] \quad y \\ N[b_m, \dots, b_1 - 1, 1] &= N[1, b_1 - 1, \dots, b_m] \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \frac{N[b_1, \dots, b_m]}{D[b_1, \dots, b_m]} &= [b_1, \dots, b_m] \quad y \\ \frac{N[1, b_1 - 1, \dots, b_m]}{D[1, b_1 - 1, \dots, b_m]} &= [1, b_1 - 1, \dots, b_m] \end{aligned}$$

Obteniendo esto se asocia la fracción continua asignada a este vector y así encontrar el valor de DB_m .

$$[b_1, \dots, b_m] = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_m}}} = \frac{p}{q} = \frac{NB_m}{DB_m}$$

o se tiene que

$$[1, b_1 - 1, \dots, b_m] = 1 + \frac{1}{(b_1 - 1) + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_m}}} = \frac{r}{s} = \frac{NB_m}{DB_m}$$

por lo que $q = DB_m$ o $s = DB_m$. Para determinar cual de estos valores (q, s) es el que corresponde a DB_m se basará en las estradas de la matriz del caso en el que se encuentre del Lema 12.

Paso 5. Se sabe que la entrada $A_{2,3}$ por el Lema 12 es igual a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{para } n, m \text{ par } \quad A_{2,3} &= NA_n DB_m + NA_{n-1} NB_m \\ A_{2,3} &= A_{2,2} DB_m + NA_{n-1} A_{3,3} \\ \text{para } n \text{ impar } m \text{ par } \quad A_{2,3} &= NA_{n-1} DB_m + NA_n NB_m \\ A_{2,3} &= A_{2,2} DB_m + NA_n A_{3,3} \end{aligned}$$

y la entrada $A_{2,4}$ por el Lema 12 es igual a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{para } n, m \text{ impar } \quad A_{2,4} &= NA_{n-1}(DB_m - 1) + NA_n NB_m \\ A_{2,4} &= A_{2,2}(DB_m - 1) + NA_n A_{3,4} \\ \text{para } n \text{ par } m \text{ impar } \quad A_{2,4} &= NA_n(DB_m - 1) + NA_{n-1} NB_m \\ A_{2,4} &= A_{2,2}(DB_m - 1) + NA_{n-1} A_{3,4} \end{aligned}$$

y esto podría expresarse:

$$\begin{aligned} A_{2,3} &= A_{2,2}q + NA_n A_{3,3}, & A_{2,3} &= A_{2,2}s + NA_n A_{3,3} \quad \text{o} \\ A_{2,3} &= A_{2,2}q + NA_{n-1} A_{3,3}, & A_{2,3} &= A_{2,2}s + NA_{n-1} A_{3,3} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} A_{2,4} &= A_{2,2}(q - 1) + NA_n A_{3,4}, & A_{2,4} &= A_{2,2}(s - 1) + NA_n A_{3,4} \quad \text{o} \\ A_{2,4} &= A_{2,2}(q - 1) + NA_{n-1} A_{3,4}, & A_{2,4} &= A_{2,2}(s - 1) + NA_{n-1} A_{3,4} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Si estamos en el caso $A_{3,3} > A_{3,4}$ entonces se despeja NA_n o NA_{n-1} de las ecuaciones 6.1 y se sustituyen los posibles valores de $DB_m(q, s)$ de donde se obtiene:

$$NA_n = \frac{A_{2,3} - A_{2,2}q}{A_{3,3}}, \quad NA_n = \frac{A_{2,3} - A_{2,2}s}{A_{3,3}}$$

o bien

$$NA_{n-1} = \frac{A_{2,3} - A_{2,2}q}{A_{3,3}}, \quad NA_{n-1} = \frac{A_{2,3} - A_{2,2}s}{A_{3,3}}$$

Si estamos en el caso $A_{3,3} < A_{3,4}$ entonces se despeja NA_n o NA_{n-1} de las ecuaciones 6.2, se obtiene lo siguiente:

$$NA_n = \frac{A_{2,4} - A_{2,2}(q - 1)}{A_{3,4}}, \quad NA_n = \frac{A_{2,4} - A_{2,2}(s - 1)}{A_{3,4}}$$

o

$$NA_{n-1} = \frac{A_{2,4} - A_{2,2}(q - 1)}{A_{3,4}}, \quad NA_{n-1} = \frac{A_{2,4} - A_{2,2}(s - 1)}{A_{3,4}}$$

Se calcula el valor de NA_n o NA_{n-1} en cualquier caso en el que se encuentre. Donde se obtendrán dos valores diferentes correspondientes a los valores probables para $DB_m(q, s)$, donde uno de los valores obtenidos del cálculo de NA_n o NA_{n-1} será un número entero, el cual, para facilitar la notación se le llamará EN ; este valor determina cuál de q, s es el valor de DB_m .

Paso 6. Ahora se calcula el valor de DA_n o DA_{n-1} según el caso en el que se encuentre. Las ecuaciones que representan a la entrada $A_{1,3}$ por el Lema 12 son:

$$\begin{aligned} \text{para } n, m \text{ par } \quad A_{1,3} &= A_{1,2}q + (DA_{n-1} - 1)A_{3,3}, \\ A_{1,3} &= A_{1,2}s + (DA_{n-1} - 1)A_{3,3}. \\ \text{para } n \text{ impar } m \text{ par } \quad A_{1,3} &= A_{1,2}q + (DA_n - 1)A_{3,3}, \\ A_{1,3} &= A_{1,2}s + (DA_n - 1)A_{3,3}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

y las ecuaciones que representan a la entrada $A_{1,4}$ por el Lema 12 son:

$$\begin{aligned}
&\text{para } n, m \text{ impar } A_{1,4} = A_{1,2}(q-1) + (DA_n - 1)A_{3,4}, \\
&A_{1,4} = A_{1,2}(s-1) + (DA_n - 1)A_{3,4} \\
&\text{para } n \text{ par } m \text{ impar } A_{1,4} = A_{1,2}(q-1) + (DA_{n-1} - 1)A_{3,4}, \\
&A_{1,4} = A_{1,2}(s-1) + (DA_{n-1} - 1)A_{3,4}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Similar al Paso 5, si estamos en el caso $A_{3,3} > A_{3,4}$ entonces se despeja DA_n o DA_{n-1} de las ecuaciones 6.3, en este caso con el valor de DB_m (q o s), el cual, se estableció en el paso anterior al dar como resultado un valor entero en la sustitución de las ecuaciones 6.1, por lo que, en este caso se sustituye ese valor en las ecuaciones 6.3 lo cual dará el valor de DA_n . A continuación se muestra los despejes de estas ecuaciones con los dos valores probables de DB_m (q o s).

$$DA_n = \frac{A_{1,3} - A_{1,2}q}{A_{3,3}} + 1 \quad \text{o} \quad DA_n = \frac{A_{1,3} - A_{1,2}s}{A_{3,3}} + 1$$

o bien

$$DA_{n-1} = \frac{A_{1,3} - A_{1,2}q}{A_{3,3}} + 1 \quad \text{o} \quad DA_{n-1} = \frac{A_{1,3} - A_{1,2}s}{A_{3,3}} + 1$$

Si estamos en el caso $A_{3,3} < A_{3,4}$ entonces se despeja DA_n o DA_{n-1} de las ecuaciones 6.4 y se obtiene:

$$DA_n = \frac{A_{1,4} - A_{1,2}(q-1)}{A_{3,4}} + 1 \quad \text{o} \quad DA_n = \frac{A_{1,4} - A_{1,2}(s-1)}{A_{3,4}} + 1$$

o bien

$$DA_{n-1} = \frac{A_{1,4} - A_{1,2}(q-1)}{A_{3,4}} + 1 \quad \text{o} \quad DA_{n-1} = \frac{A_{1,4} - A_{1,2}(s-1)}{A_{3,4}} + 1$$

De igual forma por facilitar la notación al valor obtenido, ya sea de DA_n o DA_{n-1} le llamaremos ED .

Paso 7. Se calcula la fracción continua de los dos valores positivos obtenidos en los Pasos 5 y 6 y esto dará como resultado un vector el cual, comparándolo con el vector obtenido de la fracción continua calculada en el Paso 1 nos dará como resultado el vector que representa a la 4-tranza $I_i(TA_n)$. Dado que un número $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas ([10], p.327) se obtiene de la fracción continua $\frac{EN}{ED}$ dos vectores (las fracción continuas expandidas corta y larga).

$$\frac{EN}{ED} = [e_1, e_2, \dots, e_k] = [e_1, e_2, \dots, e_k - 1, 1]$$

Para obtener la trenza que corresponde a la matriz se hace la comparación de los 4 vectores obtenidos en los Pasos 1 y 7 de las fracciones continuas de $\frac{A_{2,2}}{A_{1,2}}$ y $\frac{EN}{ED}$, donde se tienen dos casos.

- Si $k = j + 1$ se esta en el caso en que n es par. Si $a_i = e_i$ con $i = 1, 2, \dots, j$ se dice por la Definición 7 que $[a_1, a_2, \dots, a_j]$ y $[e_1, e_2, \dots, e_k]$ están CL relacionadas, entonces:

$$\frac{A_{2,2}}{A_{1,2}} = [a_1, a_2, \dots, a_j] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{EN}{ED} = [e_1, e_2, \dots, e_k] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

pero si al menos un $a_i \neq e_i$ con $i = 1, 2, \dots, j$ entonces se hace la comparación de las fracciones continuas $[a_1, a_2, \dots, a_j - 1, 1]$ y $[e_1, e_2, \dots, e_k - 1, 1]$. Si $a_i = e_i$ con $i = 1, 2, \dots, j - 1$ además $a_j - 1 = e_k - 1$ entonces por la Definición 7 estos vectores estan CL relacionados. por lo que:

$$\frac{A_{2,2}}{A_{1,2}} = [a_1, a_2, \dots, a_j - 1, 1] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{EN}{ED} = [e_1, e_2, \dots, e_k - 1, 1] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

Por lo tanto la 4-trenza es:

$$I_i(TA_n) = \mathcal{T}[0, a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n] \quad \text{con } n \text{ par}$$

- Si $j = k + 1$ se esta en el caso en que n es impar. Si $a_i = e_i$ con $i = 1, 2, \dots, j$ se dice por la Definición 7 que $[a_1, a_2, \dots, a_j]$ y $[e_1, e_2, \dots, e_k]$ están CL relacionadas, entonces:

$$\frac{EN}{ED} = [e_1, e_2, \dots, e_k] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{A_{2,2}}{A_{1,2}} = [a_1, a_2, \dots, a_j] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

pero si al menos un $a_i \neq e_i$ con $i = 1, 2, \dots, j$ entonces se hace la comparación de las fracciones continuas $[a_1, a_2, \dots, a_j - 1, 1]$ y $[e_1, e_2, \dots, e_k - 1, 1]$. Si $a_i = e_i$ con $i = 1, 2, \dots, j - 1$ además $a_j - 1 = e_k - 1$ entonces por la Definición 7 estos vectores estan CL relacionados. por lo que:

$$\frac{EN}{ED} = [e_1, e_2, \dots, e_k - 1, 1] = \frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

y

$$\frac{A_{2,2}}{A_{1,2}} = [a_1, a_2, \dots, a_j - 1, 1] = \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = A_{n-1} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

Por lo tanto la 4-trenza es:

$$I_i(TA_n) = \mathcal{T}[0, a_1, a_2, 0, a_3, a_4, 0, \dots, a_n] \quad \text{con } n \text{ impar}$$

Hasta aquí se tiene la primera 4-trenza de la suma de la trenza de la matriz dada. A continuación se obtendrá la trenza $I^s(TB_m)$.

Paso 8. Con lo anterior se obtiene la 4-trenza $I_i(TA_n)$; por lo que sólo resta el cálculo de la 4-trenza $I^s(TB_m)$. Directamente se sabe por el Lema 12 que la entrada $A_{3,3} = NB_m$ o $A_{3,4} = NB_m$ dependiendo del caso en el que se encuentre. Además, del Paso 4 se sabe que $DB_m = q$ o s lo cual se determina en el Paso 5, esto dependiendo del cuál entre q o s es el que da el valor entero en el cálculo de NA_n o NA_{n-1} (el valor llamado EN) con esto y dado que un número $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas ([10], p.327) se tiene:

$$\frac{NB_m}{q} = [y_1, \dots, y_m] = [y_1, \dots, y_m - 1, 1] \quad \text{o} \quad \frac{NB_m}{s} = [y_1, \dots, y_m] = [y_1, \dots, y_m - 1, 1]$$

y para determinar cuál de las dos fracciones (corta o larga) es la que representan a la 4-trenza $I^s(TB_m)$ es necesario encontrar los valores NB_{m-1} y DB_{m-1} para hacer la comparación de las fracciones continuas extendidas. Por el Lema 12 se tiene conocimiento de las entradas, lo cual nos da el valor de NB_{m-1} directamente de las entradas $A_{3,3}$ o $A_{3,4}$ por lo que solo resta encontrar el valor de DB_{m-1} , para esto existen las siguientes dos opciones:

- Cuando $A_{3,3} < A_{3,4}$ la 4-trenza $I^s(TB_m)$ está en el caso en que m es impar y $A_{3,3} = NB_{m-1}$ y $A_{3,4} = NB_m$, también se tiene conocimiento de DA_n o $DA_{n-1} = ED$ esto del Paso 6. Sustituyendo estos valores en la entrada $A_{1,3}$ de las matrices de a suma de estas 4-trenzas mostradas en el Lema 12 se tiene:

$$A_{1,3} = A_{1,2}DB_{m-1} + (ED - 1)A_{3,3}$$

despejando DB_{m-1}

$$DB_{m-1} = \frac{A_{1,3} - (ED - 1)A_{3,3}}{A_{1,2}}$$

- Cuando $A_{3,3} > A_{3,4}$ entonces m es par. Además $A_{3,4} = NB_{m-1}$, $A_{3,3} = NB_m$ y DA_n o $DA_{n-1} = ED$. Sustituyendo estos valores en la entrada $A_{1,4}$ de las diferentes matrices del Lema 12 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$A_{1,4} = A_{1,2}(DB_{m-1} - 1) + (ED - 1)A_{3,4}$$

despejando DB_{m-1} se tiene que:

$$DB_{m-1} = \frac{A_{1,4} - (ED - 1)A_{3,4}}{A_{1,2}} + 1$$

Dado que un número $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas ([10], p.327) se obtienen dos vectores de la fracción continua de $\frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}}$ (las fracción continuas expandidas corta y larga).

por lo que:

$$\frac{A_{3,3}}{DB_{m-1}} = \frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}} = [z_1, \dots, z_{m-1}] = [z_1, \dots, z_{m-1} - 1, 1]$$

o bien

$$\frac{A_{3,4}}{DB_{m-1}} = \frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}} = [z_1, \dots, z_{m-1}] = [z_1, \dots, z_{m-1} - 1, 1]$$

Paso 9. Como paso final se hace la comparación de los dos tipos de vectores obtenido de las fracciones continuas de $\frac{NB_m}{DB_m}$ y $\frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}}$. Si $y_i = z_i$ con $i = 1, 2, \dots, m-1$ se dice por la Definición 7 que $[y_1, \dots, y_m]$ y $[z_1, \dots, z_{m-1}]$ están CL relacionadas, entonces:

$$\frac{NB_m}{DB_m} = [y_1, \dots, y_m] = [b_1, \dots, b_m] = B_m$$

pero si al menos un $y_i \neq z_i$ con $i = 1, 2, \dots, m-1$ entonces se hace la comparación de las fracciones continuas $[y_1, \dots, y_m - 1, 1]$ y $[z_1, \dots, z_{m-1} - 1, 1]$. Si $y_i = z_i$ con $i = 1, 2, \dots, m-2$, además $y_{m-1} = z_{m-1} - 1$ y $y_m - 1 = 1$ entonces por la Definición 7 estos vectores están CL relacionados. por lo que:

$$\frac{NB_m}{DB_m} = [y_1, \dots, y_m - 1, 1] = [b_1, \dots, b_m] = B_m$$

Por lo tanto, si $A_{3,3} < A_{3,4}$ la 4-trenza es:

$$I^s(TB_m) = \mathcal{T}[b_1, b_2, 0, b_3, b_4, 0, \dots, b_m] \quad \text{con } m \text{ impar}$$

Si $A_{3,3} > A_{3,4}$ la 4-trenza es:

$$I^s(TB_m) = \mathcal{T}[b_1, b_2, 0, b_3, b_4, 0, \dots, b_m] \quad \text{con } m \text{ par}$$

Con esto se finaliza el procedimiento el cual nos permite, a partir de una matriz $M_4(I_i(TA_n) + I^s(TB_m))$ encontrar las 4-trenzas que le corresponden.

Ejemplo 9. Sea M_4 la matriz de una 4-trenza. Deducir con la ayuda del Procedimiento 3 una 4-trenza correspondiente a la matriz.:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 65 & 23 & 64 & 262 \\ 96 & 33 & 96 & 394 \\ 2 & 0 & 3 & 13 \\ 96 & 32 & 96 & 395 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{pmatrix}$$

Paso 1. Como la entrada $A_{3,2} = 0$ entonces por el Lema 12 sabemos que M_4 corresponde a la matriz de la suma de 4-trenzas: $I_i(TA_n) + I^s(TB_m)$, además se tiene conocimiento de las entradas de la matriz por lo que se puede deducir por el Lema 12 que:

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= 23 = DA_n \text{ o } A_{1,2} = 23 = DA_{n-1} \\ A_{2,2} &= 33 = NA_n \text{ o } A_{2,2} = 33 = NA_{n-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_{3,3} &= 3 = NB_m \text{ o } A_{3,3} = 3 = NB_{m-1} \\ A_{3,4} &= 13 = NB_m \text{ o } A_{3,4} = 13 = NB_{m-1} \end{aligned}$$

Paso 2. Se calcula la fracción continua de las entradas $\frac{A_{2,2}}{A_{1,2}} = \frac{33}{23}$ ya que esta será igual a NA_n/DA_n o NA_{n-1}/DA_{n-1} . y dado a que un número $q \in \mathbb{Q}$ tiene cuando mucho dos fracciones continuas ([10], p.327), entonces:

$$\frac{33}{23} = 1 + \frac{1}{\frac{23}{10}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{10}{3}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}$$

y

$$\frac{NA_n}{DA_n} = [1, 2, 3, 3] = [1, 2, 3, 2, 1] \text{ o } \frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}} = [1, 2, 3, 3] = [1, 2, 3, 2, 1]$$

Paso 3. Como $A_{3,4} > A_{3,3}$ entonces por los Lemas 14 y 15:

$$\begin{aligned} \frac{A_{3,4}}{A_{3,3}} &= \frac{NB_m}{NB_{m-1}} = \frac{N[b_m, \dots, b_1]}{D[b_m, \dots, b_1]} = [b_m, \dots, b_1] = [b_m, \dots, b_1 - 1, 1] \\ \frac{A_{3,4}}{A_{3,3}} &= \frac{13}{3} = [4, 3] = [4, 2, 1] \end{aligned}$$

Paso 4. Por el Lema 14 se sabe que:

$$N[4, 3] = N[3, 4] \text{ y } N[4, 2, 1] = N[1, 2, 4]$$

además

$$\begin{aligned} \frac{N[b_1, \dots, b_m]}{D[b_1, \dots, b_m]} &= [b_1, \dots, b_m] = [3, 4] \text{ y} \\ \frac{N[1, b_1 - 1, \dots, b_m]}{D[1, b_1 - 1, \dots, b_m]} &= [1, b_1 - 1, \dots, b_m] = [1, 2, 4] \end{aligned}$$

Obteniendo esto se asocia la fracción continua asignada a estos vectores, esto para determinar el valor de DB_m .

$$[3,4] = 3 + \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = \frac{NB_m}{DB_m}$$

o se tiene:

$$[1,2,4] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{13}{9} = \frac{NB_m}{DB_m}$$

Por lo que $DB_m = 4$ o $DB_m = 9$.

Paso 5 Como se esta en el caso en que $A_{3,3} < A_{3,4}$ y por el Lema 12 se tiene conocimiento de la entrada $A_{2,4}$ entonces se despeja NA_n o NA_{n-1} de las ecuaciones 6.2 del Procedimiento 3 y se obtiene:

$$NA_n \text{ o } NA_{n-1} = \frac{A_{2,4} - A_{2,2}(q-1)}{A_{3,4}} = \frac{394 - 33(4-1)}{13} = 22.6923$$

o

$$NA_n \text{ o } NA_{n-1} = \frac{A_{2,4} - A_{2,2}(s-1)}{A_{3,4}} = \frac{394 - 33(9-1)}{13} = 10$$

entonces NA_n o $NA_{n-1} = 10 = EN$ ya que es entero.

Paso 6. De manera similar a lo anterior dado que se esta en el caso $A_{3,3} < A_{3,4}$, por el Lema 12 se conoce la entrada de $A_{1,4}$ de donde se despeja DA_n o DA_{n-1} de las ecuaciones 6.4 y dado que ya esta establecido el valor de $DB_m = 9$ en el paso anterior entonces se obtiene:

$$DA_n \text{ o } DA_{n-1} = \frac{A_{1,4} - A_{1,2}(s-1)}{A_{3,4}} + 1 = \frac{262 - 23(9-1)}{13} + 1 = 7$$

El valor de DA_n o $DA_{n-1} = 7 = ED$

Paso 7. La fracción ontinua de $\frac{EN}{ED} = \frac{10}{7} = [1,2,3] = [1,2,2,1]$, se hace la comparación de los vectores obtenidos con los vectores de la fracción continua calculada en el Paso 2. Al hacer la comparación de los comoponentes de los vectores se obtendra el vector que representa a la trenza $I_i(TA_n)$.

Como el número de componentes de los vectores obtenidos de la fracción continua de $\frac{NA_n}{DA_n}$ o $\frac{NA_{n-1}}{DA_{n-1}}$ en el Paso 2 es mayor que el número de componentes de los vectores de la fracción continua $\frac{EN}{ED}$ entonces: Se hace la comparación de $[1,2,3,3]$ y $[1,2,3]$: $1 = 1$, $2 = 2$ y $3 = 3$. Ahora de $[1,2,3,2,1]$ y $[1,2,2,1]$: $1 = 1$, $2 = 2$, $3 \neq 2$ y $2 \neq 1$. En este caso las fracciones largas de $\frac{NA_n}{DA_n}$ y $\frac{EN}{ED}$, que son: $[1,2,3,3]$ y $[1,2,3]$ no tienen ningún componente comparado diferente, entonces por la Definición 7 están CL relacionadas. Por lo tanto:

$$\frac{NA_n}{DA_n} = A_n = [1,2,3,3]$$

Por lo que:

$$I_i(TA_n) = \mathcal{T}[0, 1, 2, 0, 3, 3]$$

Paso 8. Sólo resta el cálculo de la 4-trenza $I^s(TB_m)$. Hasta el momento se tiene conocimiento de: $NB_m = A_{3,4} = 13$, $DB_m = 9$ esto del Paso 5 por lo que se calcula la fracción continua de $\frac{NB_m}{DB_m} = \frac{13}{9} = [1, 2, 4] = [1, 2, 3, 1]$.

Para saber cuál de los dos vectores es el que representa a la trenza $I^s(TB_m)$ se hace la comparación de estas fracciones continuas extendidas con las de $\frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}}$. Ya se conoce $NB_{m-1} = 3$, solo resta encontrar el valor de DB_{m-1} .

Como $A_{3,3} < A_{3,4}$ entonces $A_{3,3} = NB_{[m-1]} = 3$, $A_{3,4} = NB_m = 13$ además DA_n o $DA_{n-1} = ED = 7$ esto del Paso 6. Se sustituyen estos valores en la entrada $A_{1,3}$ del Lema 12 y despejando DB_{m-1} se tiene:

$$DB_{m-1} = \frac{A_{1,3} - (ED - 1)A_{3,3}}{A_{1,2}} = \frac{64 - (7 - 1)3}{23} = 2$$

Con este valor es posible ahora calcular la fracción continua $\frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}} = \frac{3}{2} = [1, 2] = [1, 1, 1]$.

Paso 9. Finalmente se hace comparación de los dos tipos de vectores obtenido de las de fracciones continuas de $\frac{NB_m}{DB_m}$ y $\frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}}$. Primero se hará la comparación de $[1, 2, 4]$ y $[1, 2]$: $1 = 1$ y $2 = 2$. Ahora de $[1, 2, 3, 1]$ y $[1, 1, 1]$: $1 = 1$, $2 \neq 1$ y $3 \neq 1$. En este caso las fracciones de $\frac{NB_m}{DB_m}$ y $\frac{NB_{m-1}}{DB_{m-1}}$, que son: $[1, 2, 4]$ y $[1, 2]$ no tienen ningún componente comparado diferente, entonces por la Definición 7 están \mathcal{CL} relacionadas. Por lo tanto:

$$\frac{NB_m}{DB_m} = B_m = [1, 2, 4]$$

por lo tanto la 4-trenza

$$I^s(TB_m) = \mathcal{T}[1, 2, 0, 4].$$

Con esto se finaliza el procedimiento 3 el cual permitirá obtener posteriormente un invariante completo para la familia de 4-trenzas $I_i(TA_n) + I^s(TB_m)$. Con el cual se obtendrá un resultado como: dadas cuatro 4-trenzas de la forma $I_i(TA_n)$, $I_i(TB_m)$, $I^s(TC_i)$ y $I^s(TD_j)$ entonces $I_i(TA_n) + I^s(TC_x) = I_i(TB_m) + I^s(TD_y)$ si y solo si $M(I_i(TA_n) + I^s(TC_x)) = M(I_i(TB_m) + I^s(TD_y))$.

Capítulo 7

Conclusiones

Al inicio de este trabajo se plantearon 5 objetivos primordiales. Como primer paso para lograr estos objetivos se hizo la identificación de una base de los diagramas asociados a la descomposición de los 4-ovillos por medio del polinomio corchete de Kauffman, con esto se realizó el cálculo del polinomio corchete de 4-ovillos y el polinomio corchete de la suma de dos 4-ovillos. Apoyándose en estos resultados se encontró una matriz asociada a las 4-trenzas, la cual, al evaluar los polinomios de las entradas en $a = \sqrt{i}$ es un invariante que tiene la propiedad de ser un homomorfismo entre las 4-trenzas y el grupo de las matrices 4×4 , cabe mencionar que se puede evaluar las entradas en $a = y$ y obtener también un invariante lo cual resta por analizar.

Es importante resaltar que el encontrar un invariante para las 4-trenzas es básico ya que con este se puede lograr la clasificación completa de las 4-trenzas e incluso de la unión de sus familias. Gracias a este invariante se encontró una matriz correspondiente a cada uno de los diferentes tipos de cruces de una 4-trenza y en base a este resultado, con el programa realizado en el software Maple el cual hace el cálculo de la multiplicación de las matrices correspondiente a cada diferente tipo de cruce y con la ayuda de fracciones continuas, se encontraron dos subconjuntos de 4-trenzas y las matrices correspondientes a cada subconjunto. Asimismo se realizó la clasificación de dos de los subconjuntos de 4-trenzas (estos son cuando la 4-trenza tiene la forma de la imagen de las funciones I_i e I^s) donde se obtuvieron los siguientes resultado:

Teorema Dados dos diagramas alternantes de 4-trenzas de la forma $I_i(TA_n)$ e $I_i(TB_m)$, entonces $I_i(TA_n) = I_i(TB_m) \Leftrightarrow M(I_i(TA_n)) = M(I_i(TB_m))$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema Dados dos diagramas alternantes de 4-trenzas de la forma $I^s(TA_n)$ e $I^s(TB_m)$, entonces $I^s(TA_n) = I^s(TB_m) \Leftrightarrow M(I^s(TA_n)) = M(I^s(TB_m))$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Se inicio también con la clasificación del subconjunto de 4-trenzas que obtenemos cuando se tiene la suma de dos 4-trenzas de la forma de la imagen de las funciones I_i e I^s : $I_i(TA_n) + I^s(TB_m)$ y $I^s(TB_m) + I_i(TA_n)$ Donde solo resta determina como llegar, a partir de una matriz con la estructura de la suma de dos 4-trenzas: $M(I^s(TB_m) + I_i(TA_n))$ a las dos 4-trenzas $I^s(TB_m)$ e $I_i(TA_n)$.

Apéndice A

Implementación del software Maple como ayuda auxiliar en la clasificación de las 4-Trenzas.

Basándose en el lema 5 el cual muestra la forma que tiene la matriz para cada tipo de cruce y por el Lema 4, se dio a la tarea de hacer una sistematización para el cálculo de este invariante en el software de cálculo simbólico Maple el cual fue de gran ayuda para lograr los resultados obtenidos, ya que el trabajar sin la ayuda de este programa hubiera sido una labor muy ardua.

```
> GetMat := proc(v)
  local i, n, l, ResA, cf1, cf2 :
  n := nops(v) #print(v, n);
  ResA := matrix([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]]) : #print(ResA);
  for l from 1 to nops(v) do
    if (is(l mod 3 = 1)) then
      #print(l, ResA, "mod", matrix([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, v[l]], [0, 0, 0, 1]]), "=");
      ResA := simplify(evalm(ResA&*matrix([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, v[l]/I], [0, 0, 0, 1]]))) : #print(ResA);
    elif (is(l mod 3 = 2)) then
      #print(l, ResA, "mad", matrix([[1, 0, 0, 0], [-v[l]/I, 1, -v[l]/I, 0], [0, 0, 1, 0], [-v[l]/I, 0, -v[l]/I, 1]]), "=");
      ResA := simplify(evalm(ResA&*matrix([[1, 0, 0, 0], [-v[l]/I, 1, -v[l]/I, 0], [0, 0, 1, 0], [-v[l]/I, 0, -v[l]/I, 1]]))) : #print(ResA); -
    else
      #print(l, ResA, "mud", matrix([[1, v[l], 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]]), "=");
      ResA := simplify(evalm(ResA&*matrix([[1, v[l]/I, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]]))) : #print(ResA);
    end if #print(ResA[1, 4], ResA[3, 2]);
  od;
  #RETURN(ResA) :
end;
```

Este programa realiza la multiplicación de las matrices asignadas a cada tipo de cruce mostradas en el Lema 5, elevando una matriz al número de veces en que se repita el cruce, y a su vez multiplica a dicha matriz por las matrices asignadas a los otros dos tipos de cruces elevadas al número de cruces correspondientes a cada una de ellas. Además de hacer cálculos numéricos con respecto a las matrices también podemos hacer cálculos simbólicos. A continuación se muestra un ejemplo de la utilidad del programa en el cual se muestra por

medio de la sentencia: $\> \text{map}(\text{simplify}, \text{getMat}([, ,]))$ las matrices asignada a cada trenza $T(a_1)$; $T(0, a_1)$ y $T(0, 0, a_1)$ respectivamente.

```
> map(simplify, GetMat([a1])); map(simplify, GetMat([0, a1])); map(simplify, GetMat([0, 0, a1]));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -I a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ I a_1 & 1 & I a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ I a_1 & 0 & I a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -I a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se verán algunos ejemplos de la combinación de algunos tipos de cruces de forma numérica y simbólica.

```
> map(simplify, GetMat([a1]), map(simplify, GetMat([a1, a2]));
map(simplify, GetMat([a1, a2, 0, a3])); map(simplify, GetMat([1, 2, 3, 4]));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -I a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ I a_2 & 1 & I a_2 & 0 \\ a_1 a_2 & 0 & 1 + a_1 a_2 & -I a_1 \\ I a_2 & 0 & I a_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ I a_2 & 1 & I a_2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_2 & 0 & 1 + a_1 a_2 & -I a_3 - I a_3 a_1 a_2 - I a_1 \\ I a_2 & 0 & I a_2 & 1 + a_2 a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3I & 0 & 0 \\ 2I & 7 & 2I & 8 \\ 2 & -6I & 3 & -13I \\ 2I & 6 & 2I & 9 \end{bmatrix}$$

Como se puede notar, el hecho de que el programa facilite estos cálculos y además se puedan realizar de forma simbólica, permite agilizar la observación de la forma que adquiere la multiplicación de las matrices de los diferentes tipos de cruces, lo cual ayudó a realizar la clasificación de algunos subconjunto de las 4-trenzas. Asimismo este programa ayudará con el trabajo a futuro de este trabajo de tesis; el programa se podrá utilizar para la clasificación de 4-trenzas.

Bibliografía

- [1] H. Cabrera-Ibarra, *On the Classification of Rational 3- Tangles*, Journal of Knot Theory and Its Ramification, Vol. 12, No. 7 (2003) pp. 921-946.
- [2] K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, (1996).
- [3] J. R. Goldman, L. H. Kauffman, *Rational Tangles*, Adv. in App. Math 18, Artículo No. AM960511,(1997) pp. 300-332.
- [4] L. H. Kauffman, *New Invariants en the Theory of Knots*, American Mathematical Monthly, Vol. 95, No. 3 (1988) pp. 195-242.
- [5] H. Cabrera-Ibarra, *Results on the classification of rational 3-tangles*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 13 No. 2 (2004) pp. 175-192.
- [6] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Springer- Verlag, (1997).
- [7] H. Cabrera, D. Lizarraga, *Braid solutions to the action of the Gin enzyme*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 19, No. 8 (2010) pp. 1051-1074.
- [8] W. H. Thomson. *On vortex motion*, Trans. R. soc. Edin., No.25, (1869) pp. 217-260.
- [9] R. H. Crowel, Ralph H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Company, (1963).
- [10] I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley and Sons, (1991).