



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Consenso en Arreglos Maestro-Seguidores
de Agentes Inerciales.**

Tesis que presenta

Eber Jafet Avila Martinez

Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., Octubre de 2014



IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Consenso en Arreglos Maestro-Seguidores de Agentes Inerciales**” presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Eber Jafet Avila Martínez** y aprobada el **trece de octubre del dos mil catorce** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramirez
Director de la tesis



Dr. Gualberto Celestino Solis Perales
Jurado en el Examen



Dr. Eric Campos Canton
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en el Laboratorio de Redes Complejas de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. 279217) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 011 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 13 días del mes de octubre del año 2014, se reunió a las 14:10 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Gualberto Celestino Solís Perales	Presidente	UdG
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Secretario	IPICYT
Dr. Eric Campos Cantón	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Eber Jafet Avila Martínez

sobre la Tesis intitulada:

Consenso en Arreglos Maestro-Seguidores de Agentes Inerciales

que se desarrolló bajo la dirección de

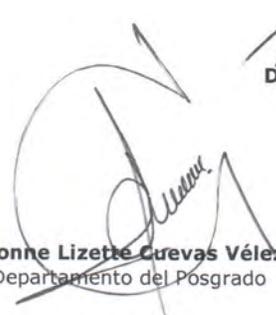
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 15:20 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 13 días del mes de octubre de 2014.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



A mis padres y hermanos.

Resumen

Consenso en Arreglos Maestro-Seguidores de Agentes Inerciales: En este trabajo, investigamos el problema de consenso en arreglos maestro-seguidores de sistemas de múltiples agentes con dinámica de segundo orden e inercias significativamente diferentes (agentes inerciales), en redes dirigidas con pesos fijas. Discutimos, como motivación, cómo es posible describir la dinámica de movimiento de un actuador montado en un robot móvil con tracción diferencial, de forma similar a la de un agente inercial. Analizamos los problemas de consenso entre agentes y consenso en arreglos maestro-seguidores, en este último, asumimos que solo una porción (inclusive solo uno) de los agentes seguidores tiene acceso a los estados del maestro. Se dan condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales ambos problemas son resueltos, en primer lugar, bajo la suposición de agentes idénticos (i.e. masas iguales) y en segundo, suponiendo que tienen masas diferentes. Los protocolos de consenso, son extendidos para garantizar la convergencia de estados de los agentes a un valor de desviación deseado. En todos los casos de estudio, se presentan simulaciones numéricas para ilustrar los resultados.

Palabras Clave: Problema de consenso, sistema multi-agente, agente inercial, grafo dirigido.

Abstract

Master-Slaves Consensus of Inertial Agents: In this work, we investigate the consensus problem in master-slaves arrays on systems of multiple agents with second order dynamics and significant inertial differences (inertial agents), in fixed and weighted directed networks. We discuss, as a motivation, how is possible to describe the movement dynamics of an actuator coupled on a differential mobile robot, the same way as an inertial agent. We analyze the consensus problem between agents and the consensus problem in master-slave arrays, in this last one, we assume that only a part (including only one) of the followers agents have access to the master's states. Necessary and sufficient conditions are given to ensure that both problems are solved, in first place, under the supposition of identical agents (i.e. same mass), and in second place, assuming different masses. The consensus protocols are also extended to achieve relative state deviations to a desired value. In all this cases, numerical simulations are given as an illustration of the results.

Keywords: Consensus problem, multi-agent system, inertial agent, directed graph.

Contenido

Constancia de Aprobación de la Tesis	III
Créditos Institucionales	V
Acta de Examen	VII
Dedicatoria	IX
Resumen	XI
Abstract	XIII
1. Introducción	1
1.1. Revisión de la Literatura: Consenso en Sistemas Multi-Agente	2
1.1.1. Antecedentes	4
1.2. Consenso en Sistemas de Múltiples Robots Móviles	5
2. Planteamiento del Problema	8
2.1. Robot Móvil con Ruedas en Configuración Diferencial	8
2.2. Robot Móvil Diferencial como Agente Inercial	10
2.3. Conceptos Preliminares	12
2.4. Problema de Consenso (Caso General)	14
2.5. Problema de Consenso para Agentes Inerciales	15
3. Agentes Inerciales Idénticos	20
3.1. Consenso Entre Agentes	20
3.2. Consenso con un Agente Maestro	27
3.2.1. Agente Maestro con Velocidad Constante	27
3.2.2. Agente Maestro con Velocidad Variante	32
3.3. Extensión a Desviaciones Relativas al Estado	35
3.3.1. Consenso Entre Agentes con Desviaciones de Estados	36
3.3.2. Consenso con un Agente Maestro a Velocidad Constante y Desvia- ciones de Estados	37
3.3.3. Consenso con un Agente Maestro a Velocidad Variante y Desviacio- nes de Estados	39
4. Agentes Inerciales con Masas Diferentes	42
4.1. Consenso Entre Agentes	42
4.2. Consenso con un Agente Maestro	48
4.2.1. Agente Maestro con Velocidad Constante	49
4.2.2. Agente Maestro con Velocidad Variante	52

4.3.	Extensión a Desviaciones Relativas al Estado	55
4.3.1.	Consenso Entre Agentes con Desviaciones de Estados	55
4.3.2.	Consenso con un Agente Maestro a Velocidad Constante	57
4.3.3.	Consenso con un Agente Mestro a Velocidad Variante	58
5.	Comentarios Finales	61
5.1.	Trabajos Futuros	62
A.	Programas de Simulación	68
A.1.	Ejemplo 2.1	68
A.2.	Ejemplo 3.1	69
A.3.	Ejemplo 3.2	70
A.4.	Ejemplo 3.3	72
A.5.	Ejemplo 3.4	73
A.6.	Ejemplo 3.5	75
A.7.	Ejemplo 3.6	76
A.8.	Ejemplo 3.7	78
A.9.	Ejemplo 4.1	80
A.10.	Ejemplo 4.2	82
A.11.	Ejemplo 4.3	83
A.12.	Ejemplo 4.4	85
A.13.	Ejemplo 4.5	86
A.14.	Ejemplo 4.6	88

Capítulo 1

Introducción

Los avances tecnológicos actuales, particularmente en el campo de la miniaturización de componentes electrónicos, han permitido que procesadores, dispositivos de comunicación, sensores y actuadores sean más ligeros y económicos. Lo cual, ha tenido como resultado que en la actualidad sea posible construir vehículos autónomos pequeños y ligeros, capaces de trabajar en conjunto de forma coordinada para completar un objetivo.

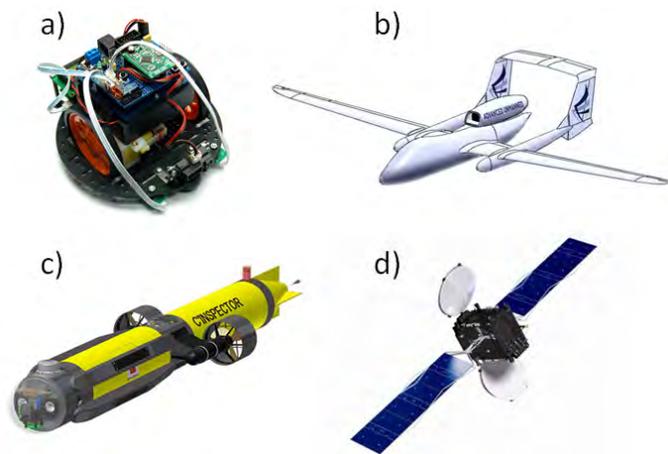


Figura 1.1: Ejemplos de vehículos autónomos: a) Robot Móvil, b) UAV, c) UUV, d) Satélite.

En el campo de la ingeniería existen una gran cantidad de ejemplos de vehículos autónomos (Figura 1.1), algunos de ellos son; robots móviles, vehículos aéreos no tripulados (UAV's), vehículos submarinos no tripulados (UUV's) y satélites, por mencionar algunos. Estos sistemas, equipados con sensores, actuadores, procesadores y dispositivos de comunicación, pueden ser vistos como agentes (i.e. como entidades autónomas actuando sobre un ambiente utilizando sensores y actuadores).

Una pregunta clave en la investigación del uso coordinado de múltiples agentes es, ¿Cómo diseñar acciones locales entre agentes, posiblemente simples (con limitaciones en su poder de cómputo y sensores), tal que, de manera colectiva, un patrón o comportamiento

deseado se presente? Una vez encontrada una respuesta a esta pregunta, podríamos ser capaces de, no solo realizar muchas aplicaciones en ingeniería (e.g. redes de sensores móviles [1, 2] y robótica distribuida para vigilancia o rescate [3, 4, 5, 6, 7]), sino también de, comprender muchos fenómenos fascinantes de la naturaleza (e.g. formación de cardúmenes de peces [8] o el comportamiento colectivo humano [9]).

Comparado con agentes realizando tareas en solitario, mayor eficiencia y capacidad operacional puede ser obtenida de un grupo de agentes trabajando en equipo. Por otra parte, se genera el problema de coordinar el comportamiento de cada uno de los miembros del grupo. Esto plantea retos, no solo de aplicación, sino de análisis teórico. En primer lugar, se trabaja con un sistema de subsistemas, con todas las complicaciones de análisis teórico que esto acarrea. En segundo lugar, la conectividad y la cantidad de información que comparte el grupo, regularmente es limitada y la información podría no ser confiable debido a ruido. Además, resulta complicado definir quien comparte información con quién y cuál es esa información. Y por último, la capacidad computacional de dichos agentes podría ser limitada. Estas son solo algunas de las complicaciones inherentes en el análisis y aplicación de este tipo de sistemas.

Soluciones centralizadas, en las que se asume que todos los miembros del grupo comparten su información con una central de comunicación o con cada uno de los demás miembros en una red completamente conectada, resultan imposibles de realizar en sistemas de múltiples agentes. Esto sucede, principalmente, cuando se considera una cantidad elevada de agentes dentro del equipo, ya que la cantidad de información compartida en la red y la complejidad en el control de la misma, podrían resultar computacionalmente imposible para las capacidades de procesamiento de la central de control o de uno solo de los agentes. Más aun, sistemas en redes del mundo real, no suelen ser completamente conectadas, sino más bien, el procesamiento de la información se reparte entre los miembros de la red. Esto provee, de una ventaja importante a las soluciones distribuidas, ya que se evita la existencia de un punto crítico de falla. Estos argumentos motivan el interés en el uso de algoritmos distribuidos como solución a problemas en los que se consideran grupos de agentes, ya que la tarea a realizar, cualquiera que esta sea, debe de realizarse de forma distribuida sobre la red, en donde cada miembro del equipo contribuye en la solución de la misma. Además, los beneficios potenciales en el uso de un sistema distribuido incluyen, la auto-organización y la robustez a incertidumbres dinámicas como la falla de un individuo y ambientes que cambian con el tiempo.

1.1. Revisión de la Literatura: Consenso en Sistemas Multi-Agente

Cuando un grupo de agentes alcanzan un acuerdo en términos de una *variable de interés*, se dice que logran un *consenso*. Para lograr un consenso en sistemas de múltiples agentes, dichos agentes deben compartir una *variable de interés*, así como reglas de interacción local que especifiquen el intercambio de información entre cada agente y sus vecinos en la red, llamados *algoritmos* o *protocolos de consenso* (a lo largo de este documento, utilizaremos las palabras *algoritmo* y *protocolo* de consenso de manera equivalente). De esta forma los

agentes modifican sus variables basándose en las variables de sus vecinos. El objetivo es desarrollar algoritmos o protocolos de consenso de tal forma que las variables de interés de todos los agentes en la red, converjan a un valor común.

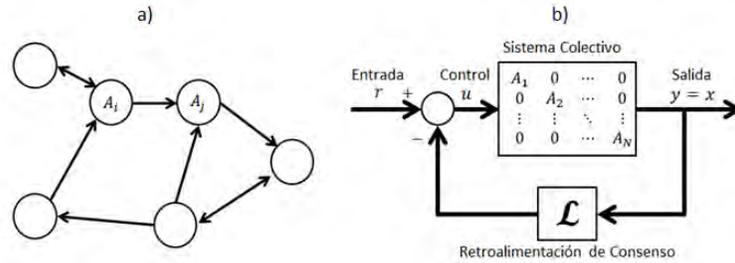


Figura 1.2: Dos formas equivalentes de visualizar los algoritmos de consenso [10]: a) Sistema multi-agente como una red de agentes, b) Sistema multi-agente como un sistema MIMO.

Existen dos formas equivalentes de visualizar los algoritmos de consenso. Por un lado, como una red de agentes en la cual el agente i recibe la variable de su vecino, el agente j , de la forma especificada por el algoritmo de consenso y si existe una conexión (i, j) que conecta a ambos nodos (Figura 1.2a). Mientras que, por otro lado, también puede pensarse que el grupo de agentes forman un sistema de múltiples entradas con múltiples salidas (MIMO) con una retroalimentación llamada retroalimentación de consenso, la cual está determinada por las interconexiones entre agentes y el protocolo de consenso (Figura 1.2b). Una vez dicho esto, hay que remarcar que; dado un conjunto de agentes, es posible hablar de un sistema multi-agente una vez que el protocolo es aplicado, de lo contrario, no existiría intercambio de información entre los agentes, aun cuando las conexiones (topología de comunicación) entre ellos existan.

En los problemas de consenso en sistemas multi-agente, las topologías de comunicación entre agentes, generalmente, son representadas mediante un grafo dirigido, debido a que, en términos de las posibles aplicaciones en ingeniería, el flujo de información no suele ser bidireccional, dado a las potenciales limitaciones de hardware en los agentes, es decir, existe la posibilidad de que algunos agentes solo estén equipados con dispositivos para la recepción de información y no transmisión. Además, los algoritmos o protocolos de consenso requieren solo del intercambio de información entre vecinos, lo cual, reduce el consumo de energía de los agentes, ya que no se precisa que dicha información sea transmitida a todos los agentes dentro del grupo. Más aun, los protocolos, permiten que la topología de comunicación entre agentes pueda cambiar dinámicamente, ser poco densa e inclusive intermitente. Dicha particularidad es de gran ayuda en aplicaciones reales de sistemas multi-agente, ya que, regularmente, las líneas de comunicación son ruidosas, poco fiables y con un alcance definido. Otra característica destacable de los protocolos de consenso, es que no precisan que la red de agentes sea una red completamente conectada, sino que, existe un mínimo de conexiones con las cuales el protocolo logra su *objetivo*.

1.1.1. Antecedentes

Los problemas de consenso en sistemas de múltiples agentes, han sido atacados, principalmente, desde la perspectiva de control en sistemas dinámicos. Para trabajar dentro de este enfoque, se relaciona el concepto de agente, con el de un sistema dinámico con entradas y salidas, es decir, se piensa en un sistema dinámico como un agente cuya toma de decisiones está determinada por un campo vectorial y que, dicha decisión, depende de los propios estados del sistema y de los estados de sus vecinos en la red. Entonces, desde éste panorama, la variable de interés compartida entre vecinos mediante los protocolos de consenso, está dada en términos de los estados de los agentes (sistemas dinámicos), y por lo tanto, el valor de consenso, también es presentado en términos de los mismos estados. Sin embargo, comparado con problemas convencionales de control, el desafío de los problemas de consenso en sistemas multi agentes, consiste en, cómo analizar la topología de comunicación entre agentes. Éste es un punto importante, ya que determina cómo las acciones locales se propagan a través del grupo de agentes.

Hasta ahora, la mayoría de los trabajos relacionados con el problema de consenso, consideran el caso en el que los agentes están gobernados por una dinámica de primer orden. Basándose en el álgebra de la teoría de grafos [11], se ha mostrado que la topología de comunicación es un factor clave en la solución del problema de consenso [12, 13]. Además, también se ha probado que, en una red con topología dinámica, el consenso puede ser alcanzado si, y solo si, la topología que cambia con el tiempo, contiene un árbol de expansión dirigido lo suficientemente frecuente mientras la red evoluciona [13]. Estos trabajos, han sentado una base en el análisis de los problemas de consenso en sistemas multi-agente, la cual, ha permitido estudiar agentes con dinámicas más complejas. Uno de los primeros pasos, fue considerar agentes con dinámica de segundo orden, en lo que ha sido llamado el problema de *consenso de segundo orden*. Este paso no ha sido trivial, ya que en [14], se ha mostrado que el consenso en agentes de segundo orden, puede no ser alcanzado, aun cuando la topología de comunicación contenga un árbol de expansión dirigido. El análisis del problema de consenso de segundo orden, conduce a dinámicas más realistas dentro del modelo de cada agente individual, esto es especialmente significativo en la aplicación de estrategias de control para sistemas en redes en el campo de la ingeniería, ya que, generalmente, no es posible controlar directamente la velocidad, debido a que la mayor parte de los actuadores (e.g. motores, turbinas) pueden afectar solamente la aceleración a través de la inercia de los agentes. Más aún, en [15, 16], se muestra que para cierta topología de comunicación, el efecto de incluir la inercia de los agentes dentro de su modelo dinámico (i.e. modelo de *agente inercial*), puede causar inestabilidad en el comportamiento de todo el grupo.

Algunos otros avances, en términos de las dinámicas de los agentes considerados dentro del problema de consenso, incluyen a algunos autores como Li et.al. en [17], en donde consideran agentes con modelos lineales, que inclusive pueden ser considerados como una modelo linealizado de un agente con dinámica no lineal, en el que, además, asume que la información transmitida por los agentes a sus vecinos, no incluye todos los estados y propone protocolos basados en un observador para lidiar con esta suposición. Sin embargo, los sistemas en la naturaleza difícilmente son lineales, por tal motivo, Yu et.al. en [18] considera

que dentro de la dinámica de los agentes existen no linealidades y ha mostrado condiciones suficientes, bajo las cuales, se resuelve un problema de consenso entre agentes.

La idea básica de lograr que, mediante interacciones locales, un grupo de agentes logren un acuerdo en términos de una variable de interés, puede ser extendida para el caso en que se busca que dichas variables converjan a un valor deseado de referencia o un valor deseado de separación entre variables. Hasta ahora, la mayoría de los algoritmos existentes en la literatura, garantizan que el grupo de agentes convergen a un valor común y se ha demostrado que dicho valor está determinado por las condiciones iniciales de los mismos [10, 19]. Sin embargo, el valor del consenso logrado es inherentemente constante y no permiten especificar dicho valor, lo cual puede no ser apropiado en algunas aplicaciones, por ejemplo, en el problema de control de formación, donde dicha formación evoluciona en un espacio de dos o tres dimensiones. En [20], se analiza este problema cuando los agentes están gobernados por una dinámica de primer orden, y se proponen algoritmos de consenso con los cuales el valor final del acuerdo está determinado por un estado de referencia, el cual, puede variar como una función de la dinámica de un agente o del ambiente. Cuando dicho valor está determinado por la dinámica de un agente aislado, a esta configuración, le llamamos consenso en arreglos maestro-seguidores [21, 22], es decir, el valor de referencia está determinado por la dinámica de un agente llamado *maestro* y el resto de agentes *seguidores* deben de converger en dicho valor. Uno de los resultados mostrados en [20] muestra que, si todos los agentes en la red tienen acceso al valor de referencia, aun cuando no exista intercambio de información entre los seguidores, el consenso con dicho valor es alcanzado. Sin embargo, este es un argumento muy restrictivo. Además, un aspecto a considerar es que, en la práctica, existe la posibilidad de que solo una porción de agentes en el grupo tenga acceso al estado de referencia determinado por el agente maestro y estos agentes no tengan un camino directo hacia todos los demás agentes en la red.

Todos estos antecedentes, han permitido que aplicaciones en sistemas de múltiples vehículos puedan ser estudiados desde la perspectiva de consenso en sistemas multi-agente. Sin embargo, la dinámica de vehículos autónomos, como los discutidos anteriormente, suelen ser más complicadas que un sistema doble integrador, o un sistema lineal. Es por esto, que resulta de interés, estudiar sistemas de aplicaciones en ingeniería y analizar si los protocolos estudiados en la literatura pueden, o no, ser utilizados en dichos casos.

1.2. Consenso en Sistemas de Múltiples Robots Móviles

Una potencial aplicación de sistemas de múltiples agentes, en el campo de la ingeniería, es el uso de un equipo de robots móviles trabajando de forma coordinada para lograr un objetivo. Algunas de las potenciales tareas a llevar a cabo con un grupo de robots móviles (agentes) son, entre otras; vigilancia, transporte, adquisición de datos e inspección de áreas desconocidas.

Sin embargo, la mayoría de resultados reportados en la literatura, relacionados con sistemas de múltiples agentes, se enfocan solamente en aspectos teóricos. Por lo tanto, resulta

de gran interés analizar, cómo dichos resultados pueden ser utilizados en aplicaciones reales, partiendo desde problemas de consenso entre un grupo de agentes, hasta arreglos de maestro seguidores, considerando también restricciones físicas; como la imposibilidad de dos vehículos ocupando el mismo espacio.

En [23] se ha mostrado que la dinámica de movimiento de un actuador montado en un robot móvil con tracción diferencial (aplicando un controlador interno linealizante), puede ser escrita en forma similar a la dinámica de un agente inercial (Los detalles serán abordados en la sección 2.1). Esto sugiere que los protocolos estudiados de manera teórica, para resolver problemas de consenso en sistemas de múltiples agentes inerciales, pueden ser aplicados para resolver problemas de consenso en grupos de robots móviles.

El objetivo de este trabajo de tesis es; diseñar y analizar protocolos (algoritmos) de consenso, mediante los cuales, sea posible resolver un problema de consenso entre agentes y consenso en arreglos maestro-seguidores de agentes inerciales, en términos de sus posiciones y velocidades. Los trabajos relacionados con esta tesis son [15, 16, 24]. En [15], se presentan condiciones suficientes bajo las cuales se resuelve el problema de consenso entre agentes inerciales y en [16] se relajan algunas suposiciones relacionadas con las propiedades de la topología de comunicación de la red de agentes consideradas en [15]. En [24], Liu et.al. propone un protocolo con el cual, la red de agentes inerciales llega a un consenso con una velocidad constante deseada, sin embargo supone que dicha velocidad es conocida por todos los agentes en la red, lo cual podría ser una suposición muy restrictiva en aplicaciones reales. Además, las condiciones presentadas en [24], solo son condiciones suficientes. En contraste, en esta tesis se considera que solo una porción de agentes en el grupo tiene acceso a los estados del agente maestro, además, consideramos que el maestro puede variar su velocidad con el tiempo y tiene una dinámica similar a la de un agente inercial.

Las contribuciones de este trabajo son las siguientes; En primer lugar, se analiza el problema de consenso entre agentes inerciales (posición del actuador de robots móviles con tracción diferencial y un controlador interno linealizante) utilizando herramientas de la teoría de grafos, se presentan condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el consenso es alcanzado en una red de agentes inerciales. Posteriormente, se ataca el problema de consenso en arreglos maestro-seguidores de agentes, en donde asumimos que solo una porción (inclusive solo uno) de los agentes seguidores tiene acceso a los estados del maestro, también se presentan condiciones necesarias y suficientes con las cuales el consenso es alcanzado. Además para ambos problemas, los protocolos de consenso desarrollados, son extendidos para incluir el caso en el que se desea mantener una desviación de estados, dentro de este caso, se puede incluir el problema de control de formación.

El resto de trabajo está estructurado de la siguiente forma. En el Capítulo 2, se discute brevemente el trabajo realizado por Ren y Beard en [23], en donde se proponen controladores no lineales con los cuales es posible escribir la dinámica de *actuador* (discutido en la sección 2.1) de forma similar a la de un agente inercial, posteriormente, se presentan algunas preliminares de la teoría de grafos y se plantea el problema de consenso en redes de agentes inerciales. En el Capítulo 3, se discuten los problemas de consenso entre agentes y consenso

con un agente maestro, para el caso en que los agentes inerciales son idénticos, es decir, suponemos que las masas de dichos agentes son iguales para todos ellos. Posteriormente, en el Capítulo 4, se discuten los mismos problemas atacados en el Capítulo 3, pero ahora, para el caso en que los agentes inerciales tienen masas potencialmente diferentes. Además, en ambos capítulos (3 y 4), se amplían los resultados para el caso en el que se desea mantener una desviación de estados entre los agentes y el agente maestro (según sea el caso), en lo cual también puede ser visto como un problema de control de formación. Por último, en el Capítulo 5, se dan algunos comentarios finales de los resultados obtenidos en el presente trabajo.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

Dentro de este capítulo, mostraremos que la dinámica de un robot móvil con tracción diferencial, puede ser escrita de forma similar a la de un agente inercial. Revisaremos algunos conceptos básicos de la teoría de grafos. Estudiaremos la forma más general de plantear un problema de consenso en sistemas multi agente. Posteriormente, analizaremos el modelo de agente inercial. Por ultimo, plantaremos los problemas específicos a resolver con este trabajo, así como las suposiciones bajo las que se atacan dichos problemas.

2.1. Robot Móvil con Ruedas en Configuración Diferencial

Una de las potenciales aplicaciones, en el campo de la ingeniería, del problema de consenso en sistemas de múltiples agentes, es el uso coordinado de un grupo de robots móviles que se desplazan en un plano mediante el uso de ruedas. La gama de configuraciones posibles, de robots móviles con ruedas, es muy amplia. Una de las configuraciones más populares, es la configuración diferencial, en parte, debido a que es una de las más sencillas y baratas de construir. Dicha configuración típicamente consta de dos ruedas independientes acopladas a motores de corriente directa y una rueda loca o de castor para mantener el balance del robot y que, debido a que no impacta en el movimiento del mismo, no es incluida en el análisis de su cinemática. La traslación y rotación del robot con esta configuración, está determinada por la diferencia entre las velocidades angulares de cada una de las ruedas.

El modelo cinemático de un robot móvil con tracción diferencial [25, 23] es

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= v \cos(\theta) \\ \dot{r}_y &= v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

En donde v y ω son las velocidades lineal y angular del robot, respectivamente; r_x y r_y son las coordenadas Cartesianas del centro de masas del vehículo, y θ es el ángulo entre la dirección hacia la que se desplaza el robot (ver Figura 2.1).

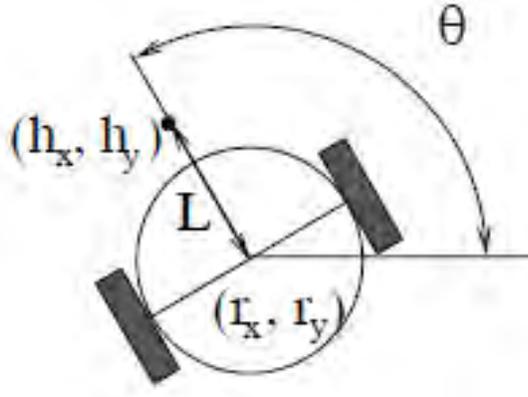


Figura 2.1: Un robot móvil no holonómico con llantas y tracción diferencial [23].

Sin embargo, se ha mostrado que un robot móvil con tracción diferencial posee restricciones no holonómicas [25, 23]. Como se menciona en [23], el artículo [26] muestra que los sistemas no holonómicos no pueden ser estabilizados con una retroalimentación de estados continua y estática. La implicación para robots móviles con configuración diferencial es que la posición y la orientación del centro del robot no pueden ser estabilizadas simultáneamente con una estrategia de control invariante en el tiempo. Sin embargo, con leyes de control discontinuas [27, 28] y variantes en el tiempo [29, 30] ha sido posible estabilizar el centro de rotación y la orientación de un solo robot. Es claro que el uso de múltiples robots de este tipo es un caso más complejo.

Definamos la posición del *actuador* o *punto de interés* del robot como el punto $h \triangleq [h_x \ h_y]^T$ que se encuentra a una distancia L a lo largo de la línea que es normal al eje de las llantas y que intersecta a dicho eje en el punto central $r \triangleq [r_x \ r_y]^T$ como lo muestra la Figura 2.1. La cinemática de la posición del actuador es holonómica para $L \neq 0$. En este experimento consideramos el problema de coordinar la posición del punto de interés del robot en lugar de su posición central. Además de simplificar el problema, coordinar la posición de dicho punto suele ser el problema de interés. Por ejemplo, si el robot está equipado con una pinza localizada en la posición del actuador y la tarea es sujetar un objeto y moverlo de un lugar a otro, entonces el objetivo es mover la pinza del robot. Otro ejemplo podría ser que el robot esté equipado con un sensor localizado en la posición del punto de interés y el objetivo es localizar dicho sensor en alguna posición específica.

Es posible observar de la Figura 2.1 que la posición del actuador del robot está determinada de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Una vez dicho esto, y dado que nuestro objetivo es controlar la posición del actuador, debemos considerar las fuerzas que actúan sobre dicho robot, para ello, consideraremos el modelo dinámico del mismo. Por lo tanto, el robot tiene las siguientes ecuaciones dinámicas

de movimiento:

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

En donde $r = [r_x \ r_y]^T$ es la posición inercial de robot, θ es la orientación, v es la velocidad lineal, ω es la velocidad angular, τ es el torque aplicado, F es la fuerza aplicada, m es la masa, y J es el momento de inercia.

Una vez planteado el modelo dinámico de un robot móvil con tracción diferencial, en la siguiente sección, analizaremos cómo la dinámica de dicho robot puede ser escrito en una forma similar a la de un agente inercial.

2.2. Robot Móvil Diferencial como Agente Inercial

Haciendo uso del trabajo realizado por Ren y Beard en [23] y de la teoría de control no lineal [31], es posible llevar la dinámica de un robot móvil diferencial a una forma similar a la de un agente inercial. Sean $x \triangleq [r_x \ r_y \ \theta \ v \ w]^T$ y $\sigma \triangleq [F \ \tau]^T$, las ecuaciones de movimiento del robot pueden ser escritas como

$$\dot{x} = f(x) + g\sigma \quad (2.4)$$

En donde la definición de f y g pueden ser inferidas de (2.3). Como se mencionó anteriormente, nos enfocaremos en controlar la posición del actuador del robot, definida como $h \triangleq [h_x \ h_y]^T$. La segunda derivada de h está dada por

$$\ddot{h} = \begin{bmatrix} -v\omega \sin(\theta) - L\omega^2 \cos(\theta) \\ v\omega \cos(\theta) - L\omega^2 \sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos(\theta) & -\frac{L}{J} \sin(\theta) \\ \frac{1}{m} \sin(\theta) & \frac{L}{J} \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix}$$

Debido a que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos(\theta) & -\frac{L}{J} \sin(\theta) \\ \frac{1}{m} \sin(\theta) & \frac{L}{J} \cos(\theta) \end{bmatrix} = \frac{L}{mJ} \neq 0$$

El sistema (2.4) con salida (2.2) tiene un grado relativo constante igual a dos y por lo tanto puede ser linealizado por retroalimentación [31] alrededor de la posición del actuador. Con ese fin, defina el mapa $\psi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ [23] como:

$$\zeta = \psi(x) \triangleq \begin{bmatrix} r_x + L \cos(\theta) \\ r_y + L \sin(\theta) \\ v \cos(\theta) - L\omega \sin(\theta) \\ v \sin(\theta) + L\omega \cos(\theta) \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

El mapa ψ es un difeomorfismo cuya inversa está dada por

$$x = \Psi^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} \zeta_1 - L \cos(\zeta_5) \\ \zeta_2 - L \sin(\zeta_5) \\ \zeta_5 \\ \frac{1}{2} \zeta_3 \cos(\zeta_5) + \frac{1}{2} \zeta_4 \sin(\zeta_5) \\ -\frac{1}{2L} \zeta_3 \sin(\zeta_5) + \frac{1}{2L} \zeta_4 \cos(\zeta_5) \end{bmatrix}$$

En las coordenadas transformadas, (2.4) y (2.2) están dadas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_3 \\ \dot{\zeta}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -v\omega \sin(\theta) - L\omega^2 \cos(\theta) \\ v\omega \cos(\theta) - L\omega^2 \sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos(\theta) & -\frac{L}{J} \sin(\theta) \\ \frac{1}{m} \sin(\theta) & \frac{L}{J} \cos(\theta) \end{bmatrix} \sigma \\ \dot{\zeta}_5 &= -\frac{1}{2L} \zeta_3 \sin(\zeta_5) + \frac{1}{2L} \zeta_4 \cos(\zeta_5) \end{aligned}$$

El controlador para la linealización por retroalimentación de salida [31] está dado por

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos(\theta) & -\frac{L}{J} \sin(\theta) \\ \frac{1}{m} \sin(\theta) & \frac{L}{J} \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{1}{m} u - \begin{bmatrix} -v\omega \sin(\theta) - L\omega^2 \cos(\theta) \\ v\omega \cos(\theta) - L\omega^2 \sin(\theta) \end{bmatrix} \right) \quad (2.6)$$

lo cual da

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_3 \\ \dot{\zeta}_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} u \\ \dot{\zeta}_5 &= -\frac{1}{2L} \zeta_3 \sin(\zeta_5) + \frac{1}{2L} \zeta_4 \cos(\zeta_5) \end{aligned}$$

La última ecuación representa la dinámica interna que permanece no observable e incontrolable por la transformación (2.5). La dinámica cero [31] es encontrada estableciendo $\zeta_1 = \dots = \zeta_4 = 0$ para obtener $\dot{\zeta}_5 = 0$. Por lo cual, note que la dinámica cero es estable, pero no asintóticamente estable [23]. Debido a que $\zeta_5 = \theta$ y $[\zeta_3 \quad \zeta_4]^T$ representa la velocidad del actuador, esto implica que el ángulo θ dejara de moverse solo cuando la posición de dicho actuador deje de cambiar.

Observe que la posición del actuador es $h = [\zeta_1 \quad \zeta_2]^T$, y que, por lo tanto, es posible escribir la dinámica del movimiento del mismo como la dinámica de un agente inercial

$$m\ddot{h} = u \quad (2.7)$$

Hasta este momento, hemos observado cómo es posible describir la dinámica del movimiento de un actuador montado en un robot móvil diferencial, de la misma forma que la

dinámica de un agente inercial. Sin embargo, en este trabajo nos interesa hacer uso de un grupo de ellos, y resolver un problema de consenso en arreglos maestro-seguidores de agentes inerciales. Esto es, nos interesa coordinar la posición del actuador de un grupo de robot móviles diferenciales, en donde, la dinámica de movimiento del actuador montado en dicho robot, está descrita de una forma similar a la de un agente inercial [15, 16, 22]. Por tal motivo, en este documento, nos referiremos al problema de coordinar las posiciones y velocidades de actuadores montados en robots móviles diferenciales, como el problema de consenso en sistemas de múltiples agentes inerciales.

Previo a comenzar a plantear los problemas específicos a resolver en esta tesis, así como las suposiciones bajo las cuales se atacaran los problemas propuestos, revisaremos algunos conceptos básicos de la teoría de grafos.

2.3. Conceptos Preliminares

En esta sección, se introducen algunos conceptos básicos y resultados acerca del algebra de la teoría de grafos, utilizados a lo largo de este trabajo. Para más detalles acerca del algebra de la teoría de grafos consulte [11].

Un grafo \mathcal{G} consiste de un conjunto de nodos $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ y un conjunto de enlaces $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Donde el enlace (i, j) denota que el nodo j se conecta al i , pero no necesariamente al revés. Por lo tanto, el i -ésimo nodo, es llamado nodo padre y el j -ésimo es llamado hijo. Suponga que existen N nodos en el grafo dirigido. La matriz de adyacencia $\mathcal{W} = (\omega_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ de un grafo dirigido con pesos se define como $\omega_{ii} = 0$ y $\omega_{ij} > 0$ si $(j, i) \in \mathcal{E}$, en donde $i \neq j$. La matriz Laplaciana $\mathcal{L} = (\ell_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ de un grafo dirigido con pesos se define como $\ell_{ii} = \sum_{j \neq i} \omega_{ij}$ y $\ell_{ij} = -\omega_{ij}$, donde $i \neq j$. La matriz \mathcal{L} satisface las siguientes condiciones

$$\ell_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{j=1}^N \ell_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

Un resultado del algebra de la teoría de grafos, relacionado con la matriz Laplaciana es:

Lema 2.1 [11] Todos los valores propios de \mathcal{L} tienen parte real positiva. Cero es un valor propio de \mathcal{L} , con $\mathbf{1}$ como su vector propio correspondiente.

Llamamos camino dirigido a una secuencia de enlaces dentro de un grafo dirigido, dicha secuencia tiene la forma $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{N-1}, i_N)$, en donde $i_j \in \mathcal{V}$. Un árbol dirigido es un grafo dirigido, en donde cada nodo tiene exactamente un solo nodo padre excepto para un nodo, llamado la raíz, el cual no tiene padre. Además, la raíz tiene un camino dirigido a todos los otros nodos. Un árbol de expansión dirigido de \mathcal{G} es un árbol dirigido que contiene todos los nodos de \mathcal{G} . Un grafo dirigido tiene o contiene un árbol de expansión dirigido si existe un árbol de expansión dirigido como un subconjunto del grafo dirigido, esto es, existe cuando menos un nodo que tiene un camino dirigido hacia todos los demás nodos. Tenemos el siguiente Lema que relaciona el concepto de árbol de expansión dirigido y las propiedades espectrales de la matriz Laplaciana.

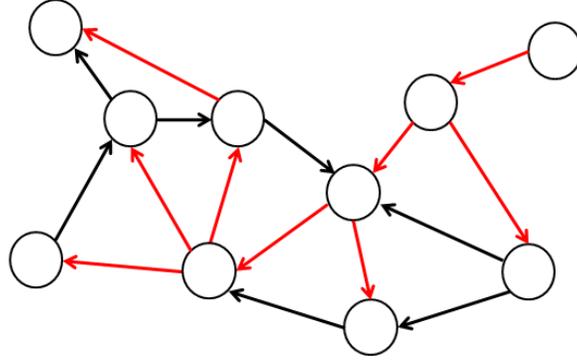


Figura 2.2: Grafo dirigido que contiene un árbol de expansión dirigido (Rojo).

Lema 2.2 [32] La matriz Laplaciana \mathcal{L} tiene un único valor propio 0 y todos los demás valores propios tienen parte real positiva, si y solo si, la red dirigida contiene un árbol de expansión dirigido.

Lema 2.3 [17] Si el grafo \mathcal{G} contiene un árbol de expansión dirigido, entonces, con la permutación apropiada, \mathcal{L} puede ser reducida a la forma normal de Frobenius [23]

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1k} \\ 0 & L_{22} & \cdots & L_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{kk} \end{bmatrix}$$

En donde L_{ii} , $i = 1, \dots, k-1$, son irreducibles, cada L_{ii} tiene cuando menos una fila con suma positiva, y L_{kk} es irreducible o es una matriz cero de dimensión uno.

A lo largo del presente trabajo estaremos usando continuamente una notación basada en el producto de Kronecker [33]. El producto de Kronecker de dos matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ esta definido como:

$$A \otimes B \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

el cual satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (\gamma A) \otimes B &= A \otimes (\gamma B) \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC) \otimes (BD) \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \\ A \otimes B + A \otimes C &= A \otimes (B + C) \end{aligned}$$

En donde, γ es un valor constante. Además, usaremos continuamente la siguiente propiedad de los determinantes para una matriz por bloques. Dada una matriz por bloques

$$Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Se sabe que $\det(Q) = \det(AD - CB)$ si A y C conmutan, en donde $\det(\cdot)$ denota el determinante de una matriz.

2.4. Problema de Consenso (Caso General)

Las dinámicas consideradas dentro de los modelos de agente pueden ser muy variadas. A continuación, mostramos el caso general del problema de consenso para sistemas multi-agente cuando cada uno de los agentes interconectados son sistemas dinámicos continuos.

Considere N agentes (sistemas) dinámicos descritos por la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + u_i, \quad y_i = h(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

en donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ denota las variables de estado del agente i con $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^p$ es la entrada del sistema y $y_i \in \mathbb{R}^q$ es la salida medible con $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$. El problema de consenso consiste en diseñar un protocolo mediante el cual se logre volver estable el comportamiento de consenso deseado. Esto es posible aplicando entradas u_i que solo dependen de los estados medibles y_i del agente y sus vecinos en la red (agentes de los cuales recibe información). Diremos que una retroalimentación de estados

$$u_i = g_i(y), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

En donde $y = [y_1^T, \dots, y_N^T]^T$ con $g_i: \mathbb{R}^{qN} \rightarrow \mathbb{R}^p$, es un protocolo de consenso distribuido si la cantidad de vecinos del agente i es menor a la cantidad total de agentes en la red.

En general, existen dos clasificaciones diferentes del problema de consenso; el problema de consenso no restringido y restringido. Un problema de consenso no restringido es simplemente un problema de alineación, en el cual, es suficiente que los estados de todos los agentes sean asintóticamente iguales, en lo que es llamado el *valor de consenso*. Por otro lado, un problema de consenso restringido, es aquel en el que tal decisión está definida de alguna forma, es decir, existe un valor deseado al cual deben converger los estados de todos los agentes.

Algunas formas de problemas de consenso son:

- **Consenso Idéntico Completo:** Este problema consiste en que todos los estados de los agentes sea asintóticamente el mismo, es decir

$$|x_i - x_j| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty; \quad \forall i, j$$

- Consenso a una Referencia Constante: El cual consiste en que los estados de todos los agentes sean asintóticamente iguales a un valor constante, esto es

$$|x_i - x^*| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad x^* = cte; \quad \forall i$$

con $x^* \in \mathbb{R}^n$

- Consenso con un Modelo de Referencia: En este problema se considera que existe un modelo de referencia con el cual se deberá lograr consenso

$$|x_i - x_r| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty; \quad \forall i$$

Donde $x_r \in \mathbb{R}^n$ es el valor en posición de la referencia con $\dot{x}_r = f_r(x_r, t)$.

Sin embargo, en este trabajo, estamos interesados en resolver problemas de consenso en sistemas de múltiples agentes cuando el modelo de agente considerado es el de un agente inercial. A continuación, especificaremos el problema que se plantea resolver con este trabajo.

2.5. Problema de Consenso para Agentes Inerciales

Ahora retomemos el modelo de agente inercial (posición de un actuador montado en un robot móvil diferencial), y analicemos dicho modelo.

Suponga que tenemos un agente inercial aislado con la forma:

$$m\ddot{x} = u \tag{2.12}$$

En donde, ahora $x \in \mathbb{R}^n$ denota la posición del actuador del agente, $m > 0$ es la inercia, y $u \in \mathbb{R}^n$ es la entrada del sistema. Si definimos las variables de estado como posición $\chi = x$ y velocidad $v = \dot{x}$, es posible escribir el modelo de agente en términos de sus estados

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}u \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si ahora pensamos en que no se aplica entrada alguna al sistema, es decir, $u = 0$, el comportamiento del sistema depende completamente de sus condiciones iniciales. Denotaremos las condiciones iniciales en un tiempo $t = 0$ como $x(0) = \chi_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, posición y velocidad respectivamente. Podemos observar que si las condiciones iniciales del sistema son $\chi_0 = c$ y $v_0 = 0$, con c un valor constante, el agente permanecería en su posición inicial c (Figura 2.3a) debido a que su velocidad no varía para todo tiempo t . Por otro lado, si la condición inicial de la velocidad es diferente de cero, el agente permanecerá en movimiento con una velocidad constante (Figura 2.3b).

Sin embargo, el objetivo de este trabajo es resolver un problema de consenso, lo cual implica la existencia de más de un agente. Comenzaremos analizando el problema cuando el grupo de agentes está compuesto por solo dos de ellos en el siguiente ejemplo.

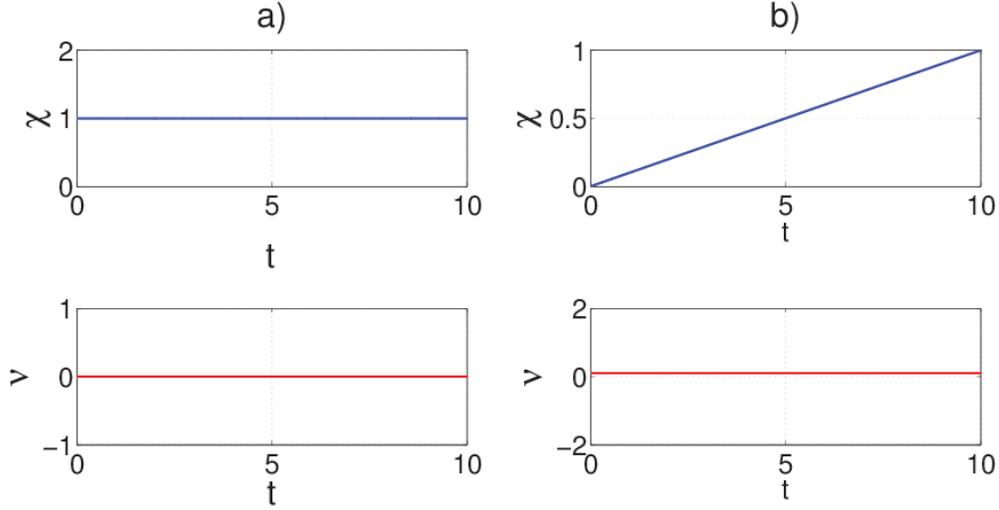


Figura 2.3: Agente inercial con diferentes condiciones iniciales: a) $\chi_0 = 1$ y $v_0 = 0$, b) $\chi_0 = 0$ y $v_0 = 0,1$.

Ejemplo 2.1 Suponga que tenemos un par de agentes inerciales A y B interconectados en configuración maestro seguidor como lo muestra la Figura 2.4. Ahora suponga que buscamos resolver un problema de consenso idéntico completo bajo las siguientes consideraciones; ambos estados del par de agentes son estados medibles, además, por simplicidad, supongamos que los valores de las masas de los agentes y el peso del enlace son $m_A = m_B = \omega = 1$. Es fácil observar que podemos escribir la dinámica de ambos agentes en la forma (2.13) como sigue:

Agente A

$$\dot{\chi}_A = v_A$$

$$\dot{v}_A = u_A$$

Agente B

$$\dot{\chi}_B = v_B$$

$$\dot{v}_B = u_B$$

En donde $u_A, u_B \in \mathbb{R}^n$ son las entradas del agente A y B respectivamente. Solo como un ejemplo, supongamos que ambos agentes pueden ocupar el mismo espacio y que, el problema que buscamos resolver, consiste en que los estados de ambos agentes asintóticamente sean iguales, es decir, que los errores en los estados desaparezcan con el tiempo, esto es

$$e_\chi = \chi_B - \chi_A \rightarrow 0, \quad y \quad e_v = v_B - v_A \rightarrow 0, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty$$

Este objetivo es algo que se debe tener en cuenta durante el diseño de los protocolos de consenso, ya que dicho protocolo es quien determina el comportamiento del grupo. Si lo que buscamos es que las diferencias entre los estados de los agentes desaparezcan, de manera

directa se intuye que el protocolo debe considerar el error entre los estados. Con esto en mente, podemos definir los siguientes protocolos:

$$\begin{aligned} u_A &= 0 \\ u_B &= -k(\chi_B - \chi_A) - b(v_B - v_A) \end{aligned}$$

En donde, $k, b > 0$ son ganancias a diseñar. Aplicando estos protocolos a su agente correspondiente, la dinámica del error es:

$$\dot{e} = \mathcal{K}e \quad (2.14)$$

En donde $e = [e_\chi \ e_v]^\top$ y $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix}$, lo que queda por demostrar es que la matriz \mathcal{K} es Hurwitz. Para esto se proponen las ganancias k y b necesarias para que se cumpla dicha propiedad.

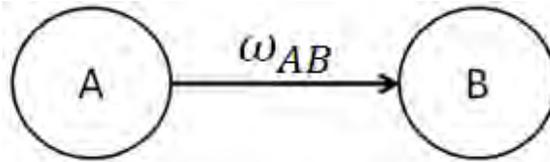


Figura 2.4: Agentes inerciales acoplados en configuración Maestro-Seguidor.

Como podemos observar en la Figura 2.5, el comportamiento del agente A es el de un agente aislado ya que no se aplica entrada alguna a él, por otra parte, el agente B es capaz de seguir la trayectoria descrita por el agente A, con lo cual, las diferencias entre los estados de ambos agentes desaparecen con el tiempo y el objetivo se cumple, esto es, se llega a un consenso idéntico completo.

Sin embargo, este es un problema sencillo que se resuelve de una manera muy directa. El problema se vuelve complejo cuando la cantidad de agentes y de enlaces aumenta. Sin mencionar que cada uno de los diferentes problemas de consenso previamente mencionados, tiene complicaciones propias.

Ahora suponga que tenemos N agentes inerciales en un espacio euclidiano n -dimensional. La dinámica de los agentes inerciales es descrita por la siguiente ecuación

$$m_i \ddot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.15)$$

De forma similar $x_i \in \mathbb{R}^n$, $m_i > 0$ es la inercia, y $u_i \in \mathbb{R}^n$ es la entrada del sistema. Definiendo las variables de estado como posición $\chi_i = x_i$ y velocidad $v_i = \dot{x}_i$, es posible escribir la dinámica del agente como:

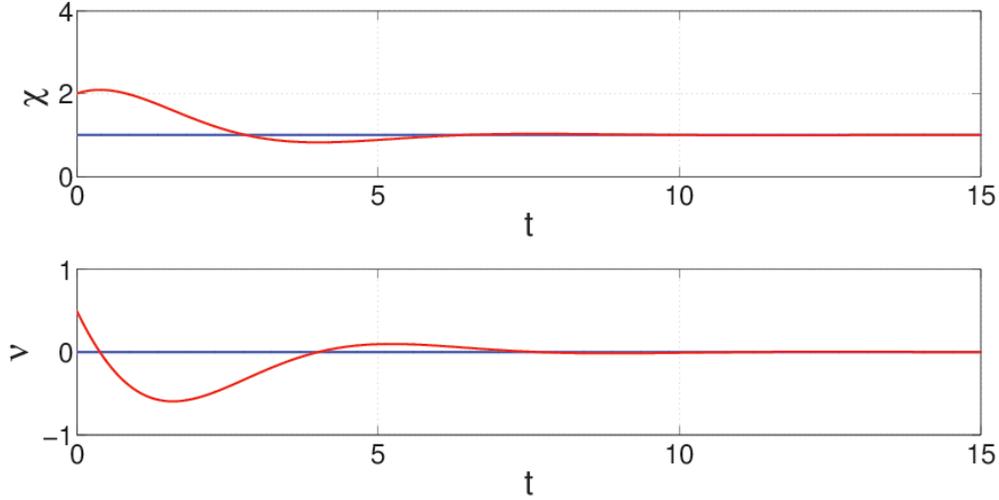


Figura 2.5: Consenso en dos agentes inerciales con parámetros $m_A = m_B = \omega_{AB} = b = k = 1$.

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i &= v_i \\ m_i \dot{v}_i &= u_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.16)$$

En donde, $\chi_i, v_i, u_i \in \mathbb{R}^n$. Para resolver un problema de consenso en sistemas multi-agente, debemos explícitamente diseñar un protocolo apropiado (i.e., u_i), en términos de los estados del agente i y los estados medibles de los vecinos para imponer el comportamiento colectivo deseado. En este trabajo, el diseño de estos protocolos es realizado bajo las siguientes consideraciones

- Ambos estados (posición y velocidad) de cada agente son variables medibles, esto es

$$y_i = \begin{bmatrix} \chi_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N$$

con $y_i \in \mathbb{R}^{2n}$

- La cantidad de agentes y de enlaces, así como la dirección de los mismos no cambia, esto es, el protocolo de consenso es representado por un grafo dirigido fijo con pesos.
- Se considera que no existen retardos de comunicación en los enlaces.

Tomando estas consideraciones en cuenta, los problemas de consenso que se plantean resolver dentro de este trabajo son:

- Consenso idéntico completo

$$|\chi_i - \chi_j| \rightarrow \Delta_{ij} \quad \text{y} \quad |v_i - v_j| \rightarrow \dot{\Delta}_{ij}, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty; \quad \forall i, j \quad (2.17)$$

- Consenso con un agente maestro

$$|\chi_i - \chi_{\bar{m}}| \rightarrow \Delta_{i\bar{m}} \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}| \rightarrow \dot{\Delta}_{i\bar{m}}, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty; \quad \forall i \quad (2.18)$$

En donde Δ_{ij} y $\dot{\Delta}_{ij}$ denotan los valores de separación deseada entre la posición y velocidad, respectivamente, del agente i y el agente j , además $\Delta_{i\bar{m}}$ y $\dot{\Delta}_{i\bar{m}}$, denotan el valor de separación deseada entre la posición y velocidad, respectivamente, del agente i con respecto al agente maestro. Para el caso del problema de consenso con un agente maestro, consideraremos que dicho agente, es un agente inercial de masa unitaria y cuya velocidad puede variar con el tiempo. El modelo de agente maestro es:

$$\ddot{x}_{\bar{m}} = f(t, x_{\bar{m}}, \dot{x}_{\bar{m}}) \quad (2.19)$$

Con $x_{\bar{m}} \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua por pedazos y localmente Lipschitz que puede ser escrito de forma similar que en (2.13) en términos de variables de estado como posición y velocidad, $\chi_{\bar{m}} = x_{\bar{m}}$ y $\mathbf{v}_{\bar{m}} = \dot{x}_{\bar{m}}$ respectivamente como

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_{\bar{m}} &= \mathbf{v}_{\bar{m}} \\ \dot{\mathbf{v}}_{\bar{m}} &= f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para el resto de este documento, en primer lugar, y como un primer acercamiento a estos problemas, suponemos que los agentes inerciales son idénticos (Capítulo 3), de esta forma, los protocolos diseñados bajo esta consideración, servirán de base una vez que consideremos agentes con masas diferentes (Capítulo 4), y se resuelvan los mismo problemas. Además en ambos casos (agentes idénticos y con masas diferentes), extendemos los resultados, realizando ligeras modificaciones a los protocolos propuestos, para el caso en el que se busca mantener una diferencia entre los estados de los agentes, lo cual podría verse también como un problema de control de formación. Por último se realizan algunas conclusiones de este trabajo (Capítulo 6).

Capítulo 3

Agentes Inerciales Idénticos

Consideremos ahora N agentes inerciales con modelo:

$$m_i \ddot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

En donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ denota la posición del agente, $m_i > 0$ es la inercia, y $u_i \in \mathbb{R}^n$ es la entrada del sistema. En este capítulo supondremos que las masas de todos los agentes son iguales, es decir, $m = m_1 = \dots = m_N$. Si definimos las variables de estado como posición $\chi_i = x_i$ y velocidad $v_i = \dot{x}_i$, es posible escribir el modelo de agente en términos de sus estados

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= \frac{1}{m} u_i \\ y_i &= \begin{bmatrix} \chi_i^T & v_i^T \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.2)$$

En donde y_i , denota las variables medibles del agente i . Además, supondremos que la topología de comunicación esta previamente dada y que, la cantidad de agentes y enlaces no cambia, tampoco lo hacen la dirección de los mismos y que no existen retardos de comunicación.

3.1. Consenso Entre Agentes

En esta sección, en primer lugar, supondremos que el modelo de agente (3.2), es un modelo ideal, es decir, supondremos que los agentes pueden compartir la misma posición (esta suposición se retirará más adelante). Por tal motivo, el problema de consenso entre agentes a resolver es:

$$|\chi_i - \chi_j| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |v_i - v_j| \rightarrow 0, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty; \quad \forall i, j \quad (3.3)$$

En el mismo sentido del Ejemplo 2.1, en donde buscamos que las diferencias entre los estados de un par de agentes inerciales sean asintóticamente cero, es decir, deseamos alcanzar un consenso idéntico completo (3.3), y bajo las suposiciones ya descritas, se puede proponer el protocolo de consenso como

$$u_i = -k \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\chi_i - \chi_j) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

En donde $b, k > 0$ son ganancias constantes a diseñar, $\omega_{ij} > 0$ si existe el enlace (j, i) , es decir, el agente i recibe información del agente j y $\omega_{ii} = 0$.

Es posible escribir la dinámica del agente inercial (3.2) junto con el protocolo de consenso (3.4) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i &= \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= -\frac{k}{m} \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\chi_i - \chi_j) - \frac{b}{m} \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.5)$$

O bien de forma equivalente (3.5) puede ser escrita en términos de los elementos de la matriz Laplaciana del grafo que representa la topología de comunicación como:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i &= \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= -\frac{k}{m} \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \chi_j - \frac{b}{m} \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \mathbf{v}_j, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.6)$$

En donde ℓ_{ij} es el ij -ésimo elemento de la matriz Laplaciana $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ que cumple con la propiedad (2.8).

Observación 3.1 *Note que es posible escribir (3.5) de la forma (3.6), debida a que, si se expanden las sumatorias de la ecuación (3.5), la cantidad de veces que se retroalimentan los estados del agente i , corresponde a la misma cantidad de enlaces de entrada del nodo i , ya que estamos considerando que $\omega_{ii} = 0$, esto es, dichas sumatorias pueden ser escritas de la misma forma en la que están definidos los elementos de la matriz Laplaciana, es decir $\ell_{ii} = \sum_{j \neq i} \omega_{ij}$ y $\ell_{ij} = -\omega_{ij}$, donde $i \neq j$.*

Sea $\chi = [\chi_1^T, \dots, \chi_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$, $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$, y $\Psi = [\chi^T, \mathbf{v}^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$. La red de agentes (3.6) puede ser escrita una forma matricial más compacta como:

$$\dot{\Psi} = (\Xi \otimes I_n) \Psi \quad (3.7)$$

En donde $\Xi = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -\frac{k}{m} \mathcal{L} & -\frac{b}{m} \mathcal{L} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, además, I_n y I_N denotan la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y $N \times N$ respectivamente, así como 0_N denota un matriz de ceros de tamaño $N \times N$, adicionalmente \otimes denota el producto de Kronecker.

Los valores propios de Ξ son sumamente importantes en el análisis de convergencia del modelo lineal (3.7). Suponga que $\mu_{ij} (i = 1, \dots, N, j = 1, 2)$ y $\lambda_i (i = 1, \dots, N)$ son los valores

propios de Ξ y \mathcal{L} respectivamente.

Para encontrar los valores propios de Ξ , podemos resolver la ecuación característica $\det(\mu I_{2N} - \Xi) = 0$, en donde $\det(\mu I_{2N} - \Xi)$ es el polinomio característico de Ξ . Note que

$$\begin{aligned} \det(\mu I_{2N} - \Xi) &= \det \begin{pmatrix} \mu I_N & -I_N \\ \frac{k}{m} \mathcal{L} & \mu I_N + \frac{b}{m} \mathcal{L} \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\mu^2 I_N + \left(\frac{k}{m} + \mu \frac{b}{m} \right) \mathcal{L} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Observe que $\det(\mu I_{2N} - \Xi)$ cumple con la propiedad (2.9). Además, observe que

$$\det(\mu I_N + \mathcal{L}) = \prod_{i=1}^N (\mu - \lambda_i) \quad (3.9)$$

En donde λ_i es el i -ésimo valor propio de \mathcal{L} . Comparando (3.8) y (3.9), se puede observar que

$$\det \left(\mu^2 I_N + \left(\frac{k}{m} + \mu \frac{b}{m} \right) \mathcal{L} \right) = \prod_{i=1}^N \left(\mu^2 + \left(\frac{k}{m} + \mu \frac{b}{m} \right) \lambda_i \right)$$

Lo cual implica que las raíces de (3.8) pueden obtenerse resolviendo la ecuación $\mu^2 + \left(\frac{k}{m} + \mu \frac{b}{m} \right) \lambda_i = 0$. Es por esto que, de forma directa, los valores propios de Ξ están dados por

$$\begin{aligned} \mu_{i,1} &= \frac{-\frac{b}{m} \lambda_i + \sqrt{\left(\frac{b}{m} \lambda_i\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m} \lambda_i\right)}}{2} \\ \mu_{i,2} &= \frac{-\frac{b}{m} \lambda_i - \sqrt{\left(\frac{b}{m} \lambda_i\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m} \lambda_i\right)}}{2}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.10)$$

De acuerdo al Lema 2.1 \mathcal{L} tiene al menos un valor propio cero y los demás con parte real positiva. Por lo tanto sabemos que Ξ tiene cuando menos dos valores propios cero.

El siguiente resultado muestra condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el problema de consenso entre agentes es resuelto, o dicho de otra manera, el consenso idéntico completo entre agentes es alcanzado.

Teorema 3.1 *Consenso idéntico completo para un sistema de múltiples agente inerciales idénticos (3.7) puede ser alcanzado si y solo si, la topología de comunicación G contiene un árbol dirigido de expansión y*

$$\frac{b^2}{mk} > \max_{2 \leq i \leq N} \frac{\text{Im}(\lambda_i)^2}{\text{Re}(\lambda_i) [\text{Re}(\lambda_i)^2 + \text{Im}(\lambda_i)^2]} \quad (3.11)$$

En donde λ_i con $i = 2, \dots, N$ son los valores propios diferentes de cero de la matriz Laplaciana \mathcal{L} . Además, si el consenso idéntico completo es alcanzado, $\|\mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^N p_j \mathbf{v}_j(0)\| \rightarrow 0$ y $\|\chi_i - \sum_{j=1}^N p_j \chi_j(0)\| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, en donde p es el único vector propio izquierdo de \mathcal{L} asociado con el valor propio 0 satisfaciendo $p^T \mathbf{1}_N = 1$.

Prueba: La estructura de esta prueba está diseñada de la siguiente forma; En primer lugar, probaremos que el consenso es alcanzado asintóticamente, si y solo si, Ξ tiene exactamente dos valores propios cero y todos los demás valores propios tienen parte real negativa (Lema 4.1 en [23]). En segundo lugar daremos condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales se cumple lo anterior mencionado, esto es, se dan condiciones sobre la topología de comunicación para asegurar que Ξ tenga solo dos valores propios cero y condiciones sobre b y k con las cuales se asegura que el resto de valores propios tienen parte real negativa.

(Suficiencia) En primer lugar mostraremos que el valor propio cero de Ξ tiene multiplicidad geométrica igual a uno, cuando Ξ tiene exactamente dos valores propios cero. Sea $q = [q_a^T, q_b^T]^T$, en donde $q_a, q_b \in \mathbb{R}^N$, es un vector propio de Ξ asociado con el valor propio cero, entonces sabemos que

$$\Xi q = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & I_N \\ -\frac{k}{m}\mathcal{L} & -\frac{b}{m}\mathcal{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N \end{bmatrix}$$

Lo cual implica que $q_b = \mathbf{0}_N$ y $-\frac{k}{m}\mathcal{L}q_a = \mathbf{0}_N$, donde $\mathbf{0}_N$ denota el $N \times 1$ vector de ceros, esto es, q_a es un vector propio de $-\mathcal{L}$ asociado con el valor propio cero de $-\mathcal{L}$. Debido a que Ξ tiene exactamente dos valores propios igual a cero, sabemos por (3.10) que $-\mathcal{L}$ tiene exactamente un valor propio cero. Por lo cual, vemos que $-\mathcal{L}$ tiene un solo vector propio linealmente independiente q_a asociado con el valor propio cero, lo cual implica que Ξ tiene un solo vector propio linealmente independiente $q = [q_a^T, \mathbf{0}_N^T]^T$ asociado con el valor propio cero, esto es, el valor propio cero de Ξ tiene multiplicidad algebraica igual a dos pero multiplicidad geométrica igual a uno.

Note que Ξ puede ser escrito en su forma canónica de Jordan como

$$\begin{aligned} \Xi &= PJP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \zeta_1 & \dots & \zeta_{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times (2N-2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (2N-2)} \\ \mathbf{0}_{1 \times (2N-2)} & \mathbf{0}_{1 \times (2N-2)} & J' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1^T \\ \vdots \\ \rho_{2N}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

En donde ζ_j y ρ_j ($j = 1, \dots, 2N$) son los vectores propios izquierdos y derechos o vectores propios generalizados izquierdos y derechos de Ξ , y J' es la matriz diagonal superior por bloques de Jordan correspondiente a los valores propios diferentes de cero λ_{i1} y λ_{i2} , $i = 2, \dots, N$.

Sin pérdida de generalidad, elegimos $\zeta_1 = [\mathbf{1}_N^T, \mathbf{0}_N^T]^T$ y $\zeta_2 = [\mathbf{0}_N^T, \mathbf{1}_N^T]^T$, donde se puede verificar que ζ_1 y ζ_2 son un vector propio derecho y un vector propio derecho generalizado de Ξ asociados con el valor propios cero, respectivamente. Note que Ξ tiene exactamente dos valores propio cero, sabemos que $-\mathcal{L}$ tiene un único valor propio cero, lo cual implica que existe un vector positivo p de dimensión $N \times 1$ tal que $p^T \mathcal{L} = 0$ y $\mathbf{1}_N^T p = 1$. Puede verificarse que $\rho_1 = [p^T, \mathbf{0}_N^T]^T$ y $\rho_2 = [\mathbf{0}_N^T, p^T]^T$ son vectores propios izquierdos y vectores propios izquierdos generalizados de Ξ asociados con el valor propio cero, respectivamente, en donde

$\rho_1^T \zeta_1 = 1$ y $\rho_2^T \zeta_2 = 1$. Notando que los valores propios λ_{i1} y λ_{i2} , $i = 2, \dots, N$, tienen parte real negativa, vemos que

$$\begin{aligned} e^{\Xi t} &= P e^{Jt} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} 1 & t & 0_{1 \times (2N-2)} \\ 0 & 1 & 0_{1 \times (2N-2)} \\ 0_{1 \times (2N-2)} & 0_{1 \times (2N-2)} & J^t \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Lo cual converge a $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_N P^T & t \mathbf{1}_N P^T \\ 0_{N \times N} & \mathbf{1}_N P^T \end{bmatrix}$ para un t grande, donde usamos el hecho que $e^{Jt} \rightarrow 0_{(2N-2) \times (2N-2)}$ para un t suficientemente grande.

Note que para un t suficientemente grande

$$\begin{bmatrix} \chi(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_N P^T & t \mathbf{1}_N P^T \\ 0_{N \times N} & \mathbf{1}_N P^T \end{bmatrix} \otimes I_n \right) \begin{bmatrix} \chi(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

Vemos que $\chi(t) \rightarrow (\mathbf{1}_N P^T \otimes I_n) \chi(0) + t (\mathbf{1}_N P^T \otimes I_n) v(0)$, y que $v(t) \rightarrow (\mathbf{1}_N P^T \otimes I_n) v(0)$ para un t suficientemente grande. Como resultado sabemos que $\|\chi_i(t) - \chi_j(t)\| \rightarrow 0$ y $\|v_i(t) - v_j(t)\| \rightarrow 0$, conforme $t \rightarrow \infty$, esto es, el consenso es alcanzado para un grupo de agentes.

(Necesidad) Suponga que la condición suficiente que Ξ tenga exactamente dos valores propios cero y todos los demás valores propios tienen parte real negativa no se cumple. Note que Ξ tiene al menos dos valores propios cero, el hecho que la condición de suficiencia no se cumpla implica que Ξ tiene más de dos valores propios cero o, tiene dos valores propios cero y uno con parte real positiva. Sin pérdida de generalidad, asuma que $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y $Re(\mu_3) \geq 0$, en donde, μ_k , $k = 1, \dots, 2N$, denota el k -ésimo valor propio de Ξ y $Re(\cdot)$ representa la parte real de un número. Sea $J = [j_{kl}]$ la forma canónica de Jordan de Ξ , sabemos que $j_{kk} = \mu_k$, $k = 1, \dots, 2N$. Entonces vemos que $e^{j_{kk}t} \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, para un t grande, lo que implica que las primeras tres filas de e^{Jt} son linealmente independientes para un t suficientemente grande. Por lo tanto, sabemos que el rango de e^{Jt} es cuando menos tres para un t suficientemente grande, lo cual, implica que el rango de $e^{\Xi t}$ es cuando menos tres para un t suficientemente grande. Note que el consenso es alcanzado asintóticamente si y solo si $e^{\Xi t} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N P^T \\ \mathbf{1}_N Q^T \end{bmatrix}$ para un t suficientemente grande, en donde p y q son vectores de dimensión $N \times 1$. Como resultado, el rango de $e^{\Xi t}$ no puede exceder de dos para un t grande. Esto resulta en una contradicción.

Si bien, hasta ahora hemos considerado que todos los valores propios diferentes de cero de Ξ tienen parte real negativa, debemos dar condiciones sobre k y b , bajo las cuales esto se cumpla. En primer lugar, por el Lema 2.1 sabemos que la matriz Laplaciana \mathcal{L} tiene un único valor propio cero y los demás con parte real positiva si y solo si la topología de comunicación \mathcal{G} contiene un árbol de expansión dirigido. La existencia de un árbol de expansión dirigido contenido en la topología de comunicación implica que Ξ tiene solo dos valores propios cero, esto es un punto vital con el cual se prueba que el consenso entre agentes es alcanzado.

Sin embargo, hasta ahora hemos supuesto que los demás valores propios de Ξ tienen parte real negativa. De tal forma que solo queda por demostrar que (3.11) se mantiene si y solo si $Re(\mu_{ij}) < 0 (i = 2, \dots, N, j = 1, 2)$.

Sea $\sqrt{(\frac{b}{m}\lambda_i)^2 - 4(\frac{k}{m}\lambda_i)} = \alpha + i\beta$ en donde α y β son números reales e $i = \sqrt{-1}$. De (3.10), $Re(\mu_{ij}) < 0 (i = 2, \dots, N, j = 1, 2)$ si y solo si $-\frac{b}{m}Re(\lambda_i) < \alpha < \frac{b}{m}Re(\lambda_i)$, lo cual es equivalente a $\alpha^2 < (\frac{b}{m}Re(\lambda_i))^2$. Entonces es suficiente con probar que (3.11) se mantiene si y solo si $\alpha^2 < (\frac{b}{m}Re(\lambda_i))^2$. Es fácil observar que

$$(\frac{b}{m}\lambda_i)^2 - 4(\frac{k}{m}\lambda_i) = (\alpha + i\beta)^2$$

Separando las partes reales e imaginarias obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= (\frac{b}{m})^2 [Re(\lambda_i)^2 - Im(\lambda_i)^2] - 4(\frac{k}{m})Re(\lambda_i) \\ \alpha\beta &= (\frac{b}{m})^2 [Re(\lambda_i)Im(\lambda_i)] - 2(\frac{k}{m})Im(\lambda_i) \end{aligned}$$

Realizando cálculos simples tenemos

$$\alpha^4 - \left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 (Re(\lambda_i)^2 - Im(\lambda_i)^2) - 4\left(\frac{k}{m}\right) Re(\lambda_i) \right] \alpha^2 - Im(\lambda_i)^2 \left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 Re(\lambda_i) - 2\left(\frac{k}{m}\right) \right]^2 = 0$$

Con lo cual es fácil observar que $\alpha^2 < (\frac{b}{m}Re(\lambda_i))^2$ si y solo si (3.11) se mantiene. \square

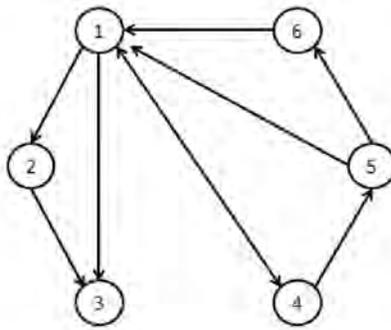


Figura 3.1: Topología de intercambio de información para seis agentes.

Con el Teorema 3.1, se dan condiciones necesarias y suficientes en términos de k , b y la topología de comunicación, bajo las cuales el consenso entre agentes es alcanzado, además, se muestra cual es la solución alcanzada. Ahora ilustraremos este resultado con un ejemplo.

Ejemplo 3.1 Consideremos un grupo de $N = 6$ agentes inerciales idénticos con $m = 10$ y $n = 1$ grados de libertad, esto es, $x \in \mathbb{R}$, es decir, los agentes se desplazan solo en una dimensión. Supongamos que la topología de comunicación entre agentes es la mostrada en la Figura 3.1, con pesos de enlace $\omega_{ij} = 1$. La matriz Laplaciana, asociada con el grafo de la Figura 3.1, es:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo los valores propios de \mathcal{L} diferentes de cero 1, $1.3376 \pm 0.5623i$, 2 y 3.3247. Aplicando el protocolo de consenso (3.4), necesitamos verificar que las condiciones del Teorema 3.1 se cumplen, entonces es posible verificar que la topología de comunicación de la Figura 3.1, contiene un árbol dirigido de expansión (e.g. raíz en 1). Observe que con las ganancias propuestas $k = 1$ y $b = 3$ la condición (3.11) se cumple y, por lo tanto, el consenso idéntico completo es alcanzado (Figura 3.2a). Sin embargo, si elegimos ganancias que no cumplen con (3.11), por ejemplo $k = 1$ y $b = 1$, el consenso no es logrado (Figura 3.2b).

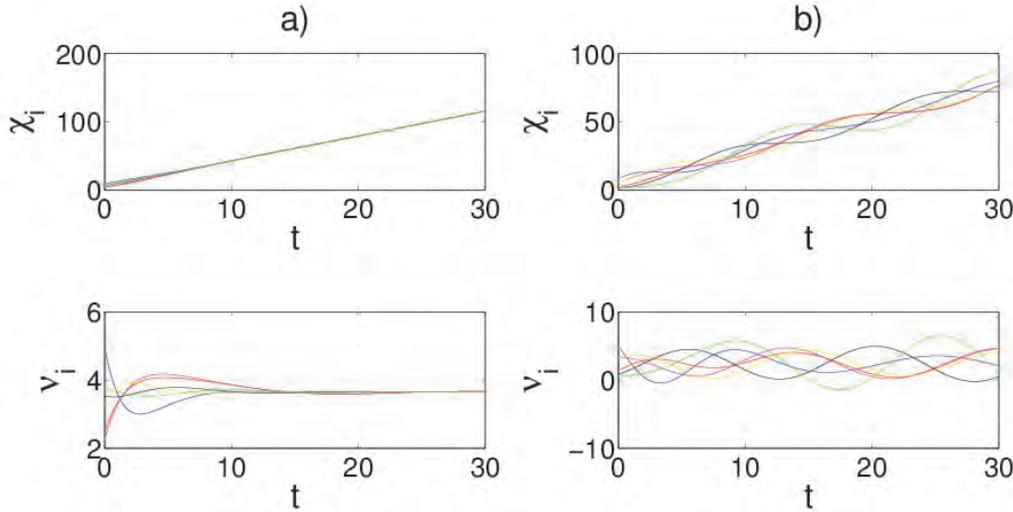


Figura 3.2: Búsqueda del consenso en posición y velocidad; a) ganancias $k = 1$ y $b = 3$ b) ganancias $k = 1$ y $b = 1$, ambos casos con parámetro $m = 10$.

Observación 3.2 Note que si la topología de comunicación es modificada agregando o quitando enlaces, los valores propios de \mathcal{L} serán diferentes, por lo tanto, las ganancias propuestas para una topología de comunicación que cumplen con la condición (3.11), podrían no ser útiles cuando dicha topología es modificada.

Si bien, hasta ahora hemos mostrado condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el consenso idéntico completo es alcanzado, nos interesa investigar el caso en el cual existe un agente maestro, el cual determinara una referencia en posición y velocidad a la cual deben seguir un grupo de agentes. La siguiente sección aborda este problema.

3.2. Consenso con un Agente Maestro

Hasta ahora hemos probado que con el algoritmo (3.4), es posible resolver el problema de consenso entre agentes, observamos que bajo ciertas condiciones los estados de todos los agentes convergen a un valor común. Sin embargo, esta decisión del grupo es inherentemente constante en velocidad debido a que depende de las condiciones iniciales. Esto podría no ser apropiado en algunas aplicaciones en donde existe un valor deseado o un valor de referencia al cual se debe converger. En este capítulo investigaremos dicho problema desde el enfoque de arreglos maestro seguidores.

De igual forma que en la sección 3.1 suponga que existen N agentes inerciales y un agente maestro. Este agente maestro es quien define los valores de referencia en posición y velocidad con los cuales los N agentes deben llegar a un consenso. Este agente maestro tiene dinámica

$$\ddot{x}_{\bar{m}} = f(t, x_{\bar{m}}, \dot{x}_{\bar{m}}) \quad (3.13)$$

Con $x_{\bar{m}} \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua por pedazos y localmente Lipschitz, y puede ser escrito en términos de sus variables de estado como posición y velocidad, $\chi_{\bar{m}} = x_{\bar{m}}$ y $\mathbf{v}_{\bar{m}} = \dot{x}_{\bar{m}}$ respectivamente como

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_{\bar{m}} &= \mathbf{v}_{\bar{m}} \\ \dot{\mathbf{v}}_{\bar{m}} &= f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

El principal objetivo de esta sección es proponer y estudiar algoritmos de consenso que aseguren que cada agente inercial logre llegar a un consenso con un agente maestro que se desplaza a una velocidad constante o variante con el tiempo. Además, supondremos que la información compartida por el maestro está disponible solo para un subgrupo de agentes. Diremos que el problema de consenso con un agente maestro se resuelve cuando

$$|\chi_i - \chi_{\bar{m}}| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}| \rightarrow 0, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty; \quad \forall i \quad (3.15)$$

Note que, en esta sección, suponemos que tanto los agentes seguidores, así como el agente maestro, pueden compartir el mismo espacio. Posteriormente, retiraremos dicha suposición.

3.2.1. Agente Maestro con Velocidad Constante

En esta sección consideraremos el caso en el que el agente maestro se desplaza a una velocidad constante, esto es, $f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) = 0$ en (3.14). Observe que el agente maestro tiene

el comportamiento de un agente inercial aislado y la velocidad constante a la que se desplaza depende de su condición inicial $\mathbf{v}_{\bar{m}}(0)$. Para agentes inerciales con dinámica (3.2), un algoritmo de consenso para el seguimiento de un agente maestro que se desplaza a velocidad constante se da como

$$u_i = -k \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - d_i [k(\chi_i - \chi_{\bar{m}}) + b(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}})], \quad i = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

En donde $d_i > 0$ si el agente i recibe información de la referencia y $d_i = 0$ de lo contrario. Observe que el algoritmo (3.16) es similar a (3.4), en este caso, también se consideran las diferencias entre los estados del agente i y el agente maestro solo si i es capaz de recibir dicha información, esto es, $d_i > 0$. Si definimos el error como $\tilde{\chi}_i = \chi_i - \chi_{\bar{m}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}$ es posible escribir la dinámica del error para cada agente como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\chi}}_i &= \tilde{\mathbf{v}}_i \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i &= -\frac{k}{m} \sum_{j=1}^N (\ell_{ij} + d_i) \tilde{\chi}_j - \frac{b}{m} \sum_{j=1}^N (\ell_{ij} + d_i) \tilde{\mathbf{v}}_j, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sea $\tilde{\chi} = [\tilde{\chi}_1^T, \dots, \tilde{\chi}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$, $\tilde{\mathbf{v}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$, y $\tilde{\xi} = [\tilde{\chi}^T, \tilde{\mathbf{v}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$. La dinámica del error de la red completa es:

$$\dot{\tilde{\xi}} = (\Theta \otimes I_n) \tilde{\xi} \quad (3.18)$$

En donde $\Theta = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -\frac{k}{m} \hat{\mathcal{L}} & -\frac{b}{m} \hat{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, y $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \hat{\mathcal{D}}$ con $\hat{\mathcal{D}} = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$.

Los valores propios de la matriz Θ juegan un rol importante en el análisis de estabilidad de la dinámica de error (3.18). Es posible realizar el mismo razonamiento que derivó en la ecuación (3.10). Sean $\mu_{ij} (i = 1, \dots, N, j = 1, 2)$ y $\hat{\lambda}_i (i = 1, \dots, N)$, los valores propios de la matriz Θ y $\hat{\mathcal{L}}$ respectivamente. Consideraremos que en este caso $\hat{\lambda}_i$ toma el lugar de λ_i de la ecuación (3.10).

En primer lugar, realizaremos las siguientes definiciones:

Definición 3.1 Llamaremos \mathcal{G}^+ al grafo extendido en el cual se considera al agente maestro como el agente $N + 1$ dentro de la red de agentes. Adicionalmente $\mathcal{W}_{N+1} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ y $\mathcal{L}_{N+1} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ son, la matriz de adyacencia y matriz Laplaciana respectivamente, asociadas con \mathcal{G}^+ .

Definición 3.2 [34, 35] Una matriz $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es diagonal dominante si, para todo i , $l_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |l_{ij}|$. Es estrictamente diagonal dominante si todas las desigualdades son estrictas. L es fuertemente diagonal dominante si cuando menos una desigualdad es estricta. L es irreducible diagonal dominante si es irreducible y cuando menos una desigualdad es estricta.

Basados en las definiciones anteriores se tienen los siguientes resultados.

Lema 3.1 [34, 35] Sea $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz estrictamente diagonal dominante o irreducible diagonal dominante. Entonces L es no-singular. Si adicionalmente, todos los elementos de la diagonal de L son números reales positivos, entonces $Re(\lambda_i) > 0$, $1 \leq i \leq N$.

El siguiente resultado presenta condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales Θ es Hurwitz.

Teorema 3.2 Para un sistema de múltiples agentes inerciales idénticos con dinámica (3.2) y protocolo (3.16), y un agente maestro con dinámica (3.14), donde $f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) = 0$. El consenso con un agente maestro es alcanzado si y solo si, la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el maestro como raíz y se mantiene la desigualdad

$$\frac{b^2}{mk} > \max_{1 \leq i \leq N} \frac{Im(\hat{\lambda}_i)^2}{Re(\hat{\lambda}_i) [Re(\hat{\lambda}_i)^2 + Im(\hat{\lambda}_i)^2]} \quad (3.19)$$

En donde $\hat{\lambda}_i$ con $i = 1, \dots, N$ son los valores propios de la matriz $\hat{\mathcal{L}}$.

Prueba: Note que el renglón $N + 1$ de la matriz Laplaciana \mathcal{L}_{N+1} asociada con el grafo \mathcal{G}^+ , es un renglón con todas sus entradas cero, esto debido a que el renglón $N + 1$ está asociado al agente maestro y que el maestro no recibe información de ningún nodo en la red. Sin pérdida de generalidad, podemos reordenar, si es necesario, los nodos en la red de tal forma que \mathcal{L}_{N+1} tome la forma normal de Frobenius [17, 34].

Reescribiendo $\mathcal{L}_{N+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{N \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{1 \times (N+1)} \end{bmatrix}$ note que el último bloque L_{kk} es una matriz cero de dimensión uno asociado con el agente $N + 1$, es decir, el agente maestro y que por el Lema 2.3 todas las sub matrices a lo largo de la diagonal son irreducibles. Adicionalmente, reescribiendo $\mathcal{L}_{N \times (N+1)} = [\bar{\mathcal{L}} \mid d]$ en donde $\bar{\mathcal{L}} = (\bar{l}_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ está dada como $\bar{l}_{ij} = -\omega_{ij}$, $i \neq j$, $\bar{l}_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^{N+1} \omega_{ij}$, y $d \in \mathbb{R}^N$ dado como $d = [-\omega_{1(N+1)}, \dots, -\omega_{N(N+1)}]^T$.

Observe que $d_i = \omega_{i(N+1)}$, por lo tanto $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \hat{D} = \bar{\mathcal{L}}$. Además, note que $\hat{\mathcal{L}}$ es una matriz irreducible diagonal dominante que tiene cuando menos un renglón con suma positiva y que, por construcción, todos los valores en su diagonal son números reales positivos, esto implica que, por el Lema 3.1 sabemos que todos los valores propios de $\hat{\mathcal{L}}$ tienen parte real positiva, esto es, $Re(\hat{\lambda}_i) > 0$.

Ahora solo queda por mostrar que (3.19) se cumplen si y solo si $Re(\mu_{ij}) < 0$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, 2$). De hecho, el resto de esta prueba sigue los mismos pasos realizados en el Teorema 3.1. La ligera diferencia radica en el índice i de μ_{ij} ya que en este caso debemos probar que todos los valores propios de Θ tienen parte real negativa, por lo cual, $i = 1, \dots, N$ y $j = 1, 2$, de forma que obtenemos la misma condición de dicho teorema, pero con $1 \leq i \leq N$. \square

El siguiente ejemplo muestra el seguimiento de la trayectoria de un agente maestro por un grupo de cuatro agentes seguidores, en donde un subgrupo tiene acceso a la información

compartida por dicho agente maestro. Además, se muestra las implicaciones y lo que sucede cuando la topología de comunicación extendida no contiene un árbol de expansión dirigido con el maestro como raíz.

Ejemplo 3.2 Consideremos $N = 4$ agentes inerciales idénticos con $m = 10$ y $n = 1$ grados de libertad. Estudiaremos dos posibles topologías, mostradas en la Figura 3.3. En primer lugar, aplicando el protocolo de consenso (3.16), y topología de comunicación mostrada en la Figura 3.3a, con pesos de enlace iguales $\omega_{ij} = d_i = 1$. La matriz Laplaciana $\mathcal{L}_{(a)}$ y la matriz $\widehat{D}_{(a)}$ son:

$$\mathcal{L}_{(a)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}_{(a)} = \text{diag}(0, 1, 0, 1)$$

Siendo los valores propios (de $\widehat{\mathcal{L}}_{(a)}$) 0.6752 , 1 , y $2.6623 \pm 0.5622i$. Es posible verificar que la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ de la Figura 3.3a contiene un árbol de expansión dirigido con el agente maestro como raíz, y se puede mostrar que con las ganancias $k = 1$ y $b = 3$ se cumple la condición (3.19) del Teorema 3.2. La Figura 3.4a muestra los estados de los agentes llegan a un consenso con referencia constante en velocidad (línea negra), en donde la velocidad (constante) de la referencia es $v_{\bar{m}} = 0,5$. Además en la Figura 3.4b se muestra que para ganancias $k = 1$ y $b = 0.4$ la condición (3.19) no se cumple y por lo tanto no se logra el consenso.

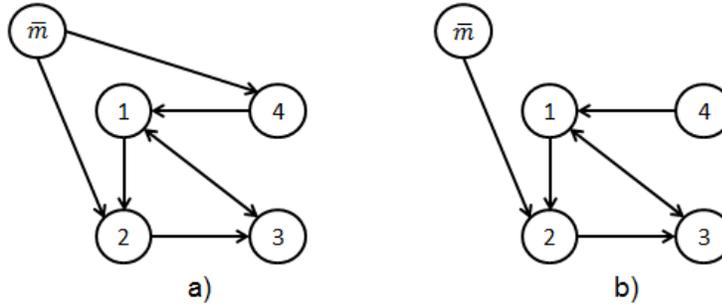


Figura 3.3: Topologías de intercambio de información para cuatro agentes, donde uno o más reciben información del agente maestro.

Si ahora analizamos la topología de comunicación de la Figura 3.3b, podemos observar que la topología de comunicación extendida no contiene un árbol dirigido de expansión con el agente maestro como raíz. La matriz Laplaciana $\mathcal{L}_{(b)}$ y la matriz $\widehat{D}_{(b)}$ de dicha topología son:

$$\mathcal{L}_{(b)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}_{(b)} = \text{diag}(0, 1, 0, 0)$$

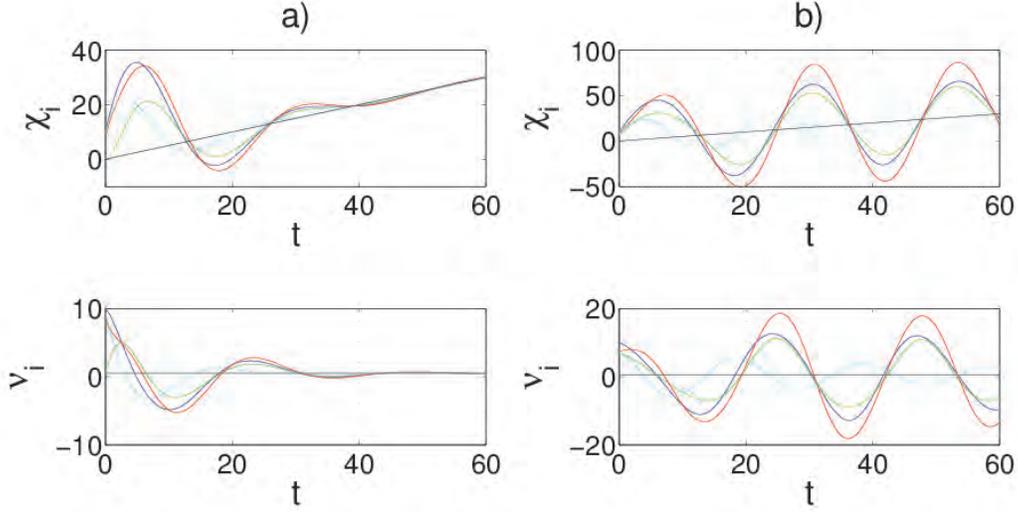


Figura 3.4: Búsqueda del consenso con un agente maestro; a) ganancias $k = 1$ y $b = 3$ b) ganancias $k = 1$ y $b = 0.4$, ambos casos con parámetro $m = 10$ y topología Figura 3.3(a).

Siendo los valores propios (de $\hat{\mathcal{L}}_{(b)}$) 0 , 0.6752 , y $2.6623 \pm 0.5622i$. El hecho que no exista un árbol de expansión dirigido contenido en la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ de la Figura 3.3b, nos indica que cuando menos hay un agente aislado (e.g. agente 4), es decir, un agente que no recibe información de ningún otro agente seguidor y tampoco del agente maestro. Note que este agente aislado no podrá llegar a un consenso con los demás agentes, a menos que la trayectoria que describa sea exactamente la misma que el maestro, lo cual implicaría que el agente maestro y dicho agente aislado tienen las mismas condiciones iniciales, lo cual es una solución trivial. Observe que en la Figura 3.5a el agente 4 tiene las mismas condiciones iniciales que el agente maestro y por lo tanto sus trayectorias son iguales, sin embargo, si la condición inicial de dicho agente es diferente el objetivo de consenso no es alcanzado como lo muestra la Figura 3.5b aun cuando la condición (3.19) del Teorema 3.2 se cumple para $b = 3$, $k = 1$ y parámetro $m = 10$.

Antes de analizar el caso en que el agente maestro se desplaza con una velocidad que varía en el tiempo, primero lustraremos con un ejemplo que el protocolo (3.16) no es suficiente para resolver dicho problema.

Ejemplo 3.3 Consideremos N agentes inerciales idénticos con parámetro $m = 10$, $n = 1$ grados de libertad y topología de comunicación mostrada en la Figura 3.3a con pesos de enlace iguales $\omega_{ij} = d_i = 1$. Como ejemplo, sea $f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}}) = -\sin(t)$. Observe en la Figura 3.6 que aun cuando todas las condiciones del Teorema 3.2 se cumplen, el consenso no es alcanzado aplicando el protocolo (3.16).

Con el ejemplo anterior se ilustra que el protocolo (3.16) no es suficiente para resolver el problema de consenso con un agente maestro cuando la velocidad del mismo varía con

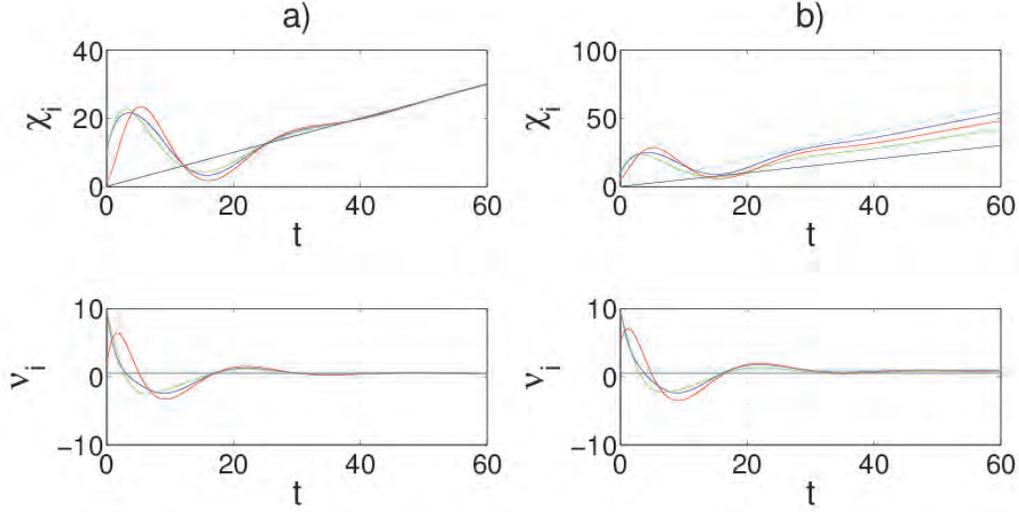


Figura 3.5: Búsqueda del consenso con un agente maestro con ganancias $k = 1$ y $b = 3$, topología de comunicación Figura 3.3(b) y condiciones iniciales del agente 4 como: a) $\chi_0 = 0$ y $v_0 = 0.5$ b) $\chi_0 = 0$ y $v_0 = 1$, ambos casos con condiciones iniciales del agente maestro $\chi_0 = 0$ y $v_0 = 0.5$.

el tiempo. En la siguiente sección se estudia un protocolo propuesto para resolver dicho problema realizando algunas modificaciones al protocolo estudiado hasta ahora.

3.2.2. Agente Maestro con Velocidad Variante

Ahora investigaremos el problema de consenso con un agente maestro que se desplaza a una velocidad variante en el tiempo, es decir, para el caso en que $f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}}) \neq 0$. Un protocolo estudiado en [23] es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 u_i = & -\frac{k}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j) - \frac{b}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (v_i - v_j) + \frac{m}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} \dot{v}_j \\
 & - \frac{d_i}{\eta_i} [k(\chi_i - \chi_{\bar{m}}) + b(v_i - v_{\bar{m}}) - m\dot{v}_{\bar{m}}], \quad i = 1, \dots, N \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

En donde $\eta_i = d_i + \sum_{j=1}^N \omega_{ij}$. Note que en este protocolo no solo retroalimentamos los estados de los agentes vecinos, sino también la aceleración de dichos agentes, de igual forma se retroalimenta la aceleración del agente maestro, sólo si el agente i recibe información del mismo. Recuerde que la dinámica en lazo cerrado del problema de consenso con un agente maestro con velocidad constante (3.18), está dada en función de la matriz $\hat{\mathcal{L}}$. Con esto en mente, es posible proponer el protocolo (3.20), con el objetivo de que, la dinámica del error en lazo cerrado, cuando el agente maestro se desplaza a velocidad variante, quede también en términos de $\hat{\mathcal{L}}$. Con lo cual, es necesario definir el valor de corrección η_i .

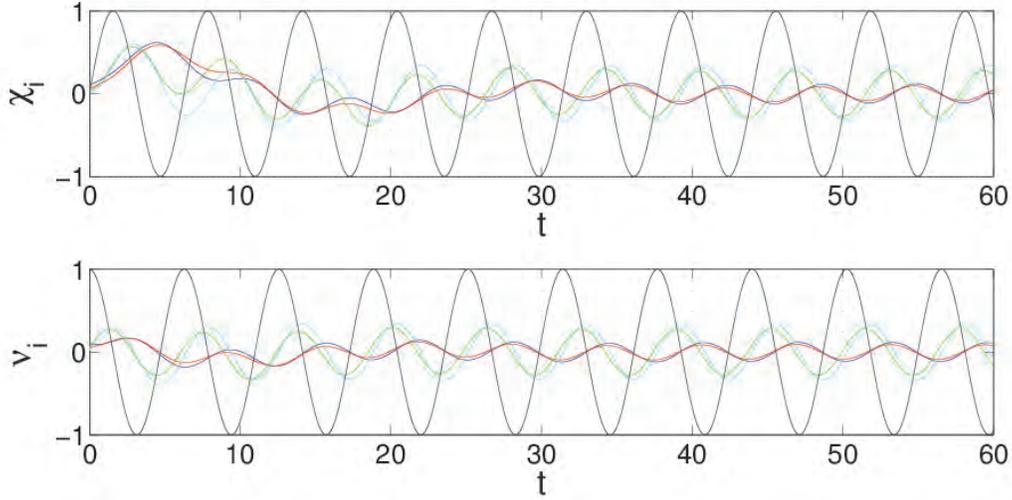


Figura 3.6: Búsqueda del consenso con un agente maestro con protocolo (3.16), parámetro $m = 10$ y $f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}}) = -\sin(t)$ con ganancias $k = 1$, $b = 3$ y topología Figura 3.3(a).

Si definimos el error en posición y velocidad como $\tilde{\chi}_i = \chi_i - \chi_{\bar{m}}$ y $\tilde{v}_i = v_i - v_{\bar{m}}$ respectivamente es posible escribir la dinámica del error para cada agente como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\chi}}_i &= \tilde{v}_i, \quad i = 1, \dots, N \\ \dot{\tilde{v}}_i &= -\frac{k}{m\eta_i} \sum_{j=1}^N (\ell_{ij} + d_i) \tilde{\chi}_j - \frac{b}{m\eta_i} \sum_{j=1}^N (\ell_{ij} + d_i) \tilde{v}_j + \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} \dot{\tilde{v}}_j \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sea $\tilde{\chi} = [\tilde{\chi}_1^T, \dots, \tilde{\chi}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ y $\tilde{v} = [\tilde{v}_1^T, \dots, \tilde{v}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$. La dinámica del error de la red completa es:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\chi}} &= \tilde{v}, \\ (\hat{\mathcal{L}} \otimes I_n) \dot{\tilde{v}} &= -\frac{k}{m} (\hat{\mathcal{L}} \otimes I_n) \tilde{\chi} - \frac{b}{m} (\hat{\mathcal{L}} \otimes I_n) \tilde{v} \end{aligned} \quad (3.22)$$

El siguiente resultado muestra condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el consenso con un agente maestro (3.26) con velocidad variante en el tiempo es alcanzado.

Teorema 3.3 *Para un sistema de múltiples agentes inerciales idénticos con dinámica (3.2) y protocolo (3.20), y un agente maestro con dinámica (3.14), donde $f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}}) \neq 0$. El consenso con un agente maestro es alcanzado si y solo si, la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el maestro como raíz.*

Prueba: En primer lugar note que, si el agente maestro es la raíz de un árbol de expansión dirigido contenido en \mathcal{G}^+ , para ningún agente η_i es igual a cero, con $i = 1, \dots, N$, por

lo tanto, el protocolo (3.20) está bien definido.

Si ahora seguimos los pasos del Teorema 3.2, notamos que, como indica el Lema 3.1, la matriz $\widehat{\mathcal{L}}$ no solo tiene todos sus valores propios con parte real positiva, sino que también es no singular. Esto nos señala que $\widehat{\mathcal{L}}$ es una matriz invertible si \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido. De tal forma que podemos escribir (3.22) como

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\chi}} &= \tilde{\mathbf{v}}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= -\frac{k}{m}(I_N \otimes I_n)\tilde{\chi} - \frac{b}{m}(I_N \otimes I_n)\tilde{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

O en una forma más compacta como

$$\dot{\xi} = (\Omega \otimes I_n)\xi$$

Con $\xi = [\tilde{\chi}^T, \tilde{\mathbf{v}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$ y $\Omega = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -\frac{k}{m}I_N & -\frac{b}{m}I_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$. Ahora debemos probar que la matriz Ω es Hurwitz. Sean μ los valores propios de Ω . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\det(\mu I_{2N} - \Omega) &= \det \begin{pmatrix} \mu I_N & -I_N \\ \frac{k}{m}I_N & \mu I_N + \frac{b}{m}I_N \end{pmatrix} \\ &= \mu^2 + \mu \frac{b}{m} + \frac{k}{m}\end{aligned}$$

Por lo tanto, es necesario analizar las raíces del polinomio característico de Ω , entonces

$$\mu_i = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{(\frac{b}{m})^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

Es fácil observar que para cualquier $k, b > 0$ los valores propios de Ω tienen parte real negativa y por lo tanto es Hurwitz. Lo cual implica que el consenso con un agente maestro se logra. \square

Ahora ilustraremos este resultado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4 Consideremos N agentes inerciales idénticos con parámetro $m = 10$, $n = 1$ grados de libertad y topología de comunicación mostrada en la Figura 3.3a con pesos de enlace iguales $\omega_{ij} = d_i = 1$. Nuevamente como ejemplo, sea $f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) = -\sin(t)$. La matriz Laplaciana \mathcal{L} y la matriz \widehat{D} son:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{D} = \text{diag}(0, 1, 0, 1)$$

Del Teorema 3.3 podemos observar que la estabilidad del error no depende de los valores propios de $\widehat{\mathcal{L}}$, sino que, solo debemos analizar si la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+

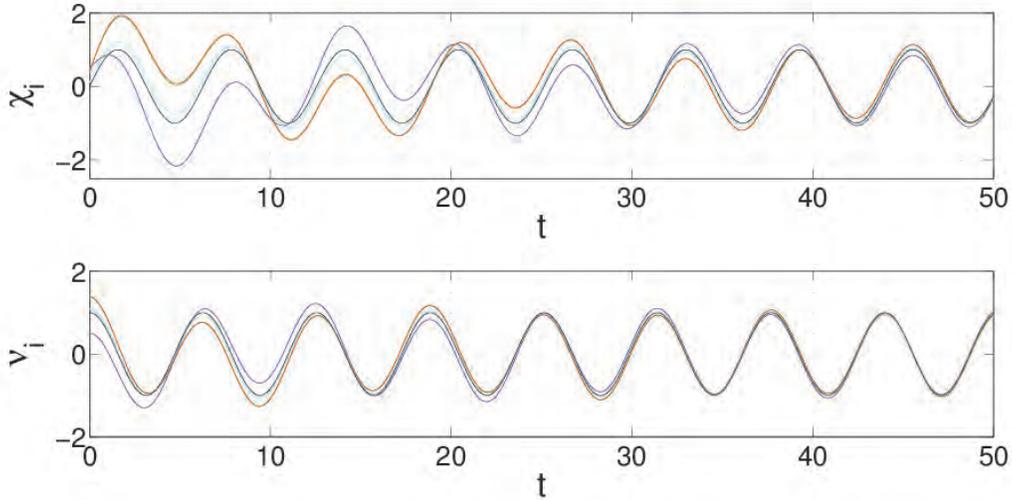


Figura 3.7: Posición y velocidad de múltiples agentes inerciales idénticos con parámetros $m = 10$, ganancias $b = 1$ y $k = 1$ y pesos de enlace $\omega_{ij} = d_i = 1$ siguiendo un agente maestro con $f(t, \chi_m, v_m) = -\sin(t)$.

contiene un árbol dirigido de expansión con la referencia como raíz. Es claro que la topología de la Figura 3.3a cumple con dicha condición. En la Figura 3.7 podemos observar que con el protocolo (3.20) el grupo de agentes seguidores llegan a un consenso con un agente maestro (línea negra) cuando este se desliza a una velocidad variante.

En la siguiente sección se realizan modificaciones a los protocolos (3.4), (3.16) y (3.20) para garantizar que el grupo de agentes mantengan desviaciones entre sus estados.

3.3. Extensión a Desviaciones Relativas al Estado

Hasta ahora, hemos resuelto los problemas de consenso entre agentes (3.3) y consenso con un agente maestro (3.26). Sin embargo, dadas las definiciones de consenso como (3.3) y (3.26), éstas implican que el grupo de agentes asintóticamente ocupan el mismo espacio, esto resulta físicamente imposible y se vuelve un problema cuando se busca trasladar estos resultados a una aplicación real. Es por esto que surge la necesidad de extender estos resultados teóricos para garantizar que el grupo de agentes mantengan diferencias entre sus estados, principalmente entre sus posiciones. En este mismo sentido, también en términos de una posible aplicación, se podría buscar que un grupo de agentes mantengan una formación mientras llegan a un consenso, o mientras siguen una referencia en posición determinada por un agente maestro.

En esta sección, retiraremos las suposiciones realizadas en las secciones anteriores, es decir, ya no consideraremos que sea posible que los agentes ocupen el mismo espacio. Es por este motivo, que resulta necesario modificar los protocolos propuestos anteriormente,

para garantizar una desviación de estados deseada entre las posiciones (y potencialmente velocidades) de los agentes inerciales y la posición del maestro (en el caso correspondiente).

3.3.1. Consenso Entre Agentes con Desviaciones de Estados

Ahora, el problema a resolver consiste en, garantizar que las posiciones (y posiblemente velocidades), convergen a un valor deseado de separación entre agentes. Entonces, la nueva definición de consenso que buscaremos resolver es:

$$|\chi_i - \chi_j| \rightarrow \Delta_{ij} \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j| \rightarrow \dot{\Delta}_{ij}, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty; \quad \forall i, j \quad (3.23)$$

En donde Δ_{ij} y $\dot{\Delta}_{ij}$ denotan los valores de separación deseada entre la posición y velocidad, respectivamente, del agente i y el agente j . Para garantizar la convergencia a dichas diferencias el protocolo de consenso (3.4) puede ser modificado de la siguiente forma:

$$u_i = m\ddot{\delta}_i - k \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\chi_i - \chi_j - (\delta_i - \delta_j)) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j - (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j)), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.24)$$

En donde $\Delta_{ij} \triangleq \delta_i - \delta_j, \forall i \neq j$, denota la separación deseada en posición y $\dot{\Delta}_{ij} \triangleq \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j, \forall i \neq j$ en velocidad. Observe que el protocolo (3.24) puede ser utilizado para resolver un problema de control de formación, en donde se definen solo desviaciones en posición. Sin embargo, este protocolo también permite definir diferencias en velocidad. Note que el protocolo (3.4) corresponde al caso en que $\Delta_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Teorema 3.4 *Con el protocolo de consenso (3.24) $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$ asintóticamente si y solo si, la topología de comunicación G contiene un árbol dirigido de expansión y*

$$\frac{b^2}{mk} > \max_{2 \leq i \leq N} \frac{Im(\lambda_i)^2}{Re(\lambda_i) [Re(\lambda_i)^2 + Im(\lambda_i)^2]} \quad (3.25)$$

En donde λ_i con $i = 2, \dots, N$ son los valores propios diferentes de cero de la matriz Laplaciana \mathcal{L} . Además, si el consenso idéntico completo es alcanzado, $\|(\mathbf{v}_i - \dot{\delta}_i) - \sum_{j=1}^N p_j \mathbf{v}_j(0)\| \rightarrow 0$ y $\|\chi_i - \delta_i - \sum_{j=1}^N p_j \chi_j(0)\| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, en donde p es el único vector propio izquierdo de \mathcal{L} asociado con el valor propio 0 satisfaciendo $p^T \mathbf{1}_N = 1$.

Prueba: Con el protocolo de consenso (3.24), es posible escribir (3.7) como:

$$\hat{\Psi} = (\Xi \otimes I_n) \hat{\Psi}$$

En donde $\hat{\Psi} = [\hat{\chi}^T, \hat{\mathbf{v}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$, con $\hat{\chi} = [\hat{\chi}_1^T, \dots, \hat{\chi}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$, $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{\mathbf{v}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{v}}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$, y los estados $\hat{\chi}_i = \chi_i - \delta_i$ y $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \dot{\delta}_i$. La matriz Ξ permanece igual que en la ecuación (3.7).

Ahora, siguiendo los pasos del Teorema 3.1 sabemos que $\hat{\chi}_i \rightarrow \hat{\chi}_j$ y $\hat{\mathbf{v}}_i \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_j$ asintóticamente si y solo si \mathcal{G} contiene un árbol dirigido de expansión y (3.25) se cumple. El resto de la prueba sigue el hecho que $\hat{\chi}_i \rightarrow \hat{\chi}_j$ y $\hat{\mathbf{v}}_i \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_j$ es equivalente a $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y

$v_i - v_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$ respectivamente. □

Ilustraremos este resultado con un ejemplo.

Ejemplo 3.5 Para este ejemplo consideraremos los mismos parámetros, ganancias y topología de comunicación del Ejemplo 3.1, en este caso solo queda por definir las diferencias de estados que buscamos entre agentes. Supongamos que buscamos mantener una separación entre las posiciones de los agentes, lo cual es similar al problema de control de formación, en donde el grupo de agentes se desplazan con la misma velocidad mientras mantienen algún tipo de alineación en términos de sus posiciones. En este ejemplo, buscamos mantener una formación en línea, de tal forma que definimos las desviaciones en posición como $\delta_1 = 25$, $\delta_2 = -25$, $\delta_3 = 15$, $\delta_4 = -15$, $\delta_5 = 5$ y $\delta_6 = -5$. Recuerde que en el Ejemplo 3.1 se planteó que los agentes tienen solo 1 grado de libertad. El objetivo de definir estas desviaciones es que los agentes mantengan una diferencia de 10 metros entre sus posiciones.

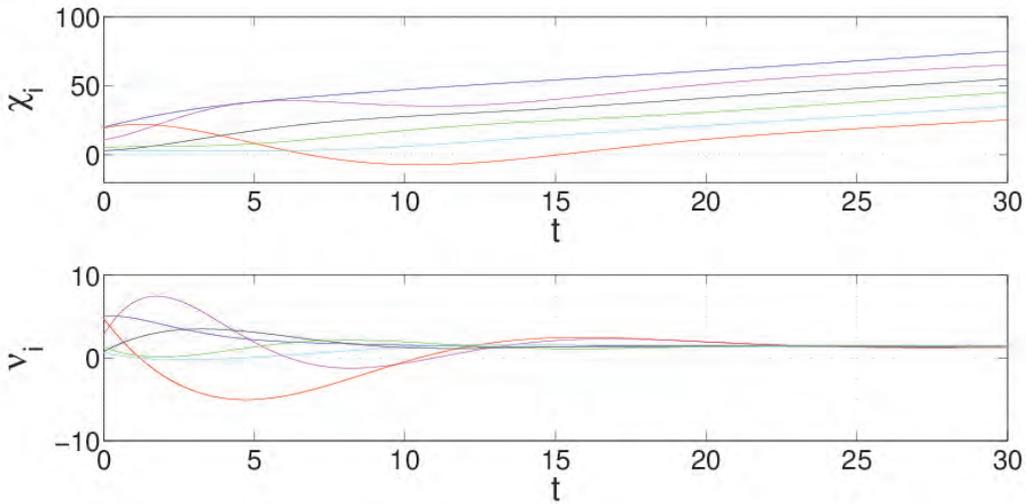


Figura 3.8: Consenso entre agentes inerciales idénticos con desviación de estados en posición.

Debido a que se busca mantener una desviación constante en posición, las desviaciones en velocidad son $\dot{\delta}_i = 0, \forall i$. La Figura 3.8 muestra como los agentes mantienen dicha formación mientras se mueven con la misma velocidad.

3.3.2. Consenso con un Agente Maestro a Velocidad Constante y Desviaciones de Estados

Ahora consideraremos el caso en el que se busca garantizar una desviación de estados cuando se sigue a una referencia en posición determinada por un agente maestro que se desplaza a una velocidad constante, es decir, el problema de la sección 3.2.1 con desviaciones de estados. En esta situación se desea mantener una diferencia de estados Δ_{ij} entre agentes y una diferencia $\Delta_{i\bar{m}}$ con el maestro (en el caso que $d_i > 0$), esto es:

$$|\chi_i - \chi_{\bar{m}}| \rightarrow \Delta_{i\bar{m}} \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}| \rightarrow \dot{\Delta}_{i\bar{m}}, \quad \text{conforme} \quad t \rightarrow \infty; \quad \forall i \quad (3.26)$$

En donde, $\Delta_{i\bar{m}}$ y $\dot{\Delta}_{i\bar{m}}$, denotan el valor de separación deseada entre la posición y velocidad, respectivamente, del agente i con respecto al agente maestro. Dada esta situación, es posible modificar el protocolo (3.18) con este objetivo

$$u_i = m\ddot{\delta}_i - k \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\chi_i - \chi_j - (\delta_i - \delta_j)) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j - (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j)) - d_i \left[k(\chi_i - \delta_i - \chi_{\bar{m}}) + b(\mathbf{v}_i - \dot{\delta}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}) \right], \quad i = 1, \dots, N \quad (3.27)$$

En donde $\Delta_{ij} \triangleq \delta_i - \delta_j, \forall i \neq j$, denota la separación deseada entre la posición de los agentes seguidores y el termino $\Delta_{i\bar{m}} \triangleq \delta_i$ define la separación deseada entre la posición del agente i y el maestro en caso que el agente i reciba información del maestro.

Observe que el protocolo (3.27) también permite definir desviaciones de estados tanto en posición como en velocidad y que dicha desviación puede variar con el tiempo. Note que en este caso, los agentes seguidores mantienen una geometría de formación mientras el centroide de dicha formación sigue una referencia en posición determinada por el agente maestro.

Teorema 3.5 *Con el protocolo de consenso (3.27) $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$, además, $\chi_i \rightarrow \chi_{\bar{m}} + \delta_i$ y $\mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_{\bar{m}} + \dot{\delta}_i$ asintóticamente si y solo si, la topología de comunicación G^+ contiene un árbol dirigido de expansión con el agente maestro como raíz y*

$$\frac{b^2}{mk} > \max_{1 \leq i \leq N} \frac{Im(\hat{\lambda}_i)^2}{Re(\hat{\lambda}_i) \left[Re(\hat{\lambda}_i)^2 + Im(\hat{\lambda}_i)^2 \right]} \quad (3.28)$$

En donde $\hat{\lambda}_i$ con $i = 1, \dots, N$ son los valores propios de la matriz \hat{L} .

Prueba: En primer lugar definimos los estados de los agentes como $\hat{\chi}_i = \chi_i - \delta_i$ y $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \dot{\delta}_i$. Posteriormente definimos el error en términos de los nuevos estados como $\tilde{\chi}_i = \hat{\chi}_i - \chi_{\bar{m}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}$. La dinámica del error tiene la misma forma que (3.18) con las nuevas definiciones. Lo que sigue en esta prueba, son los pasos realizados en la demostración del Teorema 3.2. en donde se analizan los valores propios de la matriz Θ y que deriva en la condición (3.28).

El resto de la prueba sigue el hecho que $\hat{\chi}_i \rightarrow \chi_{\bar{m}}$ y $\hat{\mathbf{v}}_i \rightarrow \mathbf{v}_{\bar{m}}$, lo cual es equivalente a $\chi_i \rightarrow \chi_{\bar{m}} + \delta_i$ y $\mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_{\bar{m}} + \dot{\delta}_i$ respectivamente, además, $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$. \square

Ilustraremos este resultado con un ejemplo más.

Ejemplo 3.6 En este ejemplo, consideraremos los mismos parámetros, ganancias y topología de comunicación (Figura 3.3a) del Ejemplo 3.2. Sin embargo, ahora supondremos que los agentes inerciales (seguidores y maestro) se desplazan en un plano, es decir, tienen dos grados de libertad, esto es $x_i, u_i, x_{\bar{m}} \in \mathbb{R}^2$. Además, buscamos que los agentes seguidores mantengan una geometría de formación en forma de diamante mientras siguen la referencia en posición determinada por el agente maestro. Note que para mantener dicha formación, las velocidades de los seguidores deben igualarse a la del agente maestro y por lo tanto la desviación en términos de velocidad es $\dot{\delta}_i = 0, \forall i$. Sean las desviaciones en posición $\delta_1 = [0 \ 2]^T$, $\delta_2 = [-2 \ 0]^T$, $\delta_3 = [0 \ -2]^T$ y $\delta_4 = [2 \ 0]^T$.

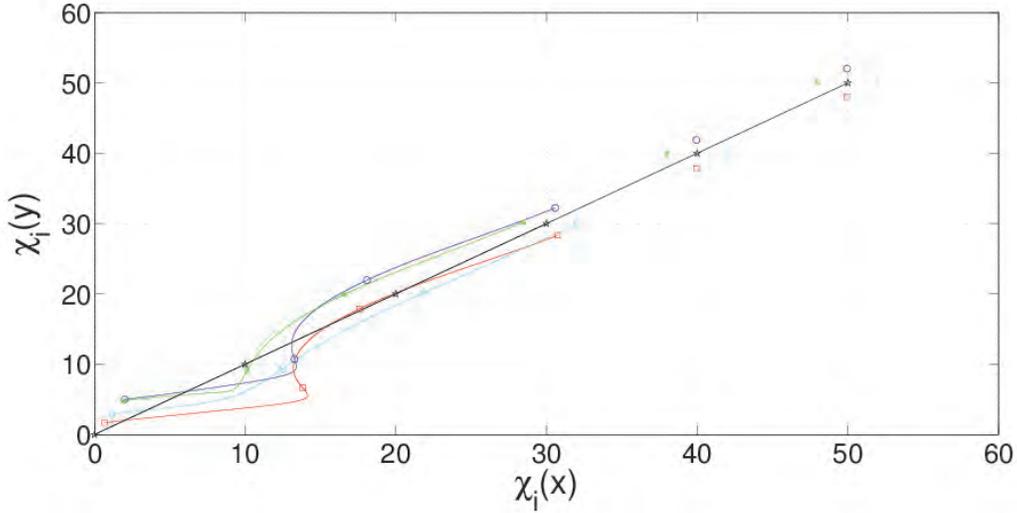


Figura 3.9: Geometría de la formación de agentes seguidores con protocolo (3.27) siguiendo una referencia determinada por un agente maestro con velocidad constante.

Observe en la Figura 3.9 que los agentes seguidores mantienen la formación deseada mientras siguen la trayectoria en posición descrita por el agente maestro.

3.3.3. Consenso con un Agente Maestro a Velocidad Variante y Desviaciones de Estados

De igual forma que en las secciones anteriores, el protocolo (3.20) puede ser modificado de forma que los agentes seguidores sean capaces de seguir las trayectorias de un agente maestro cuando este se desplaza con una velocidad que puede variar con el tiempo.

$$\begin{aligned}
 u_i = & m\ddot{\delta}_i - \frac{k}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j - (\delta_i - \delta_j)) - \frac{b}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (v_i - v_j - (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j)) \\
 & + \frac{m}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\dot{v}_j - \ddot{\delta}_j) - \frac{d_i}{\eta_i} \left[k(\chi_i - \delta_i - \chi_{\bar{m}}) + b(v_i - \dot{\delta}_i - v_{\bar{m}}) - m\dot{v}_{\bar{m}} \right], \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

En donde, además de los términos relacionados con las desviaciones discutidos anteriormente, note que, como se había discutido con anterioridad, la desviación en posición y velocidad puede variar con el tiempo y que, por lo tanto, en el protocolo (3.29) también es considerada la aceleración de la desviación tanto del agente i como del j . Con respecto a este protocolo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.6 *Para un sistema de múltiples agentes inerciales idénticos con dinámica (3.2) y protocolo (3.29), y un agente maestro con dinámica (3.14), donde $f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) \neq 0$. $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$, $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$, además, $\chi_i \rightarrow \chi_r + \delta_i$ y $\mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_r + \dot{\delta}_i$ asintóticamente si y solo si, la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ contiene un árbol dirigido de expansión con el agente maestro como raíz.*

Prueba: De igual forma que en la prueba del teorema anterior, en primer lugar definimos los estados de los agentes como $\hat{\chi}_i = \chi_i - \delta_i$ y $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \dot{\delta}_i$. Posteriormente definimos el error en términos de los nuevos estados como $\tilde{\chi}_i = \hat{\chi}_i - \chi_{\bar{m}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}$. La dinámica del error tiene la misma forma que (3.22) con las nuevas definiciones. Los pasos siguientes son los realizados en la prueba del Teorema 3.3.

El resto de la prueba sigue el hecho que $\hat{\chi}_i \rightarrow \chi_{\bar{m}}$ y $\hat{\mathbf{v}}_i \rightarrow \mathbf{v}_{\bar{m}}$, lo cual es equivalente a $\chi_i \rightarrow \chi_{\bar{m}} + \delta_i$ y $\mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_{\bar{m}} + \dot{\delta}_i$ respectivamente, además, $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$. \square

Ilustraremos este resultado con un ejemplo.

Ejemplo 3.7 Para este ejemplo, consideremos los mismos parámetros y topología de comunicación utilizadas en el Ejemplo 3.4, ahora con ganancias $b, k = 10$. En este caso en particular, consideraremos que los agentes tienen $n = 2$ grados de libertad. Además, buscamos que los agentes mantengan una formación en diamante alrededor de la posición del agente maestro mientras siguen su trayectoria. Las desviaciones necesarias para mantener dicha formación son $\delta_1 = [0 \ 0,2]^T$, $\delta_2 = [-0,2 \ 0]^T$, $\delta_3 = [0 \ -0,2]^T$ y $\delta_4 = [0,2 \ 0]^T$.

Debido a que se busca mantener una desviación constante en posición, las desviaciones en velocidad son $\dot{\delta}_i = [0 \ 0]^T, \forall i$. La Figura muestra como los agentes mantienen dicha formación mientras siguen una referencia basada en modelo en donde $f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) = [-0,05 \sin(0,1t) \ -0,05 \cos(0,1t)]^T$.

Hasta ahora, en este capítulo, se han desarrollado protocolos de consenso para resolver los problemas de consenso entre agentes y consenso con un agente maestro. Sin embargo, al inicio del mismo, se realizó una fuerte suposición, esta fue, que los agentes inerciales tienen masas iguales. Los resultados obtenidos hasta el momento muestran condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales los problemas planteados son resueltos para agentes inerciales idénticos. No obstante, como se mencionó anteriormente, Spong en [15, 16], mostro que, cuando se consideran masas diferentes para cada agente, el comportamiento colectivo del grupo podría ser inestable. Con lo cual, es necesario analizar dicho caso. Además, pensando en posibles aplicaciones, sabemos que un par de agentes, por muy similares que parezcan,

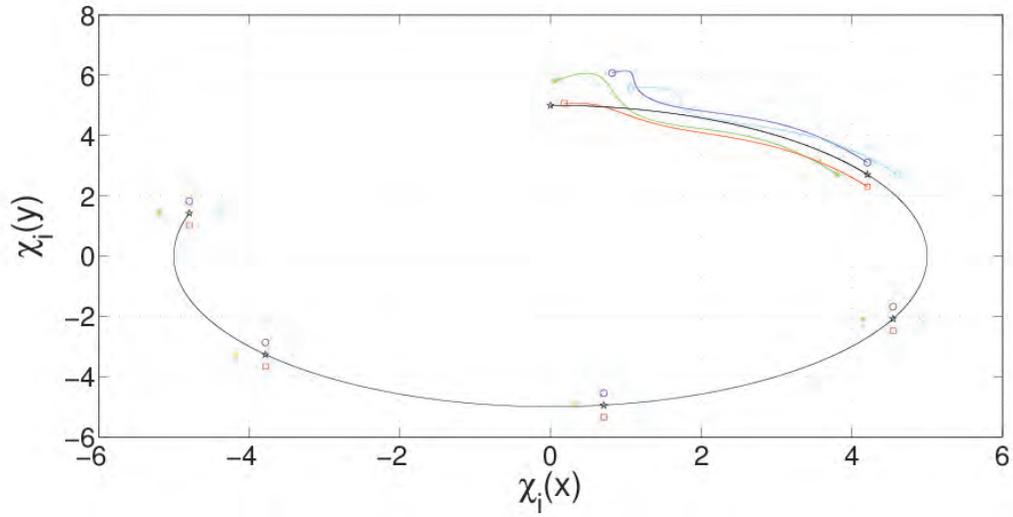


Figura 3.10: Geometría de la formación de agentes seguidores con protocolo (3.29) siguiendo una referencia determinada por un agente maestro con velocidad variante.

tienen ciertas diferencias entre ellos, una de estas, podría ser la masa.

En el siguiente capítulo, se analiza el problema de consenso entre agentes y consenso con un agente maestro en agentes inerciales con masas diferentes.

Capítulo 4

Agentes Inerciales con Masas Diferentes

A lo largo de este capítulo, retomaremos los problemas de consenso tratados en el capítulo anterior. Sin embargo, ahora consideraremos que los agentes tienen masas diferentes, esto es, $m_i > 0 \forall i = 1, \dots, N$. Seguiremos suponiendo que tenemos un grupo de N agentes inerciales con modelo:

$$m_i \ddot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

En donde $x_i \in \mathbb{R}^n$ denota la posición del agente, $m_i > 0$ es la inercia, y $u_i \in \mathbb{R}^n$ es la entrada del sistema. Si definimos las variables de estado como posición $\chi_i = x_i$ y velocidad $v_i = \dot{x}_i$, es posible escribir el modelo de agente en términos de sus estados

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i &= v_i \\ m_i \dot{v}_i &= u_i, \quad i = 1, \dots, N \\ y_i &= [\chi_i^T \ v_i^T]^T, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.2)$$

En donde y_i , denota las variables medibles del agente i . Además, supondremos que la topología de comunicación esta previamente dada y que, la cantidad de agentes y enlaces no cambia, tampoco lo hacen la dirección de los mismos y que no existen retardos de comunicación.

4.1. Consenso Entre Agentes

En esta sección, en primer lugar (y de la misma forma que en la sección 3.1), supondremos que el modelo de agente (4.2), es un modelo ideal, es decir, supondremos que los agentes pueden compartir la misma posición (esta suposición se retirará más adelante). Por tal motivo, el problema de consenso entre agentes a resolver es:

$$|\chi_i - \chi_j| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |v_i - v_j| \rightarrow 0, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty; \quad \forall i, j \quad (4.3)$$

Note que, el objetivo es, que los errores entre los estados de todos los agentes en la red, sea asintóticamente cero. Con este objetivo, de manera natural, surge la idea de retroalimentar los errores entre los estados de un agente y sus vecinos en la red. Es por esto, y tomando

en cuenta las restricciones previamente mencionadas, que se puede proponer el protocolo de consenso como:

$$u_i = -k \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\chi_i - \chi_j) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.4)$$

En donde $b, k > 0$ son ganancias constantes a diseñar, $\omega_{ij} > 0$ si existe el enlace (j, i) , es decir, el agente i recibe información del agente j y $\omega_{ii} = 0$ (Note que, aun cuando estamos considerando agentes con masas diferentes, estaremos utilizando el mismo protocolo estudiado en la sección 3.1).

La dinámica en lazo cerrado del modelo de agente inercial (4.2) y el protocolo de consenso (4.4) es

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i &= \mathbf{v}_i \\ m_i \dot{\mathbf{v}}_i &= -k \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\chi_i - \chi_j) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.5)$$

Tomando en cuenta la observación 3.1, la dinámica (4.5) puede ser escrita de forma equivalente como:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_i &= \mathbf{v}_i \\ m_i \dot{\mathbf{v}}_i &= -k \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \chi_j - b \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \mathbf{v}_j, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.6)$$

Con ℓ_{ij} como el ij -ésimo elemento de la matriz Laplaciana $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Sea $\boldsymbol{\chi} = [\chi_1^T, \dots, \chi_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ y $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ es posible escribir (4.6) como

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\chi}} &= \mathbf{v} \\ (M \otimes I_n) \dot{\mathbf{v}} &= -k(\mathcal{L} \otimes I_n) \boldsymbol{\chi} - b(\mathcal{L} \otimes I_n) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.7)$$

En donde $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Observación 4.1 Note que M es una matriz diagonal con todos sus elementos diferentes de cero y que, por lo tanto, sabemos que existe su inversa, más aun, sabemos que dicha inversa tiene la forma $M^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_N})$. Además, observe que podría pensarse que $M^{-1} \mathcal{L}$ es una matriz laplaciana de fuerza de acoplamiento por unidad de masa del agente, esto es, los pesos de enlace de entrada del agente i , estará siendo divididos por el valor de la masa de dicho agente. Para mostrar esto definiremos dicha matriz. Sea la matriz $\Gamma = M^{-1} \mathcal{L} = (\gamma_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ como

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij}, \quad \gamma_{ij} = -\frac{\omega_{ij}}{m_i}, i \neq j \quad (4.8)$$

Puede observarse que Γ cumple la propiedad (2.8). Más aún, tiene las mismas propiedades mostradas por el Lema 2.1 y Lema 2.2.

Teniendo lo anterior en mente, sea $\Psi = [\chi^T, \mathbf{v}^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$, note que es posible escribir la dinámica (4.7) como

$$\dot{\Psi} = (\Upsilon \otimes I_n)\Psi \quad (4.9)$$

En donde $\Upsilon = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -k\Gamma & -b\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, además, I_n y I_N denotan la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y $N \times N$ respectivamente, así como 0_N denota un matriz de ceros de tamaño $N \times N$, adicionalmente \otimes denota el producto de Kronecker.

Note que es posible aplicar el mismo razonamiento realizado en la Sección 3.1 con respecto a el análisis de convergencia del sistema lineal (4.6). De hecho, si denotamos a $\mu_{ij}(i = 1, \dots, N, j = 1, 2)$ y $\lambda_i(i = 1, \dots, N)$ como los valores propios de Υ y Γ respectivamente, el polinomio característico de Υ estará determinado ahora de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \det(\mu I_{2N} - \Upsilon) &= \det \begin{pmatrix} \mu I_N & -I_N \\ k\Gamma & \mu I_N + b\Gamma \end{pmatrix} \\ &= \det(\mu^2 I_N + (k + b\mu)\Gamma) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_{i,1} &= \frac{-b\lambda_i + \sqrt{(b\lambda_i)^2 - 4(k\lambda_i)}}{2} \\ \mu_{i,2} &= \frac{-b\lambda_i - \sqrt{(b\lambda_i)^2 - 4(k\lambda_i)}}{2}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.10)$$

De este análisis surge un resultado similar al Teorema 3.1. El siguiente teorema muestra condiciones necesarias y suficientes con las cuales el consenso idéntico completo es alcanzado.

Teorema 4.1 *Consenso idéntico completo, para un sistema de múltiples agente inerciales (4.9) con protocolo (4.4), puede ser alcanzado si y solo si, la topología de comunicación \mathcal{G} contiene un árbol dirigido de expansión y*

$$\frac{b^2}{k} > \max_{2 \leq i \leq N} \frac{\text{Im}(\lambda_i)^2}{\text{Re}(\lambda_i) [\text{Re}(\lambda_i)^2 + \text{Im}(\lambda_i)^2]} \quad (4.11)$$

En donde λ_i con $i = 2, \dots, N$ son los valores propios diferentes de cero de la matriz Γ . Además, si el consenso idéntico completo es alcanzado, $\|\mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^N p_j \mathbf{v}_j(0)\| \rightarrow 0$ y $\|\chi_i - \sum_{j=1}^N p_j \chi_j(0)\| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, en donde p es el único vector propio izquierdo de Γ asociado con el valor propio 0 satisfaciendo $p^T \mathbf{1}_N = 1$.

Prueba: La estructura de esta prueba está diseñada de la siguiente forma; En primer lugar probaremos que el consenso es alcanzado asintóticamente, si y solo si, Υ tiene exactamente dos valores propios cero y todos los demás valores propios tienen parte real negativa (Lema 4.1 en [23]). En segundo lugar daremos condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales se cumple lo anterior mencionado, esto es, se dan condiciones sobre la topología de comunicación para asegurar que Υ tenga solo dos valores propios cero y condiciones sobre b y k con las cuales se asegura que el resto de valores propios tienen parte real negativa.

(Suficiencia) En primer lugar mostraremos que el valor propio cero de Υ tiene multiplicad geométrica igual a uno, cuando Υ tiene exactamente dos valores propios cero. Sea $q = [q_a^T, q_b^T]^T$, en donde $q_a, q_b \in \mathbb{R}^N$, es un vector propio de Υ asociado con el valor propio cero, entonces sabemos que

$$\Upsilon q = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & I_N \\ -k\Gamma & -b\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N \end{bmatrix}$$

Lo cual implica que $q_b = \mathbf{0}_N$ y $-k\Gamma q_a = \mathbf{0}_N$, donde $\mathbf{0}_N$ denota el $N \times 1$ vector de ceros, esto es, q_a es un vector propio de $-\Gamma$ asociado con el valor propio cero de $-\Gamma$. Debido a que Υ tiene exactamente dos valores propios igual a cero, sabemos por (4.10) que $-\Gamma$ tiene exactamente un valor propio cero. Por lo cual, vemos que $-\Gamma$ tiene un solo vector propio linealmente independiente q_a asociado con el valor propio cero, lo cual implica que Υ tiene un solo vector propio linealmente independiente $q = [q_a^T, \mathbf{0}_N^T]^T$ asociado con el valor propio cero, esto es, el valor propio cero de Υ tiene multiplicad algebraica igual a dos pero multiplicad geométrica igual a uno.

Note que Υ puede ser escrito en su forma canónica de Jordan como

$$\begin{aligned} \Upsilon &= PJP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \zeta_1 & \dots & \zeta_{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times (2N-2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (2N-2)} \\ \mathbf{0}_{1 \times (2N-2)} & \mathbf{0}_{1 \times (2N-2)} & J' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1^T \\ \vdots \\ \rho_{2N}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

En donde ζ_j y ρ_j ($j = 1, \dots, 2N$) son los vectores propios izquierdos y derechos o vectores propios generalizados izquierdos y derechos de Υ , y J' es la matriz diagonal superior por bloques de Jordan correspondiente a los valores propios diferentes de cero λ_{i1} y λ_{i2} , $i = 2, \dots, N$.

Sin pérdida de generalidad, elegimos $\zeta_1 = [\mathbf{1}_N^T, \mathbf{0}_N^T]^T$ y $\zeta_2 = [\mathbf{0}_N^T, \mathbf{1}_N^T]^T$, donde se puede verificar que ζ_1 y ζ_2 son un vector propio derecho y un vector propio derecho generalizado de Υ asociados con el valor propio cero, respectivamente. Note que Υ tiene exactamente dos valores propio cero, sabemos que $-\Gamma$ tiene un valor propio simple cero, lo cual implica que existe un $N \times 1$ vector positivo p tal que $p^T \Gamma = 0$ y $\mathbf{1}_N^T p = 1$. Puede verificarse que $\rho_1 = [p^T, \mathbf{0}_N^T]^T$ y $\rho_2 = [\mathbf{0}_N^T, p^T]^T$ son vectores propios izquierdos y vectores propios izquierdos generalizados de Υ asociados con el valor propio cero, respectivamente, en donde $\rho_1^T \zeta_1 = 1$ y

$\rho_2^T \zeta_2 = 1$. Notando que los valores propios λ_{i1} y λ_{i2} , $i = 2, \dots, N$, tienen parte real negativa, vemos que

$$\begin{aligned} e^{\Upsilon t} &= P e^{Jt} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} 1 & t & 0_{1 \times (2N-2)} \\ 0 & 1 & 0_{1 \times (2N-2)} \\ 0_{1 \times (2N-2)} & 0_{1 \times (2N-2)} & J^t \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Lo cual converge a $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_N P^T & t \mathbf{1}_N P^T \\ 0_{N \times N} & \mathbf{1}_N P^T \end{bmatrix}$ para un t grande donde usamos el hecho que $e^{Jt} \rightarrow 0_{(2N-2) \times (2N-2)}$ para un t grande.

Note que para un t grande

$$\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_N P^T & t \mathbf{1}_N P^T \\ 0_{N \times N} & \mathbf{1}_N P^T \end{bmatrix} \otimes I_n \right) \begin{bmatrix} \chi(0) \\ \mathbf{v}(0) \end{bmatrix}$$

Vemos que $\chi(t) \rightarrow (\mathbf{1}_N P^T \otimes I_n) \chi(0) + t (\mathbf{1}_N P^T \otimes I_n) \mathbf{v}(0)$ y $\mathbf{v}(t) \rightarrow (\mathbf{1}_N P^T \otimes I_n) \mathbf{v}(0)$ para un t grande. Como resultado sabemos que $\|\chi_i(t) - \chi_j(t)\| \rightarrow 0$ y $\|\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t)\| \rightarrow 0$, conforme $t \rightarrow \infty$, esto es, el consenso es alcanzado para un grupo de agentes.

(Necesidad) Suponga que la condición suficiente que Υ tenga exactamente dos valores propios cero y todos los demás valores propios tienen parte real negativa no se cumple. Note que Υ tiene al menos dos valores propios cero, el hecho que la condición de suficiencia no se cumpla implica que Υ tiene más de dos valores propios cero o, tiene dos valores propios cero y uno con parte real positiva. Sin pérdida de generalidad, asuma que $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y $Re(\mu_3) \geq 0$, en donde, μ_k , $k = 1, \dots, 2N$, denota el k -ésimo valor propio de Υ y $Re(\cdot)$ representa la parte real de un número. Sea $J = [j_{kl}]$ la forma canónica de Jordan de Υ , sabemos que $j_{kk} = \mu_k$, $k = 1, \dots, 2N$. Entonces vemos que $e^{j_{kk}t} \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, para un t grande, lo que implica que las primeras tres filas de e^{Jt} son linealmente independientes para un t grande. Por lo tanto, sabemos que el rango de e^{Jt} es cuando menos tres para un t grande, lo cual implica que el rango de $e^{\Upsilon t}$ es cuando menos tres para un t grande. Note que el consenso es alcanzado asintóticamente si y solo si $e^{\Upsilon t} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N P^T \\ \mathbf{1}_N Q^T \end{bmatrix}$ para un t grande, en donde p y q son vectores de dimensión $N \times 1$. Como resultado, el rango de $e^{\Upsilon t}$ no puede exceder de dos para un t grande. Esto resulta en una contradicción.

Si bien, hasta ahora hemos considerado que todos los valores propios diferentes de cero de Υ tienen parte real negativa, debemos dar condiciones sobre k y b , bajo las cuales esto se cumpla. En primer lugar, por el Lema 2.1 sabemos que la matriz Γ tiene un único valor propio cero y los demás con parte real positiva si, y solo si, la topología de comunicación \mathcal{G} contiene un árbol de expansión dirigido. La existencia de un árbol de expansión dirigido contenido en la topología de comunicación implica que Υ tiene solo dos valores propios cero, esto es un punto vital con el cual se prueba que el consenso entre agentes es alcanzado. Sin embargo, hasta ahora hemos supuesto que los valores propios de Υ tienen parte

real negativa. De tal forma que solo queda por demostrar que (4.11) se mantiene si y solo si $Re(\mu_{ij}) < 0 (i = 2, \dots, N, j = 1, 2)$.

Sea $\sqrt{(b\lambda_i)^2 - 4(k\lambda_i)} = \alpha + i\beta$ en donde α y β son números reales e $i = \sqrt{-1}$. De (4.10), $Re(\mu_{ij}) < 0 (i = 2, \dots, N, j = 1, 2)$ si y solo si $-bRe(\lambda_i) < \alpha < bRe(\lambda_i)$, lo cual es equivalente a $\alpha^2 < (bRe(\lambda_i))^2$. Entonces es suficiente con probar que (4.11) se mantiene si y solo si $\alpha^2 < (bRe(\lambda_i))^2$. Es fácil observar que

$$(b\lambda_i)^2 - 4(k\lambda_i) = (\alpha + i\beta)^2$$

Y separando las partes reales e imaginarias obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha^2 - \beta^2 &= b^2 [Re(\lambda_i)^2 - Im(\lambda_i)^2] - 4kRe(\lambda_i) \\ \alpha\beta &= b^2 [Re(\lambda_i)Im(\lambda_i)] - 2kIm(\lambda_i)\end{aligned}$$

Realizando cálculos simples tenemos

$$\alpha^4 - [b^2(Re(\lambda_i)^2 - Im(\lambda_i)^2) - 4kRe(\lambda_i)] \alpha^2 - Im(\lambda_i)^2 [b^2Re(\lambda_i) - 2k]^2 = 0$$

Con lo cual es fácil observar que $\alpha^2 < (bRe(\lambda_i))^2$ si y solo si (4.11) se mantiene. \square

Para ilustrar este resultado, realizaremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 Considere un grupo de $N = 6$ agentes inerciales con masas $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$, $m_5 = 5$ y $m_6 = 6$, con $n = 1$ grados de libertad, esto es, $x \in \mathbb{R}$, es decir, los agentes se desplazan solo en una dimensión. Supongamos que la topología de comunicación entre agentes es la mostrada en la Figura 3.1, con pesos de enlace $\omega_{ij} = 1$. Tenemos que la matriz de fuerzas de acoplamiento por unidad de masa Γ es:

$$\Gamma = M^{-1} \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

En donde \mathcal{L} es la matriz Laplaciana asociada al grafo de la Figura 3.1. Los valores propios diferentes de cero de Γ son; $0.2670 \pm 0.0840i$, 0.5 , 0.6667 y 3.0824 . Aplicando el protocolo de consenso (4.4), necesitamos verificar que las condiciones del Teorema 4.1 se cumplen. Es posible verificar que la topología de comunicación de la Figura 3.1 contiene un árbol dirigido de expansión.

En la Figura 4.1 se muestran los estados de los agentes en dos escenarios diferentes; Por un lado en el inciso a), las ganancias son $b = 2$ y $k = 4$, dichas ganancias son tales que cumplen con la condición (4.11) del Teorema 4.1, y se puede observar que el consenso idéntico

completo es alcanzado. Sin embargo, si modificamos las ganancias de tal forma que la condición (4.11) no se cumpla, por ejemplo $b = 1$ y $k = 4$, se puede observar que el consenso no es alcanzado como se ilustra en el inciso b).

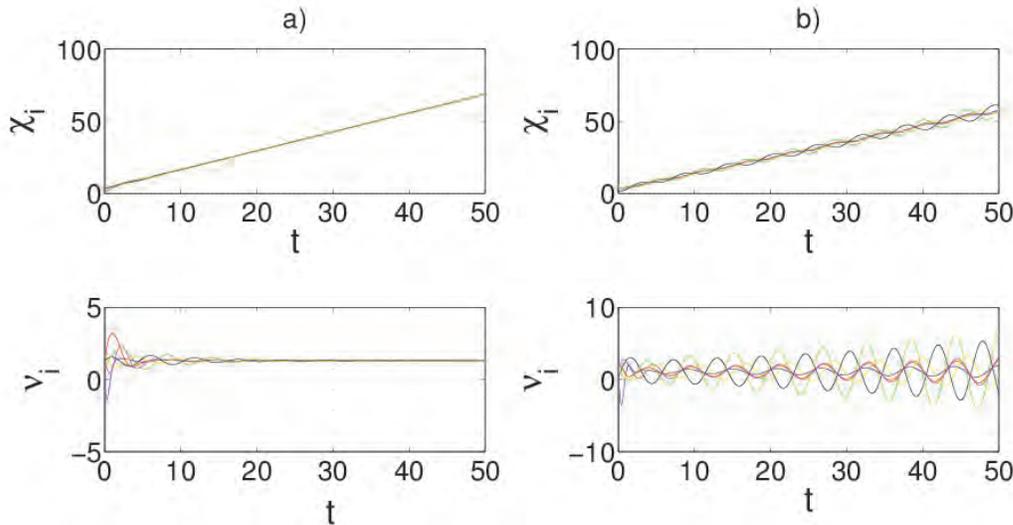


Figura 4.1: Posición y velocidad de agentes inerciales con protocolo (3.4) con ganancias $b = 2, k = 4$ a) y $b = 1, k = 4$ b).

Sin embargo, en muchos de los casos es necesario que la velocidad del grupo de agentes sea igual a un valor deseado. Para ello hay que considerar un protocolo diferente, el cual será analizado en la siguiente sección.

4.2. Consenso con un Agente Maestro

Hasta ahora hemos probado que con el algoritmo (3.4), es posible resolver el problema de consenso entre agentes inerciales con masas diferentes, observamos que bajo ciertas condiciones los estados de todos los agentes convergen a un valor común. Sin embargo, dicho valor es inherentemente constante en velocidad, debido a que depende de las condiciones iniciales. Esto podría no ser apropiado en algunas aplicaciones en donde existe un valor deseado o un valor de referencia al cual se debe converger. En este capítulo investigaremos dicho problema desde el enfoque de arreglos maestro seguidores.

De igual forma que en la sección 4.1 suponga que existen N agentes inerciales *seguidores* y un agente maestro. Este agente maestro es quien define los valores de referencia en posición y velocidad con los cuales los N *seguidores* deben llegar a un consenso. Este agente maestro tiene dinámica

$$\ddot{x}_m = f(t, x_m, \dot{x}_m) \quad (4.13)$$

Con $x_{\bar{m}} \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua por pedazos y localmente Lipschitz, y puede ser escrito en términos de sus variables de estado como posición y velocidad, $\chi_{\bar{m}} = x_{\bar{m}}$ y $v_{\bar{m}} = \dot{x}_{\bar{m}}$ respectivamente como

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_{\bar{m}} &= v_{\bar{m}} \\ \dot{v}_{\bar{m}} &= f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}})\end{aligned}\quad (4.14)$$

El principal objetivo de este capítulo es proponer y estudiar algoritmos de consenso que aseguren que cada agente inercial logre llegar a un consenso con un agente maestro que se desplaza a una velocidad constante o variante con el tiempo. Además, supondremos que la información compartida por el maestro está disponible solo para un subgrupo de agentes seguidores. Diremos que el problema de consenso con un agente maestro se resuelve cuando

$$|\chi_i - \chi_{\bar{m}}| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad |v_i - v_{\bar{m}}| \rightarrow 0, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty; \quad \forall i \quad (4.15)$$

Note que, en esta sección, suponemos que tanto los agentes seguidores, así como el agente maestro, pueden compartir el mismo espacio. Posteriormente, retiraremos dicha suposición.

4.2.1. Agente Maestro con Velocidad Constante

En esta sección, consideraremos que el agente maestro se desplaza a una velocidad constante, es decir, $f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}}) = 0$. Para agentes inerciales con dinámica (4.2), un algoritmo de consenso para el seguimiento de un agente maestro que se desplaza a velocidad constante se da como

$$u_i = -k \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (v_i - v_j) - d_i [k(\chi_i - \chi_{\bar{m}}) + b(v_i - v_{\bar{m}})], \quad i = 1, \dots, N \quad (4.16)$$

En donde $d_i > 0$ si el agente i recibe información de la referencia y $d_i = 0$ de lo contrario. Observe que el algoritmo (4.16) es similar a (4.4), en este caso, también se consideran las diferencias entre los estados del agente i y el agente maestro solo si i es capaz de recibir dicha información, esto es, $d_i > 0$ (Note que, aun cuando estamos considerando agentes con masas diferentes, estaremos utilizando el mismo protocolo estudiado en la sección 3.2.1).

Es posible aplicar el protocolo (4.16), de tal forma que la dinámica en lazo cerrado determinado por las ecuaciones (4.2) y (4.16) es

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_i &= v_i \\ m_i \dot{v}_i &= -k \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (v_i - v_j) - d_i [k(\chi_i - \chi_{\bar{m}}) + b(v_i - v_{\bar{m}})], \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\quad (4.17)$$

O bien, de forma equivalente, (4.17) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_i &= \mathbf{v}_i \\ m_i \dot{\mathbf{v}}_i &= -k \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \chi_j - b \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \mathbf{v}_j - d_i [k(\chi_i - \chi_{\bar{m}}) + b(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}})], \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{4.18}$$

Si definimos el error como $\tilde{\chi}_i = \chi_i - \chi_{\bar{m}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}$ es posible escribir la dinámica del error para cada agente como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\chi}}_i &= \tilde{\mathbf{v}}_i \\ m_i \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i &= -k \sum_{j=1}^N (\ell_{ij} + d_i) \tilde{\chi}_j - b \sum_{j=1}^N (\ell_{ij} + d_i) \tilde{\mathbf{v}}_j, \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{4.19}$$

Sea $\tilde{\chi} = [\tilde{\chi}_1^T, \dots, \tilde{\chi}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ y $\tilde{\mathbf{v}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ entonces escribimos (4.19) como

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\chi}} &= \tilde{\mathbf{v}} \\ (M \otimes I_n) \dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= -k(\hat{\mathcal{L}} \otimes I_n) \tilde{\chi} - b(\hat{\mathcal{L}} \otimes I_n) \tilde{\mathbf{v}}\end{aligned}\tag{4.20}$$

Con $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$. La dinámica del error de la red completa es:

$$\dot{\xi} = (\Phi \otimes I_n) \xi\tag{4.21}$$

En donde $\Phi = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -k\hat{\Gamma} & -b\hat{\Gamma} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, con $\hat{\Gamma} = M^{-1} \hat{\mathcal{L}} = M^{-1}(\mathcal{L} + \hat{D})$ y la matriz $\hat{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$.

Los valores propios de la matriz Φ juegan un rol importante en el análisis de estabilidad de la dinámica de error (4.21). Para demostrar que la dinámica del error es asintóticamente estable en 0, debemos analizar los valores propios de Φ , y sabemos que es suficiente con que todos los valores propios de Φ tengan parte real negativa. Para ello es posible realizar el mismo razonamiento que derivó en la ecuación (4.10).

Ahora sean μ_{ij} ($i = 1, \dots, N, j = 1, 2$) y $\hat{\lambda}_i$ ($i = 1, \dots, N$), los valores propios de la matriz Φ y $\hat{\Gamma}$ respectivamente. Consideraremos que en este caso $\hat{\lambda}_i$ toma el lugar de λ_i de la ecuación (4.10). El siguiente resultado presenta condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales Φ es Hurwitz.

Teorema 4.2 *Para un sistema de múltiples agentes inerciales con dinámica (4.2) y protocolo (4.16), y un agente maestro con dinámica (4.14), donde $f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) = 0$. El consenso con un agente maestro es alcanzado si y solo si, la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el maestro como raíz y se mantiene la desigualdad*

$$\frac{b^2}{k} > \max_{1 \leq i \leq N} \frac{Im(\hat{\lambda}_i)^2}{Re(\hat{\lambda}_i) [Re(\hat{\lambda}_i)^2 + Im(\hat{\lambda}_i)^2]} \quad (4.22)$$

En donde $\hat{\lambda}_i$ con $i = 1, \dots, N$ son los valores propios de la matriz $\hat{\Gamma}$.

Prueba: En primer lugar note que, siguiendo los pasos de la prueba del Teorema 3.2, sabemos que, si \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el agente maestro como raíz, entonces, todos los valores propios de $\hat{\mathcal{L}}$ tienen parte real positiva, esto es, $\hat{\mathcal{L}}$ es una matriz definida positiva. Por lo tanto, esto implica que $\hat{\Gamma} = M^{-1}\hat{\mathcal{L}} = M^{-1}(\mathcal{L} + \hat{D})$ es también una matriz definida positiva. Una vez dicho esto, debemos mostrar que $Re(\hat{\lambda}_i) > 0$ y (4.22) se cumplen si y solo si $Re(\mu_{ij}) < 0 (i = 1, \dots, N; j = 1, 2)$.

El resto de la prueba sigue los mismos pasos realizados en el Teorema 3.2 que dan como resultado la condición (4.22). Con esto se garantiza que todos los valores propios de $\hat{\Gamma}$ tienen parte real negativa y que, por lo tanto, la matriz $\hat{\Gamma}$ es Hurwitz. \square

Ahora consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2 Consideremos $N = 4$ agentes inerciales con $n = 1$ grados de libertad y masas $m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5$ y $m_4 = 6$. Aplicando el protocolo de consenso (4.16), y topología de comunicación mostrada en la Figura 3.3a, por simplicidad supongamos que los pesos de enlace son iguales $\omega_{ij} = d_i = 1$. Tenemos que la matriz de fuerzas de acoplamiento por unidad de masa $\hat{\Gamma}$ es:

$$\hat{\Gamma} = M^{-1}\hat{\mathcal{L}} = M^{-1}(\mathcal{L} + \hat{D}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Siendo sus valores propios $0.1666, 0.1666$ y $0.7 \pm 0.1i$. Es posible verificar que la topología de comunicación extendida de la Figura 3.3a contiene un árbol de expansión dirigido cuya raíz es el agente maestro. Además, se busca que el grupo de agentes converjan a una velocidad constante $v_{\bar{m}} = 0.2$ determinada por el modelo de referencia.

En la Figura 4.2 se muestran los estados de los agentes en dos escenarios diferentes; Por un lado en el inciso a), las ganancias son $b = 2$ y $k = 1$, dichas ganancias son tales que cumplen con la condición (4.22) del Teorema 4.2, y se puede observar que el consenso con un agente maestro que se desplaza a una velocidad constante es alcanzado. Sin embargo, si modificamos las ganancias de tal forma que la condición (4.22) no se cumpla, por ejemplo $b = 0.1$ y $k = 1$, se puede observar que el consenso no es alcanzado como se ilustra en el inciso b).

A continuación, investigaremos el caso en el que la velocidad del agente maestro puede variar con el tiempo. Como ya se demostró con el Ejemplo 3.3, el protocolo (4.4) no puede ser aplicado directamente y es necesario utilizar un protocolo diferente.

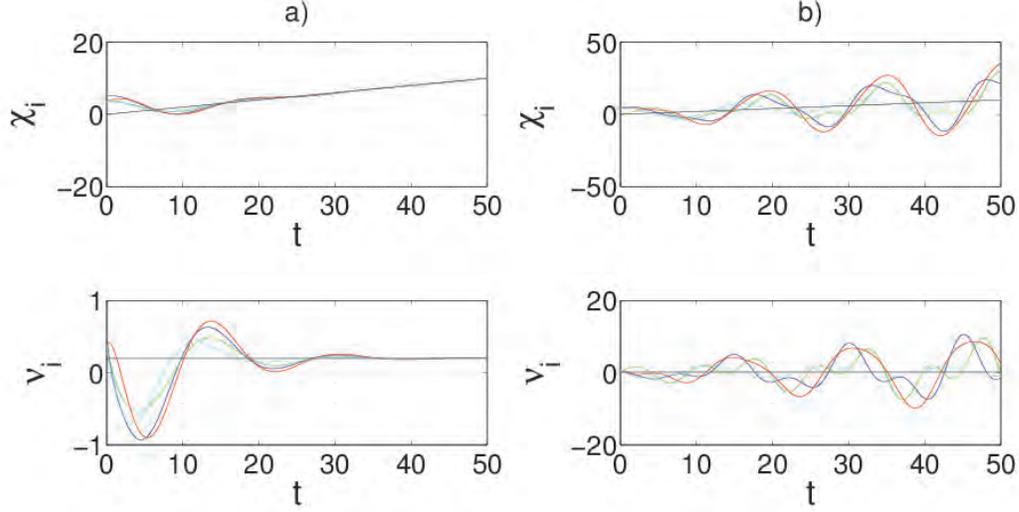


Figura 4.2: Posición y velocidad de agentes inerciales con protocolo (3.16) con ganancias: a) $b = 2$, $k = 1$ y b) $b = 0.1$, $k = 1$.

4.2.2. Agente Maestro con Velocidad Variante

De igual forma que en el caso de agentes inerciales idénticos, ahora supondremos que la velocidad a la que se desplaza el agente maestro, puede variar con el tiempo de acuerdo a una dinámica determinada por el modelo (4.14) con $f(t, \chi_{\bar{m}}, \mathbf{v}_{\bar{m}}) \neq 0$. Consideremos el siguiente protocolo propuesto

$$\begin{aligned}
 u_i = & -\frac{k}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j) - \frac{b}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) + \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} \dot{\mathbf{v}}_j \\
 & - \frac{d_i}{\eta_i} [k(\chi_i - \chi_{\bar{m}}) + b(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}) - \dot{\mathbf{v}}_{\bar{m}}], \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

En donde $\eta_i = \frac{1}{m_i} (d_i + \sum_{j=1}^N \omega_{ij})$ (Observe que este protocolo es similar a (3.20), con algunas modificaciones). Note que en este protocolo no solo retroalimentamos los estados de los agentes vecinos, sino también la aceleración de dichos agentes, de igual forma se retroalimenta la aceleración del agente maestro, sólo si el agente i recibe información del mismo. Con el objetivo de que, la dinámica del error en lazo cerrado, cuando el agente maestro se desplaza a velocidad variante, quede en términos de $\hat{\mathcal{L}}$, es necesario definir el valor de corrección η_i .

Si definimos el error en posición y velocidad como $\tilde{\chi}_i = \chi_i - \chi_{\bar{m}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\bar{m}}$, respectivamente, de las ecuaciones (4.2) y (4.23) es posible escribir la dinámica del error para cada agente como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\chi}}_i &= \tilde{v}_i \\ m_i \dot{\tilde{v}}_i &= -\frac{k}{\eta_i} \sum_{j=1}^N (\ell_{ij} + d_i) \tilde{\chi}_j - \frac{b}{\eta_i} \sum_{j=1}^N (\ell_{ij} + d_i) \tilde{v}_j + \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} \dot{\tilde{v}}_j, \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{4.24}$$

La dinámica del error de la red completa puede ser representada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\chi}} &= \tilde{v} \\ (\widehat{\mathcal{L}} \otimes I_n) \dot{\tilde{v}} &= -k(\widehat{\mathcal{L}} \otimes I_n) \tilde{\chi} - b(\widehat{\mathcal{L}} \otimes I_n) \tilde{v}\end{aligned}\tag{4.25}$$

En donde $\tilde{\chi} = [\tilde{\chi}_1^T, \dots, \tilde{\chi}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ y $\tilde{v} = [\tilde{v}_1^T, \dots, \tilde{v}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$. El siguiente resultado presenta condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales se alcanza el consenso con modelo de referencia.

Teorema 4.3 *Para un sistema de múltiples agentes inerciales con dinámica (4.2) y protocolo (4.23), y un agente maestro con dinámica (4.14), donde $f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}}) \neq 0$. El consenso con un agente maestro es alcanzado si y solo si, la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el maestro como raíz.*

Prueba: En primer lugar note que, si el agente maestro es la raíz de un árbol de expansión dirigido contenido en \mathcal{G}^+ , para ningún agente η_i es igual a cero, por lo tanto, el protocolo (4.23) está bien definido.

Si ahora seguimos los pasos del Teorema 3.2, notamos que, como indica el Lema 3.1, la matriz $\widehat{\mathcal{L}}$ no solo tiene todos sus valores propios con parte real positiva, sino que también es no singular. Esto nos señala que $\widehat{\mathcal{L}}$ es una matriz invertible si \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido. De tal forma que podemos escribir (4.25) como

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\chi}} &= \tilde{v}, \\ \dot{\tilde{v}} &= -k(I_N \otimes I_n) \tilde{\chi} - b(I_N \otimes I_n) \tilde{v}\end{aligned}$$

O en una forma más compacta como

$$\dot{\xi} = (\Lambda \otimes I_n) \xi$$

Con $\xi = [\tilde{\chi}^T, \tilde{v}^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$ y $\Lambda = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -kI_N & -bI_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$. Ahora debemos probar que la matriz Λ es Hurwitz. Sean μ los valores propios de Λ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\det(\mu I_{2N} - \Lambda) &= \det \begin{pmatrix} \mu I_N & -I_N \\ kI_N & \mu I_N + bI_N \end{pmatrix} \\ &= \mu^2 + \mu b + k\end{aligned}$$

Por lo tanto, es necesario analizar las raíces del polinomio característico de Λ , entonces

$$\mu_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}$$

Es fácil observar que para cualquier $k, b > 0$ los valores propios de Λ tienen parte real negativa y por lo tanto es Hurwitz. Lo cual implica que el consenso con modelo de referencia se logra. \square

A continuación se presenta el siguiente ejemplo para ilustrar este resultado.

Ejemplo 4.3 Consideremos N agentes inerciales idénticos con masas $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$ y $m_4 = 4, n = 1$ grados de libertad y topología de comunicación mostrada en la Figura 3.3a con pesos de enlace iguales $\omega_{ij} = d_i = 1$. La matriz Laplaciana \mathcal{L} y la matriz \hat{D} son:

$$\mathcal{L}_{(a)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_{(a)} = \text{diag}(0, 1, 0, 1)$$

Aplicando el protocolo de consenso (4.23), del Teorema 4.3 podemos observar que la estabilidad del error no depende de los valores propios de $\hat{\mathcal{L}}$ o de las masas de los agentes, sino que, solo debemos analizar si la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ contiene un árbol dirigido de expansión con el agente maestro como raíz. Es claro que la topología de la Figura 3.3a cumple con dicha condición. Para este ejemplo consideramos que del modelo de agente maestro $f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}}) = -\sin(t)$.

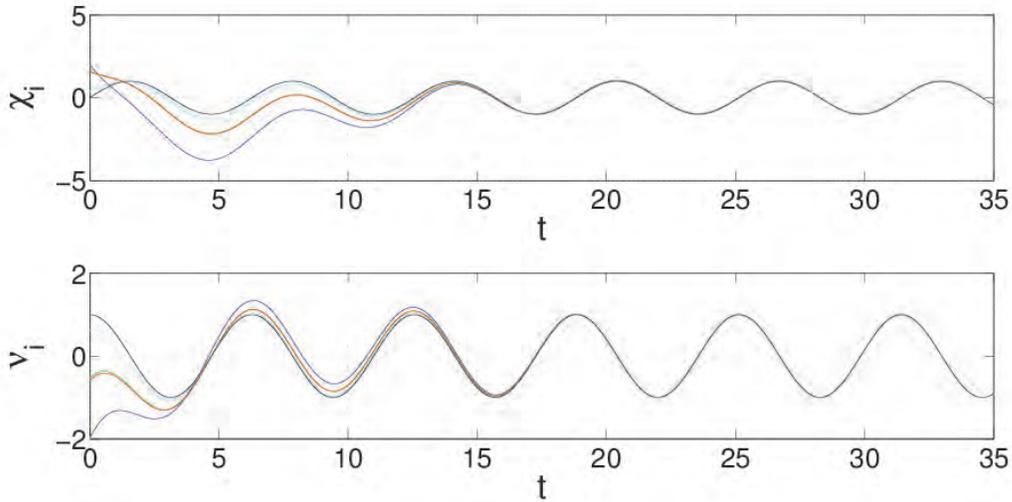


Figura 4.3: Búsqueda del consenso en agentes inerciales con protocolo (4.23), ganancias $b = k = 10$ y topología de comunicación mostrada en la Figura 3.3(a).

Es posible observar (en la Figura 4.3) que los estados de todos los agentes inerciales convergen con los estados del maestro.

Los resultados presentados hasta el momento, pueden ser extendidos para el caso en el que se desea que exista una desviación de estados entre los agentes y que potencialmente pueden ser usados para resolver problemas de control de formación. A continuación discutiremos las modificaciones a los protocolos necesarias para resolver dicho problema.

4.3. Extensión a Desviaciones Relativas al Estado

Hasta ahora (y de la misma forma que en el Capítulo 3), hemos resuelto los problemas de consenso entre agentes (4.3) y consenso con un agente maestro (4.15). Sin embargo, dadas las definiciones de consenso como (4.3) y (4.15), éstas implican que el grupo de agentes asintóticamente ocupan el mismo espacio, esto resulta físicamente imposible y se vuelve un problema cuando se busca trasladar estos resultados a una aplicación real. Es por esto que surge la necesidad de extender estos resultados teóricos para garantizar que el grupo de agentes mantengan diferencias entre sus estados, principalmente entre sus posiciones. En este mismo sentido, también en términos de una posible aplicación, se podría buscar que un grupo de agentes mantengan una formación mientras llegan a un consenso, o mientras siguen una referencia en posición determinada por un agente maestro.

En esta sección, retiraremos las suposiciones realizadas en las secciones anteriores, es decir, ya no consideraremos que sea posible que los agentes ocupen el mismo espacio. Es por este motivo, que resulta necesario modificar los protocolos propuestos anteriormente, para garantizar una desviación de estados deseada entre las posiciones (y potencialmente velocidades) de los agentes inerciales y la posición del maestro (en el caso correspondiente).

4.3.1. Consenso Entre Agentes con Desviaciones de Estados

Ahora, el problema a resolver consiste en, garantizar que las posiciones (y posiblemente velocidades), convergen a un valor deseado de separación entre agentes. Entonces, la nueva definición de consenso que buscaremos resolver es:

$$|\chi_i - \chi_j| \rightarrow \Delta_{ij} \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j| \rightarrow \dot{\Delta}_{ij}, \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty; \quad \forall i, j \quad (4.26)$$

En donde Δ_{ij} y $\dot{\Delta}_{ij}$ denotan los valores de separación deseada entre la posición y velocidad, respectivamente, del agente i y el agente j . Para garantizar la convergencia a dichas diferencias el protocolo de consenso (4.4) puede ser modificado de la siguiente forma:

$$u_i = m_i \ddot{\delta}_i - k \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j - (\delta_i - \delta_j)) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j - (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j)), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.27)$$

En donde $\Delta_{ij} \triangleq \delta_i - \delta_j, \forall i \neq j$, denota la separación deseada en posición y $\dot{\Delta}_{ij} \triangleq \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j, \forall i \neq j$ la separación deseada en velocidad. Note que el protocolo (4.4) corresponde al caso en que $\Delta_{ij} = 0, \forall i \neq j$ y $\dot{\Delta}_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Teorema 4.4 Para un sistema de múltiples agente inerciales (4.2) con protocolo de consenso (4.27), $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y $v_i - v_j \rightarrow \hat{\delta}_i - \hat{\delta}_j$ asintóticamente si y solo si, la topología de comunicación \mathcal{G} contiene un árbol dirigido de expansión y (4.11) se cumple.

Prueba: Note que si definimos los estados como $\hat{\chi}_i = \chi_i - \delta_i$ y $\hat{v}_i = v_i - \hat{\delta}_i$, es posible escribir (4.9) como

$$\dot{\hat{\Psi}} = (\Upsilon \otimes I_n) \hat{\Psi}$$

En donde $\hat{\Psi} = [\hat{\chi}^T, \hat{v}^T]^T \in \mathbb{R}^{2nN}$, con $\hat{\chi} = [\hat{\chi}_1^T, \dots, \hat{\chi}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ y $\hat{v} = [\hat{v}_1^T, \dots, \hat{v}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$. La matriz Υ permanece igual que en la ecuación (4.9).

Siguiendo los mismos pasos realizados en la prueba del Teorema 4.1 sabemos que $\hat{\chi}_i \rightarrow \hat{\chi}_j$ y $\hat{v}_i \rightarrow \hat{v}_j$ asintóticamente si y solo si \mathcal{G} contiene un árbol dirigido de expansión y (4.11) se cumple. El resto de la prueba sigue el hecho que $\hat{\chi}_i \rightarrow \hat{\chi}_j$ y $\hat{v}_i \rightarrow \hat{v}_j$ es equivalente a $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y $v_i - v_j \rightarrow \hat{\delta}_i - \hat{\delta}_j$ respectivamente. \square

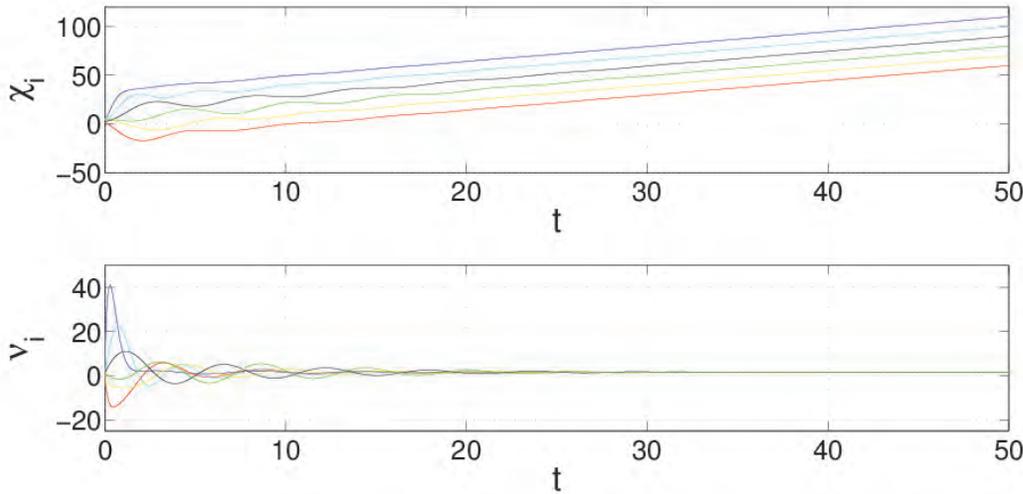


Figura 4.4: Consenso entre agentes inerciales idénticos con desviación de estados en posición.

Ahora ilustraremos este resultado con un ejemplo.

Ejemplo 4.4 Consideremos, para este ejemplo, la misma cantidad de agentes inerciales, grados de libertad, masas de los agentes y topología de comunicación, utilizados en el Ejemplo 4.1 utilizando, en este caso, el protocolo (4.27). En este ejemplo, buscamos mantener una formación en línea, de tal forma que definimos las desviaciones en posición como $\delta_1 = 25$, $\delta_2 = -25$, $\delta_3 = 15$, $\delta_4 = -15$, $\delta_5 = 5$ y $\delta_6 = -5$.

Note que debido a que se busca mantener una desviación constante en posición, las desviaciones en velocidad son $\dot{\delta}_i = 0, \forall i$. La Figura 4.4 muestra como los agentes mantienen dicha formación mientras se mueven con la misma velocidad.

A continuación, extenderemos los resultados obtenidos para el caso en que se busca seguir a un agente maestro.

4.3.2. Consenso con un Agente Maestro a Velocidad Constante

Ahora consideremos el caso en el que se busca garantizar una desviación de estados cuando se sigue una referencia en posición determinada por un agente maestro que se desplaza con velocidad constante. En esta situación se desea mantener una diferencia de estados Δ_{ij} entre las posiciones de los agentes y una diferencia $\Delta_{\bar{m}}$ con el agente maestro (en el caso que $d_i > 0$). Dada esta situación, es posible modificar el protocolo (4.16) con este objetivo

$$u_i = m_i \ddot{\delta}_i - k \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j - (\delta_i - \delta_j)) - b \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (v_i - v_j - (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j)) - d_i \left[k(\chi_i - \delta_i - \chi_{\bar{m}}) + b(v_i - \dot{\delta}_i - v_{\bar{m}}) \right], \quad i = 1, \dots, N \quad (4.28)$$

Note que, en este caso, el termino δ_i además de ser utilizado para definir la separación en posición entre los estados del agente i y sus vecinos, para el caso en que el agente i recibe información del maestro ($d_i > 0$), también define la diferencia deseada entre la posición del agente i y dicho agente.

Teorema 4.5 *Para un sistema de múltiples agente inerciales (4.2) con protocolo de consenso (4.28), $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$, $v_i - v_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$, además, $\chi_i \rightarrow \chi_{\bar{m}} + \delta_i$ y $v_i \rightarrow v_{\bar{m}} + \dot{\delta}_i$ asintóticamente si y solo si, la topología de comunicación G^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el maestro como raíz y (4.22) se cumple.*

Prueba: En primer lugar definimos los estados de los agentes como $\hat{\chi}_i = \chi_i - \delta_i$ y $\hat{v}_i = v_i - \dot{\delta}_i$. Posteriormente definimos el error en términos de los nuevos estados como $\tilde{\chi}_i = \hat{\chi}_i - \chi_{\bar{m}}$ y $\tilde{v}_i = \hat{v}_i - v_{\bar{m}}$. La dinámica del error tiene la misma forma que (4.21) con las nuevas definiciones. Los pasos siguientes son los realizados en la prueba del Teorema 4.2.

El resto de la prueba sigue el hecho que $\hat{\chi}_i \rightarrow \chi_{\bar{m}}$ y $\hat{v}_i \rightarrow v_{\bar{m}}$, lo cual es equivalente a $\chi_i \rightarrow \chi_{\bar{m}} + \delta_i$ y $v_i \rightarrow v_{\bar{m}} + \dot{\delta}_i$ respectivamente, además, $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y $v_i - v_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$. \square

El siguiente ejemplo, ilustra este resultado.

Ejemplo 4.5 En este ejemplo, consideraremos los mismos parámetros, ganancias y topología de comunicación (Figura 3.3a) del Ejemplo 4.2. Sin embargo, ahora supondremos que los agentes inerciales (seguidores y maestro) se desplazan en un plano, es decir, tienen dos grados de libertad, esto es $x_i, u_i, x_{\bar{m}} \in \mathbb{R}^2$. Además, buscamos que los agentes seguidores

mantengan una geometría de formación con figura de diamante mientras siguen la referencia en posición determinada por el agente maestro. Note que para mantener dicha formación, las velocidades de los seguidores deben igualarse a la del agente maestro y por lo tanto la desviación en términos de velocidad es $\dot{\delta}_i = 0, \forall i$. Sean las desviaciones en posición $\delta_1 = [0 \ 2]^T$, $\delta_2 = [-2 \ 0]^T$, $\delta_3 = [0 \ -2]^T$ y $\delta_4 = [2 \ 0]^T$.

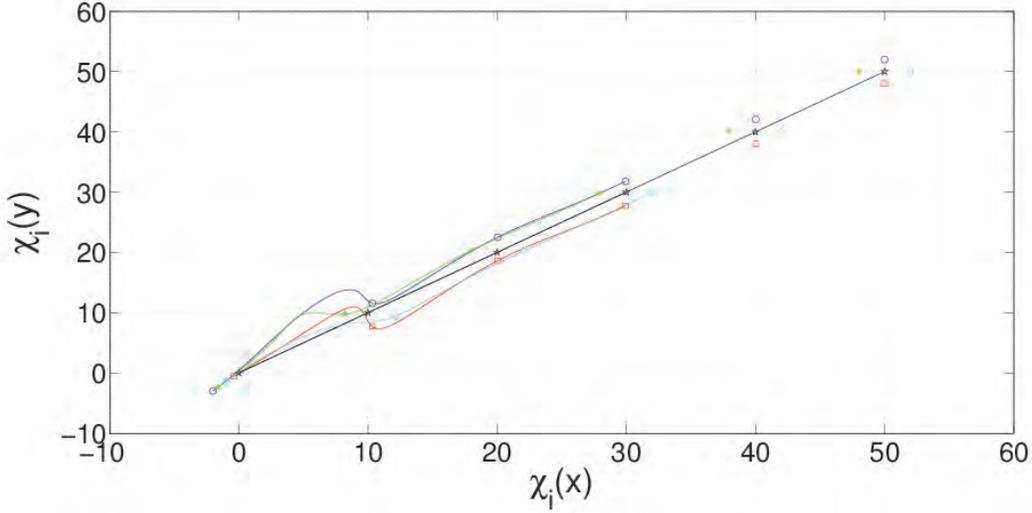


Figura 4.5: Geometría de la formación de agentes seguidores con protocolo (4.28) siguiendo una referencia determinada por un agente maestro con velocidad constante.

Observe en la Figura 4.5 que los agentes seguidores mantienen la formación deseada mientras siguen la trayectoria en posición descrita por el agente maestro.

4.3.3. Consenso con un Agente Maestro a Velocidad Variante

De igual forma que en los casos anteriores, el protocolo (4.23) puede ser modificado, de tal forma que los agentes sean capaces de seguir una referencia de estados determinada por el agente maestro mientras mantienen una diferencia de estados entre agentes y con el maestro.

$$\begin{aligned}
 u_i = & m_i \ddot{\delta}_i - \frac{k}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\chi_i - \chi_j - (\delta_i - \delta_j)) - \frac{b}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j - (\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j)) \\
 & + \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\dot{\mathbf{v}}_j - \ddot{\delta}_j) - \frac{d_i}{\eta_i} \left[k(\chi_i - \delta_i - \chi_m) + b(\mathbf{v}_i - \dot{\delta}_i - \mathbf{v}_m) - \dot{\mathbf{v}}_m \right], \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

En donde, además de los términos relacionados con las desviaciones discutidos anteriormente, note que, como se había discutido con anterioridad, la desviación en posición y velocidad puede variar con el tiempo y que, por lo tanto, en el protocolo (4.29) también es

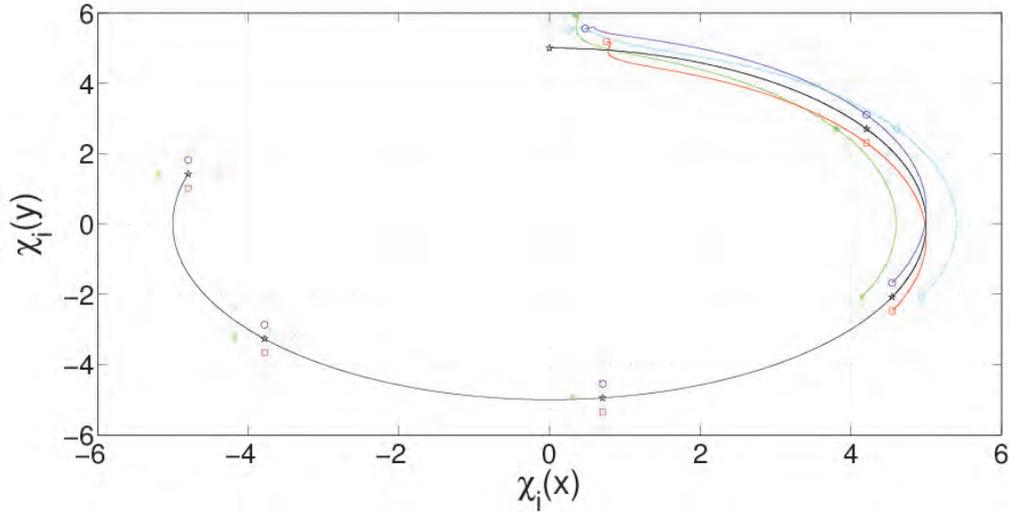


Figura 4.6: Geometría de la formación de agentes seguidores con protocolo (4.29) siguiendo una referencia determinada por un agente maestro con velocidad variante.

considerada la aceleración de la desviación tanto del agente i como del j . Con respecto a este protocolo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.6 *Para un sistema de múltiples agente inerciales (4.2) con protocolo de consenso (4.29), $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$, $v_i - v_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$, además, $\chi_i \rightarrow \chi_{\bar{m}} + \delta_i$ y $v_i \rightarrow v_{\bar{m}} + \dot{\delta}_i$ asintóticamente si y solo si, la topología de comunicación extendida \mathcal{G}^+ contiene un árbol de expansión dirigido con el maestro como raíz.*

Prueba: De igual forma que en la prueba del teorema anterior, en primer lugar definimos los estados de los agentes como $\hat{\chi}_i = \chi_i - \delta_i$ y $\hat{v}_i = v_i - \dot{\delta}_i$. Posteriormente definimos el error en términos de los nuevos estados como $\tilde{\chi}_i = \hat{\chi}_i - \chi_{\bar{m}}$ y $\tilde{v}_i = \hat{v}_i - v_{\bar{m}}$. La dinámica del error tiene la misma forma que (4.25) con las nuevas definiciones. Los pasos siguientes son los realizados en la prueba del Teorema 4.3.

El resto de la prueba sigue el hecho que $\hat{\chi}_i \rightarrow \chi_{\bar{m}}$ y $\hat{v}_i \rightarrow v_{\bar{m}}$, lo cual es equivalente a $\chi_i \rightarrow \chi_{\bar{m}} + \delta_i$ y $v_i \rightarrow v_{\bar{m}} + \dot{\delta}_i$ respectivamente, además, $\chi_i - \chi_j \rightarrow \delta_i - \delta_j$ y $v_i - v_j \rightarrow \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_j$. \square

Ahora ilustraremos este resultado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6 Para este ejemplo, consideremos los mismos parámetros y topología de comunicación utilizadas en el Ejemplo 4.3, con ganancias $b = k = 10$. En este caso en particular, consideraremos que los agentes tienen $n = 2$ grados de libertad. Además, buscamos que los agentes mantengan una formación en diamante alrededor de la posición del agente maestro mientras siguen su trayectoria. Las desviaciones necesarias para mantener dicha formación son $\delta_1 = [0 \ 0,2]^T$, $\delta_2 = [-0,2 \ 0]^T$, $\delta_3 = [0 \ -0,2]^T$ y $\delta_4 = [0,2 \ 0]^T$.

Debido a que se busca mantener una desviación constante en posición, las desviaciones en velocidad son $\dot{\delta}_i = [0 \ 0]^T, \forall i$. La Figura 4.6 muestra como los agentes mantienen dicha formación mientras siguen una referencia basada en modelo en donde $f(t, \chi_{\bar{m}}, v_{\bar{m}}) = [-0,05 \sin(0,1t) \ -0,05 \cos(0,1t)]^T$.

A lo largo de este capítulo, hemos atacado los problemas de consenso entre agentes y consenso con un agente maestro, en grupos de agentes inerciales, suponiendo que las masas de los agentes son diferentes [15, 16, 24]. Propusimos protocolos para resolver ambos problemas, y se dieron condiciones necesarias y suficientes bajo los cuales son resueltos.

Capítulo 5

Comentarios Finales

En este trabajo de tesis, hemos discutido, cómo es posible, mediante leyes de control no lineal [31], controlar la posición y velocidad del movimiento de un *actuador* montado en un robot móvil con configuración diferencial [23]. Como resultado, observamos que la dinámica de movimiento de dicho actuador, en sus coordenadas transformadas, puede ser escrita de forma similar a la del modelo de un sistema inercial. Esto implica que, es posible tratar problemas de posicionamiento de actuadores montados en robots diferenciales, analizándolos desde la perspectiva de control de posición de sistemas inercial. Tal motivo, inspiró la idea de atacar un problema de consenso en robots móviles diferenciales, pensando en cada uno de ellos como un agente, con el objetivo de controlar las posiciones de sus actuadores. Entonces, se propuso el problema de coordinar las posiciones de los actuadores, proponiéndolo como un problema de consenso en sistemas de múltiples agentes inerciales, en donde la posición de cada agente inercial, representa la posición de dicho actuador.

El problema de consenso en sistemas de múltiples agentes inerciales ha sido tratado en [15, 16], no obstante, solo se han presentado condiciones suficientes, bajo las cuales, un problema de consenso idéntico completo es resuelto. Sin embargo, a diferencia de los trabajos realizados por Spong en [15, 16], en esta tesis presentamos condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales se resuelve un problema de consenso idéntico completo. Más aún, en [15], se consideran que las topologías de comunicación entre agentes, es representada por un grafo balanceado y fuertemente conectado. En contraste, en esta tesis mostramos que es suficiente y necesario que, la topología de comunicación, contenga un árbol dirigido de expansión como un subconjunto del grafo, esta es una condición más relajada que la presentada en [15, 16]. Otro problema de consenso en sistemas de múltiples agentes inerciales, atacado dentro de esta tesis, es el problema de consenso en arreglos maestro-seguidores. En [24], se trató un problema similar, en el cual, existe un valor de velocidad determinado, al cual deben converger todas las velocidades de los agentes en la red, esto mientras logran consenso en sus posiciones. Aun cuando no se propone dicho problema desde la perspectiva de arreglos maestro-seguidores, es un primer acercamiento a problemas de consenso en los cuales el valor final de convergencia está determinado a priori. A diferencia de este planteamiento, en el presente trabajo, consideramos que el valor de convergencia final, es determinado por la trayectoria de un agente maestro, permitiendo con ello, definir valores de convergencia con velocidades variantes en el tiempo.

Un problema atacado en este trabajo, es el problema de *control de formación*, el cual, no ha sido atacado en la literatura para el caso de sistemas de múltiples agentes inerciales. En [15, 16, 24], el objetivo principal, es que los errores tanto en posición y velocidad de los agentes, asintóticamente sean cero, esto plantea un problema, debido a las restricciones físicas que no permiten que dos agentes ocupen el mismo espacio (en [15, 16, 24] se consideraron modelos ideales). En contraste, en esta tesis, aun cuando en primer lugar se plantearon los problemas de consenso cuando los modelos de agente son ideales, se consideró dicha restricción física. Se propusieron protocolos de consenso, que garantizan desviaciones entre las posiciones de los agentes (potencialmente velocidades), con las cuales, es posible definir formaciones entre los mismos. Estos protocolos, fueron desarrollados para problemas de consenso entre agentes y consenso con un agente maestro.

Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis, muestran que es posible coordinar el movimiento de actuadores montados en robots móviles diferenciales, cuando las masas de los agentes son iguales o diferentes. Ya que, con los resultados, no solo garantizamos que las posiciones de los actuadores mantengan una formación, sino que, es posible definir una trayectoria de referencia, las posibles aplicaciones de estos resultados, pueden ser, entre otras, redes de sensores, exploración y patrullaje de áreas desconocidas.

5.1. Trabajos Futuros

Los resultados obtenidos dentro de este trabajo de tesis, han sido desarrollados considerando que, cada agente, tiene el conocimiento de la posición, velocidad y aceleración instantánea de todos sus vecinos en la red. Sin embargo, sabemos que, en potenciales aplicaciones del campo de la ingeniería, esto es prácticamente imposible, ya que, entre otras cosas, existen retardos en los canales de comunicación. Más aun, es posible que los canales de comunicación entre un par de agentes, desaparezcan por un momento, o de manera permanente. Por tal motivo, un trabajo a futuro, es considerar retardos en los enlaces de comunicación y redes que cambian dinámicamente [13]. Otra posible situación, es que todos los estados de los agentes (posición y velocidad), no estén disponibles como información para transmitir. Con lo cual, sería necesario proponer protocolos de consenso basados en observadores, de forma similar al caso tratado en [17].

Por otro lado, también queda como trabajo a futuro, analizar problemas de consenso en diferentes sistemas diferentes a robots móviles diferenciales. Algunos problemas de interés, son casos en los que se trabaja con robots móviles con diferentes configuraciones de tracción, o inclusive el uso de UAV's. Con esto, surgen las preguntas, ¿Es posible transformar la dinámica de otro tipo de vehículos a formas similares a los de un agente inercial? Y ¿Podríamos atacar los mismos problemas trabajados en esta tesis para esos casos? Estos y más, son los problemas de interés, que pueden ser planteados desde la perspectiva de problemas de consenso en sistemas de múltiples agentes.

Bibliografía

- [1] J. Cortéz, S. Martínez, T. Karatas, and F. Bullo. Coverage control for mobile sensing networks. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 20, 2004.
- [2] J. Esposito. Decentralized cooperative manipulation with a swarm of mobile robots: The approach problem. *American Control Conference*, 2010.
- [3] J. Carpenter. Descentralized control of satellite formations. *International Journal of Robust and Non-Linear Control*, 12, 2002.
- [4] R. Beard, T. McLain, M. Goodrich, and E. Anderson. Coordinated target assignment and intercept for unmanned air vehicles. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 18, 2002.
- [5] D. Lee and P.Y. Li. Formation and maneuver control of spacecraft. *Proceedings of the American Control Conference*, 2003.
- [6] D. Bauso, L. Giarre, and R. Pesenti. Attitud alignment of a team of uavs under decentralized information structure. *IEEE Conference on Control Applications*, 2003.
- [7] B. Wu, D. Wang, and E. Poh. Decentralized control for satellite formation using local relative measurements only. *International Conference on Control and Automation*, 2010.
- [8] D. Couzin, J. Krause, N. Franks, and S. Levin. Effective leadership and decision-making in animal groups on the move. *Nature*, 433, 2005.
- [9] J. Dyer, A. Johansson, D. Helbing, I. Couzin, and J. Krause. Leadership, consensus decision making and collective behaviour in humans. *Philosophical Trans. of the Royal Society B*, 2008.
- [10] R. Olfati-Saber, J. Fax, and R.M. Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95, 2007.
- [11] Chris Godsil and Gordon Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag, 2001.
- [12] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans. Automatic Control*, 48, 2003.
- [13] R. Olfati-Saber and R.M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 49, 2004.

- [14] W. Ren and E. Atkins. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 17, 2007.
- [15] D. Lee and W. Spong. Stable flocking of multiple inertial agents on balanced graphs. *IEEE Trans. Automatic Control*, 52, 2006.
- [16] W. Li and W. Spong. Stability of general coupled inertial agents. *IEEE Trans. Automatic Control*, 55, 2010.
- [17] Z. Li, Z. Duan, G. Chen, and L. Huang. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 57, 2010.
- [18] W. Yu, G. Chen, and M. Cao. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems. *Automatica*, 46, 2010.
- [19] K. Moore and D. Lucarelli. Forced and constrained consensus among cooperating agents. In *IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, 2005.
- [20] W. Ren. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state. *Syst. Control Lett.*, 56, 2007.
- [21] H. Tanner. On the controllability of nearest neighbor interconnections. *IEEE Conference on Decision and Control*, 2004.
- [22] Y. Hong, G. Chen, and L. Bushnell. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks. *Automatica*, 44, 2008.
- [23] Wei Ren and Randal Beard. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*. Springer, 2010.
- [24] Y. Liu, Y. Jia, J. Du, and F. Yu. Consensus problem of multiple inertial agents with fixed and switching topologies. In *World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2008.
- [25] Z-P. Jiang and H. Nijmeijer. Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping. *Automatica*, 33, 1997.
- [26] R. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential Geometric Control Theory*, 1983.
- [27] A. Astolfi. Exponential stabilization of a wheeled mobile robot via discontinuous control. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 121, 1999.
- [28] C. de Wit and O. Sordalen. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37, 1992.
- [29] J. Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems and Control Letters*, 18, 1992.

- [30] C. Samson. Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots. *International Journal of Robotics Research*, 12, 1993.
- [31] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1989.
- [32] W. Ren and W. Beard. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans. Automatic Control*, 50, 2005.
- [33] Willi-Hans Steeb and Yoric Hardy. *Matrix Calculus and Kronecker Product: A Practical Approach to Linear and Multilinear Algebra*. World Scientific, 2011.
- [34] Chai Wah Wu. *Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems*. World Scientific, 2007.
- [35] Zhihua Qu. *Cooperative Control of Dynamical Systems: Applications to Autonomous Vehicles*. Springer, 2009.
- [36] C. Tomlin, J. Pappas, and S. Sastry. Conflict resolution for air traffic management: A study in multiagent hybrid systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998.
- [37] I. Chang, S-Y. Park, and K-H. Choi. Decentralized coordinated attitude control for satellite formation flying via the state-dependent riccati equation technique. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44, 2009.
- [38] F. Belkhouche, S. Vadhva, and M. Vaziri. Modeling and controlling 3d formations and flocking behavior of unmanned vehicles. *IEEE Conference on Information Reuse and Integration*, 2011.
- [39] Z. Lin and M. Broucke. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents. *IEEE Conference on Decision and Control*, 2003.
- [40] J. Fax and R.M. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Trans. Automatic Control*, 49, 2004.
- [41] W. Ren, W. Beard, and T. McLain. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems. *Cooperative Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 309, 2005.
- [42] W. Ren. On consensus algorithms for double-integrator dynamics. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
- [43] W. Ren, K. Moore, and Y. Chen. High-order and model reference consensus algorithms in cooperative control of multivehicle systems. *Trans. of the ASME*, 129, 2007.
- [44] Q. Song, J. Cao, and W. Yu. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control. *Syst. Control Lett.*, 59, 2010.
- [45] K. Liu, G. Xie, W. Ren, and L. Wang. Consensus for multi-agent systems with inherent nonlinear dynamics under directed topologies. *Syst. Control Lett.*, 62, 2013.

- [46] Jeff Shamma. *Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems*. John Wiley and Sons, 2007.
- [47] Yves Demazeau and Javier Bajo Pérez Michal Pechoucek, Juan M. Corchado. *Advances in Practical Applications of Agentes and Multiagent Systems*. Springer, 2011.
- [48] R. Olfati-Saber. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory. *IEEE Trans. Automatic Control*, 51, 2006.
- [49] R. Olfati-Saber. Swarms on sphere: A programmable swarm with synchronous behaviors like oscillator networks. *IEEE Conference on Decision and Control*, 2006.
- [50] H. Zhang, M. Chen, G-B. Stan, T. Zhou, and J. Maciejowski. Collective behavior coordination with predictive mechanisms. *IEEE Circuits and Systems*, 2008.
- [51] C. Wu and L. Chua. Synchronization of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 42, 1995.
- [52] L. Pecora, T. Carroll, G. Johnson, D. Mar, and K. Fink. Synchronization stability in coupled oscillator arrays: Solution for arbitrary configurations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10, 2000.
- [53] G. Chen and X. Wang. Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 49, 2002.
- [54] G. Chen and X. Wang. Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12, 2002.
- [55] G. Chen and X. Wang. Pinning control of scale-free dynamical networks. *Physica A*, 310, 2002.
- [56] X. Li, X. Wang, and G. Chen. Pinning a complex dynamical network to its equilibrium. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 51, 2004.
- [57] Z. Li and G. Chen. Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 53, 2006.
- [58] T. Chen, X. Liu, and W. Lu. Pinning complex network by a single controller. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 54, 2007.
- [59] Z. Duan, W. Chen, and L. Huang. Synchronization of weighted networks and complex synchronized regions. *Physics Letters A*, 372, 2008.
- [60] W. Ren. Synchronization of coupled harmonic oscillators with local interaction. *Automatica*, 44, 2008.
- [61] H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410, 2001.
- [62] R. Albert and A. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74, 2002.

- [63] M. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45:167–256, March 2003.
- [64] G. Chen and X. Wang. Complex networks: Small-world, scale-free and beyond. *IEEE Trans. Circuits and Systems Magazine*, 2003.
- [65] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, 424, 2006.
- [66] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [67] Chi-Tsong Chen. *Linear Systems Theory and Design*. Oxford University Press, 1999.

Apéndice A

Programas de Simulación

En este apéndice, se incluyen los programas desarrollados para las simulaciones numéricas de los ejemplos ilustrativos incluidos en este trabajo. Cada sección de este apéndice, corresponde a cada uno de los programas desarrollados para el ejemplo correspondiente.

A.1. Ejemplo 2.1

Programa principal:

```
1 clear all; close all; clc;
2 % Condiciones Iniciales
3 x0=[1;0;2;0.5];
4 % Tiempo de Simulación
5 t=[0:0.001:15];
6 % Simulacion Sistema DosAgentes
7 [t,x]=ode45('DosAgentes',t,x0);
8 % Grafica Posición
9 subplot(2,1,1);
10 plot(t,x(:,1),'b'); hold on;
11 plot(t,x(:,3),'r'); grid on;
12 xlabel('t'); ylabel('\chi');
13 % Grafica Velocidad
14 subplot(2,1,2);
15 plot(t,x(:,2),'b'); hold on;
16 plot(t,x(:,4),'r'); grid on;
17 xlabel('t'); ylabel('\nu');
```

Programa función DosAgentes

```
1 function dx = DosAgentes(t,x)
2 % Vector de Estados Agente A
3 xa=[x(1);x(2)];
4 % Vector de Estados Agente B
5 xb=[x(3);x(4)];
6 % Ganancias Protocolo
7 k=1;b=1;
```

```

8 % Dinámica Agente
9 A=[0 1;0 0];
10 % Matriz de Conexión "Interna"
11 B=[0 0 0 0;-k -b k b];
12 % Dinámica Agente A
13 dxa=A*xa;
14 % Dinámica en Lazo Cerrado del Agente B
15 dxb=A*xb-B*x;
16 dx=[dxa;dxb];
17 end

```

A.2. Ejemplo 3.1

Programa principal:

```

1 clear all; close all; clc;
2 % Parámetros de Simulación:
3 % n = Grados de Libertad del Agente, N = Número de Agentes en la Red
4 n=1; N=6; dim=2*n;
5 % Generar Vector de Condiciones Iniciales.
6 x01=[2 4]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;
7 for j=2:N
8     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
9 end
10 % Tiempo de Simulación
11 t=[0:0.001:30];
12 % Simulación del Sistema
13 [t,x]=ode45('DinamicaRedAgentes',t,x0);
14 % Grafica Posición
15 subplot(2,2,1); % Cambiar a (2,2,2); caso (b=1 y k=1)
16 plot(t,x(:,1),'b'); hold on;
17 plot(t,x(:,3),'r'); hold on;
18 plot(t,x(:,5),'m'); hold on;
19 plot(t,x(:,7),'c'); hold on;
20 plot(t,x(:,9),'k'); hold on;
21 plot(t,x(:,11),'g'); grid on;
22 xlabel('t'); ylabel('\chi_i');
23 % Grafica Velocidad
24 subplot(2,2,3); % Cambiar a (2,2,4); caso (b=1 y k=1)
25 plot(t,x(:,2),'b'); hold on;
26 plot(t,x(:,4),'r'); hold on;
27 plot(t,x(:,6),'m'); hold on;
28 plot(t,x(:,8),'c'); hold on;
29 plot(t,x(:,10),'k'); hold on;
30 plot(t,x(:,12),'g'); grid on;
31 xlabel('t'); ylabel('\nu_i');

```

Programa función DinamicaRedAgentes.

```

1 function Out=DinamicaRedAgentes(t,x)

```

```

2 % Parámetros de Simulación:
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = Número de Agentes en la Red
4 n=1; N=6; dim=2*n;
5 % Arreglo de Vectores de Estado
6 S=zeros(dim,N);
7 for j=1:N
8     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j);
9 end
10 % Matriz Laplaciana
11 L=[3 0 0 -1 -1 -1;-1 1 0 0 0 0;-1 -1 2 0 0 0;-1 0 0 1 0 0;0 0 0 -1 ...
    1 0;0 0 0 0 -1 1];
12 % Parámetros del Agente
13 m=10;
14 b=3; k=1; % Ganancias que Si cumplen con "Condición"
15 %b=1; k=1; % Ganancias que No cumplen con "Condición"
16 % Dinámica del Agente:
17 A=[0 1;0 0];
18 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
19 H=[0 0;-k/m -b/m];
20 % Dinamica de los Nodos
21 for i=1:N
22     x1=S(1,i); x2=S(2,i); % Estados del Agente i
23     xe=[x1;x2]; % Vector de Estados del Agente i
24     u=H*(L(i,:)* S')'; % Calculo de u_i
25     y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xe+u; % Dinámica del en Lazo Cerrado ...
        del Agente i
26 end
27 Out=y';
28 end

```

A.3. Ejemplo 3.2

Programa principal:

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x01=[1 2]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;
8 for j=2:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
10 end
11 x0(1,9)=0; x0(1,10)=0.5; % Condiciones Iniciales Maestro
12 % Tiempo de Simulación
13 t=[0:0.001:60];
14 % Simulación del Sistema Colectivo
15 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
16 % Grafica Posición
17 subplot(2,2,1); % Cambiar a (2,2,2) caso (k=1 y b=0.4)

```

```

18 plot(t,x(:,1),'b'); hold on;
19 plot(t,x(:,3),'g'); hold on;
20 plot(t,x(:,5),'r'); hold on;
21 plot(t,x(:,7),'c'); hold on;
22 plot(t,x(:,9),'k'); grid on;
23 xlabel('t'); ylabel('\chi_i');
24 % Grafica Velocidad
25 subplot(2,2,3); % Cambiar a (2,2,4) caso (k=1 y b=0.4)
26 plot(t,x(:,2),'b'); hold on;
27 plot(t,x(:,4),'g'); hold on;
28 plot(t,x(:,6),'r'); hold on;
29 plot(t,x(:,8),'c'); hold on;
30 plot(t,x(:,10),'k'); grid on;
31 xlabel('t'); ylabel('\nu_i');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
7 S=zeros(dim,N);
8 R=zeros(dim,1);
9 for j=1:N
10     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j);
11 end
12 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
13 % Matriz Laplaciana(a) y \widehat{D}(a)
14 L=[2 0 -1 -1;-1 1 0 0;-1 -1 2 0;0 0 0 0]; D=diag([0;1;0;1]);
15 % Matriz Laplaciana(b) y \widehat{D}(b) (Quitar comentario ...
16     siguiente linea)
17 % L=[2 0 -1 -1;-1 1 0 0;-1 -1 2 0;0 0 0 0]; D=diag([0;1;0;0]);
18 % Parámetros del Agente
19 m=10;
20 b=3; k=1; % Ganacias que Si cumplen con "Condición"
21 % k=1; b=0.4; % Ganacias que No cumplen con "Condición"
22 % Dinámica del Agente
23 A=[0 1;0 0];
24 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
25 H=[0 0;-k/m -b/m];
26 % Dinamica de los Nodos
27 for i=1:N
28     pa=S(1,i); va=S(2,i); % Estados del Agente i
29     xa=[pa;va]; % Vector de Estados del ...
30     % Agente i
31     pr=R(1,1); vr=R(2,1); % Estados del Maestro
32     xr=[pr;vr]; % Vector de Estados del ...
33     % Maestro
34     xe=xa-xr; % Vector de Estados del Error
35     u=H*(L(i,:) * S') + D(i,i)*H*xe; % Calculo de u_i
36     if i==N

```

```

34     y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+u; % Dinámica en Lazo Cerrado
35     k=i+1;
36     y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr; % Dinámica del Maestro
37     else
38     y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+u; % Dinámica en Lazo Cerrado
39     end
40 end
41 Out=y';
42 end

```

A.4. Ejemplo 3.3

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x01=[1 2]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;
8 for j=2:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
10 end
11 x0(1,9)=sin(0); x0(1,10)=cos(0); % Condiciones Iniciales Maestro
12 % Tiempo de Simulación
13 t=[0:0.001:60];
14 % Simulación del Sistema Colectivo
15 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
16 % Grafica Posicion
17 subplot(2,1,1);
18 plot(t,x(:,1),'b'); hold on;
19 plot(t,x(:,3),'g'); hold on;
20 plot(t,x(:,5),'r'); hold on;
21 plot(t,x(:,7),'c'); hold on;
22 plot(t,x(:,9),'k'); grid on;
23 xlabel('t'); ylabel('\chi_i');
24 % Grafica Velocidad
25 subplot(2,1,2);
26 plot(t,x(:,2),'b'); hold on;
27 plot(t,x(:,4),'g'); hold on;
28 plot(t,x(:,6),'r'); hold on;
29 plot(t,x(:,8),'c'); hold on;
30 plot(t,x(:,10),'k'); grid on;
31 xlabel('t'); ylabel('\nu_i');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%

```

```

3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
7 S=zeros(dim,N);
8 R=zeros(dim,1);
9 for j=1:N
10     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j);
11 end
12 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
13 % Matriz Laplaciana y \widehat{D}
14 L=[2 0 -1 -1;-1 1 0 0;-1 -1 2 0;0 0 0 0]; D=diag([0;1;0;1]);
15 % Parámetros del Agente
16 m=10;
17 b=3; k=1;
18 % Dinámica del Agente
19 A=[0 1;0 0];
20 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
21 H=[0 0;-k/m -b/m];
22 % Dinamica de los Nodos
23 for i=1:N
24     pa=S(1,i); va=S(2,i); % Estados del Agente i
25     xa=[pa;va]; % Vector de Estados del ...
26     % Agente i
27     pr=R(1,1); vr=R(2,1); % Estados del Maestro
28     xr=[pr;vr]; % Vector de Estados del ...
29     % Maestro
30     xe=xa-xr; % Vector de Estados del Error
31     u=H*((L(i,:) * S')')+D(i,i)*H*xe; % Calculo de u_i
32     if i==N
33         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+u; % Dinámica en ...
34         % Lazo Cerrado
35         k=i+1;
36         y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr+[0;-sin(t)]; % Dinámica del ...
37         % Maestro
38     else
39         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+u; % Dinámica en ...
40         % Lazo Cerrado
41     end
42 end
43 Out=y';
44 end

```

A.5. Ejemplo 3.4

Programa principal:

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i

```

```

5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x01=[0.5 0.5]; x0=zeros(1,N*dim);
8 x0(1,9)=sin(0); x0(1,10)=cos(0); xr=[x0(1,9) x0(1,10)];
9 x0(1:dim)=x01-xr;
10 for j=2:N
11     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
12 end
13 % Tiempo de Simulación
14 t=[0:0.001:50];
15 % Simulación del Error del Sistema Colectivo
16 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
17 % Grafica Posicion
18 subplot(2,1,1);
19 plot(t,x(:,1)+x(:,9),'b'); hold on;
20 plot(t,x(:,3)+x(:,9),'g'); hold on;
21 plot(t,x(:,5)+x(:,9),'r'); hold on;
22 plot(t,x(:,7)+x(:,9),'c'); hold on;
23 plot(t,x(:,9),'k'); grid on;
24 xlabel('t'); ylabel('\chi_i');
25 % Grafica Velocidad
26 subplot(2,1,2);
27 plot(t,x(:,2)+x(:,10),'b'); hold on;
28 plot(t,x(:,4)+x(:,10),'g'); hold on;
29 plot(t,x(:,6)+x(:,10),'r'); hold on;
30 plot(t,x(:,8)+x(:,10),'c'); hold on;
31 plot(t,x(:,10),'k'); grid on;
32 xlabel('t'); ylabel('\nu_i');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
7 S=zeros(dim,N);
8 R=zeros(dim,1);
9 for j=1:N
10     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j);
11 end
12 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
13 % Parámetros
14 m=10;
15 b=1; k=1;
16 % Dinámica del Agente
17 A=[0 1;0 0];
18 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
19 H=[0 0;-k/m -b/m];
20 % Dinamica de los Nodos
21 for i=1:N

```

```

22     pe=S(1,i);   ve=S(2,i);           % Estados (Error) del ...
        Agente i
23     xe=[pe;ve];           % Vector de Estados (Error) ...
        del Agente i
24     pr=R(1,1);   vr=R(2,1);         % Estados del Maestro
25     xr=[pr;vr];           % Vector de Estados del ...
        Maestro
26     if i==N
27         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=(A+H)*xe;           % Dinámica del ...
            Error Agente i
28         k=i+1;
29         y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr-[0;sin(t)]; % Dinámica del Maestro
30     else
31         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=(A+H)*xe;           % Dinámica del ...
            Error Agente i
32     end
33 end
34 Out=y';
35 end

```

A.6. Ejemplo 3.5

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=6; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales
7 x01=[20 5]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;
8 for j=2:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
10 end
11 % Tiempo de Simulación
12 t=[0:0.001:30];
13 % Simulación del Sistema Colectivo
14 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
15 % Grafica Posicion
16 subplot(2,1,1);
17 plot(t,x(:,1),'b'); hold on;
18 plot(t,x(:,3),'r'); hold on;
19 plot(t,x(:,5),'m'); hold on;
20 plot(t,x(:,7),'c'); hold on;
21 plot(t,x(:,9),'k'); hold on;
22 plot(t,x(:,11),'g'); grid on;
23 xlabel('t'); ylabel('\chi_i');
24 % Grafica Velocidad
25 subplot(2,1,2);
26 plot(t,x(:,2),'b'); hold on;
27 plot(t,x(:,4),'r'); hold on;

```

```

28 plot(t,x(:,6),'m'); hold on;
29 plot(t,x(:,8),'c'); hold on;
30 plot(t,x(:,10),'k'); hold on;
31 plot(t,x(:,12),'g'); grid on;
32 xlabel('t'); ylabel('\nu_i');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=6; dim=2*n;
6 % Matriz de Desviaciones
7 Dv=[25 -25 15 -15 5 -5;0 0 0 0 0 0];
8 % Arreglo de Vectores de Estado
9 S=zeros(dim,N);
10 for j=1:N
11     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j)-Dv(:,j);
12 end
13 % Matriz Laplaciana
14 L=[3 0 0 -1 -1 -1;-1 1 0 0 0 0;-1 -1 2 0 0 0;-1 0 0 1 0 0;0 0 0 -1 ...
15     1 0;0 0 0 0 -1 1];
16 % Parámetros del Agente
17 m=10; b=3; k=1;
18 % Dinámica del Agente
19 A=[0 1;0 0];
20 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
21 H=[0 0;-k/m -b/m];
22 % Dinámica de los Nodos
23 for i=1:N
24     xp=S(1,i); xv=S(2,i); % Estados del Agente i
25     xa=[xp;xv]; % Vector de Estados del Agente i
26     u=H*(L(i,:)*S')'; % Calculo de u_i
27     y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+u; % Dinámica en Lazo Cerrado
28 end
29 Out=y';
30 end

```

A.7. Ejemplo 3.6

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=2; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x01=[2 5 4 1]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;

```

```

8 for j=2:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
10 end
11 % Condiciones Iniciales Maestro
12 x0(1,17)=0; x0(1,18)=0; x0(1,19)=1; x0(1,20)=1;
13 % Tiempo de Simulación
14 t=[0:0.001:50];
15 % Simulación del Sistema Colectivo
16 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
17 % Grafica Posición (x,y) (Lineas)
18 plot(x(1:1:30001,1),x(1:1:30001,2),'b'); hold on;
19 plot(x(1:1:30001,5),x(1:1:30001,6),'g'); hold on;
20 plot(x(1:1:30001,9),x(1:1:30001,10),'r'); hold on;
21 plot(x(1:1:30001,13),x(1:1:30001,14),'c'); hold on;
22 plot(x(1:1:30001,17),x(1:1:30001,18),'k'); grid on;
23 xlabel('\chi_i(x)'); ylabel('\chi_i(y)');
24 % Grafica Posición (x,y) (Símbolos, Solo 6 posiciones por Simulación)
25 Nt=length(t); p=[1;10001;20001;30001;40001;50001]; i=1;
26 for k=1:Nt
27     if k==p(i)
28         plot(x(k,1),x(k,2),'bo'); hold on;
29         plot(x(k,5),x(k,6),'g*'); hold on;
30         plot(x(k,9),x(k,10),'rs'); hold on;
31         plot(x(k,13),x(k,14),'cd'); hold on;
32         plot(x(k,17),x(k,18),'kp'); hold on;
33         i=i+1;
34     end
35 end
36 plot(x(:,17),x(:,18),'k'); grid on;
37 xlabel('\chi_i(x)'); ylabel('\chi_i(y)');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=2; N=4; dim=2*n;
6 % Matriz de Desviaciones
7 Dv=[0 -2 0 2;2 0 -2 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
8 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
9 S=zeros(dim,N);
10 R=zeros(dim,1);
11 for j=1:N
12     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j)-Dv(:,j);
13 end
14 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
15 % Matriz Laplaciana y \widehat{D}
16 L=[2 0 -1 -1;-1 1 0 0;-1 -1 2 0;0 0 0 0];
17 D=diag([0;1;0;1]);
18 % Parámetros del Agente
19 m=10; b=3; k=1;
20 % Dinámica del Agente

```

```

21 In=eye(n,n); Zn=zeros(n,n); A=[Zn In;Zn Zn];
22 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
23 H=[Zn Zn;-(k/m)*In -(b/m)*In];
24 % Dinamica de los Nodos
25 for i=1:N
26     pax=S(1,i); pay=S(2,i); vax=S(3,i); vay=S(4,i); % Estados ...
27     del Agente i
28     xa=[pax;pay;vax;vay]; % Vector de ...
29     Estados del Agente i
30     prx=R(1,1); pry=R(2,1); vrx=R(3,1); vry=R(4,1); % Estados ...
31     del Maestro
32     xr=[prx;pry;vrx;vry]; % Vector de ...
33     Estados del Maestro
34     xe=xa-xr; % Vector de ...
35     Estados del Error
36     u=H*((L(i,:) * S')')+D(i,i)*H*xe; % Calculo ...
37     de u_i
38     if i==N
39         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+u; % Dinámica ...
40         en Lazo Cerrado
41         k=i+1;
42         y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr; % Dinámica ...
43         del Maestro
44     else
45         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+u; % Dinámica ...
46         en Lazo Cerrado
47     end
48 end
49 Out=y';
50 end

```

A.8. Ejemplo 3.7

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=2; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x0=zeros(1,N*dim);
8 for j=1:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=rand(4,1);
10 end
11 % Condiciones Iniciales Maestro
12 x0(1,17)=5*sin(0); x0(1,18)=5*cos(0); x0(1,19)=0.5*cos(0); ...
13     x0(1,20)=-0.5*sin(0);
14 xr=[x0(1,17) x0(1,18) x0(1,19) x0(1,20)];
15 % Tiempo de Simulación
16 t=[0:0.001:50];

```

```

16 % Simulación del Sistema Colectivo
17 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
18 % Grafica Posición (x,y) (Lineas)
19 Dv=[0 -0.2 0 0.2;0.2 0 -0.2 0;0 0 0 0;0 0 0 0]; % Matriz de ...
    Desviaciones
20 plot(x(1:1:20001,1)+x(1:1:20001,17)+Dv(1,1),...
21      x(1:1:20001,2)+x(1:1:20001,18)+Dv(2,1),'b'); hold on;
22 plot(x(1:1:20001,5)+x(1:1:20001,17)+Dv(1,2),...
23      x(1:1:20001,6)+x(1:1:20001,18)+Dv(2,2),'g'); hold on;
24 plot(x(1:1:20001,9)+x(1:1:20001,17)+Dv(1,3),...
25      x(1:1:20001,10)+x(1:1:20001,18)+Dv(2,3),'r'); hold on;
26 plot(x(1:1:20001,13)+x(1:1:20001,17)+Dv(1,4),...
27      x(1:1:20001,14)+x(1:1:20001,18)+Dv(2,4),'c'); hold on;
28 plot(x(1:1:20001,17),x(1:1:20001,18),'k'); grid on;
29 xlabel('\chi_i(x)'); ylabel('\chi_i(y)');
30 % Grafica Posición (x,y) (Símbolos,Solo 6 posiciones por Simulación)
31 Nt=length(t); p=[1;10001;20001;30001;40001;50001]; i=1;
32 for k=1:Nt
33     if k==p(i)
34         plot(x(k,1)+x(k,17)+Dv(1,1),x(k,2)+x(k,18)+Dv(2,1),'bo'); ...
35             hold on;
36         plot(x(k,5)+x(k,17)+Dv(1,2),x(k,6)+x(k,18)+Dv(2,2),'g*'); ...
37             hold on;
38         plot(x(k,9)+x(k,17)+Dv(1,3),x(k,10)+x(k,18)+Dv(2,3),'rs'); ...
39             hold on;
40         plot(x(k,13)+x(k,17)+Dv(1,4),x(k,14)+x(k,18)+Dv(2,4),'cd'); ...
41             hold on;
42         plot(x(k,17),x(k,18),'kp'); hold on;
43         i=i+1;
44     end
45 end
46 plot(x(:,17),x(:,18),'k'); grid on;
47 xlabel('\chi_i(x)'); ylabel('\chi_i(y)');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=2; N=4; dim=2*n;
6 % Matriz de Desviaciones
7 Dv=[0 -0.2 0 0.2;0.2 0 -0.2 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
8 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
9 S=zeros(dim,N);
10 R=zeros(dim,1);
11 for j=1:N
12     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j)-Dv(:,j);
13 end
14 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
15 % Parámetros del Agente
16 m=10; b=10; k=10;
17 % Dinámica del Agente

```

```

18 In=eye(n,n); Zn=zeros(n,n); A=[Zn In;Zn Zn];
19 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
20 H=[Zn Zn;-(k/m)*In -(b/m)*In];
21 % Dinamica de los Nodos
22 for i=1:N
23     px=S(1,i); py=S(2,i); vx=S(3,i); vy=S(4,i);           % Estados ...
24     (Error) del Agente i
25     xe=[px;py;vx;vy];                                     % Vector de ...
26     Estados (Error) del Agente i
27     prx=R(1,1); pry=R(2,1); vrx=R(3,1); vry=R(4,1);     % Estados ...
28     del Maestro
29     xr=[prx;pry;vrx;vry];                                 % Vector de ...
30     Estados del Maestro
31     if i==N
32         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=(A+H)*xe;                 % Dinámica ...
33         del Error Agente i
34         k=i+1;
35         y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr+...
36         [0;0;-0.05*sin(0.1*t);-0.05*cos(0.1*t)];        % Dinámica ...
37         del Maestro
38     else
39         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=(A+H)*xe;                 % Dinámica ...
40         del Error Agente i
41     end
42 end
43 Out=y';
44 end

```

A.9. Ejemplo 4.1

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=6; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales
7 x01=[5 2]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;
8 for j=2:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
10 end
11 % Tiempo de Simulación
12 t=[0:0.001:50];
13 % Simulación del Sistema Colectivo
14 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
15 % Grafica Posición
16 subplot(2,2,1); % Cambiar a (2,2,2) caso (k=4 y b=1)
17 plot(t,x(:,1),'b'); hold on;
18 plot(t,x(:,3),'r'); hold on;
19 plot(t,x(:,5),'m'); hold on;

```

```

20 plot(t,x(:,7),'y');      hold on;
21 plot(t,x(:,9),'k');      hold on;
22 plot(t,x(:,11),'g');     grid on;
23 xlabel('t'); ylabel('xi');
24 % Grafica Velocidad
25 subplot(2,2,3); % Cambiar a (2,2,4) caso (k=4 y b=1)
26 plot(t,x(:,2),'b');      hold on;
27 plot(t,x(:,4),'r');      hold on;
28 plot(t,x(:,6),'m');      hold on;
29 plot(t,x(:,8),'y');      hold on;
30 plot(t,x(:,10),'k');     hold on;
31 plot(t,x(:,12),'g');     grid on;
32 xlabel('t'); ylabel('vi');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=6; dim=2*n;
6 % Arreglo de Vector de Estados
7 S=zeros(dim,N);
8 for j=1:N
9     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j);
10 end
11 % Matriz Laplaciana
12 L=[3 0 0 -1 -1 -1;-1 1 0 0 0 0;-1 -1 2 0 0 0;-1 0 0 1 0 0;0 0 0 -1 ...
13     1 0;0 0 0 0 -1 1];
14 % Matriz de Masas
15 M=diag([1 2 3 4 5 6]);
16 % Ganancias del Protocolo
17 b=2; k=4; % Ganacias que Si cumplen con "Condición"
18 % Ganacias que No cumplen con "Condición"
19 % Dinámica del Agente
20 A=[0 1;0 0];
21 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
22 H=[0 0;-k -b];
23 % Dinamica de los Nodos
24 for i=1:N
25     x1=S(1,i); x2=S(2,i); % Estados del ...
26     % Agente i
27     xe=[x1;x2]; % Vector de Estados ...
28     % del Agente i
29     u=H*(L(i,:) * S')'; % Calculo de u_i
30     y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xe+(1/M(i,i))*u; % Dinámica en Lazo ...
31     % Cerrado
32 end
33 Out=y';
34 end

```

A.10. Ejemplo 4.2

Programa principal

```
1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x01=[5 0.5]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;
8 for j=2:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
10 end
11 x0(1,9)=0; x0(1,10)=0.2; % Condiciones Iniciales Maestro
12 % Tiempo de Simulación
13 t=[0:0.01:50];
14 % Simulación del Sistema Colectivo
15 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
16 % Grafica Posición
17 subplot(2,2,1); % Cambiar a (2,2,2) caso (k=4 y b=1)
18 plot(t,x(:,1),'b'); hold on;
19 plot(t,x(:,3),'g'); hold on;
20 plot(t,x(:,5),'r'); hold on;
21 plot(t,x(:,7),'c'); hold on;
22 plot(t,x(:,9),'k'); grid on;
23 xlabel('t'); ylabel('\chi_i');
24 % Grafica Velocidad
25 subplot(2,2,3); % Cambiar a (2,2,4) caso (k=4 y b=1)
26 plot(t,x(:,2),'b'); hold on;
27 plot(t,x(:,4),'g'); hold on;
28 plot(t,x(:,6),'r'); hold on;
29 plot(t,x(:,8),'c'); hold on;
30 plot(t,x(:,10),'k'); grid on;
31 xlabel('t'); ylabel('\nu_i');
```

Programa función SistemaColectivo

```
1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
7 S=zeros(dim,N);
8 R=zeros(dim,1);
9 for j=1:N
10     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j);
11 end
12 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
13 % Matriz Laplaciana, \widehat{D}(a) y de Masas
14 L=[2 0 -1 -1;-1 1 0 0;-1 -1 2 0;0 0 0 0];
```

```

15 D=diag([0 1 0 1]); M=diag([3 4 5 6]);
16 % Ganancias Protocolo
17 b=2; k=1; % Ganancias que Si cumplen con "Condición"
18 %b=0.1; k=1; % Ganancias que No cumplen con "Condición"
19 % Dinámica del Agente
20 A=[0 1;0 0];
21 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
22 H=[0 0;-k -b];
23 % Dinamica de los Nodos
24 for i=1:N
25     pa=S(1,i); va=S(2,i); % Estados del Agente i
26     xa=[pa;va]; % Vector de Estados del Agente i
27     pr=R(1,1); vr=R(2,1); % Estados del Maestro
28     xr=[pr;vr]; % Vector de Estados del Maestro
29     xe=xa-xr; % Vector de Estados del Error
30     u=H*((L(i,:) * S')'+D(i,i)*H*xe; % Calculo de u_i
31     if i==N
32         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+(1/M(i,i))*u; % Dinámica en ...
33         Lazo Cerrado
34         k=i+1;
35         y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr; % Dinámica del ...
36         Maestro
37     else
38         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+(1/M(i,i))*u; % Dinámica en ...
39         Lazo Cerrado
40     end
41 end
42 Out=y';
43 end

```

A.11. Ejemplo 4.3

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x01=[2 -2]; x0=zeros(1,N*dim);
8 x0(1,9)=sin(0); x0(1,10)=cos(0); xr=[x0(1,9) x0(1,10)]; % ...
9     Condiciones Iniciales Maestro
10 x0(1:dim)=x01-xr;
11 for j=2:N
12     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
13 end
14 % Tiempo de Simulación
15 t=[0:0.001:50];
16 % Simulación del Sistema Colectivo
17 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);

```

```

17 % Grafica Posición
18 subplot(2,1,1);
19 plot(t,x(:,1)+x(:,9),'b'); hold on;
20 plot(t,x(:,3)+x(:,9),'g'); hold on;
21 plot(t,x(:,5)+x(:,9),'r'); hold on;
22 plot(t,x(:,7)+x(:,9),'c'); hold on;
23 plot(t,x(:,9),'k'); grid on;
24 xlabel('t'); ylabel('\chi_i');
25 % Grafica Velocidad
26 subplot(2,1,2);
27 plot(t,x(:,2)+x(:,10),'b'); hold on;
28 plot(t,x(:,4)+x(:,10),'g'); hold on;
29 plot(t,x(:,6)+x(:,10),'r'); hold on;
30 plot(t,x(:,8)+x(:,10),'c'); hold on;
31 plot(t,x(:,10),'k'); grid on;
32 xlabel('t'); ylabel('\nu_i');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=4; dim=2*n;
6 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
7 S=zeros(dim,N);
8 R=zeros(dim,1);
9 for j=1:N
10     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j);
11 end
12 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
13 % Ganancias Protocolo
14 b=10; k=10;
15 % Dinámica del Agente
16 A=[0 1;0 0];
17 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
18 H=[0 0;-k -b];
19 % Dinamica de los Nodos
20 for i=1:N
21     pe=S(1,i); ve=S(2,i); % Estados (Error) del Agente i
22     xe=[pe;ve]; % Vector de Estados (Error) del Agente i
23     pr=R(1,1); vr=R(2,1); % Estados del Maestro
24     xr=[pr;vr]; % Vector de Estados del Maestro
25     if i==N
26         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=(A+H)*xe; % Dinámica en Lazo ...
27         Cerrado
28         k=i+1;
29         y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr-[0;sin(t)]; % Dinámica del Maestro
30     else
31         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=(A+H)*xe; % Dinámica en Lazo ...
32         Cerrado
33     end
34 end
35 Out=y';

```

A.12. Ejemplo 4.4

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=6; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales
7 x01=[5 2]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;
8 for j=2:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
10 end
11 % Tiempo de Simulación
12 t=[0:0.001:50];
13 % Simulación del Sistema Colectivo
14 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
15 % Grafica Posición
16 subplot(2,1,1);
17 plot(t,x(:,1),'b'); hold on;
18 plot(t,x(:,3),'r'); hold on;
19 plot(t,x(:,5),'c'); hold on;
20 plot(t,x(:,7),'y'); hold on;
21 plot(t,x(:,9),'k'); hold on;
22 plot(t,x(:,11),'g'); grid on;
23 xlabel('t'); ylabel('\chi_i');
24 % Grafica Velocidad
25 subplot(2,1,2);
26 plot(t,x(:,2),'b'); hold on;
27 plot(t,x(:,4),'r'); hold on;
28 plot(t,x(:,6),'c'); hold on;
29 plot(t,x(:,8),'y'); hold on;
30 plot(t,x(:,10),'k'); hold on;
31 plot(t,x(:,12),'g'); grid on;
32 xlabel('t'); ylabel('\nu_i');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=1; N=6; dim=2*n;
6 % Matriz de Desviaciones
7 Dv=[25 -25 15 -15 5 -5;0 0 0 0 0 0];
8 % Arreglo de Vector de Estados
9 S=zeros(dim,N);

```

```

10 for j=1:N
11     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j)-Dv(:,j);
12 end
13 % Matriz Laplaciana
14 L=[3 0 0 -1 -1 -1;-1 1 0 0 0 0;-1 -1 2 0 0 0;-1 0 0 1 0 0;0 0 0 -1 ...
    1 0;0 0 0 0 -1 1];
15 % Matriz de Masas
16 M=diag([1 2 3 4 5 6]);
17 % Ganancias del Protocolo
18 b=2; k=4;
19 % Dinámica del Agente
20 A=[0 1;0 0];
21 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
22 H=[0 0;-k -b];
23 % Dinamica de los Nodos
24 for i=1:N
25     x1=S(1,i); x2=S(2,i); % Estados del ...
    Agente i
26     xe=[x1;x2]; % Vector de Estados ...
    del Agente i
27     u=H*((L(i,:) * S')'); % Calculo de u_i
28     y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xe+(1/M(i,i))*u; % Dinámica en Lazo ...
    Cerrado
29 end
30 Out=y';
31 end

```

A.13. Ejemplo 4.5

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=2; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x01=[-2 -3 5 8]; x0=zeros(1,N*dim); x0(1:dim)=x01;
8 for j=2:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=x01*rand;
10 end
11 x0(1,17)=0; x0(1,18)=0; x0(1,19)=1; x0(1,20)=1; % Condiciones ...
    Iniciales Maestro
12 % Tiempo de Simulación
13 t=[0:0.001:50];
14 % Simulación del Sistema Colectivo
15 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
16 % Grafica Posición (x,y) (Lineas)
17 plot(x(1:1:30001,1),x(1:1:30001,2),'b'); hold on;
18 plot(x(1:1:30001,5),x(1:1:30001,6),'g'); hold on;
19 plot(x(1:1:30001,9),x(1:1:30001,10),'r'); hold on;

```

```

20 plot(x(1:1:30001,13),x(1:1:30001,14),'c'); hold on;
21 plot(x(1:1:30001,17),x(1:1:30001,18),'k'); grid on;
22 xlabel('\chi_i(x)'); ylabel('\chi_i(y)');
23 % Grafica Posición (x,y) (Símbolos,Solo 6 posiciones por Simulación)
24 Nt=length(t); p=[1;10001;20001;30001;40001;50001]; i=1;
25 for k=1:Nt
26     if k==p(i)
27         plot(x(k,1),x(k,2),'bo'); hold on;
28         plot(x(k,5),x(k,6),'g*'); hold on;
29         plot(x(k,9),x(k,10),'rs'); hold on;
30         plot(x(k,13),x(k,14),'cd'); hold on;
31         plot(x(k,17),x(k,18),'kp'); hold on;
32         i=i+1;
33     end
34 end
35 plot(x(:,17),x(:,18),'k'); grid on;
36 xlabel('\chi_i(x)'); ylabel('\chi_i(y)');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=2; N=4; dim=2*n;
6 % Matriz de Desviaciones
7 Dv=[0 -2 0 2;2 0 -2 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
8 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
9 S=zeros(dim,N);
10 R=zeros(dim,1);
11 for j=1:N
12     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j)-Dv(:,j);
13 end
14 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
15 % Matriz Laplaciana, \widehat{D}(a) y de Masas
16 L=[2 0 -1 -1;-1 1 0 0;-1 -1 2 0;0 0 0 0];
17 D=diag([0;1;0;1]); M=diag([3 4 5 6]);
18 % Ganancias Protocolo
19 b=2; k=1;
20 % Dinámica del Agente
21 In=eye(n,n); Zn=zeros(n,n);
22 A=[Zn In;Zn Zn];
23 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
24 H=[Zn Zn;-k*In -b*In];
25 % Dinamica de los Nodos
26 for i=1:N
27     pax=S(1,i); pay=S(2,i); vax=S(3,i); vay=S(4,i); % Estados ...
28     xa=[pax;pay;vax;vay]; % Vector de ...
29     prx=R(1,1); pry=R(2,1); vrx=R(3,1); vry=R(4,1); % Estados ...
30     del Agente i
31     Estados del Agente i
32     del Maestro

```

```

30     xr=[prx;pry;vrx;vry]; % Vector de ...
        Estados del Maestro
31     xe=xa-xr; % Vector de ...
        Estados del Error
32     u=H*((L(i,:) * S')'+D(i,i)*H*xe; % Calculo ...
        de u_i
33     if i==N
34         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+(1/M(i,i))*u; % Dinámica ...
            en Lazo Cerrado
35         k=i+1;
36         y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr; % Dinámica ...
            del Maestro
37     else
38         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=A*xa+(1/M(i,i))*u; % Dinámica ...
            en Lazo Cerrado
39     end
40 end
41 Out=y';
42 end

```

A.14. Ejemplo 4.6

Programa principal

```

1 clear all; close all; clc;
2 %%%%%%%%%%% Parámetros de Simulación %%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=2; N=4; dim=2*n;
6 % Generar Vector de Condiciones Iniciales (Seguidores y Maestro)
7 x0=zeros(1,N*dim);
8 for j=1:N
9     x0(1+(j-1)*dim:dim*j)=rand(4,1);
10 end
11 % Condiciones Iniciales Maestro
12 x0(1,17)=5*sin(0); x0(1,18)=5*cos(0); x0(1,19)=0.5*cos(0); ...
    x0(1,20)=-0.5*sin(0);
13 xr=[x0(1,17) x0(1,18) x0(1,19) x0(1,20)];
14 % Tiempo de Simulación
15 t=[0:0.001:50];
16 % Simulación del Sistema Colectivo
17 [t,x]=ode45('SistemaColectivo',t,x0);
18 % Matriz de Desviaciones
19 Dv=[0 -0.2 0 0.2;0.2 0 -0.2 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
20 % Grafica Posición (x,y) (Lineas)
21 plot(x(1:1:20001,1)+x(1:1:20001,17)+Dv(1,1),...
22     x(1:1:20001,2)+x(1:1:20001,18)+Dv(2,1),'b'); hold on;
23 plot(x(1:1:20001,5)+x(1:1:20001,17)+Dv(1,2),...
24     x(1:1:20001,6)+x(1:1:20001,18)+Dv(2,2),'g'); hold on;
25 plot(x(1:1:20001,9)+x(1:1:20001,17)+Dv(1,3),...
26     x(1:1:20001,10)+x(1:1:20001,18)+Dv(2,3),'r'); hold on;

```

```

27 plot(x(1:1:20001,13)+x(1:1:20001,17)+Dv(1,4),...
28      x(1:1:20001,14)+x(1:1:20001,18)+Dv(2,4),'c'); hold on;
29 plot(x(1:1:20001,17),x(1:1:20001,18),'k'); grid on;
30 xlabel('\chi_i(x)'); ylabel('\chi_i(y)');
31 % Grafica Posición (x,y) (Símbolos,Solo 6 posiciones por Simulación)
32 Nt=length(t); p=[1;10001;20001;30001;40001;50001]; i=1;
33 for k=1:Nt
34     if k==p(i)
35         plot(x(k,1)+x(k,17)+Dv(1,1),x(k,2)+x(k,18)+Dv(2,1),'bo'); ...
36             hold on;
37         plot(x(k,5)+x(k,17)+Dv(1,2),x(k,6)+x(k,18)+Dv(2,2),'g*'); ...
38             hold on;
39         plot(x(k,9)+x(k,17)+Dv(1,3),x(k,10)+x(k,18)+Dv(2,3),'rs'); ...
40             hold on;
41         plot(x(k,13)+x(k,17)+Dv(1,4),x(k,14)+x(k,18)+Dv(2,4),'cd'); ...
42             hold on;
43         plot(x(k,17),x(k,18),'kp'); hold on;
44     end
45     i=i+1;
46 end
47 plot(x(:,17),x(:,18),'k'); grid on;
48 xlabel('\chi_i(x)'); ylabel('\chi_i(y)');

```

Programa función SistemaColectivo

```

1 function Out=SistemaColectivo(t,x)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % n = Grados de Libertad del Agente i, N = # de Agentes en la Red
4 % dim = Dimension del Vector de Estados del Agente i
5 n=2; N=4; dim=2*n;
6 % Matriz de Desviaciones
7 Dv=[0 -0.2 0 0.2;0.2 0 -0.2 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
8 % Arreglo de Vectores de Estado (S=Seguidores y R=Maestro)
9 S=zeros(dim,N);
10 R=zeros(dim,1);
11 for j=1:N
12     S(:,j)=x(1+(j-1)*dim:dim*j)-Dv(:,j);
13 end
14 R(:,1)=x(dim*N+1:dim*(N+1));
15 % Ganancias Protocolo
16 b=10; k=10;
17 % Dinámica del Agente
18 In=eye(n,n); Zn=zeros(n,n); A=[Zn In;Zn Zn];
19 % Matriz de Acoplamiento "Interno"
20 H=[Zn Zn;-k*In -b*In];
21 % Dinamica de los Nodos
22 for i=1:N
23     px=S(1,i); py=S(2,i); vx=S(3,i); vy=S(4,i); % Estados ...
24     xe=[px;py;vx;vy]; % Vector de ...
25     prx=R(1,1); pry=R(2,1); vrx=R(3,1); vry=R(4,1); % Estados ...
26     del Maestro

```

```

26     xr=[prx; pry; vrx; vry];                                % Vector de ...
        Estados del Maestro
27     if i==N
28         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=(A+H)*xe;                  % Dinámica ...
            en Lazo Cerrado
29         k=i+1;
30         y((1+(k-1)*dim:dim*k))=A*xr+...                  % Dinámica ...
            del Maestro
31             [0;0;-0.05*sin(0.1*t);-0.05*cos(0.1*t)];
32     else
33         y((1+(i-1)*dim:dim*i))=(A+H)*xe;                  % Dinámica ...
            en Lazo Cerrado
34     end
35 end
36 Out=y';
37 end

```