



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

Cálculo del Polinomio de Conway de 3-ovillos Orientados

Tesis que presenta

Leila Yahana Hernández Villegas

para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Aplicadas

en la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Directores de la Tesis:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

Dr. David A. Lizárraga Navarro

San Luis Potosí, S.L.P., 22 de Noviembre del 2011



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Cálculo del Polinomio de Conway de 3-ovillos Orientados** presentada para obtener el Grado de Maestra en Ciencias Aplicadas en la opción Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Leila Yahana Hernández Villegas.** y aprobada el **22 de Noviembre de 2011** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Hugo Cabrera Ibarra.
(Asesor de tesis.)

Dr. David A. Lizárraga Navarro.
(Asesor de tesis.)

Dr. Lev Glebsky.
(Sinodal.)

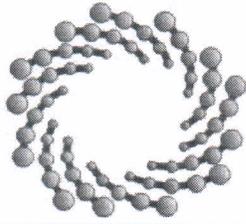
Dr. Edgardo Ugalde Saldaña.
(Sinodal.)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. David A. Lizárraga Navarro y Dr. Hugo Cabrera Ibarra.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con No. de registro 232570 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 024 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 22 días del mes de noviembre del año 2011, se reunió a las 17:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña	Presidente	UASLP
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Secretario	IPICYT
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Sinodal	IPICYT
Dr. Lev Glebskiy	Sinodal externo	IICO

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

Leila Yahana Hernández Villegas

sobre la Tesis intitulada:

Cálculo del Polinomio de Conway de 3-ovillos Orientados

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
Dr. Hugo Cabrera Ibarra

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 18:00 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 22 días del mes de noviembre de 2011.

Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado



A mis padres

Agradecimientos

A mis asesores los Doctores David A. Lizárraga y Hugo Cabrera Ibarra que hicieron posible la conclusión de mi trabajo con sus constantes aportes, completa paciencia y disponibilidad.

A mis sinodales los Doctores Edgardo Ugalde y Lev Glebsky por sus comentarios y aportaciones.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de posgrado.

Al IPICyT y a los excelentes investigadores que como profesores de maestría ayudaron a mi formación académica.

A mis amigos y familia por su apoyo y compañía en mis proyectos de vida.

Resumen

Puesto que una tarea importante en topología es la clasificación de nudos y enlaces, con ese fin se han desarrollado mapeos del conjunto de nudos (o subconjuntos de nudos) a valores en conjuntos con estructuras algebraicas, como por ejemplo polinomios en una indeterminada. Un mapeo de ese tipo recibe el nombre de *invariante de nudo* si su valor no cambia al evaluarse en nudos que son “equivalentes”, entendiéndose que dos nudos equivalentes si media entre ellos una isotopía ambiente.

En 1980, Cole A. Giller planteó un procedimiento para calcular el polinomio de Conway de los nudos orientados obtenidos al “cerrar”, mediante la adición de cuerdas externas, cierto tipo de 2-ovillos orientados. En esta tesis se presenta un método eficiente que extiende los resultados de Giller al caso de 3-ovillos orientados y los nudos (o enlaces) que de ellos se obtienen mediante seis tipos específicos de cerradura. Para tales ovillos se define un invariante cuyas componentes son determinadas por el polinomio de Conway asociado a cada una de las cerraduras propuestas. Para la subclase de 3-ovillos dada por las 3-trenzas orientadas, en este trabajo se obtienen fórmulas explícitas para el cálculo de dicho invariante. Más aun, se demuestra que las componentes del invariante de una 3-trenza dada se expresan en términos de fracciones continuas determinadas por la trenza. Una característica interesante de las fórmulas desarrolladas para 3-trenzas es que las dos últimas componentes del invariante desarrollado vienen dadas en función de las cuatro primeras, lo cual facilita su cálculo en relación a 3-ovillos más generales.

Abstract

An interesting goal of topology is the classification of knots and links. With that in mind, a number of mappings have been defined on the set of knots and taking values in sets with different algebraic structures, for example polynomials in one indeterminate. Any such mapping is called a *knot invariant* if its values remain unchanged for any two knots that are “equivalent,” where equivalence is typically understood in the sense of being related by an ambient isotopy.

In 1980, Cole A. Giller introduced a procedure to compute the Conway polynomial of oriented knots obtained by “closing” oriented 2-tangles via the addition of external strands. In this thesis, an efficient tool is presented which extends Giller’s results to the case of knots or links obtained by application of six different closures to oriented 3-tangles. For such 3-tangles, a vector-valued invariant is defined whose components are determined by the Conway polynomials of its six closures. For the class of oriented 3-braids—a subset of oriented 3-tangles—explicit formulas are given in this work for the computation of the proposed invariant. It is shown, moreover, that for a given 3-braid, the components of its invariant may be written in terms of continued fractions determined by the braid. An interesting property of the proposed invariant is that, for an oriented 3-braid, its last two components are given by affine functions of its first four components. This simplifies the computations for 3-braids as compared to more general 3-tangles.

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos básicos	3
1.1. Enlaces, nudos y sus diagramas	3
1.2. Polinomio de Conway	5
1.3. Ejemplos	5
2. Ovillos	7
2.1. Cuartos sus orientaciones y sus habitantes	8
2.2. El espacio vectorial de ovillos del 3-cuarto estándar	10
2.3. Cerraduras de 3-ovillos en $L(R')$	10
2.4. Cálculo del polinomio de Conway de $(S \cdot T)$ en $L(R)$	11
3. El invariante \mathcal{I} y el cálculo de sus componentes	14
3.1. Cerraduras del 3-cuarto con orientación R'	14
3.2. Polinomio de Conway asociado a $(S \cdot T) \in L(R')$	20
4. Aplicaciones	21
4.1. 3-Trenzas, definición y sus diagramas	21
4.2. Diagrama de trenzas $\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot E^k$	23
4.3. Habitantes de R'	25
4.4. Fracciones continuas	27
4.5. Cálculo del invariante \mathcal{I} de 3-trenzas	28
4.6. Aplicación a un 3-ovillo no perteneciente a 3-trenzas	34
Conclusión	37
Apéndices	
A. Cálculos para $\alpha(\sigma(S))$	39
A.0.1. Cálculos de los polinomios de Conway de $\Sigma_1^*(\sigma(S))$, $\Sigma_2^*(\sigma(S))$ y $\Sigma_3^*(\sigma(S))$	39
A.0.2. Cálculo del polinomio de Conway de $\Sigma_5^*(\sigma(S))$	40
A.0.3. Cálculo del polinomio de Conway de $\Sigma_4^*(\sigma(S))$	41
A.0.4. Cálculo del polinomio de Conway de $\Sigma_6^*(\sigma(S))$	42

Índice de figuras

1.1.	Nudo y enlace de dos componentes, ambos orientados.	3
1.2.	A la derecha un nudo en \mathbb{R}^3 , a la izquierda su proyección en el plano YZ	4
1.3.	Movidas de Reidemeister	4
2.1.	Ejemplos de ovillos y sus diagramas asociados.	7
2.2.	(a) Un n -cuarto $(D^2 \times I, P, S)$. (b) Puertos izquierdos y derechos de un n -cuarto que posee orientación.	8
2.3.	Cuartos con orientación R y R' respectivamente.	8
2.4.	9
2.5.	Una base de $L(R)$	10
2.6.	Ovillo expresado en términos de la base B	11
2.7.	Cerradura c_6 de un habitante de R	11
2.8.	Elemento dual $S^*(X)$	12
3.1.	3-cuarto con orientación R'	14
3.2.	Seis cerraduras de 3-ovillos con orientación R'	15
3.3.	Polinomio de Conway del producto de ovillos en $L(R')$	15
3.4.	Transformación de habitantes S, T de R' en habitantes $\sigma(S), \tau(T)$ de R	15
3.5.	Diagramas asociados a las componentes de $\mathcal{I}(S \cdot E)$	19
4.1.	22
4.2.	En la parte superior diagramas de trenzas casos: n impar y n par respectivamente, debajo: $a_i < 0$ ó $a_i > 0$ depende de su posición	22
4.3.	Diagramas de las seis cerraduras de $\mathcal{T}(2a_1)$	23
4.4.	Diagramas de las seis cerraduras de $\mathcal{T}(0, 2a_2)$	24
4.5.	Cambio de posición de alguno de los elementos de la trenza.	25
4.6.	$T = \mathcal{T}(4, 2, 2, 4)$	34
4.7.	Las seis componentes $\mathcal{I}(S)$	35
4.8.	Polinomio de Conway de la cerradura c_6 para n productos de S	36
A.1.	39
A.2.	$\Sigma_5^*(\sigma(S)) = S^{c_2}$	40
A.3.	41
A.4.	$\Sigma_6^*(\sigma(S)) = S^{c_3} + zS^{c_1} + zS^{c_4} - zS^{c_5} + z^2S^{c_3} - z^2S^{c_6}$	43

Introducción

Uno de los problemas que estudia la teoría clásica de nudos es el de la clasificación, donde una de las cuestiones es, dados dos espacios X y Y , cómo puede ser ubicado X dentro de Y es decir, cómo podemos decidir si estos espacios son equivalentes salvo alguna forma de movimiento de X en Y . Los invariantes polinomiales de nudos son de gran utilidad para realizar este tipo de distinciones. Una de las ventajas que nos brindan los invariantes polinomiales es que su cálculo es muy simple, aunque en muchos de los casos resulta ser largo. En [Gill 82], Giller da métodos para calcular un invariante polinomial, el polinomio de Conway, en el caso de nudos y enlaces obtenidos al aplicar a cierta clase de 2-ovillos orientados, dos tipos de cerraduras a las que denota como N y D . También obtiene soluciones para el cálculo del polinomio de Conway asociado a la concatenación de 2-ovillos dados S y T dados, denotando la concatenación como una operación “+,” el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned}(S + T)^N &= S^N T^D + S^D T^N \\ (S + T)^D &= S^D T^D\end{aligned}$$

Nótese la motivación de la notación N y D que proviene del numerador y denominador de la “suma de fracciones” $\frac{S^N}{S^D} + \frac{T^N}{T^D} = \frac{S^N T^D + S^D T^N}{S^D T^D}$. Esto permite calcular el polinomio de Conway ligado a 2-ovillos con una orientación dotada, usando sencillas fracciones aritméticas. En base a este trabajo, en la presente tesis se generalizan y se aportan nuevos resultados para el caso de 3-ovillos con una orientación en particular. La estructura de este trabajo es la siguiente. En el capítulo 1 se dan algunos conceptos básicos de teoría de nudos, sus orientaciones, movidas de Reidemeister y el Polinomio de Conway, en el siguiente capítulo se abordan a los n -ovillos, en particular 3-ovillos, los cuales fueron introducidos por J. Conway [Conw 67] como “bloques” para la construcción de un nudo, se trabajará con el espacio vectorial de 3-ovillos, se sugieren seis cerraduras las cuales surgen por la naturaleza de una orientación propia con la que se dotan a los ovillos, la cual es denotada como R' . En el capítulo 3 se analiza la relación del polinomio de Conway asociada a las diferentes cerraduras planteadas, se propone además un invariante $\mathcal{I}(S) \in \mathbb{F}^6$, para 3-ovillos con la orientación R' , dado por

$$\mathcal{I}(S) = (S^{c_1}, S^{c_2}, S^{c_3}, S^{c_4}, S^{c_5}, S^{c_6})$$

donde \mathbb{F} es el campo de fracciones de $\mathbb{Z}[z]$ y S^{c_i} ($i = 1, \dots, 6$) representa el polinomio de Conway del nudo o enlace obtenido vía cerraduras. Además se proveen fórmulas para calcular el invariante del 3-ovillo $S \cdot T$, en función de los invariantes $\mathcal{I}(S)$ e $\mathcal{I}(T)$. Finalmente en el capítulo 4 se verán dos ejemplos en los que se aplican las fórmulas obtenidas para el cálculo del polinomio de Conway asociado; en particular, en la familia de 3-trenzas se muestran relaciones encontradas entre las componentes del invariante para el cálculo de la quinta

y sexta componente del invariante \mathcal{I} asociado a la 3-trenza, las cuales facilitan de manera notoria el cálculo de dichas componentes. En general una de las principales ventajas de las fórmulas encontradas para el cálculo de I relacionado a un ovillo, es que brinda ventajas en términos de cálculos pues se tratan de fórmulas no recursivas y por lo tanto más eficiente en cuanto a tiempos de cálculo.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo se darán los conceptos básicos útiles para el estudio de n -ovillos, los cuales serán adaptados, en particular; a 3-ovillos, si se desea profundizar más en estas nociones se recomienda consultar referencias como [Lick 87], [Kauf 83] y [Kauf 87].

1.1. Enlaces, nudos y sus diagramas

Un enlace L de m componentes es un subconjunto de \mathbb{R}^3 , el cual se constituye de una unión disjunta de m de curvas cerradas simples. Un enlace que consta de una sola componente es un nudo. En la figura debajo, un nudo y un enlace de dos componentes (véase Figuras 1.1a y 1.1b respectivamente), a los que además se dotan de una orientación que es definida al asignar una dirección por la cual se recorre alrededor del nudo. Esta dirección es denotada al colocar de manera consistente, a lo largo del nudo puntas de flecha que indican la dirección escogida, con esto se dice que es un nudo orientado; justamente sobre este tipo de nudos es en el que se desarrollará este trabajo.

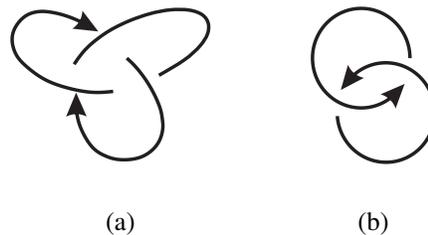


Figura 1.1: Nudo y enlace de dos componentes, ambos orientados.

Un nudo es una clase de equivalencia de encajes de la 1-esfera donde la clase está dada por la equivalencia isotópica de funciones, es decir, dos encajes son equivalentes si existe una isotopía ambiente entre ambos. La equivalencia de nudos L y L' es denotada por $L \sim L'$. Los nudos y enlaces se representan gráficamente usando proyecciones sobre un plano, en general en el plano YZ , estas proyecciones usualmente son llamadas *diagramas*, en donde no se permiten puntos triples ni puntos de tangencia y en los puntos dobles al segmento que pasa por

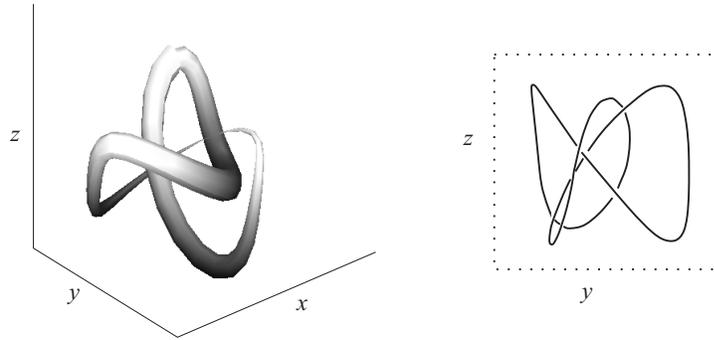


Figura 1.2: A la derecha un nudo en \mathbb{R}^3 , a la izquierda su proyección en el plano YZ .

debajo es marcado por una discontinuidad visible en el tramo. A las componentes conexas del diagrama se les llamará *arcos* o *cuerdas* y a los puntos dobles *cruces*. En la Figura 1.2 un ejemplo de un nudo y su diagrama. En ocasiones, un mismo nudo admitirá distintas representaciones en forma de diagrama, por lo que una pregunta de singular interés es, ¿cuándo dos diagramas representan el mismo nudo?, Kurt Reidemeister probó que una isotopía ambiente entre nudos puede ser expresada en términos de tres movidas que se conocen como movidas de Reidemeister, es decir, si se tienen dos proyecciones distintas L y L' de un mismo nudo, se puede obtener L a través de L' mediante alguna sucesión de movidas Reidemeister, estas movidas se muestran en la siguiente figura. Al parecer este resultado resuelve el problema

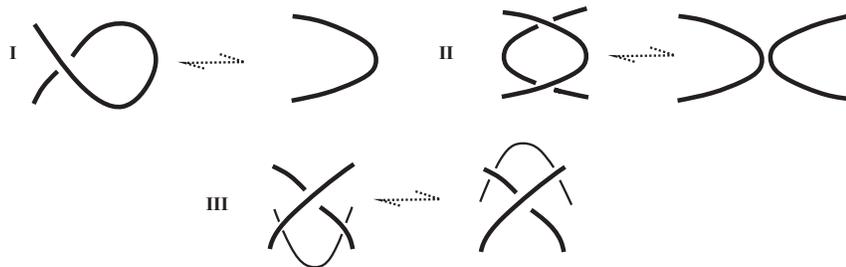


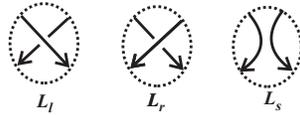
Figura 1.3: Movidas de Reidemeister

de determinar si dos nudos son equivalentes, aunque presenta algunos inconvenientes, como el no conocer el número de movimientos necesarios para transformar un diagrama en otro, tampoco es posible saber con precisión en un tiempo finito si dos nudos no son equivalentes. Es aquí donde entran en juego los invariantes de nudos: un invariante es una función que parte del conjunto de todos los diagramas de nudos y lazos, y que asigna a todos los diagramas de una misma clase de equivalencia el mismo valor. En la siguiente sección se introducirá un invariante polinómico, el cual asocia a cada nudo o enlace orientado un polinomio de nudos y enlaces orientados, el polinomio de Conway.

1.2. Polinomio de Conway

En 1970, John Horton Conway propuso asociar un polinomio como un invariante el cual en honor a él lleva su nombre, el **polinomio de Conway**; este invariante es una definición recursiva que asocia a cada nudo o enlace orientado L un polinomio $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$, donde $\mathbb{Z}[z]$ es el anillo de polinomios en z con coeficientes enteros. Nudos o enlaces equivalentes reciben polinomios idénticos: $L \sim L' \Rightarrow \nabla_L = \nabla_{L'}$. Una de las propiedades más importantes del polinomio de Conway, es que puede ser caracterizado con unos cuantos axiomas, usando las llamadas relaciones de madeja.

Definición 1.2.1. Una terna (L_l, L_r, L_s) de enlaces orientados en \mathbb{R}^3 se dice que es una terna de Conway si los enlaces pueden ser representados por diagramas L_l, L_r, L_s los cuales coinciden por fuera de una vecindad; y dentro de la vecindad son de la siguiente forma:



Para un enlace orientado L el polinomio de Conway $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ está descrito por los siguientes axiomas.

1. $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$,
2. Para una terna de Conway se tiene:

$$\nabla_{L_l}(z) = \nabla_{L_r}(z) + z\nabla_{L_s}(z).$$

Estos axiomas aseguran que $\nabla_L(z) = a_0(L) + a_1(L)z + a_2(L)z^2 + \dots + a_n(L)z^n$, donde, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Z}$ es un invariante de L . En los siguientes ejemplos se muestra cómo se aplican estos axiomas al haber escogido previamente un cruce del nudo.

1.3. Ejemplos

Se usarán las siguientes convenciones. Un punto en algún cruce indica que el cruce será cambiado y removido, es decir el cruce donde se aplicará la definición recursiva de Conway; se abusará de la notación y se hará referencia al polinomio de Conway a un nudo en particular de n cruces por $\nabla_n(z)$ como más adelante se mostrará. En el siguiente ejemplo note que el polinomio asociado a un nudo formado por dos nudos disjuntos es cero, esto se puede hacer notar tomando en cuenta que:

$$\nabla\left(\bigcirc \bigcirc\right) = \nabla\left(\bigcirc \bigcirc\right) + z\nabla\left(\bigcirc \bigcirc\right)$$

sabiendo esto es fácil ver lo aseverado.

$$z \nabla \left(\begin{array}{c} \circlearrowright \circlearrowright \end{array} \right) = \nabla \left(\begin{array}{c} \circlearrowright \end{array} \right) - \nabla \left(\begin{array}{c} \infty \end{array} \right)$$

$$\nabla \left(\begin{array}{c} \circlearrowright \circlearrowright \end{array} \right) = 0$$

De manera similar se aplica la recursión de Conway a un nudo de dos enlaces.

$$\nabla \left(\begin{array}{c} \text{S} \end{array} \right) = \nabla \left(\begin{array}{c} \circlearrowright \circlearrowright \end{array} \right) + z \nabla \left(\begin{array}{c} \circlearrowright \end{array} \right) = z$$

Observe que el intercambio entre L_l y L_r , tiene el efecto de cambiar signos; es decir, + por -.

$$\nabla \left(\begin{array}{c} \text{S} \end{array} \right) = \nabla \left(\begin{array}{c} \circlearrowright \circlearrowright \end{array} \right) - z \nabla \left(\begin{array}{c} \circlearrowright \end{array} \right) = -z$$

Otro ejemplo importante es el siguiente ejemplo, se define:

$$\nabla_{2n}(z) = \nabla \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with } 2n \text{ crossings} \end{array} \right)$$

donde $\boxed{2n}$ representa $2n$ cruces de la forma \mathcal{X} .

Para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ se cumple que $\nabla_{2n} = nz$ esto se verifica como sigue. Si $n = 1$ entonces se trata de un enlace de dos componentes como en el ejemplo anterior $\nabla_1 = \nabla_{\circlearrowright \circlearrowright} + z \nabla_{\circlearrowright} = z$. Ahora suponga ∇_{2n} , se cumple la fórmula, para ∇_{2n+1} se tiene:

$$\nabla_{2n+1} = \nabla_{2n} + z \nabla_{\circlearrowright} = (n + 1)z,$$

lo que prueba la fórmula.

Existen diversas formas o trucos que pueden ayudar a calcular el polinomio de Conway para mas información se refiere al lector a [Conw 67] y [Kauf 83].

Capítulo 2

Ovillos

Los ovillos son “bloques” a partir de los cuales se pueden construir nudos o enlaces. Un n -ovillo es una pareja (B^3, T) , en donde B^3 es la bola unitaria en \mathbb{R}^3 y T es un conjunto de n arcos propiamente encajados en B^3 . Al igual que los nudos, los ovillos se pueden estudiar a través de lo que se conoce como diagrama de ovilla asociado a T , que no es más que la proyección de sus arcos en el plano YZ , en general se puede decir simplemente ovillos en lugar de n -ovillo, en la figura siguiente se muestran dos ovillos y sus diagramas asociados.

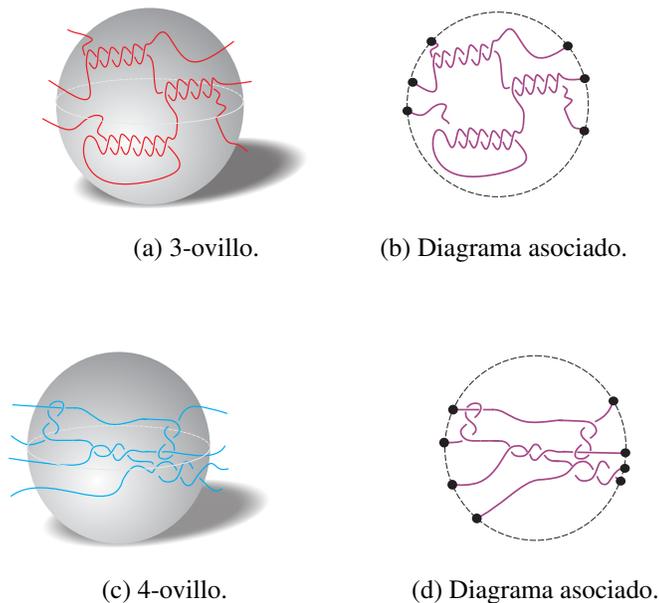


Figura 2.1: Ejemplos de ovillos y sus diagramas asociados.

Análogamente a teoría clásica de nudos, es de gran importancia en el estudio de ovillos saber cuándo dos ovillos son equivalentes, es decir, si existen reglas que permitan pasar de un ovilla por deformación y no ruptura de arcos. Dos ovillos A y B son equivalentes si existe una isotopía de B^3 en sí misma que deja la frontera fija y mapea A en B . En particular, dos ovillos son equivalentes si, y sólo si, se puede pasar de un diagrama de A a un diagrama de B mediante una sucesión finita de movidas de Reidemeister.

2.1. Cuartos sus orientaciones y sus habitantes

Nótese que se ha hablado de ovillos sin orientación, es interesante dotar a los ovillos de una orientación en particular, pues enriquece a la familia de estos ovillos, y por tanto hace un campo mas extenso de estudio. En seguida se define formalmente la noción de orientación en un ovillo asimismo algunos conceptos básicos para el análisis de estos ovillos.

Definición 2.1.1. Sea P un conjunto ordenado de n puntos en el interior de D^2 , el disco unitario cerrado, y sea $S \subset P$. Decimos que la terna $R = (D^2 \times I, P, S)$ es un n -cuarto. Los puntos en $P \times \{0\}$ y $P \times \{1\}$ son llamados **puertos izquierdos** y **puertos derechos** respectivamente; los puertos en $S \times \{0, 1\}$ tienen una orientación positiva y los puertos en $(P/S) \times \{0, 1\}$ tienen orientación negativa.

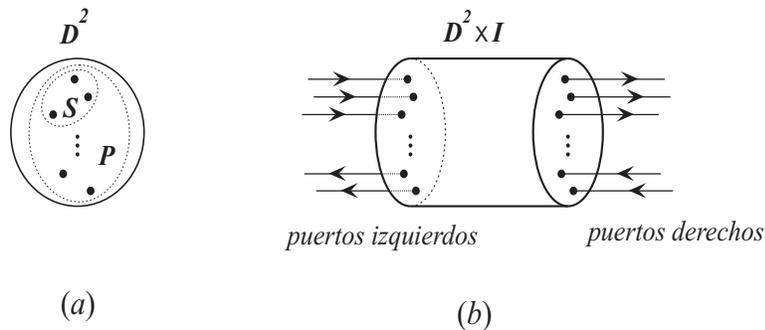


Figura 2.2: (a) Un n -cuarto $(D^2 \times I, P, S)$. (b) Puertos izquierdos y derechos de un n -cuarto que posee orientación.

La orientación en un ovillo es definida de manera similar que en nudos y enlaces, se dice que un n -ovillo *orientado* es un ovillo (B^3, S) tal que cada una de las cuerdas o arcos de S posee cierta dirección. Un n -cuarto R posee una orientación *estándar*, en cuyo caso se denota como R si $S = P$, es decir si todos los puertos tienen orientación positiva, como se ilustra en la Figura 2.3a. El 3-cuarto con la orientación mostrada en la Figura 2.3b se denota como R' es precisamente sobre esta orientación con la que se trabajará. Otro concepto importante

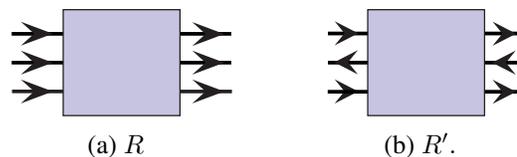


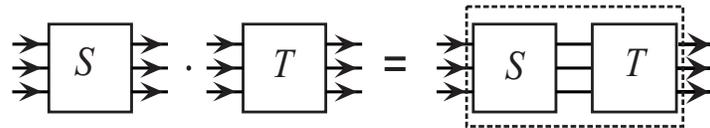
Figura 2.3: Cuartos con orientación R y R' respectivamente.

en este trabajo es el de habitante, definido a continuación.

Definición 2.1.2. Un n -ovillo orientado $S = (B^3, A)$ es un **habitante** de un n -cuarto si existe un homeomorfismo $\varphi : B^3 \rightarrow D^2 \times I$, con $\varphi(\partial A) = P \times \{0, 1\}$, tal que para cada arco $a \subset A$ se cumplan las siguientes condiciones:

1. φ mapea a ∂a sobre exactamente un puerto izquierdo y un puerto derecho, ambos con la misma orientación o φ mapea a un puerto con otro de la misma orientación;
2. La orientación de a coincide con la inducida por R .

La **madeja** $\mathcal{S}(R)$ de un cuarto R es el conjunto de todos los habitantes de R , los cuales conectan las cuerdas de puertos izquierdos con puertos derechos, por ejemplo en la Figura 2.4 tanto los ovillos del lado izquierdo como el del lado derecho de la igualdad son elementos de la madeja. Ahora se definirá el producto de ovillos de la manera obvia. El conjunto $\mathcal{S}(R)$ tiene asociada una operación binaria “ \cdot ” que mapea habitantes S y T de R a habitantes de $S \cdot T$ definido como en la figura siguiente:



Para los elementos de R' la operación producto es definida de forma equivalente, así por ejemplo:

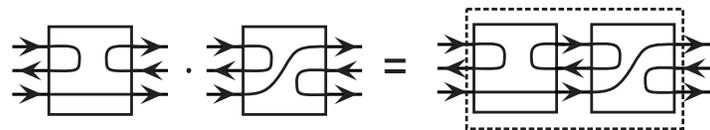


Figura 2.4

Note que el producto entre ovillos no es más que conectar cada una de las cuerdas de un ovillo con las cuerdas del otro de manera consistente respecto a su dirección, estas uniones entre cuerdas de ovillos determinan una única permutación de un habitante de un cuarto, en ovillos se puede establecer el concepto de permutación como sigue.

Sea S_n el grupo simétrico de n letras. Dado $s \in \mathcal{S}(R)$, se asocia una permutación $\pi(s) \in S_n$ como en el siguiente ejemplo:

$$\pi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram of a box with 3 strands} \\ \text{Input 1, 2, 3 on left; Output 1, 2, 3 on right} \\ \text{Strand 1 crosses over strand 2, then under strand 3} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La permutación que se asocia es debido a la correspondencia de entradas con salidas numeradas previamente, por ejemplo en el ovillo de la figura anterior la entrada 1 se conecta con la salida 2.

2.2. El espacio vectorial de ovillos del 3-cuarto estándar

Se dota al conjunto $\mathcal{S}(R)$ de estructura de espacio vectorial como sigue. Sean L_l, L_r y L_s elementos de algún cuarto R , y (L_l, L_r, L_s) alguna madeja como antes se ha definido; sea R un 3-cuarto y \mathbb{F} el campo de fracciones de $\mathbb{Z}[z]$. Se define:

$V(R) :=$ el espacio vectorial libre sobre \mathbb{F} generado por $\mathcal{S}(R)$,

$N(R) :=$ el subespacio vectorial generado por elementos de la forma $L_l - L_r - zL_s$.

El espacio cociente $V(R)/N(R)$ es denotado por $L(R)$. Abusando de la notación se usará S para denotar a un habitante $S \in \mathcal{S}(R)$ al vector $S \in V(R)$ y a la clase de S en $L(R)$. El espacio $L(R)$ hereda la estructura de espacio vectorial de $V(R)$ y además es un álgebra por la izquierda bajo extensión de “ \cdot ”:

$$S \cdot (T + \alpha U) = S \cdot T + \alpha(S \cdot U),$$

para $S, T, U \in L(R)$ y $\alpha \in \mathbb{F}$. Siguiendo con la discusión acerca del 3-cuarto estándar; sea $B = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_6\}$ (véase Figura 2.5) subconjunto de $L(R)$, en este caso el conjunto de permutaciones $\{\pi(\Sigma_1), \dots, \pi(\Sigma_6)\}$ asociadas a los elementos de B es igual a S_3 . Por otra

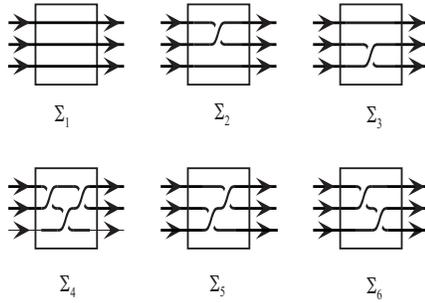


Figura 2.5: Una base de $L(R)$

parte, en [Gill 82] el autor mostró que B es una base de $L(R)$, de donde se sigue que cada elemento de $L(R)$ admite una única expresión como una combinación lineal de elementos en B .

Ejemplo 2.2.1. Por ejemplo para el ovillo $S \in \mathcal{S}(R)$, mediante la relación de Conway, es posible expresarlo en términos de la base elegida B , es decir mediante su imagen en $L(R)$:

$$S = z\Sigma_5 + z^2\Sigma_4$$

vea en los diagramas de la Figura 2.6

2.3. Cerraduras de 3-ovillos en $L(R')$

Los habitantes de $L(R)$ dan lugar a nudos o enlaces orientados gracias a una operación que se le conoce como cerradura, la cual consiste en conectar puertos derechos con puertos

$$\begin{aligned}
&= \\
&= \left(\text{Braid with crossing } a \right) + z \left(\text{Braid with crossing } z \right) \\
&= \left(\text{Braid with crossing } a \right) + z \left(\text{Braid with crossing } z \right) + z \left(\text{Braid with crossing } z \right) \\
&= z\Sigma_5 + z^2\Sigma_4
\end{aligned}$$

Figura 2.6: Ovillo expresado en términos de la base B .

izquierdos siempre y cuando coincidan en sus orientaciones, a diferentes orientaciones les atañen diferentes cerraduras, por ejemplo una cerradura importante y particularmente simple es la que se genera al conectar las cuerdas sin introducir cruces, esta es la cerradura de la Figura 2.7 la cual se designa como "c₆." Dado $S \in \mathcal{S}(R)$, se denota por $c_i(S)$ al nudo o

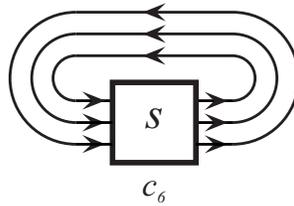


Figura 2.7: Cerradura c_6 de un habitante de R

enlace orientado obtenido de la i -ésima cerradura. Al polinomio de Conway ligado a esta cerradura se denota como S^{c_i} , i.e, $S^{c_i} = \nabla(c_i(S))$.

2.4. Cálculo del polinomio de Conway de $(S \cdot T)$ en $L(R)$

En esta sección se explican las herramientas que se utilizan para calcular el polinomio de Conway del producto de dos ovillos dados en $L(R)$.

Definición 2.4.1. Dado $S \in L(R)$, se define $S^* : L(R) \rightarrow \mathbb{Z}[z]$ mediante $S^*(X) = (X \cdot S)^{c_6} = \nabla(c_6(X \cdot S))$

Ya que B es una base de $L(R)$, podemos extender por linealidad al mapeo $S^* : L(R) \rightarrow \mathbb{Z}[z] \subset \mathbb{F}$; es decir, dados X, Y elementos en $L(R)$ se tiene que $S^*(X + \alpha Y) = S^*(X) +$

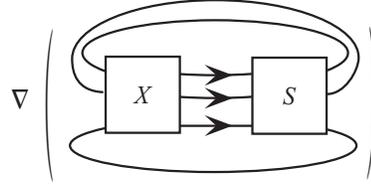


Figura 2.8: Elemento dual $S^*(X)$

$\alpha S^*(Y)$ lo que da como resultado un elemento de $L(R)^*$.

Sea M la matriz (2.1) de entradas $M_{ij} := \Sigma_i^*(\Sigma_j)$, $i, j \in \{1, \dots, 6\}$. Como $\det(M) = -(z^2 + 4)$, M es invertible luego $B^* = \{\Sigma_1^*, \dots, \Sigma_6^*\}$ es una base $L(R)^*$.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 + z^2 & z & z \\ 0 & 1 & 0 & 1 + z^2 & z & z \\ z & 1 + z^2 & 1 + z^2 & 3z^2 + z^4 & 2z + z^3 & 2z + z^3 \\ 1 & z & z & 2z + z^3 & 1 + z^2 & z^2 \\ 1 & z & z & 2z + z^3 & z^2 & 1 + z^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Siguiendo el trabajo de Giller en [Gill 82], una herramienta fundamental para el cálculo del polinomio de Conway de la concatenación de dos ovillos dados en $L(R)$ es disponer de la forma bilineal φ sobre $L(R)$, a continuación se explica el caso particular $n = 3$ como sigue. La función $\varphi : L(R) \times L(R) \rightarrow \mathbb{F}$, está determinada por sus valores sobre las parejas de vectores formadas con los elementos de la base elegida $B = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_6\}$ de $L(R)$; es decir por $\varphi_{i,j} := \varphi(\Sigma_i, \Sigma_j)$. Note que φ preserva las relaciones de Conway.

Debido a que $B^* = \{\Sigma_1^*, \dots, \Sigma_6^*\}$ es una base del espacio $L(R)^*$, existen elementos $a_{k,l} \in \mathbb{F}$ tales que $\varphi = \sum a_{k,l}(\Sigma_k^* \otimes \Sigma_l^*)$ entonces,

$$\begin{aligned} \varphi(\Sigma_i, \Sigma_j) &= \sum a_{k,l} \Sigma_k^*(\Sigma_i) \Sigma_l^*(\Sigma_j) \\ &= \sum a_{k,l} M_{k,i} M_{l,j} \\ &= \sum_l M_{l,j} \left(\sum_k a_{k,l} M_{k,i} \right) \\ &= ((A^T M)^T M)_{i,j} \\ &= (M^T A M)_{i,j} \end{aligned}$$

donde $M = M_n$ y $(A_{k,l}) = a_{k,l}$. Se tiene que $\varphi(\Sigma_i, \Sigma_j) = M_{i,j}$, entonces $M = M^T A M$ i.e.

$\varphi = A = (M^T)^{-1}$. Donde M^{-1} en este caso es:

$$\left(\frac{1}{4+z^2} \right) \begin{bmatrix} -2+3z^2+z^4 & -z(3+z^2) & -z(3+z^2) & -z & 2+z^2 & 2+z^2 \\ -z(3+z^2) & -2 & 2+z^2 & 2 & -z & -z \\ -z(3+z^2) & 2+z^2 & -2 & 2 & -z & -z \\ -z & 2 & 2 & -2 & z & z \\ 2+z^2 & -z & -z & z & 2 & -2-z^2 \\ 2+z^2 & -z & -z & z & -2-z^2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Luego la representación matricial de φ relativa a la base B , con $S, T \in L(R)$ se escribe:

$$\varphi(S, T) = (\Sigma_1^*(S), \dots, \Sigma_6^*(S)) (M^T)^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_1^*(T) \\ \vdots \\ \Sigma_6^*(T) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Si $\alpha(S)$ representa a:

$$\alpha(S) = \Sigma_1^*(S)\Sigma_1 + \dots + \Sigma_6^*(S)\Sigma_6,$$

para cualquier elemento S en $L(R)$ se tiene,

$$\alpha = \sum_{i=1}^6 \Sigma_i^* \otimes \Sigma_i \quad (2.4)$$

donde $\alpha : L(R) \rightarrow L(R)$, entonces por la ecuación (2.3) y tomando en cuenta que la matriz M es simétrica, se establece que:

$$(S \cdot T)^{c_6} = \varphi(S, T) = \alpha(S)M^{-1}\alpha(T) \quad (2.5)$$

con $S, T \in L(R)$. Observe que esta expresión es particularmente interesante ya que el polinomio de Conway asociado a la cerradura c_6 se puede expresar en función de α y M^{-1} .

Capítulo 3

El invariante \mathcal{I} y el cálculo de sus componentes

Dados los antecedentes en este tema, una pregunta que surge de manera natural, es cómo se puede usar la herramienta propuesta por Giller, en el caso de 3-ovillos dotados de una orientación diferente a la planteada en [Gill 82]. Ya que se ha obtenido la forma bilineal que calcula el polinomio de Conway ligado al producto de dos 3-ovillos en un cuarto R , en lo sucesivo, es de interés particular en este trabajo el estudio del 3-cuarto con una orientación en especial llamada R' , en la Figura 3.1 se muestra dicha orientación.

La forma bilineal que se propone en este caso, tiene algunas variaciones, sin embargo no



Figura 3.1: 3-cuarto con orientación R' .

sufre cambios sustantivos, esto gracias al uso de un artificio que permite utilizar el mecanismo anterior considerando el conjunto de 3-ovillos en $L(R')$. En este capítulo se explicará detalladamente lo anterior.

3.1. Cerraduras del 3-cuarto con orientación R'

Para el 3-cuarto R' se definen seis cerraduras, mostradas en la Figura 3.2. Note que cinco de ellas aparecen al conectar las entradas con las salidas de manera consistente sin agregar cruces, a diferencia de c_5 la cual está definida en términos de la cerradura c_6 del ovillo $S \cdot E$, donde E es el 3-ovillo que representa un giro de 180° hacia enfrente de las tres cuerdas. Al parecer en la cerradura c_5 se agregan cruces al cerrarse, más adelante se detallará la razón del haber añadido esta cerradura.

Análogos a los cálculos para φ se construye una forma bilineal para $L(R')$ de la siguiente manera; dados S y T elementos de $L(R')$, se requiere obtener una función bilineal sobre $L(R')$, tal que $\psi(S, T) = (S \cdot T)^{c_6}$; es decir, se precisa encontrar el polinomio de Conway del producto de 3-ovillos en $L(R')$ véase Figura 3.3. Para logra este fin, se definen previamente

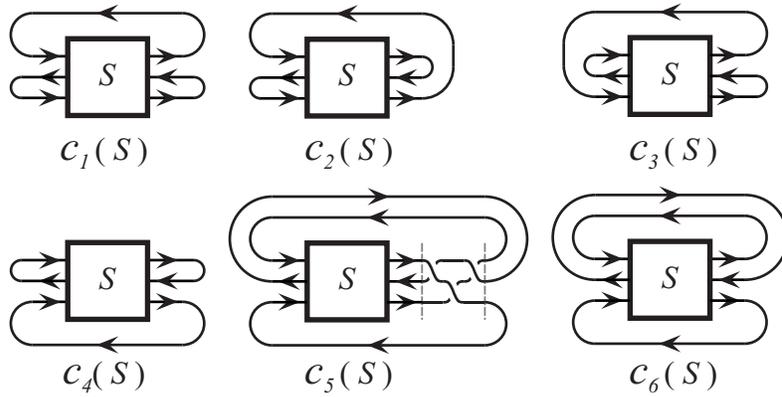


Figura 3.2: Seis cerraduras de 3-ovillos con orientación R'

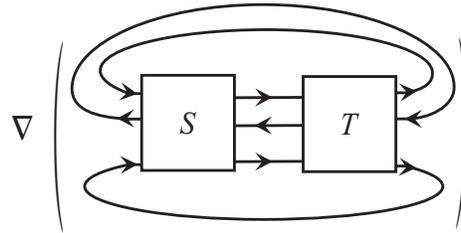


Figura 3.3: Polinomio de Conway del producto de ovillos en $L(R')$

los elementos σ y τ en el 3-cuarto R que se muestran en la Figura 3.4 con el propósito de utilizar estos elementos a manera de artificio, siguiendo la propuesta de [Gill 82] pero reestructurando para el 3-cuarto R' , mediante la inserción de σ y τ en los 3-cuartos de R , de

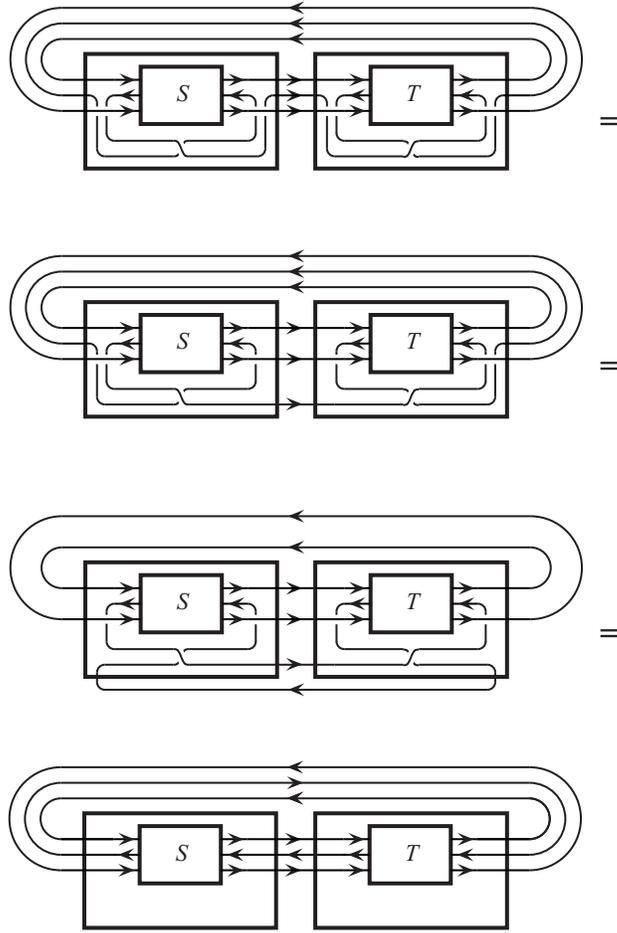


Figura 3.4: Transformación de habitantes S, T de R' en habitantes $\sigma(S), \tau(T)$ de R .

tal manera que las orientaciones sean congruentes, es evidente que:

$$\psi(S, T) = \varphi(\sigma(S), \tau(T)). \tag{3.1}$$

Mediante los siguientes diagramas se verifica lo anterior.



Se define un invariante para 3-ovillos dotados de una orientación R' , llamado $\mathcal{I}(S)$, como un vector en \mathbb{F}^6 dado por:

$$\mathcal{I}(S) = (S^{c_1}, S^{c_2}, S^{c_3}, S^{c_4}, S^{c_5}, S^{c_6}) \quad (3.2)$$

donde \mathbb{F}^6 es el campo de fracciones de $\mathbb{Z}[z]$ y S^{c_i} ($i = 1, \dots, 6$) representa el polinomio de Conway del nudo o enlace obtenido al cerrar un 3-ovillo dado, con alguna de las seis diferentes cerraduras que se han definido. Note que la inserción descrita anteriormente permite usar la matriz M^{-1} para encontrar fórmulas explícitas para el cálculo de $\mathcal{I}(S)$ de un 3-ovillo S dado.

A continuación se calcula $\alpha(\sigma(S))$ y $\alpha(\tau(T))$, por (2.4) con S, T en $L(R')$ se tiene:

$$\alpha(\sigma(S)) = (\Sigma_1^*(\sigma(S)), \Sigma_2^*(\sigma(S)), \Sigma_3^*(\sigma(S)), \Sigma_4^*(\sigma(S)), \Sigma_5^*(\sigma(S)), \Sigma_6^*(\sigma(S))) \quad (3.3)$$

$$\alpha(\tau(T)) = (\Sigma_1^*(\tau(T)), \Sigma_2^*(\tau(T)), \Sigma_3^*(\tau(T)), \Sigma_4^*(\tau(T)), \Sigma_5^*(\tau(T)), \Sigma_6^*(\tau(T))) \quad (3.4)$$

Se realizan los cálculos para $\alpha(\sigma(S))$, véanse los cálculos explícitos en las Figuras A.1a, A.1b, A.1c para las primeras tres componentes, la Figura A.2 para la quinta componente y en las Figuras A.3 y A.4 para la cuarta y sexta componente respectivamente, las cuales requieren

cálculos ligeramente más complejos relativo a los de las demás componentes. Los cálculos de $\alpha(\tau(T))$ se desarrollan en forma similar a los hechos para $\alpha(\sigma(S))$. Gracias a los cálculos anteriores, para las ecuaciones (3.3) y (3.4) resulta.

$$\alpha(\sigma(S)) = (S^{c_6}, S^{c_4}, S^{c_1}, S^{c_5} - zS^{c_3} + zS^{c_6} + zS^{c_2}, S^{c_2}, S^{c_3} + zS^{c_1} + zS^{c_4} - zS^{c_5} + z^2S^{c_3} - z^2S^{c_6}), \quad (3.5)$$

$$\alpha(\tau(T)) = (S^{c_6}, S^{c_4} + zS^{c_6}, S^{c_1} + zS^{c_6}, zS^{c_2} + (-z - z^3)S^{c_3} + (1 + z^2)S^{c_5} + (z + z^3)S^{c_6}, S^{c_2} + zS^{c_5} - z^2S^{c_3} + z^2S^{c_6}, S^{c_3} + zS^{c_4} + zS^{c_1} + z^2S^{c_6})^T. \quad (3.6)$$

Con ayuda de $\alpha(\sigma(S))$ y $\alpha(\tau(T))$ se definen los mapeos $g, h : \mathbb{F}^6 \rightarrow \mathbb{F}^6$ donde $x = \mathcal{I}(S)$ para algún S en $L(R')$; es decir tomando $\alpha(\sigma(S)) = g(\mathcal{I}(S))$ y $\alpha(\tau(T)) = h(\mathcal{I}(T))$ se sigue:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x_6, x_4, x_1, x_5 - zx_3 + zx_6 + zx_2, x_2, \\ &\quad x_3 + zx_1 + zx_4 - zx_5 + z^2x_3 - z^2x_6)^T \\ h(x) &= (x_6, x_4 + zx_6, x_1 + zx_6, zx_2 + (-z - z^3)x_3 + (1 + z^2)x_5 \\ &\quad + (z + z^3)x_6, x_2 + zx_5 - z^2x_3 + z^2x_6, x_3 + zx_4 + zx_1 + z^2x_6)^T \end{aligned}$$

Mediante $\mathcal{I}(S \cdot E)$ se define el mapeo $f : \mathbb{F}^6 \rightarrow \mathbb{F}^6$, dado por:

$$f(x) = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6 + zx_4 - zx_5 + zx_1, x_5)^T \quad (3.7)$$

donde $f(\mathcal{I}(S)) = \mathcal{I}(S \cdot E)$ $x = \mathcal{I}(S)$. Mas adelante se mostrará la construcción de esta función, ahora note que es sencillo verificar que los mapeos anteriores son isomorfismos, por ejemplo para $f : \mathbb{F}^6 \rightarrow \mathbb{F}^6$, supongamos que $f(x) = f(y)$, donde $x, y \in \mathbb{F}^6$ entonces

$$(x_2, x_1, x_4, x_6 + zx_4 - zx_5 + zx_1, x_5)^T = (y_2, y_1, y_4, y_6 + zy_4 - zy_5 + zy_1, y_5)^T$$

luego, $x_2 = y_2$, $x_1 = y_1$, $x_4 = y_4$, $x_3 = y_3$, $x_5 = y_5$, y de la quinta componente podemos inferir que si $x_6 + zx_4 - zx_5 + zx_1 = y_6 + zy_4 - zy_5 + zy_1$ entonces $x_6 = y_6$ por lo tanto $x = y$ y f es inyectiva. Ahora para evidenciar que f es sobre, sea $r = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)^T \in \mathbb{F}^6$, escojamos $x = (r_2, r_1, r_4, r_3, r_6, r_5 - zr_3 + zr_6 - zr_2)$, entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= (r_1, r_2, r_3, r_4, (r_5 - zr_3 + zr_6 - zr_2) + zr_3 - zr_6 + zr_2, r_6)^T \\ &= (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)^T \end{aligned}$$

Así f es sobre. Ahora $f(x + y) = (x_2 + y_2, x_1 + y_1, x_4 + y_4, x_6 + y_6 + z(x_4 + y_4) - z(x_5 + y_5) + z(x_1 + y_1), x_5 + y_5)^T$, por otro lado

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= (x_2, x_1, x_4, x_6 + zx_4 - zx_5 + zx_1, x_5)^T \\ &\quad + (y_2, y_1, y_4, y_6 + zy_4 - zy_5 + zy_1, y_5)^T \\ &= (x_2 + y_2, x_1 + y_1, x_4 + y_4, x_6 + y_6 + z(x_4 + y_4) \\ &\quad - z(x_5 + y_5) + z(x_1 + y_1), x_5 + y_5)^T \end{aligned}$$

El calcular las componentes del invariante propuesto \mathcal{I} se torna en muchos de los casos tedioso, en especial los cálculos relacionados con la quinta y sexta componente de dicho

invariante, para facilitar estos cálculos se proponen los siguientes mapeos:

$\psi_{c_5}, \psi_{c_6} : \mathbb{F}^6 \times \mathbb{F}^6 \rightarrow \mathbb{F}$, dados por:

$$\psi_{c_6}(x, y) = g(x)^T M^{-1} h(y) \quad \text{y} \quad \psi_{c_5}(x, y) = \psi_{c_6}(x, f(y)). \quad (3.8)$$

A continuación se mostrará cómo se relacionan el mapeo f de la ecuación (3.7) y el invariante $\mathcal{I}(S \cdot E)$, dados ovillos S, T, E en $L(R')$, f mapea $\mathcal{I}(S)$ al invariante $\mathcal{I}(S \cdot E)$ de la concatenación $S \cdot E$, mientras que ψ_{c_6} determina el polinomio de Conway asociado a la cerradura c_6 de $S \cdot T$. Así mismo se mostrará que ψ_{c_5} calcula el polinomio de Conway de la cerradura c_5 .

Proposición 1. *Dados habitantes $S, T \in L(R')$, se tiene:*

1. $\mathcal{I}(S \cdot E) = f \circ \mathcal{I}(S)$;
2. $(S \cdot T)^{c_6} = \psi_{c_6}(\mathcal{I}(S), \mathcal{I}(T))$;
3. $(S \cdot T)^{c_5} = \psi_{c_5}(\mathcal{I}(S), \mathcal{I}(T)) = \psi_{c_6}(\mathcal{I}(S), f(\mathcal{I}(T)))$

Demostración.

Prueba de (1). El lado izquierdo de la igualdad se verifica por los diagramas de la Figura 3.5. Ahora para el lado derecho de la igualdad: Sea $\mathcal{I}(S) = (S^{c_1}, S^{c_2}, S^{c_3}, S^{c_4}, S^{c_5}, S^{c_6}) \in \mathbb{F}^6$, entonces

$$f \circ \mathcal{I}(S) = (S^{c_2}, S^{c_1}, S^{c_4}, S^{c_3}, S^{c_6} + zS^{c_4} - zS^{c_5} + zS^{c_1}, S^{c_5})$$

con lo que se comprueba la igualdad.

Prueba de (2). Dados $S, T \in L(R')$, por la definición de σ y de τ se sigue que $\sigma(S), \tau(T)$ son habitantes de $L(R)$. Por la ecuación (3.1) se tiene:

$$\begin{aligned} (S \cdot T)^{c_6} &= \psi(S, T) \\ &= \varphi(\sigma(S), \tau(T)) \\ &= (\sigma(S), \tau(T))^{c_6}, \end{aligned}$$

entonces por (2.5),

$$(S \cdot T)^{c_6} = (\sigma(S) \cdot \tau(T))^{c_6} = \alpha(\sigma(S))M^{-1}\alpha(\tau(T)).$$

Por otro lado en virtud de (3.8) se tiene:

$$\psi(\mathcal{I}(S), \mathcal{I}(T)) = g(\mathcal{I}(S))M^{-1}h(\mathcal{I}(T))$$

Antes se evidenció que $\alpha(\sigma(S)) = g(\mathcal{I}(S))$ y que $\alpha(\tau(T)) = h(\mathcal{I}(T))$, luego por (2.5), $(S \cdot T)^{c_6} = \psi_{c_6}(\mathcal{I}(S), \mathcal{I}(T))$.

Prueba de (3). Por definición se tiene, $(S \cdot T)^{c_5} = (S \cdot (T \cdot E))^{c_6}$ y por (1), $\mathcal{I}(T \cdot E) = f \circ \mathcal{I}(T)$, usando (2), se sigue $(S \cdot T)^{c_5} = \psi_{c_6}(\mathcal{I}(S), \mathcal{I}(T \cdot E)) = \psi_{c_6}(\mathcal{I}(S), f \circ \mathcal{I}(T)) = \psi_{c_5}(S, T)$. ■

3.2. Polinomio de Conway asociado a $(S \cdot T) \in L(R')$

Una propiedad deseable de un invariante es su calculabilidad en términos prácticos, la estrategia que se plantea en este trabajo para lograr que el problema de encontrar el polinomio de Conway asociado a un producto de ovillos sea calculable, consiste en realizar particiones en el ovillo $(S \cdot T)$ para después aplicar el procedimiento recursivo que determina el invariante asociado, es decir encontrar el polinomio de Conway en términos de $\mathcal{I}(S)$ e $\mathcal{I}(T)$.

En la referencia [Cabr 04], Cabrera-Ibarra sugiere que para el cálculo de las cuatro primeras componentes se pueden obtener a través de la siguiente proposición.

Proposición 2. [Cabr 04] Sean $S, T \in L(R')$ y sea M_{∇} la matriz 2×2 con entradas correspondientes a las cuatro primeras componentes de $\mathcal{I}(S)$ ordenadas como sigue:

$$M_{\nabla}(S) = \begin{pmatrix} S^{c_3} & S^{c_4} \\ S^{c_1} & S^{c_2} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

se cumple que $M_{\nabla}(S \cdot T) = M_{\nabla}(S)M_{\nabla}(T)$.

Ejemplo 3.2.1. Nótese que para el ovillo E , la matriz $M_{\nabla}(E)$ está dada por:

$$M_{\nabla}(E) = \begin{pmatrix} \nabla \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right) & \nabla \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right) \\ \nabla \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right) & \nabla \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

The diagram shows a 2x2 matrix of knot diagrams. Each entry is a knot diagram with a blue box labeled 'E' highlighting a specific region. The diagrams are arranged in a 2x2 grid within large parentheses. The top-left diagram shows a knot with a blue box 'E' on the right side. The top-right diagram shows a knot with a blue box 'E' on the left side. The bottom-left diagram shows a knot with a blue box 'E' on the right side. The bottom-right diagram shows a knot with a blue box 'E' on the left side.

por lo que,

$$M_{\nabla}(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Combinando las Proposiciones (1) y (2) obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1. Sean $S, T \in L(R')$ se tiene $\mathcal{I}(S \cdot T) = \eta(\mathcal{I}(S), \mathcal{I}(T))$, donde $\eta : \mathbb{F}^6 \times \mathbb{F}^6 \rightarrow \mathbb{F}^6$ es el mapeo bilineal definido por:

$$\eta(x, y) = \begin{pmatrix} x_1y_3 + x_2y_1 \\ x_1y_4 + x_2y_2 \\ x_3y_3 + x_4y_1 \\ x_3y_4 + x_4y_2 \\ \psi_{c_5}(x, y) \\ \psi_{c_6}(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Note que se ha encontrado una fórmula para el cálculo del polinomio de Conway asociado a un producto de ovillos, estos cálculos gracias a este Corolario, se realizarán de manera directa en función de los invariantes de cada uno de los ovillos por separado.

Capítulo 4

Aplicaciones

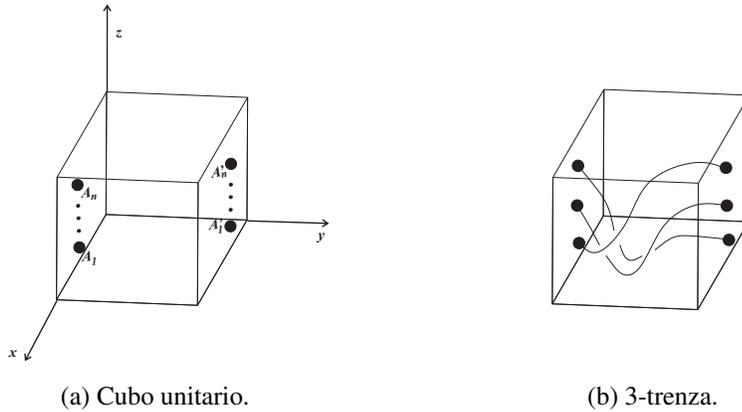
Vistas las herramientas que se han propuesto en el capítulo anterior para calcular el polinomio de Conway asociado a algún 3-ovillo; en particular al polinomio de Conway asociado al producto de 3-ovillos, en lo subsecuente se dedicará este capítulo a hacer uso de dichos instrumentos para generar el invariante \mathcal{I} , de cierta familia de 3-trenzas, también se dará otro ejemplo que muestra el mismo procedimiento aplicado a otro ovillo escogido.

4.1. 3-Trenzas, definición y sus diagramas

Considere un cubo unitario B en \mathbb{R}^3 . Escójase la tapa contenida en el plano XZ de B , n puntos A_1, \dots, A_n y otros n puntos A'_1, \dots, A'_n de la tapa opuesta, como se muestra en la Figura 4.1a. Una n -trenza es una colección de cuerdas orientadas no anudadas que van cada una a partir de uno de los puntos A_1, \dots, A_n y llegan cada una a un punto diferente de los n puntos A'_1, \dots, A'_n . La familia de n -trenzas es un ejemplo particular de 3-ovillos. Un ejemplo de 3-trenza es la de la Figura 4.1b, también los seis habitantes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_6$ de $L(R)$ pertenecen a la familia de 3-trenzas (ver Figura 2.5). Debido a que una trenza es un ovillo, es posible obtener diagramas de trenzas, proyectando sobre el plano YZ como en la figura 4.1c. Un diagrama de trenza es determinado únicamente por una sucesión finita de enteros a_1, a_2, \dots, a_n y se denota por $\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Se distinguen dos casos dependiendo de si n es par o impar:

$$\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} \mathcal{T}(a_1) \cdot \mathcal{T}(0, a_2) \cdot \mathcal{T}(a_3) \cdots \mathcal{T}(a_n) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \mathcal{T}(a_1) \cdot \mathcal{T}(0, a_2) \cdot \mathcal{T}(a_3) \cdots \mathcal{T}(0, a_n) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (4.1)$$

En la Figura 4.2 un ejemplo de una trenza donde n es par e impar y los casos en los que a_i es positivo o negativo dependiendo de su posición en el diagrama.



(c) Diagrama.

Figura 4.1

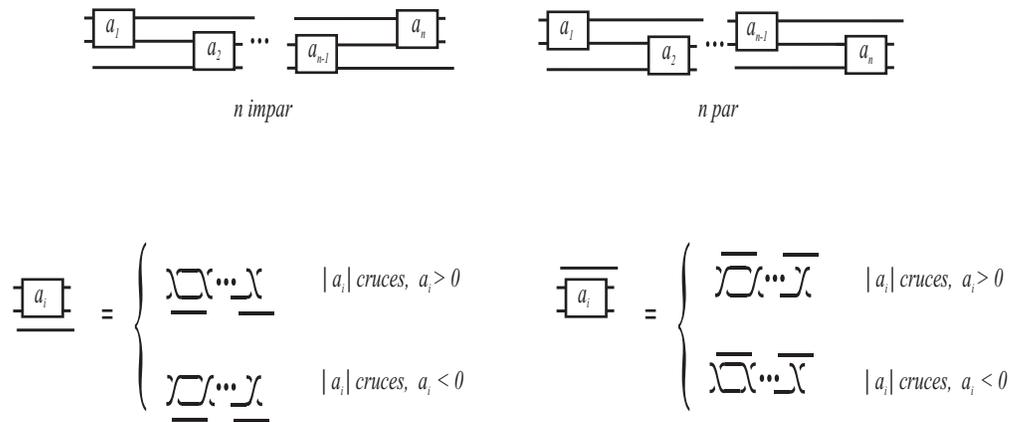


Figura 4.2: En la parte superior diagramas de trenzas casos: n impar y n par respectivamente, debajo: $a_i < 0$ ó $a_i > 0$ depende de su posición

Por ser ovillos las 3-trenzas cumplen con las operación producto definida anteriormente en ovillos, con esta operación, la familia de n -trenzas forma un grupo no conmutativo. Una característica mas que se define para 3-trenzas es la *longitud* de $\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n)$ que esta dado por los subíndices de los a'_j 's : $L(\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n)) = n$. Un diagrama inverso de una n -trenza con diagrama A será denotado por A^{-1} se sigue que el significado de A^k es evidente. Las igualdades de la ecuación (4.1) anteriores son útiles en el cálculo del invariante $\mathcal{I}(T)$ de una 3-trenza T dada, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.1. Sea la 3-trenza $T = \mathcal{T}(2a_1, 2a_2)$, el invariante $\mathcal{I}(T)$ se calcula de la siguiente forma. Como se trata de una trenza donde T se puede descomponer como sigue: $\mathcal{T}(2a_1, 2a_2) = \mathcal{T}(2a_1) \cdot \mathcal{T}(0, 2a_2)$ entonces,

$$\mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_1, 2a_2)) = \mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_1) \cdot \mathcal{T}(0, 2a_2))$$

sabiendo que:

$$\mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_1)) = (a_1z, 1, 1, 0, z(a_1 + 1), 0)^T \quad (4.2)$$

$$\mathcal{I}(\mathcal{T}(0, 2a_2)) = (0, 1, 1, -a_2z, z(1 - a_2), 0)^T \quad (4.3)$$

Esto se verifica en los diagramas mostrados a continuación. Haciendo uso del corolario (3.11) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_1, 2a_2)) &= \mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_1) \cdot \mathcal{T}(0, 2a_2)) \\ &= (a_1z, 1 - a_1a_2z^2, 1, -a_2z, (a_1 - a_2 + 1)z, \\ &\quad -a_1a_2z^2)^T \end{aligned} \quad (4.4)$$

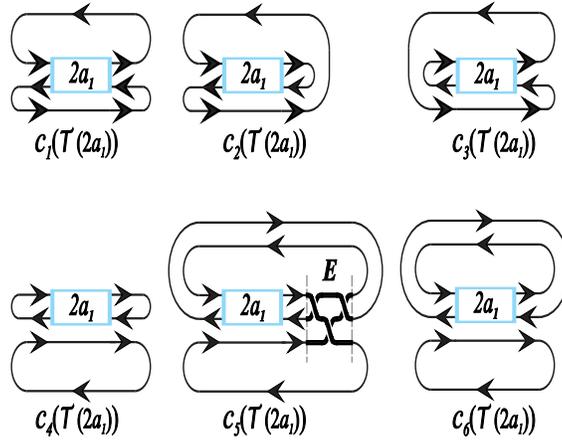


Figura 4.3: Diagramas de las seis cerraduras de $\mathcal{T}(2a_1)$.

4.2. Diagrama de trenzas $\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot E^k$

Dos diagramas importantes en la representación de trenzas son $E = \mathcal{T}(1, -1, 1)$ y su inverso $E^{-1} = \mathcal{T}(0, 1, -1, 1)$. En [Cabr 04] se tiene el siguiente resultado (para una prueba de este lema consultar la referencia).

Lema 1. Sea $T = \mathcal{T}(a_1, \dots, a_n)$ una trenza, entonces $T \cong AD \cdot E^k$ donde AD es un diagrama alternante y $k \in \mathbb{Z}$.

Los diagramas satisfacen una interesante propiedad donde los elementos de la trenza pueden ser cambiados de posición, es decir de inferior a superior y viceversa, al hacerlas

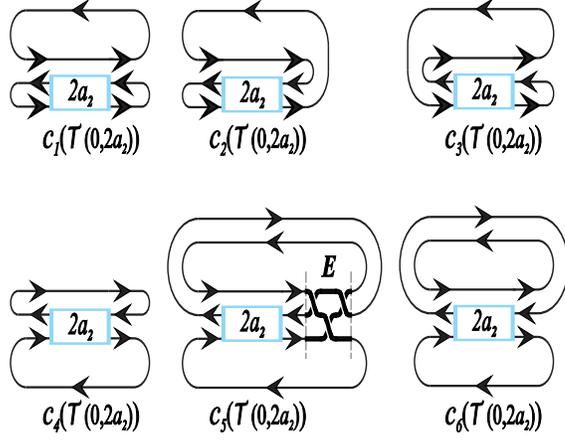


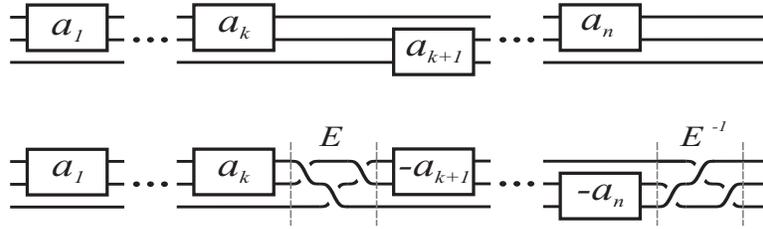
Figura 4.4: Diagramas de las seis cerraduras de $\mathcal{T}(0, 2a_2)$.

girar 180° sin modificar la trenza, siempre y cuando estos movimientos sean compensados al concatenar una trenza de la forma E^k . Más concretamente, dado $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \dots, n\}$, para k impar se tiene (Figura 4.5a):

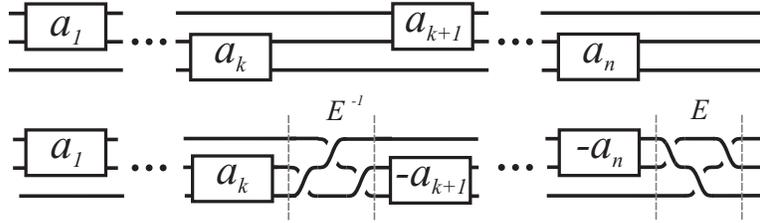
$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) &= \mathcal{T}(a_1, \dots, a_{k+1}, -1, 1 - a_{k+1}, -a_{k+2}, \dots, -a_n) \cdot E^{-1} \\
 &= \mathcal{T}(a_1, \dots, a_k - 1, 1, -1 - a_{k+1}, -a_{k+2}, \dots, -a_n) \cdot E
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

ahora para el caso en que k es par (Figura 4.5b):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) &= \mathcal{T}(a_1, \dots, a_k + 1, -1, 1 - a_{k+1}, -a_{k+2}, \dots, -a_n) \cdot E \\
 &= \mathcal{T}(a_1, \dots, a_k - 1, 1, -1 - a_{k+1}, -a_{k+2}, \dots, -a_n) \cdot E^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$



(a) $\mathcal{T}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ con k impar.

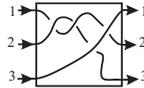


(b) $\mathcal{T}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ con k par.

Figura 4.5: Cambio de posición de alguno de los elementos de la trenza.

4.3. Habitantes de R'

Es fácil ver que no todas las 3-trenzas son habitantes del cuarto R' , recuerde que para conectar las cuerdas, las orientaciones deben ser consistentes, tal es el caso de $T = \mathcal{T}(-2, 1, -1)$,



puesto que si se quisiera asignar una orientación R' , sería incongruente ya que para la permutación $(\pi(T))$, $(\pi(T)(2)) \neq 2$; esta es una propiedad esencial de 3-trenzas que pertenecen a $L(R')$ i.e., para una 3-trenza T , $\pi(T)(2) = 2$ si y sólo si $T \in L(R')$. Por otra parte todos los diagramas de la forma $\mathcal{T}(1, k, 3)$ con k entero, pertenecen a $L(R')$. Una pregunta es que, además de estas 3-trenzas, en general cómo se identifican a los elementos de $L(R')$. Una condición necesaria y suficiente es que la trenza admita un diagrama de la forma $\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot E^k$.

Teorema 4.3.1. *Una 3-trenza T pertenece a $L(R')$ si y sólo existen enteros a_1, \dots, a_n y k , tal que T se puede escribir como $T = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot E^k$.*

Demostración.

Si $T = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot E^k$ para algunos enteros a_1, \dots, a_n y k , observe que $\pi(\mathcal{T}(2a_1))(2) = 2$ y $\pi(\mathcal{T}(0, 2a_2))(2) = 2$ y que $E^k \in L(R')$ luego es claro que $T \in L(R')$.

Suponga que $T \in L(R')$, en [Cab3 03] se mostró que toda 3-trenza admite un diagrama de la forma $T = \mathcal{T}(b_1, \dots, b_m) \cdot E^r$, donde $b_i b_{i+1} \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m - 1$, y $b_j b_{j+1} \geq 0$

para $j = 1, 2, \dots, m - 1$ y $r \in \mathbb{Z}$. Como $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_m)$ y E^r pertenecen a $L(R')$, basta con probar que $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_m) = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_m) \cdot E^k$.

Suponga que $b_i > 0$, (el caso $b_i < 0$ se prueba de forma similar), se procederá por inducción sobre el número m de longitud de la trenza. Recuerde que una condición necesaria para $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_m) \in L(R')$ es $\pi(\mathcal{T}(b_1, \dots, b_m))(2) = 2$, para $m = 1$, si b_1 es impar se tiene que $\pi(\mathcal{T}(b_1))(2) \neq 2$ por lo tanto b_1 tiene que ser par.

Ahora sea $m \in \mathbb{N}$ suponga que para $r \leq m$, el teorema se cumple. Se procederá por casos, sobre la paridad del número de cruces de b_{m+1} .

• **Caso b_{m+1} par.** Dados $b_1, \dots, b_{m+1} \in \mathbb{Z}$ y sea $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1})$, si los b_1, \dots, b_{m+1} son pares la prueba termina. En otro caso si b_1 tiene un número impar de cruces dependiendo de la paridad de $m + 1$ existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1})$ se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) &= \mathcal{T}(b_1, \dots, b_r) \cdot \mathcal{T}(0, b_{m+1}), \quad \text{si } m + 1 \text{ par} \\ \mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) &= \mathcal{T}(b_1, \dots, b_r) \cdot \mathcal{T}(b_{m+1}), \quad \text{si } m + 1 \text{ impar.}\end{aligned}$$

Ya que $\mathcal{T}(0, b_{m+1})$ y $\mathcal{T}(b_{m+1})$ son elementos de $L(R')$ se sigue que, $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_r) \in L(R')$; por hipótesis de inducción se tiene:

$$\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) = \mathcal{T}(b_1, \dots, b_r) \cdot E^k \cdot \mathcal{T}(b_{m+1}).$$

Tomando en cuenta la paridad de r , k y $m + 1$, para $m + 1$ impar, k y r par se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) &= \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_r) \cdot E^k \cdot \mathcal{T}(b_{m+1}) \\ &= \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_r) \cdot E^k \cdot E^{-k} \mathcal{T}(b_{m+1}) \cdot E^{-k} \\ &= \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_r) \cdot \mathcal{T}(b_{m+1}) \cdot E^{-k} \\ &= \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_r, b_{m+1}) \cdot E^{-k} \\ &= \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_r, 2a_{r+1}) \cdot E^{-k}\end{aligned}$$

para los otros casos se procede de manera similar sobre la paridad de r , k y $m + 1$ y sus respectivas combinaciones.

• **Caso b_{m+1} impar.** Si b_1 es par entonces $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1})$ se reescribe como:

$$\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) = \mathcal{T}(b_1) \cdot \mathcal{T}(0, b_2, \dots, b_{m+1}),$$

donde $\mathcal{T}(b_1) \in L(R')$, se sabe que $\mathcal{T}(0, b_2, \dots, b_{m+1}) \in L(R')$ si, y sólo si, $\mathcal{T}(-b_2, -b_3, \dots, -b_{m+1}) \in L(R')$, entonces se puede aplicar la hipótesis de inducción a $\mathcal{T}(-b_2, -b_3, \dots, -b_{m+1})$ pues es de longitud m , luego se tiene que, existen $a_1, \dots, a_r, k \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\mathcal{T}(-b_2, \dots, -b_m) = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_r) \cdot E^k$$

y por lo tanto

$$\mathcal{T}(0, b_2, \dots, b_m) = \mathcal{T}(0, -2a_1, \dots, -2a_r) \cdot E^k$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) &= \mathcal{T}(b_1) \cdot \mathcal{T}(0, b_2, \dots, b_{m+1}) \\ &= \mathcal{T}(b_1) \cdot \mathcal{T}(0, -2a_1, \dots, -2a_r) \cdot E^k \\ &= \mathcal{T}(b_1, -2a_1, \dots, -2a_r) \cdot E^k.\end{aligned}$$

Para el caso b_1 impar, pueden ocurrir dos subcasos, que la posición $m+1$ sea par o impar. Para el caso $m+1$ par, dado que b_1 y b_{m+1} son impares, tómesese el primer impar entero $j > 1$ con j impar, este existe ya que de lo contrario ocurriría que $\pi(\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}))(2) \neq 2$, entonces $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) = \mathcal{T}(b_1, \dots, b_j) \cdot \mathcal{T}(0, b_{j+1}, \dots, b_{m+1})$. Ahora aplicando la hipótesis de inducción sobre $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_j) \in L(R')$ y $\mathcal{T}(0, b_{j+1}, \dots, b_{m+1}) \in L(R')$, ambos de longitud menor que m , entonces:

$$\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_p) \cdot E^s \cdot \mathcal{T}(2c_1, \dots, 2c_u) \cdot E^t,$$

aplicando movidas con elementos E y reescribiendo se obtiene:

$$\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) = \mathcal{T}(2d_1, \dots, 2d_u) \cdot E^{s+t}.$$

Ahora considere el caso $m+1$ impar, si el primer r impar tal que b_r es impar satisface que $r < m+1$ tómesese:

$$\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) = \mathcal{T}(b_1, \dots, b_r) \cdot \mathcal{T}(b_{r+1}, \dots, b_{m+1}),$$

como en el caso anterior, dado que ambas trenzas pertenecen a $L(R')$ y son de longitud menor que m entonces existen enteros a_i, c_i, s y t tales que:

$$\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1}) = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_p) \cdot E^s \cdot \mathcal{T}(2c_1, \dots, 2c_u) \cdot E^t,$$

aplicando movidas con elementos E y reescribiendo como antes se obtiene el resultado deseado.

Ahora considere el caso en el cual $r = m+1$, esto significa que las componentes impares entre b_1 y b_{m+1} son pares, en este caso un procedimiento será aplicado para pasar de un diagrama $\mathcal{T}(b_1, \dots, b_{m+1})$ a otro equivalente de la forma $T' = (2a_1 \dots, 2a_l) \cdot E^p$ para enteros a_1, \dots, a_l y p , esto se ilustrará para el caso $\mathcal{T}(b_1, b_2, b_3)$; el caso general es análogo. La esencia de este procedimiento consiste en aplicar repetidamente (4.5) y (4.6), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(b_1, b_2, b_3) &= \mathcal{T}(b_1 + 1, -1, 1 - b_2, -b_3) \cdot E^{-1} \\ &= \mathcal{T}(b_1 + 1, -1 - 1, 1, -2 + b_2, -b_3) \cdot E^{-2} \\ &= \mathcal{T}(b_1 + 1, -2, 1 + 1, -1, 3 - b_2, -b_3) \cdot E^{-3} \\ &\vdots \\ &= \mathcal{T}(b_1 + 1, -2, 2, \dots, (-1)^{b_2-1} 2, (-1)^{b_2} (b_3 + 1)) \cdot E^{-b_2} \end{aligned}$$

Habiendo establecido que toda $T \in L(R')$ si y sólo si $T = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot E^k$, el siguiente paso es encontrar expresiones explícitas para el invariante asociado $\mathcal{I}(T)$. ■

4.4. Fracciones continuas

Las fracciones continuas resultan útiles en la obtención del polinomio de Conway ligado a las cerraduras de 3-trenzas, principalmente las componentes de la matriz (3.9), esto con respecto a las primeras cuatro componentes del invariante \mathcal{I} de la 3-trenza en cuestión;

sorprendentemente para las otras dos componentes restantes se encontraron relaciones en términos de las primeras componentes que hacen directos los cálculos. Antes de hacer notar la relación que hay entre fracciones continuas y el invariante \mathcal{I} enseguida se recuerdan algunos conceptos básicos de fracciones continuas. Dadas a_1, \dots, a_n en un campo \mathbb{F} , una *fracción continua* asociada a estos elementos se define como:

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

Para una fracción continua se definen los elementos $N[a_1, \dots, a_n]$ y $D[a_1, \dots, a_n]$ en \mathbb{F} , los cuales son llamados **numerador** y **denominador** respectivamente de la siguiente forma:

$$N[a_1] = a_1, D[a_1] = 1, N[a_1, a_2] = 1 + a_1 a_2, D[a_1, a_2] = a_2.$$

y para $n \geq 3$:

$$N[a_1, \dots, a_n] = a_n N[a_1, \dots, a_{n-1}] + N[a_1, \dots, a_{n-2}] \quad (4.7)$$

$$D[a_1, \dots, a_n] = a_n D[a_1, \dots, a_{n-1}] + D[a_1, \dots, a_{n-2}]. \quad (4.8)$$

Por ejemplo, dados $4z, 6z, 8z$ en \mathbb{F} , se tiene

$$\begin{aligned} [4z, 6z, 8z] &= 4z + \frac{1}{6z + \frac{1}{8z}} \\ &= \frac{192z^3 + 12z}{48z^2 + 1} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} N[4z, 6z, 8z] &= 192z^3 + 12z \\ D[4z, 6z, 8z] &= 48z^2 + 1 \end{aligned}$$

y en las ecuaciones (4.7) y (4.8) se tiene:

$$\begin{aligned} N[4z, 6z, 8z] &= 8N[4z, 6z] + N[4z] \\ D[4z, 6z, 8z] &= 8D[4z, 6z] + D[4z]. \end{aligned}$$

4.5. Cálculo del invariante \mathcal{I} de 3-trenzas

Siguiendo con el cálculo del invariante $\mathcal{I}(T)$ de la 3-trenza, se obtienen las primeras cuatro componentes del invariante \mathcal{I} a través del siguiente teorema.

Teorema 4.5.1. Sea $n \geq 2$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Dada la trenza $T = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n)$, se tiene:

$$M_{\nabla}(T) = \begin{cases} \begin{pmatrix} D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \begin{pmatrix} D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] & D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] \\ N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] & N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (4.9)$$

Demostración. Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ y considere a $T = \mathcal{T}(2a_1, 2a_2)$. Según el Ejemplo 4.1.1 se tiene:

$$M_{\nabla}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -a_2z \\ a_1z & 1 - a_1a_2z^2 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

entonces

$$M_{\nabla}(T) = \begin{pmatrix} D[a_1z] & D[a_1z, -a_2z] \\ N[a_1z] & N[a_1z, -a_2z] \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

por lo tanto (4.5.1) es válido para $n = 2$. Ahora sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, considere $a_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, n+1$) y sea $\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1})$ suponga que n es impar, por las relaciones (4.1) para el caso par se tiene:

$$\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1}) = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot \mathcal{T}(0, 2a_{n+1})$$

entonces por la Proposición 3.9

$$\begin{aligned} M_{\nabla}(\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1})) &= M_{\nabla}(\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n)) \cdot M_{\nabla}(\mathcal{T}(0, 2a_{n+1})) \\ &= \begin{pmatrix} D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a_{n+1}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & -a_{n+1}zD[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] + D[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] \\ N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & -a_{n+1}zN[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] + N[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por las relaciones (4.7) y (4.8) esta matriz se puede reducir a:

$$M_{\nabla}(\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1})) = \begin{pmatrix} D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & D[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n+1}z] \\ N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & N[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n+1}z] \end{pmatrix}$$

por lo tanto (4.5.1) se cumple para $n+1$. Para el caso en que n es par se demuestra de manera análoga. ■

Antes ya se ha hecho énfasis en que, en ocasiones el cálculo del polinomio de Conway de nudos obtenidos mediante cerraduras de 3-ovillos resulta extenso, en particular el referido a las últimas dos componentes del invariante \mathcal{I} propuesto. El siguiente teorema determina la quinta y sexta componente de \mathcal{I} , gracias al teorema subsecuente el invariante \mathcal{I} de 3-trenzcas, posee la característica de ser sencillo de calcular ya que estas componentes resultan estar en función de las cuatro primeras.

Teorema 4.5.2. Sean enteros a_1, \dots, a_n y sea $T = (2a_1, \dots, 2a_n)$. Las siguientes relaciones se cumplen entre las componentes de $\mathcal{I}(T)$.

$$T^{c_5} = T^{c_1} + T^{c_4} + z \quad \text{y} \quad T^{c_6} = T^{c_2} + T^{c_3} - 2.$$

Demostración. De acuerdo al ejemplo 4.1.1, la afirmación es válida se cumple para $n \in \{1, 2\}$, ahora suponga que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ también es válida. Considere enteros $a_i \in \mathbb{Z} (i = 1, \dots, n+1)$ y sea $T = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n)$. En este caso, por las relaciones de (4.1) con n impar, se puede escribir $T = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot \mathcal{T}(0, 2a_{n+1})$. En virtud del Corolario (3.11), para calcular $\mathcal{I}(T)$ es suficiente conocer las componentes de $\mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n))$ y de $\mathcal{T}(0, 2a_{n+1})$. Del teorema (4.5.1) para n impar se sigue:

$$\begin{aligned} x_1 &= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & x_2 &= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ x_3 &= D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] & x_4 &= D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \end{aligned}$$

por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_1 + x_4 + z \\ &= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + z \\ x_6 &= x_2 + x_3 - 2 \\ &= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] - 2. \end{aligned}$$

Por otra parte $\mathcal{I}(\mathcal{T}(0, 2a_{n+1})) = (0, 1, 1, -a_{n+1}z, z(1 - a_{n+1}), 0)^T$, luego, por la Proposición 1 inciso (2):

$$\psi_{c_6}(x, \mathcal{I}(\mathcal{T}(0, 2a_{n+1}))) = g(x)M^{-1}h(\mathcal{I}(\mathcal{T}(0, 2a_{n+1}))); \quad (4.12)$$

donde

$$\begin{aligned} g(x) &= (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] - 2, D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ &\quad N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz], (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + z \\ &\quad - z(D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz]), N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ &\quad (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + z(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz]) + z(D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z]) \\ &\quad z(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + z) + z^2(D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz]) \\ &\quad - z^2(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] - 2)) \end{aligned}$$

y

$$M^{-1} = \left(\frac{1}{4 + z^2} \right) \begin{bmatrix} -2 + 3z^2 + z^4 & -z(3 + z^2) & -z(3 + z^2) & -z & 2 + z^2 & 2 + z^2 \\ -z(3 + z^2) & -2 & 2 + z^2 & 2 & -z & -z \\ -z(3 + z^2) & 2 + z^2 & -2 & 2 & -z & -z \\ -z & 2 & 2 & -2 & z & z \\ 2 + z^2 & -z & -z & z & 2 & -2 - z^2 \\ 2 + z^2 & -z & -z & z & -2 - z^2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$h(\mathcal{I}(\mathcal{T}(0, 2a_{n+1}))) = \begin{pmatrix} 0 \\ -za_{n+1} \\ 0 \\ z - za_{n+1} - z^3a_{n+1} \\ 1 - z^2a_{n+1} \\ 1 - z^2a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Haciendo los cálculos necesarios y simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} \psi_{c_6}(x, \mathcal{I}(\mathcal{T}(0, 2a_{n+1}))) &= \\ &\left(\frac{1}{4+z^2}\right) (-8 - z^2(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z]))(1 - a_{n+1}) \\ &+ z^2(1 - a_{n+1})D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + z^2(1 - a_{n+1})N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ &- 2zD[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + 2z^2(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ &+ D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] - 2) \\ &+ 2z(1 - a_{n+1})D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] - 2za_{n+1}N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] \\ &- z^2N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] - z^2D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] \\ &- 2za_{n+1}(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] \\ &+ D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + z) + 2z(1 - a_{n+1})N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] \\ &- 2z(1 - a_{n+1})(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + z) \\ &- z^2a_{n+1}(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] - 2) \\ &+ z^2a_{n+1}D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + z^2a_{n+1}N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ &- z^3a_{n+1}N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + 4(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ &+ D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz]) \\ &= -a_{n+1}zN[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n-1}z] \\ &+ D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] - 2 \\ &= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n+1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] - 2 \\ &= (\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1}))^{c_2} + (\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1}))^{c_3} - 2 \end{aligned}$$

lo cual prueba que la segunda ecuación en (4.5.2) se cumple para $(n + 1)$ par. Similarmente:

$$\begin{aligned}
\psi_{c_5}(x, \mathcal{I}(\mathcal{T}(0, 2a_{n+1}))) &= \\
&\left(\frac{1}{z^2 + 4}\right) 4z - 2zN[a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}] \\
&+ 2za_{n+1}(N[a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}] - 2za_{n+1}D[a_1, -a_2, \dots, a_n] \\
&+ 2z(1 - a_{n+1})N[a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}] - 2z(1 - a_{n+1})(N[a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}] \\
&+ D[a_1, -a_2, \dots, a_n] - 2) + 2z(1 - a_{n+1})D[a_1, -a_2, \dots, a_n] \\
&z^2a_{n+1}D[a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}] + N[a_1, -a_2, \dots, a_n] + z \\
&- 2za_{n+1}(N[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] - 2) \\
&- z^2a_{n+1}D[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] - z^2a_{n+1}N[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] \\
&+ z^2a_{n+1}D[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] + z^2a_{n+1}N[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] \\
&+ 2z(N[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] - 2) + 4N[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] \\
&+ 4D[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] - z^3a_{n+1}D[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] - 2zD[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] \\
&+ z^2(1 - a_{n+1})(N[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] + D[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] + z) \\
&- z^2(1 - a_{n+1})N[a_1z, -a_2z, \dots, a_nz] - z^2(1 - a_{n+1})D[a_1z, -a_2z, \dots, -a_{n-1}z] \\
&= D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_{n+1}z] \\
&+ N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_nz] + z \\
&= \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1})^{c_4} + (\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1}))^{c_1} + z
\end{aligned}$$

con lo que se prueba que la primera expresión en (4.5.2) es válida. Ahora suponga que n es impar, entonces $T = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_n) \cdot \mathcal{T}(2a_{n+1})$ y de nuevo, haciendo uso del Corolario 3.11, basta con conocer los valores de x y de $\mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_{n+1}))$ para obtener $\mathcal{I}(T)$. Por el Teorema 4.5.1 para n par:

$$\begin{aligned}
x_1 &= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] & x_2 &= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] \\
x_3 &= D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] & x_4 &= D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]
\end{aligned}$$

luego, por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
x_5 &= x_1 + x_4 + z \\
&= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + z \\
x_6 &= x_2 + x_3 - 2 \\
&= N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] - 2.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_{n+1})) = (a_{n+1}z, 1, 1, 0, z(a_{n+1} + 1), 0)^T$, se sigue de la expresión para ψ_{c_6} que

$$\begin{aligned}
& \psi_{c_6}(x, \mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_{n+1}))) = \\
& \left(\frac{1}{z^2 + 4} \right) (-8 + z^2(N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] - 2)) (a_{n+1}) \\
& - z^2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) (a_{n+1}) - z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1}) \\
& - z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] - 2) (a_{n+1} + 1) \\
& + z^2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) (a_{n+1} + 1) + z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1} + 1) \\
& + z^3 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1}) - 2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) z \\
& + 2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + z) (a_{n+1}z) \\
& + 2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) z(a_{n+1} + 1) - 2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) z \\
& + 2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + z) z \\
& - z^2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) \\
& + 2z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] - 2) \\
& - z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) - 2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) (a_{n+1}z) \\
& - 2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + z) z(a_{n+1} + 1) \\
& + 2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1}+1)z + 2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) z(a_{n+1} + 1) \\
& + 4 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) + 4 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) \\
& = \mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1})^{c_3} + (\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1}))^{c_2} - 2.
\end{aligned}$$

Así la segunda expresión en (4.5.2) para $n + 1$ impar es válida. De manera análoga:

$$\begin{aligned}
& \psi_{c_5}(x, \mathcal{I}(\mathcal{T}(2a_{n+1}))) = \\
& \left(\frac{1}{z^2 + 4} \right) - z^2 ((D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) + (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z])) (a_{n+1} + 1) \\
& + z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) (a_{n+1}) + z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) (a_{n+1} + 1) \\
& + z^2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1} + 1) + z^3 (a_{n+1} + 1) \\
& - z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) (a_{n+1}) - z^2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1}) \\
& - z^3 (a_{n+1}) + z^2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1}) + z^3 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1}) \\
& + 4z - 2z (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) (a_{n+1}) - 2z (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) \\
& + 2z (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] - 2) \\
& + z^2 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) \\
& + 2z (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] - 2) (a_{n+1}) \\
& + 2z (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1}) - 2z (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) \\
& + 2z (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] + N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) (a_{n+1} + 1) \\
& - 2z (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z] - 2) (a_{n+1} + 1) \\
& + z^2 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) + 4 (N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n-1}z]) \\
& + 4 (D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz]) \\
& = N[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, a_{n+1}z] + D[a_1z, -a_2z, a_3z, \dots, -a_nz] + z \\
& = (\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1}))^{c_1} + (\mathcal{T}(2a_1, \dots, 2a_{n+1}))^{c_4} + z
\end{aligned}$$

lo que prueba que la primera ecuación en (4.5.2) para $n + 1$ impar se cumple. ■
 Ahora un ejemplo de una 3-trenza donde se obtiene el polinomio de Conway usando la herramienta de cálculo señalada en los Teoremas 4.5.1 y 4.5.2.

Ejemplo 4.5.1. Sea $T = \mathcal{T}(4, 2, 2, 4)$ la 3-trenza de longitud $n = 4$, como se muestra en la figura.



Figura 4.6: $T = \mathcal{T}(4, 2, 2, 4)$

Por las igualdades en (4.1), se divide la trenza en dos y aplicando la Proposición 2 se sigue:

$$\begin{aligned} M_{\nabla}(T) &= M_{\nabla}(\mathcal{T}(4, 2)) \cdot M_{\nabla}(\mathcal{T}(2, 4)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 2z & 1 - 4z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2z \\ z & 1 - 4z^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + z^2 & 4z^3 - 3z \\ -4z^3 + 3z & (1 - 4z^2)^2 - 4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para la quinta y sexta componente, en virtud del Teorema 4.5.2, se obtiene:

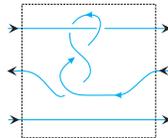
$$\begin{aligned} T^{c_5} &= -4z^3 + 3z + 4z^3 - 3z + z = z \\ T^{c_6} &= (1 - 4z^2)^2 - 4z + 1 + z^2 - 2 \\ &= (1 - 4z^2)^2 - 4z + z^2 - 1 \end{aligned}$$

por lo tanto el invariante de esta 3-trenza está dado por:

$$\mathcal{I}(T) = (-4z^3 + 3z, (1 - 4z^2)^2 - 4z, 1 + z^2, z, (1 - 4z^2)^2 - 4z + z^2 - 1).$$

4.6. Aplicación a un 3-ovillo no perteneciente a 3-trenzaz

En esta sección se aplicará el método a un ovillo simple denotado por S elemento de $L(R')$ mostrado enseguida:



Sea S el ovillo de la figura anterior, se probará por inducción que $\mathcal{I}(S^n)$ está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(S^n) &= (nz(1 - z^2)^{n-1}, (1 - z^2)^n, (1 - z^2)^n, 0, \\ &\quad nz(1 - z^2)^{n-1} + z(1 - z^2)^n, 0) \end{aligned} \tag{4.13}$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 1$. Mediante los cálculos mostrados en la Figura 4.7 se verifica que:

$$\mathcal{I}(S) = (z, 1 - z^2, 1 - z^2, z + z(1 - z^2), 0).$$

Por lo tanto, (4.13) es válido para $n = 1$. Suponga que (4.13) se cumple para $\mathcal{I}(S^n)$. Dado que,

(a) $S^{c_1} = z$

(b) $S^{c_2} = 1 - z^2$

(c) $S^{c_3} = 1 - z^2$

(d) $S^{c_4} = 0$

(e) $S^{c_5} = z + z(1 - z^2)$

(f) $S^{c_6} = 0$

Figura 4.7: Las seis componentes $\mathcal{I}(S)$

$$S^{n+1} = S^n \cdot S$$

en virtud de (3.9) se tiene:

$$M_{\nabla}(S^{n+1}) = M_{\nabla}(S^n) \cdot M_{\nabla}(S) \tag{4.14}$$

Usando la Proposición 2 para calcular las primeras cuatro componentes de (4.13), se sigue:

$$\begin{aligned}
M_{\nabla}(S^{n+1}) &= \begin{pmatrix} (1-z^2)^n & 0 \\ nz(1-z^2)^{n-1} & (1-z^2)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-z^2) & 0 \\ z & (1-z^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-z^2)^{n+1} & 0 \\ (n+1)z(1-z^2)^n & (1-z^2)^{n+1} \end{pmatrix} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Para la quinta componente se procede de la misma forma. Suponga que la fórmula de la quinta componente de (4.13) se cumple para $n \in \mathbb{N}$. Se mostrará que la expresión también es válida para la $n+1$ -ésima concatenación del ovillo S . Para esto, de acuerdo a la Proposición 1.2 se tiene:

$$(S^{n+1})^{c_5} = \psi_{c_5}(S^n, S) = g(\mathcal{I}(S^n))M^{-1}h(f(\mathcal{I}(S)))$$

donde

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{I}(S^n)) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ nz(1-z^2)^{n-1} \\ nz(1-z^2)^{n-1} + z(1-z^2)^n \\ (1-z^2)^n \\ (1-z^2)^n + z^2n(1-z^2)^{n-1} - z(nz(1-z^2)^{n-1} + z(1-z^2)^n) + z^2(1-z^2)^n \end{bmatrix}^T \\
M^{-1} &= \left(\frac{1}{4+z^2} \right) \begin{bmatrix} -2+3z^2+z^4 & -z(3+z^2) & -z(3+z^2) & -z & 2+z^2 & 2+z^2 \\ -z(3+z^2) & -2 & 2+z^2 & 2 & -z & -z \\ -z(3+z^2) & 2+z^2 & -2 & 2 & -z & -z \\ -z & 2 & 2 & -2 & z & z \\ 2+z^2 & -z & -z & z & 2 & -2-z^2 \\ 2+z^2 & -z & -z & z & -2-z^2 & 2 \end{bmatrix} \\
h(f(\mathcal{I}(S))) &= \begin{bmatrix} z+z(1-z^2) \\ 1-z^2+z(z+z(1-z^2)) \\ 1-z^2+z(z+z(1-z^2)) \\ 2z^2-z(1-z^2)+z^2(-z(z+z(1-z^2))+z^2)-z^3(1-z^2)+z^3(z+z(1-z^2)) \\ z+z(-z(z+z(1-z^2))+z^2)-z^2(1-z^2)+z^2(z+z(1-z^2)) \\ 1-z^2+2z(1-z^2)+z^2(z+z(1-z^2)) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Haciendo los cálculos necesarios, finalmente se obtiene:

$$(S^{n+1})^{c_5} = ((n+1)z(1-z^2)^n + z(1-z^2)^{n+1})$$

Para la sexta componente se ve claramente que al conectar la tercera cuerda consigo misma, el polinomio de Conway con n concatenaciones de S es siempre cero. Con ello se ha probado que (4.13) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

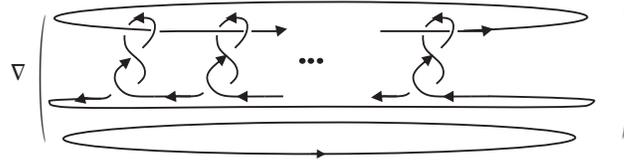


Figura 4.8: Polinomio de Conway de la cerradura c_6 para n productos de S

Ya aplicado el procedimiento y después de haber obtenido resultado note que que S no es una trenza, esto se justifica con lo siguiente. Suponga que S es una trenza de longitud 1. Entonces

$$M_{\nabla}(S) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 z & 1 \end{pmatrix}$$

para una trenza de longitud n se tiene asociada la matriz (4.5.1), entonces en este caso la entrada $M_{\nabla}(S)_{1,2}$ no corresponde. Ahora suponga que S es una trenza de longitud $n \geq 2$, considere el teorema 4.5.1, es claro que las entradas $M_{\nabla}(S)_{1,1}$ y $M_{\nabla}(S)_{1,2}$ de $M_{\nabla}(S)$ deben ser diferentes de cero lo cual no se cumple pues la entrada $M_{\nabla}(S)_{1,2} = 0$. Con ello se demuestra que S no es una trenza.

Conclusión

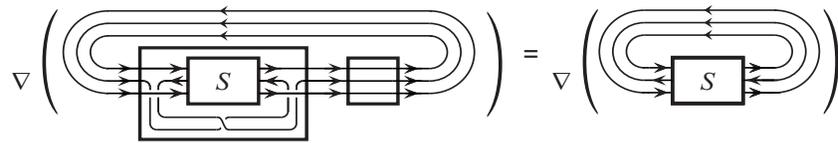
Giller en su referencia [Gill 82] planteó un procedimiento para calcular el polinomio de Conway de nudos orientados obtenidos al cerrar cierto tipo de 2-ovillos orientados. En este trabajo se generalizó lo propuesto por Giller al caso de 3-ovillos orientados, debido a la orientación que fue definida para 3-ovillos denotada por R' se sugirió un nuevo invariante llamado \mathcal{I} , en donde cada una de sus componentes quedan determinadas por el polinomio de Conway asociado a seis cerraduras $c_i, (i = 1, \dots, 6)$ que surgieron de manera natural al conectar entradas con salidas consistentemente con respecto a la orientación de sus cuerdas, esto sin agregar cruces en cinco de los casos. Después de haber realizado cálculos y estudios acerca de cuál conjunto sería el apropiado para asociarle un invariante, se llegó a la conclusión de que se debía añadir una cerradura la cual agrega tres cruces mas al ser aplicado al 3-ovillo en cuestión, está es la cerradura denotada por c_5 compuesta por el producto de ovillos, uno de ellos el 3-ovillo E cerradura c_6 en símbolos $(S \cdot E)^{c_6} = (S)^{c_5}$.

En general, el cálculo del polinomio de Conway es complejo de calcular por su naturaleza recursiva, más aún en el caso en que el cálculo es aplicado a productos de ovillos. Con el objetivo de que el invariante propuesto sea calculable en términos computacionales se diseñaron mapeos que ayudaron a alcanzar este objetivo: dos de estos mapeos fueron desarrollados sólo para calcular la quinta y sexta componente de \mathcal{I} de un producto de ovillos. Como consecuencia de estas construcciones se llegaron a tres resultados que hacen los cálculos menos complejos ya que están basados en realizar los cálculos en función de los invariantes de las cerraduras de ovillos S y T por separado. Toda esta herramienta aquí planteada fue adaptada a dos casos de familias de ovillos, una de ellas la familia de 3-trenzas con orientación R' respecto a dicha familia se analizó el comportamiento ante el polinomio de Conway y se consiguió obtener formulas explícitas para el cálculo de \mathcal{I} ; en la segunda familia un ovillo sencillo en el que se detalla y explica la aplicación del método propuesto.

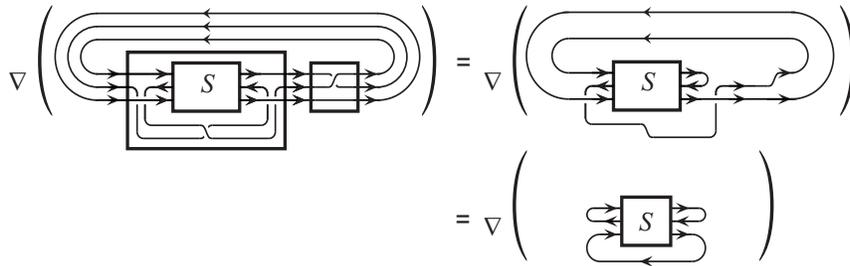
Apéndice A

Cálculos para $\alpha(\sigma(S))$

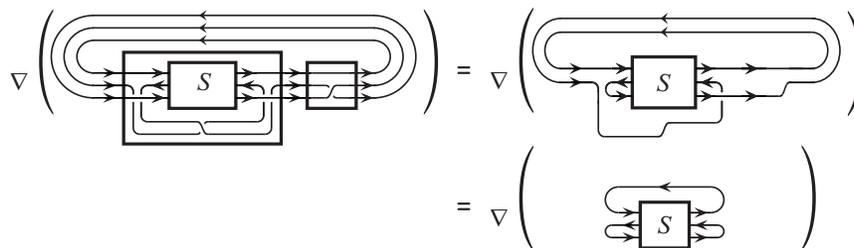
A.0.1. Cálculos de los polinomios de Conway de $\Sigma_1^*(\sigma(S))$, $\Sigma_2^*(\sigma(S))$ y $\Sigma_3^*(\sigma(S))$



(a) $\Sigma_1^*(\sigma(S)) = S^{c_6}$



(b) $\Sigma_2^*(\sigma(S)) = S^{c_4}$



(c) $\Sigma_3^*(\sigma(S)) = S^{c_1}$

Figura A.1

A.0.2. Cálculo del polinomio de Conway de $\Sigma_5^*(\sigma(S))$

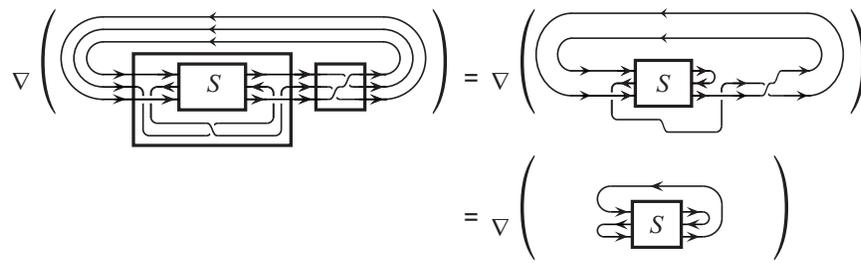


Figura A.2: $\Sigma_5^*(\sigma(S)) = S^{e_2}$

A.0.3. Cálculo del polinomio de Conway de $\Sigma_4^*(\sigma(S))$

$$\begin{aligned}
 & \left(\nabla \left(\text{Diagram 1} \right) \right) = \\
 & = \nabla \left(\text{Diagram 2} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 3} \right) \\
 & = \nabla \left(\text{Diagram 4} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 5} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 6} \right) \\
 & = \nabla \left(\text{Diagram 7} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 8} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 9} \right) \\
 & = \nabla \left(\text{Diagram 10} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 11} \right) - z^2 \nabla \left(\text{Diagram 12} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 13} \right) \\
 & = \nabla \left(\text{Diagram 14} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 15} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 16} \right)
 \end{aligned}$$

Figura A.3

A.0.4. Cálculo del polinomio de Conway de $\Sigma_6^*(\sigma(S))$

$$\begin{aligned}
 & \nabla \left(\text{Diagram 1} \right) = \\
 &= \nabla \left(\text{Diagram 2} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 3} \right) \\
 &= \nabla \left(\text{Diagram 4} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 5} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 6} \right) \\
 &= \nabla \left(\text{Diagram 7} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 8} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 9} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 10} \right) \\
 &= \nabla \left(\text{Diagram 11} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 12} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 13} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 14} \right) \\
 &= \nabla \left(\text{Diagram 15} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 16} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 17} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 18} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla \left(\text{Diagram 1} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 2} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 3} \right) + z^2 \nabla \left(\text{Diagram 4} \right) - z^3 \nabla \left(\text{Diagram 5} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 6} \right) \\
&\quad - z^2 \nabla \left(\text{Diagram 7} \right) \\
&= \nabla \left(\text{Diagram 8} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 9} \right) + z^2 \nabla \left(\text{Diagram 10} \right) - z^3 \nabla \left(\text{Diagram 11} \right) \\
&\quad - z^2 \nabla \left(\text{Diagram 12} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 13} \right) \\
&= \nabla \left(\text{Diagram 14} \right) + z \nabla \left(\text{Diagram 15} \right) - z \nabla \left(\text{Diagram 16} \right) + z^2 \nabla \left(\text{Diagram 17} \right) - z^2 \nabla \left(\text{Diagram 18} \right)
\end{aligned}$$

Figura A.4: $\Sigma_6^*(\sigma(S)) = S^{c3} + zS^{c1} + zS^{c4} - zS^{c5} + z^2S^{c3} - z^2S^{c6}$

Bibliografía

- [Cabr 03] H. Cabrera-Ibarra. “On the classification of rational 3-Tangles”. *Knot Theory and its Ramifications*, Vol. 12, pp. 921–929, 2003.
- [Cabr 04] H. Cabrera-Ibarra. “Conway Polinomial of the closure of oriented 3-strings tangles”. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, Vol. 10, pp. 55–62, 2004.
- [Cabr 10a] H. Cabrera-Ibarra and D. Lizárraga-Navarro. “An algorithm based on 3-braids to solve tangle equations arising in the action of Gin DNA invertase”. *Applied mathematics and computation*, Vol. 216, No. 1, pp. 95–106, March 2010.
- [Cabr 10b] H. Cabrera-Ibarra and D. Lizárraga-Navarro. “Braid solutions to the action of the Gin enzyme”. *Journal of knot theory and its ramifications*, Vol. 19, No. 8, pp. 1051–1074, 2010.
- [Conr 94] A. C. Conra. *Knot Book an Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, 1994.
- [Conw 67] J. H. Conway. “An enumeration of knots and links and some of their related properties”. *Computational Problems in Abstract Algebra: Proc. Conf. Oxford*, Vol. 329358, pp. 329–358, 1967.
- [Gill 82] C. A. Giller. “A family of links and the Conway calculus”. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 270, pp. 75–109, 1982.
- [Kauf 83] L. H. Kauffman. *Formal Knot Theory*. Mathematical Notes 30, 1983.
- [Kauf 87] L. H. Kauffman. *On Knots*. Annals of mathematics studies, 1987.
- [Lick 87] W. B. R. Lickorish. *An introduction to Knot Theory*. Vol. 175, Graduate Texts in Mathematics, 1987.
- [Liza 11] D. Lizárraga-Navarro, H. Cabrera-Ibarra, and L. Y. Hernández-Villegas. “Computing the Conway polynomial of several closures of oriented 3-braids”. *Topology and its Applications*, Aceptado para publicación, 2011.