

# INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

# **POSGRADO EN GEOCIENCIAS APLICADAS**

# Desarrollo de un modelo numérico para la simulación de procesos hidráulicos

Tesis que presenta David Uriel Negrete Correa

Para obtener el grado de

Maestro en Geociencias Aplicadas

Director (Codirectores) de la Tesis: Dr. José Tuxpan Vargas Dr. José Noel Carbajal Pérez

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2016



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **"Desarrollo de un modelo numérico para la simulación de procesos hidráulicos"** presentada para obtener el Grado de Maestro en Geociencias Aplicadas fue elaborada por **David Uriel Negrete Correa** y aprobada el **once de julio del dos mil dieciséis** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Geociencias Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. José Tuxpan Vargas Codirector de la tesis

Dr. José Noel Carbajal Pérez Codirector de la tesis

Dr. José Alfredo Ramos Leal Miembro del Comité Tutoral

**Dr. Josué de Lara Bashulto** Miembro del Comité Tutoral



## **Créditos Institucionales**

Esta tesis fue elaborada en la División de Geociencias Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección de los Doctores José Tuxpan Vargas y José Noel Carbajal Pérez

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (337175) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

# Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 016 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Geociencias Aplicadas está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 11 días del mes de julio del año 2016, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por: 

Dr. José Alfredo Ramos Leal 💦 💦 Presidente	IPICYT
Dr. José Noel Carbajal Pérez Secretario	IPICYT
Dr. Josué de Lara Bashulto Sinodal	IPICYT
Dr. José Tuxpan Vargas Sinodal	IPICYT
a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:	
MAESTRO EN GEOCIENCIAS APLICADAS	
sustentó el C. David Uriel Negrete Correa	
sobre la Tesis intitulada:	
Desarrollo de un modelo numérico para la simulación de procesos hidráulico	s
que se desarrolló bajo la dirección de	
Dr. José Tuxpan Vargas	
Dr. José Noel Carbajal Pérez	

El Jurado, después de deliberar, determinó

Dándose por terminado el acto a las 13:05 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

**APROBARLO** 

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 11 días del mes de julio de 2016.

Dr. Marcial Bonilla Marí Secretario Académico INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C Mtra. Ivonne Lizette Grevas Vél Jefa del Departamento del Posgrado IPICYT SECRETARIA ACADEMICA

### Agradecimientos

Agradezco a mis padres por el apoyo durante todo el trayecto de formación académica en general, a mis hermanos, en especial Adonai y Hadit. A los miembros de mi comité tutoral por el apoyo y motivación durante el periodo de trabajo, a mis compañeros Fermín Villalpando, María de la Luz Galván Tovar, Ilya Morales Gaistardo por su compañía durante los periodos de trabajo más arduos así como apoyo en la revisión de formatos en el trabajo y contenido de la presentación. A Alfredo Mendoza Santa Cruz e Ilya (de nuevo) por su apoyo a distancia desde que inicie el posgrado. Por ultimo a Carlos Viktor Schroeder Jung por su primordial ayuda con la traducción del resumen a inglés.

# Contenido

Constancia de aprobación de la tesis	ii
Créditos institucionales	iii
Acta de examen	iv
Agradecimientos	v
Lista de tablas	ix
Lista de figuras	ix
Anexos	xiii
Resumen	xiv
Abstract	xv

1 Introducción
1.1Antecedentes
1.2 Justificación/motivación del trabajo14
1.3Objetivos
2Modelo
2.1Ecuaciones físicas
2.2 Método de diferencias finitas18
2.3 Discretización
2.4 Condiciones de frontera
2.4.1 Aproximación de Slip27
2.4.2Aproximación de Half-Slip27
2.4.3Aproximacion de Non-Slip
2.5 Condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)
2.6Diagrama de flujo
3Experimentos
4Resultados
4.1Soliton
4.2Bora
4.3Presa 1

4.4Presa 2	53
4.5Soliton alta resolución	59
4.6Presa alta resolución	64
5Discusión	71
5Conclusiones	74
6.1 Trabajo futuro	75
7Referencias	76

# Lista de tablas

Título		Página
I Comparativa de los datos reales de la inundación en la ciudad de Villahermosa adquiridos de CONAGUA, con los adquiridos por las simulaciones en los softwares GUAD-2D e IBER.	8	
II Método de discretización para las derivadas de primer orden.	16	
III Método de discretización para las derivadas de segundo orden.	17	

## Lista de figuras

Título	Página
II En estas fotografías se muestra la bora en el río Qiantang, China el 24 de septiembre de 2010, de lado izquierdo una vista panorámica del fenómeno y del derecho un acercamiento al frente de onda de una altura de 1.9 metros	2
III En esta figura se muestra las zonas afectadas por el tsunami de 2011 en	3
IV Fotografía del arribo del Tsunami del 2011 a la ciudad de Miyako tomada por un oficial de la ciudad	4
V Algunos de los daños de la inundación en San Luis Potosí por el rompimiento de la contra-presa en el año de 1933	5
VI Fotografía de uno de los clavos marca de la inundación en la base de una pilastra de la Casa de Moneda	5
VIIRecopilación de resultados alcanzados con diversos modelos de simulación	8
VIII Muestra los resultados de la propagación de una onda en un fondo plano	9
IX Muestra una comparación entre los datos medidos en el experimento a escala con los simulados en el trabajo de (Krzyk et al. 2012)	10
X Del lado izquierdo se muestra el mayado y diagrama general del experimento, mientras que del lado derecho se muestras los resultados después de 11 segundos de simulación	11
XI Mapa de riesgo por inundación en la ciudad de Villahermosa.	12
XII Se muestran los resultados de la simulación en 4 distintos tiempos de simulación, el primero de 1100s con entrada de fluido y en sus primeros contactos con el obstáculo, el segundo a 5500s donde ya está lleno y comienza el drenado del fluido, el tercero a 11000s con el obstáculo comenzando a salir del agua y por ultimo a 30000s donde va se ha deiado de extraer el agua.	13
XIII Dos de las 6 simulaciones de descarga en distintas zonas comparando con los datos reales del 23 de julio del 2008 (Jung et al., 2015).	14
XIV Descripción gráfica del método Slip.	27
XV Descripción gráfica del método Half-Slip.	28
XVI Descripción gráfica del método Non-Slip.	29
XVII Se muestra a la izquierda el rango de solución con estabilidad numérica y a la derecha el de inestabilidad.	30
XVIII Se muestra el diagrama de flujo de la estructura principal del MHIPICYT	31
XIX Diagrama de la base de los experimentos.	32
XX Bosquejo del experimento con malla de $9m^2$	34
XXI Bosquejo de la distribución general de los puntos A,B,C, y D.	35

XXII Experimento 1 en el tiempo de 4 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	36
XXIII Experimento 1 en el tiempo de 12 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	37
XXIV Experimento 1 en el tiempo de 24 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	37
XXV Experimento 1 en el tiempo de 36 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros	38
XXVI Experimento 1 en el tiempo de 48 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros	38
XXVII Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 1. XXVIII Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 1. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.	39 40
XXIX Graficas correspondientes al punto B (25,150) del experimento 1. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.	40
XXX Graficas correspondientes al punto C (1,150) del experimento 1. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.	41
XXXI Graficas correspondientes al punto D (50,150) del experimento 1. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto	41
XXXII Experimento 2 en el tiempo de 6 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros	42
XXXIII Experimento 2 en el tiempo de 12 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para	43
cambiar de número de columna a distancias en metros. XXXIV Experimento 2 en el tiempo de 18 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	43
XXXV Experimento 2 en el tiempo de 24 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	44
XXXVI Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 2. XXXVII Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 2. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.	44 45

XXXVIII Graficas correspondientes al punto B (25,150) del experimento 2. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.	46
XXXIX Graficas correspondientes al punto C (1,150) del experimento 2. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad	46
XL Graficas correspondientes al punto D (50,150) del experimento 2. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas	47
XLI Experimento 3 en el tiempo de 7 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros	48
XLII Experimento 3 en el tiempo de 14 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros	48
XLIII Experimento 3 en el tiempo de 21 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	49
XLIV Experimento 3 en el tiempo de 28 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	49
XLV Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 3. XLVI Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 3. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	50 51
XLVII Graficas correspondientes al punto B (25,80) del experimento 3. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	51
u y la tercera la de la velocidad $v$ . XLVIII Graficas correspondientes al punto C (15,80) del experimento 3. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad $v$ .	52
XLIX Graficas correspondientes al punto D (35,80) del experimento 3. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad $y$ y la tercera la de la velocidad $y$	52
L Experimento 4 en el tiempo de 29 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros	53
LI Experimento 4 en el tiempo de 58 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	54
LII Experimento 4 en el tiempo de 87 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	54
LIII Experimento 4 en el tiempo de 116 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	55
LIV Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 4.	55

LV Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 4. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad $u$ y la tercera la de la velocidad $v$	57
LVI Graficas correspondientes al punto B (25,400) del experimento 4. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad $u$ y la	57
tercera la de la velocidad $v$ .	50
LVII Graficas correspondientes al punto C (15,400) del experimento 4. La	58
primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	
<i>u</i> y la tercera la de la velocidad <i>v</i> .	
LVIII Graficas correspondientes al punto D (35,400) del experimento 4. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	58
u y la tercera la de la velocidad $v$ .	
LIX Experimento 5 en el tiempo de 0.7 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.	59
LX Experimento 5 en el tiempo de 1.4 minutos, el primer elemento muestra los	60
niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25)	
de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para	
cambiar de número de columna a distancias en metros.	
LXI Experimento 5 en el tiempo de 2.1 minutos, el primer elemento muestra los	60
niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25)	
de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para	
cambiar de número de columna a distancias en metros.	
LXII Experimento 5 en el tiempo de 2.8 minutos, el primer elemento muestra los	61
niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25)	
de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para	
cambiar de número de columna a distancias en metros.	
LXIII Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 5.	61
LXIV Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 5. La	62
primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	
u y la tercera la de la velocidad $v$ .	~~~
LXV Graticas correspondientes al punto B (25,120) del experimento 5. La	63
primera muestra la vallación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	
u y la tercera la ue la velocitadi $v$ .	63
primera muestra la variación temporal de la altura. La segunda la de la velocidad	05
u y la tercera la de la velocidad $u$	
$\mu$ y la tercera la de la velocidad $\nu$ . LXVII - Graficas correspondientes al nunto D (50.120) del experimento 5. La	64
primera muestra la variación temporal de la altura. La segunda la de la velocidad	04
y y la tercera la de la velocidad $y$	
I XV/III - Experimento 6 en el tiempo de 3 minutos, el primer elemento muestra los	65
niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la	00
distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número	
de columna a distancias en metros.	
LXIX Experimento 6 en el tiempo de 6 minutos, el primer elemento muestra los	65
niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la	
distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número	
de columna a distancias en metros.	
LXX Experimento 6 en el tiempo de 9 minutos, el primer elemento muestra los	66
niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la	
distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número	
de columna a distancias en metros.	
LXXI Experimento 6 en el tiempo de 11.9 minutos, el primer elemento muestra	66
los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la	

distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número	
de columna a distancias en metros.	
LXXII Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 6.	67
LXXIII Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 6. La	68
primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	
u y la tercera la de la velocidad v.	
LXXIV Graficas correspondientes al punto B (25,200) del experimento 6. La	69
primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	
u y la tercera la de la velocidad $v$ .	
LXXV Graficas correspondientes al punto C (15,200) del experimento 6. La	69
primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	
u y la tercera la de la velocidad $v$ .	
LXXVI Graficas correspondientes al punto D (35,200) del experimento 6. La	70
primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad	
u v la tercera la de la velocidad $v$ .	
A1 - Tapón para la fácil extracción de la arena	79
A2 Se muestran la estructura montada.	80
A3 - Primeras pruebas de la AR sand box del IPICYT	81
A4 Presentación del equipo en el evento del día del niño (2016) en el IPICYT	82
	01

## Anexos

1. Caja de arena de realidad aumentada

## Resumen

# "Desarrollo de un modelo numérico para la simulación de procesos hidráulicos".

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo numérico para la simulación de fenómenos hidrológicos. El modelo matemático se basa en las ecuaciones de Saint-Venant en 2D, las cuales se deducen a su vez de las ecuaciones de Navier-Stokes. El modelo considera la parte turbulenta del fluido así como la fricción con el fondo usando la fórmula de Manning con un coeficiente de fricción promediado de los encontrados en la literatura. Se aplicó un método de diferencias finitas para la discretización de las ecuaciones. Posteriormente, se generó el código en lenguaje Fortran para efectuar los cálculos y la visualización de los resultados se efectuó en MatLab. Se presentan los resultados de experimentos considerando topografías ideales con diferentes pendientes, es decir, canales inclinados de anchura fija. Los resultados muestran la propagación de un frente de agua que puede ser el resultado del rompimiento de una presa, una crecida de agua por intensas lluvias, una bora causada por mareas en un estuario o bien una ola de tsunami alcanzando la costa, entre otros fenómenos.

Se simularon con condiciones realistas un total de seis experimentos. Tres experimentos de rompimiento de presas, en los cuales se manejaron tres escenarios distintos: Con gran pendiente en el terreno y cantidad limitada del fluido a una resolución de 30x30 metros; uno con pendiente menos pronunciada y entrada continua de agua con misma resolución de 30x30 metros; por ultimo uno con poca pendiente y entrada continua de fluido pero con una resolución mayor de 3x3 metros. Dos experimentos para simular la propagación de un soliton, uno con mallado de 3x3 metros y otro con mallado de 30x30 metros. Uno más para el caso de grandes avenidas de agua en ríos o incluso semejante a las boras, probando la estabilidad del modelo en la presencia de altos gradientes de presión constantes.

PALABRAS CLAVE: Saint-Venant, modelo numérico, fenómenos hidrológicos, simulación.

## Abstract

# "Numerical model development applied to hydraulic processes simulation".

This work shows the development of a numerical model for the simulation of hydrologic events. It is based on the two-dimensional Saint-Venant equations, which are deduced from the Navier-Stokes equations. The model considers turbulence with the Eddy coefficient, and friction based on the Manning's formula with an n coefficient average from data found in literature. To discretize, the finite difference method from the Taylor series was applied. The code was written in Fortran and the data was visualized using MatLab. The experiments consider ideal topographies with different slopes and a fixed width canal. The results show the propagation of an abrupt wave front, which can be induced by various phenomena like a dam-break, tidal bores and tsunamis, among others.

Six simulations were performed assuming realistic conditions; three dam breakage experiments simulating three different scenarios: one with steep bed slopes and limited fluid quantities to a resolution of 30x30 m; one with lesser bed slopes and a continuous flow to the same 30x30m resolution; a third one with a light slope, continuous flow and a higher resolution of 3x3 m; another two simulate the propagation of solitons at 30x30 m and 3x3 m mesh resolutions respectively; a last one proves the numeric model's stability by simulating constant high pressure gradients, such as tidal bores, flash floods or other sudden flow increases in rivers.

KEY WORDS. Simulation, Saint-Venant, numerical model, hydraulic processes.

## 1.- Introducción

Las inundaciones son uno de los desastres naturales que más impactan la seguridad y bienestar de las comunidades a nivel mundial ya que puede traer como consecuencia la pérdida de vidas humanas así como daños económicos de gran magnitud. Los causantes o detonantes del fenómeno de inundación puede atribuirse a lluvias continuas, derretimiento de grandes cantidades de hielo en cortos periodo de tiempo, ríos que reciben un exceso de precipitación provocando que estos se desborden, además de otros factores como el rompimiento de presas. Otras causas a mayor escala pueden ser debido a boras, huracanes, solitones, etc. Estas múltiples formas en las que se pueden llegar a desencadenar y su gran capacidad destructiva hacen de estos fenómenos un peligro latente para las sociedades actuales, por lo cual su predicción se ha vuelto algo de primordial importancia para lograr mitigar los daños económicos y pérdida de vidas humanas que este tipo de fenómenos puedan generar. Los modelos numéricos son una herramienta de gran valor cuando se trata de establecer los posibles daños y/o las condiciones en las que estos se pueden presentar, ya que nos permiten, por ejemplo, conocer las áreas que serán afectadas en caso de siniestro, o conocer la cantidad de precipitación que representará un peligro en cuanto al desborde de ríos o presas, así como tiempos de propagación para establecer planes de evacuación efectivos. Todo esto sin necesidad de poner a las personas en riesgo y a un costo bajo ya que todo se lleva a cabo a partir de simulaciones que podemos ejecutar/proyectar incluso en computadoras de gama media. La cantidad de datos utilizados dependen del tipo de modelo a utilizar, pero principalmente se consideran 2 aspectos:

- La topografía, la cual mediante el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) se tiene al libre acceso al continuo de elevaciones mexicano (CEM) para el país,
- Los coeficientes de rugosidad que también podrían ser establecidos a partir de un código clasificador de imágenes satelitales del Landsat por ejemplo que son de libre acceso, dando así su bajo costo.

A continuación entraremos más a detalle en algunos de los fenómenos principales a tratar con nuestro modelo hidráulico/numérico del IPICYT denominado MHIPICYT. Este modelo se enfoca principalmente en la propagación de frentes de agua abruptos.

### Boras

Una bora también conocida como el macareo u ola de marea es un fenómeno que se origina durante las mayores mareas, esta consiste en una onda que se propaga por el caudal de un río o estuario en sentido contrario a su flujo natural, se presentan en diversos lugares del mundo y además de ser un espectáculo sin igual, juega un papel importante en el transporte de sedimentos. Algunos ejemplos de lugares donde se presentan son: el Río Amazonas en Brasil y el Río Qiantang. Las olas en el Río Amazonas alcanzan una altura de hasta 4 metros y velocidad de propagación de hasta 25km/h. La bora del Río Qiantang, China donde además de ser ya una atracción turística que año con año acumula gran cantidad de visitantes también provoca daños, por lo regular queda en daños económicos menores, pero en ocasiones su magnitud es tal que en varias ocasiones ha llegado a cobrar vidas humanas (figuras I y II). Esto ha llevado a realizar trabajos de simulación numérica de estos fenómenos, como es el caso de Cunhong PAN (Pan, et al 2003) donde basándose en las ecuaciones de Saint-Venant, han logrado conocer características del fenómeno más a detalle que debido a la complejidad técnica para poder obtener datos reales del fenómeno hace del modelado numérico una de las formas más seguras y certeras de estudiarlos.



Figura I.- Fotografía de la bora en el río de Qiantang, China, el 31 de agosto del 2015. Obtenida de Daily-Mail 2015.



Figura II.- En estas fotografías se muestra la bora en el Río Qiantang, China el 24 de septiembre de 2010, de lado izquierdo una vista panorámica del fenómeno y del derecho un acercamiento al frente de onda de una altura de 1.9 metros. Obtenida de <u>http://en.people.cn/90001/98649/7150094.html</u>

## Tsunamis

Un tsunami es un fenómeno hidrológico repentino, rápido y desastroso que es difícil de predecir. Pese a esto en la actualidad ya contamos con herramientas que nos permitan leer los indicios de un posible tsunami, desde la lectura de otros fenómenos naturales que suelen causarlos como son los sismos y/o las erupciones volcánicas, hasta el monitoreo de posibles ondas en formación en el océano gracias a los sistemas satelitales de la actualidad. Otros de los posibles causantes de un tsunami son los impactos de meteorito, explosiones bajo el agua (experimentos nucleares) y deslizamientos del terreno (Dolgopolova, 2013). El peligro que representan los tsunamis hace que sea de gran utilidad predecir los posibles daños que causan como es el caso del tsunami generado por el temblor ocurrido el 11 de marzo de 2011 en Japón que afectó gravemente la costa de Tohoku (figuras III y IV). Hiroshi Kanayama (Kanayama & Dan, 2013) presenta los resultados de una simulación numérica que serán útiles para establecer medidas preventivas así como planes de evacuación efectivos para este tipo de desastres. Estos investigadores, derivan las ecuaciones de aguas someras de las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) y aplican el método de elemento finito para llegar a la simulación del fenómeno.



Figura III.- En esta figura se muestra las zonas afectadas por el tsunami de 2011 en Japón y los niveles que la inundación alcanzo en cada uno de estos. Obtenida de Coastal 2013.



Figura IV- Fotografía del arribo del Tsunami del 2011 a la Ciudad de Miyako tomada por un oficial de la ciudad. Obtenida de Theatlantic 2016.

### Presas

Las presas juegan un rol importante en nuestras comunidades en los ámbitos económicos y sociales. Una presa es una barrera del cauce de un rio, y aunque son consideradas de bajo riesgo, los casos en los que llegan a representar peligro suelen ser a gran escala. El 15 de septiembre de 1933 en la capital del estado de San Luis Potosí se suscitó una gran catástrofe, la presa de la constancia mejor conocida desde esos tiempos como la represa o contra-presa no logro soportar el agua que captaba del desborde de la presa de San José (presa de mayor capacidad y más nueva río arriba), lo cual llevo a la ruptura de la cortina de la presa. En la actualidad aún podemos apreciar a unos 9 km de distancia en los edificios históricos de la zona centro de la capital los clavos que marcaron los niveles de agua alcanzados por la inundación (figuras V y VI). Esto nos lleva a percatarnos de la importancia de generar trabajos en los cuales se puedan estimar los alcances de una catástrofe actual como por ejemplo con la presa San José que fue coprotagonista en una catástrofe, ahora siendo una presa de más de 100 años de antigüedad y de mayor capacidad que la presa la constancia que reventó en 1933 causando tantos daños y encontrándose en posiciones geográficas muy similares dejan totalmente vulnerable a la ciudad de San Luis Potosí en caso de un siniestro. En el trabajo de Cuiyun Cheng (Cheng, et al., 2011), realizaron un trabajo de simulación sobre el supuesto de que la presa de Huaxi en el suroeste de China, con el objetivo de verificar si los planes de evacuación actuales serian o no eficientes en caso de siniestro. Ellos hicieron uso del modelo MIKE21 y encontraron que los

tiempos de arribo del agua a algunas de las comunidades por evacuar son menores que el tiempo previsto para la evacuación, por lo cual proponen modificaciones a estos planes de emergencia.



Figura V.- Algunos de los daños de la inundación en San Luis Potosí por el rompimiento de la contra-presa en el año de 1933fuente: <u>http://rinconar.blogspot.mx/2011/03/la-inundacion-del-33-en-san-luis-potosi html</u> Figura VI.- Fotografía de uno de los clavos marca de la inundación en la base de una pilastra de la Casa de Moneda

## 1.1.-Antecedentes

Los retos de la simulación numérica van desde la formulación teórica de las leyes físicas que rigen el fenómeno, hasta la correcta representación de los procesos del fluido y demás consideraciones practicas con las que uno debe de lidiar durante la programación para alcanzar la estabilidad numérica y la consistencia física de los resultados. Todo esto siempre considerando el principio de parsimonia que se basa en tres puntos, (i) obtener una representación realista del proceso físico, (ii) estar a la altura del desempeño de modelos más complejos y (iii) proporcionando las respuestas correctas por las razones correctas (Warmink, et al., 2015). Para alcanzar la parsimonia es necesario primero establecer si se usará la estructura de un modelo ya existente o si se generará una propia, si las ecuaciones serán de un modelo clásico ya establecido o se intentará implementar algo nuevo en este aspecto, en cualquiera de los dos casos mencionados anteriormente dependerá en buena parte de la información con que se alimentará el modelo, ya sea verificar que se encuentre disponible o asegurar que se tienen los medios para generarla. Otro punto de importancia en las ecuaciones a utilizar es si será de 1, 2 o 3 dimensiones, aunque aparentemente un modelo tridimensional siempre es el mejor por el hecho de que los fluidos son fenómenos en 3 dimensiones, los modelos 3-D presentan varias limitantes, como la estabilidad numérica, su difícil calibración, la dificultad en representar con precisión el dominio espacial, las incertidumbres y múltiples estados para la parametrización del modelo. Estas limitantes, llevan a que estos modelos suelan requerir un gasto mucho mayor de recursos computacionales, mientras que un modelo bidimensional o incluso unidimensional pueden entregar resultados muy acertados con una eficiencia computacional mucho mayor que los modelos en 3-D, esto va estrechamente relacionado con el fenómeno que se estudia, ya que encontraremos fenómenos cuya complejidad física requiere forzosamente un análisis tridimensional, u otros donde con un modelo bidimensional o incluso unidimensional, será suficiente para analizar de forma precisa aquellos fenómenos donde se pueden dejar de lado ciertas componentes por medio de técnicas de promediado por ejemplo.

En la actualidad existe una gran oferta en el mercado de software capaz de simular inundaciones y demás fenómenos hidrológicos, algunos ejemplos de estos serían los siguientes GUAD-2D (INCLAM SA, 1999), DAMBRK (George & Nair, 2015), Flow-3D (Amblard, et al., 2015), TELEMAC-2D and 3D, LISFLOOD-FP, HEC-RAS ("ManualBasico\_HEC-RAS313\_HEC-GeoRAS311\_Espanol.pdf.crdownload," 2007.), MIKE11 ("Mike 11," 2003), entre muchos otros. Dentro de estos podemos encontrar desde modelos unidimensionales (1-D), bidimensionales (2-D) hasta tridimensionales (3-D) la elección del modelo adecuado depende del objetivo del estudio así como de los recursos computacionales, aunque actualmente podemos encontrar día con día computadoras con mayor rendimiento de procesamiento, nos toparemos con el hecho de que muchos de los software de computación de dinámica de fluidos (CFD por sus siglas en inglés) aún se basan en modelos bidimensionales debido a la eficiencia computacional y aceptable grado de precisión que ofrecen estos modelos.

La mayoría de los modelos encontrados se basan en uno de los siguientes 3 modelos físicos de la hidráulica:

- las ecuaciones de Navier-Stokes con el promediado de Reynolds (RANS por sus siglas en inglés) (3-D),
- Saint-Venant (SV) (2-D),
- aproximaciones de las ecuaciones de Saint-Venant (ASV) (1-D).

Estos modelos a su vez pueden encontrar su deducción desde las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) (Warmink et al., 2015). Las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D, son las que consideran todos los aspectos físicos involucrados en la hidráulica a una escala tan precisa como lo es la escala molecular, pudiendo considerarse así como las ecuaciones perfectas, el problema es que la complejidad que tiene lleva a que los modelos numéricos basados en estas ecuaciones sean menos viables debido a la alta resolución que sería necesaria para poder simular la turbulencia molecular que describen, alcanzando así tiempos y distancias más cortos en las simulaciones (figura VII), convirtiéndose en una mala opción cuando se trata de simular fluidos turbulentos sobre todo. Cuando se busca más estabilidad y libertad en la resolución de la simulación se recurre a las ecuaciones de RANS que son las

ecuaciones promediadas de Reynolds. Este método se basa en que el fluido turbulento se puede analizar estadísticamente partiendo de que las fluctuaciones de la velocidad son pseudo-aleatorias en la turbulencia. Su forma final es muy similar a las ecuaciones de NS, con la diferencia de que en esta contamos con un coeficiente de difusión turbulenta que es de varios órdenes mayor al coeficiente de viscosidad molecular que encontramos en las ecuaciones de NS. Lo anterior, nos permite simular sin la necesidad de tener demasiada resolución en nuestro dominio, pero acarreando la desventaja que este coeficiente depende del flujo y no del fluido como el de NS. Las implicaciones de esto es que en las ecuaciones de NS teníamos un valor determinado para agua, aire o el fluido en específico a simular. Mientras que en RANS debemos buscar el valor del coeficiente de viscosidad de Eddy que nos ayude a alcanzar la estabilidad numérica y certeza física del sistema tratando de mantenerse dentro del rango ya conocido en la literatura. En la figura VII se aprecia que de manera general los modelos de RANS suelen presentar resultados en escalas mayores de tiempo y distancia comparado con los de NS. Una ventaja de este tipo de modelos 3-D es que pueden simular fenómenos no hidrostáticos como lo hicieron en el trabajo de Leupi & Altinakar (2005) en el cual hacen la simulación y validación de su modelo simulando escenarios de ríos con una topografía compleja, en este caso simulan una curva de 193° y la comparan con experimentos de laboratorio, obteniendo resultados muy semejantes a estos.

Otra aproximación que suele tener mayor aplicación debido a su utilidad en el análisis de fenómenos principalmente bidimensionales sería la de Saint-Venant, la versión unidimensional se obtiene de integrar las ecuaciones de RANS y de continuidad en la sección transversal del flujo, mientras que las bidimensionales se obtiene de promediar estas mismas ecuaciones en la dirección normal al fondo, por lo cual en ambas se pierde información sobre la estructura vertical del fluido. La gran cantidad de fenómenos hidrológicos en los cuales las componentes horizontales son las dominantes nos lleva a que este tipo de aproximaciones bidimensionales o incluso unidimensionales suelen ser el método más efectivo considerando la relación entre complejidad del modelo y los resultados obtenidos.



Figura VII.-Recopilación de resultados alcanzados con diversos modelos de simulación numérica clasificados según las ecuaciones en las que se basan. Obtenida de (Warmink et al., 2015)

En el trabajo de Kamboh et al. (2015) realizan un experimento académico basándose en las ecuaciones de SV y utilizando el método de diferencias finitas para su discretización el cual programan en MATLAB, presentan un canal recto de 40m de ancho, 300m de largo altura de 10 m, con una perturbación inicial de 10m de altura con su máximo al centro del inicio del canal y va decreciendo en los ejes x y y, consideran una superficie plana completamente horizontal (sin pendiente en ninguna dirección) y con una fuerza de fricción predeterminada, obteniendo como resultado la propagación de una onda (figura VIII).



el trabajo de (Kamboh, n.d.)

Otro trabajo realizado con las ecuaciones de SV es el de Krzyk et al. (2012) donde utilizan el modelo PCFLOW2D, este es un trabajo más avanzado en el cual se trata de replicar el caso de rompimiento de una presa que se encuentra en el cauce del Río Drava. Realizan una comparación entre los resultados obtenidos por numéricamente contra los de un modelo a escala de 1:200 de la zona. Utilizaron un coeficiente de viscosidad dinámico que se va calculando a cada iteración, aunque si especifican que para algunos casos es posible utilizar algún valor fijo para toda la simulación. Para determinar la fricción recurrieron a la fórmula de Rickenmann dándole una forma similar a la de Manning. En la simulación numérica obtuvieron resultados comparables con los obtenidos en los experimentos a escala (figura IX).



Figura IX.- Muestra una comparación entre los datos medidos en el experimento a escala con los simulados en el trabajo de (Krzyk et al., 2012)

En el trabajo de López et al. (2009) se realiza un análisis sobre las ecuaciones de SV en 2D y su aplicación por el método de volúmenes finitos, considerando la fórmula de Manning para el efecto de la fricción con el fondo, todo esto aplicado a través del software GUADFlow-2D. Se muestran los resultados de 3 experimentos, uno es un canal recto con un borde en el fondo para ilustrar como influye un obstáculo en el fondo de un canal, el segundo ejemplo que plantean es el de una compuerta con abertura el cual se muestra en la figura X durante el cual logran satisfacer el principio de conservación de masa (el volumen que entra es igual al que sale más el que permanece). Por ultimo presentan un experimento en el cual se pretende conocer cómo se desborda un río sobre una ciudad o sobre sus márgenes con datos de terreno reales, con los resultados de este experimento logran visualizar las zonas que serán afectadas por la inundación y su alcance a 1 hora simulada. Con estos resultados muestran lo versátil de las ecuaciones de SV y su potencial en una correcta implementación como en el modelo GUADFlow-2D.



Figura X.- Del lado izquierdo se muestra el mayado y diagrama general del experimento, mientras que del lado derecho se muestras los resultados después de 11 segundos de simulación. Obtenida de (Jorge et al., 2009).

En México estamos propensos a las inundaciones, el hecho de estar rodeados de dos océanos, contar con zonas de abundantes precipitaciones fluviales, una gran numero de presas ya sea para satisfacer la demanda de energía eléctrica o abastecer de agua a las comunidades, y a todo esto sumarle la pobre planeación del crecimiento de las ciudades que en ocasiones no existe, nos hace de vital importancia aplicar simulaciones para poder conocer los alcances de estos fenómenos y así poder planear posibles soluciones. Alavez et al. (2007) nos presenta la simulación bidimensional de una inundación en la ciudad de Villahermosa Tabasco, para su trabajo recurrieron a dos softwares de simulación, el GUADFlow-2D e IBER, para alimentar las simulaciones en ambos softwares necesitaron datos de la topografía, morfología de los ríos, caudales, entre otros, estos fueron adquiridos de las dependencias gubernamentales INEGI v CONAGUA, así como de trabajo de campo. Ambos programas se basan en las ecuaciones de SV considerando la fórmula de Manning para la fricción, en sus resultados hacen una comparación entre datos reales de la inundación que azoto a la ciudad de Villahermosa en el año 2007 obtenidos de CONAGUA y los comparan con los obtenidos en las simulaciones con IBER y GUAD-2D como se muestra en la tabla 1, y llegando por fin a un mapa de riesgo de la ciudad de Villahermosa (figura XI).

Octubre			GUAD-2D			IBE	ER	
2007	CONAGUA				C. Sali	da Libre	C. Niv	el Dado
			Simul.	Error %	Simul.	Error %	Simul.	Error %
día 30	Nivel	6.77	7.75	14.48	6.47	4.43	6.94	2.51
	Caudal	1 585	-	-	954	39.81	504	68.20
día 31	Nivel	7.15	9.02	26.15	6.90	3.50	7.37	3.08
	Caudal	1618	-		1 165	28.00	672	58.47

Tabla I.- Comparativa de los datos reales de la inundación en la ciudad de Villahermosa adquiridos de CONAGUA, con los adquiridos por las simulaciones en los softwares GUAD-2D e IBER. Obtenida de (Alavez et al., 2007).



Figura XI.- Mapa de riesgo por inundación en la ciudad de Villahermosa. Obtenida de (Alavez et al., 2007).

Las ecuaciones más simplificadas que se utilizan son las ASV, que son modelos unidimensionales, como principales simplificaciones de las ecuaciones de SV tenemos los modelos de onda difusiva (diffusive wave), onda cinemática (kinematic wave), y onda dinámica (dynamic wave).

En el trabajo de Gasiorowski (2013) se logra presentar la solución 2D de la ecuación de onda difusiva al reducir el problema bidimensional en una secuencia de problemas unidimensionales, se utiliza la fórmula de Manning también para la

componente de fricción como en otros de los modelos mencionados anteriormente, pero la forma final de las ecuaciones tiene la ventaja de poder trabajar en celdas con agua o secas sin problema, dándole así una buena ventaja sobre otros modelos. En su trabajo presentan los resultados de un experimento que se basa en una superficie seca con pendiente en contra de la entrada del fluido y un obstáculo en forma de cono al centro del área a simular. En sus resultados (figura XII) se logran apreciar los cambios de dirección del flujo respondiendo muy bien a las condiciones de llenado y vaciado, así como a la interacción con el obstáculo.



Figura XII.- Se muestran los resultados de la simulación en 4 distintos tiempos de simulación, el primero de 1100s con entrada de fluido y en sus primeros contactos con el obstáculo, el segundo a 5500s donde ya está lleno y comienza el drenado del fluido, el tercero a 11000s con el obstáculo comenzando a salir del agua y por ultimo a 30000s donde ya se ha dejado de extraer el agua. Obtenida de (Gąsiorowski, 2013).

En el trabajo de Jung et al. (2015) se presenta un trabajo de simulación sobre el control de inundaciones en la zona aledaña al rio NamHam en Korea considerando un área de 12373  $km^2$  donde se encuentran 4 presas, para la simulación se utiliza el modelo KIMSTORM que se basa en la aproximación de SV conocida como onda cinemática y hacen comparación con datos reales de 6 eventos de tormentas reales, un ejemplo de sus resultados se muestra en la figura XIII donde se aprecia un buen apego de los datos de descarga simulados con los observados.



Figura XIII.- Dos de las 6 simulaciones de descarga en distintas zonas comparando con los datos reales del 23 de julio del 2008 (Jung et al., 2015).

En el trabajo de Mirzazadeh & Akbari (2012) se realiza un análisis sobre la implementación de del modelo de onda dinámica que es otra de las ASV que podemos encontrar, se utilizan dos diferentes esquemas para su implementación (i) el implícito de Preissmann y el explícito de Mac-Cormak, ambos recurriendo al método de diferencias finitas, para poner a prueba los resultados de las simulaciones con cada uno de los esquemas se hizo la comparación con los resultados obtenidos con el software Mike11. Como resultados llegaron a que ambas soluciones se aproximan bastante a las de Mike11 recomiendan más las del esquema implícito de Preissmann, que aunque presenta la desventaja de tener que manejar pasos de tiempo más pequeños para alcanzar la estabilidad numérica lo cual implica mayor tiempo de computo arroja resultados más certeros que el esquema explícito de Mac-Cormak.

#### 1.2 Justificación/motivación del trabajo

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo numérico propio llamado Modelo Hidráulico IPICYT (MHIPICYT) el cual se basa en las ecuaciones bidimensionales de Saint Venant utilizando el método de diferencias finitas para su discretización. El código es generado en lenguaje FORTRAN 95 y las visualizaciones de los resultados en MATLAB. Como se expuso anteriormente la necesidad de estos modelos y sus grandes posibilidades hacen de gran importancia su existencia, ahora, ¿porque generar un modelo propio si ya existen tantas ofertas en el marcado?. Primero que nada es importante dejar de depender del software comercial si se tiene la capacidad de comenzar a generar uno de acceso libre. El software libre permitirá que la comunidad científica tenga total acceso al código y pueda adaptarlo completamente a las características específicas de sus casos de estudio. El código propuesto ofrece la opción de incrementar la robustez mediante la implementación de módulos que complementen el modelo así como el perfeccionamiento de la base de la simulación que se planteó en este trabajo. Se seleccionó un modelo bidimensional por la gran gama de fenómenos que pueden ser simulados con estos sin necesidad de sacrificar la eficiencia computacional como se haría con uno 3-D para obtener resultados similares, además como ya se mostraba en la figura VII, las ecuaciones de SV son las que en la actualidad muestran mayor uso y alcance en tiempos y distancias de simulación sin la necesidad de reducir el trabajo a una sola dimensión, lo cual reduciría las aplicaciones del modelo. De momento se mostraran solo experimentos académicos que intentan asemejar algunas de las propiedades características de fenómenos hidrológicos como las inundaciones por rompimiento de presas, tsunamis, o propagación de boras.

### 1.3.-Objetivos

### Objetivo general

+ Elaborar un modelo hidráulico-numérico que permita simular realísticamente fenómenos extremos como el rompimiento de presas, avenidas de agua, tsunamis, boras y olas de tormenta, rompimiento de diques.

### Objetivo específicos

+ Probar el modelo mediante simulaciones académicas o ideales.

+ Validar el modelo comparando el comportamiento dinámico de las simulaciones con casos reales como velocidades de inundación.

+ Una de las finalidades principales es que México cuente con un modelo hidráulico propio, pues todos estos fenómenos ocurren en nuestro país.

+ Probar el buen funcionamiento del modelo aplicándolo a escenarios de prueba como indicativos del funcionamiento y alcance del modelo propuesto.

+ Tener una herramienta poderosa para la investigación futura de fenómenos extremos.

## 2.-Modelo

En este capítulo se desarrolla cada uno de los elementos necesarios para la creación del modelo, partiendo de las ecuaciones que describen el fenómeno físico, continuando con el método de discretización (diferencias finitas), hasta los aspectos de más detalle como los métodos para determinar las ecuaciones en las condiciones de frontera y criterios para verificar la estabilidad numérica.

### 2.1.-Ecuaciones físicas

El modelo matemático utilizado para la simulación está basado en las ecuaciones bidimensionales de Saint-Venant, las cuales describen el comportamiento de la superficie del fluido permitiéndonos así calcular tres parámetros principales: la altura z (profundidad del fluido); y los componentes de velocidad horizontal u y v, en direcciones x y y respectivamente. Para poder utilizar este modelo debemos de considerar una presión hidrostática y pendientes del terreno no tan pronunciadas. Estas ecuaciones se deducen de las ecuaciones de RANS en dos dimensiones para fluidos incompresibles. En (1) y (2) tenemos las ecuaciones de momentum incluyendo el efecto de la turbulencia, la fricción y pendiente del terreno, y en (3) tenemos la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial z}{\partial x} + A_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \left( S_{0x} - S_{fx} \right)$$
(1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial z}{\partial y} + A_H \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \left( S_{0y} - S_{fy} \right)$$
(2)

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial uz}{\partial x} + \frac{\partial vz}{\partial y} = 0$$
(3)

Donde *u* y *v* son las componentes horizontales de la velocidad en los ejes *x* y *y* respectivmente, *t* es el tiempo, *g* es la constante de la aceleración de la gravedad  $(g = 9.8 \frac{m}{s^2})$ ,  $A_H$  es la constante de viscosidad, *z* es la profundidad del fluido  $S_{0x}$  y  $S_{0y}$  son las componentes de las pendientes en *x* y *y*, por ultimo  $S_{fx}$  y  $S_{fy}$  son los componentes de la fricción.

Multiplicando la ecuación (1) por la profundidad z obtenemos la ecuación (4)

$$z\frac{\partial u}{\partial t} + uz\frac{\partial u}{\partial x} + vz\frac{\partial u}{\partial y} = -gz\frac{\partial z}{\partial x} + A_H z\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + gz\left(S_{0x} - S_{fx}\right)$$
(4)

Multiplicando la ecuación (3) por la componente de la velocidad u obtenemos la ecuación (5)

$$u\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial uz}{\partial x} + u\frac{\partial vz}{\partial y} = 0$$
(5)

Sumando las ecuaciones (4) y (5)

$$z\frac{\partial u}{\partial t} + uz\frac{\partial u}{\partial x} + vz\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial uz}{\partial x} + u\frac{\partial vz}{\partial y} = -gz\frac{\partial z}{\partial x} + A_H z\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + gz(S_{0x} - S_{fx})$$

Simplificando llegamos a la ecuación (6)

$$\frac{\partial uz}{\partial t} + \frac{\partial u^2 z}{\partial x} + \frac{\partial uvz}{\partial y} = -\frac{g}{2}\frac{\partial z^2}{\partial x} + A_H z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + gz \left(S_{0x} - S_{fx}\right)$$

$$\frac{\partial uz}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 z + \frac{gz^2}{2} \right) + \frac{\partial uvz}{\partial y} = A_H z \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + gz \left( S_{0x} - S_{fx} \right)$$
(6)

Multiplicando la ecuación (2) por z obtenemos la ecuación (7)

$$z\frac{\partial v}{\partial t} + uz\frac{\partial v}{\partial x} + vz\frac{\partial v}{\partial y} = -gz\frac{\partial z}{\partial y} + zA_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + gz\left(S_{0y} - S_{fy}\right)$$
(7)

Multiplicando la ecuación (3) por la componente de la velocidad v obtenemos la ecuación (8)

$$v\frac{\partial z}{\partial t} + v\frac{\partial uz}{\partial x} + v\frac{\partial vz}{\partial y} = 0$$
(8)

Sumando las ecuaciones (7) y (8)

$$z\frac{\partial v}{\partial t} + uz\frac{\partial v}{\partial x} + vz\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial z}{\partial t} + v\frac{\partial uz}{\partial x} + v\frac{\partial vz}{\partial y} = -gz\frac{\partial z}{\partial y} + zA_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + gz(S_{0y} - S_{fy})$$

Simplificando llegamos a la ecuación (9)

$$\frac{\partial vz}{\partial t} + \frac{\partial uvz}{\partial x} + \frac{\partial v^2 z}{\partial y} = -gz\frac{\partial z}{\partial y} + zA_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + gz(S_{0y} - S_{fy})$$

$$\frac{\partial vz}{\partial t} + \frac{\partial uvz}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 z + \frac{gz^2}{2} \right) = z A_H \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + gz \left( S_{0y} - S_{fy} \right)$$
(9)

Considerando

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \ S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}, \qquad S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{\frac{4}{z^{\frac{4}{3}}}}, \ S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{\frac{4}{z^{\frac{4}{3}}}}$$

Donde  $S_{0x}$  y  $S_{0y}$  corresponden a la pendiente del terreno en los ejes x y y respectivamente, dando así que  $gz_{0x}$  junto con  $gzS_{0y}$  nos representen la aceleración del fluido debido a la componente de la gravedad paralela al terreno, pasando así las ecuaciones al plano de la pendiente,  $S_{fx}$  y  $S_{fy}$  son la fórmula de Manning para la fricción con el terreno donde n es el coeficiente fricción de Manning. Siendo así (10), (11) y (12) las ecuaciones de Saint-Venant como se usan en el modelo PCFLOW2D (Krzyk et al., 2012)

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial uz}{\partial x} + \frac{\partial vz}{\partial y} = 0$$
(10)

$$\frac{\partial uz}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 z + \frac{gz^2}{2} \right) + \frac{\partial uvz}{\partial y} = zA_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - gz \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{n^2 u\sqrt{u^2 + v^2}}{z^{\frac{4}{3}}} \right)$$
(11)

$$\frac{\partial vz}{\partial t} + \frac{\partial uvz}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 z + \frac{gz^2}{2} \right) = zA_H \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - gz \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{\frac{4}{z^{\frac{4}{3}}}} \right)$$
(12)

### 2.2.- Método de diferencias finitas

Para la discretización de las ecuaciones se utilizó el método de diferencias finitas, el cual se puede deducir a partir de la definición de la serie de Taylor

$$f(x) = f(x_i) + \frac{x - x_i}{1!} \left[ \frac{df}{dx} \right]_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_{x_i} + \cdots$$

Considerando  $x = x_i + \Delta x$  y cortando en el término de segundo orden

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f^{I}(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f^{II}(x)$$
(13)

Considerando  $x = x_i - \Delta x$  y cortando en el término de segundo orden

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f^{I}(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f^{II}(x)$$
(14)

Restando la ecuación (14) de la (13) obtenemos la ecuación (15)

$$(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f^{I}(x)\Delta x$$
(15)

Despejando  $f^{I}(x)$  de las ecuaciones (13), (14) y (15) obtenemos 3 formas de aproximar las derivadas de primer orden

Paso adelante

$$f^{I}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
(16)

Paso atrás

$$f^{I}(x) = \frac{-f(x - \Delta x) + f(x)}{\Delta x}$$
(17)

Central

$$f^{I}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$
(18)

Para la segunda derivada sumamos las ecuaciones (13) y (14) obteniendo

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + f^{II}(x)\Delta x^2$$

De donde podemos despejar  $f^{II}(x)$ 

$$f^{II}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$
(19)

### 2.3.- Discretización

Ahora que ya tenemos las ecuaciones y un método para discretizarlas procedemos a simplificar las ecuaciones, primero tenemos la ecuación de conservación de masa (10) quedando de la forma de la ecuación (20)

$$\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
(20)

Ahora la ecuación de conservación de momentum en el eje x (11) quedando de la forma de la ecuación (21)

$$u\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial u}{\partial t} + u^{2}\frac{\partial z}{\partial x} + 2zu\frac{\partial u}{\partial x} + gz\frac{\partial z}{\partial x} + vz\frac{\partial u}{\partial y} + uz\frac{\partial v}{\partial y} + uv\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= A_{H}z\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}\right) - gz\left(\frac{\partial z_{b}}{\partial x} + \frac{n^{2}u\sqrt{u^{2} + v^{2}}}{z^{\frac{4}{3}}}\right)$$
(21)

Y por último la ecuación de conservación de momentum en el eje y (12) quedando de la forma de la ecuación (22)

$$v\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial v}{\partial t} + vz\frac{\partial u}{\partial x} + uz\frac{\partial v}{\partial x} + uv\frac{\partial z}{\partial x} + v^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2zv\frac{\partial v}{\partial y} + gz\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= zA_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - gz\left(\frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{n^2v\sqrt{u^2 + v^2}}{z^{\frac{4}{3}}}\right)$$
(22)

Considerando las ecuaciones (16) y (19) podemos obtener la discretización de cada uno de los elementos

		Variable respecto a la que se deriva								
	Primeras derivadas	t	x	У						
C o m	u	$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$	$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta x}$	$\frac{\partial u}{\partial y} \cong \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta y}$						
p o n e	Ζ	$\frac{\partial z}{\partial t} \cong \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^n}{\Delta t}$	$\frac{\partial z}{\partial x} \cong \frac{z_{i,j+1}^n - z_{i,j-1}^n}{2\Delta x}$	$\frac{\partial z}{\partial y} \cong \frac{z_{i+1,j}^n - z_{i-1,j}^n}{2\Delta y}$						
n t e	ν	$\frac{\partial v}{\partial t} \cong \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n}}{\Delta t}$	$\frac{\partial v}{\partial x} \cong \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta x}$	$\frac{\partial v}{\partial y} \cong \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta y}$						

Tabla II.- Método de discretización para las derivadas de primer orden.

		Variable respecto a la que se deriva	
	Segundas derivadas	x	у
C o m p o n e n t e	u	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta x^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta y^2}$
	ν	$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cong \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta x^2}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \cong \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta y^2}$

Tabla III.- Método de discretización para las derivadas de segundo orden.

En donde los sub-índices i y j representan la posición en las matrices correspondientes a los ejes x y y respectivamente. El superíndice n nos indica la evolución en el tiempo, siendo n el estado actual y n + 1 el nuevo estado del sistema.

Sustituyendo en las partes correspondientes de las ecuaciones (20), (21) y (22) y despejando los elementos de interés que son  $z_{i,j}^{n+1}$ ,  $u_{i,j}^{n+1}$  y  $v_{i,j}^{n+1}$ 

$$\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^{n}}{\Delta t} + z_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + u_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j}^{n} \frac{z_{i+1,j}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} = 0$$

$$z_{i,j}^{n+1} = z_{i,j}^{n} - \Delta t \left( z_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + u_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j}^{n} \frac{z_{i+1,j}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \right)$$

$$(23)$$

$$u\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial u}{\partial t} + u^{2}\frac{\partial z}{\partial x} + 2zu\frac{\partial u}{\partial x} + gz\frac{\partial z}{\partial x} + vz\frac{\partial u}{\partial y} + uz\frac{\partial v}{\partial y} + uv\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= A_{H}z\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}\right) - gz\left(\frac{\partial z_{b}}{\partial x} + \frac{n^{2}u\sqrt{u^{2} + v^{2}}}{z^{\frac{4}{3}}}\right)$$

$$\begin{split} u_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^{n}}{\Delta t} + z_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} + (u_{i,j}^{n})^{2} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + 2z_{i,j}^{n} u_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} \\ &+ g z_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + u_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \\ &+ u_{i,j}^{n} v_{i,j}^{n} \frac{z_{i+1,j}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \\ &= A_{H} z \left( \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta x^{2}} + \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta y^{2}} \right) \\ &- g z_{i,j}^{n} \left( \frac{\partial z_{b}}{\partial x} + \frac{n^{2} u_{i,j}^{n} \sqrt{u_{i,j}^{n}^{2} + v_{i,j}^{n}^{2}}}{z_{i,j}^{n}^{\frac{4}{3}}} \right) \end{split}$$

$$\begin{split} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t A_{H} z_{i,j}^{n}}{z_{i,j}^{n}} \left( \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta x^{2}} + \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta y^{2}} \right) \\ &- \Delta t g \left( \frac{\partial z_{b}}{\partial x} + \frac{n^{2} u_{i,j}^{n} \sqrt{u_{i,j}^{n-2} + v_{i,j}^{n-2}}}{z_{i,j}^{n} \frac{4}{3}} \right) \\ &- \frac{\Delta t}{z_{i,j}^{n}} \left( \left( u_{i,j}^{n} \right)^{2} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + 2z_{i,j}^{n} u_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + g z_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} \\ &+ v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + u_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + u_{i,j}^{n} v_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \\ &+ u_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^{n}}{\Delta t} \right) \end{split}$$
$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^{n} + \Delta t \left( A_{H} \left( \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta x^{2}} + \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta y^{2}} \right) \\ &- g \left( \frac{\partial z_{b}}{\partial x} + \frac{n^{2} u_{i,j}^{n} \sqrt{u_{i,j}^{n-2} + v_{i,j}^{n}}^{2}}{z_{i,j}^{n} \frac{4}{3}} \right) \\ &- \frac{1}{z_{i,j}^{n}} \left( \left( u_{i,j}^{n} \right)^{2} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + 2z_{i,j}^{n} u_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + g z_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} \\ &+ v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + u_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + u_{i,j}^{n} v_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \\ &+ u_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^{n}}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

$$(24)$$

$$v\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial v}{\partial t} + vz\frac{\partial u}{\partial x} + uz\frac{\partial v}{\partial x} + uv\frac{\partial z}{\partial x} + v^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2zv\frac{\partial v}{\partial y} + gz\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= zA_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - gz\left(\frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{n^2v\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}}\right)$$

$$\begin{split} v_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^{n}}{\Delta t} + z_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n}}{\Delta t} + v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + z_{i,j}^{n} u_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j+1}^{n} - v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x}}{2\Delta x} \\ &+ u_{i,j}^{n} v_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j}^{n}^{2} \frac{z_{i+1,j}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + 2v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \\ &+ g z_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \\ &= A_{H} z_{i,j}^{n} \left( \frac{v_{i,j+1}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i,j-1}^{n}}{\Delta x^{2}} + \frac{v_{i+1,j}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i-1,j}^{n}}{\Delta y^{2}} \right) \\ &- g z_{i,j}^{n} \left( \frac{\partial z_{b}}{\partial y} + \frac{n^{2} v_{i,j}^{n} \sqrt{u_{i,j}^{n}^{2} + v_{i,j}^{n}}}{z_{i,j}^{n}^{\frac{4}{3}}} \right) \end{split}$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{n+1} &= v_{i,j}^{n} + \Delta t \left( A_{H} \left( \frac{v_{i,j+1}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i,j-1}^{n}}{\Delta x^{2}} + \frac{v_{i+1,j}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i-1,j}^{n}}{\Delta y^{2}} \right) \right. \\ &- g \left( \frac{\partial z_{b}}{\partial y} + \frac{n^{2} v_{i,j}^{n} \sqrt{u_{i,j}^{n}^{2} + v_{i,j}^{n}^{2}}}{z_{i,j}^{n}^{\frac{4}{3}}} \right) \\ &- \frac{1}{z_{i,j}^{n}} \left( v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + z_{i,j}^{n} u_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j+1}^{n} - v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} \right. \\ &+ u_{i,j}^{n} v_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x} + v_{i,j}^{n}^{2} \frac{z_{i+1,j}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + 2v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} \\ &+ g z_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y} + v_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^{n}}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

$$(25)$$

Con el fin de simplificar la programación en FORTRAN de las ecuaciones (23), (24) y (25) definimos los siguientes términos

$$A_{1} = z_{i,j}^{n} A_{H} \left( \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta x^{2}} \right)$$

$$A_{2} = z_{i,j}^{n} A_{H} \left( \frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{\Delta y^{2}} \right)$$

$$A_{3} = -g z_{i,j}^{n} \left( \frac{\partial z_{b}}{\partial x} \right)$$

$$A_{4} = -g z_{i,j}^{n} \left( \frac{n^{2} u_{i,j}^{n} \sqrt{u_{i,j}^{n}^{2} + v_{i,j}^{n}^{2}}}{z_{i,j}^{n}^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$A_{5} = -\left(u_{i,j}^{n}\right)^{2} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$A_{6} = -2 z_{i,j}^{n} u_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$A_{7} = -g z_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$A_{8} = -v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{u_{i+1,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y}$$

$$A_{9} = -u_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y}$$

$$A_{10} = -u_{i,j}^{n} v_{i,j}^{n} \frac{z_{i+1,j}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y}$$

$$A_{11} = -u_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

 $u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{z_{i,j}^n} \quad (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11})$ 

$$B_{1} = A_{H} z_{i,j}^{n} \left( \frac{v_{i,j+1}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i,j-1}^{n}}{\Delta x^{2}} \right)$$

$$B_{2} = A_{H} z_{i,j}^{n} \left( \frac{v_{i+1,j}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i-1,j}^{n}}{\Delta y^{2}} \right)$$

$$B_{3} = -g \left( \frac{\partial z_{b}}{\partial y} \right)$$

$$B_{4} = -g \left( \frac{n^{2} v_{i,j}^{n} \sqrt{u_{i,j}^{n}^{2} + v_{i,j}^{n}^{2}}}{z_{i,j}^{n}^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$B_{5} = -v_{i,j}^{n} z_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$B_{6} = -z_{i,j}^{n} u_{i,j}^{n} \frac{v_{i,j+1}^{n} - v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$B_{7} = -u_{i,j}^{n} v_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}$$

$$B_{8} = -v_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j}^{n} + 1 - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y}$$

$$B_{10} = -g z_{i,j}^{n} \frac{z_{i+1,j}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y}$$

$$B_{11} = -v_{i,j}^n \frac{z_{i,j}^{n+1} - z_{i,j}^n}{\Delta t}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{z_{i,j}^{n}} (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10} + B_{11})$$

$$C_{1} = z_{i,j}^{n} \frac{u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$C_{2} = u_{i,j}^{n} \frac{z_{i,j+1}^{n} - z_{i,j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$C_{3} = v_{i,j}^{n} \frac{z_{i+1,j}^{n} - z_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y}$$

$$C_{4} = z_{i,j}^{n} \frac{v_{i+1,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta y}$$

$$z_{i,j}^{n+1} = z_{i,j}^{n} - \Delta t (C_{1} + C_{2} + C_{3} + C_{4})$$

### 2.4.- Condiciones de frontera

En la discretización que se mostró previamente se utiliza solamente la aproximación de paso central para la primer derivada (ecuación 18) y la aproximación normal deducida por series de Taylor para las segundas derivadas (ecuación 19), en ambas se requiere conocer los valores de la celda previa y posterior en la dirección de la derivada y con respecto al dato que se está calculando. Aunque estas ecuaciones funcionan en la mayor parte del dominio nos topamos con la problemática de las fronteras, donde por ser las últimas filas y/o columnas de nuestro dominio ya no se cuenta con los elementos requeridos por las ecuaciones 18 ó 19 para poder realizar el cálculo de la simulación, por lo tanto se requiere hacer modificaciones específicas de las ecuaciones en estas posiciones en particular, para la aproximación de la primer derivada se puede recurrir al uso de las ecuaciones 16 ó 17 de paso adelante y atrás respectivamente, la problemática aparece cuando se llega a las derivadas de segundo orden ya que para estas no obtuvimos más que una opción de ecuaciones para su deducción, por lo cual para modificar la ecuación 19 y que así poder aplicarla en cada una de las fronteras se recurren a 3 distintos métodos: Slip, Non-Slip y Half-Slip.

#### 2.4.1.- Aproximación de Slip.

La aproximación de Slip es en la que suponemos que la interacción con la pared que confina nuestro fluido no provocara que reduzca su velocidad en la dirección paralela al muro, por lo cual la velocidad requerida para el cálculo de la celda que ya no existe se considera como igual a la de la celda en la que se está realizando el cálculo, dando como resultado que la velocidad en el punto entre las paredes es también igual a estas (figura XIV).



Figura XIV.- Descripción gráfica del método Slip.

Resultando así de la siguiente forma la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \quad \xrightarrow{u_{i-1,j}^n = u_{i,j}^n} \quad \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^n}{\Delta y^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y^2}$$

## 2.4.2.-Aproximación de Half-Slip

En la aproximación de Half-Slip se parte de la idea de que la pared si reducirá la velocidad del fluido pero solo de manera parcial, para lograr este resultado numéricamente se considera el valor de velocidad en la celda inexistente como igual a 0, dando así el efecto de que la velocidad del fluido en contacto con la pared es la mitad de la que encontramos en la celda sobre la que se realiza el cálculo (figura XV).



Figura XV.- Descripción gráfica del método Half-Slip.

Resultando así de la siguiente forma la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \quad \stackrel{u_{i-1,j}^n = 0}{\longrightarrow} \quad \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + 0}{\Delta y^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{\Delta y^2}$$

2.4.3.-Aproximacion de Non-Slip

En la aproximación de Non-Slip se considera que el muro frena totalmente el fluido en la capa limite que se encuentra en contacto, para poder simular esto numéricamente se considera que la velocidad en la celda inexistente es igual al negativo de la de la celda del cálculo, dando como resultado que en el punto medio entre la velocidad supuesta y la velocidad conocida se encuentre el valor de 0, logrando así asemejar a que la fricción con la pared freno totalmente el flujo.



Figura XVI.- Descripción gráfica del método Non-Slip.

Resultando así de la siguiente forma la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \quad \xrightarrow{u_{i-1,j}^n = -u_{i,j}^n} \quad \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 3u_{i,j}^n}{\Delta y^2}$$

## 2.5.- Condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)

Cuando trabajamos en un modelo de simulación numérica utilizando el método de diferencias finitas, nos percatamos al poco tiempo que si aumentamos el paso de tiempo mientras dejamos el tamaño de malla fijo, o si reducimos el tamaño de la malla mientras el paso de tiempo se mantiene fijo, eventualmente terminaremos por ver inestabilidad en nuestra simulación, una manera de tratar de controlar la relación entre estos dos elementos (tamaño de malla y paso de tiempo) es cumplir con la condición de Courant-Friedrichs-Levy también conocida como la condición de CFL (Cfl, n.d.) que nos muestra los rangos de estabilidad e inestabilidad como se aprecia en la figura XVII.



Figura XVII.- Se muestra a la izquierda el rango de solución con estabilidad numérica y a la derecha el de inestabilidad.

Y cuya forma matemática es la siguiente:

$$CFL \rightarrow \frac{|u|\Delta t}{\Delta x} \le 1, \qquad CFL \rightarrow \frac{|v|\Delta t}{\Delta y} \le 1$$

El hecho de que no se cumpla esta condición durante nuestra simulación nos indica que ya no contamos con estabilidad numérica y por ende nuestros resultados ya no serán confiables desde un aspecto físico, por otro lado el cumplirla no nos garantiza que nuestro modelo se mantendrá estable, pero al menos se puede usar como una herramienta para poder conocer las celdas más susceptibles a inestabilidad, con lo cual podemos detener la simulación y hacer ajustes en estas posiciones que no cumplen la condición de CFL.

### 2.6.-Diagrama de flujo

Tomando en consideración los elementos expuestos durante el capítulo 2 llegamos al siguiente diagrama de flujo (figura XVIII) que muestra a grandes rasgos la estructura principal de Modelo hidráulico IPICYT (MHIPICYT).



Figura XVIII.- Se muestra el diagrama de flujo de la estructura principal del MHIPICYT.

# 3.-Experimentos

En este trabajo se presentan 6 experimentos realizados con el MHIPICYT, la mayoría de ellos se basan en el esquema mostrado en la figura XIX, el cual consiste en un canal de 1.5 km de ancho por 15 km de largo con una superficie plana de pendiente variante según el experimento, los contornos paralelos al eje x son paredes de altura infinita que confinan el fluido, mientras que las dos paralelas al eje y nos representan la entrada y salida del fluido, la entrada posicionada en el lado izquierdo es donde se induce la perturbación inicial forzando un el gradiente de presión con alturas dadas según el fenómeno a simular. Se utiliza una malla a cuadros donde  $\Delta x = 30m$ ,  $\Delta y = 30m$ , el paso de tiempo es de , $\Delta t = 0.001 seg$ , un coeficiente de viscosidad turbulenta  $A_h = 200.0 \frac{m^2}{s}$ , constante de aceleración de la gravedad  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ ,  $\pi = 3.14159$ , se utiliza un coeficiente de Manning  $n = 0.017 \ s/m^{\frac{1}{3}}$ , se manejan matrices de 50x500 elementos. En todos los experimentos se inician todos los valores de velocidad u y v en todas las celdas con un valor de  $0.0 \ m/s$ .



Figura XIX.- Diagrama de la base de los experimentos.

## Experimento 1. (Bora)

En el primer experimento se tiene una pendiente en el terreno de -0.1 en *x* y 0 en *y* y se utiliza la función  $z = 3 * \sin\left(\pi * \frac{a}{60000}\right) + 1$  para inducir la perturbación en todas las filas de la primer columna (pared izquierda) teniendo así una amplitud máxima de 4 metros y mínima de 1 metro, siendo este mínimo el valor la altura inicial de todas las celdas, *a* es la variable representando las iteraciones teniendo en este experimento un domino de (1,30000), manteniendo su valor máximo una vez llegando a este, con lo cual se sostiene una altura en las condiciones iniciales de 4 metros por el resto de simulación.

Experimento 2. (Soliton)

En el segundo experimento se inicializa la altura en 1 metros y una pendiente en el terreno de -0.1 en x y 0 en y. Se utilizaron 3 funciones para inducir la perturbación, la primera es  $z_1 = 4 * \sin\left(\pi * \frac{a}{60000}\right) + 1$  donde *a* tiene un dominio de (1,30000) y corre dentro del primer minuto de simulación (cada 60000 iteraciones equivale a 1 minuto de simulación) con una amplitud máxima de 5m. La segunda función  $z_2 = 2.5 * \sin\left(\pi * \frac{a}{60000}\right) + 1$  donde *a* tiene un dominio de (1,30000) y corre en el segundo minuto de simulación con una amplitud máxima de 3.5 metros. Finalmente,  $z_3 = 1 * \sin\left(\pi * \frac{a}{60000}\right) + 1$  donde *a* tiene un dominio de (1,60000) y corre en el tercer minuto de simulación con una amplitud máxima de 2 metros, terminando con una altura de 1 metro manteniéndose por el resto de la simulación de manera que a partir de ese punto se mantiene igual la cantidad de fluido que ingresa y sale del sistema.

## Experimento 3. (Presa 1)

En el tercer experimento, la altura inicial de es 0.1 metros en todas las celdas con una pendiente en el terreno de -0.1 en *x* y 0 en *y*, una capa delgada para simular algo cercano a piso seco, la perturbación inicial no es en todo el ancho del canal, esta se enfoca al centro con un ancho de 270 metros (9 celdas). Este experimento consiste en una sola función para generar la perturbación,  $z_1 = \left(4 * \sin\left(\pi * \frac{a}{60000}\right) * \sin\left(\pi * \frac{i-20}{10}\right)\right) + 0.1$  donde *a* tiene un dominio de (1,30000) y corre dentro del primer minuto de simulación, mientras que *i* es la variable para la posición de filas, teniendo en la perturbación un rango de (21,29), después del primer minuto se mantiene una altura de 0.1m en todas las celdas de la primer columna.

## Experimento 4. (Presa 2)

En el cuarto experimento la altura inicial de es 0.1 metros en todas las celdas pero ahora con una pendiente menor de -0.05 en *x* y 0 en *y*, una capa delgada para simular algo cercano a piso seco. Al igual que el caso anterior, la perturbación inicial no es en todo el ancho del canal, esta se enfoca al centro con un ancho de 270m (9 celdas). Se generó la perturbación mediante la función  $z_1 = \left(4 * \sin\left(\pi * \frac{a}{120000}\right) * \sin\left(\pi * \frac{i-20}{10}\right)\right) + 0.1$  donde *a* tiene un dominio de (1,60000) y corre dentro del primer minuto de simulación, mientras que *i* es la variable para la posición de filas, teniendo en la perturbación un rango de (21,29). La función  $z_1$  alcanza su máximo en a = 60000 y este valor se mantiene por el resto de la simulación.

Experimento 5 (Soliton alta resolución).

En este último experimento se reutilizan las 3 funciones de perturbación que fueron utilizadas en el experimento 2,  $z_1 = 4 * \sin\left(\pi * \frac{a}{60000}\right) + 1$ ,  $z_2 = 2.5 * \sin\left(\pi * \frac{a}{60000}\right) + 1$  y  $z_3 = 1 * \sin\left(\pi * \frac{a}{60000}\right) + 1$  corriendo cada una un minuto en los

primeros 3 minutos de simulación, donde *a* tiene un dominio de (1,30000) para  $z_1$  y  $z_2$  mientras que para  $z_3$  es de (1,60000), teniendo igual una profundidad inicial en cada celda de 1m de altura y una pendiente de -0.1 en *x* y 0 en *y*. La diferencia primordial entre este experimento y el resto es que aquí se utilizó una malla de  $9m^2$  siendo así  $\Delta x = 3$  metros y  $\Delta y = 3$  metros, para satisfacer la condición de CFL se adaptó el paso de tiempo a  $\Delta t = 0.0001seg$ , quedando el bosquejo de este experimento como se muestra en la figura XX.



Figura XX.-Bosquejo del experimento con malla de  $9m^2$ 

Experimento 6 (Presa alta resolución).

En este último experimento la altura inicial de es 0.1 metros (una capa delgada para asemejar piso seco al igual que el experimento 4) con una pendiente de -0.05 en x y 0 en y, la perturbación inicial no es en todo el ancho del canal, esta se enfoca al centro con un ancho de 27 metros (9 celdas). Se tiene una función para generar la perturbación,  $z_1 = \left(4 * \sin\left(\pi * \frac{a}{120000}\right) * \sin\left(\pi * \frac{i-20}{10}\right)\right) + 0.1$  donde a tiene un dominio de (1,60000) y corre dentro del primer minuto de simulación, mientras que i es la variable para la posición de filas, teniendo en la perturbación un rango de (21,29), la función  $z_1$  alcanza su máximo en a = 60000 y este valor se mantiene por el resto de la simulación.

# 4.-Resultados

En este capítulo mostramos los resultados de las simulaciones con graficas que exponen su evolución temporal, considerando que estas imágenes son solo una pequeña parte de la cantidad de datos obtenidos de cada experimento en formato .dat del programa Fortran. Tenemos información de la profundidad del agua z, la velocidad en sus dos componentes horizontales *u* y *v* para cada una de las celdas de simulación, esto cada 10 segundos del fenómeno, o incluso en el de mayor resolución a cada 0.1 segundos. La resolución temporal puede ser aumentada hasta 10 mil veces de ser necesario sin mayor problema en el código, considerando la gran cantidad de datos que se obtendría y que aumentaría el tiempo de cómputo por los tiempos de escritura. Para generar las visualizaciones se utilizó MatLab. También se examinó a detalle el comportamiento de las variables de profundidad y velocidad en los puntos A, B, C y D a través del tiempo. La coordenada exacta de los puntos varia de experimento a experimento siendo esta información detallada en cada set de gráficas, pero a grandes rasgos se distribuyen de forma mostrada en la figura XXI, permitiendo así examinar un punto próximo a la perturbación (punto A) y tres puntos más lejanos a esta pero distribuidos a través del eje y de forma que permitan también el análisis en esta componente.



Figura XXI.-Bosquejo de la distribución general de los puntos A,B,C, y D.

## 4.1.-Soliton

Este experimento simula la propagación de un soliton, el cual es un fenómeno físico en donde las ondulaciones involucradas en el ambiente sufren una superposición constructiva dando como resultado una onda de mayor amplitud. En total se realizó una simulación de 48 minutos, tiempo en el cual la onda logra viajar una distancia de 11,400 metros de centro a centro de la perturbación, dando así una velocidad media de propagación de 3.9 m/s. El soliton se inició con una amplitud de 4.0 metros y termino con una altura de 1.9 metros, a la par que disminuye la amplitud la longitud de onda va aumentando, de acuerdo a los datos de la simulación en el minuto 9

tenemos una longitud de onda de 2,400 metros, mientras que en el minuto 48 ya es de 4,980 metros; se inició con un volumen de  $22'500,000 m^3$ , después de los 3 minutos que le toma entrar a la perturbación tenemos un volumen de  $25'480,000 m^3$  lo cual significa que durante la perturbación hubo una entrada neta de  $2'980,000 m^3$ , en el resto de la simulación la entrada de fluido es igual a la de salida, por lo cual el valor de  $25'480,000 m^3$  se mantiene constante (figura XXVII).



Figura XXII.-Experimento 1 en el tiempo de 4 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXIII.- Experimento 1 en el tiempo de 12 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXIV.- Experimento 1 en el tiempo de 24 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXV.- Experimento 1 en el tiempo de 36 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXVI.- Experimento 1 en el tiempo de 48 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXVII.-Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 1.

Las coordenadas de los puntos que se examinaron en este experimento son: A(25,50), B(25,150), C(1,150) y D(50,150), enfocándonos a las variables de mayor interés que son la profundidad y la velocidad *u* en dirección *x* (la dirección principal del flujo. En el punto A (figura XXVIII) podemos apreciar como poco antes de los 5 minutos llega el frente de agua provocando que el nivel sobrepase los 3 metros de alturas por unos instantes para después comenzar a estabilizarse y en un tiempo de 6 minutos, aproximadamente, regresa al estado original de 1 metro de profundidad. La velocidad u en este mismo punto tenemos un comportamiento muy similar al de la altura, antes del minuto 5 aumenta súbitamente de un valor estable hasta su pico máximo en este caso una velocidad mayor a los  $4\frac{m}{2}$  para comenzar a descender más suavemente hasta el valor de estabilidad  $\left(2.4 \frac{m}{s}\right)$ que tenía previo al arribo del soliton. Un comportamiento muy similar es observado en los puntos B, C y D, con la diferencia que los puntos máximos de altura y velocidad u en estos es alrededor de los 2.5m y menor de los  $4\frac{m}{s}$  respectivamente, otra diferencia es que a esta distancia del origen les toma alrededor de 10 minutos recuperar los valores

previos al arribo del soliton.



Figura XXVIII.-Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 1. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.



Figura XXIX.- Graficas correspondientes al punto B (25,150) del experimento 1. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.



Figura XXX.- Graficas correspondientes al punto C (1,150) del experimento 1. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.



Figura XXXI.- Graficas correspondientes al punto D (50,150) del experimento 1. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.

#### 4.2.-Bora

Este experimento simula de manera aproximada la propagación de una bora, uno de los puntos principales es que la altura del agua se mantenga detrás del frente de onda, lo cual se logró manteniendo la altura en las celdas de entrada a 4 metros, se

tiene un volumen inicial en todo el dominio de  $22'500,000 m^3$ , con la entrada constante de agua se obtiene un volumen final a los 24 minutos de  $58'487,000m^3$ , considerando esto y que la entrada del fluido es constante como se muestra en la figura (XXXVI) nos da una entrada de 1'499,458.3  $m^3/min$ , multiplicando cada dato de velocidad por los 10 segundos que le corresponderían y sumándolos tendremos un desplazamiento total de 8,020 metros que coincide con lo observado en la figura (XXXV) la cual es una visualización de los datos en el minuto 24 de simulación. En la naturaleza encontramos que las velocidades de las boras varían según varios factores, desde la marea que las provoco, hasta las variaciones en el terreno y dimensiones de los ríos por donde circulan, por ejemplo la del Río Qiang Yang de Japón que llega a alcanzar velocidades de más de 11 m/s siendo esta de las más grandes del mundo alcanzando alturas de hasta 9 metros en algunos puntos, tenemos otras de menor escala como la de la ensenada de Cook en Alaska que alcanza velocidades sobre los 5 m/s, o en la boca del Río Cao'e de la cual lograron simular velocidades sobre los 5 m/s (Pan et al., 2003), mostrando así que la aproximación idealizada que se simulo en este experimento mantiene sus resultados dentro del rango observado en este tipo de fenómenos hidráulicos.



Figura XXXII.- Experimento 2 en el tiempo de 6 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXXIII.- Experimento 2 en el tiempo de 12 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXXIV.- Experimento 2 en el tiempo de 18 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXXV.- Experimento 2 en el tiempo de 24 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XXXVI.- Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 2.

Las coordenadas de los puntos que se examinaron en este experimento son: A(25,50), B(25,150), C(1,150) y D(50,150), enfocándonos a las variables de mayor interés que son la profundidad y la velocidad u en dirección x (la dirección principal del flujo. En el punto A (figura XXXVII) podemos apreciar como poco antes de los 5 minutos comienza a aumentar el nivel de agua tomando aproximadamente 1 minuto pasar del valor inicial de 1m hasta 4m y a la velocidad u de los  $2.4 \frac{m}{s}$  hasta casi los  $5 \frac{m}{s}$ , estos nuevos valores de altura y velocidad se mantienen estables por el resto de la simulación. En lo que respecta a los puntos B,C y D observamos el mismo comportamiento solo con la diferencia de que el arribo del frente de onda a la columna 150 de simulación es por el minuto 13, de ahí en más los valores de velocidad y altura alcanzados son iguales a los del punto A, la altura de 1m hasta 4m y la velocidad u de los  $2.4 \frac{m}{s}$  hasta casi los  $5 \frac{m}{s}$ .



Figura XXXVII.- Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 2. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.



Figura XXXVIII.- Graficas correspondientes al punto B (25,150) del experimento 2. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.



Figura XXXIX.- Graficas correspondientes al punto C (1,150) del experimento 2. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.



Figura XL.- Graficas correspondientes al punto D (50,150) del experimento 2. La primera muestra la variación temporal de la altura y la segunda la de la velocidad ambas en el punto.

## 4.3.-Presa 1

Este experimento utiliza una capa delgada de 10 centímetros de altura en toda la superficie para simular una capa delgada de agua, por la extensión de 15km de largo por 1.5km de ancho nos da un volumen inicial de 2'250,000  $m^3$ , una vez que termina de vaciarse la presa tenemos un volumen total constante de 2'688,300  $m^3$ , teniendo así que se liberaron 438,300  $m^3$  durante el primer minuto de simulación. Mientras que en el segundo 60 se distribuye toda el agua liberada por la presa en 70 celdas que equivalen a 63,000  $m^2$ , para el minuto 28 ya se encuentra esparcida en 3,444 celdas equivalentes a 3'099,600  $m^2$ , el cuerpo de agua logra viajar una distancia de 4,800 metros en un tiempo de 28 minutos dando así una velocidad media de 2.8  $\frac{m}{s}$ .



Figura XLI.- Experimento 3 en el tiempo de 7 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XLII.- Experimento 3 en el tiempo de 14 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XLIII.- Experimento 3 en el tiempo de 21 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XLIV.- Experimento 3 en el tiempo de 28 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura XLV.- Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 3.

Las coordenadas de los puntos que se examinaron en este experimento son: A(25,50), B(25,80), C(15,80) y D(35,80), en los cuales se analiza la altura y la velocidad en ambas de sus componentes  $(u \neq v)$  ya que en este experimento si se vuelve de mayor relevancia la componente en dirección y. Para el punto A (figura XLVI) en la altura tenemos un aumento abrupto a los 5.5 minutos de simulación llegando a los 2.4 metros de altura, de inmediato presenta un decaimiento igual de precipitado llegando hasta los 1.3 metros en el minuto 6.5 aumenta nuevamente pero solo hasta 1.5 metros, para después tener un lento descenso de alrededor de 10 minutos para regresar a su valor original de 0.1 metro; mientras que para la velocidad en este mismo punto tenemos un comportamiento prácticamente idéntico, teniendo como máximo casi los 4  $\frac{m}{s}$  y mínimo de 0.77  $\frac{m}{s}$ , por ultimo para este punto A tenemos que la velocidad v se mantiene constante en su valor de  $0\frac{m}{c}$  durante todo el tiempo de simulación. En lo que respecta al punto B (figura XLVII) observamos el mismo comportamiento solo con la diferencia de que el arribo del frente de onda a la columna 80 es a los 10.5 minutos y que los valores máximos de altura y velocidad son de 1.85 metros y 3.24  $\frac{m}{s}$  respectivamente, al igual que el punto A, este presenta un valor contante de  $0 \frac{m}{s}$  para v. Para los puntos C y D (figuras XLVII y XLVIII) tenemos un comportamiento mucho más suave en lo que respecta a la altura y velocidad u, la perturbación tarda un poco más en llegar a estos puntos alejados del centro, llegando a estos en el minuto 12, donde sube rápido pero no tan repentinamente como en los puntos A y B con un máximo menor de 0.75 metros en la altura y 1.9  $\frac{m}{a}$  en la velocidad u, y ambas componentes descienden suavemente sin interrupciones como en los caos previos. Lo interesante de estos

dos puntos viene en el análisis de la componente v para ambos, donde se ve un comportamiento simétrico, observando un aumento hasta  $0.15 \frac{m}{s}$  en el minuto 12 en el punto D, y al mismo tiempo observamos un decremento hasta  $-0.15 \frac{m}{s}$  para el punto C, indicándonos que las velocidades de v van dirigidas del centro a las orillas.



Figura XLVI.- Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 3. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura XLVII.- Graficas correspondientes al punto B (25,80) del experimento 3. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura XLVIII.- Graficas correspondientes al punto C (15,80) del experimento 3. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura XLIX.- Graficas correspondientes al punto D (35,80) del experimento 3. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.

### 4.4.-Presa 2

Este experimento al igual que el anterior se utiliza una capa delgada de 10 centímetros de altura en toda la superficie para simular una capa delgada de agua, teniendo, por lo tanto, el mismo volumen inicial de 2'250,000  $m^3$ , en este caso la entrada de agua se mantuvo constante una vez que llego a su máximo, con lo cual al minuto 116 de simulación ya se tenían inundadas 22,915 celdas equivalente a un área de  $20'623,500 m^2$ , con la entrada continua de agua (LIV) en total hubo un aumento neto de volumen de 4'030,500  $m^3$ , recorriendo una distancia de 14,400 metros en los 116 minutos de simulación, teniendo así una velocidad media de  $2.06 \frac{m}{s}$ , menor que la encontrada en el experimento previo a pesar de que el tirante de entrada se mantiene, esto debido a la pendiente del terreno de 0.05 que se utilizó en este experimento.



Figura L.- Experimento 4 en el tiempo de 29 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LI.- Experimento 4 en el tiempo de 58 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LII.- Experimento 4 en el tiempo de 87 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LIII.- Experimento 4 en el tiempo de 116 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 30 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LIV.- Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 4.

Las coordenadas de los puntos que se examinaron en este experimento son: A(25,50), B(25,400), C(15,400) y D(35,400), en los cuales se analiza la altura y la velocidad en ambas de sus componentes (u y v) ya que en este experimento al igual que el anterior si es de mayor relevancia la componente en dirección y. Para el punto A (figura LV) en la altura tenemos un aumento abrupto a los 9 minutos de simulación llegando de 0.1m a los 2.7m de altura, de inmediato presenta un

decaimiento igual de precipitado llegando hasta los 2.2 metros en el minuto 10 donde comienza a aumentar de nuevo pero solo hasta 2.2 metros, presenta un decaimiento y aumento más de forma similar pero de escala menor para estabilizarse apenas por debajo de los 2.2 metros y mantener este valor por el resto de la simulación. Mientras que para la velocidad en este mismo punto tenemos un comportamiento prácticamente idéntico, teniendo como máximo casi los 3 $\frac{m}{c}$ estabilizándose en los 2.52  $\frac{m}{s}$ . Por ultimo para este punto A tenemos que la velocidad v se mantiene constante en su valor de  $0 \frac{m}{s}$  durante todo el tiempo de simulación. En lo que respecta al punto B (figura LVI) observamos el mismo comportamiento solo con la diferencia de que el arribo del frente de onda a la columna 400 es a los 92 minutos y que los valores máximos de altura y velocidad son de 1.7 metros y 2.2  $\frac{m}{s}$  respectivamente, en cuanto a la componente v, este presenta una ligera variación también de  $4 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$  en el mismo minuto y se estabiliza en  $2 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$  prácticamente 0. Para los puntos C y D (figuras LVII y LVIII) tenemos un comportamiento muy similar en lo que respecta a la altura y velocidad u, la perturbación llega prácticamente al mismo tiempo a estos puntos alejados del centro, donde con un comportamiento similar en la forma de las curvas llegan a máximos de 1.38 metros y 1.94  $\frac{m}{s}$  de altura y velocidad respectivamente para estabilizarse en 1.1 metros de altura y 1.85  $\frac{m}{s}$ , Lo interesante de estos dos puntos viene en el análisis de la componente v para ambos como en el experimento anterior, donde se ve un comportamiento simétrico, observando un aumento hasta 0.28  $\frac{m}{s}$  en el minuto 92 en el punto D, y al mismo tiempo observamos un decremento hasta  $-0.28 \frac{m}{s}$  para el punto C, indicándonos que las velocidades de v van dirigidas del centro a las orillas, cabe mencionar algunos de los valores de velocidad u son menores en este experimento a pesar de tener una entrada de flujo continua, esto es debido a la poca pendiente que se manejo en este experimento, a diferencia de los valores en v que son prácticamente del doble, dado que la pendiente en dirección y es 0 para ambos experimentos y aquí domina el hecho de tener una entrada de flujo contante durante todo el experimento.



Figura LV.- Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 4. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LVI.- Graficas correspondientes al punto B (25,400) del experimento 4. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LVII.- Graficas correspondientes al punto C (15,400) del experimento 4. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LVIII.- Graficas correspondientes al punto D (35,400) del experimento 4. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.
### 4.5.-Soliton alta resolución

Este experimento cuenta con una resolución de  $3 \times 3$  metros y al igual que el primer experimento asemeja las condiciones para simular la propagación de un soliton, por las menores dimensiones del área de simulación de 1,500 metros por 150 metros y una profundidad de inicio en todas las celdas de 1m tenemos un volumen inicial de  $225,000 m^3$ . Una vez que termina de ingresar el soliton tenemos un volumen total de  $258,350 m^3$  dando así una entrada neta de  $33,350 m^3$ durante los 2.8 minutos de simulación. El soliton lleva una velocidad media de  $3.7 \frac{m}{s}$  dando así un desplazamiento total de 621.7 metros del soliton. Al terminar de ingresar el soliton se distribuye en una área total de  $12,600 m^2$ , mientras que al final ya se encuentra distribuido en un área de  $166,950 m^2$  (considerando todas las celdas con valor mayor a 1m de profundidad), mientras que al minuto 0.7 tenemos una amplitud de 2.3 metros y una longitud de onda de 231 metros, tenemos que al minuto 2.8 la amplitud disminuyo hasta 1.7 metros y la longitud de onda creció hasta 381m.



Figura LIX.- Experimento 5 en el tiempo de 0.7 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 3 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LX.- Experimento 5 en el tiempo de 1.4 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 3 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LXI.- Experimento 5 en el tiempo de 2.1 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 3 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LXII.- Experimento 5 en el tiempo de 2.8 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es un corte transversal a través del centro (fila 25) de distancia (columnas) vs velocidad, donde se debe multiplicar por 3 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LXIII.- Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 5.

Las coordenadas de los puntos que se examinaron en este experimento son: A(25,50), B(25,120), C(1,120) y D(50,120), mostrando el comportamiento de las 3 variables, la altura y ambas componentes de velocidad . En el punto A (figura LXIV) podemos apreciar como poco antes de los 0.5 minutos llega el frente de agua provocando que el nivel llegue a los 2.6 metros de altura por unos instantes para

después comenzar a estabilizarse y en un tiempo de 1 minuto aproximadamente regresa al estado original de 1 metro de profundidad, para la velocidad u en este mismo punto tenemos un comportamiento muy similar al de la altura, antes del minuto 0.5 aumenta el valor a una velocidad de 4.2  $\frac{m}{s}$  para comenzar a descender más suavemente hasta el valor de estabilidad  $\left(2.4 \frac{m}{s}\right)$  que tenía previo al arribo del soliton, cabe mencionar que se apreció otro aumento antes de esto, este es debido a que los valores de velocidad se inicializan en 0 y le toma un momento alcanzar una valor estable de velocidad que es adquirido por la pendiente sin necesidad de que alguna perturbación extra actué sobre el punto, esa es la velocidad a la que todos los puntos tienden al estabilizarse antes o después de la perturbación que se esté manejando. Para la componente v de la velocidad tenemos respuesta del modelo, una ligera perturbación de  $7 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$  que rápidamente se estabiliza después del paso del soliton. Un comportamiento muy similar es observado en los puntos B, C y D, con un desfase 0.1 min en la llegada del soliton y la diferencia que los puntos máximos de altura y velocidad u en estos son de 2.0 metros y 3.56  $\frac{m}{s}$ respectivamente, otra diferencia es que a esta distancia del origen les toma 2 min recuperar los valores previos al arribo del soliton mientras que para el punto 1 le tomaba solo la mitad de tiempo volver a estabilizarse.



Figura LXIV.- Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 5. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LXV.- Graficas correspondientes al punto B (25,120) del experimento 5. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LXVI.- Graficas correspondientes al punto C (1,120) del experimento 5. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LXVII.- Graficas correspondientes al punto D (50,120) del experimento 5. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.

#### 4.6.-Presa alta resolución

Este experimento cuenta con una resolución de  $3 \times 3$  metros y en este caso se aplica para simular el rompimiento de una presa, el volumen inicial es de 22,500  $m^3$ por la capa delgada de agua de 10 centímetros distribuida homogéneamente en un área total de 225,000  $m^2$ , a los 11 minutos de simulación tenemos un volumen total de  $35,319 m^3$  dando asi que el aumento neto de volumen en nuestra área de fue de 12,819  $m^3$ ; durante los 12 minutos de simulados podemos ver una velocidad media de  $1.47 \frac{m}{s}$ , dando así un desplazamiento total de 1,058.4 metros equivalentes a 352.8 celdas como se aprecia en la figura (LXXI).



Figura LXVIII.- Experimento 6 en el tiempo de 3 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 3 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LXIX.- Experimento 6 en el tiempo de 6 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 3 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LXX.- Experimento 6 en el tiempo de 9 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 3 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LXXI.- Experimento 6 en el tiempo de 11.9 minutos, el primer elemento muestra los niveles de altura y el segundo es una vista área de largo por ancho con la distancia en columnas, donde se debe multiplicar por 3 para cambiar de número de columna a distancias en metros.



Figura LXXII.- Evolución temporal del promedio de volumen en el experimento 6.

Las coordenadas de los puntos que se examinaron en este experimento son: A(25,50), B(25,200), C(15,200) y D(35,200), mostrando el comportamiento de las 3 variables, la altura y ambas componentes de velocidad que son de gran interés por el tipo de fenómeno a analizar (el rompimiento de una presa). Para el punto A (figura LXXIII) en la altura tenemos un aumento abrupto poco después del minuto 1 de simulación llegando de 0.1 a 1.2 metros de altura, tiene un decaimiento de forma similar al visto en el experimento 4 (el de la presa con malla de 30x30 metros y entrada de agua continua) pero mucho más suavizado, llegando a un valor estable poco antes del minuto 2 con una altura de 1.0 metro, mientras que para la velocidad en este mismo punto tenemos un comportamiento mucho más simple, iniciando en el mismo momento el aumento abrupto que el de la altura, pero estabilizándose muy suavemente en una valor de 1.7  $\frac{m}{s}$ , por ultimo para este punto A tenemos que la velocidad v tiene un muy ligero descenso de  $-1 \times 10^{-3}$  metros para después aumentar a  $4 \times 10^{-3}$  metros y mantenerse en ese valor el resto de la simulación. En lo que respecta al punto B (figura LXXIV) observamos un comportamiento similar al principio pero más suavizado, con la diferencia de que cuando parecería que empieza a estabilizarse tiende a aumentar de nuevo muy suavemente estabilizándose en un valor 0.9 metros un poco mayor al primer pico observado de 0.85 metros, el arribo del frente de onda a la columna 200 es a los 6 minutos, en cuanto a la componente v, este presenta una ligera variación primero con un descenso a  $-2 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$  para después subir a  $3 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$  y por fin llegar a  $2 \times$  $10^{-3} \frac{m}{s}$  valores muy cercanos a  $0 \frac{m}{s}$ . Para los puntos C y D (figuras LXXV y LXXVI) tenemos un comportamiento muy similar en lo que respecta a la altura y velocidad u, la perturbación llega prácticamente al mismo tiempo a estos puntos alejados del

centro, donde con un comportamiento similar en la forma de las curvas llegan a máximos de 0.88 metros y 1.5  $\frac{m}{s}$  de altura y velocidad respectivamente donde a la vez se estabilizan. Lo interesante de estos dos puntos viene en el análisis de la componente v para ambos como en el experimento 4, donde se ve un comportamiento simétrico, observando un aumento hasta  $0.08 \frac{m}{s}$  en el minuto 6 en el punto D, y al mismo tiempo observamos un decremento hasta  $-0.08 \frac{m}{s}$  para el punto C, después tenemos decremento a  $0.06 \frac{m}{s}$  en D y un aumento a  $-0.06 \frac{m}{s}$  en C, a partir de estos valores ambos se comienzan a aproximar lentamente hacia los  $0 \frac{m}{s}$  tendiendo a este ya a finales de la simulación.



Figura LXXIII.- Graficas correspondientes al punto A (25,50) del experimento 6. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LXXIV.- Graficas correspondientes al punto B (25,200) del experimento 6. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LXXV.- Graficas correspondientes al punto C (15,200) del experimento 6. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.



Figura LXXVI.- Graficas correspondientes al punto D (35,200) del experimento 6. La primera muestra la variación temporal de la altura, la segunda la de la velocidad u y la tercera la de la velocidad v.

### 5.-Discusión

El trabajo se basó en el principio de parsimonia que se expresa en 3 puntos: (i) obtener una representación realista del proceso físico, (ii) estar a la altura del desempeño de modelos más complejos y (iii) proporcionando las respuestas correctas por las razones correctas (Warmink et al., 2015). El primer paso fue elegir un modelo físico de ecuaciones que nos permitieran aproximar lo mejor posible los que buscábamos fenómenos hidrológicos extremos simular, por esto seleccionamos las ecuaciones de Saint-Venant (SV), ecuaciones bidimensionales que nos permiten modelar nuestros fenómenos de interés con abruptos frentes de onda como boras, rompimientos de presas, tsunamis, solitones, avenidas de agua, etc. Gracias a la estabilidad numérica que presentan y que con un modelo físico tridimensional sería más complejo de alcanzar, además del gasto computacional mayor que requerirían, tanto en tiempo de cómputo, como en espacio de almacenamiento para los datos obtenidos. Ahora partiendo de estos puntos entonces un modelo unidimensional sería mejor por su eficiencia computacional, pero estaríamos sacrificando la información transversal al eje principal de flujo lo cual para nuestros fenómenos de estudio si es de interés, como por ejemplo en el choque del agua con las paredes en el rompimiento de las presas, esto hace que las ecuaciones de SV sean nuestra mejor opción por tratarse de experimentos donde las componente horizontales son dominantes sobre la vertical. Otro punto de importancia fue la elección del lenguaje de programación sobre el que se implementaría, partiendo principalmente por la gran velocidad de cómputo en lo que se refiere a cuestiones matemáticas se decidió utilizar FORTRAN como plataforma principal, sin embargo este arrastra también una gran desventaja, las pocas por no decir nulas opciones de visualización de los datos, problema que se solucionó utilizando MatLab para todo lo involucrado en la visualización y análisis de los datos obtenidos de las simulaciones. Conjuntando estos 3 elementos, las ecuaciones de SV, FORTRAN y MatLab, se obtuvieron representaciones realistas contando con gran cantidad de datos para su análisis, obteniendo resultados competitivos en cuestión de desempeño de computo, ya que para el desarrollo de este trabajo se empleó computo de gama media, con las siguientes características principales: Procesador Intel Core i7 de 3.4GHz, Memoria RAM de 16 GB, tarjeta gráfica NVIDIA GeForce GT 440 de 96 núcleos CUDA de memoria estándar de 512 MB. Los resultados proporcionados del modelo de simulación satisfacen la información necesaria para un análisis a fondo de estos fenómenos, podemos concluir que nuestro modelo si cumple con el principio de parsimonia que se considera como guía principal para este tipo de modelos hidráulico-numéricos. Dentro de los resultados podemos apreciar cómo se aproxima correctamente el comportamiento del fluido al chocar contra las paredes los experimentos de rompimiento de presas, donde se ve la generación de ondas transversales y el aumento del fluido en los puntos de contacto con la pared, además en el experimento de la bora a pesar de

ser una aproximación un tanto burda de este fenómeno también se logró corroborar que los valores de velocidad se encuentran muy cercanos a los observados en boras reales como la que se presenta en la ensenada de Cook, Alaska que alcanza velocidades sobre los 5 m/s, o en la boca del Río Cao'e de la cual lograron simular velocidades sobre los 5 m/s (Pan et al., 2003). En la mayoría de estos resultados se utilizó la malla de 30X30 metros, la cual ofrece suficiente resolución para este tipo de fenómenos, pero debemos tener en cuenta que algún fenómeno con longitud de onda menor a los 30 metros será completamente imperceptible, por esto la utilidad de aumentar la resolución de malla hasta los 3X3 metros, dándonos así la posibilidad de estudiar mucho más a detalle el comportamiento del fluido al aumentar ampliamente el espectro contemplado en los resultados del modelo. Dándonos así la versatilidad de alimentar al modelo con datos de satélites LandSat, el continuo de elevaciones mexicano (CEM), Modelos Digitales de Elevación de Alta Resolución LiDAR ambos otorgados gratuitamente por el INEGI, o incluso algunas bases de datos generadas con drones. Por último se implementó un análisis temporal de algunos puntos estratégicos de las simulaciones, en estos puntos se busca apreciar a más detalle el avance de la perturbación, teniendo así un punto cercano a la fuente del fenómeno, y otros tres puntos a una distancia mayor alineados paralelamente al eje "y" que además nos permiten apreciar más claramente el comportamiento en la componente v de la velocidad, en el caso de los experimentos de presas pudimos apreciar gracias a estos puntos que la velocidad v aumenta en dirección a las paredes con el arribo del frente de onda, pero una vez que este termina de pasar la velocidad v en estos puntos vuelve a ser de  $0\frac{m}{s}$  quedando solo la componente *u*, con este análisis a detalle pudimos darnos cuenta que la componente v aparece solo con el frente de onda, y que la parte trasera del flujo esta se vuelve cero quedando solo la componente u. Otro aspecto que pudimos observar gracias a este análisis temporal de los puntos en específico fue que mientras en los solitones tenemos un solo frente de onda desplazándose, en las simulaciones de la presa tenemos que la propagación se lleva a cabo en dos ondas, primero una de mayor amplitud seguida muy de cerca por una de amplitud ligeramente menor a la primera. Con lo observado en estos puntos hemos corroborado el buen comportamiento del modelo y su gran capacidad de simular la propagación de frentes de onda con altos gradientes de presión que suelen ser un punto crítico en los modelos hidráulicos. Una de las principales problemáticas con las que nos topamos durante la implementación de las ecuaciones al código en FORTRAN fue el alto grado de cuidado que se debe tener cuando se programan las condiciones de frontera, y sobre todo la alta gama de combinaciones que se pueden tener, entre qué pasos de discretización se utilizan para la primer derivada junto con las condiciones de non-slip, slip y Half-slip, obligándonos a correr diversas pruebas en cada una de las 4 fronteras del dominio hasta lograr encontrar la combinación que cumpla el criterio de CFL el cual fue nuestro primer filtro para saber si los resultados de las simulaciones son estables numéricamente o no. Otro punto que requirió cuidado extra fue el manejo de las perturbaciones, las cuales se suavizaron

a partir de funciones seno, en el caso de la bora o solitones fue necesario implementar un solo seno para suavizar la perturbación en el eje x, mientras que en los experimentos de la presa fue necesario implementar el producto de dos funciones seno, suavizando así la perturbación también en el eje y.

## 6.-Conclusiones

1.-Se elaboró un modelo hidráulico-numérico que nos permite simular realísticamente fenómenos extremos como el rompimiento de presas, grandes avenidas de agua en ríos o incluso semejante a las boras, y solitones que también podrían asemejar a tsunamis manejando distintas escalas desde 3x3 metros a 30x30 metros.

2.-Los resultados obtenidos en estos experimentos que manejan situaciones realistas prueban el excelente funcionamiento del modelo ya que los errores máximos que se encontraron fueron del orden de 1% en la conservación de masa para los casos de alta resolución (3x3 metros) o incluso menores de 0.1% para los experimentos realizados a menor resolución (30x30 metros).

3.-Se ha corroborado que el comportamiento dinámico de las simulaciones asemeja a valores de variables observados en fenómenos reales como velocidades de inundación observadas en nuestros experimentos, las oscilaciones de la elevación del agua observadas en respuesta al paso de los distintos fenómenos simulados como los solitones o los frentes de onda de la propagación en los experimentos de las presas, las ondas transversales y longitudinales observadas en los experimentos de presas al choque con las paredes, también se asemejo con bastante precisión en los resultados de velocidades observados en boras comparándolas con las observadas en boras reales.

4.-Se probó el alcance del modelo propuesto al aplicarlo en escenarios de prueba con diversas condiciones iniciales que nos dan la versatilidad de simular diversos fenómenos hidrológicos como rompimientos de presas, avenidas de agua, tsunamis, boras, olas de tormenta, rompimiento de diques, así como, diferentes resoluciones espaciales en el mallado lo que nos deja estudiar fenómenos de diferentes escalas espaciales a suficiente detalle.

5.- Tenemos en nuestras manos una herramienta propia de grandes alcances para la investigación futura de fenómenos extremos que ocurren en nuestro país, que gracias a los niveles de resolución alcanzados pueden trabajar con el continuo de elevaciones mexicano (CEM), con una resolución espacial de 15 metros, o Modelos Digitales de Elevación de Alta Resolución LiDAR que se obtienen de manera gratuita del INEGI y es capaz de correr en computadoras de gama media, lo cual nos permite de forma económica realizar estudios científicos a detalle de los diversos fenómenos hidrológicos.

### 6.1.- trabajo futuro

Se propone a completar a futuro este trabajo con los siguientes puntos:

- Maximizar la resolución del modelo para poder aplicarlo con topografía más a detalle como la que nos ofrecen los drones en la actualidad.
- Considerar escenarios más realistas como suelo variable en pendientes o coeficientes de fricción, además de cuencas de cualquier forma geométrica.
- Agregar diferentes configuraciones en el escenario, como curvas, reducciones en el ancho del canal o ampliaciones, presencia de obstáculos en el curso de los flujos, etc.
- Documentar el modelo MHIPICYT para su aplicación y ponerlo a disposición de la comunidad académica con el debido crédito al IPICYT.

## 7.-Referencias

- Alavez, J., Sánchez, P. A., González, J. C., López, J., Blé, G., Munguía, E., ... David, M. (2007). Simulación Bidimensional de una Inundación en la Ciudad de Villahermosa Tabasco Contenido Zona Geográfica de Interés Software GUAD-2D e IBER Modelación de la Batimetría Modelo de Saint-Venant Bidimensional Simulaciones con GUAD-2D Simulación de la Inundac.
- Amblard, J., Capoccioni, C. P., Nivon, D., & Mellal, L. (2015). Analysis of Ballast Transport in the Event of Overflowing of the Drainage System on High Speed Lines, *4*(xx). http://doi.org/10.4203/ijrt.4.xx.xx
- Cfl, T. (n.d.). Chapter 14: Stability of Finite Difference Methods.
- Cheng, C., Qian, X., Zhang, Y., Wang, Q., & Sheng, J. (2011). Estimation of the evacuation clearance time based on dam-break simulation of the Huaxi Dam in Southwestern China. *Natural Hazards*, *57*(2), 227–243. http://doi.org/10.1007/s11069-010-9608-4
- Dolgopolova, E. N. (2013). The conditions for tidal bore formation and its effect on the transport of saline water at river mouths. *Water Resources*, *40*(1), 16–30. http://doi.org/10.1134/S0097807813010028
- Gąsiorowski, D. (2013). Analysis of floodplain inundation using 2D nonlinear diffusive wave equation solved with splitting technique. *Acta Geophysica*, *61*(3), 668–689. http://doi.org/10.2478/s11600-012-0087-8
- George, A. C., & Nair, B. T. (2015). INTERNATIONAL CONFERENCE ON WATER RESOURCES, COASTAL AND OCEAN Dam Break Analysis Using BOSS DAMBRK. *Aquatic Procedia*, 4(Icwrcoe), 853–860. http://doi.org/10.1016/j.aqpro.2015.02.107
- Jorge, L., Alavez-ram, J., & Hern, J. L. (2009). Soluci ´ on num ´ erica del modelo de Saint-Venant v ´ ıa vol ´ umenes finitos, 2(Diciembre), 34–53.
- Jung, I.-K., Lee, D.-R., Park, J.-Y., Park, G.-A., & Kim, S.-J. (2015). Application of distributed KIneMatic wave STOrm Runoff Model (KIMSTORM) for flood simulation considering dam release in the NamHan river basin of Korea. *Paddy and Water Environment*, 13(2), 167–177. http://doi.org/10.1007/s10333-014-0418-2

Kamboh S. A, Sarbini Izzatul Nabila, Labadin Jane, Eze Monday O. <u>2015</u>. Simulation of 2D Saint-Venant equations in open channel by using MATLAB). Journal of IT in Asia. V-5(1).

- Kanayama, H., & Dan, H. (2013). A tsunami simulation of Hakata Bay using the viscous shallowwater equations. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, *30*(3), 605–624. http://doi.org/10.1007/s13160-013-0111-7
- Krzyk, M., Klasinc, R., & Četina, M. (2012). Two-Dimensional Mathematical Modelling of a Dam-Break Wave in a Narrow Steep Stream. *Strojniški Vestnik – Journal of Mechanical Engineering*, *58*(4), 255–262. http://doi.org/10.5545/sv-jme.2010.216
- Leupi, C., & Altinakar, M. (2005). 3D Finite Element Modeling of Free-Surface Flows with Efficient k – ε Turbulence Model and Non-hydrostatic Pressure. *Computational Science* – *ICCS 2005 SE* -*5*, *3516*, 33–40. http://doi.org/10.1007/11428862\_5

ManualBasico\_HEC-RAS313\_HEC-GeoRAS311\_Espanol.pdf.crdownload. (2007).

- Mirzazadeh, P., & Akbari, G. (2012). A case study of flood dynamic wave simulation in natural waterways using numerical solution of unsteady flows.
- Pan, C.-H. C., Lin, B., & Mao, X. (2003). New Development in Numerical Simulation of the Tidal Bore. *International Conference on Estuaries and Coasts 2003*, (1985), 99–111.
- Warmink, J. J., Booij, M. J., & Expert, Á. Á. (2015). Rivers Physical, Fluvial and Environmental Processes. *Rivers-Physical, Fluvial and Environmental Processess*, 255–277. http://doi.org/10.1007/978-3-319-17719-9
- Zonas, D. D. E., En, I., & Fraga, E. L. T. M. D. E. (2007). Aplicación del modelo bidimensional guad-2d para la determinación de zonas inundables en el t.m. de fraga (huesca), 1–10.
- Daily-Mail 2015 http://www.dailymail.co.uk/news/peoplesdaily/article-3218143/Run-lives-Dramatic-pictures-spectators-dashing-safety-enormous-tidal-waves-high-30-feet-struck-China.html#i-bb0d5d88e9e90643

Coastal 2013 http://www.coastal.jp/ttjt/index.php?plugin=ref&page=FrontPage&src=surveyge.jpg

Theatlantic 2016 https://cdn.theatlantic.com/assets/media/img/photo/2013/03/japanearthquake-2-years-later-befo/t18\_630512ja/main\_900.jpg?1423838014

# Anexo 1

## Caja de arena de realidad aumentada

En este anexo se explica el proceso de construcción de la caja de arena de realidad aumentada que se realizó en el IPICYT basándonos en el trabajo de Peter Gold del departamento de geología de la Universidad de California en Davis. Cuyas instrucciones de armado y antecedentes del proyecto son explicados en el siguiente link: <u>http://idav.ucdavis.edu/~okreylos/ResDev/SARndbox/</u>.

Este proyecto consiste en armar una caja de arena de realidad aumentada que funcione en tiempo real, pudiendo con esta herramienta explicar conceptos básicos de hidrología así como mostrar de una forma interactiva y atractiva para las nuevas generaciones el comportamiento de diversos fenómenos hidrológicos y así generar conciencia en los niños y niñas que tengan la oportunidad de interactuar con el equipo.

La AR sand box (por su nombre en inglés) se compone en forma general por cuatro piezas fundamentales,

- 1.-Caja de arena
- 2.-Camara 3D (kinect)
- 3.-Proyector
- 4.-Computadora

El cajón de arena con una superficie de 70 cm X 100 cm y una profundidad de 12 cm, en nuestro caso es una estructura de madera desmontable para su posible traslado así como con un orificio para poder extraerle la arena de forma mas fácil, este volumen se llena de arena hasta los 10 cm de profundidad, cabe resaltar, en la página recomiendan la arena "Sandtastik", la cual además de costosa, la principal problemática es que no la venden en el país y el envió es muy caro ya sé que requiere cerca de 100kg de esta, por este motivo decidimos sustituirla por arena de sílice de tamaño de grano de 30-40, donde la de "Sandtastik" dan un rango de tamaño en las especificaciones equivalente a 30-50 según las tablas de medida en las empresas que venden material para construcción. Además se debe considerar la construcción de una estructura superior donde se montara el proyector y el kinect, para nuestra estructura decidimos utilizar ángulo perforado para anaqueles de 1.5X1.5 pulgadas debido a lo versátil del material y lo fácil de manipular, por último se cortaron dos bases de madera para adaptar tanto el proyector como el kinect al ángulo de aluminio. En la página se sugiere una separación de 1 metro entra la caja de arena y el proyector así como la cámara 3D, en nuestro caso requerimos bajar el kinect a una altura de 85 cm respecto a la superficie de la caja, y separar el proyector a 140 cm de esta misma superficie, por lo cual recomendamos probar las distancias con el equipo en específico que estén usando para el montando de su AR sand box. En cuanto a la cámara 3D se requiere un Kinect Microsoft de primera generación del XBOX 360. Se utilizó un proyector marca Epson modelo PowerLite w15+ de alta definición. Para la computadora se requiere tener una versión de Linux, en este caso siguiendo las recomendaciones se instaló el sistema operativo Linux Mint con escritorio MATE, resaltando que este debe ser instalado en una computadora real ya que no funciona en una máquina virtual. En cuanto a las características del hardware utilizado tenemos un Procesador Intel Core i7 de 3.4GHz, Memoria RAM de 16 GB, tarjeta gráfica NVIDIA GeForce GT 440 de 96 núcleos CUDA de memoria estándar de 512 MB, pero cabe resaltar que esta tarjeta gráfica no fue del todo suficiente, aunque el modelo es funcional y ya se ha utilizado con público, en las proyecciones se obtuvieron las curvas de nivel mas no el coloreado de estas, por lo cual recomendamos utilizar la tarjeta de grafica GeForce GTX 970 c de 1664 núcleos CUDA de 4 GB de memoria, que es la sugerida en las instrucciones de armado. A continuación se muestran algunas fotografías que muestran algunas de las adaptaciones que se hicieron en nuestro versión de la AR sand box así como de esta en funcionamiento.



Figura A1.- Tapón para la fácil extracción de la arena.



Figura A2.- Se muestran la estructura montada.



Figura A3.- Primeras pruebas de la AR sand box del IPICYT.



Figura A4.- Presentación del equipo en el evento del día del niño (2016) en el IPICYT.