



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

Título de la Tesis

Modelado y Análisis de Redes Evolutivas

Tesis que presenta

Andrés Anzo Hernández

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., Febrero del 2015.



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Modelado y Análisis de Redes Evolutivas**” presentada para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Andrés Anzo Hernández** y aprobada el **veinte de febrero del dos mil quince** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Juan González Barajas Ramírez
Director de la tesis

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña
Jurado en el Examen

Dr. Antonio Aguilera Ontiveros
Jurado en el Examen

Dr. Eric Campos Cantón
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro: 174736) y apoyos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 021 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 20 días del mes de febrero del año 2015, se reunió a las 16:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña	Presidente	UASLP
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Secretario	IPICYT
Dr. Antonio Aguilera Ontiveros	Sinodal externo	COLSAN
Dr. Eric Campos Cantón	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

Andrés Anzo Hernández

sobre la Tesis intitulada:

Modelado y Análisis de Redes Evolutivas

que se desarrolló bajo la dirección de

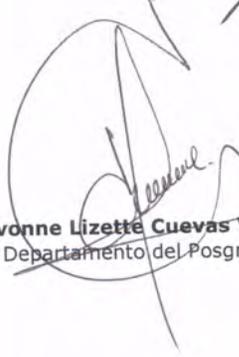
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

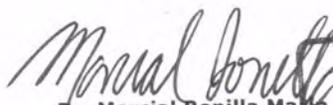
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 17:42 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 20 días del mes de febrero de 2015.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



A mis padres.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más vivo agradecimiento a todas aquellas personas que me otorgaron todo su apoyo. A mis mis padres: Andrés Anzo Chibras y Judith Hernández González, a quienes con mucho cariño les dedico el esfuerzo impreso en cada página de la presente tesis. Dedico también este trabajo a mis hermanos Rafael, Aranza, Elisa y a mi sobrina Pamela por todo el apoyo que me han brindado.

Quiero también agradecer a mi director de tesis, Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez por toda su disponibilidad, su interés en el presente proyecto de tesis, sus múltiples observaciones que beneficiaron a una mejor comprensión de los temas y en general, por compartir conmigo toda su experiencia en el área.

A los sinodales: Dr. Edgardo Ugalde Saldaña, Dr. Antonio Aguilera Ontiveros, Dr. Eric Campos Cantón y a la Dra. Imelda Bonifas Arredondo, un agradecimiento especial por sus valiosos comentarios y observaciones hechas al documento de tesis.

También deseo expresar mi más sincero agradecimiento a las personas que me brindaron su amistad. Sin ningún orden en especial, agradezco a mis compañeros de oficina Anna y Moi, por los muy agradables momentos compartidos. A la Dra. Imelda Bonifas Arredondo por su apoyo y por su amistad. Agradezco también a los compañeros de la DMAP que compartieron gratos momentos conmigo: Fany, Karla, Luis, Omar, Chema, Bahía, Adriana, Héctor, Pablo, Roberto, Francisco y a todos aquellos que me regalaron su amistad y que su nombre no figura en esta pequeña lista.

Índice general

Resumen	XI
Abstract	XIII
Índice de figuras	XIV
Índice de tablas	XVIII
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	5
1.2. Planteamiento del problema e hipótesis	12
1.3. Objetivos	13
1.4. Aportaciones	14
1.5. Descripción del documento	15
2. Preliminares matemáticos	17
2.1. Elementos de la teoría de grafos	17
2.1.1. Medidas básicas de un grafo	19
2.1.2. Matriz de acoplamiento	24
2.2. Redes Dinámicas y Sincronización	26
2.2.1. Redes dinámicas en tiempo continuo	29

2.2.2.	Sincronización y sincronizabilidad	31
2.2.3.	Redes dinámicas en tiempo discreto	42
2.3.	Autómata Celular y Sistemas Conmutados	50
2.3.1.	Autómata Celular	50
2.3.2.	Sistemas Conmutados	55
2.3.3.	Sincronización en redes con estructura conmutada	61
3.	Modelado de la evolución estructural mediante Autómatas Celulares	67
3.1.	Descripción del modelo	67
3.2.	Ejemplos numéricos	70
4.	Modelado de la evolución estructural en redes dinámicas discretas	85
4.1.	Descripción del modelo: Red dinámica discreta coevolutiva	86
4.2.	Estabilidad del estado sincronizado	94
4.3.	Ejemplos numéricos	104
5.	Modelado de la evolución estructural en redes dinámicas continuas	113
5.1.	Descripción del modelo: Red dinámica continua coevolutiva	114
5.2.	Estabilidad del estado sincronizado	119
5.3.	Procesos alternativos de cambio estructural	125
5.4.	Ejemplos numéricos	131
6.	Conclusiones y trabajo futuro	137
6.1.	Comentarios finales	137
6.2.	Trabajo futuro	141
	Bibliografía	143
	Productividad	153

Resumen

En el presente trabajo estudiamos una red bajo dos procesos simultáneos de cambio: por una parte cada nodo es considerado un sistema dinámico y por otra parte, la estructura de la red evoluciona a lo largo del tiempo. Proponemos tres modelos de evolución estructural en los cuales, la dinámica de cambio de la estructura es interpretada como un sistema dinámico. En particular, nosotros nos basamos en el formalismo de las Autómatas Celulares y de los Sistemas Conmutados para definir las características de dicho sistema dinámico. Concerniente al análisis, realizamos la demostración de dos teoremas donde exponemos las condiciones para la estabilidad del estado sincronizado en una red dinámica bajo evolución estructural. Traducimos el problema de la estabilidad del estado sincronizado a un problema de desigualdades matriciales que involucran una matriz positiva definida y la matriz de acoplamiento. La base de nuestro análisis es el teorema de la función común de Lyapunov para sistemas conmutados.

Palabras clave: Redes dinámicas, evolución estructural, autómatas celulares, sistemas conmutados, función común de Lyapunov.

Abstract

In this work we study a network under two simultaneous dynamical processes: in the one hand each node is considered as a dynamical system and, on the other, the network structure evolves over time. We propose three structural evolution models where the dynamical change of the structure is interpreted as a dynamical system. In particular, we use the Cellular Automata formalism and Switching Systems theory in order to define the features of such dynamical system. With respect to their analysis, we propose two theorems where the synchronization stability conditions for a dynamical network under structural evolution are given. We traduce the stability problem of the synchronization state to a matrix inequalities problem involving a positive definite matrix and the coupling matrix. Our analysis is based on the common Lyapunov function theorem for switching systems.

Keywords: Dynamical networks, structural evolution, cellular automata, switched systems, common Lyapunov function.

Índice de figuras

2.1. Ejemplos de bosquejos de grafos.	19
2.2. Otros ejemplos de grafos.	20
2.3. Ejemplo de la distancia geodésica entre dos nodos.	20
2.4. Coeficiente de agrupamiento.	22
2.5. Ejemplos de la distribución de grado para distintos grafos.	24
2.6. Proceso de construcción de la matriz de acoplamiento.	25
2.7. Matriz Laplaciana para distintos grafos con $N = 6$	25
2.8. Regiones de sincronización de acuerdo con la Función Maestra de la Estabilidad.	40
2.9. En una AC unidimensional con $r = 1$, la vecindad de cada celda la componen la celda a la derecha y a la izquierda.	51
2.10. Ejemplo de una regla F_W para una AC unidimensional.	52
2.11. Condición de frontera periódica para una AC unidimensional con radio $r = 1$	53
2.12. Algunos ejemplos de los patrones generados por una AC unidimensional. La AC mostrada en la figura superior es un ejemplo de clase 1 (regla $W = 250$), la figura en la parte media es un ejemplo de clase 2 (regla $W = 90$), mientras que en la figura inferior se muestra una AC clase 4 (regla $W = 30$).	54

2.13. Ejemplo de la trayectoria de un SED impulsada por eventos [1].	57
2.14. Ejemplo de una señal de conmutación.	58
3.1. Ejemplo de la vecindad del enlace $a_{24}(k)$ con $r = 1$	68
3.2. Arreglo en cadena de los enlaces para una red de $N = 6$ nodos.	70
3.3. Evolución de la red bajo la regla $W = 60$	75
3.4. Distribución de grado de la red en distintos instantes de la evolución impulsada por la regla $W = 60$	76
3.5. Evolución de la red bajo la regla $W = 110$	77
3.6. Distribución de grado de la red en distintos instantes de la evolución impulsada por la regla $W = 110$	78
3.7. Evolución de la red bajo la regla $W = 122$	79
3.8. Distribución de grado de la red en distintos instantes de la evolución impulsada por la regla $W = 122$	80
3.9. Evolución de la red bajo la regla $W = 220$	81
3.10. Distribución de grado de la red en distintos instantes de la evolución impulsada por la regla $W = 220$	82
4.1. La deriva del Mapa Logístico para $r = 3.9$	105
4.2. La evolución estructural de la red debido a la regla sujeta a la política centra en los nodos.	106
4.3. Dinámica del error para una evolución impulsada por la regla sujeta a la política centra en los nodos.	107
4.4. La evolución estructural de la red debido a la regla sujeta a la política centra en los enlaces.	108
4.5. Dinámica del error para una evolución impulsada por la regla sujeta a la política centra en los enlaces.	110

5.1. El conjunto de estructuras admisibles (\mathcal{A}) con cuatro nodos y cinco enlaces.	132
5.2. Resultados numéricos para la regla de conmutación (5.3) y una regla adaptable centrada en los enlaces (5.4). a) La dinámica del error, b) fuerzas de conexión y c) regla de conmutación.	134
5.3. Resultados numéricos para la regla de conmutación (5.3) y una regla adaptable centrada en los nodos (5.21). a) La dinámica del error, b) fuerzas de conexión y c) regla de conmutación.	134
5.4. Resultados numéricos para la regla de conmutación con reinicialización (5.30)-(5.31) y una regla adaptable centrada en los enlaces (5.4). a) La dinámica del error, b) fuerzas de conexión y c) regla de conmutación.	135
5.5. Resultados numéricos para la regla de conmutación con reinicialización (5.30)-(5.31) y una regla adaptable centrada en los nodos (5.21). a) La dinámica del error, b) fuerzas de conexión y c) regla de conmutación.	135

Índice de tablas

2.1.	Longitud promedio del camino para distintos grafos [2, 3, 4, 5]. El símbolo $\langle \cdot \rangle$ denota el valor promedio, d_i el número de conexiones del i -ésimo nodo y p la probabilidad de conexión. La función $f(u) = \text{constante}$ si $u \ll 1$ o $f(u) = \ln(u)/u$ si $u \gg 1$	21
2.2.	Coeficiente de agrupamiento para distintos grafos [2, 4, 5]. El símbolo $\langle \cdot \rangle$ denota el valor promedio, d_i el número de conexiones del i -ésimo nodo y p la probabilidad de conexión.	23
2.3.	Ejemplo de una regla F_W para una AC unidimensional en tabla de verdad	52
3.1.	Ejemplos de distintas reglas legales para una AC unidimensional de radio $r = 1$	71
3.2.	Medidas Básicas para los grafos en las Figuras (3.3) (Regla $W = 60$).	83
3.3.	Medidas Básicas para los grafos en las Figuras (3.5) (Regla $W = 110$).	83
3.4.	Medidas Básicas para los grafos en las Figuras (3.7) (Regla $W = 122$).	84
3.5.	Medidas Básicas para los grafos en las Figuras (3.9) (Regla $W = 220$).	84
4.1.	Tabla de verdad la cual describe la lógica de actualización de los enlaces de acuerdo a la política centrada en los nodos.	92

4.2. Tabla de verdad la cual describe la lógica de actualización de los enlaces de acuerdo a la política centrada en los enlaces.	93
4.3. Medidas básicas para los grafos generados con la regla sujeta a la política centra en los nodos.	107
4.4. Medidas básicas para los grafos generados con la regla sujeta a la política centra en los enlaces.	109

Introducción

Los sistemas complejos están compuestos por un conjunto de elementos llamados nodos (o agentes), lo cuales están conectados entre sí [6, 7, 8]. Algunos ejemplos de estos sistemas incluyen al Internet, los sistemas sociales, el cerebro, el sistema inmune, las colonias de insectos, las redes de distribución eléctrica, etc. A pesar de las diferencias en la naturaleza de estos sistemas, es posible observar en ellos algunas propiedades genéricas. Por ejemplo, la estructura de sus interacciones impacta sobre lo que el sistema puede hacer; en otras palabras, la estructura determina la funcionalidad del sistema. Otra propiedad genérica de los sistemas complejos es que existe una relación entre la dinámica de cambio de los agentes y la dinámica de cambio de las interacciones.

Una metodología para estudiar las propiedades genéricas de los sistemas complejos consiste en proponer modelos matemáticos. En este contexto, modelar significa representar al sistema como un objeto matemático cuyo formalismo nos permita capturar las propiedades del sistema. A partir de 1998, investigadores como D. Watts, S. Strogatz, M. Newman y L.A. Barabási propusieron usar la teoría de grafos como una herramienta para estudiar los sistemas complejos. Los resultados de sus investigaciones dieron lugar al descubrimiento de los efectos estructurales llamados de “mundo pequeño” y de “escala libre”. El primero de estos hace referencia al hecho de que la

distancia, medida en número de enlaces, entre dos agentes es muy pequeña comparada con el número total de agentes en la red [9]. El segundo efecto estructural hace referencia al hecho de que la distribución de las conexiones sigue una distribución de ley de potencias, la cual se preserva independientemente del número de agentes, es decir, es una propiedad libre de escala [10].

Strogatz propone que al modelar un sistema complejo mediante una red, la complejidad es incluida en el modelo considerando las siguientes fuentes de complejidad [11]:

1. **Complejidad estructural:** Al incluir en el modelo del sistema complejo la configuración de las conexiones entre los agentes, las cuales pueden ser estructuralmente complicadas, se incluye la complejidad estructural dentro del modelo. Por ejemplo, si las conexiones tienen efectos estructurales como los de mundo pequeño y escala libre, al incluirlos en el grafo que describe la red, se está tomando en cuenta la complejidad estructural del sistema.
2. **Evolución estructural:** Si consideramos en el modelo del sistema complejo que la estructura que forman sus conexiones cambia a lo largo del tiempo, entonces se está tomando en cuenta la fuente de complejidad de la evolución estructural del sistema. En el contexto de redes complejas, dichos cambios pueden ser modelados como procesos que modifican la configuración de las conexiones entre los nodos. Por ejemplo, cuando la red crece, el número de nodos o enlaces varía con el tiempo. Al incluir este proceso en el modelo de la red se está incluyendo la evolución estructural como una fuente de complejidad.
3. **Diversidad en las conexiones:** Esta fuente de complejidad se refiere a considerar las distintas formas en que los agentes establecen una conexión. Por ejemplo, en un sistema complejo la comunicación entre los agentes puede ser unidireccional, o bien, puede tener un peso asociado. Lo anterior es modelado en la red compleja involucrando enlaces con dirección y peso.

4. **Complejidad dinámica:** Si los estados de los nodos puede variar con el tiempo, entonces cada agente tiene dinámica propia la cual puede ser compleja. Es decir, cada nodo a su vez puede ser un sistema dinámico con comportamiento complejo. Al incluir en la red compleja la dinámica de los agentes que la conforman, se toma en cuenta la complejidad dinámica del sistema. Por ejemplo, si cada nodo de la red es un sistema dinámico descrito por ecuaciones diferenciales, el modelo dinámico de la red compleja involucra la complejidad dinámica de cada nodo y la descripción de las conexiones entre ellos.

5. **Diversidad de nodos:** Esta fuente de complejidad se refiere a considerar que los nodos pueden ser de distintas naturalezas. Al considerar la variedad de atributos en los agentes de una red, estamos incluyendo en el modelo del sistema la complejidad debida a la diversidad de nodos. Por ejemplo, algunos nodos pueden estar descritos en dos dimensiones, mientras que otros en tres. En este caso, la conexión de la red deberá considerar dos tipos de nodo, es decir, es una red de nodos son no idénticos.

Strogatz considera que cuando dos o más fuentes de complejidad, de las antes mencionadas, son consideradas simultáneamente en el modelo del sistema complejo, entonces estamos hablando de una **meta-complejidad**. En general, la presencia de una fuente de complejidad afecta otras propiedades del sistema, las cuales son a su vez fuentes de complejidad. Entonces siempre que consideramos un modelo más completo del sistema complejo tendremos a estar hablando de meta-complejidad. Vale la pena destacar que en el presente trabajo de tesis consideramos varias fuentes de complejidad al modelar la red con dos procesos de cambio, dinámica en los estados y un proceso de cambio en las conexiones. Asimismo, uno afecta al otro en un mecanismo que llamaremos coevolución, del cual comentaremos más durante el resto de la tesis.

El interés de los primeros trabajos de investigación sobre redes complejas fue la

complejidad estructural, sin considerar otras de las fuentes propuestas por Strogatz. Enseguida el esfuerzo se enfocó en dos líneas principales de investigación. La primera se relaciona con incluir la dinámica de los nodos en la red, y es usualmente llamada el estudio de redes dinámicas [12]. En este sentido, cada agente es modelado como un sistema dinámico donde el tiempo puede ser continuo o discreto. Por ejemplo, en una red de neuronas la actividad de cada neurona puede ser modelada como un sistema dinámico, el cual puede ser de tiempo continuo como en el modelo de Hodgkin–Huxley [13] o de tiempo discreto como en el modelo de Rulkov [14]. La segunda línea de investigación se relaciona con la dinámica de cambio en la estructura de la red, también llamada la dinámica de la red, procesos de cambio estructural o simplemente evolución estructural [15]. Estos cambios estructurales incluyen entre otros procesos el aumento o disminución de nodos y enlaces, los cambios en la fuerza de conexión así como los procesos de reconexión.

Ambas líneas de investigación se desarrollaron de forma independiente, de tal forma que se tuvo avances en el modelado de las redes dinámicas, sin considerar la evolución estructural y por otra parte, se propusieron modelos para la evolución estructural sin tomar en cuenta la dinámica de los nodos. En años recientes algunos trabajos de T. Gross y otros autores, han empezado a destacar la importancia de considerar ambos procesos dinámicos de manera simultánea [16]. Más aún, a partir del estudio de algunos sistemas complejos tales como las cadenas alimenticias, la dinámica del tráfico en las ciudades, el fenómeno de la angeogéniesis, entre otros, es posible observar que existe una dependencia clara entre ambos procesos dinámicos. En otras palabras, la evolución estructural afecta la dinámica colectiva de los nodos y, de forma recíproca, la dinámica de los nodos afecta la forma en que la estructura evoluciona. La inter-dependencia entre ambos procesos dinámicos de la red es conocida como coevolución [17]. Este concepto es también usado en la biología para describir la evolución de distintas especies en un ecosistema donde una dependen de la otra [18, 19]. Actualmente, la coevolución en redes complejas es un tema de

interés con potenciales aplicaciones en distintas disciplinas científicas.

En la siguiente sección haré una exposición sobre los trabajos de investigación que han estudiado el problema de las redes evolutivas y de sus principales resultados.

1.1. Estado del arte

Vale la pena destacar que este tema de investigación se ha desarrollado bajo tres enfoques distintos. Por una parte, están los trabajos de investigación que modelan y analizan los procesos de cambio estructural sin considerar la dinámica de los nodos, es decir, los nodos son estáticos. Por otra parte están los trabajos de investigación que asumen que los nodos son sistemas dinámicos mientras que la estructura de la red permanece estática. Y finalmente están los trabajos que consideran ambos procesos dinámicos de manera simultánea.

Evolución estructural

Los primeros trabajos sobre redes evolutivas son los modelos de grafos aleatorios. La idea principal de los modelos de grafos aleatorios consiste en definir reglas para conectar un conjunto dado de nodos. Dichas reglas se definen en términos de un proceso estocástico. En este sentido, todas las posibles configuraciones en las que un conjunto dado de nodos puede conectarse con un número dado de enlaces, determina al grafo aleatorio como un ensamble estadístico de grafos donde cada realización de grafos tiene una probabilidad asociada. Al iterar las reglas obtenemos una realización del grafo aleatorio, es decir, un grafo elemento del ensamble estadístico [4, 3]. El proceso de iterar las reglas hasta obtener el grafo final es usualmente llamada la evolución del grafo. Sin embargo, en estos modelos los nodos son considerados como unidades estáticas, carentes de cualquier tipo de dinámica.

Uno de los primeros modelos de grafo aleatorio es el propuesto Erdős y Rényi

[20]. En este modelo se construye un grafo conectando los nodos con una probabilidad uniforme. En cada iteración un par de nodos es enlazado con una probabilidad p , la cual es independiente de la existencia de otros enlaces. De esta forma podemos ver al modelo propuesto por Erdős y Rényi como un modelo de evolución estructural donde p es un parámetro con valores entre cero y uno. Para valores de p superiores a una probabilidad crítica, obtenemos un grafo donde todos los nodos tienen aproximadamente el mismo número de conexiones, o en otras palabras, las conexiones sigue una distribución de Poisson. Por otra parte, para valores de p más pequeños que el crítico, la evolución del grafo resulta en una estructura con pocas conexiones y con nodos aislados [4].

Otro modelo significativo de grafo aleatorio es el propuesto por Newman, Watts y Strogatz [21]. En este modelo iniciamos con un grafo regular, es decir, un grafo donde los nodos tienen el mismo número de conexiones. En cada iteración seleccionamos un par de nodos y los conectamos con una probabilidad p . Para valores de p pequeños la evolución resulta en un grafo con el efecto de mundo pequeño.

Otro de los modelos de red compleja básicos es el propuesto por Barabási y Albert [10]. En este modelo iniciamos con un número pequeño de nodos m_0 y en cada iteración un nuevo nodo es agregado a la red. Cada nuevo nodo es conectado a $m \leq m_0$ nodos ya existentes en la red. La probabilidad de conexión de cada nodo existente con el nuevo nodo es proporcional al número de enlaces (d_i) que tiene, es decir, la probabilidad de conectar el nuevo nodo (j) al nodo existente (i) está dada por: $p_{j \rightarrow i} = \frac{d_i}{\sum_k d_k}$. Esta regla es usualmente llamada acoplamiento preferencial. Las redes generadas con este modelo tienen el efecto de escala libre, donde la distribución de conexiones sigue una ley de potencias. Algunos ejemplos de redes con este efecto estructural son el Internet, el World Wide Web, algunas redes sociales, las redes eléctricas, etc.

La teoría de grafos aleatorios proporciona las herramientas matemáticas para demostrar formalmente que propiedades tiene los grafos construidos con los modelos

antes mencionados. Sin embargo, todo lo que conocemos de las redes reales, desde las redes sociales hasta las redes de neuronas, sugiere que no son aleatorias en el sentido de que los procesos de cambio no involucran un proceso estocástico. A manera de ejemplo pensemos en la red de amigos, donde como sabemos, el proceso de selección de una amistad no es aleatorio, si no por el contrario, involucra otros procesos más complicados. Si deseamos, comprender las propiedades y el comportamiento de las redes reales, debemos involucrar otros procesos no aleatorios en los modelos de red.

Evolución dinámica de los nodos

En los modelos de grafos aleatorios se asume que los nodos permanecen estáticos mientras que la estructura de la red evoluciona. Sin embargo, en la mayoría de las redes reales los nodos no son necesariamente estáticos. Por ejemplo, en la red de neuronas, cada neurona cambia su actividad eléctrica dinámicamente. Una metodología para modelar la dinámica de cambio en los nodos es mediante la teoría de los sistemas dinámicos. Una red dinámica es un modelo de red donde se consideran los nodos como sistemas dinámicos y las conexiones son estáticas. En contrasentido con los modelos de grafos aleatorios, en estos modelos de red la estructura de conexión permanece fija mientras que los nodos evolucionan de acuerdo con un conjunto de ecuaciones diferenciales o en diferencias. Este tipo de modelos recibe el nombre de redes dinámicas y su estudio es de interés debido a sus potenciales aplicaciones en la ingeniería, física, biología, entre otros. Una descripción sobre las redes dinámicas lo podemos consultar en [12, 15, 22, 23, 24, 25] y las referencias que ahí se mencionan.

Uno de los principales problemas de investigación en redes dinámicas consiste en determinar las condiciones bajo las cuales, un ensamble de sistemas dinámicos interconectados logra un comportamiento coordinado llamado sincronización. En términos generales, el concepto de sincronización se refiere a un fenómeno colectivo en

el cual, las trayectorias solución de cada uno de los nodos colapsan en una misma trayectoria llamada el estado sincronizado [26]. Algunos ejemplos del sumergimiento de sincronización son el centelleo de las luciérnagas, las células marcapasos del corazón, la sincronización en los sistemas de comunicación, entre otros.

En 1995, Wu y Chua publican un artículo importante sobre la estabilidad del estado sincronizado en una red de sistemas dinámicos idénticos y acoplados de manera lineal. En ese trabajo los autores demuestran que la red dinámica logra sincronizarse siempre que sea posible estabilizar la dinámica de un nodo aislado con una retroalimentación negativa sobre sus estados [27]. Otro criterio de sincronización importante es el propuesto por Pecora y Carroll [28], este es llamado la Función Maestra de la Estabilidad (MEF por sus siglas en inglés), la cual establece una relación entre la fuerza de acoplamiento y el máximo exponente de Lyapunov transversal. Si la MEF es negativa para un intervalo de valores de la fuerza de acoplamiento, entonces el estado sincronizado será estable en dicho intervalo. Posteriormente, autores como Chen *et al.* [29], Wang *et al.* [30], Li *et al.* [31], entre otros, propusieron criterios para la estabilidad del estado sincronizado mediante el formalismo de funciones de Lyapunov, como el famoso criterio de λ_2 [30]. En el caso de sistemas discretos las condiciones para la estabilidad del estado sincronizado se expresan en términos de los eigenvalores de la matriz de acoplamiento y el máximo exponente de Lyapunov [32, 33, 31].

Recordemos que en los modelos de redes dinámicas, la estructura de la red permanece estática en todo instante de tiempo. Sin embargo, en la gran mayoría de las redes reales la estructura de la red cambia al igual que la dinámica de los nodos [16, 34]. En la siguiente sección describo algunos de los modelos de redes dinámicas bajo evolución estructural propuestos en la literatura.

Evolución estructural y la dinámica de los nodos

La evolución estructural y la dinámica de los nodos han sido dos líneas de investigación independientes. Sin embargo, en años recientes, distintos investigadores como Gross *et al.* [16], Sayama *et al.* [35], Smith *et al.* [34], Aoki *et al.* [17], Herrera *et al.* [36], entre otros, han observado que ambos procesos dinámicos se afectan mutuamente. De manera más específica, los cambios estructurales afectan la dinámica colectiva de los nodos y al mismo tiempo, la dinámica de los nodos afecta la forma en que la estructura de la red evoluciona. La relación entre ambos procesos dinámicos recibe el nombre de coevolución [37, 38]. El estudio de los procesos coevolutivos se ha llevado a cabo desde distintos enfoques.

Algunos autores como Phelps *et al.* [39], Palla *et al.* [40], entre otros, han estudiado la coevolución y la dinámica de las redes sociales. En este contexto, el uso de la teoría de juegos para modelar la dinámica social ha sido también una línea de investigación muy activa. Algunos ejemplos de trabajos de investigación sobre teoría de juegos y coevolución son los trabajos de Poncela *et al.* [41], Quin *et al.* [42] y el trabajo de Zimmermann [43] entre otros. Por otro lado, la coevolución en sistemas biológicos ha sido una línea de investigación muy activa desde hace muchos años. Algunos trabajos destacables son los trabajos de Thompson [19], Dieckmann [44] y Fricker [45]; una discusión sobre el concepto de coevolución lo podemos encontrar en el trabajo de Janzen [18]. Vale la pena destacar que el estudio de la coevolución tiene también potenciales aplicaciones en el estudio de sistemas como la propagación de virus [46, 47], la formación de opinión [48, 49] etc. Una metodología para estudiar la coevolución en redes consiste en analizar como se ve afectada la sincronizabilidad cuando la estructura de la red evoluciona. En este sentido, Chen *et al.* analiza la sincronizabilidad de la red cuando algunos enlaces son removidos o agregados arbitrariamente [29]. A partir del criterio de sincronización λ_2 , los autores demuestran que hay enlaces que pueden mejorar la sincronizabilidad. Basándose en

este mismo criterio, otros investigadores han propuesto una serie de mecanismos de cambio estructural, los cuales están diseñados para mejorar la sincronizabilidad de la red. Entre los cambios propuestos esta la reconexión de enlaces [50], cambiar el peso de los enlaces [51], aumentar o disminuir el número de enlaces [52], nuevos nodos son agregados a la red [53]. Una revisión de estos trabajos la podemos encontrar en el artículo de Jalili [54], donde el autor destaca los trabajos más importantes en esta línea de investigación.

Con el objetivo de analizar los efectos de la evolución estructural sobre la dinámica de los nodos, algunos autores han incorporado una rama de los sistemas dinámicos llamada sistemas conmutados. La idea principal de estos trabajos consiste en definir un conjunto de estructuras admisibles y una función constante a pedazos llamada ley de conmutación [55]. Con esta función definimos los instantes de tiempo en los que conmutamos la estructura. En este contexto, Zhao *et al.* analizan la estabilidad del estado sincronizado en una red que cambia su configuración mediante una ley arbitraria de conmutación [56]. Los autores encuentran que es posible construir una función común de Lyapunov si todas las estructuras admisibles son triangularizables. Por otro lado, Stilwell *et al.* analizan el caso en que las conmutaciones son muy rápidas comparadas con el tiempo de cambio de los nodos [57]. Los autores demuestran que si las conmutaciones son lo suficientemente rápidas, la estabilidad del estado sincronizado de la red conmutada es equivalente a la estabilidad de la red con una estructura promedio.

En Sayama *et al.* se propone un modelo de red donde, basándose en el formalismo de la gramática de grafos (graph grammar), la vecindad de cada nodo es transformada de acuerdo con el estado dinámico de los nodos en la vecindad [35]. Por otra parte, Tomita *et al.* proponen una generalización del concepto de Autómata Celular (AC), donde los cambios estructurales son el resultado de la aplicación de una regla de AC sobre cada uno de los nodos en la red [58]. Otro modelo de interés es el propuesto por Rohlf y Bornholdt, quienes, a partir de reglas que involucran el estado dinámico

de los nodos y las propiedades de la estructura, encuentran que la evolución de una red booleana converge hacia una estructura auto-organizada [59]. Un modelo alternativo de una red coevolutiva es el propuesto por Smith *et al.*, quienes introducen el concepto de una Red Automata, una red donde reglas de autómatas se utilizan para modelar los cambios estructurales [34]. En estos modelos se observa que debido a los procesos coevolutivos emergen algunos fenómenos de auto-organización. Sin embargo, cabe destacar que para estos modelos, el estado dinámico de los nodos se define dentro de un conjunto discreto de valores.

Uno de los primeros trabajos en proponer un modelo de red coevolutiva en donde los nodos son sistemas dinámicos fue el de Ito y Kaneko [60]. Para este modelo los autores consideran una red compuesta por sistemas dinámicos discretos en el tiempo y adicionalmente, la fuerza de acoplamiento entre los nodos conectados cambia de acuerdo con una ley adaptable. En particular los autores proponen una ley adaptable basada en el principio de Hebb, en el cual los nodos con ciertas semejanzas estructurales o dinámicas tienden a incrementar la fuerza de acoplamiento entre ellos, mientras que por el contrario, si los nodos no tienen parecido alguno, entonces dicha fuerza de conexión disminuye. Otro trabajo importante en esta dirección es el trabajo de Zhou y Kurths [61], en el que usa esta metodología para el caso de sistemas dinámicos continuos en el tiempo, e introducen una ecuación diferencial por cada enlace. En este contexto, De Lellis y Sorrentino proponen una clasificación de las reglas de adaptación y las dividen en dos grupos: las reglas centradas en los nodos y centradas en los enlaces [62]. En la primera, las conexiones de cada nodo cambia bajo la misma regla, mientras que en la segunda cada enlace tiene su propia regla. Vale la pena destacar que el modelado a través de reglas adaptables es un área de investigación que ha captado recientemente el interés de investigadores, quienes dedican parte de sus esfuerzos en la búsqueda de reglas adaptables que permitan a los nodos sincronizarse. Algunos ejemplos son los siguientes trabajos [63, 64, 65, 66]. Sin embargo, en estos trabajos la estructura de la red permanece fija en todo instante de

tiempo mientras que la fuerza de acoplamiento cambia de acuerdo a la ley adaptable

1.2. Planteamiento del problema e hipótesis

El objeto de estudio de este trabajo de tesis es una red dinámica bajo evolución estructural. Esto es, una red compuesta por sistemas dinámicos donde la estructura cambia con el tiempo. Mientras que el problema de investigación consiste en proponer modelos de red que consideren el cambio estructural como procesos que dependen del estado de los nodos y la estructura de la red. Adicionalmente, otra parte del problema de investigación es analizar los efectos que el cambio estructural tiene en la estabilidad de los comportamientos colectivos de la red.

En este trabajo la pregunta principal es ¿Cómo definir la dinámica del cambio en la estructura en términos de los estados de los nodos y la estructura actual de la red? Nosotros proponemos considerar que el cambio en la estructura define un sistema dinámico descrito por reglas similares a las de una Autómata Celular, las cuales dependen tanto de la estructura de la red como de los estados de los nodos. En forma recíproca, la dinámica de los nodos está descrita por un sistema que conmuta conforme la estructura de la red cambia. La pregunta que surge como consecuencia es ¿Qué efecto tiene el cambio estructural en la estabilidad del comportamiento colectivo de la red? Para contestar esta pregunta recurrimos al análisis de estabilidad basado en el teorema de la función común de Lyapunov. Es decir, si podemos encontrar condiciones bajo las cuales una misma función de Lyapunov puede ser utilizada para cada una de las estructuras admisibles, entonces el estado sincronizado de la red bajo evolución estructural es estable.

Considerando lo anterior, la hipótesis de este trabajo es que una forma conveniente de modelar la evolución estructural es mediante un sistema dinámico descrito por reglas similares a una Autómata Celular, donde la evolución de los nodos está descrita como un sistema conmutado donde la estabilidad del estado sincronizado de la

red puede ser determinada mediante la teoría de Lyapunov.

1.3. Objetivos

En el presente trabajo de tesis estudiamos la evolución estructural en redes compuestas por sistemas dinámicos, los cuales pueden ser de tiempo discreto o continuo. Nuestro objetivo es proponer modelos que emulen la evolución estructural y así mismo, analizar los efectos de los cambios estructurales sobre el surgimiento y la estabilidad del comportamiento sincronizado. A manera de resumen, el objetivo general y los objetivos particulares de este trabajo de tesis son los siguientes:

Objetivo general

1. Proponer modelos que describan la evolución estructural de una red dinámica en términos de la estructura de la conexión y los estados de los nodos. Así como analizar los efectos de los escenarios de evolución estructural sobre el surgimiento y estabilidad del estado sincronizado de la red.

Objetivos particulares

- Modelar la evolución estructural como una Autómata Celular unidimensional que depende solamente de la estructura actual de la red donde los nodos no tienen dinámica.
- Extender el modelo de evolución estructural al caso en donde los nodos son sistemas dinámicos y las reglas de la autómata dependen de ambos: la estructura y el estado de los nodos.
- Determinar las condiciones bajo las cuales surge un comportamiento sincronizado en una red dinámica bajo evolución estructural.

1.4. Aportaciones

Las aportaciones de esta tesis son:

- Un modelo de evolución estructural basado en el formalismo de las Autómatas Celulares. En este primer modelo se comprueba que a partir de reglas locales, la evolución estructural tiene una dinámica de cambio gradual, en la que nuevos patrones estructurales surgen y evolucionan al iterar dichas reglas. Lo anterior está publicado como capítulo del libro *Sistemas Complejos como Modelos de Computación*, G. Juárez Martínez; H. Zenil, C.R.S. Stephens (Editores). Ed. Luniver Press, Londres (2011). El nombre del capítulo es **Modelando la evolución de una red compleja con Autómatas Celulares**, y los autores son A. Anzo y J.G. Barajas-Ramírez.
- Una metodología para diseñar reglas de cambio a partir de la información de las propiedades dinámicas y estructurales de los nodos. Dichas reglas pueden beneficiar el surgimiento de estructuras con propiedades estructurales deseadas, o bien, beneficiar la emergencia de un estado sincronizado. Este resultado está publicado como artículo del congreso *Third IFAC CHAOS Conference*, y el título del trabajo es **A coevolution model for dynamical networks of discrete-time chaotic systems**, donde los autores son A. Anzo y J.G. Barajas-Ramírez.
- Teorema donde se demuestra la estabilidad del estado sincronizado en una red compuesta por sistemas dinámicos de tiempo continuo y donde ocurren dos procesos simultáneos de cambio. Este resultado está publicado en la revista *Journal of The Franklin Institute*, 351, 358–372 (2014), el título del trabajo es **Synchronization in complex networks under structural evolution** y los autores son A. Anzo y J.G. Barajas-Ramírez.

1.5. Descripción del documento

En el capítulo 2 presentamos algunos conceptos básicos de la teoría de grafos y de redes dinámicas, así como de sistemas conmutados. En el capítulo 3 presentamos nuestra primera propuesta de modelo de red con evolución estructural en redes con nodos estáticos. Para este modelo usaremos las reglas de una Autómata Celular unidimensional con frontera periódica para establecer cuando un enlace es conectado o desconectado. En el capítulo 4 presentamos una extensión del modelo antes mencionado, en el cual consideramos que cada nodo es un sistema dinámico discreto en el tiempo. Para este modelo definimos dos políticas de cambio estructural: la primera está diseñada para beneficiar el surgimiento de sincronización; y la segunda política de cambio esta diseñada para promover la heterogeneidad en la distribución de conexiones en la red. Luego, en el capítulo 5 presentamos un modelo de red bajo evolución estructural con pesos adaptables. Para este modelo dos procesos dinámicos de cambio son considerados a la vez. Por una parte, la estructura de la red cambia impulsada por una ley de conmutación arbitraria, y por la otra parte la fuerza de acoplamiento cambia a través de una ley adaptable. Finalmente, en el capítulo 6 presentamos las conclusiones de este trabajo y algunos comentarios finales.

Preliminares matemáticos

En el presente capítulo presentaremos definiciones y herramientas matemáticas que usaremos a lo largo de la tesis. En primer lugar, abordaremos conceptos de la teoría de grafos, así como algunas medidas básicas para caracterizar la estructura de redes. En la segunda sección discutiremos los conceptos de redes compuestas por sistemas dinámicos de tiempo continuo y discreto. Enseguida, presentaremos la definición de sincronización en redes dinámicas y los criterios para garantizar la estabilidad del comportamiento sincronizado cuando la estructura de la red es fija. En la tercera sección, discutimos las bases matemáticas de los Autómatas Celulares y Sistemas Conmutados; de igual manera revisaremos como estos conceptos pueden ser utilizados para modelar la evolución estructural y analizar la estabilidad del estado sincronizado.

2.1. Elementos de la teoría de grafos

Un grafo es un objeto matemático compuesto por un conjunto de N elementos llamados nodos o vértices ($\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$) y un conjunto de pares ordenados llamados enlaces ($\{(v_1, v_2), \dots, (v_i, v_j), \dots\}$). La rama de la matemáticas que estudia las propiedades de este objeto matemático es la teoría de grafos la cual comenzó en 1735

2.1. Elementos de la teoría de grafos

con los trabajos de Leonhard Euler [3]. A continuación presentamos la definición de grafo no dirigido

Definición 2.1 Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ consiste de dos conjuntos: un conjunto de nodos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, donde la cardinalidad del conjunto V es N , también llamada el tamaño del grafo; y un conjunto compuesto por pares ordenados $E = \{(v_i, v_j) \in V \times V : v_i, v_j \in V\}$ llamado el conjunto de enlaces, donde para cada par ordenado $(v_i, v_j) \in E$ existe $(v_j, v_i) \in E$.

Cabe destacar que para un grafo no dirigido con N nodos, el número máximo de enlaces que pueden existir es $N(N - 1)/2$.

Un forma de representar un grafo es dibujando cada elemento del conjunto V como un punto y cada enlace $(v_i, v_j) \in E$ como una línea que une los puntos v_i y v_j . De esta forma se obtiene un bosquejo del grafo como en las Figuras (2.1). Los grafos dibujados en (2.1a), (2.1b) y (2.1c) son llamados regulares debido a que sus nodos tienen el mismo número de conexiones. El grafo (2.1a) es llamado totalmente conectado o completo; el grafo (2.1b) es llamado de vecinos más cercanos y el grafo (2.1c) es llamado grafo estrella. Por otra parte, los grafos dibujados en (2.1d), (2.1e) y (2.1f) son realizaciones de grafos aleatorios debido que su construcción fue realizada mediante un proceso estocástico. De esta forma, en la Figura (2.1d) dibujamos un grafo construido con el modelo Erdős- Renyi [20], en la Figura (2.1e) dibujamos un grafo construido con el modelo Watts-Strogatz [67], y en la Figura (2.1f) dibujamos un grafo construido con el modelo Barabási-Albert [68].

Podemos extender el concepto de grafo no dirigido de distintas formas. Un primer paso es considerar que los enlaces tienen dirección, lo cual podemos dibujar mediante flechas en los enlaces (Figura (2.2a)). Los grafos dirigidos modelan situaciones en las que la comunicación entre los nodos no es simétrica. Otra forma de extender la definición de grafo es asociando un peso a cada uno de los enlaces. El peso de un

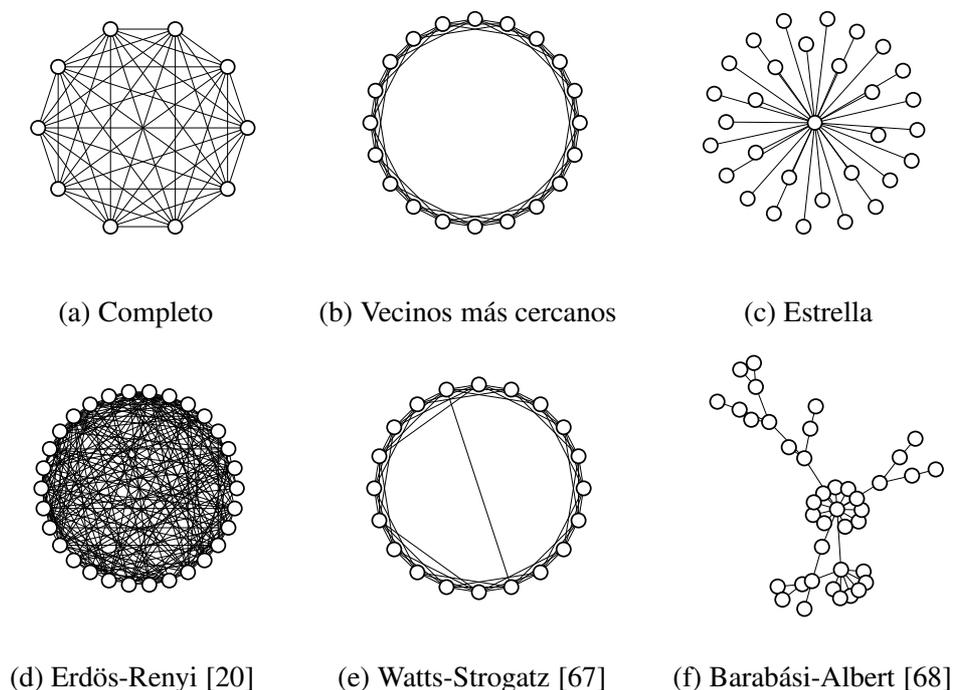


Figura 2.1: Ejemplos de bosquejos de grafos.

enlace puede dibujarse agregando un grosor o un color a las líneas que unen los nodos (Figura (2.2b)). Un grafo con pesos en sus enlaces puede modelar alguna propiedad de la conexión como la fuerza de interacción, la cantidad de flujo de información, etc. La manera usual de denotar el peso del enlace (v_i, v_j) es con el símbolo w_{ij} . Otra forma de extender la definición de grafo no dirigido es asociando alguna propiedad o atributo a los nodos, como por ejemplo la popularidad del nodo, su estado dinámico, etc. Esto último lo podemos representar coloreando los nodos (Figura (2.2c)) o bien, asociando un número que cuantifique la importancia del nodo.

2.1.1. Medidas básicas de un grafo

En términos generales, para caracterizar las propiedades estructurales de un grafo son necesarias tres medidas básicas: la longitud de camino promedio, el coeficiente de agrupamiento y la distribución de conexiones. Dichas mediciones dan una estimación del tamaño de la red, la densidad de nodos y la distribución de enlaces. A

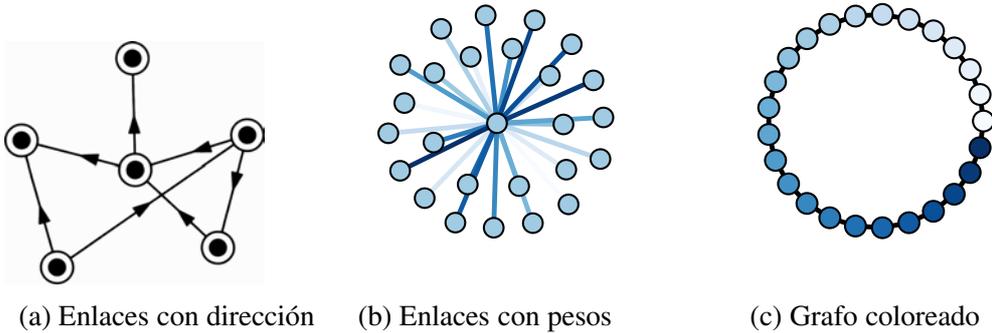


Figura 2.2: Otros ejemplos de grafos.

continuación presentamos las definiciones de estas medidas.

Longitud promedio del camino

La longitud promedio del camino tiene un papel significativo para la comunicación entre los nodos y para su funcionalidad. Para definir esta medida debemos explicar primero los conceptos de camino y de distancia geodésica. El camino se define simplemente como la secuencia de enlaces (o de nodos) no repetidos que unen dos nodos. A manera de ejemplo consideremos el grafo en la

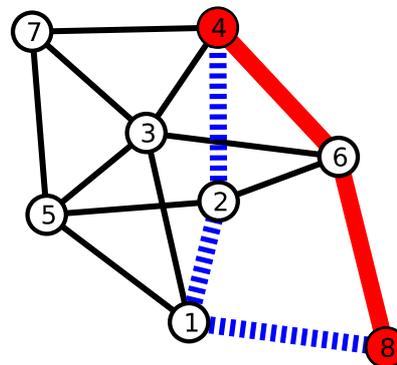


Figura 2.3: Ejemplo de la distancia geodésica entre dos nodos.

de estos conceptos, en la Figura (2.3) hemos etiquetado con números cada uno de los nodos en la red. Los caminos entre el nodo con etiqueta 4 y el nodo con etiqueta 8 están dados por las secuencia de enlaces $S_1 = \{(8, 6), (6, 4)\}$ y $S_2 = \{(8, 1), (1, 2), (2, 4)\}$. Sin embargo, la distancia geodésica (l_{ij}) entre los nodos con etiqueta i y j -o simplemente la distancia - se define como el número de enlaces a lo largo del camino más pequeño. En este caso, la distancia

Grafo	\mathcal{L}
Completo	1
Vecinos más cercanos	$\frac{N}{2\langle d_i \rangle}$
Erdős-Renyi	$\approx \frac{\log(N)}{\log(\langle d_i \rangle)}$
Watts-Strogatz	$\approx pf(Np)$
Barabási-Albert	$\approx \frac{\log N}{\log(\log N)}$

Tabla 2.1: Longitud promedio del camino para distintos grafos [2, 3, 4, 5]. El símbolo $\langle \cdot \rangle$ denota el valor promedio, d_i el número de conexiones del i -ésimo nodo y p la probabilidad de conexión. La función $f(u) = \text{constante}$ si $u \ll 1$ o $f(u) = \ln(u)/u$ si $u \gg 1$.

geodésica corresponde al número de enlaces que hay en $S1$, es decir, dos.

Con los conceptos de camino y de distancia podemos ahora definir la longitud promedio del camino (\mathcal{L}), la cual es simplemente el promedio de la distancia entre todos los posibles pares de nodos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \geq j} l_{ij} \quad (2.1)$$

donde N es el número de nodos. En la Tabla (2.1) mostramos algunas aproximaciones de \mathcal{L} para distintos grafos.

Coefficiente de agrupamiento

En una red social por ejemplo, no solo importa cuantos amigos tiene un individuo, sino que también importa cuantos de sus amigos se conocen entre ellos. Dentro del contexto de la teoría de grafos la media que nos permite cuantificar esto último es llamada el coeficiente de agrupamiento. En términos generales, el coeficiente de agrupamiento es una medida del número de triángulos que se forman entre los vecinos del nodo i ; esto es, el número de nodos conectados al nodo i y que a su vez están conectados entre ellos. A manera de ejemplo consideremos el grafo de la Figura (2.4). Observemos que de los siete nodos conectados al nodo con etiqueta 1, sólo cuatro establecen una conexión entre ellos.

2.1. Elementos de la teoría de grafos

El coeficiente de agrupamiento local c_i del nodo i se define como la razón entre el número de enlaces que realmente existen (E_i) (para nuestro ejemplo $E_1 = 2$) y el número máximo de conexiones que pueden existir entre los nodos conectados al nodo i ($d_i(d_i - 1)/2$), esto es

$$c_i = \frac{2E_i}{d_i(d_i - 1)} \quad (2.2)$$

donde d_i es el número de enlaces del i -ésimo nodo.

El coeficiente de agrupamiento (C) de toda la red se obtiene haciendo un promedio de c_i sobre todos los nodos en la red:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i \quad (2.3)$$

Por definición, $0 \leq c_i \leq 1$ y $0 \leq C \leq 1$, donde 1 corresponde al caso extremo donde cada nodo está conectado con todos los nodos en la red, y 0 corresponde al caso en que no hay triadas. En este sentido podemos decir que una red con un coeficiente de agrupamiento cercano al uno es una red donde los nodos están agrupados en triadas, lo cual beneficia la transmisión de la información entre los elementos de la red. En la Tabla (2.2)

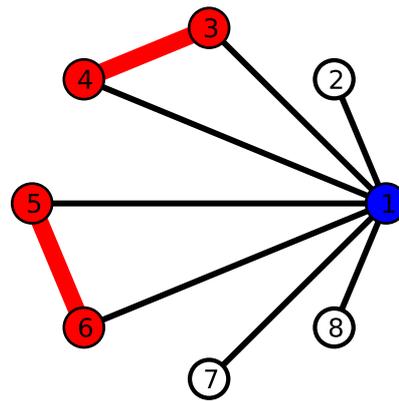


Figura 2.4: Coeficiente de agrupamiento.

mostramos algunas aproximaciones de C para distintos grafos.

Grafo	C
Completo	1
Vecinos más cercanos	$\frac{3}{4}$ (para $d_i = 2$)
Erdős-Renyi	$\approx p$
Watts-Strogatz	$\approx \frac{3(\langle d_i \rangle - 1)}{2(2\langle d_i \rangle - 1)}(1 - p)^3$
Barabási-Albert	$\approx N^{-0.75}$

Tabla 2.2: Coeficiente de agrupamiento para distintos grafos [2, 4, 5]. El símbolo $\langle \cdot \rangle$ denota el valor promedio, d_i el número de conexiones del i -ésimo nodo y p la probabilidad de conexión.

Distribución del grado de nodo

Cuantos enlaces existen por cada nodo en una realización de un grafo aleatorio es una medida que podemos cuantificar con la distribución de grado de nodo. Dentro del contexto de la teoría de grafos definimos el grado del nodo i (el cual denotamos con d_i) como el número de enlaces que conectan a este nodo. En este contexto, la función de distribución del grado de nodo ($P(d)$) es una medida de la probabilidad de que el nodo i -ésimo de la red tenga grado de nodo d . En otras palabras, $P(d)$ es la distribución de probabilidad que se obtiene para describir como al seleccionar de forma aleatoria un nodo en la red su grado de nodo es exactamente d .

Una manera de aproximar la distribución del grado de nodo $P(d)$ se obtiene mediante histogramas de las realizaciones del grafo aleatorio. Sin pérdida de la generalidad, para una red dada, la distribución de grado de nodo puede ser de dos tipos. Para algunas redes como las generadas con el modelo Erdős-Renyi, el grado de nodo fluctúa aleatoriamente alrededor de un valor promedio, resultando así en una distribución de grado de nodo que se aproxima adecuadamente mediante la distribución de probabilidad de Poisson (Figura (2.5a)). Por otra parte, las redes generadas con el modelo de Barabási-Albert se caracterizan por tener una distribución del grado nodo que se aproxima adecuadamente mediante una distribución del tipo regla de potencias (Figura (2.5b)). Un red con esta distribución se caracteriza principalmente por la existencia de nodos concentradores, lo cuales tienen un número significativo de co-

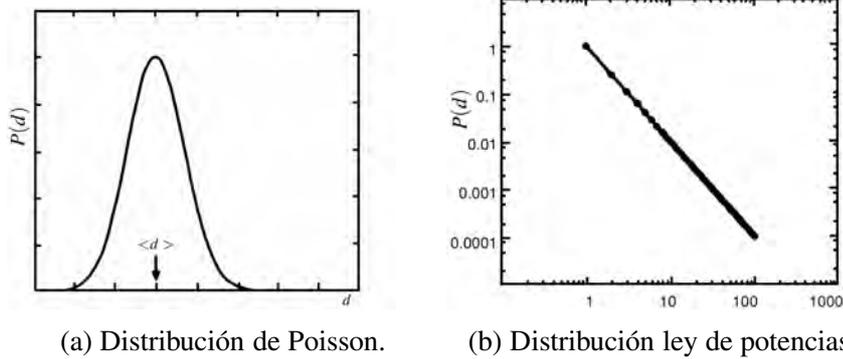


Figura 2.5: Ejemplos de la distribución de grado para distintos grafos.

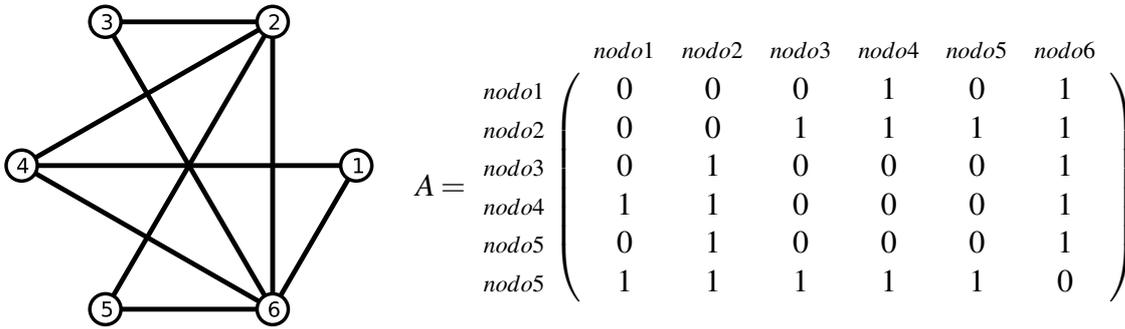
nexiones comparado con el resto de los nodos. Más aún, de acuerdo con los estudios en distintas redes del mundo real, se ha observado que una gran mayoría de las redes tienen este tipo de distribución [10], donde $P(d) \approx d^{-\gamma}$, con $1 \leq \gamma \leq 3$.

2.1.2. Matriz de acoplamiento

Como vimos anteriormente, un grafo se compone de un conjunto de nodos y un conjunto de enlaces. Ambos conjuntos los podemos representar a través de una matriz la cual contiene toda la información de la estructura del grafo. Dicha matriz recibe el nombre de matriz de acoplamiento (o de adyacencia). Para un grafo no dirigido de N nodos, la matriz de acoplamiento $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ es una matriz cuadrada y simétrica cuyas entradas a_{ij} , para $i, j = 1, 2, \dots, N$, se construyen de la siguiente forma: si los nodos con etiquetas i y j están conectados, entonces la entrada a_{ij} toma el valor de uno; por el contrario, si dichos nodos no están conectados, entonces a_{ij} toma el valor de cero. Con el objetivo de ejemplificar el proceso de construcción de la matriz A , en la Figura (2.6) mostramos la matriz de acoplamiento para el grafo en la Figura (2.6a). Note que cada fila y columna corresponde a la etiqueta de cada nodo.

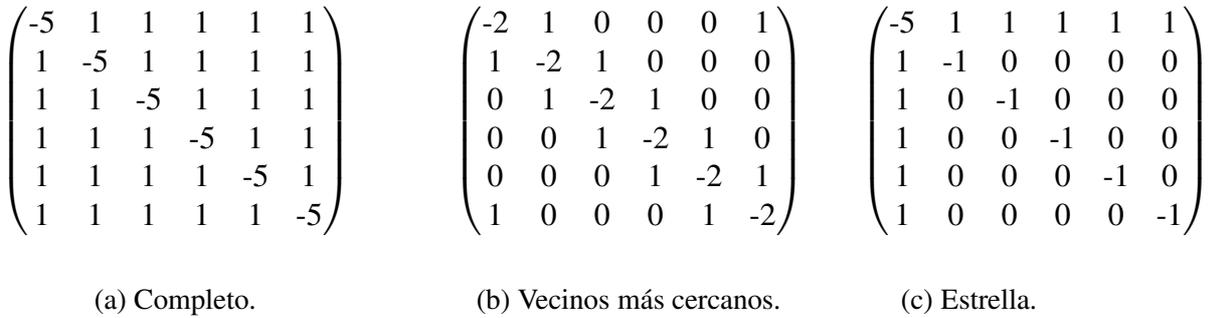
Otra matriz importante asociada al grafo es la matriz Laplaciana, la cual se construye a partir de la matriz de acoplamiento de la siguiente forma

$$L = A - D \tag{2.4}$$



(a) Grafo. (b) Matriz de acoplamiento.

Figura 2.6: Proceso de construcción de la matriz de acoplamiento.



(a) Completo. (b) Vecinos más cercanos. (c) Estrella.

Figura 2.7: Matriz Laplaciana para distintos grafos con $N = 6$.

donde $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$. El grado de nodo d_i lo podemos calcular a partir de la matriz A como $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$. Vale la pena destacar que para este trabajo de tesis la evolución estructural se describe a través de los cambios de la matriz A . En la Figura (2.7) podemos observar algunos ejemplos de la matriz Laplaciana para distintos grafos regulares.

A partir de los eigenvectores y eigenvalores de la matriz Laplaciana podemos obtener información sobre las propiedades estructurales del grafo. En particular, los eigenvalores de L nos dan una medida de la conectividad de la red y de que tan rápido se propaga una caminata aleatoria en la red [3]. En el contexto de una red compuesta por sistemas dinámicos, el eigenvalor más pequeño y distinto de cero de L determina las propiedades del comportamiento sincronizado de la red [23].

2.2. Redes Dinámicas y Sincronización

Para el caso de un grafo no dirigido, compuesto por N nodos conectados de tal forma que no existan nodos aislados (con grado de nodo cero), L es una matriz simétrica e irreducible la cual tiene las siguientes propiedades [69]:

- Todos los eigenvalores de L ($\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$) son reales.
- Uno de los eigenvalores es cero (el cual llamamos λ_1) y su eigenvector asociado es $v_1 = 1/\sqrt{N}(1, 1, \dots, 1)^T$.
- L es una matriz positiva definida y podemos enumerar sus eigenvalores en orden decreciente de la siguiente forma:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N. \quad (2.5)$$

- La multiplicidad de λ_1 es igual al número de componentes conectados del grafo, es decir, al número de subgrafos aislado en la red.

2.2. Redes Dinámicas y Sincronización

La gran mayoría de los sistemas complejos se compone por unidades que tienen su propia dinámica intrínseca. Al modelar estos sistemas como una red podemos considerar que cada nodo es un sistema dinámico, en otras palabras, cada nodo i está descrito por un conjunto de variables de estado $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ cuyo cambio ocurre en una escala de tiempo continuo $t \in \mathbf{R}^+$ o en una escala de tiempo discreta $k \in \mathbf{Z}^+$. Para el primer caso, diremos que el sistema es de tiempo continuo y para el segundo caso diremos que es un sistema de tiempo discreto.

Para los sistemas de tiempo continuo la dinámica está descrita por ecuaciones diferenciales de la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (2.6)$$

Para los sistemas de tiempo discreto la dinámica de las variables de estado se describe a través de ecuaciones en diferencias de la siguiente forma:

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad x(0) = x_0. \quad (2.7)$$

donde $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es el campo vectorial que describe la dinámica del sistema, $D \subset \mathbf{R}^n$ es un dominio que contiene al origen y x_0 es la condición inicial.

A lo largo de este documento de tesis consideraremos el caso en que el campo vectorial $f(\cdot)$ es no lineal y posiblemente presenta un comportamiento caótico. Más aún, para el caso de un sistema de tiempo continuo asumiremos que $f(\cdot)$ es una función continua y satisface la siguiente condición

Definición 2.2 [70] El campo vectorial $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es Lipschitz si existe una constante positiva L tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad (2.8)$$

$\forall x, y \in B_r = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$. La constante positiva L es llamada la constante de Lipschitz.

Algunos de los problemas de análisis más comunes en los sistemas dinámicos (2.6) y (2.7) consisten en determinar sus puntos de equilibrio, así como establecer condiciones bajo las cuales su comportamiento es estable, periódico o caótico, etc. Algunos libros en donde podemos encontrar un estudio detallado sobre sistemas dinámicos son [70, 71, 72] y las referencias ahí marcadas.

Por su importancia para este trabajo, consideramos conveniente exponer algunos de los conceptos básicos sobre la estabilidad de los sistemas dinámicos. Iniciaremos con la siguiente definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov para el sistema (2.6).

Definición 2.3 [70] Un punto $x = x^*$ en el espacio de estados es un punto de equilibrio (PE) de (2.6) si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es x^* , el estado del sistema permanece en x^* en todo tiempo futuro. Es decir, $f(x^*) = 0, \forall t$. Para el sistema (2.7) diremos que $x = x^*$ es un punto de equilibrio del sistema dinámico discreto si $f(x^*) = x^*$.

Definición 2.4 [Definición 4.1,[70]] El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.6) es

- **Estable (en el sentido de Lyapunov)** si, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (2.9)$$

- **Inestable** si no es estable.
- **Asintóticamente estable**, si es estable y δ se puede seleccionar de tal forma que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Una de las metodologías para analizar la estabilidad del sistema dinámico alrededor del punto de equilibrio en el origen se basa en el concepto de funciones de Lyapunov. En términos generales, una función de Lyapunov se relaciona con el concepto de disipación de la energía para un sistema mecánico con fricción. Para este tipo de sistemas, la energía E se disipa durante el movimiento del sistema, es decir, $dE/dt < 0$ a lo largo de las trayectorias del sistema. Lo anterior se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 2.1 [Teorema 4.1,[70]]

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.6) y $D \subset \mathbf{R}^n$ un dominio que contiene el origen $x = 0$. Sea $V : D \rightarrow \mathbf{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en } D - \{0\} \quad (2.10)$$

y

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en } D \quad (2.11)$$

Entonces, $x = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en } D - \{0\} \quad (2.12)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

La función que satisface los criterios (2.10) y (2.11) es usualmente llamada la función de Lyapunov. Vale la pena destacar que para los sistemas dinámicos discretos es posible enunciar un teorema semejante al **Teorema 2.1**, con la diferencia que la función de Lyapunov depende de las variables discretas $V(x(k))$ y sus diferencias a lo largo de las soluciones de (2.7) son decrecientes definidas negativas [72], es decir $\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$.

Cuando un conjunto de sistemas dinámicos, descritos por (2.6) o por (2.7), son acoplados de manera lineal decimos que tenemos una red dinámica. En las siguientes secciones describiremos los modelos de redes dinámicas para el caso continuo y discreto, y expondremos algunos de los resultados sobre las condiciones de sincronización en redes dinámicas.

2.2.1. Redes dinámicas en tiempo continuo

Consideremos un conjunto de N sistemas dinámicos idénticos, es decir, el campo vectorial $f(\cdot)$ es el mismo para todos los nodos. Cuando estos sistemas dinámicos

2.2. Redes Dinámicas y Sincronización

están conectados de acuerdo a la matriz de adjacencia, la ecuación (2.6) (o la ecuación (2.7) para el caso discreto) es modificada con el fin de incluir la interacción de cada nodo con sus vecinos. En el caso de acoplamiento lineal, la interacción se expresa como la combinación lineal de las salidas de sus nodos vecinos, es decir

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \mathcal{H}(x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.13)$$

donde $x_i(t) = [x_{i1}, \dots, x_{in}]^T \in \mathbf{R}^n$ es un vector con las variables de estado del i -ésimo nodo, $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es el campo vectorial que describe la dinámica del nodo aislado (con $D \subset \mathbf{R}^n$), $c > 0$ es la fuerza de acoplamiento entre cada par de nodos, $\mathcal{H} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es la función de salida de cada nodo, y $a_{ij} = a_{ji}$ es uno si el i -ésimo y el j -ésimo nodo están conectados, y es cero si no lo están.

La matriz de conexiones la cual describe el patrón de las conexiones en la red, $A = \{a_{ij}\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$, se completa definiendo los elementos de la diagonal como

$$a_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ji} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.14)$$

donde d_i es el grado del i -ésimo nodo. La condición (2.14) es usualmente llamada la condición de difusividad, la cual describe una situación de balance de energía. Esta condición es similar a la ley de Kirchoff dentro del contexto de la teoría de circuitos [25]. Vale la pena hacer notar que la matriz de conexiones es en realidad la matriz Laplaciana (2.4). Sin embargo, por simplicidad en la notación, la denotaremos con la letra A .

En este modelo de red hemos considerado que la fuerza de acoplamiento c es constante en el tiempo y es la misma para cada par de nodos conectados. Con respecto a la forma de la función de salida \mathcal{H} tenemos una gran variedad de opciones que han sido propuestas en las referencias. En particular nosotros consideramos una función

de salida lineal de la forma $\mathcal{H}(x_j) = \Gamma x_j$, donde $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal la cual describe el acoplamiento entre las variables de estado de cada par de nodos. Por simplicidad, $\gamma_l = 1$, si la conexión se realiza a través de la l -ésima variable de estado; por otra parte, $\gamma_l = 0$ en caso contrario. Con estas suposiciones, la ecuación (2.14) puede ser escrita como:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.15)$$

Es importante destacar que el modelo de red (2.15) tiene, en resumen, las siguientes simplificaciones: todos los nodos son el mismo sistema dinámico, la fuerza de acoplamiento es constante en el tiempo y uniforme para cada par de nodos, la función de salida \mathcal{H} es una función lineal y es además la misma para cada nodo, la matriz de acoplamiento es simétrica, difusiva y constante en el tiempo. Dependiendo de que se quiere modelar o estudiar, podemos cambiar algunas de las consideraciones. Por ejemplo, como veremos más adelante en esta tesis, nosotros consideramos el caso de una red dinámica evolutiva donde la matriz de acoplamiento y la fuerza de acoplamiento cambian en el tiempo.

En la siguiente sección hablaremos sobre el concepto de sincronización y sincronizabilidad en una red dinámica, presentaremos también algunos criterios de sincronización para la red descrita en (2.15).

2.2.2. Sincronización y sincronizabilidad

El comportamiento sincronizado en una red dinámica ocurre cuando los sistemas que la componen cambian sus estados al unísono. Cabe destacar que el fenómeno de la sincronización puede manifestarse en distintas formas. Por ejemplo, osciladores acoplados pueden presentar sincronización de fase [73] o de pulsos [74], entre otros tipos de sincronización propuestos en la literatura. Una exposición detallada sobre la sincronización en sistemas no lineales y sus potenciales aplicaciones la podemos

2.2. Redes Dinámicas y Sincronización

encontrar en las siguientes referencias [75, 26]. En particular, en este trabajo de tesis consideramos el caso de sincronización completa, también llamada sincronización idéntica, entre los nodos de la red. Este tipo de sincronización ocurre cuando las trayectorias de cada uno de los nodos colapsan sobre la misma solución. En el caso de una red difusivamente conectada, esta solución de sincronización corresponde a la de un nodo aislado de la red [23]. Cuando se logra el estado sincronizado, la dinámica de la red completa es equivalente a la dinámica de un nodo aislado. Esto nos permite interpretar el proceso de sincronización como un fenómeno colectivo en el cual surge, de manera genérica, un cierto grado de orden dentro de la dinámica de la red.

A continuación presentamos la definición de sincronización completa para el modelo de red (2.15).

Definición 2.5 La red dinámica (2.15) logra de manera asintótica una sincronización completa si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.16)$$

para algún $s(t) \in \mathbf{R}^n$. Llamaremos a $s(t)$ el estado sincronizado, el cual puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica, o bien una trayectoria caótica.

Es importante destacar que cuando todos los nodos están sincronizados, por la condición de difusividad (2.14) el segundo término en la derecha de la ecuación (2.15) es igual a cero. Más aún, debido a que todos los nodos son el mismo sistema dinámico, cuando la red se sincroniza todas las trayectorias colapsan en la trayectoria $s(t)$, la cual satisface

$$\dot{s}(t) = f(s(t)). \quad (2.17)$$

Una interpretación geométrica de la Definición (2.5) es la siguiente: la red logra una sincronización completa si conforme $t \rightarrow \infty$ las trayectorias $x_i(t)$, para $i =$

$1, 2, \dots, N$, convergen a la variedad de sincronización $\Omega = \{x(t) \in \mathbf{R}^n : x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t)\}$, donde $s(t)$ satisface la ecuación (2.17).

Por otro lado, podemos estudiar la estabilidad de la solución $s(t)$ del modelo de red (2.15) considerando un pequeño error de sincronización $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$, donde $e_i(t) \ll s(t)$.

Definición 2.6 Decimos que el estado sincronizado es estable si y sólo si la dinámica del error de sincronización $\dot{e}_i(t)$ impulsa a la red de nuevo al estado sincronizado por una disminución constante del error de sincronización $e_i(t)$. Si el error de sincronización incrementa entonces el estado sincronizado es inestable.

En este sentido, garantizar la estabilidad del estado sincronizado es equivalente a garantizar la estabilidad de la dinámica del error de sincronización alrededor del origen. Basado en lo anterior, algunos autores como Pecora *et al.*, y Chen *et al.*, entre otros, han propuesto usar distintas metodologías para garantizar la estabilidad del error de sincronización. Por su importancia, en este capítulo presentamos el criterio basado en la función maestra de la estabilidad (MSF) [28] y el criterio λ_2 [29]. Antes de iniciar con la exposición de estos resultados, considero importante presentar el siguiente lema, el cual usaré en las siguientes secciones.

Lema 2.1 [Lema 1,[69]]

Consideremos la red dinámica (2.13). Asumamos que la matriz de acoplamientos A es simétrica y satisface (2.14), de tal forma que sus eigenvalores pueden ser ordenados de la siguiente forma

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N. \quad (2.18)$$

Si los $N - 1$ sistemas lineales variantes en el tiempo y de dimensión n dados en (2.19) son asintóticamente y exponencialmente estables, entonces el estado sincronizado (2.17) es exponencialmente estable.

$$\dot{z}_i(t) = \left[\mathbf{J}f(s(t)) + c\lambda_i \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right] z_i(t) \quad i = 2, \dots, N; \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{J}f(s(t)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ son el Jacobiano evaluado en $s(t)$ del campo vectorial f y de la función de salida \mathcal{H} , respectivamente.

Demostración: Para encontrar la dinámica del error de sincronización sustituayamos $x_i(t) = e_i(t) + s(t)$ en (2.13):

$$\dot{e}_i(t) + \dot{s}(t) = f(e_i(t) + s(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathcal{H}(e_j(t) + s(t)), \quad (2.20)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Realizamos una expansión en Serie de Taylor en primer orden de las funciones f y \mathcal{H} de la siguientes forma

$$f(e_i(t) + s(t)) \approx f(s(t)) + \mathbf{J}f(s(t))e_i, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{H}(e_i(t) + s(t)) \approx \mathcal{H}(s(t)) + \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t))e_i, \quad (2.22)$$

Al sustituir estas expresiones en (2.20) y usando (2.17) obtenemos

$$\dot{e}_i(t) = \mathbf{J}f(s(t))e_i + c\mathcal{H}(s(t)) \sum_{j=1}^N a_{ij} + c\mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \sum_{j=1}^N a_{ij}e_j.$$

Notemos que el segundo término a la derecha de esta expresión es cero debido a la condición de difusividad (2.14). Entonces

$$\dot{e}_i(t) = \mathbf{J}f(s(t))e_i + c\mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \sum_{j=1}^N a_{ij}e_j. \quad (2.23)$$

Reescribimos ahora la ecuación (2.23) en forma matricial como

$$\dot{E}(t) = \left(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{J}f(s(t)) + A \otimes \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right) E(t), \quad (2.24)$$

donde $E(t) = [e_1^T(t), e_2^T(t), \dots, e_N^T(t)]^T \in \mathbf{R}^{Nn}$ es el vector con las variables del error de todos los nodos, $\mathbb{I}_N \in \mathbf{R}^{N \times N}$ es la matriz identidad, y \otimes es el producto de Kronecker.

Dado que la matriz A es simétrica, entonces existe una matriz $\Phi \in \mathbf{R}^{N \times N}$, con $\Phi\Phi^{-1} = \mathbb{I}_N$, tal que

$$\Phi^{-1}A\Phi = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}, \quad (2.25)$$

con $\Lambda \in \mathbf{R}^{N \times N}$ y donde λ_i , para $i = 1, 2, \dots, N$ son los eigenvalores de la matriz A .

Proponemos el siguiente cambio de variable para la ecuación (2.24): $Z(t) = (\Phi^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)E(t)$. Al derivar esta variable obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \left(\Phi^{-1} \otimes \mathbb{I}_n \right) \dot{E}(t) \\ &= \left(\Phi^{-1} \otimes \mathbb{I}_n \right) \left(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{J}f(s(t)) + A \otimes \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right) E(t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

A continuación usaremos la propiedad del producto mixto de \otimes , el cual se expresa

2.2. Redes Dinámicas y Sincronización

de la siguiente forma: Si A, B, C y D son matrices tales que se puedan formar los productos AC y BD , entonces

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \quad (2.27)$$

En este contexto observemos que el primer producto a la derecha de (2.26) se expresa como

$$\begin{aligned} \left(\Phi^{-1} \otimes \mathbb{I}_n \right) \left(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{J}f(s(t)) \right) E(t) &= \left((\Phi^{-1} \mathbb{I}_N) \otimes (\mathbb{I}_n \mathbf{J}f(s(t))) \right) E(t) \\ &= \left(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{J}f(s(t)) \right) \left(\Phi^{-1} \otimes \mathbb{I}_n \right) E(t) \\ &= \left(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{J}f(s(t)) \right) Z(t). \end{aligned}$$

Por otro lado observemos que el segundo producto a la derecha de (2.26) lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \left(\Phi^{-1} \otimes \mathbb{I}_n \right) \left(A \otimes \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right) E(t) &= \left(\Phi^{-1} A \otimes \mathbb{I}_n \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right) E(t) \\ &= \left((\Phi^{-1} A \Phi) \Phi^T \otimes \mathbb{I}_n \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right) E(t) \\ &= \left(\Lambda \Phi^{-1} \otimes \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \mathbb{I}_n \right) E(t) \\ &= \left(\Lambda \otimes \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right) \left(\Phi^{-1} \otimes \mathbb{I}_n \right) E(t) \\ &= \left(\Lambda \otimes \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right) Z(t), \end{aligned}$$

donde hemos usado (2.25) y el producto mixto de \otimes . Sustituyendo en (2.26) obtenemos la dinámica del error en las nuevas coordenadas $Z(t)$:

$$\dot{Z}(t) = \left(\mathbb{I}_n \otimes \mathbf{J}f(s(t)) + \Lambda \otimes \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right) Z(t) \quad (2.28)$$

De (2.28) podemos observar que cada bloque del producto de Kronecker corresponde a cada una de las componentes $z_i(t) \in \mathbf{R}^n$ del vector $Z(t)$, los cuales se expresan

san como

$$\dot{z}_i(t) = \left[\mathbf{J}f(s(t)) + c\lambda_i \mathbf{J}\mathcal{H}(s(t)) \right] z_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.29)$$

El problema de la estabilidad del estado sincronizado se reduce a demostrar la estabilidad de las N ecuaciones lineales variantes en el tiempo de dimensión n (2.29). Notemos que $\lambda_1 = 0$ esta relacionado con la dinámica de un solo nodo aislado, i.e, corresponde a la dinámica del estado sincronizado. Por lo tanto, si quitamos el índice $i = 1$ en (2.29) obtenemos las ecuaciones (2.19). ■

A continuación presentamos dos de las metodologías comúnmente usadas para estudiar la estabilidad del estado sincronizado. Como veremos, dichas metodologías se basan en el resultado del Lema (2.1)

Función Maestra de la Estabilidad

La Función Maestra de la Estabilidad (MEF) fue propuesta por Pecora y Carroll en [28], y es en la actualidad una de las metodologías comúnmente usadas para demostrar la estabilidad del estado sincronizado de la red (2.13). Para definir la función maestra de la estabilidad haremos uso del Lema (2.1). Notemos que (2.19) es una ecuación diferencial lineal cuya solución está dada por [15]:

$$z_i(t) = z_i^0 \exp\{[Jf(s(t)) + c\lambda_i J\mathcal{H}(s(t))]t\}, \quad i = 2, \dots, N; \quad (2.30)$$

donde z_i^0 es la condición inicial impuesta al error de sincronización. Esta ecuación muestra que el error crece o disminuye dependiendo del signo de $\Upsilon_i(s(t)) = Jf(s(t)) + c\lambda_i J\mathcal{H}(s(t))$, con $i = 1, 2, \dots, N$. En otras palabras, el estado sincronizado es estable si cada una de las funciones $\Upsilon_i(s(k))$ son negativas definidas. A partir de esta observación, Pecora y Carroll trasladan el problema de la estabilidad del estado sincronizado al análisis de la función Υ_i [15].

Observemos que para el caso de una red con pesos y con enlaces direccionados, la matriz de acoplamiento A es, en general, asimétrica y sus eigenvalores pueden ser

números complejos. Lo anterior nos permite remplazar el término $c\lambda_k$ por el número complejo $\gamma = \alpha + i\beta$ en cada función Υ_i [28, 15]. Para este trabajo asumiremos que la red está compuesta por enlaces sin pesos y sin dirección, de modo que la matriz de acoplamiento es simétrica y sus eigenvalores son números reales ($\beta = 0$).

Una de las principales dificultades en el análisis de las funciones Υ_i está en la dependencia de los Jacobianos en el estado sincronizado. En general, $s(t)$ es una trayectoria, por lo que los Jacobianos de $f(\cdot)$ y $\mathcal{H}(\cdot)$ son funciones dependientes del tiempo. Para solventar esta problemática, Pecora y Carroll proponen usar el Máximo Exponente de Lyapunov; más aún, remplazan el análisis de todas las funciones Υ_i por el análisis de una sola función, la cual es llamada la MEF y se expresa de la siguiente forma [15]:

$$\Upsilon = \max_{s(t)} \{Jf(s(t)) + \alpha J\mathcal{H}(s(t))\} \quad (2.31)$$

donde el máximo es tomado sobre la trayectoria definida por $\dot{s}(t) = f(s(t))$. La estabilidad del estado sincronizado se reduce ahora a determinar los valores α para los que $\Upsilon < 0$. En este sentido los rangos de α que garantizan que Υ es una función negativa es llamada la región de sincronización, la cual denotaremos como \mathcal{S} . Lo anterior nos permite clasificar a las redes en términos de las formas de las regiones de sincronización [15, 28].

Región Tipo 1: (Figura (2.8a)) La región de sincronización es $\mathcal{S}_1 = (\alpha_1, \infty)$, donde $\alpha_1 > 0$. Para este tipo de redes, si $c\lambda_2 > \alpha_1$, entonces la variedad de sincronización es estable. En este sentido, la región de sincronización \mathcal{S}_1 está determinada por el eigenvalor más pequeño λ_2 de la matriz A . Para valores grandes de λ_2 podremos usar una fuerza de acoplamiento pequeña para sincronizar la red.

Región Tipo 2: (Figura (2.8b)) La región de sincronización es $\mathcal{S}_2 = (\alpha_1, \alpha_2) \subset (0, \infty)$, donde $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. Para este tipo de región, si $\frac{\alpha_1}{\lambda_2} < c < \frac{\alpha_2}{\lambda_N}$, entonces la variedad de sincronización es estable. Observemos que esta desigualdad la podemos reescribir de la siguiente forma $\frac{\lambda_N}{\lambda_2} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Por lo tanto, la región de sincronización \mathcal{S}_2 esta caracterizada por la razón λ_N/λ_2 , la cual es usualmente llamada el eigenradio de la matriz A . En este contexto, las redes en las que el eigenradio sea muy grande no podrán lograr un comportamiento sincronizado cualquiera que sea el valor de la fuerza de acoplamiento, y por el contrario, las redes donde el eigenradio sea muy pequeño logran un comportamiento sincronizado estable para algunos valores de c .

Región Tipo 3: (Figura (2.8c)) La región de sincronización es la unión de varios intervalos para (α_1, α_2) , (α_3, ∞) , etc.

Región Tipo 4: (Figura (2.8d)) No existe una región de sincronización i.e. es un conjunto vacío. Para este tipo de redes no es posible encontrar una fuerza de acoplamiento c tal que la red logre sincronizarse.

El criterio de estabilidad propuesto por Pecora y Carroll nos permite tener una medida de la propensión de la red a sincronizarse. Lo anterior es llamado la sincronizabilidad de la red y la definimos de la siguiente forma:

Definición 2.7 Decimos que la sincronizabilidad de la red es alta si la red logra un estado sincronizado con una fuerza de acoplamiento pequeña. Por el contrario, decimos que la sincronizabilidad es pequeña si la red logra un estado sincronizado con una fuerza de acoplamiento alta. De igual forma, decimos que la sincronizabilidad de la red se mejora si, mediante algún cambio en la configuración de la estructura, es posible sincronizar la red con una fuerza de acoplamiento pequeña.

Una de las líneas de investigación en redes dinámicas consiste en proponer cambios estructurales de tal forma que el eigenradio disminuya y mejorar así la sincronizabilidad. Una revisión detallada sobre cuales han sido las metodologías más significativas para mejorar la sincronizabilidad lo podemos encontrar en el artículo [54].

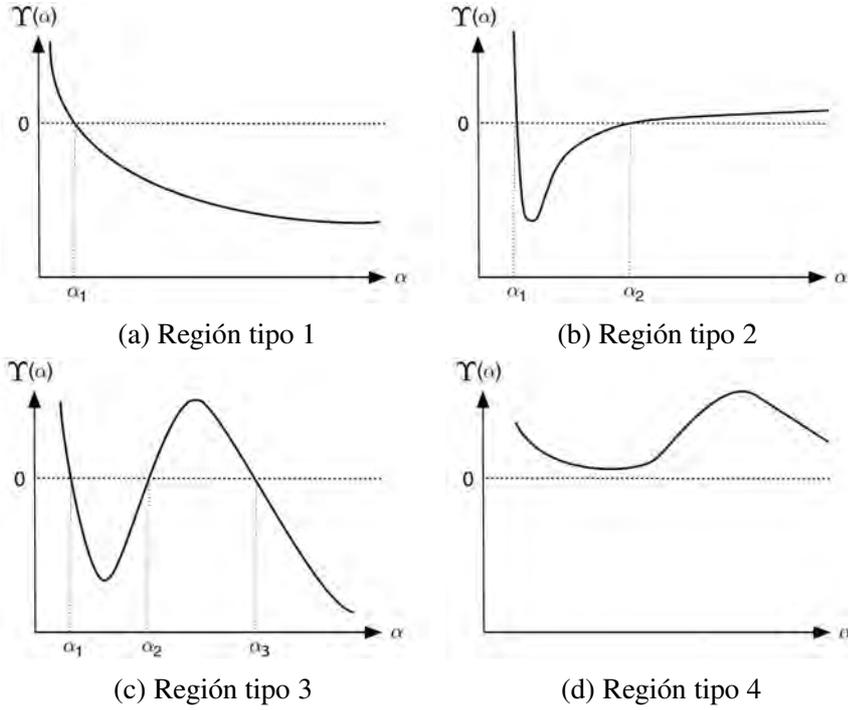


Figura 2.8: Regiones de sincronización de acuerdo con la Función Maestra de la Estabilidad.

El criterio λ_2

Una alternativa para analizar la estabilidad alrededor del origen del sistema de ecuaciones (2.19) consiste en usar el resultado del Lema (2.1), es decir, analizar la estabilidad a través de las funciones de Lyapunov. En este contexto, Wang y Chen [69] realizan un análisis de la estabilidad del estado sincronizado para el caso particular en que la función de salida es una función lineal de la forma $\mathcal{H}(x(t)) = \Gamma x(t)$, donde $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es la matriz interna de los acoplamientos. Para esta función de salida la ecuación de la red tiene la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.32)$$

Adicionalmente, las ecuaciones lineales (2.19) del Lema (2.1) se reescriben de la

siguiente forma

$$\dot{z}_i(t) = \left[\mathbf{J}f(s(t)) + c\lambda_i\Gamma \right] z_i(t) \quad i = 2, \dots, N; \quad (2.33)$$

En [69] Wang y Chen proponen analizar la estabilidad alrededor del origen de (2.33) en términos de funciones de Lyapunov. El resultado principal de su análisis está expuesto en el siguiente Lema:

Lema 2.2 [Lema 2, [69]] Considere la red (2.32). Suponga que existe una matriz diagonal $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ positiva definida y dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$, tal que:

$$[Df(s(t)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[Df(s(t)) + d\Gamma] \leq -\tau \mathbb{I}_n \quad (2.34)$$

para todo $d \leq \bar{d}$, donde $\mathbb{I}_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es la matriz unitaria. Si

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right| \quad (2.35)$$

entonces el estado sincronizado es exponencialmente estable.

Demostración: Del Teorema (2.1), se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = z^T(t) \mathbf{D} z(t)$$

Al derivar la función V y al usar (2.33), la deriva de la función de Lyapunov se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{z}^T(t) \mathbf{D} z(t) + z^T(t) \mathbf{D} \dot{z}(t) \\ &= ([Df(s(t)) + c\lambda_k\Gamma]z(t))^T \mathbf{D} z(t) + z^T(t) \mathbf{D} ([Df(s(t)) + c\lambda_k\Gamma]z(t)) \\ &= z^T(t) [Df(s(t)) + c\lambda_k\Gamma]^T \mathbf{D} z(t) + z^T(t) \mathbf{D} ([Df(s(t)) + c\lambda_k\Gamma]z(t)) \\ &= z^T(t) \left([Df(s(t)) + c\lambda_k\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D} [Df(s(t)) + c\lambda_k\Gamma] \right) z(t) \end{aligned}$$

definamos $d = c\lambda_k$ y por (2.34) obtenemos:

$$\dot{V} = z^T(t) \left([Df(s(t)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D} [Df(s(t)) + d\Gamma] \right) z(t) \leq -\tau \mathbb{1}_n \quad (2.36)$$

dado que $\tau > 0$, entonces $\dot{V}_k < 0$. Lo anterior nos permite concluir que el estado sincronizado de la red dinámica (2.32) es exponencialmente estable. ■

Adicionalmente, para el caso particular en que $\Gamma = I_n$ con los nodos de la red sistemas caóticos con exponente de Lyapunov $h_{max} > 0$, tendremos que $\bar{d} = h_{max}$.

Por la condición (2.35), este resultado también es llamado el “criterio λ_2 ” para la estabilidad del estado sincronizado.

2.2.3. Redes dinámicas en tiempo discreto

La ecuación en diferencias (2.7) describe el cambio de las variables en pasos de iteración a los que asociamos con el tiempo discreto k . A manera de ejemplo consideremos que la ecuación (2.7) modela el crecimiento poblacional de una determinada ciudad. En este sentido la ecuación nos dice que el tamaño de la población en el año $k + 1$ depende del tamaño de la población en el año anterior k . Ahora imaginemos que nos interesa el crecimiento poblacional de un conjunto de ciudades interconectadas. En este caso la ecuación en diferencias es modificada con el objetivo de añadir la descripción de la conexión con otras ciudades; en otras palabras, una red dinámica en tiempo discreto.

Cabe destacar que el estudio de las redes dinámicas en tiempo discreto ha sido analizada desde el formalismo de mapas acoplados (Coupled Map Lattice - CML) [76], es decir, sistemas discretos acoplados en grafos tipo malla o reja. El CML estudiado por Kaneko *et al.* a principios de los años ochenta tiene la forma:

$$x_i(k+1) = (1-c)f(x_i(k)) + \frac{c}{2} \{f(x_{i-1}(k)) + f(x_{i+1}(k))\}. \quad (2.37)$$

Esta ecuación nos indica que el valor numérico del i -ésimo nodo en la iteración $(k + 1)$ está determinado por su valor en una iteración previa (k) y del valor de sus vecinos a la derecha e izquierda $(i - 1$ y $i + 1)$. El parámetro c representa la fuerza de acoplamiento entre los nodos y los términos $(1 - c)$ y $c/2$ son factores de normalización que aseguran que los valores de la variable x estén en el intervalo $[0, 1]$. Con respecto a la función $f(\cdot)$, una de las más usadas por los investigadores es la función Mapa Logístico. Para la red (2.37), se ha observado una amplia variedad de fenómenos dinámicos tales como bifurcación, ondas viajeras, turbulencias de solitones, entre otras [77]. Consideramos importante destacar también que este tipo de redes discretas tiene potenciales aplicaciones en otras disciplinas tales como la dinámica de fluidos [78], sistemas ópticos [79], mercado de valores [80], puertas lógicas [81], solitones [82], entre otros tantos.

Para transitar de la descripción en (2.37) a una red dinámica de sistemas discretos donde la estructura de conexión corresponda a un grafo arbitrario, sólo es necesario extender el tipo de patrón de las conexiones que se considera. Una forma directa de hacer esto es considerar la red descrita por:

$$x_i(k + 1) = f(x_i(k)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} f(x_j(k)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.38)$$

donde la estructura de la red está descrita por la matriz de conexiones $A = a_{ij} \in \mathbf{R}^{N \times N}$. En particular, nos interesa estudiar el fenómeno de la sincronización completa cuya definición es equivalente a la Definición (2.5), sustituyendo la variable del tiempo continuo t por la variable del tiempo discreto k . Si asumimos que la matriz A satisface la condición de difusividad (2.14), entonces el estado sincronizado para la red (2.38) corresponderá a la de un nodo aislado, la cual satisface $s(k + 1) = f(s(k))$. Algunos autores como J. Jost *et al.* [32], G. Rangarajan *et al* [33] y X. Li [31] han analizado de manera independiente la estabilidad del estado sincronizado de la red (2.38), y han encontrado resultados muy similares. Haremos uso del siguiente lema,

propuesto por X. Li y G. Chen en [31], para analizar la estabilidad de la solución de sincronización:

Lema 2.3 [Lema 1, [31]] Considere la red dinámica discreta (2.38). Sean $1 = \beta_1 > \beta_2 \geq \dots \geq \beta_N$ los eigenvalores de la matriz $B = \mathbb{I}_N + cA$. Si las siguientes $N - 1$ ecuaciones lineales en diferencias y variantes en el tiempo

$$w(k+1) = \beta_k \mathbf{J}f(s(k))w(k) \quad k = 2, \dots, N; \quad (2.39)$$

son exponencialmente estable, entonces el estado sincronizado $s(k)$ es exponencialmente estable.

Demostración: Recordemos que por la Definición (2.6), la estabilidad del estado sincronizado es equivalente a la estabilidad de $e_i(k) = x_i(k) - s(k)$. Sustituyendo $x_i(k) = e_i(k) + s(k)$ en (2.38) obtenemos

$$e_i(k+1) + s(k+1) = f(e_i(k) + s(k)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} f(e_j(k) + s(k)), \quad (2.40)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Sustituyendo la expansión en Series de Taylor en primer orden del mapa n-dimensional $f(\cdot)$ (2.21) y usando $s(k+1) = f(s(k))$ en (2.40) obtenemos

$$\begin{aligned} e_i(k+1) &= \mathbf{J}f(s(k))e_i(k) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \left[f(s(k)) + \mathbf{J}f(s(k))e_j(k) \right] \\ &= \mathbf{J}f(s(k))e_i(k) + cf(s(k)) \sum_{j=1}^N a_{ij} + c\mathbf{J}f(s(k)) \sum_{j=1}^N a_{ij}e_j(k). \end{aligned}$$

Observemos que la segunda sumatoria a la derecha de esta ecuación es cero debido a la condición de difusividad (2.14). Entonces

$$\begin{aligned} e_i(k+1) &= \mathbf{J}f(s(k)) \left[e_i(k) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}e_j(k) \right] \\ &= \mathbf{J}f(s(k)) \left[e_i(k) + ca_{ii}e_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}e_j(k) \right]. \end{aligned}$$

Pero, por la condición (2.14) tenemos que $a_{ii} = -d_i$, donde d_i es el grado del i -ésimo nodo. Por lo tanto la dinámica del error de sincronización se expresa de la siguiente forma

$$e_i(k+1) = \mathbf{J}f(s(k)) \left[e_i(k) (1 - cd_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} e_j(k) \right]. \quad (2.41)$$

Definamos la matriz $B = \mathbb{I}_N + cA$ y sea $E(k) = [e_1^T(k), \dots, e_N^T(k)]^T \in \mathbf{R}^{Nn}$ el arreglo con las variables del error para todos los nodo. Entonces, la ecuación (2.41) en forma matricial se expresa como

$$E(k+1) = \left(B \otimes \mathbf{J}f(s(k)) \right) E(k), \quad (2.42)$$

donde \otimes es el producto de Kronecker.

Por otra parte observemos que los eigenvalores de la matriz B son de la forma

$$\beta_k = 1 - c\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

donde λ_k son los eigenvalores de la matriz de acoplamiento A , los cuales sabemos satisfacen (2.18). Lo anterior nos permite observar que $\beta_1 = 1$ es siempre un eigenvalor de B el cual corresponde al eigenvector $1/\sqrt{N}(1, 1, \dots, 1)^T$. En este sentido el eigenvalor β_1 corresponde al estado sincronizado. El resto de los eigenvalores serán siempre positivos y mayores a uno. Dado que B es una matriz simétrica, entonces puede ser diagonalizable, es decir, existe una matriz $\hat{\Phi} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ con $\hat{\Phi}^{-1} \hat{\Phi} = \mathbb{I}_N$ tal que $\hat{\Phi}^{-1} B \hat{\Phi} = \hat{\Lambda} = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_N\}$.

2.2. Redes Dinámicas y Sincronización

Proponemos el siguiente cambio de variable $W(k) = (\hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)E(k)$. Al multiplicar en ambos lados de la ecuación (2.42) por $(\hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(\hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)E(k+1)}_{W(k+1)} &= (\hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n) \left(B \otimes \mathbf{J}f(s(k)) \right) E(k) \\
 &= (\hat{\Phi}^{-1} B \otimes \mathbb{I}_n \mathbf{J}f(s(k))) E(k) \\
 &= (\hat{\Phi}^{-1} B \hat{\Phi} \hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n \mathbf{J}f(s(k))) E(k) \\
 &= (\hat{\Lambda} \hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbf{J}f(s(k)) \mathbb{I}_n) E(k) \\
 &= (\hat{\Lambda} \otimes \mathbf{J}f(s(k))) \underbrace{((\hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)E(k))}_{W(k)}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad del producto mixto de \otimes (eq. (2.27)). Entonces la ecuación del error en términos de la nueva variable $W(k)$ se expresa como

$$W(k+1) = (\hat{\Lambda} \otimes \mathbf{J}f(s(k))) W(k) \quad (2.43)$$

De (2.43) podemos observar que cada bloque del producto de Kronecker corresponde a cada una de las componentes $w_i(t) \in \mathbf{R}^n$ del vector $W(t)$, los cuales se expresan como

$$w_i(k+1) = \beta_i \mathbf{J}f(s(k)) w_i(k) \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.44)$$

El problema de la estabilidad del estado sincronizado se reduce ahora a demostrar la estabilidad de las N ecuaciones lineales en diferencias y variantes en el tiempo (2.44). Recordemos que $\beta_1 = 1$ está relacionado con la dinámica de un nodo aislado, i.e, corresponde a la dinámica del estado sincronizado. Por lo tanto, si quitamos el índice $i = 1$ en (2.44) obtenemos la ecuación (2.39). ■

En trabajos recientes concernientes al fenómeno de la sincronización en redes dinámicas discretas (véase por ejemplo [31, 32, 33]) se ha seguido una misma metodología para demostrar la estabilidad de las ecuaciones (2.39). Dicha metodología se

basa en el concepto de los exponentes de Lyapunov. En términos generales, el exponente de Lyapunov del sistema dinámico discreto (2.7) en un punto $x_0(k) \in D \subset \mathbf{R}^n$ es una medida de la tasa de convergencia/divergencia a lo largo de sucesivas iteraciones del mapa $f(\cdot)$ sobre puntos cercanos a $x_0(k)$. En otras palabras, es una medida de que tanto se separan o se aproximan dos trayectorias del sistema (2.7) conforme $k \rightarrow 0$.

Para definir formalmente el exponente de Lyapunov de (2.7) haremos uso de la siguiente definición.

Definición 2.8 Sea $b = (b(n))_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de números reales. El número

$$h(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |b(n)| \quad (2.45)$$

es llamado el exponente característico de la secuencia $b = (b(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Si el límite de la secuencia no existe entonces el límite de (2.45) es remplazado por el límite inferior o el límite superior y los llamaremos el exponente característico inferior y el exponente característico superior respectivamente.

Para definir el exponente de Lyapunov usando la Definición (2.8) consideremos dos puntos dentro del dominio del mapa ($D \subset \mathbf{R}^n$) x_0 y $x_0 + \delta$ donde $\delta \ll 1$. Nos interesa estudiar la secuencia de números generada por el error del mapa sobre estos puntos conforme avanzan las iteraciones, es decir, la secuencia generada por $\varepsilon_n = f^n(x_0 + \delta) - f^n(x_0)$, donde $n \in \mathbb{N}$. En base a lo anterior se propone la siguiente definición

Definición 2.9 Dado el mapa diferenciable $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ y un punto $x_0 \in D$, el Exponente de Lyapunov $h(x_0)$ se define como el exponente característico de la secuencia generada por el error relativo $(|\varepsilon_n/\varepsilon_0|)_{n \in \mathbb{N}}$; es decir

$$h(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} \right|. \quad (2.46)$$

Observemos que al realizar una expansión en Series de Taylor en primer orden de las funciones f como en (2.21), el error relativo se expresa como $\varepsilon_n/\varepsilon_0 = \mathbf{J}f^n(x_0)$. Lo anterior nos permite expresar (2.46) como

$$h(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \mathbf{J}f^n(x_0) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{J}f(x(k)) \right|. \quad (2.47)$$

En base a lo anterior se propone en [31] el siguiente Teorema.

Teorema 2.2 [Teorema 2, [31]]

Considere la red dinámica (2.38). Si

$$\frac{1 - e^{-h_{max}}}{\lambda_2} < c < \frac{1 + e^{-h_{max}}}{\lambda_N}; \quad (2.48)$$

donde h_{max} es el máximo exponente de Lyapunov del sistema discreto (2.7), entonces el estado sincronizado $s(k)$ es exponencialmente estable.

Demostración: Del Lema (2.3) sabemos que demostrar la estabilidad exponencial de (2.38) se traduce en demostrar la estabilidad de las $N - 1$ ecuaciones en diferencias de dimensión n dadas en (2.44) con $i = 2, 3, \dots, N$.

Para demostrar la estabilidad de estas ecuaciones haremos uso del exponente característico de la secuencia $w(k+1)/w(0)$ (Definición (2.8)). De acuerdo con [32], la condición suficiente para la estabilidad del estado sincronizado es que el exponente

característico de esta secuencia tenga un valor negativo, es decir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{w_i(k+1)}{w_i(0)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \prod_{k_i=0}^{k-1} \frac{w_i(k_i+1)}{w_i(k_i)} \right| < 0. \quad (2.49)$$

Sustituyendo (2.44) en (2.49) obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \prod_{k_i=0}^{k-1} \frac{w_i(k_i+1)}{w_i(k_i)} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \beta_i \prod_{k_i=0}^{k-1} \mathbf{J}f(s(k)) \right| \\ &= \ln(\beta_i) + \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \prod_{k_i=0}^{k-1} \mathbf{J}f(s(k)) \right|}_{h(s(k))}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición (2.47). Dado que en general $s(k)$ es una trayectoria, consideraremos entonces el máximo exponente de Lyapunov del mapa y lo denotaremos como h_{max} . Entonces la condición suficiente para la estabilidad se expresa como

$$\begin{aligned} \ln(|\beta_i|) + h_{max} &< 0 \\ \implies |\beta_i| e^{h_{max}} &< 1. \end{aligned}$$

Recordemos que los eigenvalores de la matriz B se expresan como $\beta_i = 1 - c\lambda_i$, donde λ_i son los eigenvalores de la matriz de acoplamiento A . Sustituyendo β_i en la expresión anterior obtenemos

$$|1 - c\lambda_i| \leq 1 - |c\lambda_i| < e^{-h_{max}} \quad i = 2, \dots, N;$$

De manera similar obtenemos

$$|c\lambda_i| - 1 \leq |1 + c\lambda_i| < e^{-h_{max}}$$

Usando ambas expresiones y del hecho de que los eigenvalores de la matriz de

acoplamiento A pueden ser ordenados como: $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ obtenemos (2.48). ■

Una pregunta de interés con respecto a la estabilidad del estado sincronizado de (2.38) es si hay o no una fuerza de acoplamiento c de tal manera que el criterio (2.48) es satisfecho. En este sentido dicho criterio determina la región de sincronización, es decir, el intervalo de valores para el cual es posible encontrar un valor de c que sincronice la red. En [31], los autores analizan el caso de una red dinámica cuya estructura es construida con el modelo propuesto por Barabási-Albert. En este trabajo se encuentra que al incrementar el número de nodos el valor de $1/\lambda_N$ decrece, lo cual dificulta encontrar un valor c que cumpla con (2.48).

2.3. Autómata Celular y Sistemas Conmutados

En la sección anterior pudimos observar que las propiedades espectrales de la matriz de conexiones tienen un papel significativo en la estabilidad del estado sincronizado de la red. En los casos discutidos arriba asumimos que la matriz de conexiones es constante en el tiempo, esto es, consideramos que la estructura se mantiene fija mientras que los estados de los nodos cambian con el tiempo. Con el objetivo de extender este escenario al caso de evolución estructural, consideramos que varios procesos de cambio simultáneos constituyen lo que en este trabajo llamaremos la evolución estructural de la red. En particular, suponemos que la evolución estructural puede ser modelada como un sistema dinámico. Para este fin, haremos uso de los conceptos de Autómata Celular y Sistemas Conmutados, los cuales se presentan brevemente a continuación:

2.3.1. Autómata Celular

Las Autómatas Celulares (AC) son sistemas dinámicos los cuales se componen por un arreglo de N máquinas de estado finito llamadas celdas. Cada celda del arreglo

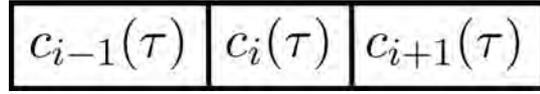


Figura 2.9: En una AC unidimensional con $r = 1$, la vecindad de cada celda la componen la celda a la derecha y a la izquierda.

puede tomar un solo estado de un conjunto de estados discretos al que denotaremos como K . Los elementos del conjunto K pueden ser números, letras, símbolos, etc. Dado un estado inicial, cada celda cambia su estado en pasos de iteración a los que llamaremos instantes de tiempo discreto, denotados con la variable τ . El estado de cada celda en el instante $\tau + 1$ que denotaremos por $c_i(\tau + 1)$, está determinado por una regla F_W , la cual depende del estado $c_i(\tau)$ y de los estados de otras celdas a las que llamaremos la vecindad de la i -ésima celda. El rango de interacción de cada celda es llamado el radio de la vecindad y es denotado como r . Para el caso particular en que las celdas son colocadas en una disposición en cadena (ver Figura (2.9)), si $r = 1$ la vecindad de cada celda está compuesta por la celda inmediatamente a la derecha y a la izquierda de la i -ésima celda [83]. A este tipo de AC le llamamos AC unidimensional con radio $r = 1$. Suponga que $K = \{0, 1\}$, entonces la dinámica de sus celdas está descrita por:

$$c_i(\tau + 1) = F_W(c_{i-1}(\tau), c_i(\tau), c_{i+1}(\tau)), \quad (2.50)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ y $F_W : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ es la función de transición o regla, la cual es aplicada simultáneamente a todas las celdas del arreglo. Para definir la regla F_W debemos de considerar todas las posibles configuraciones de ceros y unos del arreglo $(c_{i-1}(\tau), c_i(\tau), c_{i+1}(\tau))$. En la Figura (2.10) mostramos un ejemplo de la regla F_W para una AC unidimensional con $r = 1$, donde las celdas con estado 0 están en color blanco, mientras que las celdas con estado 1 están en color negro. Otra forma de expresar la regla mostrada en el ejemplo anterior es mediante la siguiente tabla de verdad:

2.3. Autómata Celular y Sistemas Conmutados

$c_{i-1}(\tau)$	$c_i(\tau)$	$c_{i+1}(\tau)$	$c_i(\tau+1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Tabla 2.3: Ejemplo de una regla F_W para una AC unidimensional en tabla de verdad

En general, si la cardinalidad del conjunto de estados K es q , entonces la regla F_W está completamente definida si especificamos el valor de cada uno de las q^{2r+1} posibles configuraciones de las $(2r+1)$ -

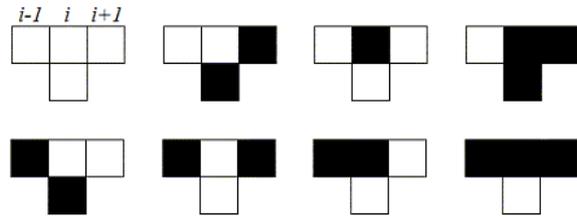


Figura 2.10: Ejemplo de una regla F_W para una AC unidimensional.

tuplas para un radio de vecindad r . Por lo tanto hay un total de q^{2r+1} posibles reglas. Para el caso particular de $r = 1$ y $K = \{0, 1\}$ ($c_i \in \{0, 1\}$), hay un total de $2^8 = 256$ reglas. Cada una de estas reglas tiene asociado un número W el cual es conocido como el código Wolfram [84].

Un punto importante a destacar es que al ser finito el arreglo, la primera y la última celda no tendrán vecinos del lado izquierdo y derecho respectivamente. Para solventar lo anterior se propone entonces las llamadas condiciones de frontera. Para este trabajo asumiremos que la condición de frontera es periódica, es decir, cerrando el arreglo en forma circular para conservar la uniformidad en todas la vecindades (Figura (2.11))

Al observar la evolución dinámica de todas las celdas podremos notar una gran variedad de patrones que se forman conforme iteramos la regla seleccionada. En la Figura (2.12) mostramos la evolución dinámica de una AC unidimensional para dis-

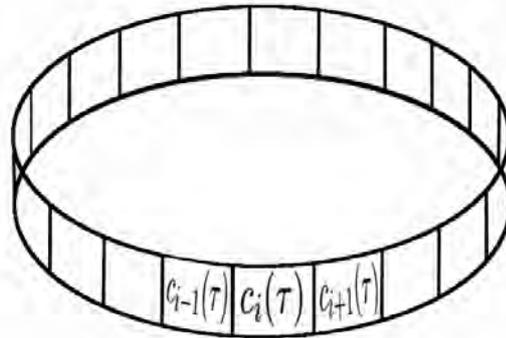


Figura 2.11: Condición de frontera periódica para una AC unidimensional con radio $r = 1$.

tintas reglas F_W . Vale la pena destacar que los patrones observados en estos sistemas y su comportamiento dinámico son en realidad fenómenos colectivos que emergen gracias a las interacciones locales entre las celdas. Esta observación motivo a Wolfram a proponer la siguiente clasificación de las AC unidimensionales [84]:

- **Clase 1:** La evolución lleva a un estado homogéneo. Sin importar cual es el estado inicial, la AC evoluciona siempre hacia un mismo estado homogéneo o punto fijo.
- **Clase 2:** La evolución lleva a estructuras periódicas que están separadas (temporalmente). En este caso, un cambio en el valor de una sola celda afecta una región finita de celdas alrededor de él.
- **Clase 3:** La evolución de la AC produce un patrón de comportamiento caótico.
- **Clase 4:** La evolución lleva a estructuras complejas, las cuales no se pueden definir como pertenecientes a una de las clases anteriores.

A partir de los trabajos de Wolfram [84], distintos investigadores han propuestos generalizaciones del concepto de AC . Un primer paso consistió en cambiar la estructura en cadena y extenderla a cualquier posible configuración, es decir, una red de maquinas de estado finito donde la vecindad esta definida por un grafo [83].

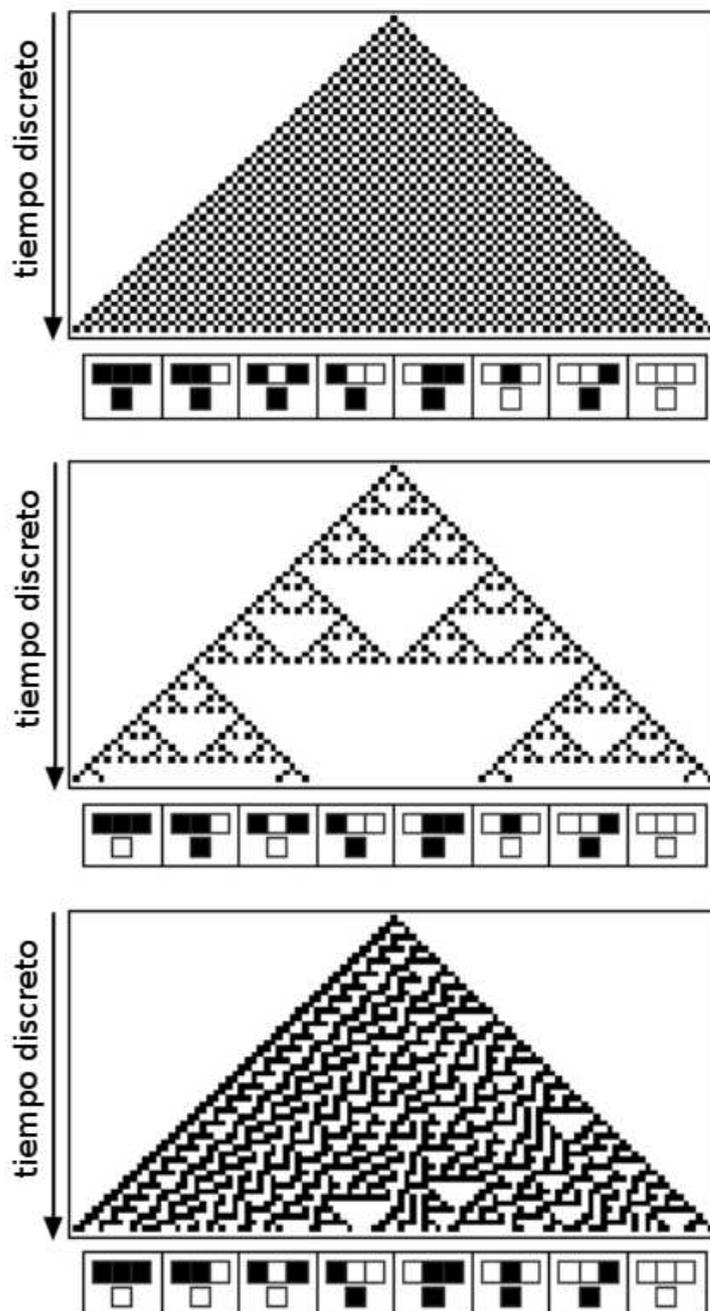


Figura 2.12: Algunos ejemplos de los patrones generados por una AC unidimensional. La AC mostrada en la figura superior es un ejemplo de clase 1 (regla $W = 250$), la figura en la parte media es un ejemplo de clase 2 (regla $W = 90$), mientras que en la figura inferior se muestra una AC clase 4 (regla $W = 30$).

2.3.2. Sistemas Conmutados

Para modelar sistemas cuyos estados cambian espontáneamente debido a la ocurrencia de algún evento se utiliza en concepto de sistemas de eventos discretos (SED). Estos sistemas incluyen entre otros a las máquinas de estado finito y las AC's. De modo que el formalismo de SED puede ser utilizado para modelar la evolución estructural. En este sentido, los cambios estructurales pueden ser descritos matemáticamente como el resultado de eventos de cambio estructural que transforman la estructura de la red, de una configuración a otra como un proceso dinámico de la red. En esta sección expondremos brevemente algunos de los elementos básicos de los SED, para luego describir la red dinámica bajo evolución estructural desde el enfoque de sistemas conmutados.

Una de las principales características de los SED es que el estado del sistema cambia cuando ocurre un evento. En este contexto, un evento puede tener distintas interpretaciones dependiendo del sistema que estemos modelando. A manera de ejemplo, un evento puede ser pensado como una acción específica como oprimir un botón; puede también ser visto como la ocurrencia espontánea de un suceso dictado por la propia naturaleza del sistema; o bien un evento puede ser el resultado de la acumulación de distintas condiciones o circunstancias que en un determinado instante ocurren de manera espontánea.

Una definición formal de un SED ha sido propuesta por Cassandras *et al.* en [1] y es la siguiente:

Definición 2.10 [1] Un Sistema de Eventos Discretos (SED) es un sistema de estados discretos impulsado por eventos, esto es, la evolución de sus estados depende enteramente de la ocurrencia de eventos discretos asíncronos a lo largo del tiempo.

Conviene ahora describir cada una de las partes en esta definición. La primera

parte afirma que un SED es un sistema de estados discretos, esto significa que el espacio de estados está compuesto por un conjunto discreto $X = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$. La segunda parte de esta definición establece que un SED es un sistema impulsado por eventos, esto es, el cambio de un estado a otro ocurre de manera instantánea debido a la ocurrencia de un evento. Note sin embargo que un evento puede ocurrir y no causar una transición de estados. Por otro lado, en la Definición (2.10) se afirma que los eventos discretos son asíncronos. Esto es, si denotamos por $E_v = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ al conjunto de eventos que pueden ocurrir en un SED, entonces en cada instante de cambio sólo puede ocurrir uno de los eventos en E_v . En la Figura (2.13) mostramos un ejemplo de la trayectoria de un SED.

Vale la pena destacar que de la misma forma en que algunos sistemas cambian su estado cuando ocurre un evento, también hay sistemas donde su cambio está impulsado por el tiempo. Es decir, el cambio está asociado a un mecanismo de reloj, de tal forma que el estado del sistema cambia conforme el tiempo cambia. Para estos sistemas el tiempo es una variable del sistema (ya sea continua o discreta), la cual puede aparecer de manera explícita o implícita. Estos sistemas, usualmente llamados sistemas dinámicos, pueden ser interpretados como sistemas impulsados por el tiempo. Entre los ejemplos de este tipo de sistemas se encuentran los osciladores caóticos y sistemas discretos como el Mapa Logístico. Al pensar en estos sistemas como impulsado por eventos descritos en el tiempo, es decir, descritos por marcas de reloj que indica el instante de cambio, es posible interpretar las iteraciones de un sistema discreto, como un sistema cuya dinámica es impulsada por eventos del tiempo.

El estudio de Sistema Conmutado (SC) tiene potenciales aplicaciones en el modelado y análisis de aquellos sistemas en los que, de manera instantánea, cambia la descripción de su naturaleza dinámica. Un SC se compone por un conjunto de subsistemas dinámicos admisibles y una regla que coordina las conmutaciones entre dichos subsistemas [55, 85, 86]. El SC toma la forma de uno estos subsistemas por un tiempo, para luego cambiar a la de otro subsistema conforme lo indique la regla

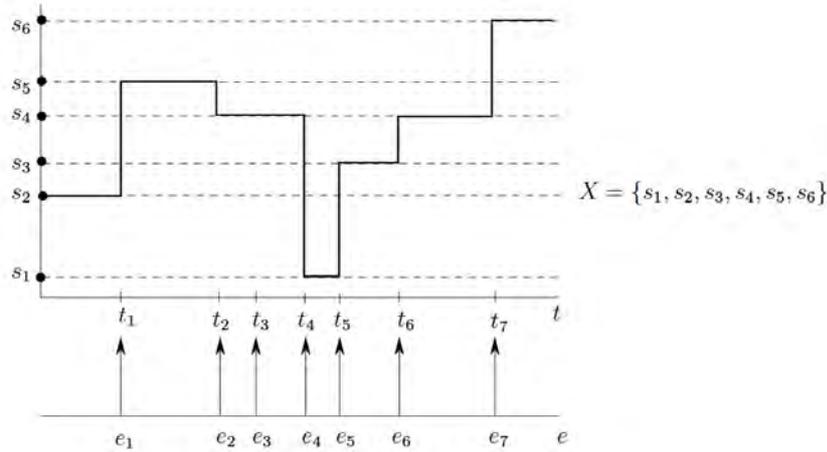


Figura 2.13: Ejemplo de la trayectoria de un SED impulsada por eventos [1].

de conmutación, y así sucesivamente. La descripción de cada subsistema puede ser la de un sistema lineal, o la de un sistema no lineal, el cual puede ser de tiempo continuo o de tiempo discreto. Sin embargo, es importante destacar que al definir el conjunto de subsistemas admisibles de un SC, consideraremos que todos son del mismo tipo. Aunque considerar subsistemas de tiempo continuo y de tiempo discreto en un mismo conjunto admisible sería probablemente un caso interesante, este va más allá del alcance de este trabajo. En este sentido, el conjunto de subsistemas admisibles se define como $S = \{f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_m(x(t))\}$, donde $x(t) \in \mathbf{R}^n$ es la variable de estado del SC, con $f_i(x(t))$ el campo vectorial del i -ésimo subsistema de los m distintos subsistemas que forman parte del SC.

Notemos que para construir al conjunto S hemos asignamos de manera arbitraria una etiqueta a cada uno de los subsistemas, las cuales pueden ser símbolos, números enteros, etc. Dejando que las etiquetas de cada subsistema sean números enteros positivos, se genera el conjunto de índices $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Para completar la descripción de un SC, además del conjunto de subsistemas S , es necesario especificar la regla de conmutación, es decir, un mecanismo que indique tres cosas:

1. El instante de tiempo en que conmutamos a un subsistema, al cual llamaremos el tiempo de conmutación, t_k , con $k \in \mathbf{Z}^+$.

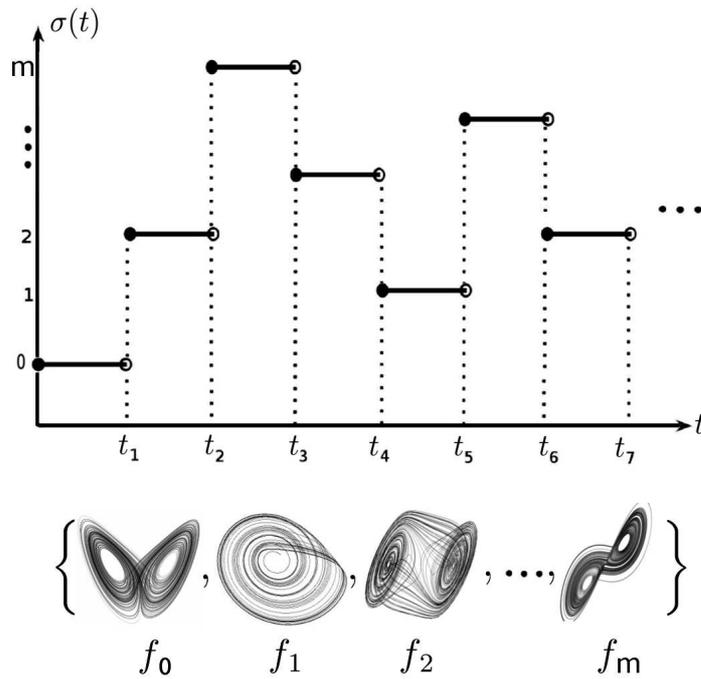


Figura 2.14: Ejemplo de una señal de conmutación.

2. El subsistema al cual se conmuta, esto se puede lograr escogiendo uno y sólo un elemento del conjunto de índices I .
3. El intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1})$ en que el subsistema seleccionado permanecerá activo, o en otras palabras, el tiempo de residencia del SC en el subsistema escogido.

El mecanismo que determina estas tres cosas es llamado la regla de conmutación y la secuencia de subsistemas, con sus instantes de conmutación y tiempos de residencia es llamada la señal de conmutación. Matemáticamente, la regla de conmutación es una función constante a pedazos y continua por la derecha $\sigma : [0, \infty) \rightarrow I$. En la Figura (2.14) presentamos un ejemplo de señal de conmutación. En este sentido, si $\sigma(t) = \tau \in I$, para $t \in [t_k, t_{k+1})$, tenemos que el SC toma la forma del subsistema con campo vectorial $f_\tau(t)$ a partir del instante t_k y permanecerá activo durante $[t_k, t_{k+1})$.

El SC se describe de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)). \quad (2.51)$$

donde $x(t) \in \mathbf{R}^n$ es la variable de estado del sistema, $f_{\sigma(t)}(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es el campo vectorial del subsistema cuyo índice está determinado por la regla de conmutación $\sigma(t)$, la cual toma valores sólo dentro del conjunto de índices I . En general, la regla de conmutación es una función dependiente del tiempo, de la variable de estado, del índice previo y posiblemente de una señal externa. Es decir

$$\sigma(t_k) = \phi(t, \sigma(t_k^-), x(t_k^-), z(t_k^-)), \quad (2.52)$$

donde t_k^- denota el instante de tiempo previo a la k -ésima conmutación, $\sigma(t_k^-)$ es el índice previo, y $z(t_k^-)$ es una señal externa; con ϕ una función a ser determinada.

Sun *et al.* proponen una clasificación de las reglas de conmutación en términos de los argumentos de la regla de conmutación [86], esto es:

- **Conmutación impulsada por el tiempo:** Cuando la regla de conmutación sólo depende del tiempo y de su propio valor en el instante previo de la conmutación:

$$\sigma(t_k) = \phi(t, \sigma(t_k^-)), \quad t > t_0$$

- **Conmutación impulsada por eventos:** Cuando la regla de conmutación no depende de manera explícita del tiempo y está determinada por el estado del SC y posiblemente el índice previo, es decir:

$$\sigma(t_k) = \phi(\sigma(t_k^-), x(t_k^-)), \quad t > t_0$$

Con respecto a la conmutación impulsada por el tiempo, vale la pena destacar que al llegar a una marca de tiempo predefinida se dispara la conmutación. Tales marcas en el tiempo son usualmente establecidas de manera arbitraria, y en este caso, diremos que es una regla de conmutación arbitraria impulsada por el tiempo.

Liberzon destaca los siguientes problemas básicos sobre la estabilidad de SC [55]:

1. Encontrar las condiciones bajo las cuales el sistema conmutado es asintóticamente estable para cualquier señal de conmutación.
2. Identificar todas las reglas de conmutación para las cuales el sistema (2.51) es asintóticamente estable.
3. Construir una señal de conmutación que haga que el sistema (2.51) sea asintóticamente estable.

Un problema común es diseñar una regla de conmutación que garantice la estabilidad del sistema conmutado (2.51) cuando ninguno de los subsistemas es estable. Existen también distintas metodologías para analizar la estabilidad del sistema (2.51). Por su importancia, en el presente documento destacaremos dos de estas metodologías [55]. La primera consiste en proponer una única función de Lyapunov cuya derivada a lo largo de las soluciones de todos los subsistemas sea negativa. Dicha función recibe el nombre de la función común de Lyapunov. Bajo este enfoque, el problema de estabilidad del sistema conmutado se reduce ahora a establecer las condiciones para que exista una función de Lyapunov común para todos los subsistemas. Adicionalmente, Liberzon muestra que una de las condiciones para que dicha función exista es que todos los subsistemas compartan un mismo punto de equilibrio.

La segunda metodología que se puede utilizar para analizar la estabilidad de (2.51) es llamada de las funciones múltiples de Lyapunov. Para esta metodología se asume que cada subsistema tiene asociado una función de Lyapunov. A manera de ejemplo consideremos un SC con $I = \{1, 2\}$. Supongamos que ambos sistemas $\dot{x}(t) = f_1(x(t))$ y $\dot{x} = f_2(x(t))$ son sistemas uniforme y globalmente estables, y sean V_1 y V_2 sus respectivas funciones de Lyapunov. En este caso asumimos que una función común de

Lyapunov para ambos sistemas no es conocida o bien no existe. En este caso nos interesa analizar la estabilidad del SC usando las funciones V_1 y V_2 . En este contexto, pueden ocurrir dos escenarios con respecto a estas funciones de Lyapunov:

1. Los valores de V_1 y V_2 coinciden en cada instante de conmutación, es decir $V_{\sigma(t_k^-)} = V_{\sigma(t_k)}$, para todo $k \in \mathbf{Z}^+$. En otras palabras, V_{σ} es una función continua para el sistema (2.51).
2. La función V_{σ} es discontinua. Mientras que V_1 decrece cuando $f_1(x(t))$ está activo, puede incrementar cuando $f_2(x(t))$ está activo.

A continuación, los conceptos de SC y el análisis de su estabilidad se aplican al caso de redes dinámicas con estructura conmutada.

2.3.3. Sincronización en redes con estructura conmutada

En un SC la conmutación implica un cambio instantáneo de la forma del sistema. En años recientes Zhao *et al.* [56], Stillweel *et al.* [57], entre otros, vieron la similitud entre el concepto de SC y los cambios estructurales en un red dinámica. En particular, consideran una red dinámica donde la conmutación no implica que los nodos conmutan sus campos vectoriales, sino que la regla de conmutación cambia la estructura de la red instantáneamente en puntos específicos del tiempo. En este sentido, el formalismo de los sistemas conmutados tiene una aplicación directa en el modelado y análisis de redes evolutivas.

Para describir una red dinámica con estructura conmutada, supongamos que tenemos una red de N nodos idénticos, donde cada nodo es un sistema dinámico continuo (o discreto) en el tiempo acoplados de manera lineal y difusivamente a través de enlaces bidireccionales y sin pesos. Entonces, los estados de la red dinámica de estructura

conmutada está dada por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\sigma(t)} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.53)$$

donde $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $f(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $c > 0$ son los mismos elementos que describimos para la ecuación (2.32). Vale la pena hacer notar que la única diferencia entre la ecuación (2.32) y (2.53) está en la conmutación $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow I = \{1, 2, \dots, m\}$ sobre los elementos de la matriz de conexiones $A^{\sigma(t)} = \{a_{ij}^{\sigma(t)}\}$.

Para (2.53), cada elemento del conjunto de índices I corresponde a una de las estructuras de la red que es admisibles, esto es una matriz de conexiones del conjunto de estructuras admisibles $\mathcal{A} = \{A^1, A^2, \dots, A^m\}$. En este sentido, si $\sigma(t) = \tau \in I$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$, entonces $A^\tau = \{a_{ij}^\tau\}$ es la matriz de conexiones activa, la cual describe como es la estructura de la red en el intervalo de tiempo $D_k = t_{k+1} - t_k$.

Note que el conjunto de estructuras admisibles \mathcal{A} lo podemos construir de forma arbitraria, o bien, mediante la acción de un operador de cambio. En ambos casos podemos tener escenarios donde, en una conmutación dada, las propiedades estructurales de la red cambien de manera radical. Por ejemplo, al conmutar de estructura la red puede disminuir o incrementar de manera considerable el número de nodos, otros nodos pueden quedar totalmente desconectados de la red, etc. Estos cambios radicales no sólo dificultan el análisis matemático de los comportamientos sincronizados, si no que también modelan una dinámica evolutiva poco realista. Para evitar esto último, proponemos restringir el conjunto \mathcal{A} de tal forma que cada estructura admisible tenga el mismo número de nodos y donde no existan nodos aislados.

La regla de conmutación para (2.53), tiene las mismas propiedades descritas arriba. En particular, suponemos que la conmutación depende del tiempo, el índice previo $\sigma(t_k^-)$, así como de la estructura previa $A^{\sigma(t_k^-)}$. Más aun, podemos considerar el caso en que la conmutación también depende del estado dinámico de los nodos en la

red $X(t_k^-) = [x_1^T(t_k^-), x_2^T(t_k^-), \dots, x_N^T(t_k^-)]^T \in \mathbf{R}^{Nn}$. Es decir,

$$\sigma(t_k) = \phi(t, \sigma(t_k^-), A_{\sigma(t_k^-)}, X(t_k^-)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.54)$$

Es importante destacar que en este trabajo nosotros usamos el estado dinámico de los nodos antes de la conmutación, sin embargo también es posible considerar un sistema con memoria donde la regla de conmutación depende de estados más antiguos de los nodos de la red.

Para la red (2.53), una de las principales preguntas de investigación consiste en determinar si la red logrará sincronizarse o no a pesar de las conmutaciones. En el contexto de redes dinámicas de topología conmutadas, la sincronización completa se define de la siguiente forma [56]:

Definición 2.11 Decimos que la red conmutada (2.53) logra (asintóticamente) la sincronización completa bajo la regla de conmutación (2.54) si conforme $t \rightarrow \infty$ las variables de estado de los nodos ($X(t)$) tienden a la variedad de sincronización $\Omega(t) = \{x(t) \in \mathbf{R} : x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)\}$.

Note que si cada una de las matrices del conjunto \mathcal{A} satisfacen la condición de difusividad de forma uniforme en el tiempo, y si además la red conmutada se compone de nodos idénticos, entonces en la variedad de sincronización las trayectorias de (2.53) colapsan en una misma trayectoria $s(t)$.

Existen en las referencias actuales distintos criterios para determinar las condiciones de sincronización bajo una regla de conmutación. Algunos de los más destacados son el trabajo de Zhao y Hill, del cual haré una breve exposición a continuación.

Zhao y Hill establecen un criterio de sincronización para la red conmutada basándose en el concepto de función común de Lyapunov [56]. Los autores exponen dicho criterio en la siguiente proposición:

Teorema 2.3 [Proposición 3.1, [56]] La sincronización completa de (2.53) se logra bajo una regla de conmutación arbitraria $\sigma(t)$ si existe una matriz positiva definida $P(t) \in PC_{Nn \times Nn}^1$ tal que

$$\begin{aligned} E^T(t) & \left[\dot{P} + (I \otimes Jf(s(t)) + cA^\tau \otimes \Gamma)^T P \right. \\ & \left. + P(I \otimes Jf(s(t)) + cA^\tau \otimes \Gamma) \right] E(t) \\ & + 2\eta^T P g(t, n) < 0, \quad \forall t, k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde $E(t) = (e_1^T(t), \dots, e_N^T(t))^T$ es el vector con las variables del error y $g(t, n)$ son los términos no lineales de la expansión en Series de Taylor del campo vectorial $f(\cdot)$. Si adicionalmente la siguiente desigualdad matricial

$$\begin{aligned} & \dot{P} + (I \otimes Jf(s(t)) + cA^\tau \otimes \Gamma)^T P \\ & + P(I \otimes Jf(s(t)) + cA^\tau \otimes \Gamma) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.56)$$

se satisface, entonces la red (2.53) se sincroniza localmente bajo una regla de conmutación arbitraria.

Demostración: Recordemos que la estabilidad del estado sincronizado es equivalente a demostrar la estabilidad del error de sincronización $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ alrededor del origen. Repitiendo los mismos primeros pasos para obtener la ecuación (2.24) en el Lema (2.1), encontramos que las ecuaciones del error para la red conmutada tienen la siguiente forma

$$\dot{E}(t) = \left(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{J}f(s(t)) + cA^{\sigma(t)} \otimes \Gamma \right) E(t) + g(t, E(t)) \quad (2.57)$$

donde $g(t, E(t))$ son los elementos de orden superior de la expansión en Series de Taylor del campo vectorial $f(\cdot)$ (2.21). Sin pérdida de la generalidad, supongamos

que $\sigma(t) = \tau$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$ con $k \in \mathbf{Z}^+$.

Para demostrar la estabilidad de (2.57) alrededor del origen haremos uso del Teorema (2.1), para lo cual proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(E(t)) = E^T P(t) E(t) \quad (2.58)$$

donde $P(t) \in PC_{Nn \times Nn}^1$ es la matriz definida positiva dada en las condiciones de la proposición. Nos interesa demostrar ahora que (2.58) satisface la condición (2.11).

Al tomar la derivada de la función de Lyapunov obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(E(t)) &= \dot{E}^T(t) P(t) E(t) + E^T(t) \dot{P}(t) E(t) + E^T(t) P(t) \dot{E}(t) \\ &= E^T(t) \left(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{J}f(s(t)) + cA^{\sigma(t)} \otimes \Gamma \right)^T P(t) E(t) + g^T(t, E(t)) P(t) E(t) \\ &\quad + E^T(t) P(t) \left(\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{J}f(s(t)) + cA^{\sigma(t)} \otimes \Gamma \right) E(t) + E^T(t) P(t) g(t, E(t)) \\ &= E^T(t) \left[\dot{P} + (I \otimes Jf(s(t)) + cA^\tau \otimes \Gamma)^T P \right. \\ &\quad \left. + P (I \otimes Jf(s(t)) + cA^\tau \otimes \Gamma) \right] E(t) + 2\eta^T P g(t, n) < 0 \end{aligned}$$

Donde hemos usado (2.55) para definir la desigualdad. De lo anterior concluimos que (2.57) es asintóticamente estable alrededor del origen. Más aún, debido a que estamos considerando todos los términos de orden superior en la aproximación en Series de Taylor del campo vectorial, entonces, la estabilidad asintótica es global. En este sentido, si consideremos el caso particular en que $g(t, n), \forall t$, entonces la estabilidad de la ecuaciones del error será local, debido a que estamos linealizando el campo vectorial. ■

Cabe destacar que en el trabajo de investigación de Zhao y Hill [56], los autores parten de la consideración de que los cambios estructurales son lentos comparados con la escala de tiempo continua de los nodos.

2.3. Autómata Celular y Sistemas Conmutados

En el siguiente capítulo, se presenta una forma de modelar la evolución estructural a partir del concepto de AC. En el resto del trabajo de tesis, utilizaremos los conceptos y teoremas expuestos en este capítulo como base para las investigación que realicé respecto del modelado y análisis de redes dinámicas bajo evolución estructural.

Modelado de la evolución estructural mediante Autómatas Celulares

En este capítulo presentamos un modelo de evolución estructural donde los cambios estructurales están impulsados por la aplicación de reglas locales sobre todos los posibles enlaces de la red. La idea principal del modelo es usar reglas de una AC unidimensional con frontera periódica para determinar si un enlace dado está activo o inactivo. Asumimos que en cada iteración, todos los posibles enlaces son actualizados de manera síncrona. Nuestros resultados numéricos muestran que la evolución estructural impulsada por las reglas AC resulta en patrones estructurales, los cuales pueden ser apreciados en la matriz de acoplamiento.

3.1. Descripción del modelo

Consideremos una red de N nodos conectados con enlaces bidireccionales y sin peso. En este modelo asumiremos que los nodos son estáticos y que el número N de nodos se mantiene igual mientras que la configuración de quien está conectado con quien cambia a lo largo del tiempo τ . La configuración de conexiones está descrita en el instante τ por la matriz $A(\tau) \in \mathbf{R}^{N \times N}$, cuyas entradas $a_{ij}(\tau)$ (para $i, j = 1, \dots, N$)

3.1. Descripción del modelo

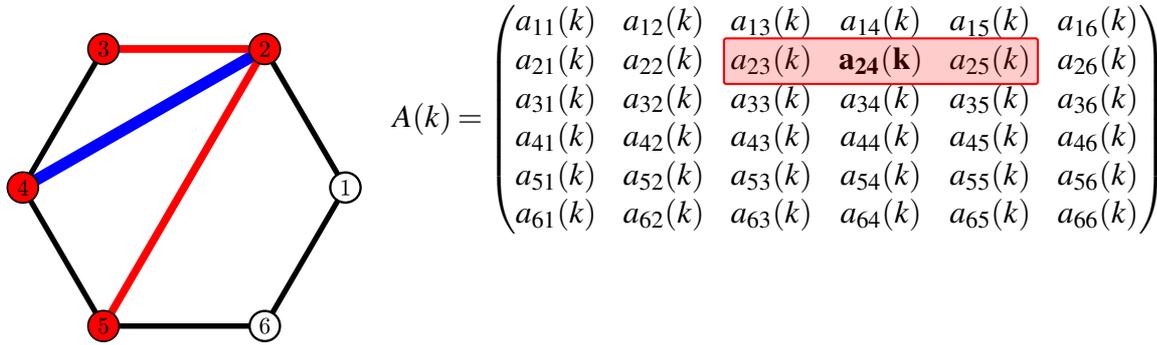


Figura 3.1: Ejemplo de la vecindad del enlace $a_{24}(k)$ con $r = 1$.

son uno o cero dependiendo de si los nodos i -ésimo y j -ésimo están conectados o no en el instante τ . En este sentido diremos que el estado binario del enlace entre los nodos i y j está activo en el instante τ asignando uno a la entrada $a_{ij}(\tau) = 1$; y por el contrario, diremos que el estado binario de dicho enlace está inactivo mediante $a_{ij}(\tau) = 0$.

La evolución estructural de la red es modelada como un operador Φ que altera los elementos de la matriz de conexiones, actualizando el estado binario (activo-inactivo) de todos los posibles enlaces en la red. En primera instancia, el operador determina la matriz próxima $A(\tau + 1)$ a partir de la matriz actual $A(\tau)$, en otras palabras:

$$A(\tau + 1) = \Phi(A(\tau)), \quad (3.1)$$

donde $\Phi : \mathbf{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbf{R}^{N \times N}$ y $\tau = 1, 2, \dots$

El operador Φ se expresa como un conjunto de reglas locales, las cuales dependen del propio estado binario del enlace y del estado binario de otros enlaces en su vecindad. Vale la pena hacer notar que este proceso de actualización de los enlaces tiene una estrecha relación con el concepto de Autómata Celular, donde, el conjunto de celdas cambia su estado en términos del estado de sus vecinos y de su propio estado actual.

Inspirados en el formalismo de AC, el estado binario del enlace $a_{ij}(\tau) \in \{0, 1\}$ en el instante τ se asocia con una máquina de estado finito cuyo cambio está impulsado por las reglas de una AC unidimensional de frontera periódica con un radio de la vecindad r . Donde la vecindad de cada enlace se construye de acuerdo a su posición en la matriz de conexiones. Entonces, la vecindad del enlace $a_{ij}(\tau)$ la componen los r enlaces a la derecha y los r enlaces a la izquierda de la entrada $a_{ij}(\tau)$. En la Figura (3.1) presentamos un ejemplo para el caso particular de $r = 1$.

Si consideramos que todos los posibles enlaces de la red se actualizan de manera síncrona con la misma regla local, entonces podemos reescribir la ecuación (3.1) en términos de las reglas Wolfram como

$$a_{ij}(\tau + 1) = F_W(a_{i-1,j}(\tau), a_{ij}(\tau), a_{i+1,j}(\tau)) \quad (3.2)$$

donde $F_W : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ es la regla local y W es el número de la regla en código Wolfram [84].

Observemos que al definir la vecindad de cada enlace en términos de su posición en la matriz de acoplamiento, el primer y el último elemento de cada fila no tendrán vecinos del lado izquierdo y derecho, respectivamente. Para atender esta problemática, nosotros proponemos una condición de frontera periódica, de tal forma que para la entrada $a_{26}(\tau)$ en el ejemplo de la Figura (3.1), su vecindad está compuesta por los enlaces $a_{25}(\tau)$ y $a_{21}(\tau)$. Cabe destacar que para definir la vecindad del enlace, nosotros no consideramos los elementos en la diagonal ($a_{ii}(\tau)$, con $i = 1, \dots, N$) de la matriz $A(\tau)$ debido a que asumimos que la red no tiene auto-enlaces. En este sentido, el vecino a la izquierda de la entrada $a_{12}(\tau)$ en el ejemplo de la Figura (3.1) es el enlace $a_{16}(\tau)$. Adicionalmente, para este modelo consideramos que los enlaces no tienen dirección, es decir $a_{ij}(\tau) = a_{ji}(\tau)$ para todo instante τ . De igual manera, el proceso de actualización del estado de los enlaces lo realizamos de forma síncrona sobre todos los posibles enlaces de la red.

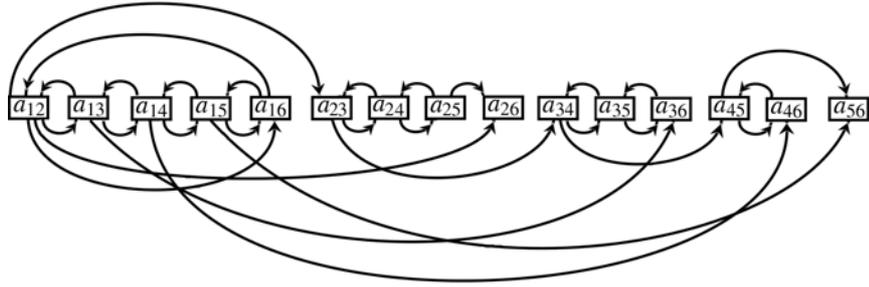


Figura 3.2: Arreglo en cadena de los enlaces para una red de $N = 6$ nodos.

Otra forma de visualizar la vecindad de los enlaces consiste en realizar un arreglo en cadena de los enlaces de manera similar al arreglo de celdas en una AC unidimensional (ver Figura (2.9)). Sin embargo, en la AC unidimensional la vecindad de cada celda la conforman las celdas a la izquierda y derecha, mientras que para nuestro modelo la vecindad de cada enlace tiene la forma mostrada en la Figura (3.2). Lo anterior se debe a que la vecindad del enlace está definida en términos de su posición dentro de la matriz de conexiones y por la condición $a_{ij}(\tau) = a_{ji}(\tau)$. Notemos de la Figura (3.2) que la unión entre dos enlaces no es bidireccional, es decir, un enlace dado $a_{ij}(\tau)$ puede ser vecino del enlace $a_{pq}(\tau)$, pero este último no necesariamente es vecino del primero. También observemos que para el arreglo mostrado en la Figura (3.2), no hay una frontera periódica. Recordemos que la condición de frontera se define en la matriz de conexiones y no el arreglo en cadena de los enlaces.

3.2. Ejemplos numéricos

Con el objetivo de ejemplificar el funcionamiento del modelo propuesto, en esta sección consideramos las reglas legales $W = 60, 110, 122, 220$ (en código Wolfram) de una AC unidimensional con frontera periódica y con radio $r = 1$. En las Tablas (3.1) están dichas reglas locales en términos del estado de los enlaces. Vale la pena destacar que, de acuerdo con la clasificación propuesta por Wolfram [84], la regla $W = 60$ y $W = 122$ son de clase 3, la regla $W = 110$ es de clase 4 y la regla $W = 220$

$a_{i-1,j}(\tau)$	$a_{ij}(\tau)$	$a_{i+1,j}(\tau)$	$a_{ij}(\tau+1)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

(a) Regla $W = 60$ para una AC unidimensional de radio $r = 1$.

$a_{i-1,j}(\tau)$	$a_{ij}(\tau)$	$a_{i+1,j}(\tau)$	$a_{ij}(\tau+1)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

(b) Regla $W = 110$ para una AC unidimensional de radio $r = 1$.

$a_{i-1,j}(\tau)$	$a_{ij}(\tau)$	$a_{i+1,j}(\tau)$	$a_{ij}(\tau+1)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

(c) Regla $W = 122$ para una AC unidimensional de radio $r = 1$.

$a_{i-1,j}(\tau)$	$a_{ij}(\tau)$	$a_{i+1,j}(\tau)$	$a_{ij}(\tau+1)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

(d) Regla $W = 220$ para una AC unidimensional de radio $r = 1$.

Tabla 3.1: Ejemplos de distintas reglas legales para una AC unidimensional de radio $r = 1$.

es de clase 2. Para los siguientes ejemplos numéricos asumimos que el número de nodos en la red es $N = 500$, los cuales se conectan a través de enlaces sin dirección. Recordemos que en este modelo, los nodos son objetos estáticos, es decir, no tienen ningún atributo dinámico, y nos interesa estudiar las propiedades dinámicas de la evolución estructural.

Evolución estructural bajo la regla $W = 60$

Para la regla $W = 60$ (Tabla (3.1a)), seleccionamos como estructura inicial un grafo de vecinos más cercanos. A continuación aplicamos esta regla en $T = 500$ iteraciones, donde por cada iteración, todas las entradas de la matriz de conexiones son actualizadas de manera síncrona. En la Figuras (3.3) podemos observar la matriz de

3.2. Ejemplos numéricos

acoplamiento en distintos instantes de la iteración τ . En estas Figuras podemos observar la representación cuadrangular de la matriz de acoplamiento, donde los cuadros en negro son los enlaces con estado activo, y los cuadros blancos son los enlaces con estado inactivo. Como es posible observar, debido a la aplicación de la regla local $W = 60$, la estructura forma de manera espontánea, distintos tipos de patrones estructurales los cuales pueden ser observados en la representación cuadrangular de la matriz de conexiones. En la Figura (3.4) podemos observar la distribución del grado de nodo para cada uno de las redes de la Figura (3.1a). Adicionalmente, en la Tabla (3.2) mostramos algunas de las medidas básicas para los grafos de estas Figuras.

Evolución estructural bajo la regla $W = 110$

Proponemos ahora realizar otro ejemplo numérico con la regla $W = 110$ (Tabla (3.1b)). Para este ejemplo consideramos que la estructura inicial se construye con el modelo Newman-Watts-Strogatz, con una probabilidad de reconexión de $p = 0.1$. Al igual que en el ejemplo previo, aplicaremos esta regla $T = 500$ iteraciones. En las Figuras (3.5) podemos observar la representación cuadrangular de la matriz de acoplamiento en distintos instantes de la iteración τ . Vale la pena notar los patrones estructurales que emergen y evolucionan conforme iteramos la regla. En particular observamos la formación de triángulos cuya dimensión crece conforme iteramos la regla. Adicionalmente las entradas que rodean la diagonal de la matriz van cambiando la densidad de entradas con valor uno. Por otro lado, en las Figuras (3.6) podemos ver las correspondientes distribuciones de los grados de nodo para cada una de las redes mostradas en las Figura (3.5). Y en la Tabla (3.3) mostramos también algunas de las medidas básicas de estos grafos. De estos resultados podemos notar que la evolución estructural resulta en estructuras con una homogeneidad en la distribución de sus conexiones.

Evolución estructural bajo la regla $W = 122$

Vale la pena destacar que algunos de los patrones observados en los grafos en la Figura (3.5) emergen también cuando aplicamos otras reglas de evolución para AC unidimensionales. En particular, uno de los patrones más recurrentes es la formación de triángulos cuya dimensión crece conforme avanzan las iteraciones. Con el objetivo de ilustrar lo anterior, proponemos realizar un tercer ejemplo numérico con la regla Wolfram $W = 122$ (Tabla (3.1c)). Consideremos ahora que la estructura inicial se construye con el modelo Barabási-Albert, tomando una red inicial de $m_0 = 5$ nodos, y agregando un total de 495 nuevos nodos, donde cada nuevo nodo se acopla preferencialmente con sólo uno de los nodos presentes en la red. Los patrones generados al iterar la regla $W = 122$ sobre la red antes descrita los mostramos en los grafos de la Figura (3.7). Podemos ver la formación de varios triángulos cuya dimensión crece hasta colisionar con los elementos de la línea diagonal. En la Figura (3.8) vemos la distribución del grado de nodo para cada uno de los grafos de la Figura (3.7). Notemos que en las primeras 25 iteraciones, la evolución de la estructura heterogénea (3.7a) resulta en distintas estructuras homogéneas. De igual forma, en la Tabla (3.4) mostramos también algunas de las medidas básicas de los grafos en las Figuras(3.7).

Evolución estructural bajo la regla $W = 220$

Bajo las reglas AC hemos observado que la dinámica evolutiva de la red resulta, en su gran mayoría, en la emergencia de patrones regulares incluso cuando la estructura original no posee dichas regularidades. En los primeros dos ejemplos partimos de dos estructuras homogéneas y el resultado de aplicar las reglas resultó en estructuras con patrones característicos de una AC. En el tercer ejemplo partimos de una estructura heterogénea y la evolución resultó en estructuras homogéneas nuevamente. Proponemos entonces un último ejemplo para ejemplificar lo anterior. Consideremos ahora una red aleatoria construida con el modelo Erdos-Renyi, seleccio-

3.2. Ejemplos numéricos

nando una probabilidad de conexión de $p = 0.4$. La representación cuadrangular de este grafo lo podemos ver en la Figura (3.9a). La evolución de la red impulsada por la regla $W = 220$ y en distintos instantes de iteración son mostradas también en la Figura (3.9). Notemos que conforme actualizamos la estructura surgen patrones regulares que son visibles en los elementos cercanos a la diagonal. Dichos patrones se expanden conforme avanzan las iteraciones. En este sentido, la estructura aleatoria evoluciona hacia una estructura con patrones regulares. Lo anterior lo podemos ver reflejado en las distribuciones del grado de nodo mostrados en la Figura (3.10). En la Tabla (3.5) muestro algunas de las medidas básicas para los grafos de la Figura (3.9).

En el modelo de red expuesto en el presente capítulo, partimos de la consideración de que los nodos son entidades estáticas, es decir, no tienen dinámica. Lo anterior nos permitió concentrarnos en observar como es la evolución estructural cuando reglas de AC unidimensional son aplicadas a cada enlace. En este sentido, para cambiar el estado activo-inactivo de un enlace dado usamos la información de cual es el estado de otros enlaces en la vecindad. Al tomar en cuenta la dinámica de los nodos, debemos extender las reglas aquí usadas con el objetivo de incluir en ellas el estado de los nodos. En el siguiente capítulo proponemos un modelo de evolución estructural donde cada nodo es un sistema dinámico discreto en el tiempo.

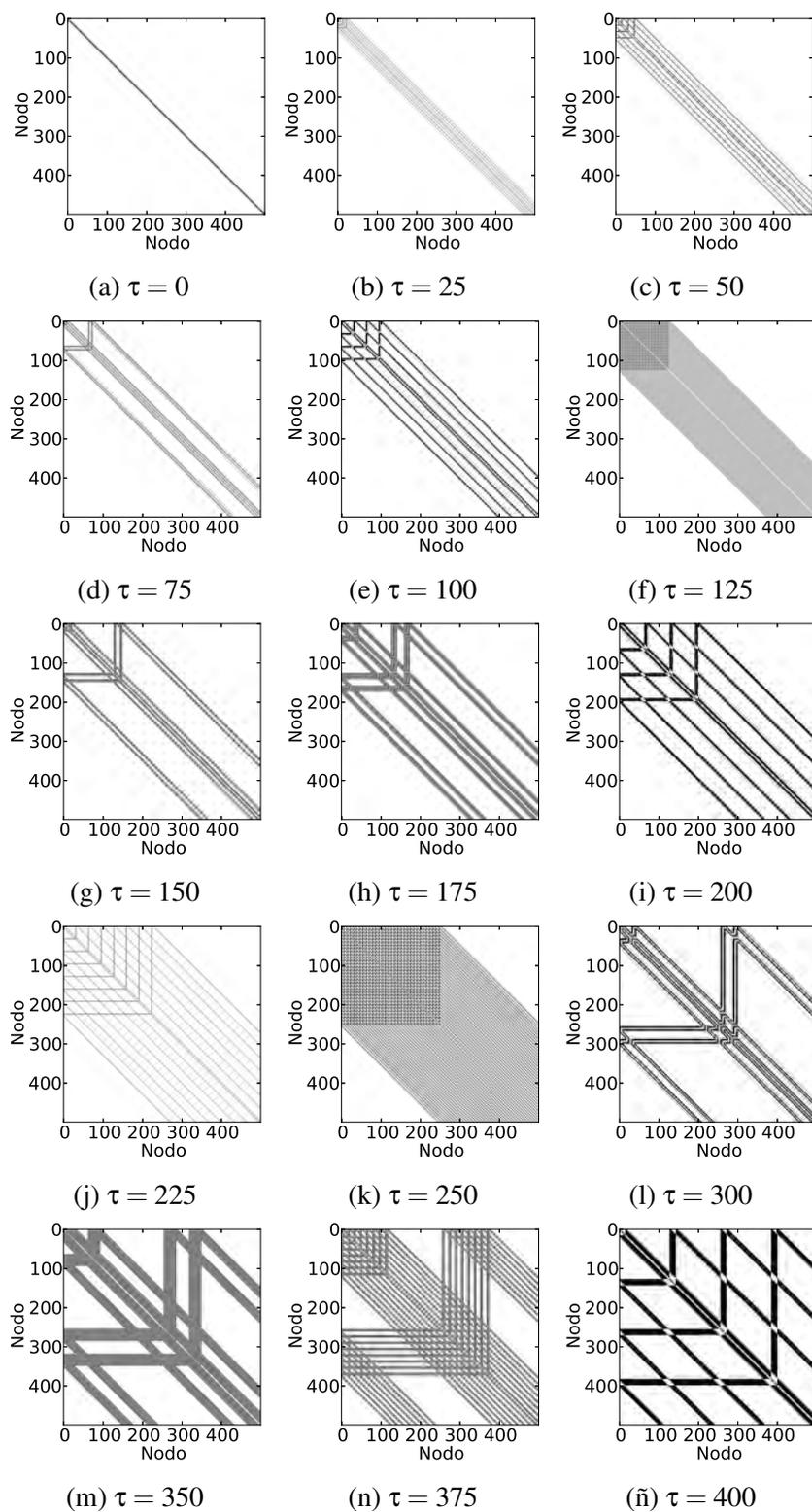


Figura 3.3: Evolución de la red bajo la regla $W = 60$.

3.2. Ejemplos numéricos

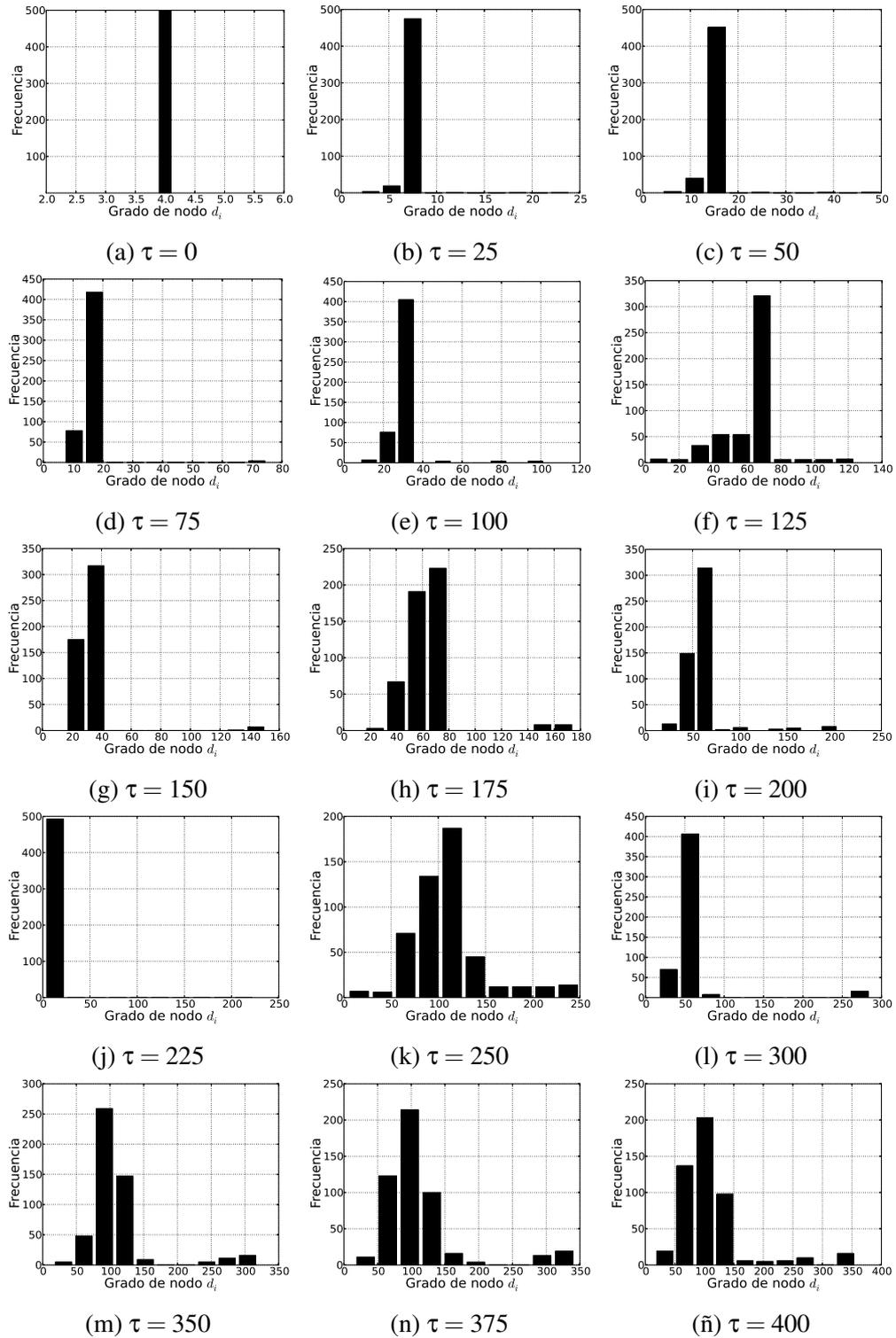


Figura 3.4: Distribución de grado de la red en distintos instantes de la evolución impulsada por la regla $W = 60$.

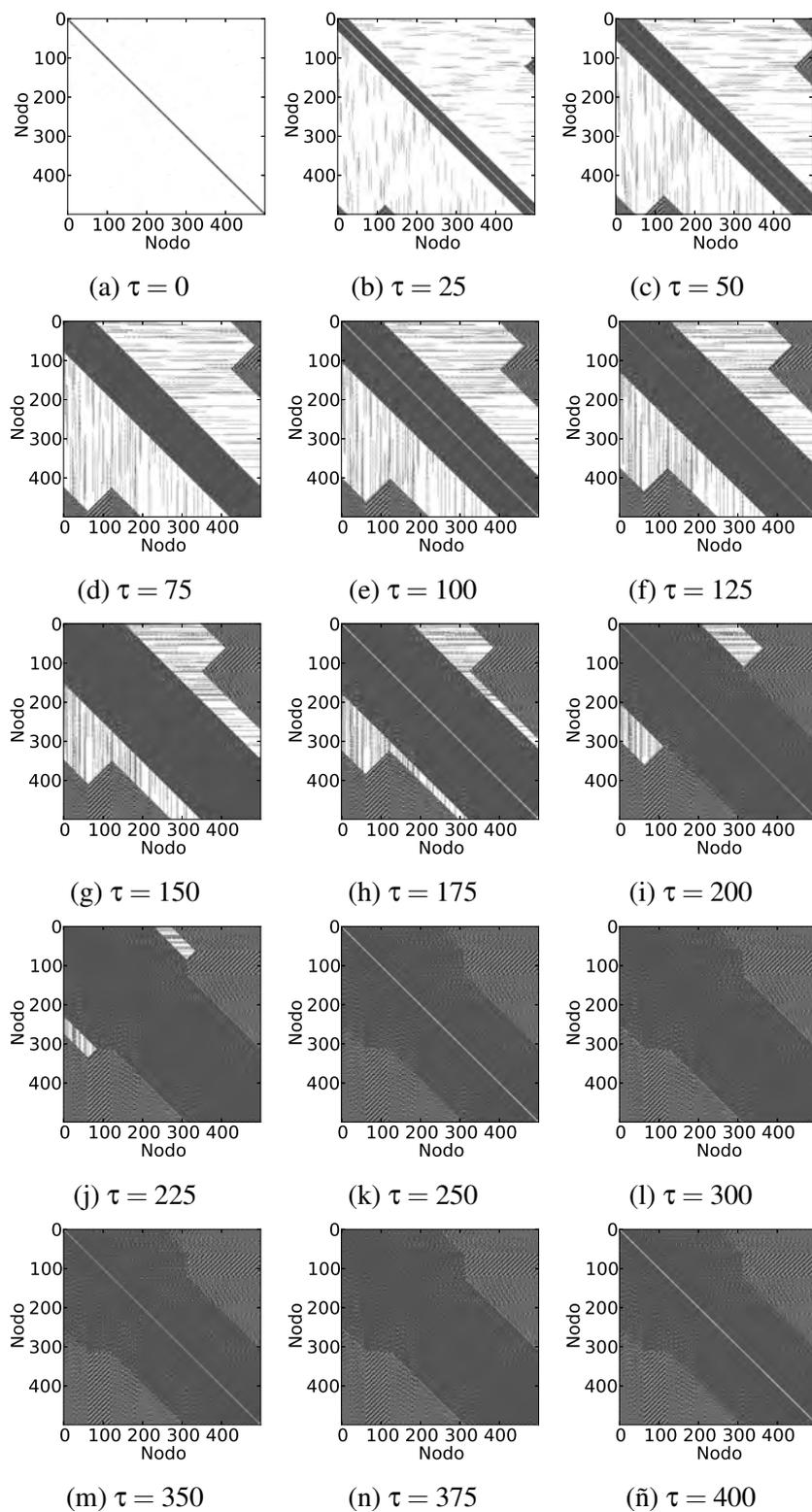


Figura 3.5: Evolución de la red bajo la regla $W = 110$.

3.2. Ejemplos numéricos

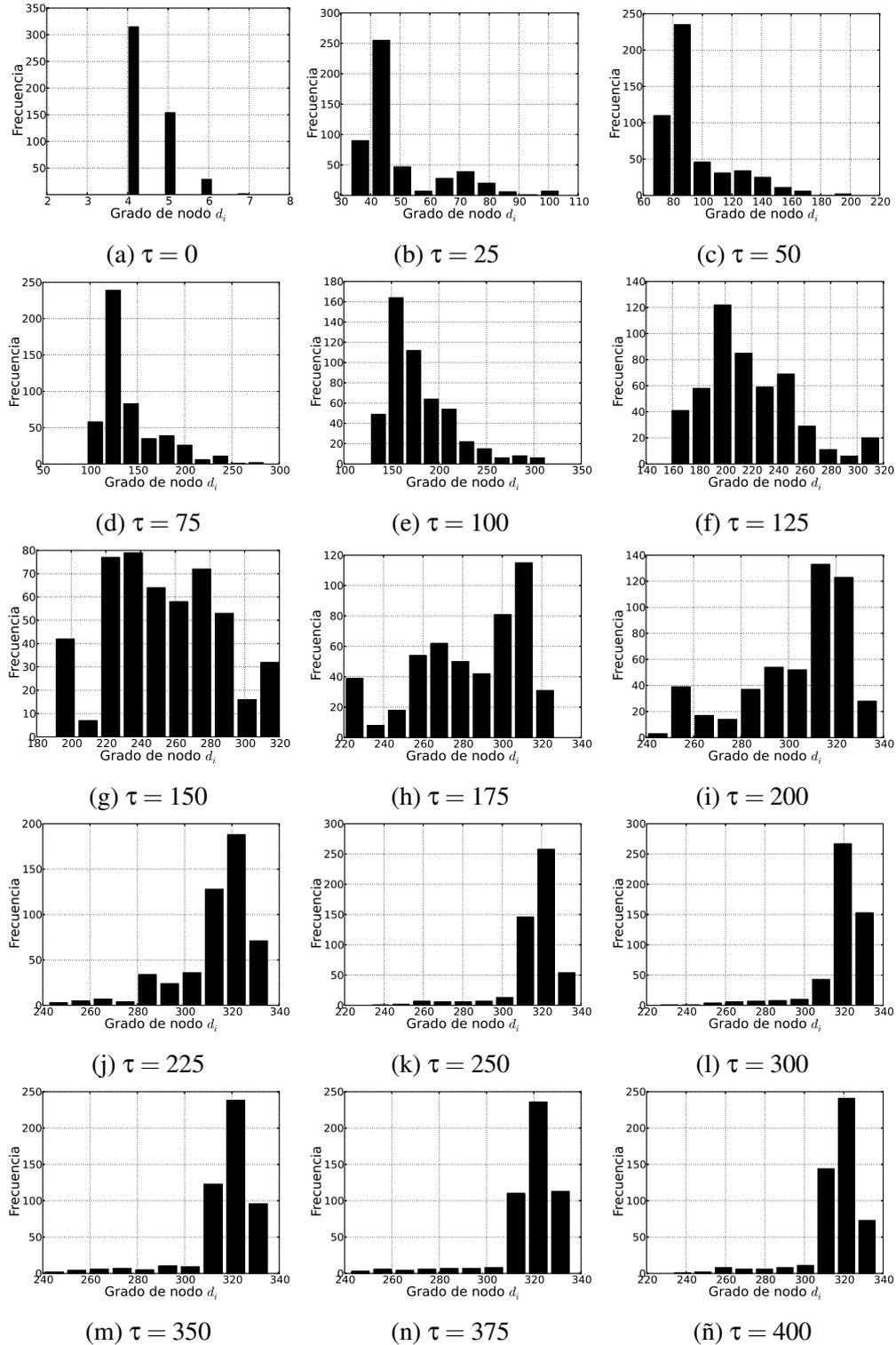


Figura 3.6: Distribución de grado de la red en distintos instantes de la evolución impulsada por la regla $W = 110$.

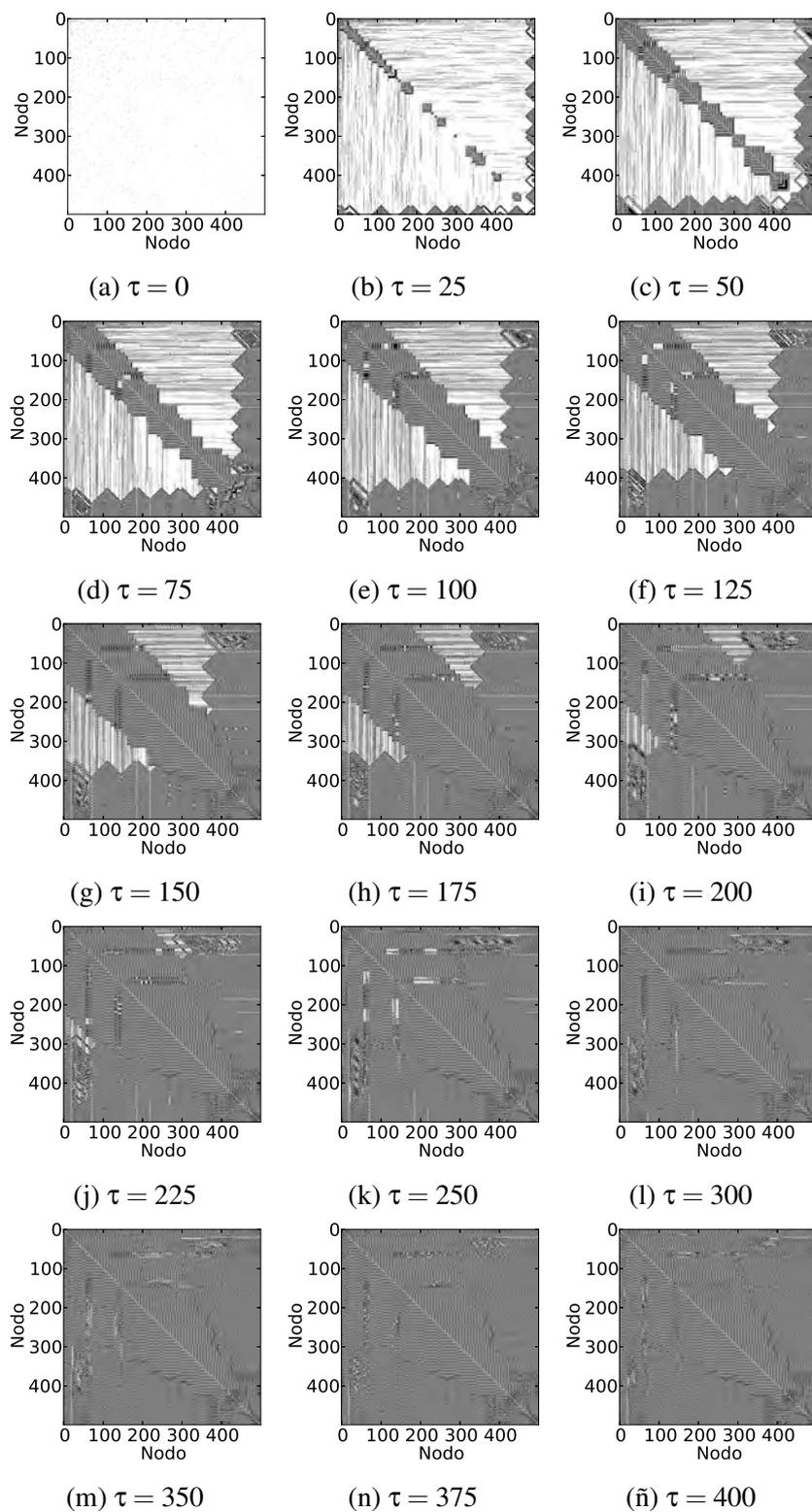


Figura 3.7: Evolución de la red bajo la regla $W = 122$.

3.2. Ejemplos numéricos

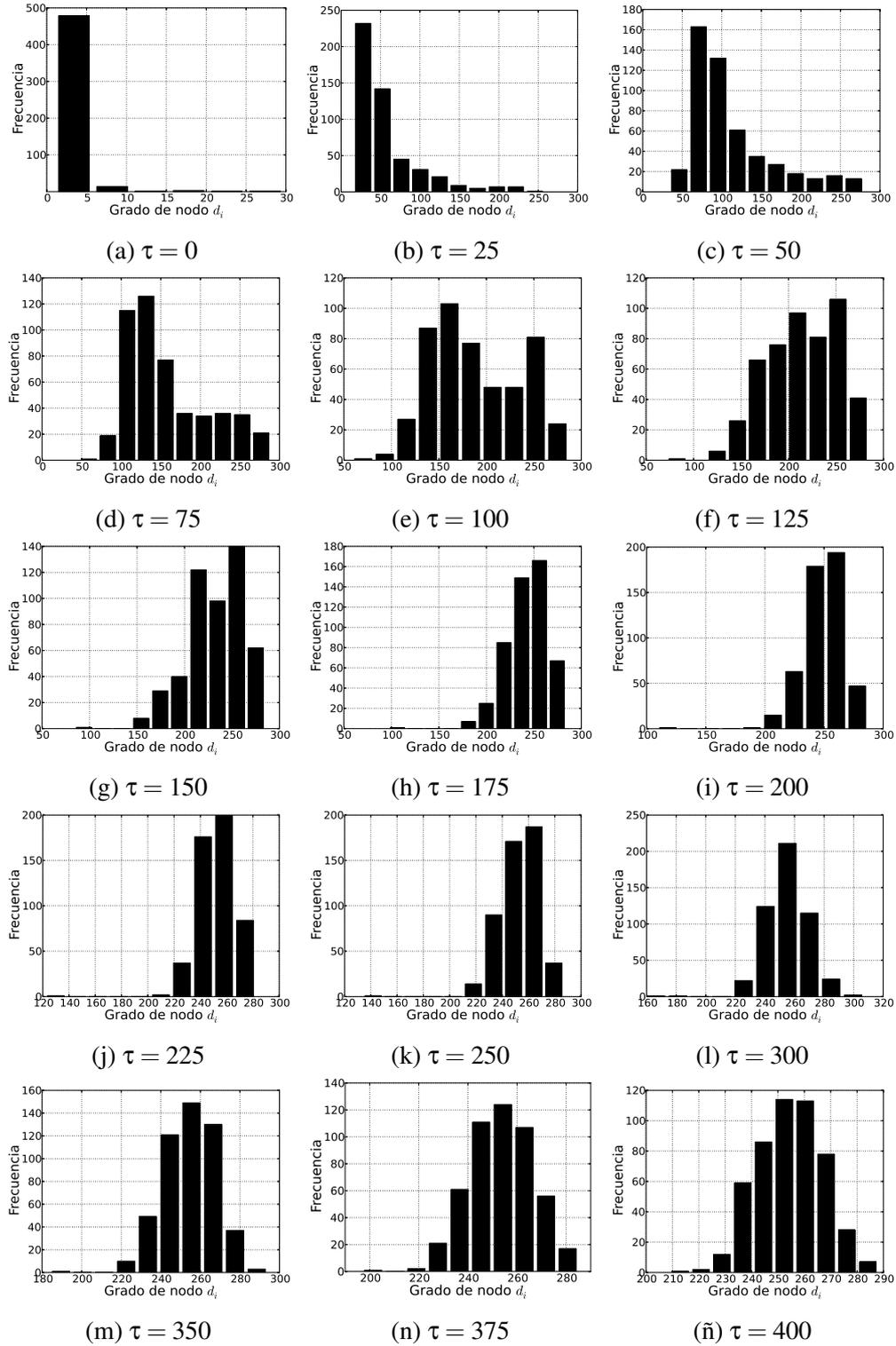


Figura 3.8: Distribución de grado de la red en distintos instantes de la evolución impulsada por la regla $W = 122$.

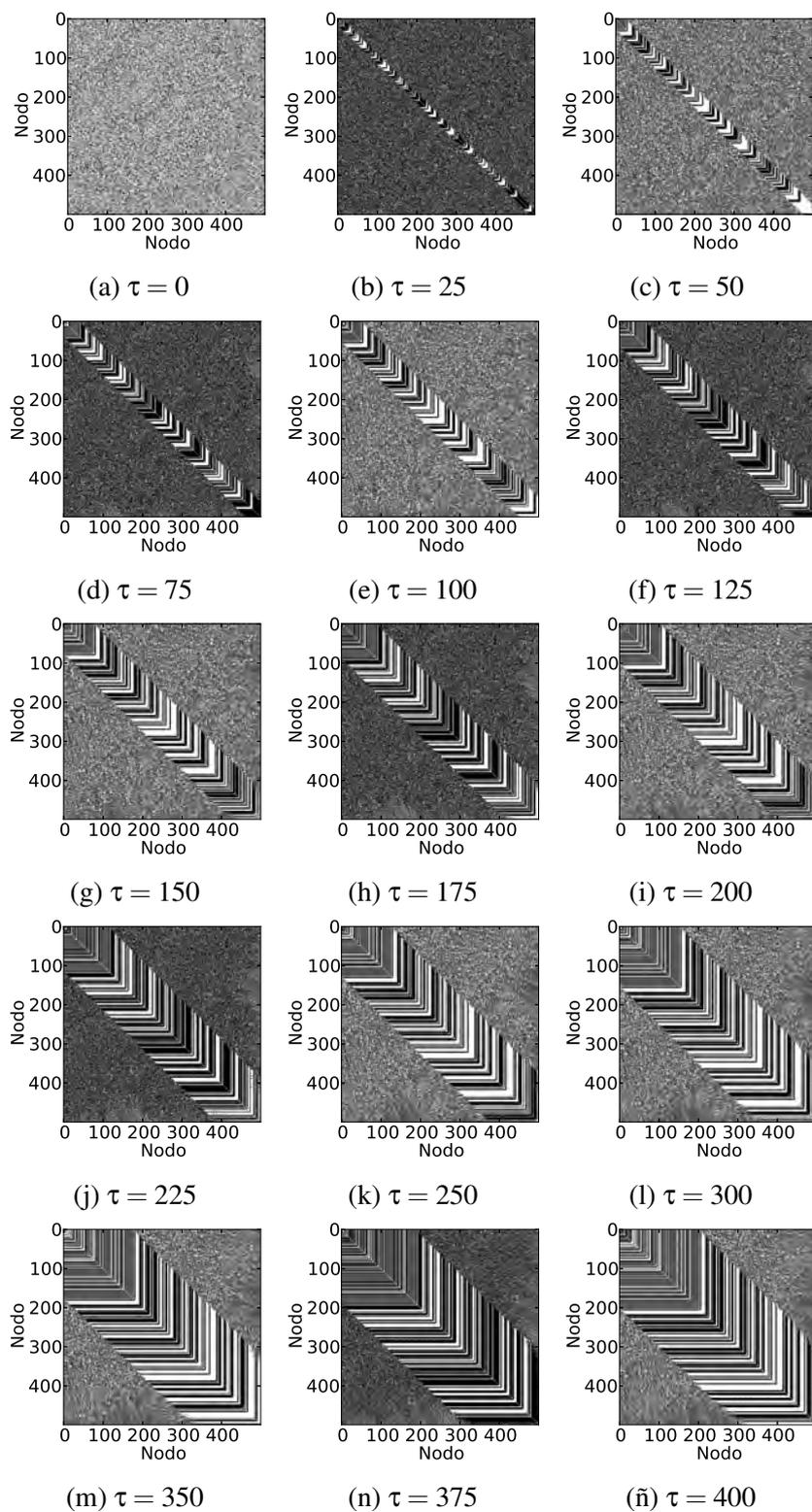


Figura 3.9: Evolución de la red bajo la regla $W = 220$.

3.2. Ejemplos numéricos

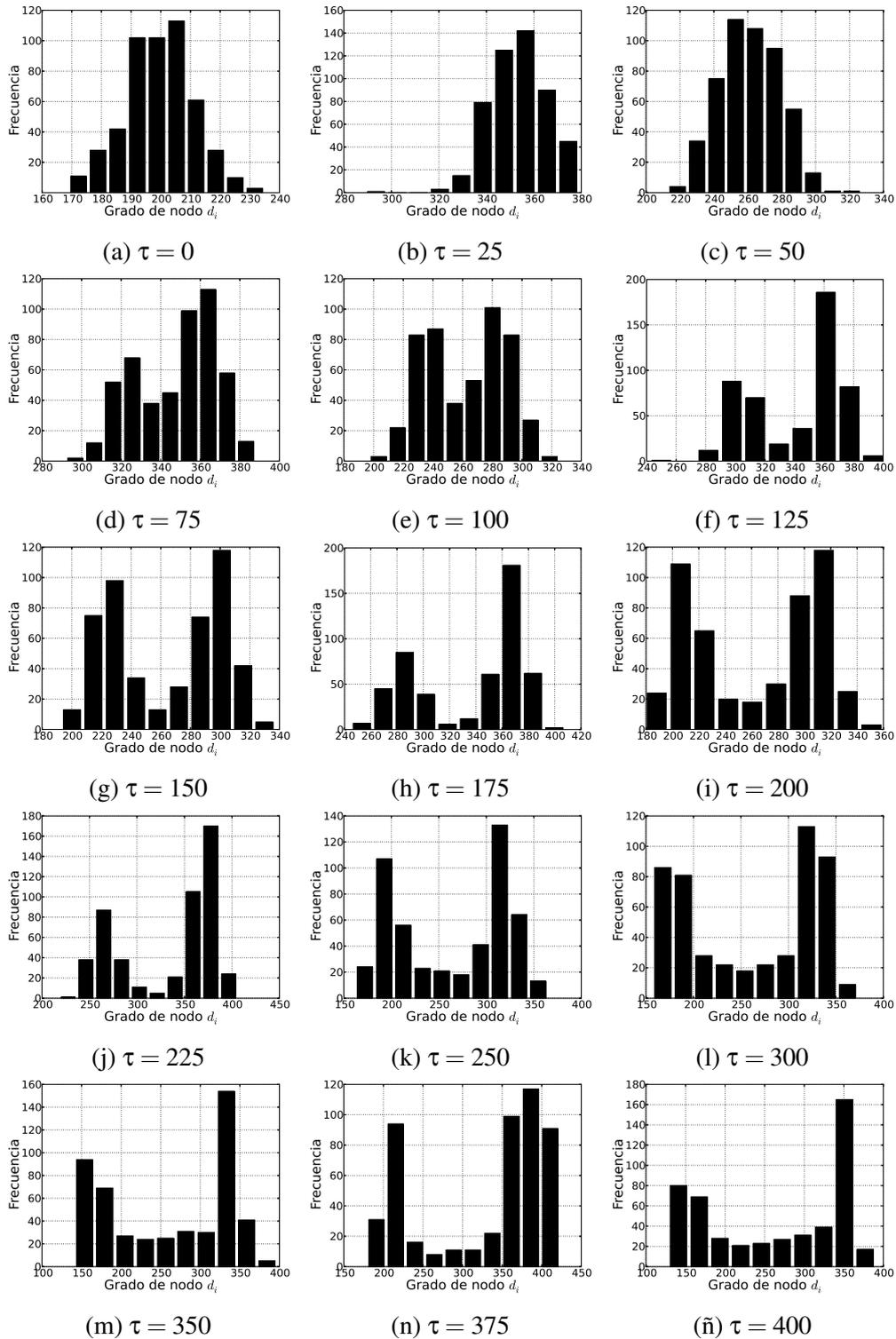


Figura 3.10: Distribución de grado de la red en distintos instantes de la evolución impulsada por la regla $W = 220$.

Grafo	Num. Enlaces	Coef. Agrupamiento	Long. Caminos	Grado de nodo
A(0)	1000	0.50	63	4.0
A(25)	1975	0.011	7.3	7.9
A(50)	3924	0.026	4.2	16
A(75)	3923	0.043	3.7	16
A(100)	7748	0.11	3.1	31
A(125)	14883	0.068	2.7	60
A(150)	7724	0.24	2.6	31
A(175)	14939	0.10	2.3	60
A(200)	15028	0.31	2.5	60
A(225)	3915	0.11	3.1	16
A(250)	27780	0.16	2.0	110
A(275)	3923	0.18	2.7	16
A(300)	14980	0.26	2.2	60
A(325)	3915	0.22	2.6	16
A(350)	27836	0.44	1.8	110
A(375)	27811	0.27	1.9	110
A(400)	28052	0.50	1.9	110

Tabla 3.2: Medidas Básicas para los grafos en las Figuras (3.3) (Regla W = 60).

Grafo	Num. Enlaces	Coef. Agrupamiento	Long. Caminos	Grado de nodo
A(0)	1109	0.42	7.1	4.4
A(25)	12388	0.45	2.1	50
A(50)	23628	0.48	1.8	95
A(75)	35017	0.41	1.7	140
A(100)	44667	0.52	1.6	180
A(125)	54344	0.54	1.6	220
A(150)	63290	0.48	1.5	250
A(175)	70911	0.62	1.4	280
A(200)	76059	0.64	1.4	300
A(225)	78435	0.57	1.4	310
A(250)	79169	0.66	1.4	320
A(275)	79484	0.66	1.4	320
A(300)	79572	0.59	1.4	320
A(325)	79233	0.66	1.4	320
A(350)	79403	0.66	1.4	320
A(375)	79654	0.59	1.4	320
A(400)	79156	0.66	1.4	320

Tabla 3.3: Medidas Básicas para los grafos en las Figuras (3.5) (Regla W = 110).

3.2. Ejemplos numéricos

Grafo	Num. Enlaces	Coef. Agrupamiento	Long. Caminos	Grado de nodo
A(0)	499	0.0	5.8	2.0
A(25)	14500	0.32	1.9	58
A(50)	27693	0.40	1.8	110
A(75)	39390	0.44	1.7	160
A(100)	47189	0.46	1.6	190
A(125)	53468	0.47	1.6	210
A(150)	58000	0.49	1.5	230
A(175)	60603	0.50	1.5	240
A(200)	62291	0.51	1.5	250
A(225)	62870	0.51	1.5	250
A(250)	63252	0.52	1.5	250
A(275)	63361	0.52	1.5	250
A(300)	63647	0.52	1.5	250
A(325)	63286	0.52	1.5	250
A(350)	63498	0.52	1.5	250
A(375)	63393	0.52	1.5	250
A(400)	63628	0.52	1.5	250

Tabla 3.4: Medidas Básicas para los grafos en las Figuras (3.7) (Regla $W = 122$).

Grafo	Num. Enlaces	Coef. Agrupamiento	Long. Caminos	Grado de nodo
A(0)	49833	0.40	1.6	200
A(25)	88253	0.71	1.3	350
A(50)	65287	0.53	1.5	260
A(75)	86989	0.70	1.3	350
A(100)	65496	0.53	1.5	260
A(125)	85615	0.69	1.3	340
A(150)	65988	0.55	1.5	260
A(175)	84208	0.69	1.3	340
A(200)	66051	0.56	1.5	260
A(225)	83425	0.69	1.3	330
A(250)	66053	0.58	1.5	260
A(275)	82992	0.70	1.3	330
A(300)	65405	0.59	1.5	260
A(325)	82486	0.71	1.3	330
A(350)	65230	0.61	1.5	260
A(375)	82295	0.73	1.3	330
A(400)	66106	0.64	1.5	260

Tabla 3.5: Medidas Básicas para los grafos en las Figuras (3.9) (Regla $W = 220$).

Capítulo 4

Modelado de la evolución estructural en redes dinámicas discretas

En este capítulo describimos un modelo de evolución estructural para una red compuesta por sistemas dinámicos de tiempo discreto. Asumimos que los cambios en la estructura están impulsados por reglas que determinan el estado activo-inactivo de cada enlace. Este modelo se entiende como una extensión del modelo presentado en el capítulo 3. A diferencia de ese modelo, donde los nodos son estáticos, ahora se tienen dos procesos dinámicos en la red. Por lo tanto, se busca que las reglas involucren información sobre la estructura y el estado de los nodos. Para el diseño de las reglas proponemos dos tipos de políticas de cambio. En la primera damos preferencia a la información del estado de los nodos con el objetivo de beneficiar el surgimiento del estado sincronizado. A esta política de cambio le llamamos “centrada en los nodos”. Con respecto a la segunda política de cambio, damos preferencia a la información de la estructura con el objetivo de beneficiar la heterogeneidad en la distribución de las conexiones. Usamos el nombre de “política centrada en los enlaces” para referirnos a este tipo de política de cambio. Notemos que en este capítulo proponemos un modelo de red coevolutiva debido a que tomamos en cuenta la interacción entre la evolución estructural y la dinámica de los nodos.

4.1. Descripción del modelo: Red dinámica discreta coevolutiva

Consideremos una red de N nodos idénticos, donde cada nodo es un sistema discreto en el tiempo. Asumamos que los nodos se conectan de manera lineal con enlaces bidireccionales y sin peso. De igual forma supongamos que la estructura de la red cambia en distintos instantes de tiempo. En este contexto, las ecuaciones de estado de la red se expresan de la siguiente forma

$$x_i(k+1) = f(x_i(k)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) f(x_j(k)), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (4.1)$$

donde k es la variable de tiempo discreta de los nodos, $x_i(k) = [x_{i1}(k), \dots, x_{in}(k)]^T \in \mathbf{R}^n$ es la variable de estado del i -ésimo nodo; $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es el mapa que describe la dinámica de cada nodo de manera aislada. En particular, en este modelo consideramos el caso en que cada nodo es el sistema Mapa Logístico, para el cual $n = 1$ y se define de la siguiente forma:

$$f(x(k)) = rx(x)(1 - x(k)); \quad (4.2)$$

donde $r \in \mathbf{R}^+$ es un parámetro que caracteriza la dinámica del sistema. Vale la pena destacar que el sistema (4.2) fue introducido como un modelo del crecimiento poblacional en distintas especies [87]. Sin embargo, debido a su simplicidad y a sus atributos dinámicos, este modelo ha sido ampliamente usado para el estudio del caos. Una descripción detallada sobre el sistema (4.2) y sus potenciales aplicaciones lo podemos consultar en la referencia [88]. En particular, para el modelo de red (4.1) consideramos que los nodos tienen el mismo valor del parámetro $r = 3.9$, el cual sabemos corresponde al caso en que el Mapa Logístico tiene una dinámica caótica.

Como ya hemos descrito en el capítulo 2, el segundo término a la derecha de la ecuación (4.1) describe el acoplamiento entre i -ésimo nodo y sus vecinos, donde c es la fuerza de acoplamiento entre los nodos, la cual consideramos es igual para todo par de nodos conectados. En contraste con la ecuación (2.38), ahora la matriz de acoplamiento $A(k) = \{a_{ij}(k)\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ es una función matricial que describe la evolución estructural a lo largo del tiempo. En este sentido, si el enlace (i, j) está activo en el instante k , entonces $a_{ij}(k) = 1$, y por el contrario, si dicho enlace está inactivo, entonces $a_{ij}(k) = 0$. Más aún, para este modelo consideramos que los enlaces no tienen dirección, i.e. $a_{ij}(k) = a_{ji}(k)$.

En este trabajo de tesis asumimos que la función matricial $A(k)$ cambia impulsada por un proceso que actualiza, de manera asíncrona, el estado binario “activo-inactivo” de todas sus entradas. En particular, nosotros modelamos la evolución estructural como un operador que, en cada instante del tiempo discreto $k + 1$, cambia los elementos de la función matricial $A(k)$ para construir la estructura actual $A(k + 1)$. Para una red coevolutiva, tal operador depende de las propiedades estructurales de la red y de las variables de estado de los nodos en el instante previo de la conmutación, esto es

$$A(k + 1) = \Phi(A(k), X(k)), \quad (4.3)$$

donde $X(k) = [x_1^T(k), x_2^T(k), \dots, x_N^T(k)]^T \in \mathbf{R}^N$ es un vector con las variables de estado de cada nodo en el instante k ; y $\Phi : \mathbf{R}^{N \times N} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^{N \times N}$ es un operador cuya función es actualizar todas las entradas de la matriz de conexiones de acuerdo a un conjunto de reglas locales. Vale la pena hacer notar que este proceso es análogo al proceso de actualización de una AC descrita en la ecuación (3.1) del capítulo anterior. La principal diferencia entre ambas expresiones está en la dependencia del estado dinámico de los nodos en la ecuación (4.3).

La red discreta coevolutiva está descrita por el par de ecuaciones (4.1) y (4.3), donde como se puede apreciar, ambas dinámicas dependen de las variables de estado

4.1. Descripción del modelo: Red dinámica discreta coevolutiva

$X(k)$ y la estructura de la red ($A(k)$). En términos generales, la evolución estructural descrita por el operador $\Phi(\cdot)$ puede incluir escenarios radicales de evolución donde, de una iteración a otra, la estructura de la red cambia instantáneamente sus propiedades. A manera de ejemplo puede ocurrir que el número de nodos o enlaces disminuya dramáticamente en alguna iteración, o bien puede ocurrir que algunos de los nodos queden totalmente aislados de la red. Sin embargo, en este trabajo de tesis hemos asumido que la evolución estructural de una red es un proceso gradual de cambio. Por lo tanto, para involucrar este argumento en la evolución estructural descrita por (4.3), asumimos que el operador $\Phi(\cdot)$ mantiene fijo el número de nodos para todo tiempo. Asimismo consideramos que dicho operador es tal que los elementos de la diagonal satisfacen la condición de difusividad de manera uniforme en el tiempo, es decir:

$$a_{ii}(k) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}(k) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ji}(k) = -d_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, N; \forall k \quad (4.4)$$

donde $d_i(k)$ es el grado del i -ésimo nodo en el instante k . Si asumimos que el operador Φ es tal que el número de nodos N es constante para todo tiempo y además ningún nodo queda aislado de la red, entonces, por la condición (4.4) y por el teorema del círculo de Gershgorin, tendremos que los eigenvalores de la función matricial satisfacen las siguientes condiciones de manera uniforme en k [31]:

1. Cero es uno de sus eigenvalores con multiplicidad uno;
2. todos sus eigenvalores distintos de cero son estrictamente negativos y
3. los eigenvalores pueden ser ordenados de la siguiente forma:

$$0 = \lambda_1(k) > \lambda_2(k) \geq \dots \geq \lambda_N(k) \quad (4.5)$$

Al igual que en la ecuación (3.1) en el capítulo 3, aquí el operador Φ se expresa

como un conjunto de reglas que actualizan el estado “activo-inactivo” de cada enlace. Para un modelo de red coevolutiva, dichas reglas se expresan en términos del propio estado del enlace, de las propiedades estructurales de la red y del estado dinámico de los nodos. En otras palabras, tenemos tres elementos a considerar para actualizar un enlace dado:

- 1) El estado actual del enlace ($a_{ij} = 0$ ó $a_{ij} = 1$);
- 2) Las propiedades estructurales de los nodos i y j .
- 3) Las propiedades dinámicas de los nodos i y j .

Los últimos dos puntos se cuantifican definiendo que mediciones estructurales y dinámicas usar. Con respecto a las mediciones estructurales podemos usar alguna de las medidas básicas de los grafos (capítulo 2). En particular, para este modelo haremos uso de la diferencia entre el grado del nodo i y del nodo j en el instante k ($\|d_i(k) - d_j(k)\|$). Y con respecto a las mediciones dinámicas de los nodos, para este modelo usaremos el error dinámico entre el estado del nodo i y del nodo j ($\|x_i(k) - x_j(k)\|$). La idea básica en este modelo es usar las mediciones estructurales y dinámicas de manera simultánea para decidir cual es el estado del enlace en algún instante k . Para el modelo de red coevolutiva definimos un umbral α para la medición estructural y un umbral β para la medición dinámica. Vale la pena hacer notar que las reglas con umbrales se relacionan con la teoría de los Sistemas de Eventos Discretos (capítulo 2), en el sentido de que el enlace cambia su estado cuando el evento de excederse del umbral ocurre. Lo anterior nos motiva a definir dos tipos de eventos:

I. Evento dinámico ($\delta_{ij}(k)$):

Si el error dinámico entre el i -ésimo y el j -ésimo nodo es menor al umbral $\alpha \in \mathbf{R}^+$, es decir, $\|x_i(k) - x_j(k)\| < \alpha$, diremos que el evento dinámico no ha ocurrido, lo cual denotaremos como $\delta_{ij}(k) = 0$; en caso contrario diremos que el evento dinámico ha ocurrido y lo denotaremos como $\delta_{ij}(k) = 1$.

II: Evento estructural ($\sigma_{ij}(k)$):

Si las diferencias entre los grados del i -ésimo y el j -ésimo nodo es mayor al umbral $\beta \in \mathbf{R}^+$, es decir $\|d_i(k) - d_j(k)\| > \beta$, diremos que el evento estructural no ha ocurrido, lo cual denotaremos como $\sigma_{ij}(k) = 0$; en caso contrario diremos que el evento estructural ha ocurrido y lo denotaremos como $\sigma_{ij}(k) = 1$.

En este sentido podemos expresar la regla local para cada uno de los enlaces de la siguiente forma:

$$a_{ij}(k+1) = \phi(\delta_{ij}(k), a_{ij}(k), \sigma_{ij}(k)), \quad (4.6)$$

donde $\phi : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ es la regla local. Vale la pena hacer notar que la ecuación (4.6) es una extensión de la ecuación (3.2) del modelo presentado en el capítulo 3. Observemos que ahora el estado actual del enlace depende de dos eventos ($\delta_{ij}(k)$ y $\sigma_{ij}(k)$), mientras que en el modelo del capítulo previo depende del estado de dos enlaces vecinos ($a_{i-1,j}$ y $a_{i+1,j}$). En otras palabras, en el modelo de evolución estructural presentado en el capítulo 3 cada enlace tiene asociado una vecindad y, por el contrario, en el modelo de red coevolutiva, no hay una vecindad asociada a cada enlace.

Por otra parte, la regla $\phi(\cdot)$ está completamente definida si especificamos el valor de cada una de las $2^3 = 8$ posibles configuraciones del arreglo $\delta_{ij}(k), a_{ij}(k), \sigma_{ij}(k)$. Por lo tanto hay un total de $2^8 = 256$ reglas. Para seleccionar una de las 256 posibles reglas, en este modelo proponemos dos criterios a los que llamamos políticas de cambio. Para este modelo proponemos las siguientes políticas:

A. Política centrada en los nodos

Consiste en dar prioridad al evento dinámico con el objetivo de beneficiar la sincronización de los nodos. En este sentido, si el evento dinámico no ocurre ($\delta_{ij}(k) = 0$ i.e. los nodos están sincronizados) en el instante k , el estado dinámico del enlace permanece sin cambios independientemente de si el evento estructural ocurre o no. Sin embargo, si el evento dinámico ocurre ($\delta_{ij}(k) = 1$ i.e. los nodos no están sincronizados), tomamos en consideración al evento estructural y al estado actual del enlace para decidir si cambiamos o no el estado de dicho enlace.

B. Política centrada en los enlaces

Consiste dar prioridad al evento estructural con el objetivo de beneficiar la heterogeneidad en la distribución de las conexiones. En este sentido, si el evento estructural no ocurre ($\sigma_{ij}(k) = 0$ i.e. los nodos tienen distintos grados de nodo) en el instante k , el estado del enlace permanece sin cambios sin importar si el evento dinámico ocurre o no. Sin embargo, si el evento estructural ocurre ($\sigma_{ij}(k) = 1$ i.e los nodos tienen casi el mismo grado de nodo), tomamos en consideración al evento dinámico y al estado actual del enlace para decidir si cambiamos o no el estado de dicho enlace.

Basado en lo anterior, nosotros seleccionamos la regla mostrada en la Tabla (4.1), la cual corresponde a una política centrada en los nodos. Vale la pena destacar la similitud entre la lógica de cambio presentada en la Tabla (4.1) y la lógica de cambio en una regla AC unidimensional de radio $r = 1$ (Ver por ejemplo las Tablas (3.1) del capítulo 3). Haciendo la misma analogía, la Tabla (4.1) corresponde a la regla $W = 92$ en código Wolfram, la cual es de clase 2 de acuerdo con la clasificación propuesta por Wolfram [84]. Por otra parte, observemos que en la Tabla (4.1) hemos separado las primeras cuatro filas con el objetivo de identificar los escenarios en los que el evento dinámico ha ocurrido ($\delta_{ij}(k) = 1$).

4.1. Descripción del modelo: Red dinámica discreta coevolutiva

$\delta_{ij}(k)$	$a_{ij}(k)$	$\sigma_{ij}(k)$	$a_{ij}(k+1)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Tabla 4.1: Tabla de verdad la cual describe la lógica de actualización de los enlaces de acuerdo a la política centrada en los nodos.

Con respecto a la regla sujeta a una política de cambio centrada en los enlaces, seleccionamos la regla mostrada en la Tabla (4.2). Haciendo la misma comparación con las reglas AC unidimensionales, esta regla corresponde a la regla $W = 172$, la cual es de clase 2 de acuerdo con la clasificación propuesta por Wolfram [84]. Con el objetivo de destacar el hecho de que el evento estructural tiene prioridad en la regla sujeta a una política centrada en los enlaces, en la Tabla (4.2) realizar los siguientes cambios en el orden de la configuración: 1) la última columna ($\sigma_{ij}(k)$) la conmutamos con la primera columna $\delta_{ij}(k)$. 2) Las filas de la Tabla (4.2) las ordenamos de tal forma que las primeras cuatro filas correspondan al caso en que el evento estructural no ha ocurrido ($\sigma_{ij}(k) = 0$) y las últimas cuatro filas correspondan al caso en que el evento estructural ha ocurrido ($\sigma_{ij}(k) = 1$).

Para completar la definición de las reglas coevolutivas debemos especificar como es el proceso de actualización de $A(k)$. En una AC existen dos posibilidades. La primera es una actualización síncrona en donde la regla es aplicada en todas las celdas por cada iteración. La segunda es una actualización asíncrona en donde la regla es aplicada en una sola celda por cada iteración. Para nuestro modelo propuesto, seleccionamos una actualización asíncrona de los enlaces. El proceso de actualización lo realizamos de la siguiente forma: En el instante de tiempo k seleccionamos un solo enlace (i, j) de los $N(N - 1)/2$ posibles enlaces. La se-

$\sigma_{ij}(k)$	$a_{ij}(k)$	$\delta_{ij}(k)$	$a_{ij}(k+1)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Tabla 4.2: Tabla de verdad la cual describe la lógica de actualización de los enlaces de acuerdo a la política centrada en los enlaces.

lección se realiza de manera ordenada y de forma creciente del arreglo de enlaces $((1,2), (1,3), \dots, (N-1, N), (1,2), (1,3), \dots)$. Note que este arreglo esta ordenado de forma cíclica, de tal forma que una vez seleccionado el enlace $(N-1, N)$, el siguiente enlace a seleccionar será nuevamente el primer enlace $(1,2)$.

En el siguiente algoritmo resumimos el modelo de red coevolutiva de Mapeos Logísticos con actualización de los enlaces asíncrona.

Paso 0. La condición inicial para cada uno de los nodos $(x_i(0))$, con $i = 1, \dots, N$ es seleccionada aleatoriamente con probabilidad uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Por otro lado, la configuración inicial de la estructura $(A(0))$ corresponderá a un grafo de vecinos más cercanos. Con el objetivo de eliminar los efectos transitorios de los nodos, evaluamos el estado dinámico de $x_i(k+1)$ en el intervalo $k \in [0, k_0)$ de acuerdo a la ecuación (4.1), con la estructura fija descrita por $A(0)$.

Paso 1. A partir del instante k_0 , el proceso coevolutivo se realiza de la siguiente forma:

- a. En el instante de tiempo k seleccionamos un solo enlace (i, j) de los $N(N-1)/2$ posibles enlaces. La selección se realiza de manera ordenada y de forma creciente del arreglo de enlaces $((1,2), (1,3), \dots, (N-1, N), (1,2), (1,3), \dots)$. Note que este arreglo esta ordenado de forma cíclica.

4.2. Estabilidad del estado sincronizado

- ca, de tal forma que una vez seleccionado el enlace $(N-1, N)$, el siguiente enlace a seleccionar será nuevamente el primer enlace $(1, 2)$.
- b. El evento dinámico y estructural son evaluados $(\delta_{ij}(k)$ y $\sigma_{ij}(k))$ para el enlace (i, j) previamente seleccionado.
 - c. El estado binario del enlace $(a_{ij}(k) = a_{ji}(k))$ es actualizado de acuerdo con la regla sujeta a una política centrada en los nodos (Tabla (4.1)) , o bien con la regla sujeta a una política centrada en los enlaces (Tabla (4.2)).
 - d. Los estados dinámicos $x_i(k+1)$ (para $i = 1, 2, \dots, N$) son calculados de acuerdo con (4.1).
 - e. Repetimos desde el paso a.

En la siguiente sección analizamos la dinámica de la red coevolutiva (4.1).

4.2. Estabilidad del estado sincronizado

Consideremos la red dinámica discreta coevolutiva (4.1)-(4.6) donde el estado binario de los enlaces es actualizado de manera asíncrona.

Definición 4.12 Para una red descrita por (4.1)-(4.6), donde la evolución estructural de la red es impulsada por la regla coevolutiva $\phi(\cdot)$, diremos que la red logra sincronizarse de manera asintótica si, conforme $k \rightarrow \infty$, el estado dinámico de los nodos $(X(k) = [x_1(k), \dots, x_N(k)]^T)$ tiende a la variedad de sincronización $\Omega(k) = \{x(k) \in \mathbf{R}^n : x_1(k) = x_2(k) = \dots = x_N(k) = s(k)\}$.

Si la condición de difusividad (4.4) se satisface de manera uniforme en el tiempo k y la red coevolutiva está sincronizada, entonces las trayectorias de los nodos colapsan

sobre la trayectoria del estado sincronizado $s(k)$. Más aún, $s(k)$ puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o bien una trayectoria caótica.

La estabilidad de la variedad de sincronización es equivalente a la estabilidad del error de sincronización $e_i(k) = x_i(k) - s(k)$, para $i = 1, 2, \dots, N$ alrededor del origen. Para encontrar la dinámica del error de sincronización sustituimos $x_i(t) = e_i(t) + s(t)$ en (4.1):

$$e_i(k+1) + s(k+1) = f(e_i(k) + s(k)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) f(e_j(k) + s(k)), \quad (4.7)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Sustituyendo la expansión en Serie de Taylor en primer orden del mapa n-dimensional $f(\cdot)$ (ecuación (2.21)) y usando $s(k+1) = f(s(k))$ obtenemos

$$\begin{aligned} e_i(k+1) &= \mathbf{J}f(s(k))e_i(k) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) \left[f(s(k)) + \mathbf{J}f(s(k))e_j(k) \right] \\ &= \mathbf{J}f(s(k))e_i(k) + cf(s(k)) \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) + c\mathbf{J}f(s(k)) \sum_{j=1}^N a_{ij}(k)e_j(k). \end{aligned}$$

Observemos que la segunda sumatoria a la derecha de esta ecuación es cero debido a la condición de difusividad (4.4). Entonces

$$\begin{aligned} e_i(k+1) &= \mathbf{J}f(s(k)) \left[e_i(k) + c \sum_{j=1}^N a_{ij}(k)e_j(k) \right] \\ &= \mathbf{J}f(s(k)) \left[e_i(k) + ca_{ii}(k)e_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}(k)e_j(k) \right]. \end{aligned}$$

Pero, por la condición (4.4) tenemos que $a_{ii}(k) = -d_i(k)$, donde $d_i(k)$ es el grado del i -ésimo nodo en el instante k . Por lo tanto la dinámica del error de sincronización se expresa de la siguiente forma

$$e_i(k+1) = \mathbf{J}f(s(k)) \left[e_i(k) \left(1 - cd_i(k) \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}e_j(k) \right]. \quad (4.8)$$

4.2. Estabilidad del estado sincronizado

Definamos la matriz $B(k) = \mathbb{I}_N + cA(k)$ y sea $E(k) = [e_1^T(k), \dots, e_N^T(k)]^T \in \mathbf{R}^{Nn}$ el arreglo con las variables del error para cada nodo. Entonces, la ecuación (2.41) en forma matricial se expresa como

$$E(k+1) = \left(B(k) \otimes \mathbf{J}f(s(k)) \right) E(k), \quad (4.9)$$

donde $E(k) = [e_1^T(k), \dots, e_N^T(k)]^T \in \mathbf{R}^{Nn}$, $\mathbf{J}f(s(k))$ es el Jacobiano del mapa y \otimes es el producto de Kronecker. Observemos que la principal diferencia entre la ecuación (4.9) y (2.42) está en que ahora la matriz B es una función matricial. Para poder continuar con el análisis propuesto en la demostración del Teorema 2.2 asumiremos que la matriz $B(k)$ es simultáneamente diagonalizable. Es decir, existe una matriz $\hat{\Phi} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ con $\hat{\Phi}^{-1} \hat{\Phi} = \mathbb{I}_N$ tal que $\hat{\Phi}^{-1} B(k) \hat{\Phi} = \hat{\Lambda}(k) = \text{diag}\{\beta_1(k), \dots, \beta_N(k)\}$. En este sentido proponemos el siguiente cambio de variable $W(k) = (\hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n) E(k)$. Multiplicando ambos lados de la ecuación (4.9) por $(\hat{\Phi}^{-1} \otimes \mathbb{I}_n)$ obtenemos

$$W(k+1) = \left(\hat{\Lambda}(k) \otimes \mathbf{J}f(s(k)) \right) W(k) \quad (4.10)$$

donde $\hat{\Lambda}(k) = \text{diag}\{\beta_1(k), \dots, \beta_N(k)\}$. De (4.10) podemos observar que cada bloque del producto del Kronecker corresponde a cada una de las componentes $w_i(t) \in \mathbf{R}^n$ del vector $W(t)$, los cuales se expresan como

$$w_i(k+1) = \beta_i(k) \mathbf{J}f(s(k)) w_i(k), \quad i = 2, \dots, N; \quad (4.11)$$

donde hemos usado el hecho de que $\beta_1(k) = 1$ ($\forall k$) corresponde a la dinámica del estado sincronizado. Un primer paso para demostrar la estabilidad de (4.11) sería repetir lo mismos primeros pasos de la demostración del Teorema (2.2) y calcular el exponente característico de la secuencia $w(k+1)/w(0)$. En este sentido la condición

suficiente para la estabilidad tiene la siguiente forma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \prod_{k_i=0}^{k-1} \beta_i(k) \right| + \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \prod_{k_i=0}^{k-1} \mathbf{J}f(s(k)) \right|}_{h_{max}} < 0; \quad (4.12)$$

donde h_{max} es el Máximo Exponente de Lyapunov del sistema dinámico y $\beta_i(k)$ es el eigenvalor en el instante k de la matriz $B(k)$. Sin embargo, para continuar con el análisis debemos suponer que el primer límite de la expresión (4.12) converge a un valor máximo conforme $k \rightarrow \infty$. Lo anterior puede resultar restrictivo a la evolución estructural descrita por (4.3). Recordemos que también hemos impuesto una restricción adicional al suponer que la evolución estructural es tal que la función matricial $B(k)$ es simultáneamente diagonalizable.

Para relajar las restricción antes mencionadas, en esta sección proponemos realizar el análisis de la estabilidad del sistema (4.9) basado en el formalismo de las funciones de Lyapunov para sistemas discretos. Sin embargo, antes de dar inicio con el análisis conviene hacer algunas observaciones con respecto al sistema discreto (4.9).

Como primer punto observemos que el sistema (4.9) es un sistema discreto en el tiempo, lineal y con parámetros variantes de la forma

$$x(k+1) = \mathcal{A}(\xi(k))x(k), \quad (4.13)$$

donde $x(k) \in \mathbf{R}^n$ son las variables de estado del sistema y $\mathcal{A}(\xi(k)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una función matricial cuyo cambio está impulsado por la variación del parámetro $\xi(k)$. En años recientes se han presentado resultados con respecto a la estabilidad del sistema (4.13) (véase por ejemplo [89, 90, 91]). Para el sistema (4.13) el concepto de la estabilidad del origen se explica en la Definición (4.13).

Definición 4.13 [Definición 1,[89]] Diremos que el origen del sistema (4.13) es uniforme y asintóticamente estable (UAE) si para todo $x(0) \in \mathbf{R}^n$ la solución de (4.13) converge a zero uniformemente con respecto a $\{\xi(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$; es decir, para toda constante positiva γ , existen $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\{\xi(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, las soluciones correspondientes satisfacen

$$\|x(k)\| \leq \gamma \quad \text{para } k \geq K. \quad (4.14)$$

Teorema 4.4 [Teorema 1,[91]]

El punto de equilibrio $x = 0$ de (4.13) es uniforme y asintóticamente estable si y sólo si existe una función positiva definida

$$V(x(k), \xi(k)) = x^T(k) \mathbf{Q}(\xi(k)) x(k), \quad (4.15)$$

con $\mathbf{Q}(\xi(k)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ tal que

$$\alpha_1(\|x(k)\|) \leq V(x(k), \xi(k)) \leq \alpha_2(\|x(k)\|), \quad (4.16)$$

y cuyas diferencias a lo largo de las soluciones de (4.13) son decrecientes definidas negativas, esto es

$$\Delta V = V(x(k+1), \xi(k+1)) - V(x(k), \xi(k)) < 0, \quad (4.17)$$

para todo $x(k) \in \mathbf{R}^n$ y para todo $\xi(k) \in \Xi$; donde $\alpha_0(\cdot)$, $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ son funciones k_∞

En nuestra interpretación, el cambio del parámetro $\xi(k)$ del sistema (4.13) corresponde a la variación de la trayectoria del estado sincronizado $s(k)$ en (4.9). Note que para el sistema (4.9), la función matricial $(B(k) \otimes \mathbf{J}f(s(k))) \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$ depende de manera implícita del tiempo discreto k y del estado sincronizado $s(k)$. El Teorema (4.4) nos presenta un resultado estándar concerniente a la estabilidad (UAE) del sistema (4.13). A continuación haré uso de este Teorema para analizar la estabilidad (UAE) del sistema (4.9). Nuestro resultado lo exponemos en Teorema (4.5).

Teorema 4.5 Consideremos al sistema (4.9). Supongamos que el mapa $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, con $n > 1$, es una función continua y diferenciable, de tal forma que el Jacobiano del mapa evaluado sobre todos los puntos de la trayectoria del estado sincronizado $s(k)$ es una función continua. Asumamos también que la evolución estructural descrita por (4.3) es tal que la función matricial $A(k)$ satisface (4.4) de manera uniforme en el tiempo, y es tal que $B(k) = \mathbb{I}_N + cA(k)$ es una matriz simétrica para todo k . Entonces, la solución de sincronización es asintóticamente estable si existen dos funciones matriciales positivas definidas $D(s(k)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $P(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ tal que

$$\mathbf{J}^T f(s(k))D(s(k+1))\mathbf{J}f(s(k)) - D(s(k)) \quad (4.18)$$

y

$$B^T(k)P(k+1)B(k) - P(k), \quad (4.19)$$

son funciones matriciales definidas negativas de manera uniforme en el tiempo k ; y adicionalmente, la función matricial $\mathbf{J}^T f(s(k))D(s(k+1))\mathbf{J}f(s(k))$ es positiva definida para todo k .

4.2. Estabilidad del estado sincronizado

Demostración: Recordemos que demostrar la estabilidad del estado sincronizado $s(k)$ es equivalente a demostrar la estabilidad de las ecuaciones del error (4.9) alrededor del origen. Para esta demostración haremos uso del resultado en el Teorema (4.4). En este contexto proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(E(k), s(k)) = E^T(k) \mathbf{Q}(s(k)) E(k), \quad (4.20)$$

con $\mathbf{Q}(s(k)) \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$ una función matricial definida positiva, la cual definimos de la siguiente forma:

$$\mathbf{Q}(s(k)) = P(k) \otimes D(s(k)), \quad (4.21)$$

donde $D(s(k))$ y $P(k)$ son las matrices dadas en (4.18) y (4.19) respectivamente.

Por otro lado, asumiendo que $D(s(k))$ y $P(k)$ son tales que $\mathbf{Q}(s(k))$ es una matriz simétrica para todo k , entonces podemos hacer uso de la desigualdad de Raileigh-Ritzs, la cual se expresa de la siguiente forma: para cualquier vector $z \in \mathbf{R}^n$, la matriz simétrica M satisface la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\min} z^T z \leq z^T M z \leq \lambda_{\max} z^T z \quad (4.22)$$

donde λ_{\min} y λ_{\max} son respectivamente el menor y el mayor eigenvalor de M . Haciendo las sustituciones pertinentes en (4.22) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\|E(k)\| \mu_{\min}(k) \leq E^T(k) \mathbf{Q}(s(k)) E(k) \leq \mu_{\max}(k) \|E(k)\|, \quad (4.23)$$

donde $\mu_{\min}(k)$ y $\mu_{\max}(k)$ son el eigenvalor más pequeño y el más grande, respectivamente, de la matriz $\mathbf{Q}(s(k))$ en el instante k . De (4.23) podemos ver que la función candidata de Lyapunov (4.20) satisface la condición (4.16) con $\alpha_1(\|E(k)\|)$ y $\alpha_2(\|E(k)\|)$ funciones lineales del error.

El siguiente paso consiste en demostrar que las diferencias a lo largo de las soluciones del error de (4.20) satisfacen (4.13), es decir, son decrecientes negativas definidas. Sustituyendo (4.20) en (4.13) obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(E(k+1), s(k+1)) - V(E(k), s(k)) \\ &= E^T(k+1)\mathbf{Q}(s(k+1))E(k+1) - E^T(k)\mathbf{Q}(s(k))E(k)\end{aligned}$$

Sustituyendo (4.21) y usando (4.9) junto con la propiedad del producto mixto del producto de Kronecker \otimes obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta V &= \\ &E^T(k) \left[\left(B(k) \otimes \mathbf{J}f(s(k)) \right)^T \left(P(k+1) \otimes D(s(k+1)) \right) \left(B(k) \otimes \mathbf{J}f(s(k)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(P(k) \otimes D(s(k)) \right) \right] E(k) \\ &= E^T(k) \left[\left(B^T(k)P(k+1)B(k) \right) \otimes \left(\mathbf{J}^T f(s(k))D(s(k+1))\mathbf{J}f(s(k)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(P(k) \otimes D(s(k)) \right) \right] E(k)\end{aligned}$$

Para demostrar que la función de Lyapunov (4.20) es decreciente, sumemos y restemos dentro del corchete la siguiente matriz $(P(k)) \otimes (\mathbf{J}^T f(s(k))D(s(k+1))\mathbf{J}f(s(k)))$. Usando la propiedad asociativa del producto de Kronecker obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta V &= \\ &E^T(k) \left[\left(B^T(k)P(k+1)B(k) - P(k) \right) \otimes \left(\mathbf{J}^T f(s(k))D(s(k+1))\mathbf{J}f(s(k)) \right) \right. \\ &\quad \left. + P(k) \otimes \left(\mathbf{J}^T f(s(k))D(s(k+1))\mathbf{J}f(s(k)) - D(k) \right) \right] E(k)\end{aligned}$$

Notemos que el primer término dentro del corchete es el producto de Kronecker entre una función negativa definida $(B^T(k)P(k+1)B(k) - P(k))$ y una matriz positiva definida $\mathbf{J}^T f(s(k))D(s(k+1))\mathbf{J}f(s(k))$.

4.2. Estabilidad del estado sincronizado

Por las propiedades del producto \otimes sabemos que lo anterior corresponde a una matriz negativa definida. De forma análoga, podemos ver que el producto $P(k) \otimes \left(\mathbf{J}^T f(s(k)) D(s(k+1)) \mathbf{J} f(s(k)) - D(k) \right)$ es también una función negativa definida. Por lo tanto, la función candidata de Lyapunov satisface la condición (4.17) del Teorema (4.4), lo que nos permite concluir que las ecuaciones del error (4.9) son asintóticamente estables alrededor del origen y por lo tanto, el estado sincronizado es asintóticamente estable. ■

Por otro lado, observemos que para el caso en que la dimensionalidad del sistema es $n = 1$, la ecuación del error (4.9) se expresa como

$$E(k+1) = f'(s(k))B(k)E(k) \quad (4.24)$$

donde $E(k) = [e_1(k), \dots, e_N(k)]^T \in \mathbf{R}^{N \times N}$ es el vector con las variables del error, y donde $f'(s(k)) \in \mathbf{R}$ es la derivada del mapa unidimensional evaluada sobre el estado sincronizado $s(k) \in \mathbf{R}$. Note que para la demostración del Teorema (4.5) hemos usado las propiedades del producto de Kronecker para dividir el problema de la estabilidad en la solución de dos desigualdades matriciales. Sin embargo, para el caso $n = 1$ tenemos que la derivada del mapa es una función escalar. Las condiciones de la estabilidad de la red dinámica para el caso en que $n = 1$ lo expresamos en el Teorema (4.6).

Teorema 4.6

Consideremos al sistema (4.24). Supongamos que el mapa $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función continua y diferenciable, de tal forma que la derivada del mapa evaluada sobre todos los puntos de la trayectoria del estado sincronizado $s(k)$ es una función continua. Más aún, consideremos que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$f'(s(k+1)) \leq \alpha \quad (4.25)$$

Asumamos también que la evolución estructural descrita por (4.3) es tal que la función matricial $A(k)$ satisface (4.4) de manera uniforme en el tiempo, y es tal que $B(k) = \mathbb{I}_N + cA(k)$ es una matriz simétrica para todo k . Entonces, la solución de sincronización es asintóticamente estable si existe una función positiva definida $P(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ tal que

$$\alpha^2 B^T(k)P(k+1)B(k) - P(k), \quad (4.26)$$

es una función definida negativa de manera uniforme en el tiempo k .

Demostración: Para esta demostración haremos uso del resultado en el Teorema (4.4). En este contexto proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(E(k), s(k)) = E^T(k)\mathbf{Q}^*(s(k))E(k), \quad (4.27)$$

con $\mathbf{Q}^*(s(k)) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ una función matricial definida positiva, la cual definimos como

$$\mathbf{Q}^*(s(k)) = (f'(s(k)))^2 P(k), \quad (4.28)$$

donde $P(k)$ es la función matricial dada en (4.26).

4.3. Ejemplos numéricos

Por los mismos argumentos dados para (4.23), es fácil ver que la función de Lyapunov (4.27) satisface la condición (4.16) del Teorema (4.4). Demostremos ahora que las diferencias a lo largo de las soluciones del error de (4.27) son decrecientes negativas definidas. De (4.24) y de (4.28) obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(E(k+1), s(k+1)) - V(E(k), s(k)) \\ &= E^T(k+1)\mathbf{Q}^*(s(k+1))E(k+1) - E^T(k)\mathbf{Q}^*(s(k))E(k) \\ &= E^T(k) \left[\left(f'(s(k)) \right)^2 B^T(k)\mathbf{Q}^*(s(k+1))B(k) - \mathbf{Q}^*(s(k)) \right] E(k) \\ &= \left(f'(s(k)) \right)^2 E^T(k) \left[\left(f'(s(k+1)) \right)^2 B^T(k)P(k+1)B(k) - P(k) \right] E(k)\end{aligned}$$

De la condición (4.25) vemos que

$$\Delta V \leq \alpha^2 E^T(k) \left[\alpha^2 B^T(k)P(k+1)B(k) - P(k) \right] E(k) \quad (4.29)$$

Por lo tanto, de (4.26) concluimos que las diferencias a lo largo de las soluciones del error de la función candidata de Lyapunov son decrecientes definidas. Lo anterior implica que (4.24) es asintóticamente estable alrededor del origen. ■

Observemos que la condición (4.25) no es restrictiva en el sentido de que una gran mayoría de los sistemas discretos la satisfacen. A manera de ejemplo consideremos el Mapa Logístico dado en (4.2). La derivada de este sistema está dado por $f'(s(k)) = r(1 - 2s(k))$, donde $s(k) \in [0, 1]$. Notemos que el máximo valor positivo de $f'(s(k))$ es $\alpha = r$, tal y como podemos comprobar en la Figura (4.1)

4.3. Ejemplos numéricos

Consideremos una red dinámica descrita por (4.1), con $N = 10$ nodos idénticos, y donde cada nodo es un Mapa Logístico descrito por (4.2). Asumiremos que el parámetro de cada Mapa Logístico es $r = 3.9$, el cual sabemos corresponde al caso

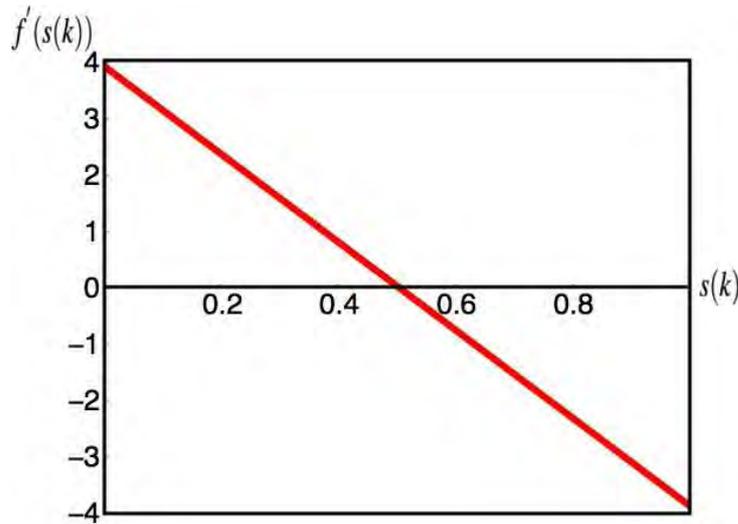


Figura 4.1: La deriva del Mapa Logístico para $r = 3.9$.

en que dicho sistema exhibe un comportamiento caótico. Seleccionamos la estructura inicial $A(0)$ de la red como un grafo de vecinos más cercanos, el cual, tal y como describimos en el capítulo 2, cada nodo se conecta con $d/2$ vecinos a la derecha y $d/2$ a la izquierda (Ver Figura (2.1b)).

Con el objetivo de ilustrar los efectos de las regla sujeta a la política centrada en nodos y la regla sujeta a la política centrada en enlaces, consideramos dos escenarios particulares. En el primer escenario aplicamos la primera regla en una red cuya fuerza de acoplamiento es tal que la red no logre sincronizarse en los primeros instantes de tiempo. Después consideraremos un segundo escenario donde aplicamos la segunda regla en una red cuya fuerza de acoplamiento es tal que la red logra sincronizarse en los primeros instantes de tiempo.

Primer escenario

En este caso, los nodos están conectados con una fuerza de acoplamiento uniforme c tal que, de acuerdo con la condición (2.48), la red inicial $A(0)$ no logre sincronizarse. Para este ejemplo en particular consideraremos $c = 0.1$. Esta red es

4.3. Ejemplos numéricos

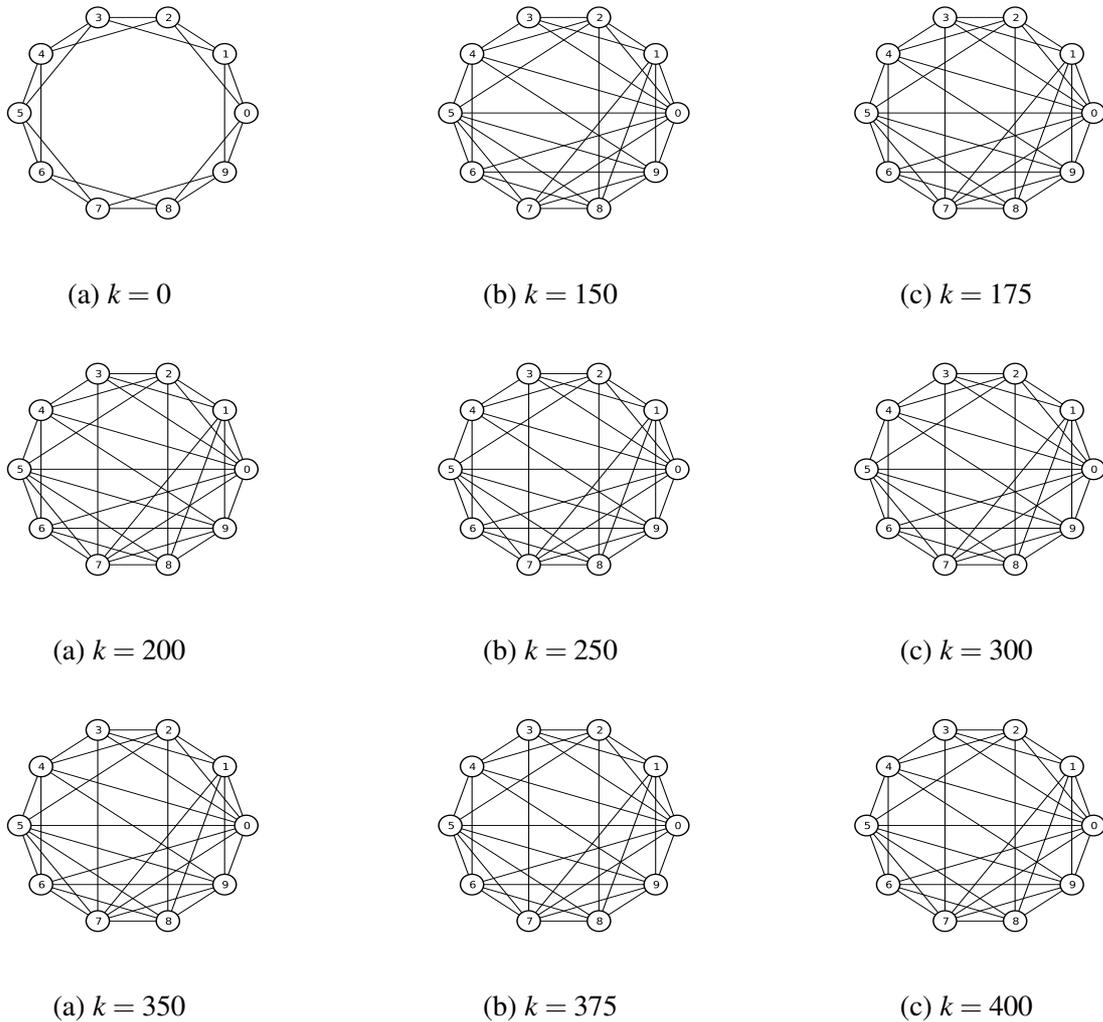


Figura 4.2: La evolución estructural de la red debido a la regla sujeta a la política centra en los nodos.

iterada por $k_0 = 150$ pasos de tiempo para eliminar los comportamientos transitorios de los nodos. Entonces, a partir de la iteración k_0 iniciamos a aplicar la regla sujeta a la política centrada en nodos (Tabla (4.1)) de manera asíncrona sobre todos los enlaces de la red.

La evolución estructural de la red impulsada por esta regla es mostrada en la Figura (4.2). Como podemos observar, nuestro modelo coevolutivo cambia la estructura hacia una red altamente conectada, aproximando la estructura de la red a una configuración de grafo totalmente conectado.

Grafo	Num. Enlaces	Grado de nodo	Eficiencia	Coef. Agrupamiento
A(0)	20	4.0	0.70	0.50
A(150)	30	6.0	0.83	0.64
A(175)	32	6.4	0.86	0.67
A(200)	32	6.4	0.86	0.67
A(225)	32	6.4	0.86	0.67
A(250)	32	6.4	0.86	0.67
A(275)	32	6.4	0.86	0.67
A(300)	32	6.4	0.86	0.67
A(325)	32	6.4	0.86	0.67

Tabla 4.3: Medidas básicas para los grafos generados con la regla sujeta a la política centra en los nodos.

En la Tabla (4.3) podemos observar algunas medidas básicas de la red en distintos instantes del tiempo discreto.

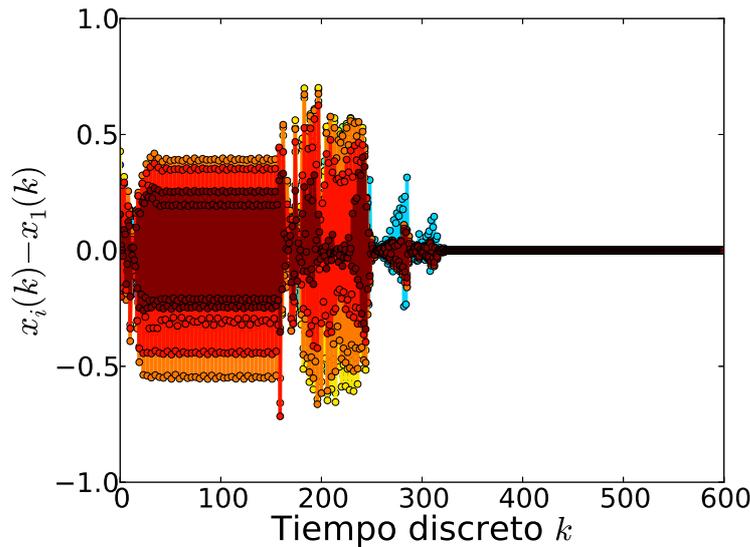


Figura 4.3: Dinámica del error para una evolución impulsada por la regla sujeta a la política centra en los nodos.

Por otro lado, el efecto de la evolución estructural sobre la dinámica de los nodos la podemos observar en la Figura (4.3). En este caso, los cambios estructurales reducen las diferencias entre las variables de estado de los nodos, de tal forma que la red logra sincronizarse después del instante $k = 375$. Vale la pena destacar que una vez sincronizados, la condición dinámica de la regla centrada en los nodos no

4.3. Ejemplos numéricos

se satisface más. En consecuencia, la evolución estructural alcanza una configuración estacionaria para la cual, sin importar la regla que apliquemos, la estructura no presentará cambio alguno.

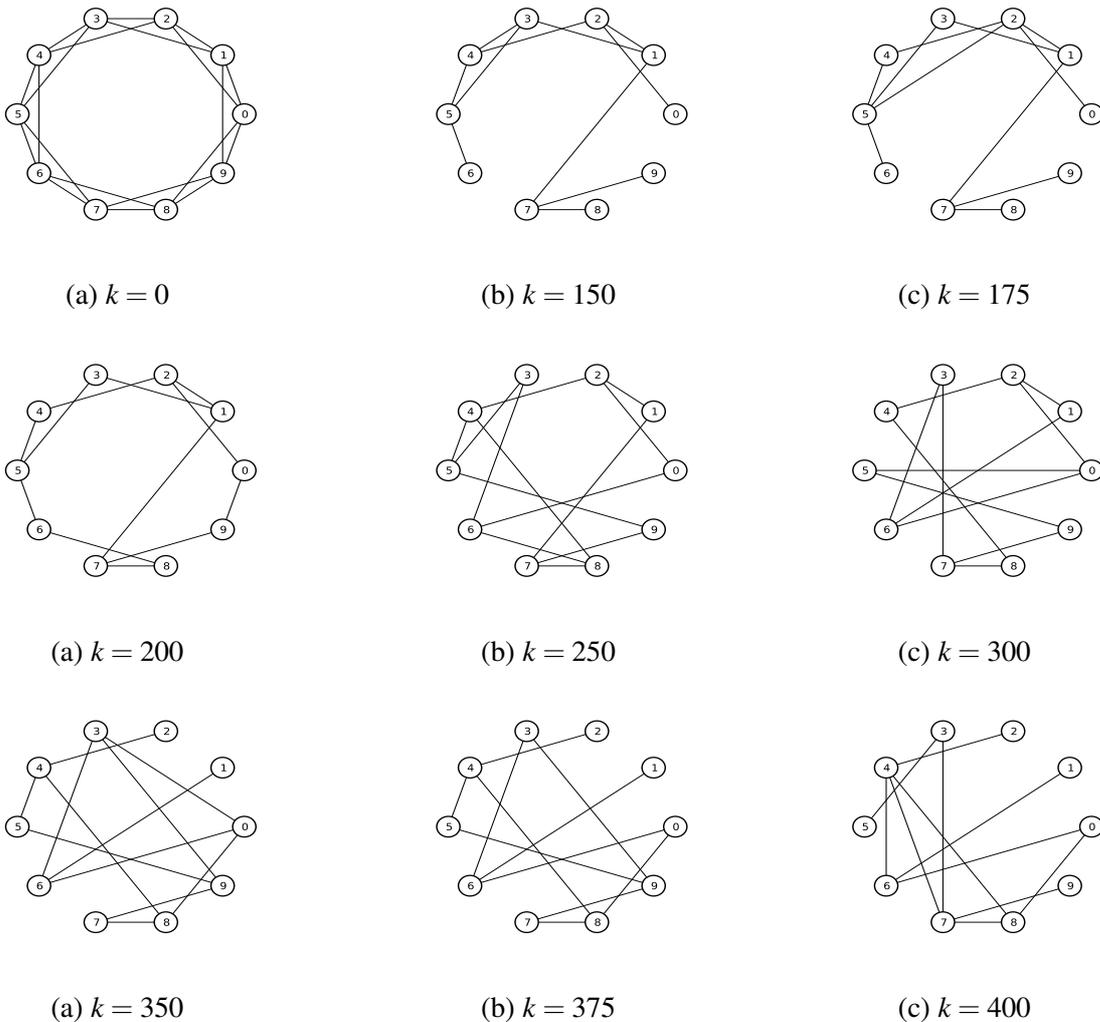


Figura 4.4: La evolución estructural de la red debido a la regla sujeta a la política centra en los enlaces.

Segundo escenario

En contraste con el ejemplo previo, en este caso seleccionamos una fuerza de acoplamiento uniforme de tal forma que la estructura inicial $A(0)$ logre sincronizarse

durante los primeros $k_0 = 150$ instantes de tiempo. Es decir, seleccionamos una c que satisfaga la condición (4.4) para los primeros k_0 instantes de tiempo. En este ejemplo en particular seleccionamos $c = 1.5$. De manera similar al escenario anterior, iniciamos a aplicar la regla sujeta a la política centra en los enlaces (Tabla (4.2)) a partir de la iteración k_0 .

La evolución estructural impulsada por política centrada en los enlaces es mostrada en la Figura (4.4). Dado que la regla está diseñada para promover la heterogeneidad de las conexiones, podemos observar dos escenarios de la evolución estructural a lo largo del tiempo. Por una parte, el estado binario de los enlaces cambia al estado cero (inactivo), lo que resulta en una pérdida considerable de enlaces. Sin embargo, después de perder una gran parte de las conexiones, podemos observar otra etapa la dinámica de cambio estructural en la que nuevos enlaces son agregados al iterar la regla. Debido a que no es posible llegar a un estado donde las diferencias entre los grados de nodos sean distintos para cada par de nodos, la evolución estructural no llega a un estado estacionario y, por lo tanto, la evolución continua conforme las iteraciones avanzan. En la Tabla (4.4) podemos observar algunas medidas básicas de la red en distintos instantes del tiempo discreto.

Grafo	Num. Enlaces	Grado de nodo	Eficiencia	Coef. Agrupamiento
A(0)	20	4.0	0.70	0.50
A(150)	15	3.0	0.61	0.35
A(175)	15	3.0	0.63	0.42
A(200)	15	3.0	0.62	0.40
A(225)	15	3.0	0.63	0.27
A(250)	13	2.6	0.59	0.23
A(275)	15	3.0	0.63	0.083
A(300)	12	2.4	0.56	0.083
A(325)	13	2.6	0.59	0.083
A(350)	16	3.2	0.65	0.20
A(375)	12	2.4	0.55	0.17
A(400)	11	2.2	0.50	0.33

Tabla 4.4: Medidas básicas para los grafos generados con la regla sujeta a la política centra en los enlaces.

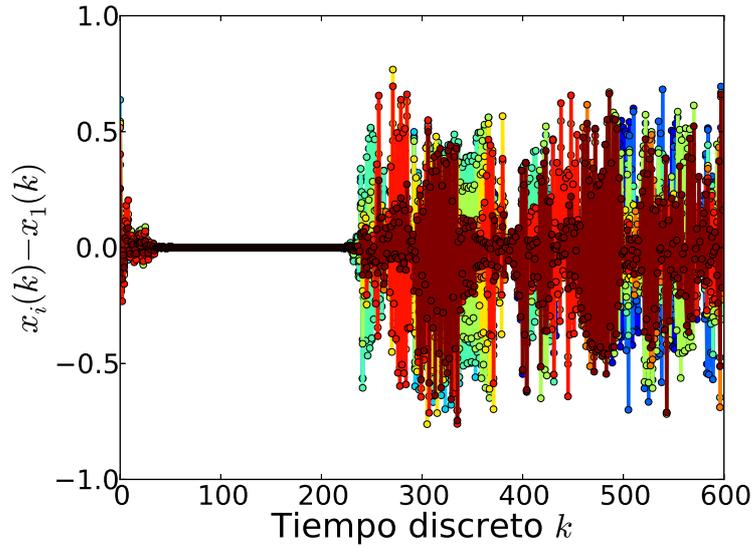


Figura 4.5: Dinámica del error para una evolución impulsada por la regla sujeta a la política centra en los enlaces.

Por otro lado, el efecto de la evolución estructural sobre la dinámica de los nodos la podemos observar en la Figura (4.5). En este caso, después de la iteración k_0 podemos observar que la evolución estructural es tal que el estado sincronizado se preserva durante los cambios de la estructura (aproximadamente ente los instantes $k_0 = 150$ y $k = 210$). Sin embargo, después de estos primeros instantes de la evolución estructural podemos observar que el estado sincronizado pierde su estabilidad, lo cual implica que los nodos no puedan lograr sincronizarse nuevamente.

En este capítulo hemos propuesto un modelo de evolución estructural donde el proceso asíncrono de actualización sucede a la misma escala de tiempo discreta k . Lo anterior no implica que la red cambie conforme avanza k dado que hay instantes de tiempo en los que los eventos no ocurren, i.e., la estructura no cambia. Otra forma de actualizar la estructura es definiendo eventos en el tiempo, los cuales consisten en definir los instantes en los que la estructura es actualizada. En este caso la evolución estructural ocurre a una escala de tiempo lenta comparada con la escala de tiempo de los nodos. Más aún, si consideramos que cada nodo es un sistema dinámica de tiempo continuo, entonces el modelo tendrá una variable de tiempo discreta para

los cambios estructurales y una variable de tiempo continua para la dinámica de los nodos. En el siguiente capítulo proponemos un modelo de evolución estructural con las características antes mencionadas. Así mismo, ampliamos el modelo propuesto en este capítulo al considerar que la fuerza de conexión cambia a lo largo del tiempo continuo.

Capítulo 5

Modelado de la evolución estructural en redes dinámicas continuas

Extendemos nuestro modelado de evolución estructural al caso en que los nodos de la red son sistemas dinámicos de tiempo continuo. Para este modelo consideramos que los cambios en la estructura de la red están impulsados por dos procesos simultáneos de cambio: por una parte, la configuración de las conexiones conmuta entre un conjunto de estructuras admisibles y por otra parte, la fuerza de conexión se ajusta de forma adaptable en términos del estado de los nodos. El primer proceso de cambio es descrito por una función llamada regla de conmutación arbitraria, en tanto que el segundo proceso es descrito con una función llamada regla adaptable. Vale la pena hacer notar que las conmutaciones en las conexiones afecta la dinámica de los nodos y al mismo tiempo, la fuerza de conexión depende del estado de los nodos. En este sentido, el modelo de red es coevolutivo. A diferencia del modelo propuesto en el capítulo 4, donde la evolución estructural se realiza como una regla local impulsada por eventos dinámicos y estructurales, en este modelo los eventos de cambio son descritos como eventos de tiempo complementados por el ajuste adaptable de la fuerza de conexión. Nuestros resultados muestran que constriñendo el conjunto de estructuras admisibles y con una regla adaptable dependiente dependiente del

error entre el estado de los nodos, es posible garantizar la estabilidad del estado sincronizado a pesar de las conmutaciones. Más aún, proponemos dos estrategias para diseñar la regla adaptable: una “estrategia basada en los enlaces” en la que una misma regla es aplicada a todos los enlaces y una “estrategia basada en los nodos” en la que definimos una regla adaptable para todos los enlaces que conectan a un nodo dado. Adicionalmente, en este capítulo extendemos nuestro resultado considerando una regla de conmutación alternativa a la que llamamos “regla de conmutación con reinicialización”. Dicha regla de conmutación considera un proceso adicional a la conmutación, en la que el estado dinámico de los nodos es puesto en cero cada vez que dicho nodo pierde o gana un enlace.

5.1. Descripción del modelo: Red dinámica continua coevolutiva

Consideremos una red dinámica compuesta por N nodos idénticos, donde cada nodo es un sistema continuo en el tiempo. Asumimos que los nodos se conectan de manera lineal a través de enlaces bidireccionales. Supongamos también que la estructura de la red cambia en instantes específicos del tiempo continuo t , de tal forma que las ecuaciones de estado de la red son expresadas de la siguiente forma

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(X, t)x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (5.1)$$

donde $x_i(t) = [x_{i1}(t), \dots, x_{in}(t)]^T \in \mathbf{R}^n$ son las variables de estado del i -ésimo nodo; $X(t) = [x_1^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T \in \mathbf{R}^{Nn}$ es un vector con las variables de estado de todos los nodos, y $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una función no lineal, la cual describe la dinámica de un nodo aislado. El segundo término a la derecha en (5.1) describe el acoplamiento del i -ésimo nodo con sus vecinos, donde $g_{ij}(X, t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una función matricial la

cual contiene información sobre el estado activo-inactivo del enlace (i, j) y la fuerza de conexión asociada a dicho enlace. Para el caso particular en que el estado del enlace a_{ij} es fijo para todo instante y la fuerza de conexión c es constante en el tiempo e igual para todos los nodos (ver por ejemplo la ecuación (2.15)), la función matricial se expresa como $g_{ij}(X, t) = ca_{ij}$, donde $c \in \mathbf{R}^+$ y $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Cuando la estructura evoluciona mediante el cambio simultáneo del estado del enlace y la fuerza de conexión, a_{ij} y c se expresan como funciones. En particular, en este modelo asumimos que el cambio en la conexión a_{ij} está impulsado por una regla de conmutación $\sigma(t)$ (capítulo 2), de tal forma que $a_{ij}(\sigma, t) \in \{0, 1\}$ es una función evaluada uno-cero y constante a pedazos. Así mismo, consideramos que la fuerza de conexión cambia dinámicamente de acuerdo con una función continua $\phi(X, t)$ a la que llamaremos la regla adaptable. Vale la pena hacer notar que a diferencia del modelo descrito en el capítulo 4 (ecuación (4.1)), donde la fuerza de conexión c es la misma para cada enlace (es uniforme), en este modelo consideramos lo contrario (es no uniforme). Con el objetivo de diferenciar entre una fuerza de conexión uniforme y no uniforme, usamos la función $W_{ij}(\sigma, \phi, t)$ para describir la fuerza de conexión entre el i -ésimo y j -ésimo nodo, y nos referimos a esta como el peso del enlace. Notemos que dicha función depende de la regla de conmutación, la regla adaptable y del tiempo. Adicionalmente, consideramos que dicho peso tiene n componentes, de tal forma que escribimos $W_{ij}(\sigma, \phi, t) = \text{diag}(w_{ij}^1(t), \dots, w_{ij}^n(t)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, donde $w_{ij}^q(t)$ representa el peso entre la q -ésima variable de estado del nodo i ($x_{qi}(t)$) y la q -ésima variable de estado del nodo j ($x_{qj}(t)$). Por lo tanto, la función matricial $g_{ij}(\cdot)$ se expresa como:

$$g_{ij}(X, t) = a_{ij}(\sigma, t)W_{ij}(\sigma, \phi, t) \quad (5.2)$$

con $i, j = 1, 2, \dots, N$. Observemos que para la ecuación (5.2) hemos omitido la dependencia en el tiempo de la regla de conmutación y de la regla adaptable con el objetivo de simplificar la notación. Con las funciones (5.2) construimos la función matricial

5.1. Descripción del modelo: Red dinámica continua coevolutiva

$G(t) = \{g_{ij}(X, t)\} \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$, cuyos cambios a lo largo del tiempo describen la evolución de todas las conexiones de la red. Para este modelo supondremos que en cada instante de tiempo sólo una estructura es seleccionada del conjunto de estructuras admisibles $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, cuya cardinalidad es m . Notemos que el conjunto \mathcal{A} puede incluir todas las posibles configuraciones de conexión de una red. En este sentido el conjunto \mathcal{A} puede incorporar redes con estructuras radicalmente opuestas, tales como por ejemplo redes con una conexión, redes con un número reducido de nodos, entre otros. Conviene entonces constriñir el conjunto de estructuras admisibles con el objetivo de garantizar que la evolución estructural no resulte en escenarios de cambio radicales tales como la reducción/expansión drástica en el número de nodos y enlaces. Para nuestro modelo estos escenarios no son deseables dado que nosotros asumimos que la evolución estructural es un proceso gradual de cambio. Lo anterior está motivado por la observación de que las redes reales no surgen de manera instantánea, si no por el contrario, dichas redes se transforman pasando paulatinamente de un estado a otro. Para evitar estos escenarios radicales de cambio, nosotros establecemos las siguientes constricciones al conjunto de estructuras admisibles:

1. Todos los elementos de \mathcal{A} corresponden a redes conectadas, es decir, no hay nodos aislados en la red.
2. Todos los elementos de \mathcal{A} tienen el mismo número de nodos y enlaces.

Con estas constricciones nosotros garantizamos que los cambios estructurales sean graduales y garantizamos también que todos los nodos permanecen conectados en la red.

Por otro lado, la regla de conmutación es una función constante a pedazos y continua por la derecha dada por

$$\sigma(X, t) = \tau, \quad \text{para } t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (5.3)$$

donde $\tau \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ con I el conjunto de índices de \mathcal{A} y t_k , con $k \in \mathbf{Z}^+$, es el instante de conmutación. En este sentido diremos que $A(\sigma, t_k) = \{a_{ij}(\sigma, t_k)\} \in \mathbf{R}^{N \times N} \in \mathcal{A}$ es la matriz de acoplamiento activa en el intervalo de tiempo $D_k = t_{k+1} - t_k$. Sin pérdida de generalidad, nosotros asumimos que los instantes de conmutación ocurren en intervalos iguales de tiempo; es decir, $D_k = T, \forall k$ con $T > 0$.

De manera simultánea a la conmutaciones impulsadas por (5.3), en este modelo consideramos que la fuerza de acoplamiento entre los nodos i y j cambia dinámicamente impulsada por la siguiente regla adaptable

$$W_{ij}(\sigma, \phi, t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } a_{ij}(\sigma, t_k^-) = 1 \text{ y } a_{ij}(\sigma, t_k) = 1 \\ \quad (a) W_{ij}(t_k) = W_{ij}(t_k^-), \text{ y} \\ \quad (b) \dot{W}_{ij}(t) = \phi_{ij}(X, t) \\ \\ \text{Si } a_{ij}(\sigma, t_k^-) = 0 \text{ y } a_{ij}(\sigma, t_k) = 1 \\ \quad (a) W_{ij}(t_k) = \varepsilon \mathbb{I}_n, \text{ y} \\ \quad (b) \dot{W}_{ij}(t) = \phi_{ij}(X, t) \\ \\ \text{Si } a_{ij}(\sigma, t_k^-) = 1 \text{ y } a_{ij}(\sigma, t_k) = 0 \\ \quad (a) W_{ij}(t_k) = 0, \text{ y} \\ \quad (b) \dot{W}_{ij}(t) = 0 \\ \\ \text{Si } a_{ij}(\sigma, t_k^-) = 0 \text{ y } a_{ij}(\sigma, t_k) = 0 \\ \quad (a) W_{ij}(t_k) = W_{ij}(t_k^-), \text{ y} \\ \quad (b) \dot{W}_{ij}(t) = 0; \end{array} \right. \quad (5.4)$$

donde $t \in [t_k, t_{k+1})$, con $\varepsilon > 0$ un número escalar positivo, y \mathbb{I}_q la matriz identidad de dimensión q . Para expresar esta regla adaptable nosotros hemos usado t_k^- para indicar el instante previo a la k -ésima conmutación.

5.1. Descripción del modelo: Red dinámica continua coevolutiva

La regla adaptable (5.4) tiene dos componentes:

- a) Indica cual es la fuerza de conexión en el instante de conmutación t_k .
- b) Describe como la regla adaptable $\phi(X, t)$ cambia la fuerza de conexión en el intervalo D_k .

La regla adaptable $\phi(X, t)$ es cero cuando los nodos están desconectados, y por el contrario, cuando los nodos están conectados la regla adaptable tiene la siguiente forma

$$\phi_{ij}(X, t) = \alpha \begin{pmatrix} |x_{i1}(t) - x_{j1}(t)| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |x_{i2}(t) - x_{j2}(t)| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & |x_{in}(t) - x_{jn}(t)| \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

donde $\alpha \in \mathbf{R}^+$ es la velocidad de adaptación de la regla adaptable.

Una descripción general de la regla adaptable es la siguiente: Supongamos que en el instante t_k la estructura descrita por $A(\tau', t_k^-)$ conmuta a la matriz $A(\tau, t_k)$ (con $\tau', \tau \in I$). Si al ocurrir la conmutación el nodo i y el nodo j permanecen conectados ($a_{ij}(\sigma, t_k^-) = a_{ij}(\sigma, t_k) = 1$), entonces la fuerza de conexión entre estos nodos se actualiza de acuerdo con la regla adaptable (5.5) para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Por el contrario, si el nodo i y el nodo j estaban desconectados al ocurrir la conmutación ($a_{ij}(\sigma, t_k^-) = 0$ y $a_{ij}(\sigma, t_k) = 1$), entonces la fuerza de acoplamiento para esa nueva conexión tendrá un valor inicial pequeño (ϵI_n), y se actualiza de acuerdo con la regla adaptable (5.5) para $t \in [t_k, t_{k+1})$. Finalmente, si después de la conmutación el nodo i y el nodo j son desconectados, entonces el peso del enlace (i, j) será cero durante el intervalo $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Asumimos que la evolución estructural es tal que para cualquier instante dado de tiempo $t_k > t_0$, la función matricial $G(t_k)$ puede ser considerada como una matriz fija

para ese instante. Adicionalmente suponemos que $G(t)$ satisface de manera uniforme la condición de difusividad dada por

$$g_{ii}(X, t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij}(X, t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}(\sigma, t) W_{ij}(\sigma, \phi, t), \quad \forall t > t_0. \quad (5.6)$$

Note que para la condición (5.6) hemos consideraremos que los enlaces son bi-direccionales, por lo que en cada instante tendremos que $W_{ij}(\sigma, \phi, t) = W_{ji}(\sigma, \phi, t)$ y $a_{ij}(\sigma, t) = a_{ji}(\sigma, t)$ para todo i, j con $i \neq j$. Además hemos asumido también que para cualquier valor de t , los elementos de la diagonal de $G(t)$ satisfacen $W_{ii}(\sigma, \phi, t) = - \sum_{j=1, j \neq i}^N W_{ij}(\sigma, \phi, t)$ y $a_{ii}(\sigma, t) = 1$ para $i = 1, 2, \dots, N$.

Por lo anterior y suponiendo que la evolución estructural es tal que en ningún instante de tiempo hay nodos aislados en la red, podemos concluir que $G(t)$ es una matriz simétrica y la suma por columnas o por filas es siempre cero $\forall t \geq t_0$. Entonces, del teorema del círculo de Gerschgorin tenemos que los eigenvalores $\lambda_i(t)$ ($i = 1, \dots, Nn$) de $G(t)$, satisfacen

$$0 = \lambda_1(t) > \lambda_2(t) \geq \dots \geq \lambda_{Nn}(t) \quad \forall t. \quad (5.7)$$

Para el modelo de red (5.1)-(5.4) nos interesa analizar la estabilidad del estado sincronizado cuando la estructura conmuta y los pesos se ajustan de forma adaptable. En la siguiente sección realizamos dicho análisis.

5.2. Estabilidad del estado sincronizado

Proponemos la siguiente definición de sincronización para el modelo de red (5.1)-(5.4):

Definición 5.14 Diremos que la red conmutada con pesos adaptables (5.1)-(5.4) logra (de forma asintótica) sincronizarse de manera completa si, conforme $t \rightarrow \infty$, las variables de estado de los nodos ($X(t)$) convergen a la variedad de sincronización $\Omega(t) = \{x(t) \in \mathbf{R}^n : x_1(t) = x_2(t) \cdots = x_N(t)\}$.

Vale la pena hacer notar que cuando todos los nodos se mueven al unísono ($x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)$), y debido a la condición de difusividad (5.6), el segundo término a la derecha de la ecuación (5.1) es cero. Más aún, debido a que el campo vectorial es el mismo para todos los nodos (son nodos idénticos), entonces al aproximarse a $\Omega(t)$ las trayectorias de (5.1) colapsan sobre la trayectoria de un nodo aislado $s(t)$, la cual satisface

$$\dot{s}(t) = f(s(t)). \quad (5.8)$$

De hecho, cuando la red está sincronizada, la ecuación de la red (5.1) tiene N componentes idénticos $s(t)$, los cuales escribimos como $S(t) = [s^\top(t), \dots, s^\top(t)]^\top \in \mathbf{R}^{Nn}$. Recordemos también que la trayectoria de $s(t)$ puede corresponder a una trayectoria caótica, una órbita periódica, o incluso un punto de equilibrio.

Para este análisis asumiremos que los nodos son sistemas dinámicos continuos en el tiempo cuyo campo vectorial satisface la siguiente definición:

Definición 5.15 La función $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ es llamada QUAD si y sólo si, para cualquier $x, y \in \mathbf{R}^n$

$$(x - y)^\top [f(x) - f(y)] - (x - y)^\top \Delta (x - y) \leq -\bar{w} (x - y)^\top (x - y), \quad (5.9)$$

donde $\Delta \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal arbitraria y \bar{w} es un escalar positivo.

Vale la pena hacer notar que una gran variedad de sistemas dinámicos satisfacen la condición QUAD [92, 93]. Más aún, para algunos sistemas como el circuito de Chua, tenemos que $\Delta = 0_n$. Para este caso la condición QUAD se expresa como $(x - y)^\top [f(x) - f(y)] \leq -\bar{w}(x - y)^\top (x - y)$ [94].

De la definición (2.2.2) sabemos que la estabilidad del estado sincronizado es equivalente a la estabilidad del error $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ (con $i = 1, 2, \dots, N$) alrededor del origen. Al derivar la variable del error $e_i(t)$ y usando (5.1) junto con (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{x}_i(t) - \dot{s}(t) \\ &= f(x_i(t)) - f(s(t)) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(X, t) e_j(t) + s(t) \sum_{j=1}^N g_{ij}(X, t) \end{aligned}$$

Notemos que la última sumatoria a la derecha de esta expresión es cero para todo instante t debido a la condición (5.6). Por lo tanto, las ecuaciones del error están dadas por la siguiente expresión:

$$\dot{e}_i(t) = \tilde{f}(x_i, s, t) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(X, t) e_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.10)$$

donde $\tilde{f}(x_i, s, t) = f(x_i(t)) - f(s(t))$. A diferencia del Lema (2.5), para la ecuación (5.10) hemos omitido la expansión en Series de Taylor del campo vectorial $f(\cdot)$.

La condición para la estabilidad asintótica de la dinámica del error, bajo la regla de conmutación arbitraria descrita por (5.3), y con un proceso de adaptación en las fuerzas de acoplamiento descritas por (5.4), está dada en el siguiente resultado.

Teorema 5.7 Considere el sistema (5.10). Asumamos que los nodos satisfacen la condición QUAD descrita en (5.9), y que la condición de difusividad (5.6) se satisface de manera uniforme en el tiempo. Entonces la solución de sincronización $S(t) = [s^\top(t), \dots, s^\top(t)]^\top \in \mathbf{R}^{Nn}$ con $s(t) \in \mathbf{R}^n$ es asintóticamente estable si existe una matriz simétrica positiva definida $P = P^\top > 0 \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$ y una constante $\beta > 0$ lo suficientemente grande, de tal forma que las siguientes matrices

$$G^\top(t)P + PG(t) + 2P\bar{\Delta} \quad (5.11)$$

$$-[\beta I_n - g_{ij}(X, t)] \quad (5.12)$$

son negativas definidas de manera uniforme en el tiempo $\forall i, \forall j (i \neq j)$, donde $\bar{\Delta} = \Delta \otimes I_N \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$ con $\Delta \in \mathbf{R}^n$ la matriz diagonal definida en la condición QUAD (5.9) y \otimes es el producto de Kronecker.

Demostración: Sea $E(t) = [e_1^\top(t), \dots, e_N^\top(t)]^\top \in \mathbf{R}^{Nn}$ el vector con las variables del error de cada nodo. Entonces, la dinámica del error (5.10) en forma matricial se expresa como:

$$\dot{E}(t) = F(X, S, t) + G(t)E(t), \quad (5.13)$$

donde $F(X, S, t) = [\tilde{f}^\top(x_1, s, t), \dots, \tilde{f}^\top(x_N, s, t)]^\top \in \mathbf{R}^{Nn}$ y $G(t) \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$ es la función matricial que describe la evolución estructural. Cada elemento de la función matricial se expresa como el producto de dos funciones, tal y como describimos en (5.2).

Consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t) = E^\top(t)PE(t) + \frac{1}{2\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [\beta I_n - g_{ij}(X, t)]^\top [\beta I_n - g_{ij}(X, t)], \quad (5.14)$$

donde β es un escalar positivo y $P \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$ es una matriz positiva definida.

La primera derivada de $V(t)$ a lo largo de las trayectorias del error (5.13) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2E^\top(t)PF(X, S, t) \\ &+ E^\top(t)[G^\top(t)P + PG(t)]E(t) \\ &- \frac{1}{\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [\beta I_n - g_{ij}(X, t)]^\top \dot{g}_{ij}(X, t), \end{aligned} \quad (5.15)$$

Con el objetivo de probar que $\dot{V}(t)$ es uniformemente definida negativa, sumemos y restemos el término $2E^\top(t)P\bar{\Delta}E(t)$ en la ecuación (5.15), donde $\bar{\Delta} \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$ es una matriz diagonal. Haciendo esto obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2[E^\top(t)PF(X, S, t) - E^\top(t)P\bar{\Delta}E(t)] \\ &+ E^\top(t)[G^\top(t)P + PG(t) + 2P\bar{\Delta}]E(t) \\ &- \frac{1}{\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [\beta I_n - g_{ij}(X, t)]^\top \dot{g}_{ij}(X, t). \end{aligned}$$

Note que si todos los nodos en la red satisfacen la condición QUAD, y asumiendo que P es una matriz positiva definida, entonces de la ecuación (5.9) tenemos que

$$E^\top(t)PF(X, S, t) - E^\top(t)P\bar{\Delta}E(t) \leq -\bar{w}E^\top(t)PE(t) \quad (5.16)$$

donde $\bar{\Delta} = \Delta \otimes I_N$, con $\Delta \in \mathbf{R}^n$ la matriz diagonal que satisface la condición (5.9).

Entonces

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) \leq & -2\bar{w}E^\top(t)PE(t) \\
 & + E^\top(t)[G^\top(t)P + PG(t) + 2P\bar{\Delta}]E(t) \\
 & - \frac{1}{\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [\beta I_n - g_{ij}(X, t)]^\top \dot{g}_{ij}(X, t)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (5.17) es uniformemente definido negativo, mientras que el segundo término está dado por la condición (5.11) del Teorema (5.7).

Para el último término del lado derecho de la ecuación (5.17), tenemos por (5.2) que $\dot{g}_{ij}(X, t) = a_{ij}(\sigma, t)\dot{W}_{ij}(\sigma, \phi, t)$, y de (5.4) obtenemos

$$\dot{W}_{ij} = \begin{cases} \alpha(\text{diag}([|x_{i1} - x_{j1}|, \dots, |x_{in} - x_{jn}|])) & \text{si } a_{ij}(\sigma, t_k) = 1 \\ 0 & \text{si } a_{ij}(\sigma, t_k) = 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Por las restricciones impuestas al conjunto de estructuras admisibles \mathcal{A} sabemos que no hay nodos aislados y que al menos uno de los términos en la sumatoria será diferente de cero. Entonces, tenemos que $\dot{g}_{ij}(X, t)$ es uniformemente positiva definida. Más aún, $g_{ij}(X, t)$ está acotada en cada instante de tiempo, por lo que es posible encontrar una constante β lo suficientemente grande de tal forma que $[\beta I_n - g_{ij}(X, t)]$ sea uniformemente negativa definida, lo cual expresamos en la condición (5.12) del Teorema (5.7). ■

Note que debido a las restricciones impuestas a la dinámica de la evolución estructural, las propiedades de simetría y difusividad de $G(t)$ son preservadas tanto en las conmutaciones de la estructura como en el proceso de actualización de los enlaces. De hecho, una forma de interpretar la matriz P , la cual satisface la condición (5.11), es como una matriz que describe una función común de Lyapunov cuadrática

para todas las estructuras admisibles del conjunto \mathcal{A} , donde la regla adaptable automáticamente ajusta las fuerzas de conexión de tal forma que la sincronización se logre.

En la siguiente sección investigamos formas alternativas de la regla de adaptación y de la regla adaptable. Lo anterior lo realizamos con el objetivo de extender nuestros resultados a otros escenarios de evolución estructural.

5.3. Procesos alternativos de cambio estructural

En la sección anterior asumimos que el peso de los enlaces se actualiza de acuerdo con la regla adaptable (5.4). Este proceso es usualmente llamado una estrategia de actualización basada en los enlaces. Adicionalmente supusimos que en el instante de conmutación t_k , el estado dinámico de los nodos es el mismo estado que en el instante previo de la conmutación ($x_i(t_k) = x_i(t_k^-)$). En esta sección nosotros extendemos nuestro modelo para incluir los siguientes escenarios de evolución estructural: por una parte asumiremos que la actualización de los enlaces está impulsada por una regla adaptable basada en los nodos y, por otro lado, incluiremos un escenario donde el estado dinámico de los nodos en el instante de la conmutación es reinicializado en el estado cero.

Estrategia de actualización basada en los nodos

Una forma alternativa de definir la regla adaptable consiste en actualizar el peso de todos los enlaces asociados al nodo i . En este sentido, el peso del enlace entre el i -ésimo nodo y sus vecinos en el instante t está dada por la función $w_i : I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, la cual depende de la regla de conmutación $\sigma(t)$ y la regla adaptable $\phi_i(t)$. Esta estrategia es usualmente llamada centrada en los nodos. Bajo esta estrategia la función matricial de los acoplamientos se expresa de la siguiente forma:

$$g_{ij}(X, t) = w_i(\sigma, \phi_i, t) a_{ij}(\sigma, t) \Gamma, \quad (5.19)$$

con $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matriz constante, donde $\gamma_q = 1$ si los nodos se conectan a través de la q -ésima variable de estado y $\gamma_q = 0$ en caso contrario (ver ecuación (2.15)).

Entonces, bajo una estrategia centrada en los nodos, las ecuaciones de estado de la red están dadas por

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N w_i(\sigma, \phi_i, t) a_{ij}(\sigma, t) \Gamma x_j(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.20)$$

Al igual que en el modelo previo, asumimos que el conjunto de estructuras admisible \mathcal{A} está compuesto por estructuras con el mismo número de nodos y sin nodos aislados de la red.

Para una estrategia basada en los nodos, proponemos la siguiente regla adaptable:

$$w_i(\sigma, \phi, t_k) = \begin{cases} \text{si } d_i(t_k) = d_i(t_k^-) \\ \text{(a) } w_i(\sigma, \phi, t_k) = w_i(\sigma, \phi, t_k^-), \\ \text{(b) } \dot{w}_i(\sigma, \phi, t) = \phi_i(X, \sigma, t), \\ \\ \text{si } d_i(t_k) \neq d_i(t_k^-) \\ \text{(a) } w_i(\sigma, \phi, t_k) = \varepsilon, \\ \text{(b) } \dot{w}_i(\sigma, \phi, t) = \phi_i(X, \sigma, t), \end{cases} \quad (5.21)$$

para $i = 1, \dots, N$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ con $k \in \mathbf{Z}^+$, donde $\varepsilon > 0$ y $d_i(t)$ es el grado el i -ésimo nodo en el instante t y $\phi_i(X, \sigma, t)$ es la función:

$$\phi_i(X, \sigma, t) = \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}(\sigma, t) \|x_i(t) - x_j(t)\|, \quad (5.22)$$

donde α es un parámetro de la regla adaptable y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana. Note que debido a la restricciones impuestas al conjunto de estructuras admisibles, la suma en (5.22) es cero solamente cuando los nodos están sincronizados.

La ecuación (5.21).a indica que en cada instante t_k , la condición inicial de $w_i(\cdot)$ preserva su valor previo si el grado del nodo i no cambia cuando ocurre la conmutación. Y la ecuación (5.21).b describe el cambio de $w_i(\cdot)$ cuando el grado del nodo i cambia.

La estructura de la red para el modelo de red (5.20) está ahora descrita por la matriz variante en el tiempo $C(t) = \{\rho_{ij}(t)\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$, donde $\rho_{ij}(t) = w_i(\sigma, \phi_i, t) a_{ij}(\sigma, t)$. Asumiremos que las conexiones son bidireccionales y que los elementos en la diagonal de la matriz de acoplamiento satisfacen de manera uniforme en el tiempo la siguiente condición de difusividad:

$$\rho_{ii}(t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \rho_{ij}(t) = -w_i(\sigma, \phi_i, t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}(\sigma, t), \quad (5.23)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$; con $t \in [t_k, t_{k+1})$ y $k \in \mathbf{Z}^+$.

Suponiendo que la evolución estructural es tal que en ningún instante de tiempo hay nodos aislados en la red podemos concluir que $C(t)$ es difusiva y, por el teorema del círculo de Gerschgorin, su eigenespectro $\lambda_i(t)$, con $(i = 1, \dots, N)$ es menor o igual a cero, con cero un eigenvalor de multiplicidad uno. Entonces del Teorema (5.7) obtenemos la condición de sincronización para redes que conmutan de acuerdo con (5.3) y donde la fuerza de conexión se actualiza de acuerdo a la estrategia basada en los nodos (5.21). El resultado lo exponemos en el siguiente corolario.

Corolario 5.1 Asumamos que los nodos en la red (5.20) satisfacen la condición QUAD descrita en (5.9), y consideremos también que la condición (5.23) se satisface de manera uniforme en el tiempo. Entonces, la solución de sincronización $S(t) = [s^\top(t), \dots, s^\top(t)]^\top \in \mathbf{R}^{Nn}$, con $s(t) \in \mathbf{R}^n$ el estado sincronizado dado en (5.8), es asintóticamente estable si existe una matriz simétrica positiva definida $P = P^\top > 0 \in \mathbf{R}^{N \times N}$ y una constante positiva β lo suficientemente grande de tal forma que

$$C^\top(t)P + PC(t) + 2P\bar{\Delta} \quad (5.24)$$

es una matriz uniformemente negativa definida y

$$\beta \geq w_i(\sigma, \phi, t_k), \quad \forall i. \quad (5.25)$$

Demostración: Sea $E(t) \in \mathbf{R}^{Nn}$ el vector con las variables del error de la red (5.20). Entonces, repitiendo los mismos pasos que realizamos para obtener (5.13), es fácil ver que la dinámica del error en forma matricial para una regla adaptable centrada en los nodos se expresa como

$$\dot{E}(t) = F(X, S, t) + \tilde{C}(t)E(t), \quad (5.26)$$

donde $F(X, S, t) \in \mathbf{R}^{Nn}$ y $\tilde{C}(t) = C(t) \otimes I_n$. Proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(t) = E^\top(t)\tilde{P}E(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\beta - w_i(\sigma, \phi_i, t))^2, \quad (5.27)$$

donde β es un escalar positivo y $\tilde{P} = P \otimes I_n$, con $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica y positiva definida.

La derivada temporal de $V(t)$ a lo largo de las trayectorias del error (5.26) está da-

da por

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = & 2E^\top(t)\tilde{P}F(X, S, t) \\ & + E^\top(t)[\tilde{C}^\top(t)\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{C}(t)]E(t) \\ & - \sum_{i=1}^N (\beta - w_i(\sigma, \phi_i, t))\dot{c}_i(\sigma, \phi_i, t).\end{aligned}\quad (5.28)$$

Con el objetivo de demostrar que $\dot{V}(t)$ es uniformemente negativa, sumamos y restemos el término $2E^\top(t)\tilde{P}\bar{\Delta}E(t)$ a la ecuación (5.28) con $\bar{\Delta} = \Delta \otimes I_N \in \mathbf{R}^{Nn \times Nn}$ la matriz diagonal descrita en la condición (5.9). Entonces

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq & -2\bar{w}E^\top(t)\tilde{P}E(t) \\ & + E^\top(t)[\tilde{C}^\top(t)\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{C}(t) + 2\tilde{P}\bar{\Delta}]E(t) \\ & - \sum_{i=1}^N (\beta - w_i(\sigma, \phi_i, t))\dot{c}_i(\sigma, \phi_i, t).\end{aligned}\quad (5.29)$$

El primer término del lado derecho de (5.29) es una matriz uniformemente definida negativa, mientras que el segundo término está dado por la condición (5.24). Para el último término del lado derecho de (5.29) obtenemos que $\dot{w}_i(\sigma, \phi_i, t) \geq 0$ para todo tiempo y para cualquier $\sigma(t) = \tau \in I = \{1, \dots, m\}$. Entonces es posible encontrar una constante β lo suficientemente grande de tal forma que $\beta - w_i(\sigma, \phi_i, t)$ sea uniformemente positiva definida. Lo anterior está expresado en la condición (5.25).

■

Con el resultado del Teorema (5.7) y del Corolario (5.1), hemos demostrado que al actualizar el peso de los enlaces con una estrategia basada en los enlaces o en los nodos, la variedad de sincronización es estable a pesar de las conmutaciones. Sin embargo, hemos asumido que la conmutación de la estructura no perturba directamente al estado dinámico de los nodos. En la siguiente sección analizamos un escenario de evolución estructural donde la dinámica de los nodos es perturbada en cada conmutación.

Regla de conmutación con reinicialización

Para muchas de las redes del mundo real, antes de realizar un cambio en la estructura es importante realizar algunos preparativos. A manera de ejemplo consideremos una red de distribución eléctrica. Para este tipo de redes, la transición de una configuración a otra requiere de un protocolo de aislamiento de los nodos. Motivados por lo anterior, en esta sección proponemos un modelo de evolución estructural en el cual la variable de estado es puesta en cero cada vez que el correspondiente nodo pierde o gana una conexión. Llamaremos a dicho proceso la reinicialización de los nodos.

Vale la pena hacer notar que el proceso de reinicialización esta incluido en la dinámica de la red como una perturbación, la cual ocurre en el instante de conmutación t_k ($k \in \mathbf{Z}_+$) sobre los nodos que modifican su vecindad. Para determinar que nodos serán reinicializados usaremos el grado de nodo $d_i(t)$ en el instante previo de la conmutación. Entonces, el proceso de reinicialización es el siguiente:

$$\eta_i(t) = \psi_i(t_k)\delta(t - t_k), \quad i = 1, \dots, N; \quad (5.30)$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función delta y

$$\psi_i(t_k) = \begin{cases} -x_i(t_k^-) & \text{si } d_i(t_k^-) \neq d_i(t_k), \\ 0 & \text{si } d_i(t_k^-) = d_i(t_k), \end{cases} \quad (5.31)$$

El primer término en (5.31) indica que el estado del nodo i en el instante t_k indica que el estado del nodo i es reinicializado en el estado cero si su grado de nodo cambia al realizar la conmutación y, por el contrario, el segundo término de (5.31) indica que el estado del nodo i preserva su estado en el instante previo de la conmutación t_k^- si su grado de nodo no cambia al realizar la conmutación.

Las ecuaciones de estado de la red bajo la regla de conmutación con reinicializa-

ción y con pesos adaptables está dada por

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(X, t)x_j(t) + \eta_i(t), \quad i = 1, \dots, N; \quad (5.32)$$

donde la estructura de la red evoluciona de acuerdo con la regla de conmutación $\sigma(X, t)$, y la regla adaptable $\phi(X, t)$ descrita en (5.3) y (5.21) respectivamente, con el proceso de reinicialización $\eta(t)$ descritos en (5.30)-(5.31).

El proceso de reinicialización puede ser interpretado como una perturbación desvaneciente de la red dinámica descrita en (5.1) o de la red en (5.32) para el caso de una estrategia de adaptación basada en los nodos. Sin embargo, de (5.31) podemos notar que el proceso de reinicialización está acotado ($\|\eta_i(t)\| \leq \gamma \|x_i(t_k)\|$) y es aplicado en los instantes de conmutación t_k , de tal forma que $\eta_i(t) = 0 \forall t \in (t_k, t_{k+1})$ con $k \in \mathbf{Z}^+$. Entonces, bajo las mismas consideraciones que en el resultado previo, es decir, asumiendo que los nodos satisfacen la condición QUAD y de que la evolución estructural preserva la condición de difusividad de la matriz $G(t) = \{g_{ij}(X, t)\}$; los resultados del Teorema (5.2) y del Corolario (5.3) se cumplen para este caso. Por lo tanto, si las condiciones (5.11)-(5.12) ó (5.24)-(5.25) se cumplen, entonces la red se sincroniza de manera asintótica.

5.4. Ejemplos numéricos

Consideremos una red dinámica donde cada nodo es el sistema dinámico llamado circuito de Chua, el cual está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a[-y(t) - K(x(t))] \\ x(t) - y(t) + z(t) \\ by(t) \end{bmatrix}; \quad (5.33)$$

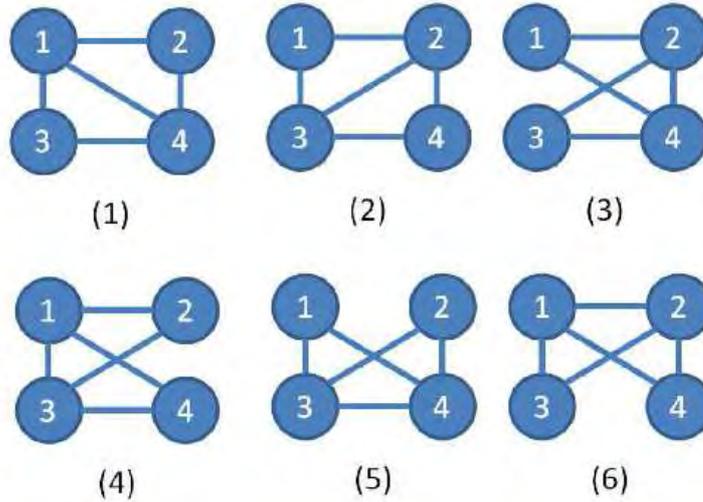


Figura 5.1: El conjunto de estructuras admisibles (\mathcal{A}) con cuatro nodos y cinco enlaces.

donde $K(x(t)) = m_0x(t) + 0.5(m_1 - m_0)(|x(t) + 1| - |x(t) - 1|)$, con $a = 4.916$, $b = 3.641$, $m_0 = -0.07$ y $m_1 = 1.5$. En la referencia [94], los autores demuestran que el sistema (5.33) satisface la condición QUAD con $\Delta = 0$.

Para este ejemplo numérico consideraremos una red con $N = 4$ nodos y cinco enlaces. Por lo tanto, el conjunto de estructuras admisibles \mathcal{A} tiene una cardinalidad de seis, donde el conjunto de índices esta dado por $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Figura (5.1)). La regla de conmutación que usaremos esta descrita por la ecuación (5.3), donde el intervalo de tiempo entre dos instantes de conmutación esta dado por $\mathcal{D}_k = 10, \forall k$.

En esta sección realizaremos dos ejemplos numéricos. En el primer ejemplo usaremos una estrategia de actualización basa en los enlaces, la cual describimos en la ecuación (5.4), con $\alpha = 0.01$ y $\varepsilon = 0.05$. Como segundo ejemplo usaremos la estrategia de actualización basada en los nodos, la cual describimos en la ecuación (5.21). Los resultados de la simulación son mostrados en las Figuras (5.2) y (5.5) respectivamente. Para ambos ejemplos, podemos observar que la red logra sincronizarse de una manera muy rápida y adicionalmente, podemos observar que el estado sincronizado se preserva a pesar de las conmutaciones. Con respecto a la fuerza de conmutación

de cada enlace, podemos notar que después de las primeras conmutaciones, todas las fuerzas de acoplamiento se aproximan a un valor ε para el resto de la simulación. Lo razón de esto último es por que una vez logrado el estado sincronizado, la regla adaptable $\phi(X, t)$ toma el valor cero para el resto de las simulaciones.

Para ejemplificar el hecho de que en las redes del mundo real los cambios en la estructura afectan las fuerzas de conexión, nosotros proponemos realizar un ejemplo más. En este ejemplo usaremos la regla de conmutación descrita en (5.31). En las Figuras (5.4) y (5.5) presento los resultados numéricos para una red compuesta por circuitos de Chua bajo la regla (5.31) con las estrategias basada en los nodos y en los enlaces respectivamente. Notemos que para ambos casos, la sincronización se logra para los primeros instantes de tiempo. Más aún, podemos observar que en cada instante de conmutación, la estabilidad del estado sincronizado se pierde como consecuencia de la perturbación. Sin embargo, debido a la regla adaptable, la red logra nuevamente sincronizarse antes del siguiente instante de conmutación. Con respecto a la fuerza de conexión, podemos notar que está acotada y su valor se incrementa en cada instante de conmutación con el objetivo de mantener el estado sincronizado.

En la siguiente sección presento las conclusiones y discusiones concernientes al trabajo realizado en esta investigación. De igual forma expongo un panorama sobre los trabajos a realizar en el futuro, los cuales se derivan de los resultados expuestos a lo largo del presente documento de tesis.

5.4. Ejemplos numéricos

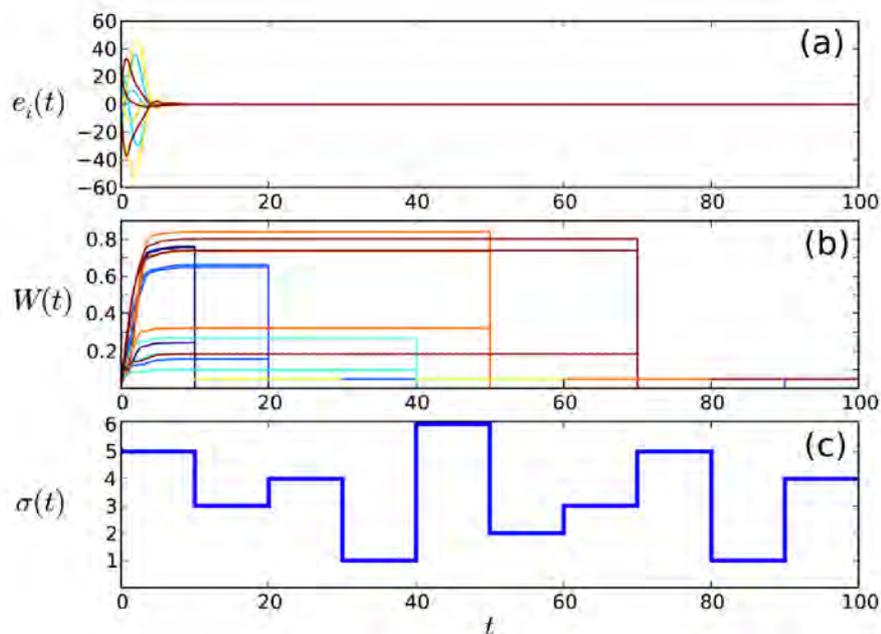


Figura 5.2: Resultados numéricos para la regla de conmutación (5.3) y una regla adaptable centrada en los enlaces (5.4). a) La dinámica del error, b) fuerzas de conexión y c) regla de conmutación.

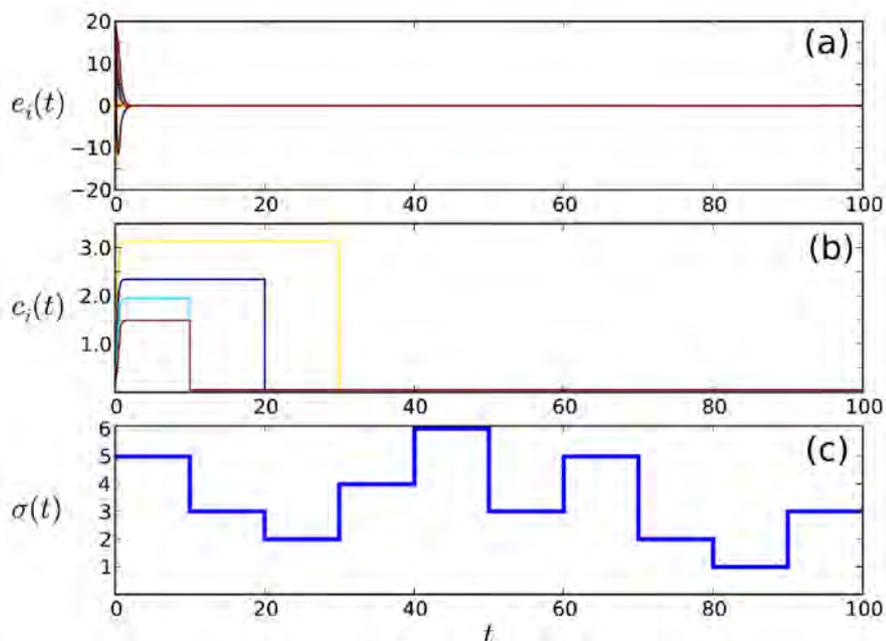


Figura 5.3: Resultados numéricos para la regla de conmutación (5.3) y una regla adaptable centrada en los nodos (5.21). a) La dinámica del error, b) fuerzas de conexión y c) regla de conmutación.

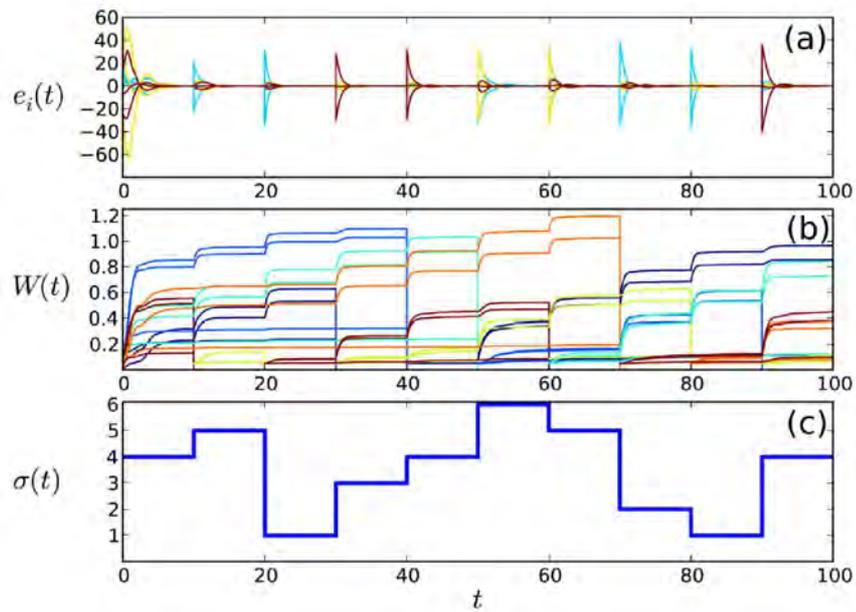


Figura 5.4: Resultados numéricos para la regla de conmutación con reinicialización (5.30)-(5.31) y una regla adaptable centrada en los enlaces (5.4). a) La dinámica del error, b) fuerzas de conexión y c) regla de conmutación.

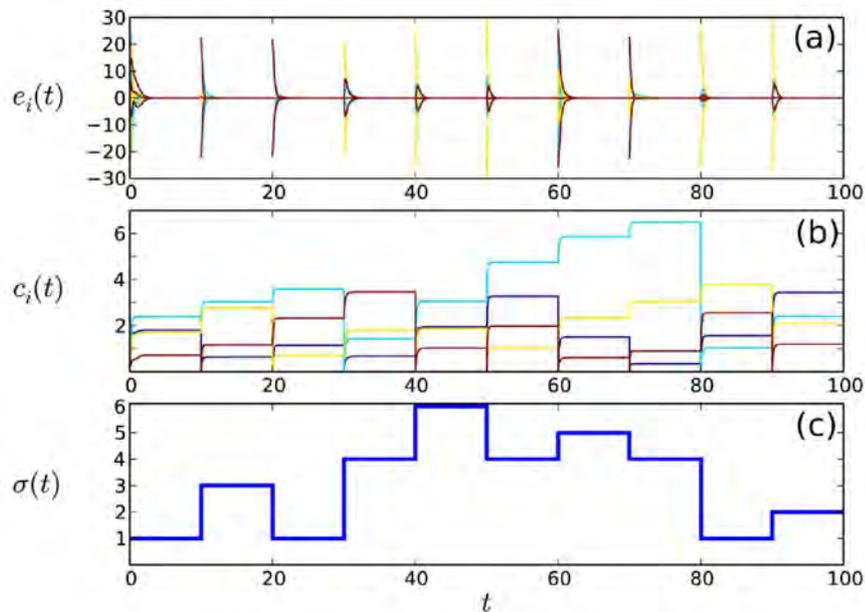


Figura 5.5: Resultados numéricos para la regla de conmutación con reinicialización (5.30)-(5.31) y una regla adaptable centrada en los nodos (5.21). a) La dinámica del error, b) fuerzas de conexión y c) regla de conmutación.

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Comentarios finales

El objeto de estudio de este trabajo de tesis es una red dinámica bajo dos procesos simultáneos de cambio: por una parte cada nodo es considerado un sistema dinámico, y por otra parte, la estructura de la red evoluciona a lo largo del tiempo. Al respecto, el problema de investigación es, por una parte, modelar una red dinámica bajo los procesos de cambio antes mencionados y, por otra parte, analizar en que forma la estabilidad de los comportamientos colectivos se ve afectada por los cambios estructurales propuestos en los modelos. A manera de hipótesis planteamos que un modo apropiado de modelar la evolución estructural es mediante un sistema dinámico, el cual definimos a partir del formalismo de Autómatas Celulares (AC) y Sistemas Conmutados (SC). Así mismo, planteamos que la estabilidad del estado sincronizado puede ser analizada mediante la teoría de la función común de Lyapunov. Para corroborar o refutar la hipótesis, propusimos tres metodologías para modelar la evolución estructural y analizamos la estabilidad del estado sincronizado.

La primera metodología que propusimos consistió en usar las reglas de una AC unidimensional para determinar el estado activo-inactivo de todos los posibles enlaces. En este sentido, el estado de un enlace dado está determinado por su propio

estado en el instante actual y por el estado de los enlaces que conforman su vecindad. Para este primer modelo (descrito en el capítulo 3) asumimos que los nodos no tienen dinámica. Lo anterior nos permitió estudiar los atributos dinámicos de la evolución estructural sin tomar en cuenta sus efectos sobre el estado de los nodos. De acuerdo con los resultados numéricos, observamos que la estructura de la red adquiere una dinámica de cambio gradual y, adicionalmente, notamos el surgimiento de distintos patrones de conexión los cuales cambian a lo largo de las iteraciones. En base a lo anterior concluimos que la evolución estructural puede ser modelada apropiadamente mediante el formalismo de AC. Más aún, el uso de las reglas de AC da lugar al surgimiento de patrones estructurales cuya dinámica no es posible inferir a partir de las interacciones locales. Lo anterior es un elemento distintivo de un sistema complejo y en particular del concepto de AC.

Al tomar en cuenta la dinámica de los nodos en el modelo de evolución estructural podemos considerar, en general, dos posibles escenarios. En el primero de ellos los cambios estructurales ocurren de manera independiente de la dinámica de los nodos. Consideremos por ejemplo un modelo donde los nodos son sistemas dinámicos (de tiempo continuo o discreto) mientras que la estructura evoluciona de acuerdo con las reglas de AC. Debido a que la evolución estructural resulta en patrones regulares de conexión, es posible que para este modelo observemos que los cambios estructurales benefician el surgimiento del estado sincronizado. En el segundo escenario, por el contrario, existe una inter-dependencia entre ambos procesos simultáneos de cambio, es decir, la red es coevolutiva. Este segundo escenario nos motivó a proponer una segunda metodología para modelar la evolución estructural (capítulo 4). Como una primera aproximación consideramos el caso en el que los nodos son sistemas dinámicos de tiempo discreto. Para definir la inter-dependencia entre la evolución estructural y la dinámica de los nodos, propusimos regla que involucran condiciones sobre el estado de los nodos, las propiedades estructurales de la red y el estado actual de los enlaces. Para determinar cuando una condición se ha cumplido o no, definimos

dos tipos de eventos: los eventos dinámicos indican los instantes en que los nodos dejan de estar sincronizados; y los eventos estructurales indican los instantes en que los grados de nodo son casi iguales. Para diseñar las reglas propusimos dos políticas de cambio: una política llamada “centrada en los nodos”, en la cual damos preferencia al evento dinámico sobre el evento estructural con el objetivo de beneficiar la sincronización y una política llamada “centrada en los enlaces”, en la cual damos preferencia al evento estructural sobre el evento dinámico con el objetivo de beneficiar la heterogeneidad de las conexiones. Usando ambas políticas de cambio proponemos dos reglas, las cuales expresamos como una lógica de cambio con tres variables binarias $\delta_{ij}(k)$, $a_{ij}(k)$, $\sigma_{ij}(k)$. La primera variable indica si el evento dinámico ha ocurrido, la segunda indica el estado activo-inactivo del enlace y la tercera indica si el evento estructural ha ocurrido. Nuestros resultados numéricos muestran que los objetivos planteados en las políticas de cambio se logran. Con respecto al análisis de estabilidad, concluimos que, bajo la restricción de que la condición de difusividad se satisfaga de manera uniforme en el tiempo y que no existan nodos aislados, es posible encontrar una función común de Lyapunov que garantice la estabilidad del estado sincronizado en la red dinámica bajo evolución estructural.

La metodología usada previamente para modelar la evolución estructural puede ser aplicada también al caso en el que los nodos son sistemas dinámicos de tiempo continuo. Para este escenario observaríamos que bajo las políticas de cambio se beneficiaría la sincronización o bien la heterogeneidad de las conexiones. Así mismo, la política de cambio centrada en los enlaces causaría una pérdida de la sincronización. Lo anterior se debe principalmente a que el segundo eigenvalor disminuye conforme la red va adquiriendo heterogeneidad en las conexiones. Por la condición de sincronización (Lema 2.2), lo anterior implica que necesitamos una fuerza de conexión cada vez más grande para mantener a los nodos sincronizados. Lo anterior nos motivo a proponer una metodología donde la fuerza de conexión se ajusta de manera adaptable con el objetivo de preservar la sincronización a pesar de los cambios

estructurales. Para esta metodología consideramos conveniente cambiar la forma en que la estructura evoluciona. En particular, asumimos que la estructura conmuta entre un conjunto de estructuras admisibles y en instantes específico del tiempo. En otras palabras, los eventos de cambio están ahora definidos en el tiempo. Lo anterior nos permitió enfocarnos en el estudio del proceso adaptable sin involucrar otras reglas de cambio. Consideramos que este escenario puede ser extendido al caso en el que los cambios en la estructura están impulsados por reglas locales. Encontramos que una forma conveniente de modelar redes cuyos cambios está impulsados por eventos en el tiempo es mediante el formalismo de los SC. En este sentido definimos una regla de conmutación arbitraria la cual usamos para conmutar la estructura entre un conjunto de estructuras admisibles. El adjetivo de arbitrario dado a la regla hace referencia al hecho de que tanto el evento temporal como la selección de la estructura se realizan de manera subjetiva. Nuestros resultados muestran que al constriñir el conjunto de estructuras admisibles a estructuras con el mismo número de nodos y sin elementos aislados, podemos proponer una función común de Lyapunov que garantice la estabilidad del estado sincronizado a pesar de las conmutaciones de la red. Más aún, con el fin de mostrar que, bajo la regla adaptable, el estado sincronizado es estable a pesar de las conmutaciones, realizamos una extensión al modelo y propusimos una ley adaptable con un proceso de reinicialización, el cual pone en cero al estado dinámico del nodo cada vez que pierde o gana un enlace. Bajo esta nueva ley adaptable mostramos que el estado sincronizado sigue siendo estable.

Con base a las discusiones presentadas en el presente capítulo concluimos que la hipótesis planteada en este trabajo de tesis es correcta. En la siguiente sección presentamos un bosquejo de las líneas de investigación que podrían ser, desde nuestro punto de vista, desarrollados a partir de los resultados expuestos en el presente trabajo de tesis.

6.2. Trabajo futuro

Un tema de estudio para posteriores trabajos de investigación son los patrones generados por las reglas AC unidimensionales. Desarrollar una metodología que nos permita caracterizar dichos patrones sería una parte importante a realizar en trabajos futuros. Así mismo, realizar un análisis matemático sobre la dinámica de cambio de la evolución estructural nos brindaría una oportunidad de describir y caracterizar la evolución estructural. Todo lo anterior puede también ser aplicado al caso en el que los nodos son sistemas dinámicos (de tiempo discreto o continuo). De esta forma se podría analizar los efectos de los patrones generados en la evolución estructural sobre la dinámica colectiva de los nodos.

Otro posible tema de investigación es ampliar el modelo de evolución estructural propuesto en el capítulo 4, a fin de involucrar en las reglas propuestas a los eventos en el tiempo. Podemos complementar esta investigación permitiendo que la fuerza de conexión se ajuste de forma adaptable. De igual forma, es de nuestro interés buscar proponer reglas que permitan que la red evolucione hacia estructuras heterogéneas y con un comportamiento sincronizado de los nodos. Lo anterior puede igualmente ser extendido al caso en que los nodos de la red son no idénticos, es decir, pueden tener distintos campos vectoriales, o pueden ser el mismo sistema pero con distintos parámetros. También es posible involucrar otros procesos de cambio en las reglas coevolutivas tales como el cambio en la dirección de los enlaces e inclusive procesos de crecimiento.

6.2. Trabajo futuro

El caso en el que los nodos son sistemas dinámicos de tiempo continuo y donde los cambios estructurales están impulsados por eventos dinámicos y estructurales es también un tema de investigación a realizar en futuros trabajos. Para un modelo de evolución con estas características podemos buscar desarrollar una metodología que nos permita diseñar reglas de conmutación dependientes de los estados y de la estructura. De igual modo, es de nuestro interés ampliar el análisis de estabilidad basado en la función común de Lyapunov, e incluir la teoría de las funciones múltiples de Lyapunov con el objetivo de relajar varias de las suposiciones realizadas en los teoremas desarrollados en el presente trabajo de tesis.

Bibliografía

- [1] C. G. Cassandras and S. Lafortune, *Introduction to discrete event systems*. Springer, 2008.
- [2] L. D. F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso, and P. R. Villas Boas, “Characterization of complex networks: A survey of measurements,” *Advances in Physics*, vol. 56, no. 1, pp. 167–242, 2007.
- [3] M. Newman, *Networks: an introduction*. Oxford University Press, 2010.
- [4] T. G. Lewis, *Network science*. John Wiley & Sons, 2009.
- [5] B. Bollobás, *Random graphs*. Springer, 1998.
- [6] J. H. Miller and S. E. Page, *Complex adaptive systems: an introduction to computational models of social life*. Princeton University Press, 2007.
- [7] M. Mitchell, *Complexity: A guided tour*. Oxford University Press, 2009.
- [8] M. Gell-Man, “The quark and the jaguar. adventures in the simple and the complex,” *Little, Brown and Company*, 1994.
- [9] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of small-world networks,” *Nature*, vol. 393, pp. 440–442, 1998.

- [10] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [11] S. H. Strogatz, “Exploring complex networks,” *Nature*, vol. 410, pp. 268–276, 2001.
- [12] C. W. Wu, *Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems*. World Scientific, 2007.
- [13] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, “A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve,” *The Journal of physiology*, vol. 117, no. 4, pp. 500–544, 1952.
- [14] N. F. Rulkov, “Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map,” *Physical Review E*, vol. 65, no. 4, p. 041922, 2002.
- [15] A. Barrat, M. Barthelemy, and A. Vespignani, *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge University Press, 2008.
- [16] T. Gross and B. Blasius, “Adaptive coevolutionary networks: a review,” *Journal of The Royal Society Interface*, vol. 5, no. 20, pp. 259–271, 2008.
- [17] T. Aoki and T. Aoyagi, “Scale-free structures emerging from co-evolution of a network and the distribution of a diffusive resource on it,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 208702, Nov 2012.
- [18] D. H. Janzen, “When is it coevolution?,” *Evolution*, vol. 34, no. 3, pp. 611–612, 1980.
- [19] J. N. Thompson, *The geographic mosaic of coevolution*. University of Chicago Press, 2005.
- [20] P. Erdős and A. Rényi, “On the evolution of random graphs,” *Selected Papers of Alfréd Rényi*, vol. 2, pp. 482–525, 1976.

- [21] M. E. Newman, “The structure and function of complex networks,” *SIAM review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [22] S. Boccaletti, “The synchronized dynamics of complex systems,” Elsevier, vol. 6 of Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity, 2008.
- [23] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, “Complex networks: Structure and dynamics,” *Physics Reports*, vol. 424, no. 4, pp. 175–308, 2006.
- [24] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou, “Synchronization in complex networks,” *Physics Reports*, vol. 469, no. 3, pp. 93–153, 2008.
- [25] X. F. Wang and G. Chen, “Complex networks: small-world, scale-free and beyond,” *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, vol. 3, no. 1, pp. 6–20, 2003.
- [26] S. Strogatz, *Sync: How Order Emerges From Chaos In the Universe, Nature, and Daily Life*. Hyperion, 2012.
- [27] C. W. Wu and L. O. Chua, “Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems,” *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 8, pp. 430–447, 1995.
- [28] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Master stability functions for synchronized coupled systems,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 10, pp. 2109–2112, 1998.
- [29] G. Chen and Z. Duan, “Network synchronizability analysis: a graph-theoretic approach,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 18, no. 3, p. 037102, 2008.
- [30] X. F. Wang, “Complex networks: topology, dynamics and synchronization,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 05, pp. 885–916, 2002.

- [31] X. Li and G. Chen, “Synchronization and desynchronization of complex dynamical networks: an engineering viewpoint,” *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 11, pp. 1381–1390, 2003.
- [32] J. Jost and M. P. Joy, “Spectral properties and synchronization in coupled map lattices,” *Physical Review E*, vol. 65, no. 1, p. 016201, 2001.
- [33] G. Rangarajan and M. Ding, “Stability of synchronized chaos in coupled dynamical systems,” *Physics Letters A*, vol. 296, no. 4, pp. 204–209, 2002.
- [34] D. Smith, J.-P. Onnela, C. F. Lee, M. Fricker, and N. F. Johnson, “Network automata: Coupling structure and function in real-world networks,” *arXiv preprint physics/0701307*, 2007.
- [35] H. Sayama, “Generative network automata: A generalized framework for modeling complex dynamical systems with autonomously varying topologies,” in *IEEE Symposium on Artificial Life, 2007. ALIFE’07*, pp. 214–221, IEEE, 2007.
- [36] J. Herrera, M. G. Cosenza, K. Tucci, and J. C. González-Avella, “General coevolution of topology and dynamics in networks,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 95, no. 5, p. 58006, 2011.
- [37] T. Gross and H. E. Sayama, *Adaptive networks*. Springer, 2009.
- [38] A. Mukherjee, M. Choudhury, F. Peruani, N. Ganguly, and B. Mitra, *Dynamics On and Of Complex Networks, Volume 2: Applications to Time-Varying Dynamical Systems*. Birkhauser, 2013.
- [39] S. Phelps, “Emergence of social networks via direct and indirect reciprocity,” *Autonomous agents and multi-agent systems*, vol. 27, no. 3, pp. 355–374, 2013.

- [40] G. Palla, A.-L. Barabási, and T. Vicsek, “Quantifying social group evolution,” *Nature*, vol. 446, pp. 664–667, 2007.
- [41] J. Poncela, J. Gómez-Gardeñes, A. Traulsen, and Y. Moreno, “Evolutionary game dynamics in a growing structured population,” *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 8, p. 083031, 2009.
- [42] S.-M. Qin, G.-Y. Zhang, and Y. Chen, “Coevolution of game and network structure with adjustable linking,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 388, no. 23, pp. 4893–4900, 2009.
- [43] M. G. Zimmermann and V. M. Eguiluz, “Cooperation, social networks, and the emergence of leadership in a prisoner dilemma with adaptive local interactions,” *Physical Review E*, vol. 72, no. 5, p. 056118, 2005.
- [44] U. Dieckmann and R. Law, “The dynamical theory of coevolution: a derivation from stochastic ecological processes,” *Journal of mathematical biology*, vol. 34, no. 5-6, pp. 579–612, 1996.
- [45] M. D. Fricker, L. Boddy, T. Nakagaki, and D. P. Bebbler, “Adaptive biological networks,” in *Adaptive Networks*, pp. 51–70, Springer, 2009.
- [46] S. Funk, M. Salathé, and V. A. Jansen, “Modelling the influence of human behaviour on the spread of infectious diseases: a review,” *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 7, no. 50, pp. 1247–1256, 2010.
- [47] V. Marceau, P.-A. Noël, L. Hébert-Dufresne, A. Allard, and L. J. Dubé, “Adaptive networks: Coevolution of disease and topology,” *Physical Review E*, vol. 82, no. 3, p. 036116, 2010.
- [48] G. Demirel, R. Prizak, P. N. Reddy, and T. Gross, “Opinion formation and cyclic dominance in adaptive networks,” *arXiv preprint arXiv:1011.1124*, 2010.

- [49] F. Vazquez, “Opinion dynamics on coevolving networks,” in *Dynamics On and Of Complex Networks, Volume 2*, pp. 89–107, Springer, 2013.
- [50] L. Donetti, P. I. Hurtado, and M. A. Munoz, “Entangled networks, synchronization, and optimal network topology,” *Physical Review Letters*, vol. 95, no. 18, p. 188701, 2005.
- [51] A. E. Motter, C. Zhou, and J. Kurths, “Enhancing complex-network synchronization,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 69, no. 3, pp. 334–340, 2005.
- [52] S.-J. Wang, Z.-X. Wu, H.-R. Dong, and G. Chen, “Enhancing the synchronizability of scale-free networks by adding edges,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 21, pp. 67–77, 2010.
- [53] J. Fan, X. Li, and X. Fan Wang, “On synchronous preference of complex dynamical networks,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 355, no. 2, pp. 657–666, 2005.
- [54] M. Jalili, “Enhancing synchronizability of diffusively coupled dynamical networks: A survey,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 24, no. 7, pp. 1009–1022, 2013.
- [55] D. Liberzon, *Switching in systems and control*. Springer, 2003.
- [56] J. Zhao, D. J. Hill, and T. Liu, “Synchronization of complex dynamical networks with switching topology: a switched system point of view,” *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2502–2511, 2009.
- [57] D. J. Stilwell, E. M. Bollt, and D. G. Roberson, “Sufficient conditions for fast switching synchronization in time-varying network topologies,” *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 140–156, 2006.

- [58] K. Tomita, S. Murata, and H. Kurokawa, “Self-description for construction and computation on graph-rewriting automata,” *Artificial Life*, vol. 13, no. 4, pp. 383–396, 2007.
- [59] S. Bornholdt and T. Rohlf, “Topological evolution of dynamical networks: Global criticality from local dynamics,” *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 26, p. 6114, 2000.
- [60] J. Ito and K. Kaneko, “Spontaneous structure formation in a network of chaotic units with variable connection strengths,” *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 2, p. 028701, 2001.
- [61] C. Zhou and J. Kurths, “Dynamical weights and enhanced synchronization in adaptive complex networks,” *Physical Review Letters*, vol. 96, no. 16, p. 164102, 2006.
- [62] P. De Lellis, M. Di Bernardo, F. Sorrentino, and A. Tierno, “Adaptive synchronization of complex networks,” *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 85, no. 8, pp. 1189–1218, 2008.
- [63] I. V. Belykh, V. N. Belykh, and M. Hasler, “Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 195, no. 1, pp. 188–206, 2004.
- [64] D. Huang, “Synchronization in adaptive weighted networks,” *Physical Review E*, vol. 74, no. 4, p. 046208, 2006.
- [65] L. Wang, H.-p. Dai, H. Dong, Y.-h. Shen, and Y.-X. Sun, “Adaptive synchronization of weighted complex dynamical networks with coupling time-varying delays,” *Physics Letters A*, vol. 372, no. 20, pp. 3632–3639, 2008.
- [66] P. DeLellis, M. Bernardo, T. E. Goroehowski, and G. Russo, “Synchronization

- and control of complex networks via contraction, adaptation and evolution,” *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, vol. 10, no. 3, pp. 64–82, 2010.
- [67] D. J. Watts, “Networks, dynamics, and the small-world phenomenon,” *American Journal of Sociology*, vol. 105, no. 2, pp. 493–527, 1999.
- [68] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews Of Modern Physics*, vol. 74, no. 1, pp. 47–97, 2002.
- [69] X. F. Wang and G. Chen, “Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 1, pp. 54–62, 2002.
- [70] H. K. Khalil and J. Grizzle, *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 2002.
- [71] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology and chemistry*. Westview Press, 2001.
- [72] W. J. Rugh, *Linear system theory*. Prentice-Hall, 1996.
- [73] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, “Phase synchronization of chaotic oscillators,” *Physical Review Letters*, vol. 76, no. 11, pp. 1804–1807, 1996.
- [74] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, “Synchronization of pulse-coupled biological oscillators,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 50, no. 6, pp. 1645–1662, 1990.
- [75] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization, A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2001.
- [76] K. Kaneko, “Coupled map lattice,” in *Chaos, Order, and Patterns*, pp. 237–247, Springer, 1991.

- [77] K. Kaneko, “Overview of coupled map lattices,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 2, no. 3, pp. 279–282, 1992.
- [78] H. Aref, “Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 15, no. 1, pp. 345–389, 1983.
- [79] G. Perez, C. Pando-Lambruschini, S. Sinha, and H. A. Cerdeira, “Nonstatistical behavior of coupled optical systems,” *Physical Review A*, vol. 45, no. 8, p. 5469, 1992.
- [80] J. Sánchez, J. González-Estévez, R. López-Ruiz, and M. Cosenza, “A model of coupled maps for economic dynamics,” *The European Physical Journal-Special Topics*, vol. 143, no. 1, pp. 241–243, 2007.
- [81] S. Sinha and W. L. Ditto, “Dynamics based computation,” *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 10, pp. 2156–2159, 1998.
- [82] K. Aoki and N. Mugibayashi, “Onset of turbulent pattern in a coupled map lattice. case for soliton-like behavior,” *Physics Letters A*, vol. 128, no. 6, pp. 349–354, 1988.
- [83] A. Ilachinski, *Cellular automata: A discrete universe*. World Scientific, 2003.
- [84] S. Wolfram, *A new kind of science*, vol. 5. Wolfram Media Inc., 2002.
- [85] H. Lin and P. J. Antsaklis, “Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results,” *IEEE Transactions On Automatic Control*, vol. 54, no. 2, pp. 308–322, 2009.
- [86] Z. Sun, *Switched linear systems: control and design*. Springer, 2006.
- [87] R. M. May, “Simple mathematical models with very complicated dynamics,” *Nature*, vol. 261, pp. 459–467, 1976.

- [88] M. Ausloos and M. Dirickx, *The logistic map and the route to chaos: From the beginnings to modern applications*. Springer, 2006.
- [89] P. Mason, M. Sigalotti, and J. Daafouz, “On stability analysis of linear discrete-time switched systems using quadratic lyapunov functions,” in *46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007*, pp. 5629–5633, IEEE, 2007.
- [90] F. Blanchini, S. Miani, and C. Savorgnan, “Stability results for linear parameter varying and switching systems,” *Automatica*, vol. 43, no. 10, pp. 1817–1823, 2007.
- [91] J. Daafouz and J. Bernussou, “Parameter dependent lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties,” *Systems & control letters*, vol. 43, no. 5, pp. 355–359, 2001.
- [92] P. DeLellis, M. di Bernardo, and G. Russo, “On quad, lipschitz, and contracting vector fields for consensus and synchronization of networks,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 58, no. 3, pp. 576–583, 2011.
- [93] B. Liu, W. Lu, and T. Chen, “New conditions on synchronization of networks of linearly coupled dynamical systems with non-lipschitz right-hand sides,” *Neural Networks*, vol. 25, pp. 5–13, 2012.
- [94] P. De Lellis, M. di Bernardo, and F. Garofalo, “Synchronization of complex networks through local adaptive coupling,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 18, no. 3, p. 037110, 2008.

Productividad

Los resultados de este trabajo de tesis están reportados en los siguientes artículos científicos presentados en congresos y enviados para su publicación en revistas científicas de prestigio internacional:

Artículos en revistas arbitradas

1. **Synchronization in complex networks under structural evolution**, A. Anzo; J.G. Barajas-Ramírez. *Journal of The Franklin Institute*, 351, 358–372 (2014). En este artículo presento los resultados expuestos en el capítulo 5 de este documento de tesis.
2. **Effects of growth on the synchronization of discrete-time dynamical networks**, A. Anzo; J.G. Barajas-Ramírez. *PACS Journal of Cybernetics and Physics (CAP)*, 2(4), 199–204. En este artículo presento un estudio sobre el crecimiento en redes dinámicas y sus efectos en la estabilidad del estado sincronizado. Esta investigación se realizó de forma paralela al trabajo de tesis y los resultados no son incluidos en este documento debido a que esta temática va más allá de los objetivos planteados para la tesis.

Capítulos de libro

1. **Modelando la evolución de una red compleja con Autómatas Celulares**, A. Anzo; J.G. Barajas-Ramírez. Capítulo del libro: *Sistemas Complejos co-*

mo Modelos de Computación, G. Juarez Martinez; H. Zenil, C.R.S. Stephens (Editores). Ed. Luniver Press, Londres (2011). En este capítulo de libro presentamos el modelo de evolución estructural expuesto en el capítulo 3 de este documento de tesis. De igual forma realicé una ponencia oral de este modelo en el *Coloquio de Sistemas Complejos como Modelos de Computación (WCSCM 2011)*, en el Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, el cual se realizó los días 9 y 10 de Noviembre del 2011, en la Ciudad de México.

2. **Emergent behaviors on coevolutionary networks of chaotic dynamical systems**, A. Anzo; J.G. Barajas-Ramírez. Capítulo del libro: *ISCS14: Interdisciplinary Symposium on Complex Systems*, A. Sanayei, O.E. Rössler, I. Zelinka (Editores). Ed. Springer Emergence, Complexity and Computation Series, Vol. 14. (2015). La realización de este trabajo se basó en el modelo de red coevolutivo expuesto en el capítulo 4 de este documento de tesis. De igual forma realicé una ponencia oral de este trabajo en el *Interdisciplinary Symposium on Complex Systems (ISCS14)*, el cual se realizó en la ciudad de Florencia, Italia, del 15 al 18 de Septiembre del 2014.

Artículos de congreso

1. **A coevolution model for dynamical networks of discrete-time chaotic systems**, A. Anzo; J.G. Barajas-Ramírez. Trabajo presentado como ponencia oral en el *Third IFAC CHAOS Conference*, el cual se realizó en la ciudad de Cancún, México, del 20 al 22 de Junio del 2012. Los resultados de este artículo forman parte del capítulo 4 de este documento de tesis.
2. **Synchronization on growing dynamical networks: a discrete event approach**, A. Anzo; J.G. Barajas-Ramírez. Trabajo presentado en el *6th International Scientific Conference on Physics and Control*, el cual se realizó en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, del 26 al 29 de Agosto del 2013.