



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Sistemas interconectados con aplicaciones a
convertidores electrónicos**

Tesis que presenta

José Manuel López Cruz

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Jesús Leyva Ramos

San Luis Potosí, S.L.P., Mayo del 2015



Constancia de aprobación de la tesis

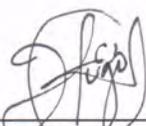
La tesis “**Sistemas interconectados con aplicaciones a convertidores electrónicos**” presentada para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **José Manuel López Cruz** y aprobada el **tres de junio del dos mil quince** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



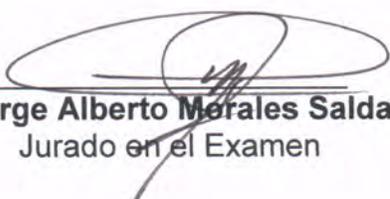
Dr. Jesús Leyva Ramos
Director de la tesis



Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
Jurado en el Examen



Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Jurado en el Examen



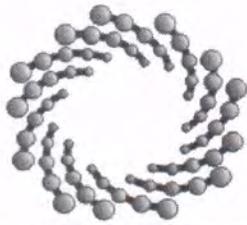
Dr. Jorge Alberto Morales Saldaña
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Jesús Leyva Ramos.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 175241 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 022 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 3 días del mes de junio del año 2015, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	Presidente	IPICYT
Dr. Jesús Leyva Ramos	Secretario	IPICYT
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Sinodal	IPICYT
Dr. Jorge Alberto Morales Saldaña	Sinodal externo	UASLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

José Manuel López Cruz

sobre la Tesis intitulada:

Sistemas interconectados con aplicaciones a convertidores electrónicos

que se desarrolló bajo la dirección de

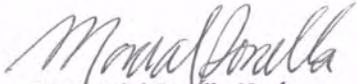
Dr. Jesús Leyva Ramos

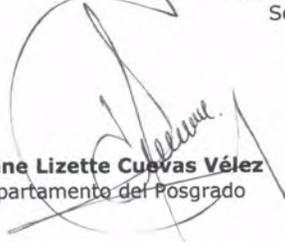
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 14:00 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 3 días del mes de junio de 2015.


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado



AGRADECIMIENTOS

Primeramente a Dios, por todo lo que me ha dado, por permitirme una vez más alcanzar una meta.

A mi familia y especialmente mis padres Carmen Cruz Hernández y Abraham López Martínez, que siempre estuvieron delante de mí con apoyo incondicional.

Muy especialmente al Dr. Jesús Leyva Ramos, por aceptar ser mi director de tesis y por su valiosa asesoría, paciencia, conocimientos y apoyo, los cuales me permitieron desarrollar y concluir satisfactoriamente este trabajo de tesis.

A los sinodales: Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar, Dr. Jorge Alberto Morales Saldaña y Dr. Hugo Cabrera Ibarra, por sus valiosas observaciones y acertadas sugerencias, las cuales me llevaron a la realización de un mejor trabajo.

Al Mtro. Luis Humberto Díaz Saldierna, encargado del laboratorio de Electrónica de Potencia, por su valiosa colaboración para la obtención de resultados experimentales y la Dr. Ma. Guadalupe Ortiz López por su experiencia compartida.

A los profesores investigadores del Departamento de Matemáticas Aplicadas del IPICYT por los conocimientos brindados.

A los muy valiosos compañeros Josué Augusto Reyes Malanche, Omar Fernando Ruíz Martínez, Andrés Anzo Hernández, Luis Fernando Calderón Soto, por el tiempo y el apoyo compartido.

Y a todas aquellas personas que con su valiosa ayuda hicieron posible que este trabajo fuera realizado.

Glosario de símbolos y acrónimos

ISS	Estabilidad de entrada a estado
iISS	Integral estabilidad de entrada a estado
C^1	Conjunto de funciones continuas y diferenciables una vez en los reales
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{R}^+	Conjunto de los números reales positivos
L^+	Conjunto limite positivo
CD	Corriente directa
CA	Corriente alterna
CD/CD	Corriente directa a corriente directa
$B_\epsilon(x_0)$	Bola de radio ϵ centrado en x_0
$Re(\lambda_i)$	Parte real del eigenvalor λ_i
$Im(\lambda_i)$	Parte imaginaria del eigenvalor λ_i
$max\{.\}$	Máximo de $\{.\}$
$sup\{.\}$	Supremo de $\{.\}$
u	Ciclo de trabajo del convertidor conmutado
U	Ciclo de trabajo promediado
R	Carga o resistencia
L	Inductancia
C	Capacitancia
Mosfet	Transistor de efecto de campo con tecnología MOS
PI	Controlador proporcional-integral
$Df(x_0)$	Derivada de la función f en x_0
S_i	Sistema dinámico número i

Resumen.

El papel estratégico de la electrónica de potencia en los sistemas de generación eléctrica está en constante aumento como consecuencia de requisitos más estrictos sobre el ahorro energético y la utilización de fuentes de energía renovables con la finalidad de desacelerar los efectos del cambio climático y asegurar la disponibilidad de energía en el futuro. Los convertidores de electrónica de potencia son importantes para alcanzar el objetivo de utilizar la energía de las fuentes renovables, pero existe un inconveniente muy importante a tomar en cuenta sobre las fuentes de generación de energías renovables, no son constantes, sino más bien poseen una dinámica. En la literatura abierta, la fuente de energía de un convertidor se ha considerado siempre constante; si se busca utilizar las fuentes de energías renovables como entrada de la fuente de un convertidor, es necesario considerar la fuente como un sistema dinámico interconectado al sistema dinámico del convertidor y analizarlo desde el enfoque de sistema dinámico interconectado. El área de investigación de la electrónica de potencia se ha enfocado en gran medida a estudiar la dinámica asociada a los convertidores de electrónica de potencia y descuidado la dinámica de los sistemas interconectados a ellos. Recientes investigaciones están enfocadas principalmente en los sistemas interconectados de las energías renovables, que son resultados muy poco conocidos. En este trabajo se trata la teoría matemática básica de sistemas dinámicos interconectados, se analizan las condiciones de estabilidad alrededor de su punto de equilibrio. Como una aplicación particular de los sistemas dinámicos interconectados se encuentran condiciones de estabilidad alrededor del punto de equilibrio del sistema “Módulo de celdas de combustible/Convertidor de voltaje”. Además se implementa la parte experimental para mostrar el sistema interconectado en funcionamiento. El primer sistema considera un módulo de celdas de combustible que puede proporcionar un voltaje de salida de 26 V a 41.7 V y el segundo sistema considera un convertidor de voltaje elevador de tres etapas y con la ayuda de un controlador proporcional-integrativo se tiene un voltaje regulado de 330 V ante cambios de carga de 250 Ω a 1 k Ω .

Palabras claves: fuentes renovables, dinámica, convertidores, sistemas interconectados, estabilidad, celda de combustible.

Abstract.

As a consequence of stricter requirements on energy savings as well as in the use of renewable-energy sources, power electronics is playing an important role in processing electric energy. The above is with the objective to reduce the effects on the climate change and assure the availability of energy in the future. The power converters have become important equipment to be used in processing energy from renewable sources; however, a major drawback of these energy sources is that they are not constant. They have dynamics that had to be taken into consideration when designing a controller. In the open literature, the input source of a converter is usually assumed as constant; at the same time, if the input source comes from renewable-energy sources, the aforementioned assumption is not longer valid. Moreover, the above system can be studied using interconnected theory as the dynamics of the power converter and the renewable-energy source form a complete system. The research in power electronics has devoted a great time in study the dynamics of power converters but neglected the dynamics of systems interconnected to them. Recent work has been dedicated the study to the interconnection of renewable-energy sources, but the results are not well known. In this work, the mathematical theory of interconnected systems is given where the stability at the equilibrium point is studied. In particular, the study of the stability conditions of the interconnected system Fuel-cell stack/ power converter. Experimental results are shown using a three-stage cascade boost converter where the asymptotic stability of the equilibrium is shown. Several theorems are given for the linear and nonlinear models. Later, an average current-mode controller is designed for the boost converter, such that a regulated output voltage of 330 V is obtained. The output voltage remains constant even for large changes in the load from 250 Ω to 1 k Ω .

Keywords: renewable sources, dynamic, converter, systems interconnected, stability, fuel cell.

Índice general

1	Generalidades de sistemas interconectados.	1
1.1	Antecedentes de sistemas dinámicos interconectados.	1
1.2	Propuesta del presente trabajo	4
2	Teoría básica de sistemas interconectados.	6
2.1	Sistemas Lineales	6
2.2	Sistemas no lineales	8
2.2.1	Teorema de Hartman-Grobman	10
2.2.2	Teorema de Lyapunov	10
2.2.3	Teorema de LaSalle.	13
2.2.4	Estabilidad de entrada a estado.	14
2.2.5	Estabilidad asintótica de sistemas conectados en cascada.	15
2.2.6	ISS-función de Lyapunov.	16
2.3	Estabilidad de sistemas interconectados.	17
3	Interconexión de un módulo de celdas de combustible y convertidor de voltaje.	21
3.1	Modelo eléctrico del módulo de celdas de combustible PEM.	21
3.1.1	Tipos de celda de combustible.	22
3.1.2	Principios básicos de un módulo de celdas de combustible PEM.	23
3.1.3	Modelo eléctrico de un módulo de celdas de combustible PEM.	24
3.1.4	Modelo del módulo de celdas de combustible y convertidor de voltaje elevador.	26
3.1.5	Sistema dinámico del módulo de celdas de combustible convertidor de voltaje elevador.	28
3.1.6	Análisis lineal del sistema.	28
3.1.7	Análisis no lineal del sistema interconectado.	29
3.1.8	Función de Lyapunov para el sistema módulo de celdas de combustible/convertidor elevador.	31
3.1.9	Función de Lyapunov del convertidor en cascada reductor.	32
4	Resultados experimentales	34
4.1	Análisis lineal del sistema módulo de celdas de combustible/convertidor elevador de n etapas.	35
4.2	Característica del módulo de celdas de combustible PEM.	36

4.3	Diseño de un regulador conmutado	38
4.3.1	Diseño de lazo de corriente	39
4.3.2	Diseño de lazo de voltaje	40
4.4	Pruebas en lazo abierto	43
4.5	Pruebas en lazo cerrado	43
5	Conclusiones	47
5.1	Comentarios finales	47
5.2	Trabajo a futuro	48
	Bibliografía	49

Capítulo 1

Generalidades de sistemas interconectados.

1.1 Antecedentes de sistemas dinámicos interconectados.

Un área importante de las matemáticas es el estudio de los sistemas dinámicos, los análisis son importantes para poder entender y explicar los comportamientos físicos de algún fenómeno. El campo de estudio de los sistemas dinámicos se enfoca muchas veces en problemas de estabilidad, ciclos límites, bifurcación, entre otras, por ello la importancia de su estudio e investigación. Hasta nuestra actualidad se han desarrollado teorías de mucha utilidad para comprender el comportamiento de un sistema dinámico, tanto para sistemas lineales que son las primeras etapas de análisis hasta el análisis de sistemas no lineales [1, 15]. El gran esfuerzo realizado por parte de la comunidad científica para desarrollar métodos que nos puedan ayudar a garantizar condiciones de estabilidad global de sistemas dinámicos no lineales, llevo a desarrollar conceptos como la estabilidad de entrada a estado (ISS por sus siglas en inglés, Input-to-State Stable) ó conceptos como de integral estable de entrada a estado (iISS por sus siglas en inglés, integral Input-to-State Stable), tales conceptos son de utilidad para el análisis de los sistemas conectados en cascada y sistemas interconectados. Las definiciones formales de ISS e iISS serán mencionadas en el capítulo siguiente.

En la literatura, se han realizado análisis y encontrado condiciones de estabilidad de sistemas interconectados no lineales. Una forma muy útil de establecer estabilidad de sistemas interconectados retroalimentados, consiste en que los subsistemas sean ISS de ganancia pequeña. Uno de los análisis propuestos para estudiar sistemas retroalimentados, es usar el teorema de ganancia pequeña, véase [2, 3], esta idea fue posteriormente extendida en [4, 5] cuando se propone el teorema ISS de ganancia pequeña.

Condicionar que los sistemas interconectados sean ISS, por sí mismo no muestra una forma explícita sobre cómo construir una función de Lyapunov para probar la estabilidad del sistema interconectado. Sin embargo, una de las ideas propuestas es construir herramientas con la cual sea posible obtener de manera mucho más sencilla la función de Lyapunov del sistema interconectado y poder establecer las condiciones que nos ayuden a garantizar estabilidad. Es importante proporcionar una prueba del teorema ISS de ganancia pequeña para poder obtener una función de Lyapunov del sistema interconectado de forma directa y garantizar estabilidad global uniformemente asintóticamente estable como se muestra en [6, 7].

Considere el siguiente sistema interconectado:

$$\begin{aligned} S_1 : \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2), \\ S_2 : \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2), \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ y $f_i(t, 0, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$. La función $f_i(t, x_1, x_2)$ es localmente Lipschitz en x_i , $i = 1, 2$ y continua por pedazos en t . Sea $V(t, x_1, x_2) \in C^1$ función de Lyapunov que nos garantiza estabilidad de (1.1), donde $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(|x|) &\leq V(t, x) \leq \bar{\alpha}(|x|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -\alpha(|x_2|) + \sigma(|x_1|) \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $x = (x_1, x_2)$, $f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x))$ y con alguna $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \alpha, \sigma \in K_\infty$. El interés será enfocado a la función de Lyapunov del sistema (1.1) que se encuentran interconectados como se muestra en la figura 1.1.

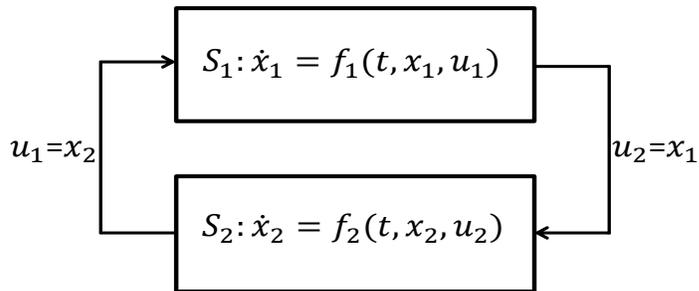


Figura 1.1: Sistemas interconectados.

Una de las ideas propuestas en [8], es introducir una parametrización en una de las entradas de los sistemas y poder garantizar estabilidad global bajo la condición de estabilidad de entrada a estado. Se sugiere como deducir una entrada apropiada y una función de Lyapunov para establecer la estabilidad del sistema interconectado. Al suponer que se conoce la entrada y condiciones ISS del sistema S_2 , entonces es posible desarrollar una forma sistemática de:

- i) generar funciones candidatas de entrada que acepta el sistema S_1 .
- ii) generar funciones de Lyapunov que garantizan la estabilidad global del sistema interconectado (1.1).

Otra herramienta desarrollada para determinar estabilidad global asintótica de sistemas interconectados no lineales es la que se presenta en [9]. La idea principal es flexibilizar la definición de ISS, donde el primer sistema y el segundo sistema se consideran iISS y ISS respectivamente. Es importante mencionar que si un sistema dinámico S es ISS entonces el sistema es iISS, lo contrario no siempre es cierto. En [9] se desarrolla un nuevo criterio de estabilidad, basado en la parametrización de la velocidad de suministro de los sistemas interconectados iISS y ISS respectivamente. Por lo tanto, el trabajo analítico descrito anteriormente en [8] se generaliza a sistemas iISS [10].

El criterio de estabilidad llamado iISS-ISS de ganancia pequeña, cubre un amplio rango de no linealidades que el criterio de ganancia pequeña del teorema ISS. El análisis de estabilidad de un sistema interconectado S_1 con condiciones ISS y S_2 con condiciones iISS está detallada en [11, 12].

La clase de sistemas ISS han jugado un papel muy importante [13, 14, 19]. El teorema ISS de ganancia pequeña es una herramienta muy útil para el análisis de sistemas retroalimentados interconectados. En contraste, el concepto iISS aún es complicado explorar su análisis, aunque el concepto y propiedades de los sistemas iISS se han investigado en [10, 16].

Los sistemas interconectados pueden ser estudiados por criterios de estabilidad tradicional, tales como el teorema de ganancia pequeña o los teoremas de pasividad, que proveen condiciones suficientes para la existencia de soluciones. Por lo tanto, en [17] se analiza sistemas generales, principalmente cuando no se conocen sus soluciones y la forma en que se puede encontrar para sistemas que no están cubiertos por los criterios de estabilidad tradicional.

El análisis de estabilidad se hace simple al conocer la función de Lyapunov del sistema. Pero encontrar una función de Lyapunov es un arte y generalmente una tarea muy complicada especialmente para sistemas de dimensiones grandes. Una de las tantas formas de atacar el problema es dividir el sistema en subsistemas interconectados. La idea propuesta en [18] es encontrar las funciones de Lyapunov de los subsistemas y luego combinarlas para obtener una función de Lyapunov del sistema general. Aquí tendría que tomarse en cuenta de que los subsistemas están interconectados en una forma no lineal y que es posible que existan entradas externas que puedan influir en el sistema que deben ser tomadas en cuenta.

¿Por qué el interés de estudiar sistemas dinámicos interconectados? es por el hecho de analizar sus aplicaciones en el ámbito real, ya que la mayoría de los fenómenos se

encuentran relacionados o interconectados y pueden ser analizados desde el enfoque de los sistemas dinámicos interconectados. El interés en este trabajo estará enfocado en el sistemas dinámicos que modela un módulo de celdas de combustible y el convertidor de voltaje elevador.

Actualmente gran parte de las energías que utilizamos, provienen de fuentes de energías no renovables, como son: el gas, el carbón, el petróleo y otros. En estos últimos años, se ha realizado un gran esfuerzo de investigación para desarrollar sistemas de generación de energía eléctrica basados en fuentes de energías renovables. Como ya bien se sabe existe un gran número de fuentes de energías renovables, como son: la eólica, la fotovoltaica, la mareomotriz, la geotérmica, celdas de combustibles y otras [20].

El uso de celdas de combustible es una alternativa bastante atractivas para la generación de energía eléctrica [21]. Existen varios tipos de celdas de combustible clasificadas según el tipo de electrolito que utilizan [22, 23]. Uno de las más prometedoras debido a su múltiple uso en aplicaciones estacionarias o en transportes, son las celdas de membrana de intercambio protónico (PEMFC por sus siglas en ingles), debido a su tamaño relativamente pequeño, a su diseño simple, a su peso relativamente ligero a comparación con las otras y a su funcionamiento a baja temperatura [24]. Los módulos de celdas de combustible PEM poseen su propia dinámica, producen un voltaje de salida en corriente directa de bajo valor y con grandes variaciones, tal que para ser utilizados, es necesario aumentarlo y regularlo por medio de un convertidor de CD a CD. En la literatura existen varias topologías de convertidores de voltajes tipo elevador; una de las más interesantes a considerar, ya que ofrece amplios rangos de conversión de voltaje, son los convertidores en cascada tipo elevador [25]. Un hecho interesante en la literatura, las fuentes de energía de estos convertidores casi siempre se han considerado contantes.

1.2 Propuesta del presente trabajo

El objetivo de este trabajo es considerar que la fuente de alimentación del convertidor de voltaje tiene su propia dinámica y por ende se pretende analizar el sistema dinámico de la celda de combustible (PEM) y el sistema dinámico del convertidor de voltaje como sistema interconectado. Establecer las ecuaciones matemáticas de dicho modelo y encontrar las condiciones de estabilidad del punto de equilibrio del sistema. La organización de este documento es la siguiente.

En el Capítulo 2, se discute la teoría básica de los sistemas dinámicos y de los sistemas dinámicos interconectados. El trabajo es encontrar bajo qué condiciones el sistema interconectado garantiza estabilidad en el punto de equilibrio. Como un primer enfoque, se muestran condiciones de estabilidad del punto de equilibrio de la parte lineal

del sistema, luego se presentan proposiciones y teoremas que nos ayudan a garantizar estabilidad de los sistemas no lineales interconectados, que serán de utilidad para los sistemas a estudiar.

En el Capítulo 3, se hace uso de una función estática de la celda de combustible y con una aproximación de mínimos cuadrados se caracteriza la función estática del módulo de celdas de combustible del laboratorio de Control de Sistemas Electrónicos de Potencia del IPICYT. Por otro lado, en la literatura abierta se dispone del modelo del convertidor en cascada tipo elevador. Por lo tanto, se tienen los dos sistemas a considerar, el siguiente trabajo es considerar estos dos sistemas de forma interconectada, módulo de celdas de combustible/convertidor elevador. Con ayuda de las proposiciones y teoremas del Capítulo 2, se logra determinar las condiciones de estabilidad de dicho sistema interconectado y posteriormente se propone una función de Lyapunov del sistema interconectado.

En el Capítulo 4, con el resultado del capítulo anterior se analiza el sistema lineal módulo de celdas de combustible/convertidor elevador, se propone una función de Lyapunov y se garantiza la estabilidad asintótica en su punto de equilibrio. Se presentan los resultados experimentales, donde la salida de voltaje del módulo de celdas de combustible esta entre 26 V a 42 V, conectando un convertidor elevador de tres etapas con un cambio de carga de 250Ω a $1 k\Omega$ y con la ayuda de la ingeniería de control utilizando un controlador modo corriente, se regula el voltaje del sistema interconectado módulo de celdas de combustible/convertidor elevador a 330 V.

Finalmente en el Capítulo 5, se realiza una colección de todas las conclusiones a lo largo del trabajo.

Capítulo 2

Teoría básica de sistemas interconectados.

En este capítulo se introducen algunos conceptos básicos de la teoría de sistemas dinámicos y sistemas interconectados, con la finalidad de hacer este trabajo autocontenido. Los teoremas que enunciaremos sin demostración pueden ser consultados en la bibliografía sugerida [1, 15].

2.1 Sistemas Lineales

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y A una matriz de dimensión $n \times n$. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales está definido por

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.1}$$

donde

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}.$$

Sea $x(0) = x_0$, la ecuación (2.1) tiene una única solución,

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad \forall t \geq 0,$$

donde e^{At} es el operador exponencial aplicado a la matriz At [1].

Ejemplo 2.1.1 *Considere el sistema lineal*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2.\end{aligned}$$

Este sistema puede ser escrito de la forma siguiente

$$\dot{x} = Ax$$

donde $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

La solución de este sistema está dada como sigue:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_{10}e^{-t}, \quad \forall t \geq 0 \\ x_2(t) &= x_{20}e^{2t}, \quad \forall t \geq 0.\end{aligned}$$

Note que las soluciones que están sobre el eje x_1 se aproximan al origen cuando $t \rightarrow \infty$ y las soluciones que están sobre el eje x_2 se aproximan al origen cuando $t \rightarrow -\infty$. El sistema dinámico definido por este sistema lineal es el mapeo $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado como sigue:

$$\phi(t, x_0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} x_0.$$

donde $x_0^T = [x_{10}, x_{20}]$.

El siguiente teorema nos permite mostrar los subespacios estables e inestables de sistemas lineales de la forma (2.1).

Teorema 2.1.1 *Si los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de una matriz A real de $n \times n$ son distintos, entonces existe un conjunto de eigenvectores v_1, v_2, \dots, v_n que forman una base para \mathbb{R}^n . La matriz $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ es invertible y*

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

Supongamos que la matriz A tiene k eigenvalores negativos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ y $n - k$ eigenvalores positivos $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$, entonces el subespacio estable e inestable del sistema lineal (2.1) es:

$$\begin{aligned}E^s &= \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k) \\ E^u &= \text{Span}(v_{k+1}, \dots, v_n).\end{aligned}$$

Si la matriz A tuviese eigenvalores imaginarios puros, entonces existe un subespacio central E^c .

2.2 Sistemas no lineales

Definición 2.2.1 *Supongamos que $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable sobre E . Entonces $f \in C^1(E)$ si la derivada $Df : E \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ es continua sobre E .*

Teorema 2.2.1 *Supongamos que E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces $f \in C^1(E)$ si y solo si las derivadas parciales de $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ existen y son continuas sobre E .*

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(E)$ y

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Una solución de la ecuación (2.2), es una función $\phi_t(x_0) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\phi_0(x_0) = x_0$ y

$$\frac{d}{dt}(\phi_t(x_0)) = f(\phi_t(x_0)).$$

A toda ecuación diferencial (2.2) se le puede asociar un sistema dinámico. Si $\phi_t(x_0)$ es la solución que pasa en tiempo cero por x_0 [1].

Definición 2.2.2 *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Un sistema dinámico sobre E es una aplicación de clase $C^1(E)$*

$$\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

tal que si $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ entonces ϕ_t satisface

- i) $\phi_0(x) = x$ para todo $x \in E$
- ii) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{(t+s)}(x)$ para todo $s, t \in E$.

Para todo sistema de la forma (2.2), es de interés, saber si existe solución y que cumpla la condición que sea única, bajo la hipótesis que $f \in C^1(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . El siguiente teorema es de mucha utilidad para este problema.

Teorema 2.2.2 (*Teorema fundamental de la existencia-unicidad*). Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene x_0 y suponga que $f \in C^1(E)$. Entonces existe un $a > 0$ tal que el problema del valor inicial

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(0) = x_0,$$

tiene una única solución $x(t)$ en el intervalo $[-a, a]$.

Aún cuando este teorema nos garantiza la existencia de una solución para el sistema (2.2) cuando $f \in C^1(E)$, por lo general es difícil encontrarla de forma explícita. Por esta razón, daremos algunas herramientas que permitan comprender las soluciones de manera cualitativa.

Definición 2.2.3 Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$, sea $\phi(t, x_0)$ una solución del problema de valor inicial (2.2) definido en un intervalo máximo de existencia $I(x_0)$. Entonces para $t \in I(x_0)$, el mapeo ϕ_t definidos como

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

se les llama flujo de la ecuación diferencial (2.2).

Una buena forma para empezar a analizar sistemas no lineales de la forma (2.2), es determinar los puntos de equilibrios y describir el comportamiento de la solución cerca de sus puntos de equilibrio. Por lo tanto es de interés en mostrar el comportamiento local de (2.2) cerca del punto de equilibrio.

Definición 2.2.4 Un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado un punto de equilibrio de (2.2) si $f(x^0) = 0$. Un punto de equilibrio x^0 es llamado punto de equilibrio hiperbólico de (2.2) si todos los valores propios de la matriz $Df(x^0)$ tienen parte real distinto de cero.

Sea x^0 un punto de equilibrio de (2.2)

$$\dot{x} = Ax \tag{2.3}$$

con la matriz $A = Df(x^0)$. La función lineal $Ax = Df(x^0)x$ es llamada la parte lineal de (2.2) en x^0 .

2.2.1 Teorema de Hartman-Grobman

Uno de los resultados importantes en la teoría local de ecuaciones diferenciales ordinarias, es el teorema de Hartman-Grobman, el cual muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x^0 , el sistema no lineal (2.2) se comporta como un sistema lineal.

Definición 2.2.5 *Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales tales como (2.2) y (2.3) son llamados topológicamente equivalente en una vecindad del origen si existe un homeomorfismo H que mapea un conjunto abierto U conteniendo el origen sobre un conjunto abierto B conteniendo el origen, que mapea trayectorias de (2.2) en U sobre trayectorias de (2.3) en B y preserva la orientación por el tiempo en el sentido que si una trayectoria se dirige de x_1 a x_2 en U , entonces la trayectoria se dirige de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en B . Si el homeomorfismo H preserva la parametrización por el tiempo, entonces los sistemas (2.2) y (2.3) son llamados topológicamente conjugados en una vecindad del origen.*

Teorema 2.2.3 (Hartman-Grobman). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n conteniendo el origen, $f \in C^1(E)$, y ϕ_t el flujo del sistema no lineal (2.2). Suponga que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene valores propios con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H definido de una vecindad de cero U sobre una vecindad de cero B , tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$,*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0); \quad (2.4)$$

es decir H envía trayectorias del sistema (2.2) cerca del origen en trayectorias del sistema (2.3) cerca del origen y preserva la parametrización por el tiempo.

Cuando existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow B$ que cumple con la propiedad (2.4), se dice que los sistemas (2.2) y (2.3) son topológicamente conjugados en U . En particular, este teorema nos permite comprender lo que ocurre en una vecindad de un punto de equilibrio analizando la parte lineal del sistema alrededor del punto de equilibrio, siempre que éste sea hiperbólico. Cuando no es posible determinar la estabilidad de un punto de equilibrio x^0 a partir de su parte lineal, se recurre a otra herramienta como es la función de Lyapunov, la cual definiremos en la siguiente sección.

2.2.2 Teorema de Lyapunov

Antes de enunciar la función de Lyapunov, es necesario expresar las siguientes definiciones de estabilidad.

Definición 2.2.6 Sea ϕ_t que denota el flujo de la ecuación diferencial (2.2) definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto de equilibrio x^0 de (2.2) es estable si para toda $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_\delta(x^0)$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\phi_t(x) \in B_\epsilon(x^0).$$

El punto de equilibrio x^0 es inestable si no es estable. El punto de equilibrio x^0 es asintóticamente estable, si es estable y existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_\delta(x^0)$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x^0.$$

Teorema 2.2.4 Si x^0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema no lineal (2.2) y $\text{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0$ para todo eigenvalor λ_j de la matriz $Df(x^0)$, entonces dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_\delta(x^0)$, el flujo $\phi_t(x)$ de (2.2) satisface

$$|\phi_t(x) - x^0| \leq \epsilon e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 2.2.7 Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(E)$, $V \in C^1(E)$ y ϕ_t el flujo de la ecuación diferencial (2.2). Para $x \in E$ la derivada de la función $V(x)$ a lo largo de la solución $\phi_t(x)$ es

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(x)) \Big|_{t=0} = DV(x)f(x).$$

Una función V que satisfaga la hipótesis del siguiente teorema, se le conoce como función de Lyapunov.

Teorema 2.2.5 Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x^0 . Suponga que $f \in C^1(E)$ y que $f(x^0) = 0$. Suponga además que existe una función $V \in C^1(E)$ que satisface $V(x^0) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq x^0$. Entonces

- a) si $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda $x \in E$, x^0 es estable;
- b) si $\dot{V}(x) < 0$ para toda $x \in E \setminus \{x^0\}$, x^0 es asintóticamente estable;
- c) si $\dot{V}(x_0) > 0$ para toda $x \in E \setminus \{x^0\}$, x^0 es inestable.

Ejemplo 2.2.1 Considere el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y^3 \\ \dot{y} &= x^3. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Los valores propios de la parte lineal de este sistema en $(0, 0)$ son ceros, por lo que no podemos utilizar el teorema de Hartman-Grobman, para deducir la estabilidad.

Se propone para éste sistema una función de Lyapunov de la forma

$$V(x, y) = x^4 + y^4.$$

tal que su derivada es

$$\dot{V}(x, y) = 4x^3\dot{x} + 4y^3\dot{y} = 0,$$

y por el teorema anterior, tenemos que el origen es estable.

Antes de seguir, es importante tener la noción de comparación de funciones, para ello se dispone de las siguientes definiciones [15].

Definición 2.2.8 Una función continua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase K , si α es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Es de clase K_∞ si $a = \infty$ y $\alpha(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Definición 2.2.9 Una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase K_L si para cada s fijo el mapeo $\beta(r, s)$ es de clase K con respecto a r , para cada r fijo el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.

La estabilidad o la estabilidad asintótica, propiedad del punto de equilibrio del sistema (2.2) puede ser probada por el criterio de Lyapunov, en términos de comparación de funciones, tal que pueden ser expresadas como sigue:

Teorema 2.2.6 Sea $V : B_d \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ donde $V \in C^1(E)$ tal que para funciones $\underline{\alpha}(\cdot)$, $\bar{\alpha}(\cdot)$ de clase K , definido sobre $[0, d)$

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|), \quad \forall \|x\| < d.$$

Si $\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$, $\forall \|x\| < d$, el punto de equilibrio x^0 de (2.2) es estable.

Si para alguna función $\alpha(\cdot)$ de clase K definida sobre $[0, d)$,

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -\alpha(\|x\|), \quad \forall \|x\| < d$$

el punto de equilibrio x^0 de (2.2) es localmente asintóticamente estable.

Si $d = \infty$ y $\underline{\alpha}(\cdot)$, $\bar{\alpha}(\cdot)$ funciones de clase K_∞ , el sistema (2.2) es globalmente asintóticamente estable en su punto de equilibrio x^0 .

Lema 2.2.1 *El punto de equilibrio x^0 del sistema no lineal (2.2) es globalmente asintóticamente y localmente exponencialmente estable si y solo si existe una función suave $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y funciones de clase K_∞ , $\underline{\alpha}(\cdot)$, $\bar{\alpha}(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ y números reales $\delta > 0$, $a > 0$, $b > 0$, tal que*

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -\alpha(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

y $\underline{\alpha}(s) = as^2$, $\alpha(s) = bs^2$ para toda $s \in [0, \delta]$.

2.2.3 Teorema de LaSalle.

Cuando no es posible verificar si un punto de equilibrio x^0 es asintóticamente estable por medio de una función de Lyapunov, pero de ésta se obtiene que el punto es estable, es decir, cuando se tiene $\dot{V}(x) \leq 0$ es posible utilizar el teorema de invariancia de LaSalle para verificar si el punto de equilibrio x^0 es asintóticamente estable [15].

Definición 2.2.10 *El conjunto de todos los puntos límites positivos de $x(t)$ se llama conjunto límite positivo de $x(t)$ y se denota por L^+ .*

Definición 2.2.11 *Un conjunto M se dice que es un conjunto invariante respecto a $\dot{x} = f(x)$ si*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

es decir, si una solución $x(t)$ pertenece a M en un instante t , siempre permanecerá en el conjunto M .

Definición 2.2.12 *Un conjunto M se dice que es un conjunto positivamente invariante si*

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0.$$

Lema 2.2.2 Si una solución $x(t)$ en $\dot{x} = f(x)$ es acotada y permanece en el dominio E para toda $t \geq 0$, entonces su conjunto límite positivo L^+ es un conjunto invariante, no vacío y compacto, además $x(t) \rightarrow L^+$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.2.7 (LaSalle). Sea $\Omega \subset E$ un conjunto compacto positivamente invariante con respecto a $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea D el conjunto de todos los puntos de Ω donde $\dot{V} = 0$. Sea M el mayor conjunto invariante contenido en D , entonces toda solución que inicia en Ω se aproxima a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 2.2.1 Sea x^0 un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y positiva en el dominio E que contiene el punto x^0 , tal que $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Sea $S = \{x \in E / \dot{V}(x) = 0\}$ y suponga que ninguna solución distinta de x^0 puede permanecer en S , entonces el punto de equilibrio x^0 es asintóticamente estable.

2.2.4 Estabilidad de entrada a estado.

Considere un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.6)$$

con estado $x \in \mathbb{R}^n$, entrada $u \in \mathbb{R}^m$ en la que $f(0, 0) = 0$ y $f(x, u)$ es localmente Lipschitz sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. La función de entrada $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$. El conjunto de funciones con norma suprema

$$\|u(\cdot)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|$$

es denotado por L_∞^m .

Definición 2.2.13 El sistema (2.6) es llamado estable de entrada a estado (ISS por sus siglas en inglés, input-to-state stable) si existe una función $\gamma_0(\cdot, \cdot)$ de clase K_L y una función $\gamma(\cdot)$ de clase K , llamada una función de ganancia, tal que, para una entrada $u(\cdot) \in L_\infty^m$ y alguna $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la respuesta $x(t)$ de (2.6) en el estado inicial x_0 satisface

$$\|x(t)\| \leq \gamma_0(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.7)$$

Dado, para algún par $\gamma_0 > 0, \gamma > 0, \max\{\gamma_0, \gamma\} \leq \gamma_0 + \gamma \leq \max\{2\gamma_0, 2\gamma\}$, una alternativa a decir que un sistema es estable de entrada a estado es que existe una

función $\gamma_0(\cdot, \cdot)$ de clase K_L y una función $\gamma(\cdot)$ de clase K tal que para alguna entrada $u(\cdot) \in L_\infty^m$ y alguna $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la respuesta $x(t)$ de (2.6) en el estado inicial x_0 satisface

$$\|x(t)\| \leq \max\{\gamma_0(\|x_0\|, t), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

2.2.5 Estabilidad asintótica de sistemas conectados en cascada.

La importancia de encontrar condiciones que nos ayuden a garantizar estabilidad o estabilidad asintótica de un sistema dinámico, se extiende a poder encontrar las mismas condiciones para cuando los sistemas dinámicos están conectados o interconectados. El interés se enfocará en la teoría de los sistemas interconectados, como sigue a continuación.

Esta sección estará enfocada en la conexión en cascada de dos sistemas estables de entrada a estado como se muestra a continuación

Sea

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z) \\ \dot{z} &= g(z, u) \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$ y $f(x, z)$, $g(z, u)$ localmente Lipschitz.

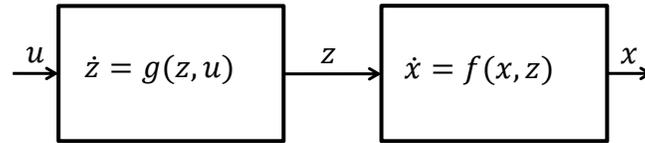


Figura 2.1: Sistemas dinámicos conectados en cascada.

Teorema 2.2.8 *Suponga que el sistema $\dot{x} = f(x, z)$, visto como un sistema con entrada z y estado x es estable de entrada a estado y que el sistema $\dot{z} = g(z, u)$, visto como un sistema con entrada u y estado z es estable de entrada a estado. Entonces el sistema (2.9) es estable de entrada a estado.*

Como resultado inmediato del teorema, cuando $u = 0$ se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.2 *Considere el sistema (2.9) con $u = 0$. Suponga que el sistema $\dot{x} = f(x, z)$, visto como un sistema con entrada z y estado x es estable de entrada a estado*

y que el equilibrio $z = 0$ de $\dot{z} = g(z)$ es globalmente asintóticamente estable. Entonces el punto de equilibrio $(x, z) = (0, 0)$ del sistema (2.9) con $u = 0$, es globalmente asintóticamente estable.

2.2.6 ISS-función de Lyapunov.

Definición 2.2.14 Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . V es llamada ISS-función de Lyapunov para el sistema (2.6) si existe funciones $\underline{\alpha}(\cdot)$, $\bar{\alpha}(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ de clase K_∞ y una función $\chi(\cdot)$ de clase K tal que

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

y

$$\|x\| \geq \chi(\|u\|) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.11)$$

La expresión γ que aparece en la ecuación (2.8) puede ser calculada a partir de la ecuación (2.10) y (2.11), tal que dicha expresión es:

$$\gamma(r) = \underline{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha} \circ \chi(r) \quad (2.12)$$

esta expresión muestra la existencia de un ISS-función de Lyapunov como una condición suficiente para la estabilidad de entrada a estado.

Otra manera de comprobar que una función $V(x)$ es o no una ISS función de Lyapunov para un sistema dado, es la siguiente.

Teorema 2.2.9 El sistema (2.6) es estable de entrada a estado si y solo si tiene una función ISS-Lyapunov.

Lema 2.2.3 Considere el sistema (2.6). Una función de clase C^1 , $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función ISS de Lyapunov para el sistema (2.6) si y solo si existe funciones $\underline{\alpha}(\cdot)$, $\bar{\alpha}(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$ de clase K_∞ y una función $\sigma(\cdot)$ de clase K tal que

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma(\|u\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m.$$

2.3 Estabilidad de sistemas interconectados.

Otra aplicación de los sistemas interconectados en cascada de dos sistemas estables de entrada a estado (ISS), que pueda garantizar que el sistema interconectado también es ISS, como se muestra en la figura 2.2.

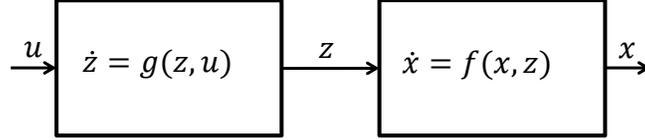


Figura 2.2: Sistemas dinámicos conectados en cascada con entrada u .

Sean los siguientes sistemas con condición ISS

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z) \\ \dot{z} &= g(z, u)\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$ y $f(x, z)$, $g(z, u)$ son localmente Lipschitz.

Del análisis que se tiene del sistema (2.13), se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1 *Suponga que el sistema $\dot{x} = f(x, z)$ visto como un sistema con entrada z y estado x es ISS y que el sistema $\dot{z} = g(z, u)$ visto como un sistema con entrada u y estado z es ISS. Entonces el sistema (2.13) es ISS [15].*

Antes de seguir procedemos a mostrar la definición de contracción simple.

Definición 2.3.1 *Se dice que $\gamma_1 \circ \gamma_2$ es una contracción simple si $\gamma_1 \circ \gamma_2(r) < r, \forall r > 0$*

Considere el siguiente sistema interconectado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u),\end{aligned}\tag{2.14}$$

donde $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $f_1(0, 0) = 0$, $f_2(0, 0, 0) = 0$. Se supone que el primer subsistema visto como un sistema con estado interno x_1 y entrada x_2 es estable de entrada a estado. Igualmente se supone que el segundo subsistema, visto como un sistema con estado interno x_2 y entrada (x_1, u) es estable de entrada a estado.

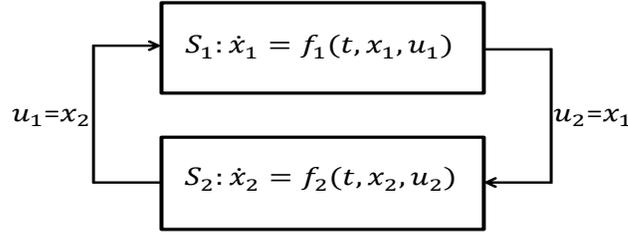


Figura 2.3: Sistemas de retroalimentación interconectados.

Supóngase que los sistemas de (2.14) son estables de entrada de estado, entonces por definición, para el primer sistema existe $\gamma_{01}(\cdot, \cdot) \in K_L$ y $\gamma_1(\cdot) \in K$, con entrada $x_2 \in L_\infty^{n_2}$ que satisface:

$$\begin{aligned} \|x_1(t)\| &\leq \max\{\gamma_{01}(\|x_{01}\|, t), \gamma_1(\|x_2(\cdot)\|_\infty)\}, \quad \forall t \geq 0 \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| &\leq \gamma_1(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\|). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para el segundo sistema de (2.14), existe $\gamma_{02}(\cdot, \cdot) \in K_L$, $\gamma_2(\cdot) \in K$ y $\gamma_u(\cdot) \in K$, con entrada $x_1(\cdot) \in L_\infty^{n_1}$, $u(\cdot) \in L_\infty^m$ y satisface:

$$\begin{aligned} \|x_2(t)\| &\leq \max\{\gamma_{02}(\|x_{02}\|, t), \gamma_2(\|x_1(\cdot)\|_\infty), \gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\}, \quad \forall t \geq 0 \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\| &\leq \max\{\gamma_2(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\|), \gamma_u(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|)\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Basado en el teorema 10.6.1 de [15], se desarrolla una prueba que establece la condición de estabilidad de sistemas interconectados.

Uno de los resultados interesantes de cómo saber si un sistema interconectado es un sistema ISS, se muestra en la teorema siguiente. Dicha teorema será de mucha utilidad para enfocarnos en los sistemas que serán analizados en adelante.

Teorema 2.3.2 *Si existe γ_1 y γ_2 tal que $\gamma_1\gamma_2$ es una contracción simple. El sistema (2.14) visto como un sistema con estado $x = (x_1, x_2)$ y entrada u , es estable de entrada a estado. En particular las funciones de clase K*

$$\begin{aligned} \gamma_0(r) &= \max\{2\gamma_{01}(r), 2\gamma_{02}(r), 2\gamma_1\gamma_2(r), 2\gamma_2\gamma_1(r)\} \\ \gamma(r) &= \max\{2\gamma_1\gamma_u(r), 2\gamma_u(r)\} \end{aligned}$$

es tal que la respuesta $x(t)$ de la entrada $u(\cdot) \in L_\infty^m$ es acotada y

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_0(\|x_0\|), \gamma(\|u(\cdot)\|)\} \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \gamma(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|). \end{aligned}$$

Prueba : Por (2.15) y (2.16) se tiene

$$\begin{aligned}\|x_1(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_{01}(\|x_{01}\|), \gamma_1(\|x_2(\cdot)\|_\infty)\} \\ \|x_2(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_{02}(\|x_{02}\|), \gamma_2(\|x_1(\cdot)\|_\infty), \gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\}\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}\|x_1(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_{01}(\|x_{01}\|), \gamma_1\sigma\gamma_{02}(\|x_{02}\|), \\ &\quad \gamma_1\sigma\gamma_2(\|x_1(\cdot)\|_\infty), \gamma_1\sigma\gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\} \\ \|x_2(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_{02}(\|x_{02}\|), \gamma_2\sigma\gamma_{01}(\|x_{01}\|), \\ &\quad \gamma_2\sigma\gamma_1(\|x_2(\cdot)\|_\infty), \gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\}.\end{aligned}$$

Si $\gamma_1\sigma\gamma_2$ y $\gamma_2\sigma\gamma_1$ es una contracción simple, entonces

$$\begin{aligned}\|x_1(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_{01}(\|x_{01}\|), \gamma_1\sigma\gamma_{02}(\|x_{02}\|), \\ &\quad \gamma_1\sigma\gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\} \\ \|x_2(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_{02}(\|x_{02}\|), \gamma_2\sigma\gamma_{01}(\|x_{01}\|), \\ &\quad \gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\}\end{aligned}$$

por la siguiente desigualdad

$$\|x(\cdot)\|_\infty \leq \max\{2\|x_1(\cdot)\|_\infty, 2\|x_2(\cdot)\|_\infty\}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\max\{2\gamma_{01}(\|x_{01}\|), 2\gamma_{02}(\|x_{02}\|), \\ &\quad 2\gamma_1\sigma\gamma_{02}(\|x_{02}\|), 2\gamma_2\sigma\gamma_{01}(\|x_{01}\|)\}, \\ &\quad \max\{2\gamma_1\sigma\gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty), 2\gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\}\} \\ \|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_0(\|x_0\|), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\}.\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_0(\|x_0\|), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\} \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \gamma(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Sea el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}S_1 : \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, w_1) \\ S_2 : \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, w_2)\end{aligned}\tag{2.18}$$

donde $f_i(t, 0, 0, 0) = 0$ para toda $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$ y $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $w_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ tal que las $f_i(t, \dots)$ son continuas por pedazos en t y localmente Lipschitz en el resto de sus argumentos y $i = 1, 2$.

Proposición 2.3.1 *Suponga que existe $V_i \in C^1$, $i = 1, 2$, tal que $V_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para toda $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ y $t \in \mathbb{R}^+$,*

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_i(\|x_i\|) &\leq V_i(t, x_i) \leq \bar{\alpha}_i(\|x_i\|) \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} f_1(t, x_1, x_2) &\leq -\alpha_1(\|x_1\|) + \sigma_1(\|x_2\|) + \sigma_{w_1}(\|w_1\|) \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} f_2(t, x_1, x_2) &\leq -\alpha_2(\|x_2\|) + \sigma_2(\|x_1\|) + \sigma_{w_2}(\|w_2\|) \end{aligned}$$

donde $\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i, \alpha_i \in K_\infty$ y $\sigma_i, \sigma_{w_i} \in K$. Si existe $c_i > 1$, $i = 1, 2$, tal que se satisface

$$\underline{\alpha}_1^{-1} \circ \bar{\alpha}_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ c_1 \sigma_1 \circ \underline{\alpha}_2^{-1} \circ \bar{\alpha}_2 \circ \alpha_2^{-1} \circ c_2 \sigma_2(s) < s, \forall s \in (0, \infty)$$

con $(c_1 - 1)(c_2 - 1) > 1$, entonces el sistema (2.18) es ISS con respecto a $x = (x_1, x_2)$ y $w = (w_1, w_2)^T$ [6].

El interés de buscar estabilidad o estabilidad global de los sistemas interconectados, tal que cumplen la condición que son sistemas estables de entrada a estado (ISS), es con la finalidad de utilizarla en la interconexión del sistema módulo de celdas de combustible/convertidor. Este problema es tratado en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Interconexión de un módulo de celdas de combustible y convertidor de voltaje.

Debido a los problemas ambientales de contaminación se busca que gran parte de nuestras energías provengan de fuentes de energías renovables y limpias con el medio con el fin de disminuir los niveles de contaminación. Las fuentes de energías más limpias conocidas actualmente son: eólica, solar, mareomotriz, celdas de combustibles y otras [20]. El problema de estas fuentes, es que producen energía con grandes variaciones y por ello es necesario regularlas. El trabajo de regular estas energías es con la ayuda de la electrónica de potencia [31, 32].

3.1 Modelo eléctrico del módulo de celdas de combustible PEM.

Una de las tecnologías que ha tomado gran interés en las últimas décadas son las celdas de combustible, se espera que esta tecnología proporcione un impulso importante para el suministro de energía necesario para desarrollar a la industria, transporte, centros para la generación de electricidad y otros. Actualmente se encuentran disponibles algunas aplicaciones con celdas de combustibles; sin embargo, otras aplicaciones se encuentran a un nivel experimental de investigación.

Algunos aspectos importantes de interés en la etapa de investigación son: buscar nuevos materiales para fabricación y construcción de componentes, nuevos modelos dinámicos, obtención de topologías eficientes de sistemas de control y potencia, sistemas experimentales demostrativos, aplicaciones estacionarias, aplicaciones móviles y otros.

En el caso del modelado es de gran importancia entender el comportamiento de un módulo de celda combustible, ya que permite conocer la respuesta de la celda en caso de perturbaciones que serán de interés para el diseño y construcción de estrategias de control.

3.1.1 Tipos de celda de combustible.

Actualmente se han desarrollado una diversidad de celdas de combustible. Cada una de ellas utiliza diferentes tipos de electrolitos y diferentes catalizadores que operan a diferentes temperaturas, a continuación mencionamos algunas de ellas.

PEMFC (membrana de intercambio protónico). Actúa a temperaturas bajas alrededor de los $80^{\circ}C$, con las ventajas de una mayor densidad de potencia y vida útil. Es la más utilizada en transporte de vehículos ligeros.

DMFC (metanol directo). Consiste en una pequeña celda tipo PEMFC, la cual funciona con metanol sin reformar; es decir, la fuente de hidrógeno. Es utilizada para aplicaciones portátiles y microelectrónica.

SOFC (óxido sólido). Opera a una alta temperatura arriba de los $650^{\circ}C$ y hasta $1000^{\circ}C$; produce vapor, CO_2 y electricidad. No requiere metales preciosos para el catalizador, ni del proceso de reformación. Puede utilizarse en escalas grandes y pequeñas, en sistemas de alta potencia, incluyendo estaciones de generación de energía eléctrica para edificios o conjuntos habitacionales.

AFC (alcalina). Es uno de los diseños más viejos y se ha usado desde 1960 en los Estados Unidos en programas espaciales. Su costo es muy alto y requiere hidrógeno y oxígeno puros comprimidos, por lo cual es muy poco comercial. Trabaja a temperaturas entre $150^{\circ}C$ y $200^{\circ}C$. Tiene alrededor de 70% de eficiencia.

PAFC (ácido fosfórico). Se puede aplicar en pequeños sistemas de potencia o estacionarios. Trabaja a temperaturas medias (de $150^{\circ}C$ a $250^{\circ}C$) por eso no es recomendable su uso en automóviles. Requiere de un reformador externo y soporta hasta 1.5% de concentración de monóxido de carbono (CO) en el cátodo.

MCFC (carbonatos fundidos). Es la más adecuada para grandes sistemas de potencia. Actúa a temperaturas aproximadas a $650^{\circ}C$. Tanto su construcción como su operación son más económicas ya que usa níquel como catalizador y como combustible hidrocarburos.

Algunos tipos de módulo celdas de combustible son más adecuados para ciertas aplicaciones que otros, dependiendo de las condiciones de operación bajo las cuales trabajan. El presente trabajo centra su estudio en la celda de combustible PEMFC.

3.1.2 Principios básicos de un módulo de celdas de combustible PEM.

Los módulos de celdas de combustible son una alternativa bastante atractiva para generar energía eléctrica [21]. Una de la más prometedoras es la PEMFC, debido a sus múltiples usos en aplicaciones estacionarias o en transporte, su tamaño es relativamente pequeño, su diseño simple, su peso ligero y su funcionamiento a bajas temperaturas. Una celda de combustible es un dispositivo electroquímico, que transforma la energía de una reacción química en energía eléctrica. En una celda de combustible la energía producida no se agota, ya que el suministro de combustibles es continuo.

Cada celda de un módulo de celdas de combustible PEMFC constan de dos compartimientos para alojar los electrodos separados por una membrana de electrolito de tipo polimérico. Los dos electrodos conectados a los lados de la membrana forman junto con ésta un conjunto membrana-electrodo de la celda individual. El hidrógeno que llega al ánodo se disocia en electrones y protones, los protones generados por la oxidación de hidrógeno migran hacia el cátodo a través de la membrana pero los electrones son forzados a viajar por un circuito externo hasta llegar al cátodo, ya que la membrana está aislada eléctricamente. Finalmente en el cátodo las moléculas de oxígeno reaccionan con los electrones y protones para formar agua.

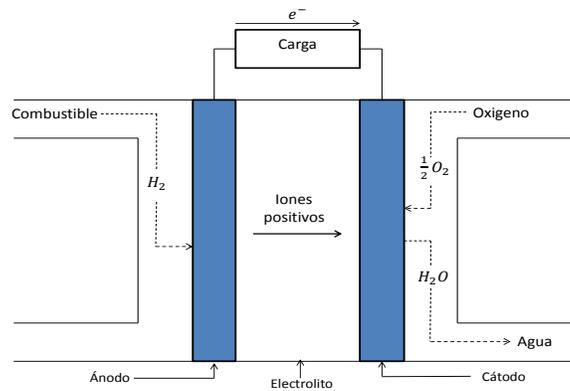
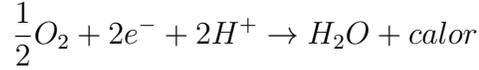


Figura 3.1: Celda de combustible PEM.

La generación de corriente eléctrica de una PEM puede ser descrita por las reacciones que toman lugar en cada uno de sus electrodos. El hidrógeno se suministra al interior de la celda a través de ductos y canales hasta el ánodo, al hacer contacto y en presencia de un catalizador se produce una reacción química que separa los electrones y los protones.



Los protones fluyen a través del electrolito desde el ánodo hasta el cátodo, mientras que los electrones fluyen a través de un circuito externo a la carga. El oxígeno reacciona con los protones y electrones en el cátodo, produciendo agua y calor.



El voltaje que se puede obtener de una celda PEM es muy bajo, por la cual es necesario conectar más celdas en serie de tal manera que se pueda obtener la magnitud apropiada de voltaje suficiente. El interés es estudiar las celdas de combustible con un enfoque eléctrico y esto se realizará en la siguiente sección.

3.1.3 Modelo eléctrico de un módulo de celdas de combustible PEM.

Existen varias formas de modelar un módulo de celdas de combustible, como bien se conoce la celda de combustible puede ser modelada químicamente. En este caso, la celda de combustible se analiza por un modelo eléctrico estático con característica de continuidad y con amplia gama de corrientes, incluida la condición en circuito abierto [26, 27, 28].

Dicho modelo eléctrico consta solo de tres parámetros:

$$e_f(i_f) = \frac{E_0}{1 + \left(\frac{i_f}{I_h}\right)^\delta} \quad (3.1)$$

donde e_f es la tensión de salida del módulo de celdas de combustible, E_0 es el voltaje en circuito abierto e i_f la corriente del módulo de celdas de combustible. Los parámetros I_h y δ son coeficientes que dependen de la humedad del gas y de la temperatura del combustible, estos parámetros deben ser calculados en específico para cada módulo de celdas de combustible.

Debido a los errores de modelado, ruido, instrumentación, etc; la expresión (3.1) no tienen un valor único de I_h y δ para las celdas de combustibles con respecto a los datos experimentales. Por lo tanto es necesario reformular el problema y encontrar la forma de poder aproximar I_h y δ para cada módulo de celdas de combustible en particular, por ello para encontrar I_h y δ será utilizando una aproximación en mínimos cuadrados.

Las derivadas parciales de e_f con respecto a I_h y δ estan dadas por:

$$\frac{\partial e_f}{\partial I_h} = \frac{E_0 i_f^\delta \delta}{I_h^{\delta+1} \left[1 + \left(\frac{i_f}{I_h} \right)^\delta \right]^2}$$

y

$$\frac{\partial e_f}{\partial \delta} = - \frac{E_0 i_f^\delta \ln \left(\frac{i_f}{I_h} \right)}{I_h^\delta \left[1 + \left(\frac{i_f}{I_h} \right)^\delta \right]^2}$$

Sea $(i_f(k), e_f(k))$ datos experimentales del módulo de celdas de combustible del laboratorio, donde $k = 1, \dots, n$ y (I_{h0}, δ_0) condición inicial.

Por la serie de Taylor se tiene:

$$e_f(k) = e_f(I_{h0}, \delta_0, i_f(k)) + \left[\frac{\partial e_f}{\partial I_h}(I_h, \delta), \frac{\partial e_f}{\partial \delta}(I_h, \delta) \right]_{(I_{h0}, \delta_0)} \begin{bmatrix} I_h - I_{h0} \\ \delta - \delta_0 \end{bmatrix}$$

así

$$e_f(k) - e_f(I_{h0}, \delta_0, i_f(k)) = \left[\frac{\partial e_f}{\partial I_h}(I_h, \delta), \frac{\partial e_f}{\partial \delta}(I_h, \delta) \right]_{(I_{h0}, \delta_0)} \begin{bmatrix} I_h - I_{h0} \\ \delta - \delta_0 \end{bmatrix}$$

$$b_k = A_k \Delta \bar{X}$$

como $k = 1, \dots, n$ entonces

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \Delta \bar{X}$$

o

$$B = A \Delta \bar{X}$$

donde $\Delta \bar{X} = \begin{bmatrix} \Delta I_h \\ \Delta \delta \end{bmatrix}$. Por lo tanto $\Delta \bar{X} = (A^T A)^{-1} A^T B$, siempre que $(A^T A)^{-1}$ exista.

Se tiene la primera aproximación de (I_h, δ) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_{h1} &= I_{h0} + \Delta I_h \\ \delta_1 &= \delta_0 + \Delta \delta \end{aligned} \tag{3.2}$$

tómese (3.2) como una nueva condición inicial y se repite el proceso anterior hasta $(\Delta I_h, \Delta \delta)$ sean lo suficientemente pequeños.

En este trabajo se ha utilizado el módulo de celdas de combustible PEM modelo Nexa de la compañía Heliocentrics, el cual se muestra en la figura 3.2.

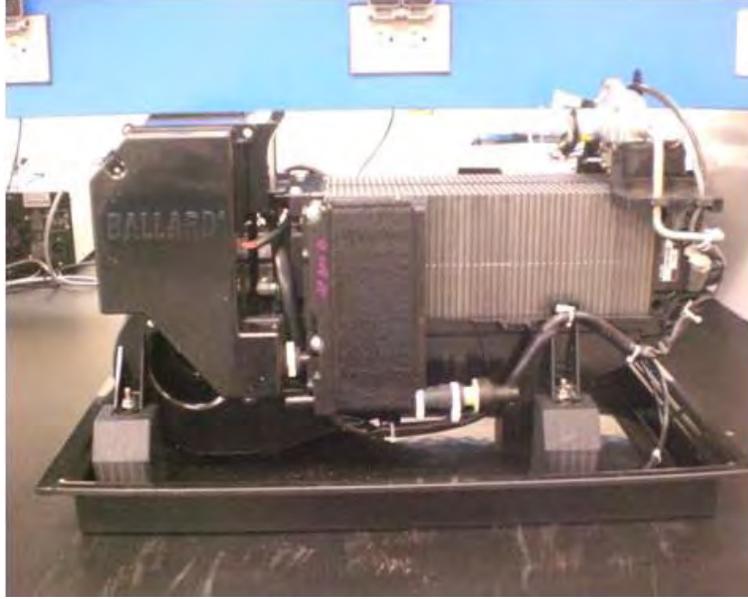


Figura 3.2: Módulo de celdas de combustible Modelo Nexa.

Este módulo es compacto, de bajo mantenimiento y totalmente automatizado que proporciona una potencia máxima de 1.2 kW de corriente directa a un voltaje nominal de salida aproximadamente de 26 V .

En la figura 3.3 se muestran los datos experimentales del módulo de celdas de combustible en donde $E_0 = 41.7 \text{ V}$. Utilizando los datos experimentales y el procedimiento de mínimos cuadrados, se obtiene una aproximación de $I_h = 90.52 \text{ A}$ y $\delta = 0.613$ que serán sustituidas en (3.1). En la figura 3.3 se muestra una comparación entre los datos experimentales y la gráfica que se obtiene por medio de la expresión (3.1), confirmando la precisión del modelo eléctrico estático, que será de utilidad más adelante.

3.1.4 Modelo del módulo de celdas de combustible y convertidor de voltaje elevador.

Una vez obtenida la expresión del modelo eléctrico del módulo, lo siguiente es establecer la expresión que lo conecta con el convertidor, el cual resulta en

$$\dot{e}_f = \frac{i_f}{C_f} - \frac{i_L}{C_f}. \quad (3.3)$$

donde e_f representa el voltaje del módulo de celdas de combustible, i_L es la entrada del módulo de celdas de combustible, C_f el capacitor que acopla el módulo de la celdas

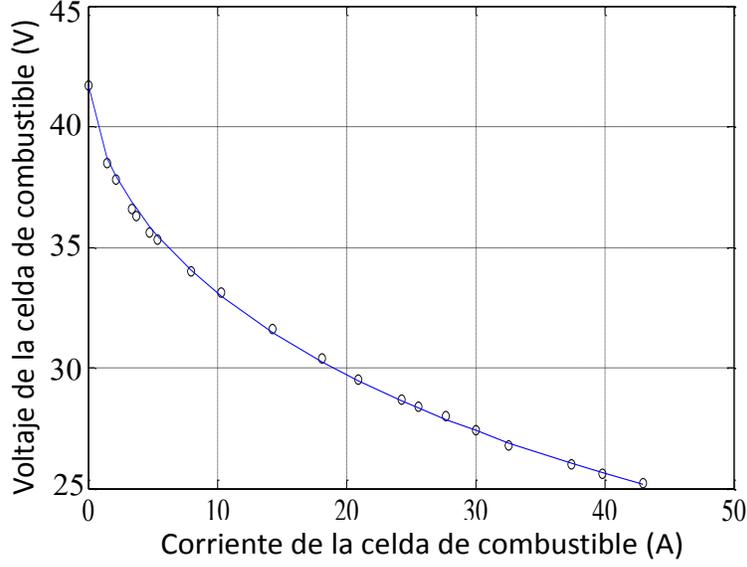


Figura 3.3: Característica estática del módulo de celdas de combustible Modelo Nexa

de combustible con el convertidor de voltaje.

Si despejamos i_f de la ecuación (3.1) y la sustituimos en la ecuación (3.3), se obtiene lo siguiente:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_f = \frac{I_h}{C_f} \left(\frac{E_0}{e_f} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} - \frac{i_L}{C_f} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

donde e_f es el estado del sistema y i_L la entrada del sistema.

En la literatura abierta se conoce el modelo promedio que modela un convertidor de voltaje tipo elevador [29, 30, 31]:

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{i}_L = \frac{e_f}{L} - \frac{(1-u)v_C}{L} \\ \dot{v}_C = \frac{(1-u)i_L}{C} - \frac{v_C}{C} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

donde (i_L, v_C) son la corriente en el inductor y el voltaje en el capacitor respectivamente, (e_f, u) entrada del convertidor, con $u \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ y L, C, R los parámetros del convertidor todos positivos.

Es posible ver que los sistemas (3.4) y (3.5) están interconectados [15], el interés será encontrar las condiciones que deben de cumplirse para que dicho sistema interconectados sea estable.

3.1.5 Sistema dinámico del módulo de celdas de combustible convertidor de voltaje elevador.

Para ejemplificar los sistemas interconectados, se utiliza el sistema S_1 que modela el módulo de celdas de combustible como fuente de energía y el sistema S_2 que modela el convertidor de voltaje, con cambios de variables como sigue $e_f = \tilde{e}_f + E_f$, $i_L = \tilde{i}_L + I_L$ y $v_C = \tilde{v}_C + V_C$.

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{e}}_f = \frac{I_h}{C_f} \left[\left(\frac{E_0}{\tilde{e}_f + E_f} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} - \left(\frac{E_0}{E_f} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] - \frac{\tilde{i}_L}{C_f} \\ \dot{\tilde{i}}_L = \frac{\tilde{e}_f}{L} - \frac{(1-U)\tilde{v}_C}{L} \\ \dot{\tilde{v}}_C = \frac{(1-U)\tilde{i}_L}{C} - \frac{\tilde{v}_C}{CR} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

donde el punto de equilibrio de (3.6) es $(0, 0, 0)$.

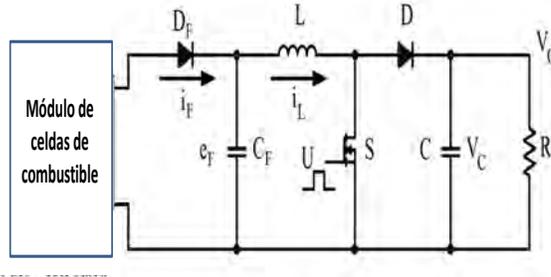


Figura 3.4: Módulo de celdas de combustible/convertidor de voltaje.

3.1.6 Análisis lineal del sistema.

La primera aproximación lineal del sistema (3.6) alrededor del equilibrio $(0, 0, 0)$ es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_f \\ \dot{\tilde{i}}_L \\ \dot{\tilde{v}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta & -\frac{1}{C_f} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{(1-U)}{L} \\ 0 & \frac{(1-U)}{C} & -\frac{1}{CR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_f \\ \tilde{i}_L \\ \tilde{v}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_C^*}{L} \\ -\frac{i_L^*}{C} \end{bmatrix} \tilde{u} \quad (3.7)$$

donde $\Delta = (I_h^\delta + I_L^\delta)^2 / C_f E_0 \delta I_h^\delta I_L^{\delta-1} \geq 0$.

El sistema (3.7) en lazo abierto tiene como polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \left(\frac{1}{C_R} + \Delta \right) \lambda^2 + \left(\frac{(1-U)^2}{CL} + \frac{\Delta}{C_R} + \frac{1}{C_f L} \right) \lambda + \left(\frac{\Delta(1-U)^2}{CL} + \frac{1}{C_f LCR} \right)$$

tal que los coeficientes de este polinomio son todos positivos y por el arreglo de Routh-Hurwitz se tiene

s^3	1	$\frac{(1-U)^2}{CL} + \frac{\Delta}{C_R} + \frac{1}{C_f L}$
s^2	$\frac{1}{C_R} + \Delta$	$\frac{\Delta(1-U)^2}{CL} + \frac{1}{C_f LCR}$
s^1	a_1	0
s^0	$\frac{\Delta(1-U)^2}{CL} + \frac{1}{C_f LCR}$	0

dato que $a_1 = \frac{\left[\frac{(1-U)^2}{C^2_{RL}} + \frac{\Delta}{(CR)^2} + \frac{\Delta^2}{C_R} + \frac{\Delta}{C_f L} \right]}{\frac{1}{C_R} + \Delta} > 0$; por lo tanto, el sistema lineal (3.7) es estable en lazo abierto.

3.1.7 Análisis no lineal del sistema interconectado.

Esta sección estará enfocada en el análisis de estabilidad del sistema (3.6) vista desde el enfoque de sistemas interconectados. Con la ayuda del teorema 2.3.2 se muestra que el sistema (3.6) es estable de entrada a estado.

Es importante para este caso mostrar que cada sistema S_i tienen una ISS-función de Lyapunov, tal que $V \in C^1$. Así como se muestra a continuación.

Para el primer sistema S_1 la función de Lyapunov se selecciona como sigue

$$V(\tilde{e}) = \frac{C_f \tilde{e}_f^2}{2}$$

donde su derivada es

$$\dot{V} \leq |\tilde{e}_f| \left(I_h \left(\left[\frac{E_0}{|\tilde{e}_f| + E_f} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} - \left[\frac{E_0}{E_f} - 1 \right]^{\frac{1}{\delta}} \right) - |\tilde{i}_L| \right).$$

Elegimos una $0 < \epsilon < 1$ tal que

$$(1 - \epsilon)(|\tilde{e}_f|) \geq \frac{E_0}{1 + \left(\frac{|\tilde{i}_L| + I_f}{I_h} \right)^\delta} - E_f$$

donde $I_f = I_h \left(\frac{E_0}{E_f} - 1\right)^{\frac{1}{\delta}}$ y $E_f = \frac{E_0}{1 + \left(\frac{I_f}{I_h}\right)^{\delta}}$. Esto implica que: $\dot{V} \leq |\tilde{e}_f|[(1 - \epsilon)|\tilde{e}_f| - |\tilde{e}_f|] \leq -\epsilon(|\tilde{e}_f|)^2 = -\alpha_1(|\tilde{e}_f|)$ donde $\alpha_1(|\tilde{e}_f|)$ es una función de clase K_{∞} .

Si $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = \frac{|\tilde{e}_f|^2}{2}$, y por la ecuación (2.12), γ_1 es de la forma:

$$\gamma_1 = \underline{\alpha}_1^{-1} \circ \bar{\alpha}_1 \circ \chi_1 = \frac{1}{1 - \epsilon} \left(\frac{E_0}{1 + \left(\frac{|\tilde{i}_L| + I_f}{I_h}\right)^{\delta}} - \frac{E_0}{1 + \left(\frac{I_f}{I_h}\right)^{\delta}} \right).$$

Para el sistema S_2 la función de Lyapunov se selecciona como sigue

$$V = \frac{L\tilde{i}_L^2}{2} + \frac{C\tilde{v}_C^2}{2}$$

donde su derivada es

$$\dot{V} = \tilde{i}_L \tilde{e}_f - \frac{\tilde{v}_C^2}{R}.$$

Elegimos una $0 < \epsilon < 1$ tal que

$$(1 - \epsilon) \frac{|\tilde{v}_C|^2}{R} \geq |\tilde{i}_L| |\tilde{e}_f|$$

esto implica que $\dot{V} \leq -\epsilon \frac{|\tilde{v}_C|^2}{R} = -\alpha_2(|\tilde{v}_C|)$, donde $\alpha_2(|\tilde{v}_C|)$ es una función de clase K_{∞} .

Si $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = \frac{L|\tilde{i}_L|^2}{2} + \frac{C|\tilde{v}_C|^2}{2}$, y por la ecuación (2.12), γ_2 es de la forma:

$$\gamma_2 = X_2 = \frac{|\tilde{i}_L| |\tilde{e}_f|}{1 - \epsilon}.$$

Al conocer las expresiones de γ_1 y γ_2 , se esta interesado en mostrar que $\gamma_2 \circ \gamma_1$ es una contracción simple, por lo que se tiene la composición siguiente:

$$\gamma_2(\gamma_1(|\tilde{i}_L|)) = \frac{|\tilde{i}_L|}{(1 - \epsilon)^2} \left[\frac{E_0}{1 + \left(\frac{|\tilde{i}_L| + I_f}{I_h}\right)^{\delta}} - \frac{E_0}{1 + \left(\frac{I_f}{I_h}\right)^{\delta}} \right]$$

note que $\frac{E_0}{1 + \left(\frac{|\tilde{i}_L| + I_f}{I_h}\right)^{\delta}} \leq \frac{E_0}{1 + \left(\frac{I_f}{I_h}\right)^{\delta}}$, por lo tanto:

$$\gamma_2(\gamma_1(r)) = \frac{r}{(1 - \epsilon)^2} \left[\frac{E_0}{1 + \left(\frac{r + I_f}{I_h}\right)^{\delta}} - \frac{E_0}{1 + \left(\frac{I_f}{I_h}\right)^{\delta}} \right] \leq 0 < r, \quad \forall r > 0,$$

por definición $\gamma_2 \circ \gamma_1$ es contracción simple

$$\gamma_2(\gamma_1(r)) < r, \quad \forall r > 0$$

por el teorema 2.3.2 el sistema (3.6) es estable de entrada a estado.

3.1.8 Función de Lyapunov para el sistema módulo de celdas de combustible/convertidor elevador.

Otra de las tantas formas para mostrar estabilidad de un sistema dinámico es utilizar la herramienta de función de Lyapunov y para el caso del sistema dinámico a estudiar se propone una función de Lyapunov como se muestra a continuación.

Sea el sistema dinámico del módulo de celdas de combustible/convertidor elevador

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}_f &= \frac{I_h}{C_f} \left[\left(\frac{E_0}{\tilde{e}_f + E_f} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} - \left(\frac{E_0}{E_f} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] - \frac{\tilde{i}_L}{C_f} \\ \dot{\tilde{i}}_L &= \frac{\tilde{e}_f}{L} - \frac{(1-U)\tilde{v}_C}{L} \\ \dot{\tilde{v}}_C &= \frac{(1-U)\tilde{i}_L}{C} - \frac{\tilde{v}_C}{CR} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se propone una función de Lyapunov del sistema (3.8) como sigue:

$$V(\tilde{e}_f, \tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = \frac{C_f \tilde{e}_f^2}{2} + \frac{L \tilde{i}_L^2}{2} + \frac{C \tilde{v}_C^2}{2}. \quad (3.9)$$

Nuestro interés se centra en mostrar estabilidad del sistema (3.8) alrededor de su punto de equilibrio, para ello observemos la propiedad de la derivada de (3.9)

$$\dot{V} \leq I_h |\tilde{e}_f| \left[\left(\frac{E_0}{E_f + |\tilde{e}_f|} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} - \left(\frac{E_0}{E_f} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] - \frac{|\tilde{v}_C|^2}{R} \quad (3.10)$$

observe que la parte derecha de la ecuación (3.10) es siempre es negativa, ya que $\left(\frac{E_0}{E_f + |\tilde{e}_f|} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} \leq \left(\frac{E_0}{E_f} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}}$; por lo tanto, el sistema (3.8) es estable localmente.

Es interesante mostrar que el sistema (3.8) sea asintóticamente estable en el origen, para ello se observa que (3.9) es positiva definida y (3.10) es negativa semidefinida. Sea D una vecindad del origen, entonces

$$S = \{(\tilde{e}_f, \tilde{i}_L, \tilde{v}_C) \in D / \dot{V}(\tilde{e}_f, \tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = 0\} = \{\tilde{e}_f = 0, \tilde{v}_C = 0\} \quad (3.11)$$

note que si $(\tilde{e}_f, \tilde{i}_L, \tilde{v}_C)$ es una trayectoria en S , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{e}_f \equiv 0 &\Rightarrow \dot{\tilde{e}}_f \equiv 0 \\ \tilde{v}_C \equiv 0 &\Rightarrow \dot{\tilde{v}}_C \equiv 0 \end{aligned} \Rightarrow \tilde{i}_L \equiv 0 \quad (3.12)$$

Por lo tanto, la única solución que puede estar idénticamente en S es la solución trivial $(\tilde{e}_f, \tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = (0, 0, 0)$, entonces por el corolario 2.2.1, la vecindad del origen es asintóticamente estable.

3.1.9 Función de Lyapunov del convertidor en cascada reductor.

Otro caso de sistema conectado en cascada se observa en la siguiente ecuación del convertidor buck cuadrático. Sea el sistema convertidor de voltaje reductor dado en [33].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{Eu}{L_1} - a \frac{x_2}{L_1} \\ \dot{x}_2 &= b \frac{x_1}{C_1} - f \frac{ux_3}{C_1} \\ \dot{x}_3 &= \frac{ux_2}{L_2} - \frac{x_4}{L_2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{x_3}{C_2} - \frac{x_4}{C_2 R} \end{aligned} \quad (3.13)$$

con punto de equilibrio o nominal (X_1, X_2, X_3, X_4, U) .

La aproximación lineal del sistema (3.13) en el origen es:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -a \frac{\tilde{x}_2}{L_1} + \frac{E}{L_1} \tilde{u} \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= b \frac{\tilde{x}_1}{C_1} - f \frac{U \tilde{x}_3}{C_1} - f \frac{X_3}{C_1} \tilde{u} \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \frac{U \tilde{x}_2}{L_2} - \frac{\tilde{x}_4}{L_2} + \frac{X_2}{L_2} \tilde{u} \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= \frac{\tilde{x}_3}{C_2} - \frac{\tilde{x}_4}{C_2 R} \end{aligned} \quad (3.14)$$

se esta interesado en el sistema (3.14) en lazo abierto con $\tilde{u} = 0$.

Se propone una función de Lyapunov del sistema (3.14) en lazo abierto

$$V = \frac{L_1 b \tilde{x}_1^2}{2} + \frac{C_1 a \tilde{x}_2^2}{2} + \frac{L_2 a e \tilde{x}_3^2}{2} + \frac{C_2 a e \tilde{x}_4^2}{2} \quad (3.15)$$

al buscar las condiciones para que $\dot{V} \leq 0$ se tiene la siguiente expresión

$$\dot{V} \leq -\frac{ae|\tilde{x}_4|^2}{R} \leq 0 \quad (3.16)$$

por lo tanto (3.14) es estable en lazo abierto.

Capítulo 4

Resultados experimentales

El modelo del sistema módulo de celdas de combustible/convertidor elevador es el que se presenta a continuación. Es de interés estudiar la parte lineal, presentar su análisis, con el objetivo de diseñar un controlador. Este capítulo estará enfocado en establecer la aplicación con resultados experimentales que se mostrarán más adelante [39].

Sea el sistema dinámico módulo de celdas de combustible/convertidor elevador en cascada de n-etapas como se muestra en la figura 4.1:

$$\begin{aligned} \dot{e}_f &= \frac{I_h}{C_f} \left(\frac{E_0}{e_f} - 1 \right)^{\frac{1}{\delta}} - \frac{i_{L_1}}{C_f} \\ \dot{i}_{L_1} &= \frac{e_f}{L_1} - \frac{(1-u)v_{C_1}}{L_1} \\ \dot{v}_{C_1} &= \frac{(1-u)i_{L_1}}{C_1} - \frac{i_{L_2}}{C_1} \\ \dot{i}_{L_2} &= \frac{v_{C_1}}{L_2} - \frac{(1-u)v_{C_2}}{L_2} \\ \dot{v}_{C_2} &= \frac{(1-u)i_{L_2}}{C_2} - \frac{i_{L_3}}{C_2} \\ &\vdots \\ \dot{i}_{L_n} &= \frac{v_{C_{n-1}}}{L_n} - \frac{(1-u)v_{C_n}}{L_n} \\ \dot{v}_{C_n} &= \frac{(1-u)i_{L_n}}{C_n} - \frac{v_{C_n}}{C_n R} \end{aligned} \tag{4.1}$$

El punto de equilibrio del sistema (4.1) es:

$$(e_{f_0}, i_{L_{01}}, v_{C_{01}}, i_{L_{02}}, v_{C_{02}}, \dots, i_{L_{0n}}, v_{C_{0n}}, u_0) = \left(\frac{E_0}{1 + \left(\frac{v_{C_{0n}}}{I_h R (1-U)^n} \right) \delta}, \frac{v_{C_{0n}}}{R(1-U)^n}, \frac{e_{f_0}}{1-U}, \frac{v_{C_{0n}}}{R(1-U)^{n-1}}, \frac{e_{f_0}}{(1-U)^2}, \dots, \frac{v_{C_{0n}}}{R(1-U)}, \frac{e_{f_0}}{(1-U)^n}, U \right).$$

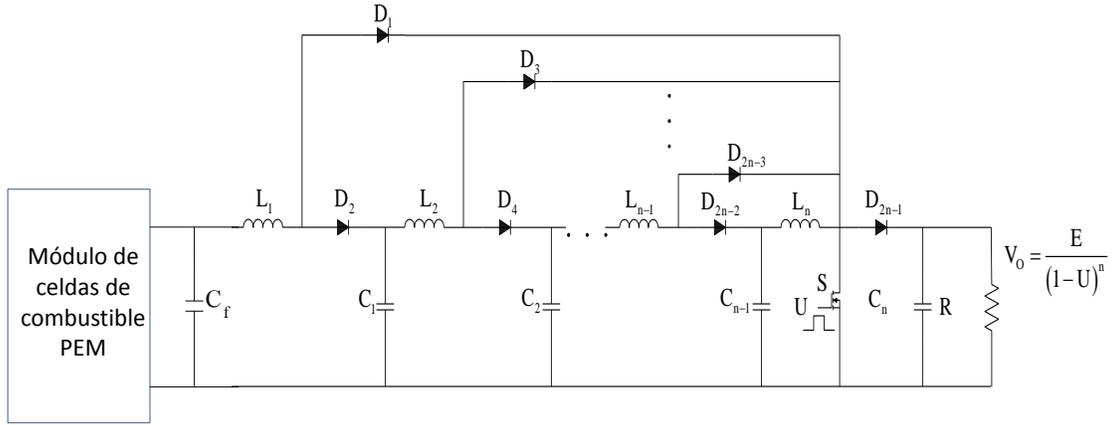


Figura 4.1: Módulo de celdas de combustible/convertidor elevador de n -etapas.

4.1 Análisis lineal del sistema módulo de celdas de combustible/convertidor elevador de n etapas.

El siguiente paso, es linealizar el sistema (4.1) alrededor del origen y realizar el análisis. La parte lineal del sistema (4.1) es:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{e}}_f &= -\frac{\tilde{e}_f}{kC_f} - \frac{\tilde{i}_{L_1}}{C_f} \\
 \dot{\tilde{i}}_{L_1} &= \frac{\tilde{e}_f}{L_1} - \frac{(1-U)\tilde{v}_{C_1}}{L_1} \\
 \dot{\tilde{v}}_{C_1} &= \frac{(1-U)\tilde{i}_{L_1}}{C_1} - \frac{\tilde{i}_{L_2}}{C_1} \\
 \dot{\tilde{i}}_{L_2} &= \frac{\tilde{v}_{C_1}}{L_2} - \frac{(1-U)\tilde{v}_{C_2}}{L_2} \\
 \dot{\tilde{v}}_{C_2} &= \frac{(1-U)\tilde{i}_{L_2}}{C_2} - \frac{\tilde{i}_{L_3}}{C_2} \\
 &\vdots \\
 \dot{\tilde{i}}_{L_n} &= \frac{\tilde{v}_{C_{n-1}}}{L_n} - \frac{(1-U)\tilde{v}_{C_n}}{L_n} \\
 \dot{\tilde{v}}_{C_n} &= \frac{(1-U)\tilde{i}_{L_n}}{C_n} - \frac{\tilde{v}_{C_n}}{C_n R}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $k = E_0 \delta I_h^\delta I_f^{\delta-1} / (I_h^\delta + I_f^\delta)^2$.

Es importante probar la estabilidad del sistema (4.2). Para encontrar la condición de estabilidad se hará uso de la función de Lyapunov.

Se propone una función de Lyapunov del sistema lineal (4.2) como sigue:

$$V = \frac{C_f \tilde{e}_f^2}{2} + \frac{L_1 \tilde{i}_{L_1}^2}{2} + \frac{C_1 \tilde{v}_{C_1}^2}{2} + \frac{L_2 \tilde{i}_{L_2}^2}{2} + \frac{C_2 \tilde{v}_{C_2}^2}{2} + \dots + \frac{L_n \tilde{i}_{L_n}^2}{2} + \frac{C_n \tilde{v}_{C_n}^2}{2}.$$

El siguiente paso es derivar la función de Lyapunov y de ella encontrar condiciones que nos ayuden a garantizar estabilidad.

La derivada de la función de Lyapunov propuesta es la siguiente:

$$\dot{V} = -\frac{\tilde{e}_f^2}{k} - \frac{\tilde{v}_{C_n}^2}{R}.$$

Nótese que \dot{V} solo garantiza estabilidad en el origen del sistema (4.2), ya que es negativa semidefinida. La pregunta: ¿es posible garantizar estabilidad asintótica del sistema (4.2)? Para encontrar este objetivo se hará uso del corolario 2.2.1 y del principio de invariancia de LaSalle [1].

Puede observarse que V es positiva definida y \dot{V} es negativa semidefinida. Sea

$$S = \{\tilde{x} \in E / \dot{V}(\tilde{x}) = 0\}$$

donde \tilde{x} es el estado del sistema lineal (4.2) y E un subconjunto abierto de \mathbb{R} .

Con respecto a \dot{V} y el sistema lineal (4.2), es fácil observar que:

$$S = \{\tilde{x} \in E / \tilde{e}_f = 0, \tilde{v}_{C_n} = 0\} = \{(0, 0, 0, \dots, 0)\}.$$

La única solución que puede estar idénticamente en S es la trivial $(0, 0, 0, \dots, 0)$; por lo tanto, el origen del sistema (4.2) es asintóticamente estable.

4.2 Característica del módulo de celdas de combustible PEM.

El haber establecido que el sistema lineal (4.2) es asintóticamente estable alrededor del origen, lo que sigue, es obtener resultados experimentales con un controlador propuesto, para ello se iniciará especificando los datos del módulo.

El voltaje máximo de salida del módulo de celda de combustible modelo Nexa es aproximadamente 41.7 V; sin embargo, este valor cae a medida que el sistema entrega mayor corriente a la carga. Por lo tanto, para proporcionar un voltaje de salida con las características deseables es necesario aumentar el voltaje de salida y regularlo por medio de un convertidor de voltaje. Para tal fin, en el presente trabajo se propone utilizar un convertidor elevador en cascada de tres etapas [33, 34, 39], tal como muestra el diagrama de la Figura 4.2.

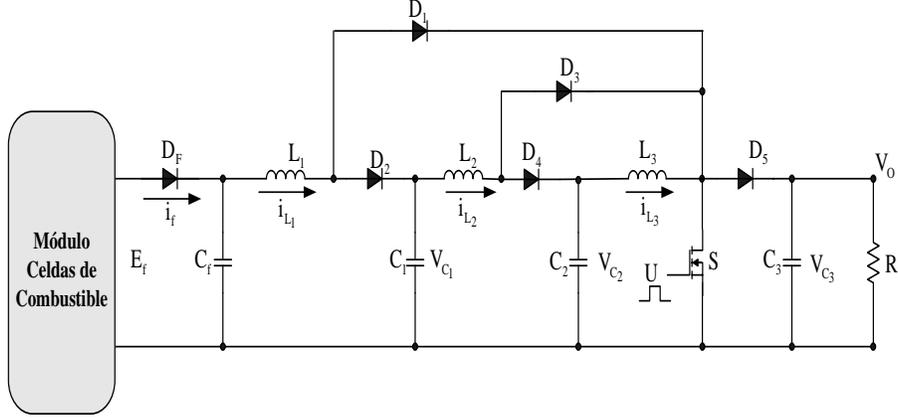


Figura 4.2: Módulo de celdas de combustible convertidor elevador de tres etapas.

El sistema lineal propuesto a analizar es el siguiente [35]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{e}}_f &= -\frac{\tilde{e}_f}{kC_f} - \frac{\tilde{i}_{L_1}}{C_f} \\
 \dot{\tilde{i}}_{L_1} &= \frac{\tilde{e}_f}{L_1} - \frac{(1-U)\tilde{v}_{C_1}}{L_1} + \frac{V_{C_1}}{L_1}\tilde{u} \\
 \dot{\tilde{v}}_{C_1} &= \frac{(1-U)\tilde{i}_{L_1}}{C_1} - \frac{\tilde{i}_{L_2}}{C_1} - \frac{I_{L_1}}{C_1}\tilde{u} \\
 \dot{\tilde{i}}_{L_2} &= \frac{\tilde{v}_{C_1}}{L_2} - \frac{(1-U)\tilde{v}_{C_2}}{L_2} + \frac{V_{C_2}}{L_2}\tilde{u} \\
 \dot{\tilde{v}}_{C_2} &= \frac{(1-U)\tilde{i}_{L_2}}{C_2} - \frac{\tilde{i}_{L_3}}{C_2} - \frac{I_{L_2}}{C_2}\tilde{u} \\
 \dot{\tilde{i}}_{L_3} &= \frac{\tilde{v}_{C_2}}{L_3} - \frac{(1-U)\tilde{v}_{C_3}}{L_3} + \frac{V_{C_3}}{L_3}\tilde{u} \\
 \dot{\tilde{v}}_{C_3} &= \frac{(1-U)\tilde{i}_{L_3}}{C_3} - \frac{\tilde{v}_{C_3}}{C_3R} - \frac{I_{L_3}}{C_3}\tilde{u}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde \tilde{u} representa la señal de control.

Los datos del regulador son:

Capacitor C_f	5600 μF
Capacitor C_1	47 μF
Capacitor C_2	18,2 μF
Capacitor C_3	3,3 μF
Inductor L_1	72 μH
Inductor L_2	200 μH
Inductor L_3	1400 μH
Carga nominal R	250 Ω
Diodo $D_1 - D_5$	URU100120
Diodo D_F	T70HF120S02
Mosfet S_1	IXFN80N50
Mosfet S_2	IRF740
Amplificador Operacional $IC1 - IC3$	TL081
Modulador	LM311
Mosfet Driver	IR2117

Observe que el sistema (4.3) puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

donde $\tilde{x} = (\tilde{e}_f, \tilde{i}_{L_1}, \tilde{v}_{C_1}, \tilde{i}_{L_2}, \tilde{v}_{C_2}, \tilde{i}_{L_3}, \tilde{v}_{C_3})$.

Con la matriz de controlabilidad se puede mostrar que el sistema lineal (4.3) es controlable:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3BA^4B \quad A^5B \quad A^6B].$$

Con ayuda de MATLAB es posible mostrar que \mathcal{C} es de rango 7; por lo tanto, el sistema (4.3) es controlable, esto será de mucha utilidad para el caso experimental. El sistema (4.3) será utilizado posteriormente para analizar y diseñar el controlador de dicho sistema.

4.3 Diseño de un regulador conmutado

Utilizando el convertidor elevador en cascada de tres etapas se construye un regulador conmutado [36]. Existen dos enfoques generales que se utilizan ampliamente para el controlador. El primer enfoque es el control modo-voltaje donde solo utiliza el voltaje de salida para la retroalimentación; sin embargo, la estabilidad y el buen funcionamiento son difíciles de lograr. Para lograr un buen desempeño se propone el uso de un control modo-corriente promedio, el cual consta de dos lazos de retroalimentación. El

lazo interno utiliza como señal de retroalimentación la corriente de un inductor o del interruptor y el lazo externo retroalimenta la señal del voltaje de salida. Para el convertidor propuesto, las variables de estado naturales para la retroalimentación son las corrientes en los inductores y los voltajes de los capacitores. Para efectos de control, es importante seleccionar las variables que son apropiadas desde el punto de vista de rendimiento y aplicación. En este trabajo, para conservar los beneficios del control en modo-corriente promedio, la corriente del inductor de la primera etapa se utiliza para fines de retroalimentación junto con el voltaje del capacitor de la etapa de salida.

El diagrama de bloques del control modo-corriente propuesto se muestra en la Figura 4.3, donde V_p es el voltaje de pico a pico de la rampa del oscilador y N es la ganancia de amplificación de la corriente del inductor de la primera etapa. La función de transferencia $G(s)$ es un compensador de alta ganancia y $F(s)$ es un filtro pasa-bajas con un polo de alta frecuencia. La función de transferencia del controlador PI está dada por $K(s)$ y H representa un divisor de voltaje.

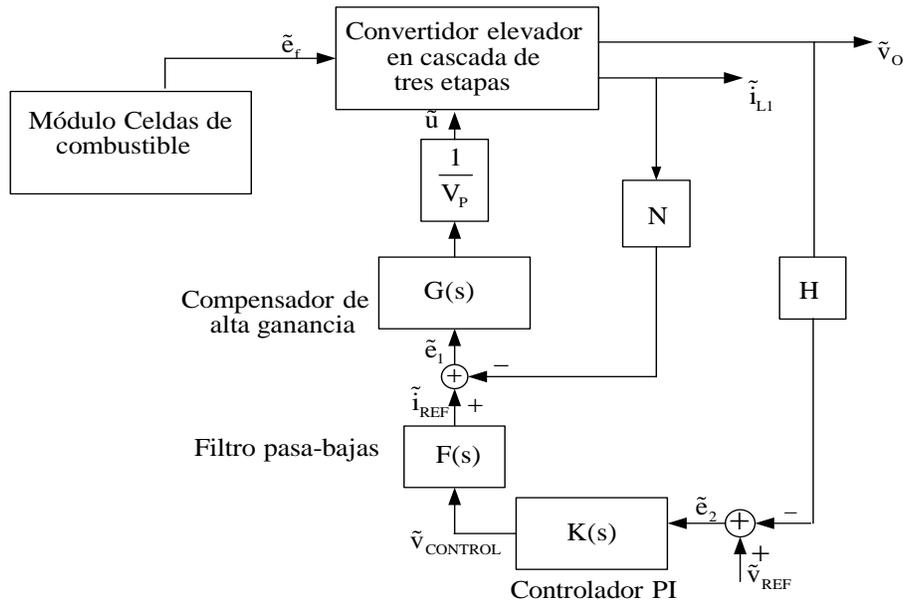


Figura 4.3: Control en modo corriente promedio para un convertidor elevador en cascada de tres etapas.

Estas funciones de transferencia pueden ser implementadas fácilmente utilizando un solo amplificador operacional como se muestra en la figura 4.3.

4.3.1 Diseño de lazo de corriente

El compensador de alta ganancia tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K_P(1 + \frac{s}{w_z})}{s}$$

donde el diseño de este compensador es como sigue: el cero del compensador se coloca al menos una década por debajo de la mitad de la frecuencia de conmutación PWM, $w_z = 1/R_F C_{FZ}$ y $K_P = 1/R_i(C_{FZ} + C_{FP})$. Esta ganancia es generalmente alta, tal que para proporcionar una regulación rápida de la corriente del primer inductor con respecto a su referencia, lo cual da como resultado que la corriente promedio siga con alto grado de precisión a la corriente programada.

La función de transferencia del filtro pasa-bajas con un polo a alta frecuencia esta dada por:

$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{w_p}}$$

donde el polo de alta frecuencia se coloca a una frecuencia por arriba de la mitad de la frecuencia de conmutación y $w_p = (C_{FZ} + C_{FP})/R_F C_{FZ} C_{FP}$.

El compensador de alta ganancia y el filtro pasa-bajas se implementan utilizando un único IC. El filtro se considera como parte del lazo de corriente. Cuando el lazo de corriente está cerrado, la función de transferencia $\tilde{v}_0/\tilde{v}_{CONTROL}(s)$ es modificada mediante la adición del compensador de amortiguación para el pico de resonancia de baja frecuencia, lo que resulta en un solo polo a frecuencias más bajas.

4.3.2 Diseño de lazo de voltaje

El diseño se basa principalmente en un criterio simple para el lazo de ganancia: a) para la estabilidad relativa, la pendiente en o cerca de la frecuencia de cruce debe ser no más que un 20dB/dec; b) para mejorar la precisión de estado estable, la ganancia en baja frecuencia debe ser alta y c) para la estabilidad robusta, se requiere márgenes de fase y ganancia apropiados.

La función de transferencia del controlador PI está dada por:

$$K(s) = K_C(1 + \frac{1}{T_i s})$$

donde $K_C = R_{FC}/R_{iC}$ es la ganancia proporcional, T_i el tiempo integrativo y $w_C = 1/T_i = 1/R_{FC} C_{FC}$.

La ganancia proporcional tiene que ser diseñada junto con la red de divisor del voltaje. Esta red está diseñada para retroalimentar el voltaje de salida a un valor apropiado para el circuito de control. La ganancia de esta red se calcula utilizando los valores del circuito $R1$, $R2$ y R_{iC} . La ganancia K_C es el parámetro de diseño principal para la estabilidad robusta del regulador de conmutación. Un alto valor de

K_C resultará en una respuesta más rápida del regulador conmutado. En la Figura 4.4 se muestra el diagrama del circuito módulo de celdas de combustible/convertidor del voltaje construido.

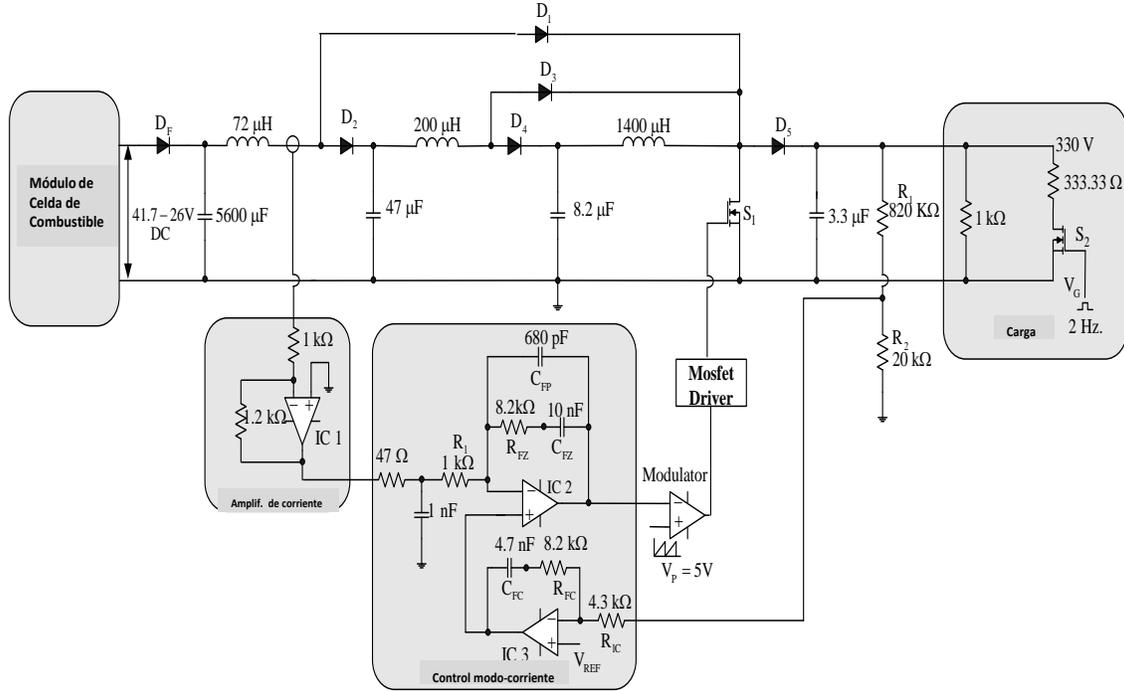


Figura 4.4: Regulador conmutado utilizando un módulo de celdas de combustible como fuente de alimentación.

Los valores del punto de operación para el convertidor elevador de tres etapas utilizado son: voltaje de entrada E que varía de 26 V a 41.7 V y voltaje de salida V_o de 330 V . Este voltaje puede utilizarse posteriormente para alimentar un inversor y obtener un voltaje de 220 V en CA. Los valores de corriente en estado estable para el primer inductor de 20.8 A , para el segundo inductor de 9.3 A y para el tercer inductor es de 3.85 A . La carga nominal utilizada tiene un valor de $250\ \Omega$, la cual produce una corriente de salida de 1.3 A y una salida de potencia de 435 W . La frecuencia de operación del convertidor es de 100 kHz . Para detectar la corriente del primer inductor se utiliza el transductor de corriente modelo LA50-P fabricado por LEM.

Para el convertidor propuesto la función de transferencia $\tilde{v}_0(s)/\tilde{u}(s)$ es de séptimo orden y de fase no mínima con ceros localizados en:

$$\{30675, 1169.2 \pm j7750.7, -219.3 \pm j18044, -607\}$$

y polos en:

$$\{-18.7 \pm j17277, -159 \pm j9608.9, -437.3 \pm j3179.8, -726\}.$$

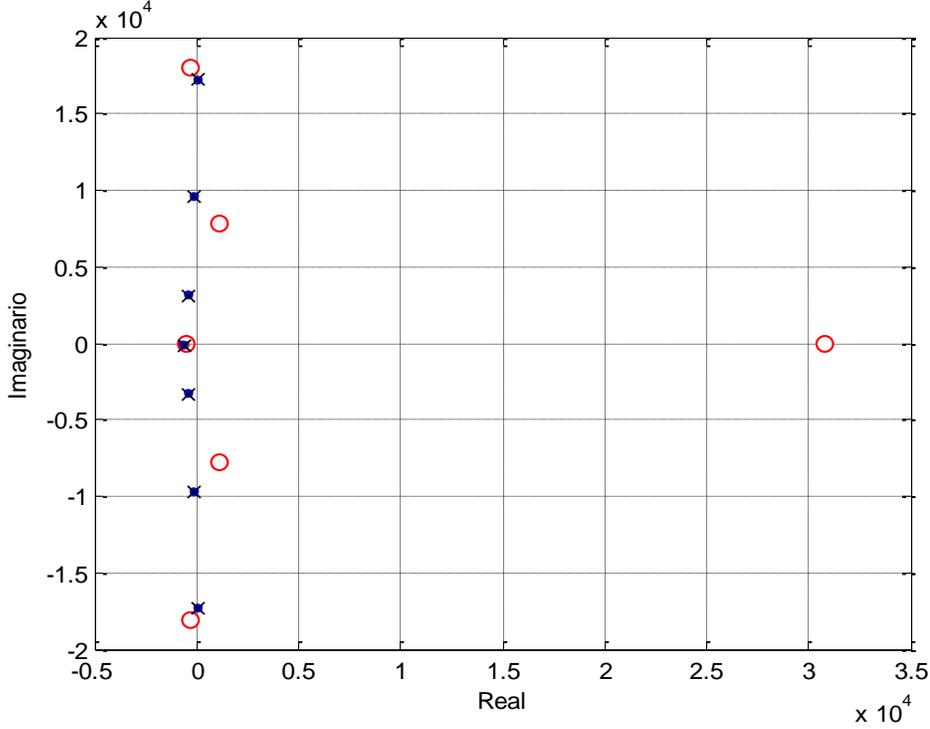


Figura 4.5: Polos y ceros de la función de transferencia $\tilde{v}_0(s)/\tilde{u}(s)$.

Se puede notar que existen tres picos de resonancia dependientes de los parámetros de construcción del convertidor. Debido a la presencia de los tres ceros del lado derecho del plano es muy difícil alcanzar estabilidad y buen desempeño si se utiliza para la construcción del regulador un control de un solo lazo.

La función de transferencia: $\tilde{i}_{L_1}(s)/\tilde{u}(s)$ es de fase mínima con los mismos polos que $\tilde{v}_0(s)/\tilde{u}(s)$ y ceros localizados en:

$$\{-105.4 \pm j18056, -938 \pm j11114, -1661.6, -744.05\}$$

por lo que se propone la construcción de un control en modo-corriente promedio, donde se retroalimenta la corriente del primer inductor y el voltaje de salida del convertidor.

Para este convertidor, un compensador de alta ganancia y un controlador PI están diseñados bajo control en modo-corriente promedio mediante el procedimiento descrito en la sección anterior. Se usan los siguientes valores $C_{FZ} = 10 \text{ nF}$, $R_{FZ} = 8.2 \text{ k}\Omega$ y $C_{FP} = 680 \text{ pF}$ que son seleccionados para el lazo de corriente.

Para el lazo de voltaje, los valores seleccionados para la red de divisor de voltaje son $R_1 = 820 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ y para el controlador $C_{FC} = 22 \text{ nF}$, $R_{FC} = 33 \text{ k}\Omega$ y $R_{IC} = 4.3 \text{ k}\Omega$. Por lo tanto, la función de transferencia para el controlador es

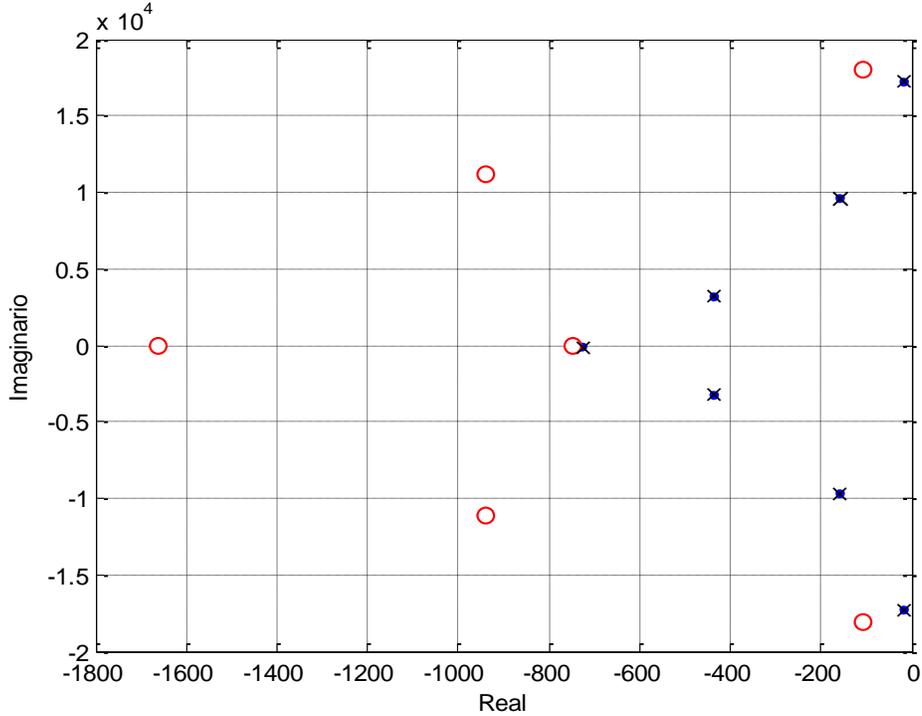


Figura 4.6: Polos y ceros de la función de transferencia $\tilde{i}_{L_1}(s)/\tilde{u}(s)$.

$$K(s) = -7.67(1 + 1377/s).$$

4.4 Pruebas en lazo abierto

Inicialmente el ciclo de trabajo se fija de manera que a la salida del convertidor se obtenga un voltaje de 330 V , por lo que se entrega a la carga una potencia de 435 W . Posteriormente se aplican cambios tipo escalón a la carga de salida modificándola de un valor de $250\ \Omega$ a $1\text{ k}\Omega$ por medio de un MOSFET que opera a una frecuencia de 2 Hz . En la Figura 4.7 se muestra el voltaje de salida resultante. Se observa que el voltaje de salida refleja los cambios de la carga cambiando su valor de 330 V a 460 V .

4.5 Pruebas en lazo cerrado

Se implementa el control en modo-corriente promedio. En la Figura 4.8 se muestran las condiciones de operación cuando el regulador conmutado entrega a la salida un voltaje de 330 V . En estas condiciones, el módulo de celdas del combustible está entregando

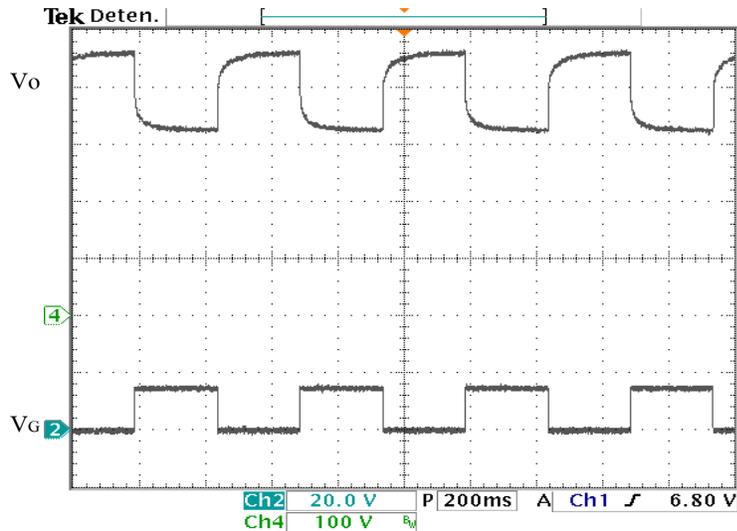


Figura 4.7: Voltaje de salida V_o en lazo abierto ante cambios tipo escalón en la carga de 250Ω a $1 k\Omega$. Voltaje de salida (100 V/div) y voltaje en la compuerta del MOSFET V_G (20 V/div), (Tiempo: 200 ms/div).

un voltaje de salida de $E_f = 26 \text{ V}$ y una corriente $I_f \simeq 20.7 \text{ A}$. La corriente para el primer I_{L_1} inductor exhibe una forma de onda triangular con una aproximación de alrededor de 8 A .

Esta señal se utiliza para fines de retroalimentación. Está claro que el regulador de conmutación está funcionando en modo de conducción continua. Una ampliación en el voltaje de salida para una carga nominal de 250Ω se muestra en la figura 4.9 para un voltaje de entrada de $E = 26 \text{ V}$. El rizo del voltaje de salida es de aproximadamente 2 V , lo que resulta en un porcentaje de rizo de 0.6% .

Posteriormente se aplican cambios tipo escalón a la carga de un valor de 250Ω a $1 k\Omega$ por medio de un Mosfet que opera a una frecuencia de 2 Hz . El voltaje de salida resultante se muestra en la Figura 4.10. En este caso el voltaje permanece a un valor constante de 330 V . Esta gráfica muestra claramente que el regulador posee robustez ante cambios en la carga.

Es evidente que el regulador de conmutación es robusto ante cambios en la carga. El voltaje suministrado por el módulo de celdas de combustible se muestra en la figura 4.11, donde aparecen cambios de voltaje de aproximadamente de 26 V a 31 V .

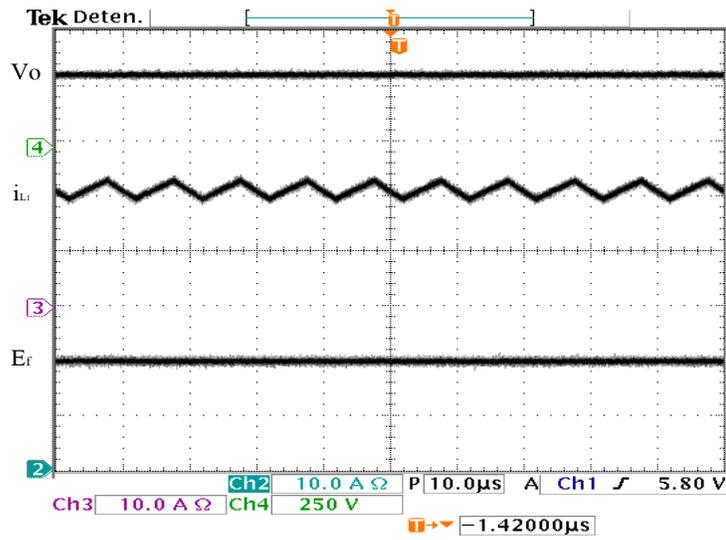


Figura 4.8: Operación en lazo cerrado para una carga nominal de 250Ω . Voltaje de salida V_o (250 V/div), corriente del primer inductor i_{L1} (10 A/div), y voltaje del módulo de celdas de combustible E_f (20 V/div), (Tiempo: $10 \mu\text{s}/\text{div}$).

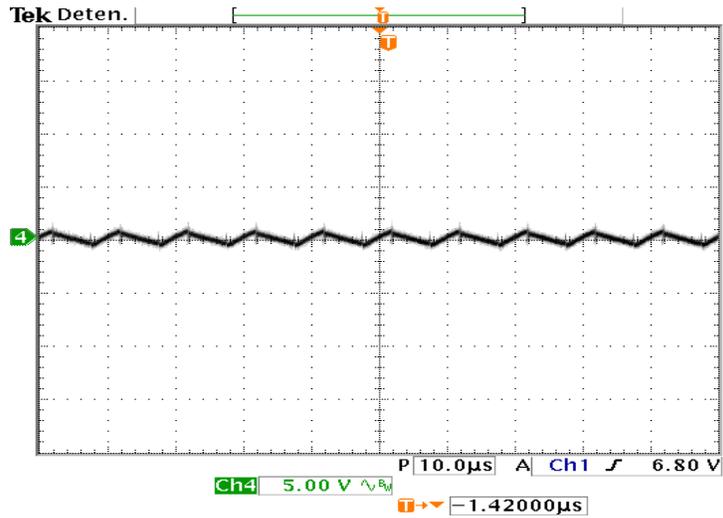


Figura 4.9: Ampliación del voltaje de salida para mostrar el rizado de conmutación para una carga nominal de 250Ω (5 V/div) (Tiempo: $10 \mu\text{s}/\text{div}$).

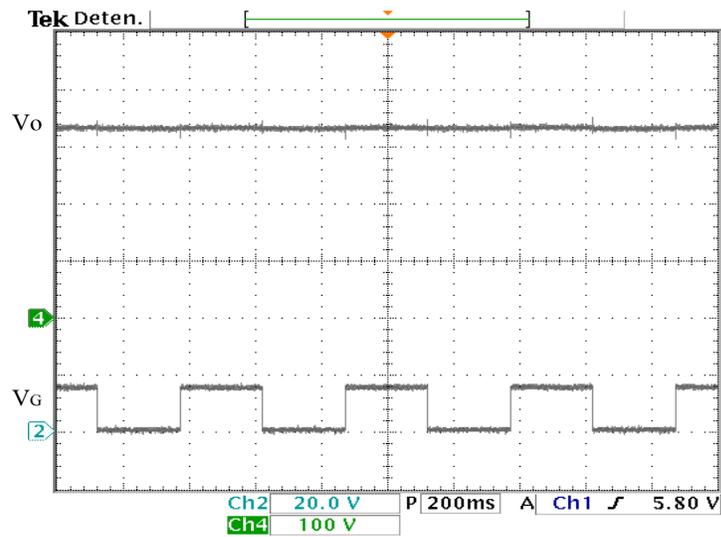


Figura 4.10: Voltaje de salida V_o en lazo cerrado para cambios tipo escalón en la carga de 250Ω a $1 k\Omega$. Voltaje V_o (100 V/div) y voltaje en la compuerta del Mosfet V_G (20 V/div), (Tiempo: 200 ms/div).

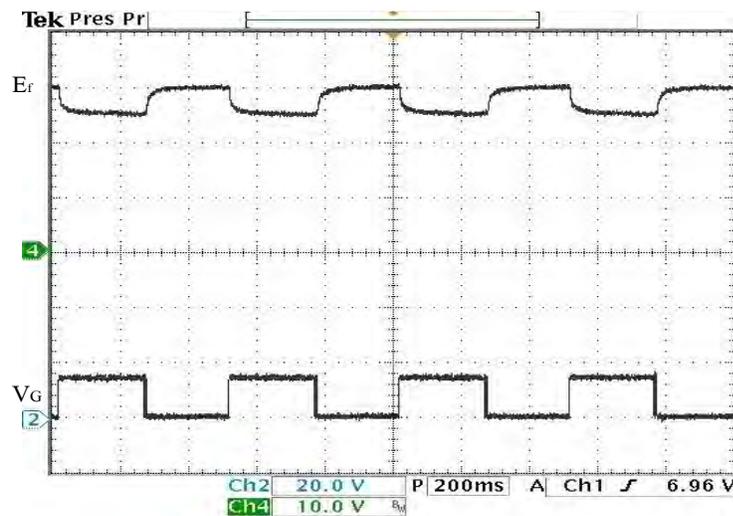


Figura 4.11: Voltaje de la celda de combustible E_f en lazo cerrado para cambios en la carga de 250Ω a $1 k\Omega$. Voltaje de la celda de combustible E_f (10 V/div) y el voltaje en el Mosfet V_G (20 V/div), (Tiempo: 200 μ s/div)

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Comentarios finales

El consumo de energía es uno de los mayores medidores del desarrollo y bienestar de una sociedad. Pero debido al incesante consumo de energía, se han generado problemas en el medioambiente y crisis energética. Para un sistema económico como el actual, cuyo crecimiento va a la par con la creciente demanda de energía, es inevitable que en un determinado momento la demanda no pueda ser abastecida y todo el sistema colapsaría. Se ha realizado un gran esfuerzo de investigación para buscar la mejor forma de aprovechar las fuentes de energías renovables y sustituir una parte del sistema de energía tradicional.

Es importante mencionar que las fuentes de energías renovables no son fuentes constantes y para ser utilizadas es necesario regularlas y controlarlas. La electrónica de potencia juega un papel muy importante en los sistemas de generación de energía renovable. Es la tecnología clave que busca convertir de manera eficiente la energía eléctrica de las fuentes de energías renovables. En la literatura abierta, existe un gran número de convertidores de electrónica de potencia, donde las fuentes de energía se consideran constantes; pero debido a que las fuentes de energías renovables no son constantes se genera un problema de investigación. Por lo tanto es frecuente observar que las fuentes de energías renovables están interconectadas con un convertidor eléctrico.

El enfoque principal de este trabajo, es buscar las herramientas matemáticas que puedan ser de gran utilidad para tratar problemas de sistemas dinámicos interconectados. Uno de los muchos problemas importantes a considerar en los sistemas dinámicos interconectados es garantizar la estabilidad del sistema y en qué condiciones. En el Capítulo 2 de este trabajo se puede observar una teoría básica de sistemas dinámicos, tanto para sistemas lineales como para sistemas no lineales, en este mismo capítulo también se muestra en qué condiciones es posible garantizar estabilidad y estabilidad

asintótica de los sistemas dinámicos conectados en cascada. Se analizan los sistemas estables de entrada a estado y se especifican unas herramientas matemáticas para poder garantizar estabilidad de sistemas ISS interconectados.

Como se ha mencionado anteriormente la importancia de las fuentes de energías renovables están tomando un gran auge en nuestros días. El hidrógeno puede ser considerado como una forma de almacenar energías renovable y ser generada en cualquier parte del planeta con las fuentes de energías renovables disponibles y ser utilizada como combustible en el hogar o en el transporte. Los módulos de celdas de combustible es una alternativa para la generación de energía eléctrica y uno de los más prometedores son los módulos de celda de combustible PEMFC. Un módulo de celda de combustible PEM produce un voltaje de salida en corriente directa de bajo valor y con grandes variaciones, tal que para ser utilizados, es necesario aumentarlo y regularlo por medio de un convertidor de CD a CD.

El objetivo principal de este trabajo, es analizar el sistema dinámico que modela un módulo de celdas de combustible PEM y el sistema dinámico que modela un convertidor elevador, cuando estos sistemas están interconectados. Este trabajo presenta el sistema dinámico interconectado “Módulo de celdas de combustible/convertidor elevador”. Con la teoría de los sistemas ISS interconectados se muestra la condición de estabilidad del sistema. También con la teoría de Lyapunov y el teorema de invariancia de Krasovskii-LaSalle se muestra que la parte lineal del sistema módulo de celdas de combustible/convertidor elevador es asintóticamente estable en el origen. Como prueba experimental, se caracteriza el módulo de celdas de combustible PEM del Laboratorio de Control de Sistemas Electrónicos de Potencia del IPICYT y se utiliza un convertidor elevador de tres etapas conectados en cascada, donde el voltaje de salida V_o del módulo de celdas de combustible varía entre 26 V a 41.7 V. Con ayuda de un controlador PI, el sistema interconectado módulo de celdas de combustible/convertidor elevador, mantiene un voltaje de salida de 330 V ante un cambio abrupto de carga de 250 Ω a 1 $k\Omega$.

5.2 Trabajo a futuro

El análisis y aplicación del sistema interconectado módulo de celdas de combustible/convertidor elevador, se torna de mucho interés. Un posible caso a estudiar sería encontrar las caracterizaciones de todas las fuentes de energía, hacer la misma interconexión y generar un conjunto de sistemas por cada fuente de energía renovable que exista, buscando las condiciones de estabilidad tanto para el sistema lineal así como para el sistema no lineal. Esto abriría un gran número de experimentos y aplicaciones.

El siguiente caso si se utiliza el mismo módulo pero se opta por otro tipo de convertidor de voltaje propuesto en la literatura, ¿Cuáles serían sus condiciones de

estabilidad? Con respecto al análisis de control, se abre otra posible rama de análisis y condiciones, ya que es importante mencionar que sería interesante proponer un control más robusto si existiera dicha posibilidad.

Bibliografía

- [1] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 3rd. edn., 2001.
- [2] D. J. Hill. *A generalisation of the small-gain theorem for nonlinear feedback systems*. *Automat.*, 27, p.1043-1045, 1991.
- [3] I. M. Mareels and D. J. Hill. *Monotone stability of nonlinear feedback systems*. *J. Math. Syst. Estimation and Contr.*, 2, pp.275-291, 1992.
- [4] Z. P. Jiang, A. R. Teel, and L. Praly. *Small-gain theorem for ISS system and applications*. *Math. Contr. Signals and Syst.*, 7, pp.95-120, 1994.
- [5] A. R. Teel. *A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation*. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41, pp.1256-1270, 1996.
- [6] H. Ito. *A constructive proof of ISS small-gain theorem using generalized scaling*. *IEEE Conf. on Decis. and Contr.*, 2, pp.2286-2291, 2002.
- [7] H. Ito. *State-dependent scaling characterization of stability and performance for nonlinear interconnected systems*. *IEEE Conf. on Decis. and Contr.*, 4, pp.3937-3943, 2002.
- [8] H. Ito. *Scaling supply rates of ISS systems for stability of feedback interconnected nonlinear systems*. *IEEE Conf. on Decis. and Contr.*, 5, pp.5074-5079, 2003.
- [9] H. Ito. *A parametrization of supply rates for small-gain conditions for global stability of interconnected iISS and ISS systems*. *IEEE Amer. Contr. Conf.*, 6, pp. 4137-4142, 2005.
- [10] E. D. Sontag. *Comments on integral variants of ISS*. *Syst. and Contr. Letters*, 34, pp.93-100, 1998.
- [11] H. Ito. *Stability criteria for interconnected iISS systems and ISS systems using scaling of supply rates*. *IEEE Amer. Contr. Conf.*, 2, pp.1055-1060, 2004.
- [12] H. Ito and Zhong-Ping Jiang. *Nonlinear Small-Gain Condition Covering iISS Systems: Necessity and Sufficiency from a Lyapunov Perspective*. *IEEE Conf. on Decis. and Contr.*, pp.355-360, 2006.

- [13] E. D. Sotang. *Smooth stabilization implies coprime factorization*. IEEE Trans. Automat. Contr., 34, pp. 435-443, 1989.
- [14] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995.
- [15] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems II*. London, U.K.: Springer Verlag, 1999.
- [16] D. Angeli, E. D. Sontag and Y. Wang. *A characterization of integral input-to-state stability*. IEEE Trans. Automat. Contr., 45, pp.1082-1097, 2000.
- [17] H. Ito. *State-dependent scaling problems and stability of interconnected iISS and ISS systems*. IEEE Trans. Automat. Contr., 51, pp.1626-1643, 2006.
- [18] S. N. Dashkovskiy, B. S. Rüffer, F. R. Wirth. *Applications of the general Lyapunov ISS small-gain theorem for networks*. IEEE Conf. on Decis. and Contr., pp.25-30, 2008.
- [19] S. N. Dashkovskiy, M. Kosmykov, F. R. Wirth. *A small-gain condition for interconnection of ISS systems with mixed ISS characterizations*. IEEE Trans. Automat. Contr., 56, pp.1247-1258, 2011.
- [20] S. H. Jensen, P. H. Larsen, M. Mogensen. *Hydrogen and synthetic fuel production from renewable energy sources*. Int. J. Hydrogen. Energ., 32 pp.3253-3257, 2007.
- [21] P. Thounthong, B. Davat, S. Rael, P. Sethakul. *Fuel-cell high-power applications*. IEEE Trans. Ind. Electron. Mag., 3, pp.32-46, 2009.
- [22] S. M. Lee, O. M. Kwon, Ju H. Park. *Predictive control for sector bounded nonlinear model and its application to solid oxide fuel cell systems*. Appl. Math. Comput., 218, pp.9296-9304, 2012.
- [23] M. Vynnycky. *On the modelling of two-phase flow in the cathode gas diffusion layer of a polymer electrolyte fuel cell*. Appl. Math. Comput., 189, pp.1560-1575, 2007.
- [24] J. G. Lee, S. Y. Choe, J. W. Ahn, S. H. Baek. *Modelling and simulation of a polymer electrolyte membrane fuel cell system with a PWM DC/DC converter for stationary applications*. IET Power Electron., 1, pp.305-317, 2008.
- [25] J. Leyva-Ramos, J. A. Morales-Saldaña, O. Vital-Ochoa. *μ -Stability analysis for current programmed regulators*. Appl. Math. Comput., 120, pp.3-14, 2001.
- [26] W. Fried, S. Rael and B. Davat. *Mathematical Model and Characterization of the Transient Behaviour of a PEM Fuel cell*. IEEE Trans. on Power Electron., 19, pp.1234-1241, 2004.
- [27] A. Shahin, M. Hinaje, J. P. Martin, S. Pierfederici, S. Rael, and B. Davat. *High voltage ratio DC-DC converter for fuel-cell applications*. IEEE Trans. Ind. Electron. Mag., 57, pp.3944-3955, 2010.

- [28] E. I. Vazquez-Oviedo, M. G. Ortiz-Lopez, L. H. Diaz-Saldierna, J. Leyva-Ramos. *Modeling study of a combined fuel-cell atack/switch mode DC-DC converter*. ASME J. Fuel Cell Science Technology, 11, pp.1-5, 2014.
- [29] J. G. Kassakian, M. F. Schlecht, G. C. Verghese. *Principles of Power Electronics*. Addison Wesley Publishing Company, 1991.
- [30] N. Mohan, T. M. Undeland, W. P. Robbins. *Power Electronics: Converters, Applications and Desing*. Third Edn., Wiley 2007.
- [31] J. A. Morales-Saldaña, E. E. Carbajal-Gutiérrez, J. Leyva-Ramos. *Modelling of switch-mode DC-DC cascade converters*. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 38, pp.295-299, 2002.
- [32] K. Agbossou, M. Kolhe, J. Hamelin, T. K. Bose. *Performance of a stand-alone renewable energy system based on energy storage as hydrogen*. IEEE Trans. Energy Convers., 19, pp.633-640, 2004.
- [33] M. G. Ortiz-Lopez, J. Leyva-Ramos, E. E. Carbajal-Gutiérrez, J. A. Morales-Saldaña. *Modelling and analysis of switch-mode cascade converters with a single active switch*. IET Power Electron., 1, pp.478-487, 2008.
- [34] P. T. Krein. *Elements of power electronics*. Addison Wesley, Oxford University Press, 1998.
- [35] J. Van de vegte. *Feedback control systems*. Prentice-Hall, 3rd. edn., 1993.
- [36] W. Tang, F. C. Lee, R. B. Ridley *Small-signal modelling of average current-mode control* IEEE Trans. on Power Electron., 8, pp.112-119, 1993.
- [37] L. Perko. *Diferential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [38] H. Ito, J. Zhong-Ping. *On necessary condition for stability of interconnected iISS systems*. IEEE Amer. Contr. Conf., 2006.
- [39] J. Leyva-Ramos, J. M. Lopez-Cruz, M. G. Ortiz-Lopez, L. H. Diaz-Saldierna. *Switching regulator using a high step-up voltage converter for fuel-cell modules*. IET Power Electron., 6, pp.1626-1633, 2012.