

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A. C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

Título de la tesis

**Construcción de familias de sistemas
caóticos lineales por partes**

Tesis que presenta

Arturo Franco López

Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la tesis:

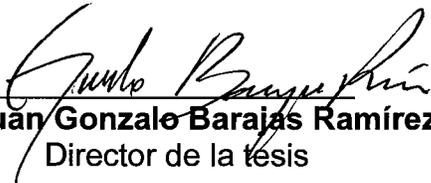
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., Diciembre de 2017



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Construcción de familias de sistemas caóticos lineales por partes**" presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Arturo Franco López** y aprobada el dieciocho de diciembre del dos mil diecisiete por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.


Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Director de la tesis


Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Jurando en el Examen


Dr. Javier Salvador González Salas
Jurando en el Examen

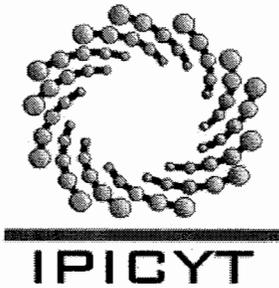

Dr. Isaac Campos Cantón
Jurando en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con el número 590529, así como apoyos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C..



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 026 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 18 días del mes de diciembre del año 2017, se reunió a las 16:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Isaac Campos Cantón	Presidente	UASLP
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Secretario	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Sinodal	IPICYT
Dr. Javier Salvador González Salas	Sinodal externo	UPSLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Arturo Franco López

sobre la Tesis intitulada:

Construcción de familias de sistemas caóticos lineales por partes

que se desarrolló bajo la dirección de

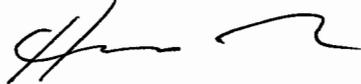
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

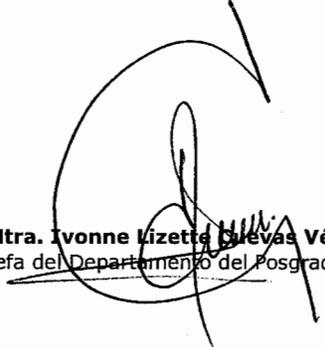
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 17:20 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 18 días del mes de diciembre de 2017.


Dr. Horacio Flores Zúñiga
Secretario Académico


Mtra. Ivonne Lizette Diezgas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado



Dedicatoria

Dedicado a mi familia por haberme convertido en la persona que soy hoy en día, por enseñarme y protegerme todo este tiempo, por el cariño residido así como el apoyo en esta etapa de mi vida.

Dedicado a mi novia por todo el cariño y apoyo recibido, por todo el tiempo que hemos pasado juntos.

Dedicado a mis amigos por el apoyo, la diversión y vivencias adquiridas.

Agradecimientos

Quiero agradecer al IPICYT así como a CONACYT por esta oportunidad de desarrollo profesional y personal que me fue otorgada así como la beca con la cual pude sostenerme durante el transcurso de mi maestría.

Agradezco a mi asesor de tesis, Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez, por guiarme durante este proceso, por sus enseñanzas, disponibilidad, observaciones y su paciencia.

A los sinodales: Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada, Dr. Isaac Campos Cantón, Dr. Javier Salvador González Salas por su tiempo, comentarios y observaciones para la culminación de esta tesis.

Agradecimientos también a la escuela de profesores por las observaciones realizadas. A mi familia, amigos y novia por todo el apoyo durante este proceso.

Índice general

Resumen	IX
Abstract	X
Índice de Figuras	1
1. Introducción	2
1.1. Motivación	2
1.2. Preliminares de sistemas dinámicos	3
1.3. Herramientas para argumentar caos en sistemas dinámicos	5
1.4. Descripción de la tesis	8
2. El método de Shilnikov	10
2.1. Conceptos básicos	10
2.2. Órbitas Homoclínicas y Heteroclínicas	12
2.3. Mapeo de Poincaré	13
2.4. Herradura de Smale	14
2.5. Método de Shilnikov para demostrar caos en sistemas dinámicos tridi- mensionales	15
2.6. Prueba de caos homoclínico	17
2.7. Prueba de caos heteroclínico	20
3. Construcción de familias de sistemas lineales por partes con caos ho- moclínico/heteroclínico	24
3.1. Resultados previos	24
3.2. Método de construcción propuesto	26
3.3. Método I. Caos heteroclínico	27
3.3.1. Algoritmo de construcción de órbitas heteroclínicas en sistemas lineales con dos pedazos	28
3.3.2. Caos heteroclínico en una familia de sistemas lineales con dos pedazos	29
3.4. Método II. Caos homoclínico	32
3.4.1. Algoritmo de construcción de órbitas homoclínicas en sistemas lineales con dos pedazos	33
3.4.2. Caos homoclínico en una familia de sistemas lineales con dos pedazos	34

3.5. Método III. Caos heteroclínico en sistemas con tres partes	36
3.5.1. Algoritmo de construcción de órbitas heteroclínicas en sistemas lineales con tres pedazos	37
3.5.2. Caos heteroclínico en una familia de sistemas lineales con tres pedazos	38
4. Conclusiones	41

Resumen

En el estudio de sistemas dinámicos hay gran interés en la generación de sistemas caóticos con propiedades particulares, ya sea simplicidad de estructural, atractores con múltiples enroscados, entre otras. En los métodos propuestos para generar estos sistemas hay una cosa en común, esto es, la falta de pruebas rigurosas de caos. Por tal razón en esta tesis proponemos métodos para construir sistemas tridimensionales simples para los cuales sean demostrable que su comportamiento dinámico es caótico. En particular, proponemos que la demostración de caos sea mediante el método de Shilnikov. El principal dificultad para esta demostración es el garantizar la existencia de órbitas homoclínicas o ciclos heteroclínicos. Un camino para construir sistemas caóticos es asegurando que los sistemas construidos posean órbitas homoclínicas/heteroclínicas. En esta tesis proponemos tres familias de sistemas lineales por partes para las cuales se puede demostrar que tienen dinámica caótica usando el método de Shilnikov. Aprovechamos la simpleza geométrica de las descripciones lineales alrededor de los puntos de equilibrio del sistema para proponer un algoritmo de construcción que presentan una serie de pautas para intersectar los eigenespacios y el plano de switcheo de modo que garantizamos que las conexiones entre los puntos de equilibrio son órbitas homoclínicas o ciclos heteroclínicos. Ilustramos nuestros resultados con simulaciones numéricas de diferentes realizaciones de sistemas caóticos lineales por partes construidos utilizando los algoritmos propuestos de dos y tres dominios lineales.

Abstract

Currently, in the study of dynamical systems there is a great deal of interest on the generation of chaotic systems with particular properties, such as structural simplicity, multiscroll attractors, among others. There is a common feature in most of the methods proposed for their construction, that is, the lack of rigorous proofs of chaos for the resulting systems. For that reason in this thesis we propose to construct simple three dimensional systems for which the chaotic behavior can be demonstrable. In particular, we propose that the demonstration of chaos be done using the Shilnikov method. The main difficulty for this type of demonstration is to guaranty the existence of homoclinic orbits and heteroclinic cycles. A way to construct chaotic systems is to ensure that the resulting systems have homoclinic/heteroclinic orbits. In this thesis we propose three families of piecewise linear systems for which is possible to demonstrate that their dynamical behavior is chaotic using the Shilnikov method. We take advantage of the geometric simplicity of the linear descriptions of the dynamics around the equilibrium points of the system to propose a construction algorithm that gives a series of steps such that de eigenspaces and swithing planes intersect in a way that guarantees that the connections between the equilibrium points are through homoclinic or heteroclinic orbits. We illustrate our results with numerical simulations of the different realizations of piecewise linear chaotic systems constructed using the proposed algorithms for two and three linear domains.

Índice de figuras

1.1.	Diagrama “cobweb” para el mapeo logístico con condición inicial $x_0 = 0.8$ exhibiendo: (a) un punto fijo estable para $\mu = 1.5$; (b) convergencia a un atractor de periodo 2 para $\mu = 3.1$; (c) un atractor de periodo 4 (con condición inicial $x_0 = 0.5$); y (d) comportamiento caótico para $\mu = 4$, [di Bernardo <i>et al.</i> , 2008].	4
1.2.	Atractor extraño en el espacio de estados del sistema de Lorenz, conocido como la mariposa de Lorenz. (1.2.7)	5
2.1.	a) Órbita homoclínica b) Ciclo heteroclínico.	13
2.2.	Mapeo de Poincaré para una órbita periódica cruzando a Σ por p , así como la de una trayectoria en la vecindad de la órbita periódica	13
2.3.	Mapeo de Herradura de Smale, los rectángulos horizontales H_0 y H_1 pasan a ser rectángulos verticales [Wiggins, 2003]	14
2.4.	Ilustración de una órbita homoclínica en un sistema lineal por partes. . .	16
2.5.	Mapeo de Poincaré para una órbita homoclínica, [Silva, 1993]	16
2.6.	Circuito de Chua	18
2.7.	Órbita homoclínica del circuito de Chua con condición inicial (2.6.7) y tiempo final $t_f = 9$	19
2.8.	Validación numérica de la órbita homoclínica del circuito de Chua. . . .	20
2.9.	Atractor caótico del circuito de Chua (2.6.5) con los parámetros (2.6.7). . .	21
2.10.	Validación numérica de la órbita Heteroclínica del circuito de Chua. . .	22
2.11.	Atractor extraño en el espacio de estados para los parámetros (2.7.3) en la ecuación (2.6.5)	23
3.1.	Bosquejo de la geometría de los eigenespacios del sistema	25
3.2.	Foco en \mathbf{R}^2	26
3.3.	Eigenespacios y puntos de interés para la construcción de órbitas heteroclínicas	28
3.4.	Simulación numérica del sistema 3.3.5 con parámetros (a) $\gamma = -5$, (b) $\gamma = -10$ (c) proyección xy para $\gamma = -5$	31
3.5.	Eigenespacios y puntos de interés para la construcción de órbitas homoclínicas	32
3.6.	Simulación numérica del sistema 3.4.4 con parámetros (a) $\gamma = -2$, (b) $\gamma = -1$ (c) proyección xy para $\gamma = -0.3$	35
3.7.	Eigenespacios y puntos de interés para la construcción de órbitas heteroclínicas en sistema con tres pedazos.	36

3.8. Simulación numérica del sistema 3.4.4 con parámetros (a) $\gamma = -3$, (b) $\gamma = -1.6$ (c) proyección xy para $\gamma = -0.8$ 40

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Se puede decir que la dinámica caótica, así como la teoría de sistemas dinámicos, comienza con los trabajos de Henry Poincaré a finales del siglo XIX. Motivado principalmente por el problema de las órbitas de tres cuerpos celestes (una estrella y dos planetas) experimentando atracción gravitacional mutua [Poincaré, 1890]. Poincaré fue capaz de mostrar que órbitas con comportamiento muy complejo (ahora llamado caótico) son posibles. Subsecuentes trabajos tempranos en teoría de caos incluyen aquellos realizados en [Birkhoff y Smith, 1928], [Cartwright y Littlewood, 1945] y [Smale, 1963]. A pesar de los resultados presentados en estos trabajos, la dinámica caótica no solía ser considerada en el ámbito de sistemas dinámicos físicos. Esto cambió tras el trabajo [Lorenz, 1963] en el cual mostraba como ecuaciones relativamente sencillas conducían a una dinámica compleja recurrente pero no-periódica. Esto último apoyado fuertemente por el uso de soluciones numéricas. Con este tipo de herramientas se volvió clara la importancia y frecuencia del comportamiento caótico en una amplia gama de sistemas físicos y en multitud de ramas de la ciencia [Ott, 1993].

La dinámica caótica en un sistema dinámico se caracteriza principalmente por: Tener sensibilidad a las condiciones iniciales, ser transitivo y ser denso en órbitas periódicas. Tras una inspección más cercana de las propiedades anteriores puede surgir una importante objeción: debido a la precisión finita de las simulaciones por computadora y rangos finitos de las mediciones experimentales, es posible que el comportamiento presenciado sea producto de un artificio debido al instrumento de medición o incluso ser un comportamiento regular pero con un periodo o ancho de banda fuera de los límites de captura del dispositivo. Por lo cual, una aproximación rigurosa es necesaria para garantizar la existencia de un comportamiento caótico de manera formal, de modo que no se pueda culpar a efectos experimentales desconocidos por la complejidad dinámica observada, como podría ser el caso en un sistema físico. En este sentido una de las más útiles herramientas analíticas para sistemas autónomos es el trabajo de Shilnikov y subsecuentes extensiones a las cuales, en su conjunto, llamaremos el método de Shilnikov.

En esta tesis presentamos un conjunto de pautas que permiten construir familias de sistemas dinámicos, en los cuales podemos garantizar caos mediante el método de Shil-

nikov. A continuación contextualizaremos el tipo de sistemas con los que trabajamos, así como este método como herramienta analítica.

1.2. Preliminares de sistemas dinámicos

En esta sección damos una descripción general y breve respecto a sistemas dinámicos para poner en contexto el tipo particular de sistemas dinámicos que estaremos trabajando en esta tesis. Introducciones a sistemas dinámicos y caos más detalladas pueden ser encontradas en los libros: [Perko, 2001], [di Bernardo *et al.*, 2008], [Wiggins, 2003], [Ott, 1993], [Devaney, 1992], [Argyris *et al.*, 2015].

A grandes rasgos, un sistema dinámico es una construcción matemática compuesta por un espacio de estados, un intervalo de tiempo y un operador de evolución, el cual toma condiciones iniciales \mathbf{x}_0 del espacio de estados y los lleva a un estado \mathbf{x}_t en el tiempo t . Cuando los cambios de la variable \mathbf{x}_t existen de manera unívoca para todo el espacio de estados y para todo tiempo, decimos que el sistema dinámico es determinístico. Existe una gran variedad de sistemas dentro de este tipo como aquellos descritos por funciones evaluadas reales y que se mueven en tiempo discreto o en tiempo continuo. En estos últimos, durante décadas se ha estudiado el fenómeno de caos, debido a que, en mayor medida, en estos sistemas se basan los modelos matemáticos con los cuales se busca representar y entender los fenómenos físicos reales. Los sistemas de tiempo continuo son los que trabajamos en esta tesis. Sin embargo, en el método de Shilnikov existe una estrecha relación entre sistemas en tiempo continuo y discreto, como veremos más adelante. A continuación, se presenta una breve descripción de sistemas dinámicos en tiempo discreto.

Un sistema en tiempo discreto (con tiempo $k = 1, 2, \dots$) se le conoce como mapeo y se estudia mediante teoría de ecuaciones en diferencias, los mapeos pueden ser expresados como

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) \tag{1.2.1}$$

donde f es una función evaluada real y calculable para toda condición inicial. El operador de evolución en un mapeo está dado por f de la siguiente forma

$$f^{(k)}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_k, \tag{1.2.2}$$

donde (k) significa la k -ésima composición de f , esto es

$$f^{(k)}(\mathbf{x}_0) = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{k\text{-veces}}(\mathbf{x}_0).$$

A manera de ejemplo, considere la función $f(x) = -x^3$, si componemos a f consigo misma, tenemos entonces

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = -(-x^3)^3 = x^9.$$

iterando del proceso tenemos

$$f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = -(x^9)^3 = -x^{27},$$

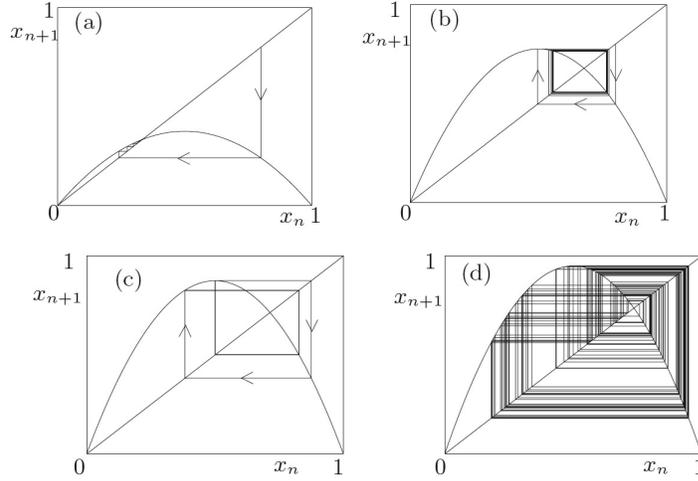


Figura 1.1: Diagrama “cobweb” para el mapeo logístico con condición inicial $x_0 = 0.8$ exhibiendo: (a) un punto fijo estable para $\mu = 1.5$; (b) convergencia a un atractor de periodo 2 para $\mu = 3.1$; (c) un atractor de periodo 4 (con condición inicial $x_0 = 0.5$); y (d) comportamiento caótico para $\mu = 4$, [di Bernardo *et al.*, 2008].

$$\begin{aligned}
 f^4(x) &= (f \circ f \circ f \circ f)(x) = -(-x^{27})^3 = x^{81}, \\
 &\vdots \\
 f^{(k)}(x) &= (f \circ f^{(k-1)})(x) = (-1)^k x^{3^k}.
 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Una manera muy útil de estudiar mapeos de una dimensión es mediante el diagrama de “cobwed”, en el cual se grafica \mathbf{x}_{k+1} contra \mathbf{x}_k mediante su proyección en la diagonal principal. Por ejemplo, el sistema (mapeo Logístico)

$$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k), \quad x \in [0, 1], \quad 0 < \mu \leq 4. \tag{1.2.4}$$

En la Figura 1.1 podemos ver varios de los diagramas de “telaraña” que puede tener el mapeo para diferentes parámetros. Es importante mencionar que solo los mapeos no-invertibles pueden tener comportamiento caótico a partir de dimensión 1. En el caso de mapeos invertibles es necesario, al menos, dimensión 2 para exhibir caos.

Un mapeo es invertible si para cada \mathbf{x}_1 existe un único \mathbf{x}_0 tal que $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$. En tal caso definimos el mapeo inverso f^{-1} como $\mathbf{x}_0 = f^{-1}(\mathbf{x}_1)$ para todo \mathbf{x}_1 en $f(\mathbf{x})$.

Un sistema dinámico en tiempo continuo ($t \in \mathbf{R}$) es estudiado mediante teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y suelen ser expresados como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \tag{1.2.5}$$

Donde $\Phi(\mathbf{x}(t), t)$ es el operador solución o flujo que toma condiciones iniciales de $\mathbf{x}(t)$ y las lleva a su solución al tiempo t

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}(t), t) = f(\Phi(\mathbf{x}(t), t)), \quad \Phi(\mathbf{x}(t), 0) = \mathbf{x}(t) \tag{1.2.6}$$

Los sistemas dinámicos en tiempo continuo pueden ser divididos en dos grandes grupos: conservativos y disipativos. Los flujos conservativos son aquellos en los cuales no entran en consideración los amortiguamientos. Los disipativos son sistemas donde si existe amortiguamiento. En ambos casos, para sistemas de tercer orden, se puede presentar comportamiento caótico aunque de manera distinta. En los sistemas disipativos el caos suele ir acompañado de atractores extraños en el espacio de estados, esto lo podemos ver ejemplificado en el sistema de Lorenz cuyas ecuaciones son [Lorenz, 1963]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) &= \beta x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z}(t) &= x(t)y(t) - \gamma z(t)\end{aligned}\tag{1.2.7}$$

un segmento de órbita para $\alpha = 10$, $\beta = 28$ y $\gamma = \frac{8}{3}$ en el espacio de estados es representada en la Figura 1.2.

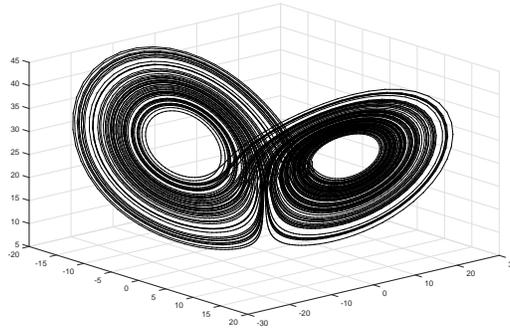


Figura 1.2: Atractor extraño en el espacio de estados del sistema de Lorenz, conocido como la mariposa de Lorenz. (1.2.7)

En esta tesis trabajamos con flujos disipativos de tercer orden. Más aún, trabajamos con flujos lineales por partes los cuales pueden ser vistos como un conjunto de sistemas lineales afines y una serie de reglas que definen como se pasa de un dominio a otro en función de los estados del sistema. En el capítulo 2 se verá esto con más detalle.

A continuación presentamos algunas de las herramientas utilizadas para argumentar caos en un sistema dinámico.

1.3. Herramientas para argumentar caos en sistemas dinámicos

Si bien un sistema dinámico caótico puede ser identificado hasta cierto punto al observar un atractor extraño en el espacio de estados o al ver una sección de Poincaré del espacio de estados, es necesario el uso de criterios objetivos para mostrar o argumentar un comportamiento caótico en un sistema dinámico. A continuación presentaremos algunas herramientas matemáticas comúnmente empleadas para argumentar caos, finalizando con el método de Shilnikov el cual nos garantiza la existencia de un número

contable de invariantes caóticos.

A) Exponentes de Lyapunov

Durante muchos años los exponentes de Lyapunov han sido utilizados como una medida de caos. Una de las características distintivas de la dinámica caótica es la sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto es, dos condiciones iniciales cercanas en el atractor que divergen, llevando al sistema a ser impredecible. El exponente de Lyapunov es la tasa de crecimiento promedio de esta separación entre condiciones iniciales, con un valor positivo significando sensibilidad a las condiciones iniciales, un valor cero significa periodicidad (o quasiperiodicidad), un valor negativo significa un estado estable.

Calcular numéricamente el exponente de Lyapunov es conceptualmente sencillo ya que solo necesitamos dos condiciones iniciales cercanas y relacionar el logaritmo de su separación a una función lineal del tiempo. Sin embargo, existen una serie de complicaciones prácticas [Spratt, 2010].

Primero, se tiene que seguir la trayectoria por un tiempo lo suficientemente largo para estar seguros de que la trayectoria está, de hecho, en el atractor antes de empezar a calcular el exponente. No hay manera de saber con certeza cuánto hay que esperar, y hay situaciones, poco comunes, en las que el tiempo necesario para llegar al atractor es infinito.

Segundo, las condiciones iniciales elegidas para dos trayectorias no estarán, en general, orientadas en la dirección de la expansión más rápida, y su distancia puede, incluso, acercarse antes de que empiecen a separarse. Afortunadamente, las trayectorias tienden a orientarse en la dirección de la más rápida separación bastante rápido. Por lo cual, es recomendable descartar algunos de los primeros puntos del cálculo, de esta manera se puede solventar este problema y el anterior.

Tercero, el hecho de que usualmente la tasa de separación varía considerablemente respecto a la posición en el atractor, por esto es necesario promediar por un tiempo largo para lograr una apropiada ponderación de los puntos en cada región del atractor. Ya que el valor calculado converge lentamente, es necesario desarrollar un criterio de convergencia.

Finalmente, y lo más serio, es el hecho de que las condiciones iniciales deben tener una separación lo suficientemente larga para ser expresada de manera adecuada en cualquier precisión que la computadora utilice, a la vez que la separación no debe caer a un valor cero o crecer tanto como a una fracción significativa del atractor. Este requisito es casi siempre incompatible con el de seguir la trayectoria por un tiempo lo suficientemente largo para lograr que el valor calculado converja.

Este último problema se resuelve reajustando la separación cada tiempo δt de modo que la distancia vuelve a su valor original d_0 y mientras que el valor del exponente al final del paso de tiempo es d_1 . De este modo el exponente más grande de Lyapunov está dado por

$$\lambda = \langle \log(d_1/d_0) \rangle / \delta t \quad (1.3.1)$$

donde $\langle \rangle$ significa el promedio a lo largo de la trayectoria.

B) Espectro de exponentes de Lyapunov

Hasta ahora solo hemos considerado un exponente de Lyapunov cuando en realidad existen tantos exponentes como variables de estado y el que hemos considerado hasta ahora es solo el de mayor magnitud de ellos. Una manera de visualizar los exponentes de Lyapunov es considerando una elipsoide en tres dimensiones llena de condiciones iniciales el cual se expandirá o contraerá en cada una de sus tres ejes directores a un tasa de cambio correspondiente a cada uno de los exponentes de Lyapunov. El volumen del elipsoide será proporcional al producto de sus exponentes y crece acorde a $V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$, de modo que $dV/dt = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)V$. La única manera de que el volumen pueda crecer libremente es que la trayectoria no sea acotada y vaya a infinito, tales casos no son considerados como caos ya que este ha de ser recurrente en el sentido de que una trayectoria pasara arbitrariamente cerca de su condición inicial y ésto de manera repetitiva.

Con el espectro de exponentes de Lyapunov buscamos aportar mas información que el máximo exponente. Considerando que los exponentes pueden ser positivos, cero o negativos y que su suma no puede ser positiva para sistemas acotados, hay cinco posibles combinaciones. Un espectro (- - -) corresponde a un punto de equilibrio, (0 - -) corresponde a un ciclo límite, (0 0 -) corresponde a un 2-toro atractivo, (0 0 0) corresponde a un toro invariante de dimensión 1 o 2, finalmente un espectro (+ 0 -) corresponde a caos.

Para llevar al cabo el cálculo de todos los exponentes existen métodos numéricos que sin embargo son complicados y lentos. Para esto existe una alternativa que suele utilizarse para sistemas caóticos. Ya que un exponente debe ser positivo y uno cero, el tercero debe ser negativo. Entonces, λ_1 es la suma de los exponentes conocidos y λ_3 puede ser determinado por $\lambda_3 = \sum \lambda - \lambda_1$ ya que la suma de los exponentes es la tasa de crecimiento del volumen y está dado por $\sum \lambda = \langle \partial \dot{x} / \partial x + \partial \dot{y} / \partial y + \partial \dot{z} / \partial z \rangle$ promediado a lo largo de la trayectoria [Sprott, 2010].

C) Rutas al caos

Otra manera de mostrar comportamiento caótico es mediante teoría de bifurcaciones, lo que se busca en este tipo de análisis es mostrar como un sistema dinámico pasa de comportamiento regular a uno caótico pasando por una serie de bifurcaciones bien conocidas. Un ejemplo de esto es el escenario de Ruelle y Takens en el cual conforme el parámetro de interés varía en el espacio de parámetros, el sistema pasa de tener un equilibrio estable a un ciclo límite estable tras una bifurcación de Hopf. Después, tras otra bifurcación de Hopf, tenemos un comportamiento quasiperiódico y tras una tercera bifurcación, dinámica caótica [Ruelle y Takens, 1971].

Otra ruta al caos común vista en muchos mapeos es la de doblamiento de periodo, la cual consiste en una cascada infinita de bifurcaciones de doblamiento de periodo la cual lleva al sistema a tener órbitas periódicas de todos los periodos y dinámica caótica. Cabe señalar que rutas al caos como estas han sido, incluso, demostradas empíricamente. Así como este par de ejemplos existen otros patrones de bifurcación que llevan de una dinámica simple a una compleja [Argyris *et al.*, 2015].

D) Método de Shilnikov

A diferencia de las herramientas mencionadas anteriormente, el método de Shilnikov nos permite demostrar de manera formal la existencia de comportamiento caótico alrededor de una órbita homoclínica o heteroclínica en la forma de herraduras de Smale, a veces llamado caos homoclínico o heteroclínico.

A grandes rasgos, el método de Shilnikov nos dice que para sistemas dinámicos autónomos de tercer orden con puntos de equilibrio hiperbólicos tipo foco-silla, es decir que el Jacobiano del sistema evaluado positivo tiene eigenvalores con partes positivas y negativas donde uno es real y el otro es un par complejo conjugado. Adicionalmente existen órbitas homoclínicas o ciclos heteroclínicos que tienen a estos puntos de equilibrio como puntos terminales e iniciales. De acuerdo con el método de Shilnikov el sistema tiene comportamiento caótico si además de condiciones anteriores los eigenvalores del punto de equilibrio cumple con que el valor absoluto del eigenvalor real sea más grande que el valor absoluto de la parte real de los eigenvalores complejos conjugados, a esto usualmente se le llama la desigualdad de Shilnikov [Silva, 1993].

En el siguiente capítulo detallamos el método de Shilnikov.

1.4. Descripción de la tesis

El objetivo de este trabajo de tesis consiste en proponer un método constructivo de familias de sistemas lineales por partes que satisfagan las condiciones del método de Shilnikov para demostrar rigurosamente la presencia de caos en estas familias de sistemas dinámicos. La dificultad principal al utilizar el método de Shilnikov recae en garantizar la existencia de órbitas homoclínicas/heteroclínicas. Para tal problema, se tiene la hipótesis de que se puede proponer un método analítico de construcción de las órbitas homoclínicas/heteroclínicas utilizando las características geométricas de los sistemas lineales por partes, a la vez que se garantizan las demás condiciones en el método de Shilnikov. En particular proponemos una descripción de la familia de sistemas lineales por partes con dos dominios donde la construcción de órbitas heteroclínicas es directa mediante un método constructivo inspirado en el propuesto en [Li y Chen, 2009]. Extendemos nuestro método para el caso de una órbita homoclínica en un sistema con dos dominios, además proponemos un método de construcción de ciclos heteroclínicos en sistemas con tres dominios.

Los resultados de esta tesis extienden el trabajo de [Li y Chen, 2009] complementando con las condiciones propuestas en [Carmona *et al.*, 2008] para la construcción de órbitas heteroclínicas, a la vez que proponemos una extensión del método de construcción para órbitas homoclínicas. El resultado principal de esta tesis es la propuesta de un método constructivo de familias de sistemas lineales con dos pedazos en la cual hay caos heteroclínico; así como una familia que exhibe caos homoclínico. Además proponemos una familia de sistemas caóticos lineales por partes con tres dominios en la cual existe un ciclo heteroclínico entre dos puntos de equilibrio.

El resto del documento está conformado como sigue: En el capítulo 2, presentamos en detalle el método de Shilnikov empezando con algunas definiciones dentro de las cuales se encuentra la de invariante caótico y sistema por partes. Posteriormente se explican algunos conceptos y herramientas matemáticas necesarias para dar una idea

general sobre el método Shilnikov y su utilización en esta tesis. En el capítulo 3, presentamos nuestra propuesta para construir órbitas homoclínicas/heteroclínicas en sistemas lineales por partes con dos o tres dominios. En base en el método propuesto construimos familias de sistemas caóticos lineales por partes para los cuales se demuestra caos homoclínico y heteroclínico.

Capítulo 2

El método de Shilnikov

Empezamos definiendo, primeramente, qué es un sistema dinámico, qué es un sistema por partes y un invariante caótico. Tras esto, veremos una serie de conceptos en los cuales se basan los resultados de Shilnikov y después presentamos los teoremas con los cuales demostramos la existencia de invariantes caóticos en sistema lineales por partes. Las definiciones presentadas a continuación se basan en [di Bernardo *et al.*, 2008].

2.1. Conceptos básicos

Definición 2.1.1. Un espacio de estados X , un conjunto índice T y un operador de evolución ϕ^t definen un **sistema dinámico** (X, T, ϕ^t) si

$$\phi^t(x) = x, \quad \text{para todo } x \in X,$$

$$\phi^{t+s}(x) = \phi^s(\phi^t(x)) \quad \text{para todo } x \in X, \quad t, s \in T$$

El conjunto de puntos $\phi^t(x)$ para todo $t \in T$ es llamado **trayectoria** o **órbita** a través de x . El **retrato de fase** del sistema dinámico asociado a ϕ^t es la representación de las órbitas del sistema en su espacio de estados.

Cuando un sistema dinámico es invertible tenemos la siguiente propiedad adicional

$$\phi^{t-t} = id.$$

donde id es el operador identidad.

En el estudio de sistemas dinámicos nos centramos, principalmente, en las trayectorias del sistema tras un periodo largo de tiempo. Nos interesa como se comporta y como terminará comportándose el sistema, por esto es que se estudian los conjuntos invariantes, principalmente aquellos que son atractivos, los cuales están definidos como:

Definición 2.1.2. Un **conjunto invariante** de un sistema dinámico (X, T, ϕ^t) es un subconjunto $\Lambda \in X$, tal que, $x_0 \in \Lambda$ implica $\phi^t(x_0) \in \Lambda$ para todo $t \in T$. Un conjunto invariante que es cerrado y acotado es llamado un **atractor** si

1. Para cada vecindad $U \subset X$ de Λ lo suficientemente pequeña existe una vecindad V de Λ tal que $\phi^t(x) \in U$ para todo $x \in V$ y $t > 0$,
2. Para todo $x \in U$, $\phi^t(x) \rightarrow \Lambda$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Definición 2.1.3. El **dominio de atracción**, también conocido como cuenca de atracción, de un atractor Λ es el conjunto U más grande para el cual $x \in U$ implica $\phi^t(x) \rightarrow \Lambda$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Alrededor de estos invariantes es en donde ocurre la dinámica “observable” la cual es, como dijimos antes, la de interés al estudiar sistemas dinámicos. Es útil, también, definir aquellos puntos en el espacio de estados que son alcanzados tras un tiempo infinito en el futuro o los alcanzados tras un tiempo infinito en el pasado.

Definición 2.1.4. Un punto p es un **punto límite** ω de una trayectoria $\phi^t(x_0)$ si existe una secuencia de tiempos $t_1 < t_2 < \dots$ con $t_i \rightarrow \infty$ y $i \rightarrow \infty$ tal que $\phi^{t_i}(x_0) \rightarrow p$ como $t_i \rightarrow \infty$. Si, en cambio, existe una secuencia de tiempos con $t_1 > t_2 > \dots$ con $t_i \rightarrow -\infty$ y $\phi^{t_i}(x_0) \rightarrow p$, entonces decimos que p es un **punto límite** α de $\phi^t(x_0)$. Lo **conjunto límite** ω de $x_0 \in X$ es el conjunto de todos los posibles puntos límite ω . El conjunto de todos los puntos límite α para todo $x_0 \in X$ es llamado el **conjunto límite** α del sistema. Estos conjuntos son cerrados e invariantes.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n \quad (2.1.1)$$

donde \mathcal{D} es un dominio, entonces (X, T, ϕ^t) define un sistema dinámico si fijamos $X = \mathcal{D}$ y $T = \mathbf{R}$, y sea $\phi^t(x) := \Phi(x, t)$ el operador solución o flujo que toma condiciones iniciales x hasta su solución al tiempo t .

Definición 2.1.5. Un flujo suave por partes está dado por un conjunto finito de sistemas de ecuaciones simultáneas

$$\dot{x} = \mathbf{f}_i(x, \mu), \quad \text{para } x \in \mathbf{S}_i, \quad \mu \in \mathbf{R} \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (2.1.2)$$

donde:

1. $\cup_i \mathbf{S}_i = \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$
2. Cada \mathbf{S}_i tiene un interior no-vacío;
3. La intersección entre las cerraduras de las partes del dominio $\sum_{ij} := \bar{\mathbf{S}}_i \cap \bar{\mathbf{S}}_j$ es una variedad de dimensión $\mathbf{R}^{(n-1)}$ que esta contenida en las fronteras $\partial \mathbf{S}_j$ y $\partial \mathbf{S}_i$, o es el conjunto vacío
4. Cada campo vectorial \mathbf{f}_i es suave tanto en el estado x como en el parámetro μ
5. Su flujo solución $\Phi_i(x, t)$ es suave en cualquier conjunto abierto $U \supset \mathbf{S}_i$. En particular, cada flujo Φ_i esta bien definido en ambos lados de la frontera $\partial \mathbf{S}_i$.

Aquí la cerradura del conjunto \mathbf{S}_i , denotada como $\bar{\mathbf{S}}_i$ y es la unión del conjunto con su frontera.

Los invariantes de mayor interés, y correspondientes a la dinámica observable, en el estudio de sistemas en tiempo continuo son: puntos de equilibrio, ciclos límite, toros invariantes y caos. En este trabajo de tesis buscamos garantizar la existencia de comportamiento caótico. A continuación definimos lo que es un invariante caótico.

Definición 2.1.6. Un conjunto invariante cerrado y acotado Λ es llamado **caótico** si este satisface las siguientes condiciones:

1. Este tiene **sensibilidad a las condiciones iniciales**; *i.e.*: Existe un $\epsilon > 0$ tal que, para cualquier $x \in \Lambda$, y para cualquier vecindad $U \subset \Lambda$ de x , existe $y \in U$ y $t > 0$ tal que $|\phi^t(x) - \phi^t(y)| > \epsilon$
2. Existe una **trayectoria densa** que eventualmente visita arbitrariamente cerca de cada punto en el atractor, *i.e.*: Existe un $x \in \Lambda_1 \subset \Lambda$ tal que para cada punto $y \in \Lambda_2 \subset \Lambda$ y cada $\epsilon > 0$ existe un tiempo t (el cual puede ser positivo o negativo) tal que $|\phi^t(x) - y| < \epsilon$.

Una vez establecidos los sistemas dinámicos con los que trabajamos y lo que buscamos en ellos, presentaremos una serie de conceptos y herramientas en las que se basa el método de Shilnikov.

2.2. Órbitas Homoclínicas y Heteroclínicas

Otro tipo importante de conjuntos invariantes son las órbitas conectivas, las cuales tienden a otros invariantes conforme el tiempo tiende a ∞ así como a $-\infty$. Por ejemplo una órbita que conecta un punto de equilibrio consigo mismo o con un segundo punto de equilibrio. Este tipo de órbitas reciben el nombre de homoclínicas y heteroclínicas, respectivamente.

Definición 2.2.1. Una órbita para la cual sus conjuntos límite α y ω consiste en el mismo punto de equilibrio es llamada órbita homoclínica.

Un bosquejo de una órbita homoclínica de muestra en la Figura 2.1 (a).

Definición 2.2.2. Una órbita la cual el conjunto límite α es un punto de equilibrio y el conjunto límite ω es otro punto de equilibrio, es llamada órbita heteroclínica.

Un ciclo heteroclínico está formado por la unión de dos o mas órbitas heteroclínicas, generando un ciclo cerrado como se ve en la Figura 2.1(b).

Este tipo de órbitas se generan cuando las variedades locales estable e inestable de un punto de equilibrio se interceptan generando un ciclo que une al punto de equilibrio con sí mismo para el caso homoclínico y cuando la intercepción ocurre con una variedad local estable de un punto de equilibrio con la variedad local inestable de un segundo punto de equilibrio se genera una órbita heteroclínica. Las órbitas homoclínicas, así como las heteroclínicas, son consideradas doblemente asintóticas, esto debido a que la órbita tiende a un punto de equilibrio conforme el tiempo avanza en sentido positivo o hacia el otro punto de equilibrio para el tiempo negativo.

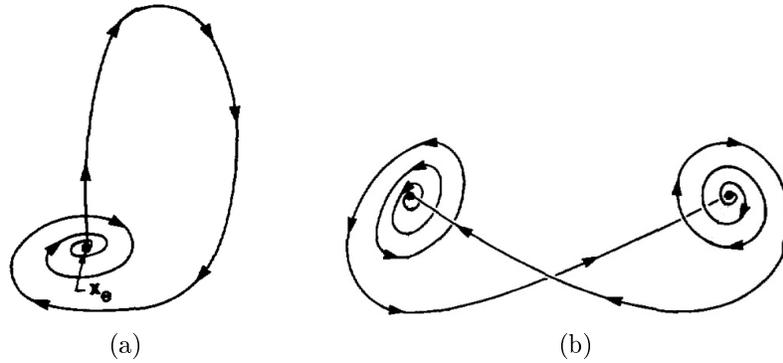


Figura 2.1: a) Órbita homoclínica b) Ciclo heteroclínico.

2.3. Mapeo de Poincaré

Un mapeo de Poincaré es un sistema de tiempo discreto asociado a uno de tiempo continuo descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias. Este mapeo es generado con el objetivo de trasladar el análisis del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a uno de tiempo discreto más sencillo de estudiar, esta técnica tiene muchas ventajas:

La construcción de un Mapeo de Poincaré involucra una reducción en el número de variables del sistema lo cual conduce al análisis de un sistema de menor dimensión respecto al sistema original. Para problemas de baja dimensión (dimensión ≤ 4) simulaciones numéricas aportan mucha información sobre la dinámica global de un sistema. Algunos conceptos que pueden ser difíciles de manejar en ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser más sencillos en su Mapeo de Poincaré asociado, como en el caso de una órbita periódica cuyo análisis en su dinámica discreta se reduce al análisis de puntos fijos.

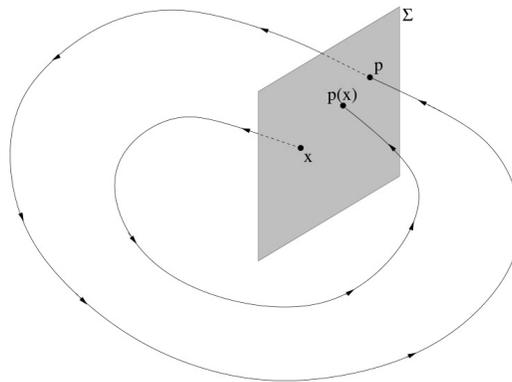


Figura 2.2: Mapeo de Poincaré para una órbita periódica cruzando a Σ por p , así como la de una trayectoria en la vecindad de la órbita periódica

El mapeo de Poincaré es utilizada para el análisis de estabilidad y bifurcaciones de órbitas periódicas, la idea básica consiste en construir un hiperplano Σ el cual corta transversalmente una trayectoria periódica Γ (o una con comportamiento recurrente)

la cual cruzará por Σ cada vez que complete su periodo, siendo así como ocurre la dinámica discreta en el hiperplano Σ .

Definición 2.3.1. Sea Γ una órbita periódica con periodo T para el sistema $\dot{x} = f(x)$ y $p \in \Gamma$. Entonces debe existir una k -ésima función coordenada del campo vectorial en el punto p diferente de cero, es decir, $f_k \neq 0$. Consideremos al hiperplano

$$\Sigma := \{x \in \mathbf{R}^n | x_k = p\}$$

Este hiperplano Σ es llamado plano cortante o plano transversal al punto p . Para $x \in \Sigma$ cercano a p el flujo $\phi^t(x)$ regresa a Σ en el tiempo $\tau(x)$. Sea $V \subset \Sigma$ un subconjunto abierto en Σ en el cual $\tau(x)$ es diferenciable. Entonces $P(x) = \phi^{\tau(x)}(x)$ para $x \in V$ es llamado mapeo de primer retorno o mapeo de Poincaré.

En la Figura 2.2 podemos ver una ilustración de la construcción de un mapeo de Poincaré.

2.4. Herradura de Smale

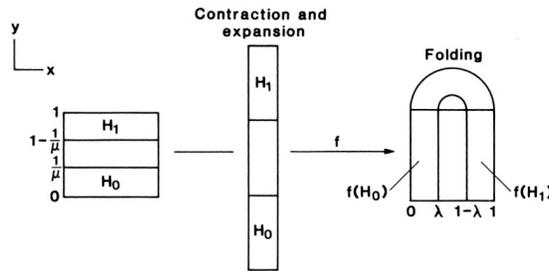


Figura 2.3: Mapeo de Herradura de Smale, los rectángulos horizontales H_0 y H_1 pasan a ser rectángulos verticales [Wiggins, 2003]

El tipo de invariante caótico que se demuestra en el método de Shilnikov es la herradura de Smale, para explicar de manera sencilla la herradura de Smale presentaremos una definición geométrico-analítica del mapeo para después generar, a partir de este, un conjunto invariante Λ de puntos disjuntos en el cual, por medio de su dinámica simbólica asociada, es posible demostrar caos [Smale, 1963]. Considere un mapeo f en un cuadrado unitario en \mathbf{R}^2

$$f : D \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

El cual contrae a D en la dirección x , lo expande en la dirección y y lo dobla de modo tal que D cae dentro de si mismo como se muestra en la Figura 2.3. El desarrollo de las propiedades de la herradura de Smale se presentan en [Wiggins, 2003]. En particular, se muestra que este mapeo tiene un conjunto invariante con las siguientes características:

- Un infinito contable de órbitas periódicas.

- Un infinito no contable de órbitas no periódicas.
- Una órbita densa.

A continuación describimos la idea central detrás de los trabajos de Shilnikov.

2.5. Método de Shilnikov para demostrar caos en sistemas dinámicos tridimensionales

Consideremos el sistema dinámico de dimensión tres

$$\dot{x} = f(\mathbf{x}), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \quad (2.5.1)$$

donde el campo vectorial $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es clase C^p ($p \geq 1$), sea $\phi^t(\mathbf{x})$ el flujo de (2.5.1). Decimos que un punto de equilibrio \bar{x} de (2.5.1) es un foco-silla hiperbólico si los eigenvalores de la matriz Jacobiana de f en \bar{x} , $Df(\bar{x})$, son de la forma

$$\gamma, \sigma \pm j\omega, \quad \sigma\gamma < 0, \quad \omega \neq 0 \quad (2.5.2)$$

donde γ, σ y ω son números reales y $j = \sqrt{-1}$.

Asociado con este punto de equilibrio hay un eigenespacio $E^c(\bar{x})$ de dimensión 2 correspondiente a los eigenvalores complejos conjugados $\sigma \pm j\omega$, al cual nos referiremos como eigenplano. También hay un eigenespacio $E^r(\bar{x})$ correspondiente al eigenvalor real γ , al cual nos referiremos como eigenrecta. Estos puntos de equilibrio son llamados en parte silla por tener asociados a el dos eigenespacios, siendo uno estable y el otro inestable debido a que $\sigma\gamma < 0$. Por otra parte es llamado foco ya que la dinámica en el eigenplano es en forma de espiral debido a los eigenvalores complejos conjugados.

La eigenrecta y el eigenplano son invariantes ante el flujo del sistema dinámico linealizado

$$\dot{\mathbf{y}} = Df(\bar{x})\mathbf{y} \quad (2.5.3)$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{x}$, el cual se aproxima a (2.5.1) en la vecindad de \bar{x} .

Para el sistema (2.5.1) las órbitas homoclínicas existen en la intersección del eigenplano $E^c(\bar{x})$ y la eigenrecta $E^r(\bar{x})$, un ejemplo de esto se muestra en la Figura 2.1. Nos referiremos al sistema 2.5.1 como sistema de Shilnikov cuando exhibe órbitas homoclínicas o ciclos heteroclínicos. Cabe señalar que en el caso de sistemas lineales no es posible que este tipo de intersecciones entre variedades ya que el plano y la recta se extienden por todo el espacio de estados. Sin embargo, en sistemas lineales por partes estas conexiones entre variedades pueden generarse debido a la conmutación entre dinámicas vecinas, las eigenvariedades de un punto de equilibrio en una partición pueden ser conectadas por una trayectoria debida a la dinámica en otros de los pedazos del sistema, esto se ejemplifica en la Figura 2.4.

En la vecindad del punto de equilibrio \bar{x} y transversal a una comportamiento recurrente se construye un mapeo de Poincaré

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.5.4)$$

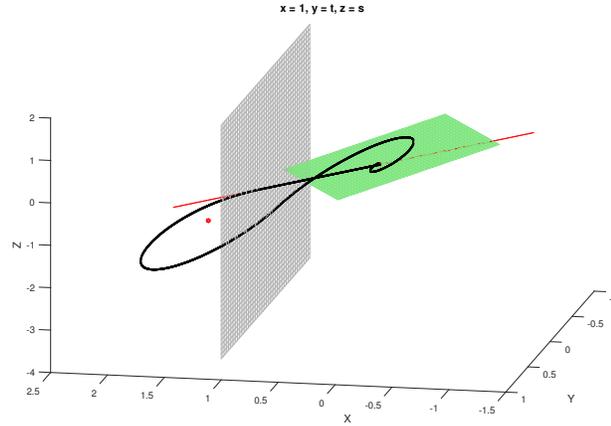


Figura 2.4: Ilustración de una órbita homoclínica en un sistema lineal por partes.

De esta manera, uno puede estudiar el sistema (2.5.4) en lugar del sistema original de tres dimensiones (2.5.1). Para el caso de una órbita homoclínica (para órbitas heteroclínicas y ciclos heteroclínicos es similar) un mapeo de Poincaré local característico (llamado mapeo de Shilnikov) puede ser construido a partir de dos mapeos: ψ_e , el cual corresponde al flujo linealizado cerca del punto de equilibrio, mientras que el segundo, ψ_h , describe el comportamiento en una vecindad de la órbita homoclínica lejos del punto de equilibrio, esto se ilustra en la Figura 2.5. El mapeo de Shilnikov permite determinar si existe una herradura de Smale al rededor de \bar{x} . Para establecer lo anterior es necesario que los eigenvalores de punto de equilibrio cumplan con la desigualdad de Shilnikov, es decir, que el valor absoluto del eigenvalor real sea mayor al valor absoluto de la parte real de los eigenvalores complejos conjugados [Silva, 1993].

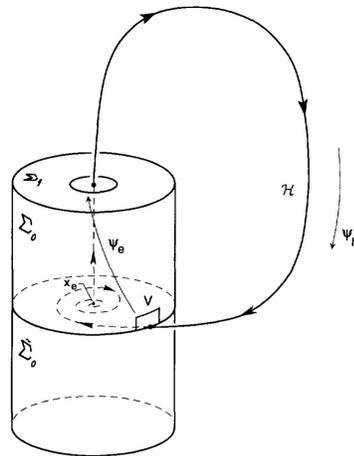


Figura 2.5: Mapeo de Poincaré para una órbita homoclínica, [Silva, 1993]

A continuación presentamos los resultados principales del método de Shilnikov con los cuales podemos garantizar que un sistema dinámico es caótico.

2.6. Prueba de caos homoclínico

Teorema 2.6.1 (Método de Shilnikov homoclínico [Silva, 1993]). *Dado el sistema autónomo de dimensión tres en (2.5.1), donde f es un campo vectorial C^1 en \mathbf{R}^3 . Sea \bar{x} un punto de equilibrio para (2.5.1). Suponga lo siguiente:*

1. *El punto de equilibrio es un foco-silla cuyos eigenvalores característicos satisfacen la desigualdad de Shilnikov, esto es:*

$$|\gamma| > |\sigma| > 0 \quad (2.6.1)$$

2. *Existe una órbita homoclínica \mathcal{H} basada en \bar{x} .*

Entonces:

1. *El mapeo de Shilnikov definido en la vecindad de \bar{x} y transversal a \mathcal{H} posee un número contable de herraduras de Smale en su dinámica discreta.*
2. *para cualquier perturbación- C^1 ζ de f^2 lo suficientemente pequeña, el sistema perturbado*

$$\bar{x} = \zeta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \quad (2.6.2)$$

tiene al menos un número finito de herraduras de Smale en la dinámica discreta del mapeo de Shilnikov definido en la vecindad de \mathcal{H} .

3. *Tanto el sistema original (2.5.1) como el perturbado 2.6.2 exhiben caos de herradura también conocido como caos homoclínico.*

Notas [Silva, 1993]

- I Este resultado fue originalmente propuesto por Shilnikov, con los detalles sobre la herradura se Smale añadidos posteriormente. Este ha sido también extendido para campos vectoriales lineales por partes de clase C^1 [Tresser, 1984], probando que 1) \bar{x} está en el interior de una de las particiones, y 2) \mathcal{H} está apartada de cualquier otro punto de equilibrio aparte de \bar{x} y no es tangente a ninguna de las superficies frontera entre las particiones.
- II Las conclusiones 2 y 3 del Teorema 1 indican lo que es llamado la propiedad de estabilidad estructural del caos homoclínico, esto es, que sigue existiendo a pesar de cambios menores en el campo vectorial. Esto tiene implicaciones importantes para la investigación de caos numérico como experimental, ya que los parámetros ambientales en esos contextos varían con el tiempo y son conocidos solo con precisión finita. A diferencia de los invariantes caóticos, la estabilidad estructural de la órbita homoclínica no está garantizada.
- III La desigualdad de Shilnikov en (2.6.1) es crucial, si este fuera invertido las herraduras de Smale se irían y no habría caos. La frontera $|\sigma| = |\gamma|$ es un interesante punto de bifurcación entre el comportamiento regular y el caótico.
- IV La parte más difícil de aplicar este método es el establecimiento formal de la existencia de la órbita homoclínica.

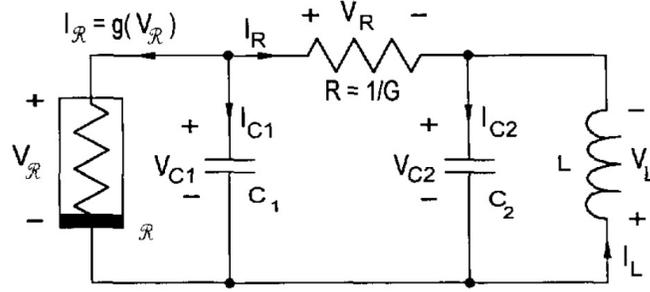


Figura 2.6: Circuito de Chua

Ejemplo 1 (Circuito de Chua: Caos homoclínico)

El Circuito de Chua (Figura 2.6) se ha convertido en un paradigma para caos al ser uno de los sistemas más simples que manifiestan el complejo fenómeno de caos, tanto experimental como numéricamente. Las ecuaciones de estado que describen la dinámica en el circuito de Chua son las siguientes [Chua *et al.*, 1986]:

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{v_{C_2} - v_{C_1}}{R} - g(v_{C_1}) \\
 C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} &= \frac{v_{C_1} - v_{C_2}}{R} + i_L \\
 L \frac{di_{C_1}}{dt} &= -v_{C_2}
 \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Donde el único elemento no-lineal es el resistor lineal por partes $g(v_{C_1})$, el cual está descrito por la siguiente relación

$$g(v_{C_1}) = \begin{cases} m_1 v_{C_1} + B_p(m_0 - m_1), & v_{C_1} > B_p \\ m_0 v_{C_1}; & |v_{C_1}| \leq B_p \\ m_1 v_{C_1} - B_p(m_0 - m_1), & v_{C_1} < -B_p \end{cases} \tag{2.6.4}$$

donde m_0 y m_1 son pendientes negativas y B_p es un parámetro de quiebre.

Un análisis formal de la familia de campos vectoriales tipo double-scroll se presenta en [Chua *et al.*, 1986], el cual incluye un análisis cualitativo general culminando en una demostración de la presencia de caos homoclínico, así como un detallado análisis de bifurcaciones. Para este ejemplo, el campo vectorial es: lineal por partes (por lo tanto C^∞ por partes) consistiendo en tres regiones con dos planos paralelos como planos de switcheo, y es simétrica impar con respecto al origen. Esto puede apreciarse en la forma no dimensional de las ecuaciones de estado, las cuales están dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha[y - x - g(x)] \\
 \dot{y} &= x - y + z \\
 \dot{z} &= -\beta y
 \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

donde el elemento no lineal esta dado por

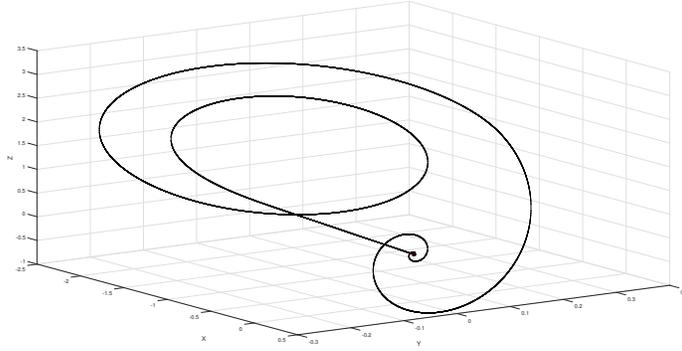


Figura 2.7: Órbita homoclínica del circuito de Chua con condición inicial (2.6.7) y tiempo final $t_f = 9$.

$$g(x) := \begin{cases} m_1x - m_0 + m_1, & x \geq 1 \\ m_0x, & |x| \leq 1 \\ m_1x + m_0 - m_1, & x \leq -1. \end{cases} \quad (2.6.6)$$

Los parámetros α, β, m_0 , y m_1 son definidos en términos de los parámetros del circuito original. Para este ejemplo los valores de los parámetros se fijan en

$$\alpha = 12.16545691, \quad \beta = 19, \quad m_0 = -\frac{1}{7}, \quad m_1 = \frac{2}{7}. \quad (2.6.7)$$

El sistema posee tres focos-silla distintos, uno en el interior de cada una de las regiones (en particular una en el origen $(0, 0, 0)$ y las otras dos simétricamente-impar relacionados y localizados en $(\pm(m_0 - m_1)/(m_1), 0, \mp(m_0 - m_1)/(m_1))$).

Debido a la naturaleza lineal por partes del campo vectorial, un análisis preciso de las cualidades dinámicas en cada dominio es posible. Esto, junto con la parametrización del campo vectorial, hace posible establecer formalmente la existencia de un par simétrico-impar de órbitas homoclínicas \mathcal{H}^\pm basadas en el origen.

La Figura 2.7 presenta una simulación numérica (2.6.5) con las siguientes condiciones iniciales

$$x(0) = -0.00001, \quad y(0) = -9.19102 \times 10^{-7}, \quad z(0) = 5.96565 \times 10^{-6}. \quad (2.6.8)$$

Los parámetros en (2.6.7) son utilizados en el artículo [Medrano-T *et al.*, 2003] y son parámetros en los cuales se sabe que existe una órbita homoclínica, en dicho artículo se presentan varios sistemas con órbitas homoclínicas así como un método numérico para encontrar sistemas con este tipo de órbitas. En este ejemplo utilizamos las simulaciones presentadas en la Figura 2.7 para argumentar la existencia de una órbita homoclínica para el circuito de Chua. En la Figura 2.8(a) la simulación corre por 18 segundos, que es el doble de la duración de la simulación en la Figura 2.7, se puede observar que la trayectoria se separa de la órbita homoclínica. En la Figura 2.8(b) se muestra el resultado de la simulación obtenida al perturbar el parámetro α

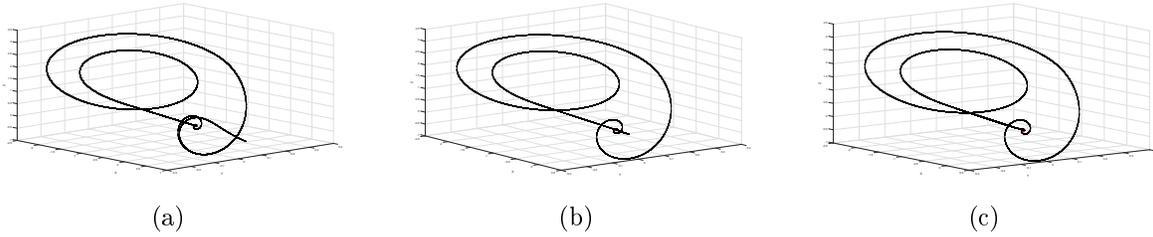


Figura 2.8: Validación numérica de la órbita homoclínica del circuito de Chua.

ligeramente, pasa de $\alpha = 12.16545691$ a $\alpha = 12.1645600$. Se observa que la órbita se flexiona hacia la derecha. En la Figura 2.8(c) se presenta la simulación obtenida de perturbar el parámetro a $\alpha = 12.1654571$, se observa que la órbita se flexiona hacia la izquierda. Debido a la continuidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales con respecto a sus parámetros, uno puede utilizar esas divergencias opuestas respecto a la órbita homoclínica para argumentar intuitivamente la existencia de una órbita de este tipo en el circuito de Chua 2.6.5.

La integración numérica fue realizada en una computadora personal utilizando Matlab y la rutina ODE45 con una precisión relativa y absoluta de 10^{-12} y 10^{-14} , respectivamente. Hay que advertir que esta es una operación sensible y delicada, esto debido principalmente a que la porción espira de la órbita homoclínica escapa rápidamente de la variedad inestable $E^c(0)$ ya que es un subconjunto en dos dimensiones de un espacio de tres dimensiones y cualquier computadora posee precisión finita. Como resultado uno puede seguir este tipo de órbitas solo por una pequeña cantidad de tiempo antes de que la simulación se mueva a otro conjunto. Este efecto posterior puede verse en la Figura 2.8(a), (b) y (c), en esta secuencia de figuras se muestra lo que ocurre cuando un parámetro como α es ligeramente perturbada desde su valor nominal en (2.6.7). Observe como la órbita se dobla hacia arriba o abajo de $E^c(0)$ y no forman una órbita cerrada. En cambio, debido a la continuidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales con respecto a sus parámetros, uno puede utilizar esas divergencias opuestas respecto a la órbita homoclínica para argumentar intuitivamente la existencia de una órbita de este tipo en la dinámica de (2.6.5).

Con los parámetros en (2.6.7) encontramos los siguientes eigenvalores del Jacobiano evaluado en el origen

$$\gamma = 2.7779 \text{ y } \sigma \pm j\omega = -1.0200 \pm j3.5669 \quad (2.6.9)$$

los cuales cumplen la desigualdad de Shilnikov, en la Figura 2.9 se muestra el atractor caótico en el espacio de estados del sistema (2.6.5) con los parámetros (2.6.7) y condición inicial (2.6.8).

2.7. Prueba de caos heteroclínico

Teorema 2.7.1 (Método de Shilnikov heteroclínico [Silva, 1993]). *Dado el sistema autónomo de dimensión tres en (2.5.1), donde f es un campo vectorial C^1 en \mathbf{R}^3 . Sean*

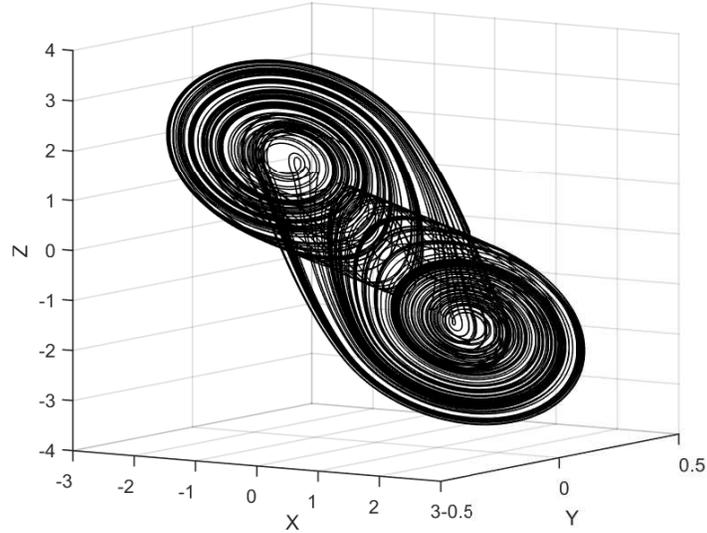


Figura 2.9: Atractor caótico del circuito de Chua (2.6.5) con los parámetros (2.6.7).

\bar{x}_1 y \bar{x}_2 dos puntos de equilibrio distintos para (2.5.1). Suponga lo siguiente:

1. \bar{x}_1 y \bar{x}_2 son puntos de equilibrio focos-silla que satisfacen la desigualdad de Shilnikov

$$|\gamma_i| > |\sigma_i| > 0 \quad (2.7.1)$$

con la siguiente restricción

$$\sigma_1\sigma_2 > 0 \quad \text{o} \quad \gamma_1\gamma_2 > 0 \quad (2.7.2)$$

2. Existe un ciclo heteroclínico \mathcal{H}^L uniendo \bar{x}_1 y \bar{x}_2 que está formado por dos órbitas heteroclínicas \mathcal{H}_i ($i = 1, 2$).

Entonces, las conclusiones 1-3 del Teorema 1 se cumplen nuevamente, con \mathcal{H} remplazado por \mathcal{H}_i , el punto de equilibrio \bar{x} por \bar{x}_i ($i = 1, 2$), y el término caos homoclínico por caos heteroclínico.

Notas [Silva, 1993]:

I Este resultado es una generalización de los descubrimientos básicos de Shilnikov. Al igual que en el Teorema 1, este ha sido extendido para el caso lineal por partes de clase C^1 con el requerimiento de que 1) cada punto de equilibrio esta en el interior de una de las partes (pueden estar ambos en la misma parte), y 2) las órbitas heteroclínicas están apartadas de cualquier otro punto de equilibrio aparte de \bar{x}_i y no es tangente a alguna superficie frontera de ninguna de las partes.

II Notas similares a las II) hasta IV) del Teorema 1 se cumplen aquí también.

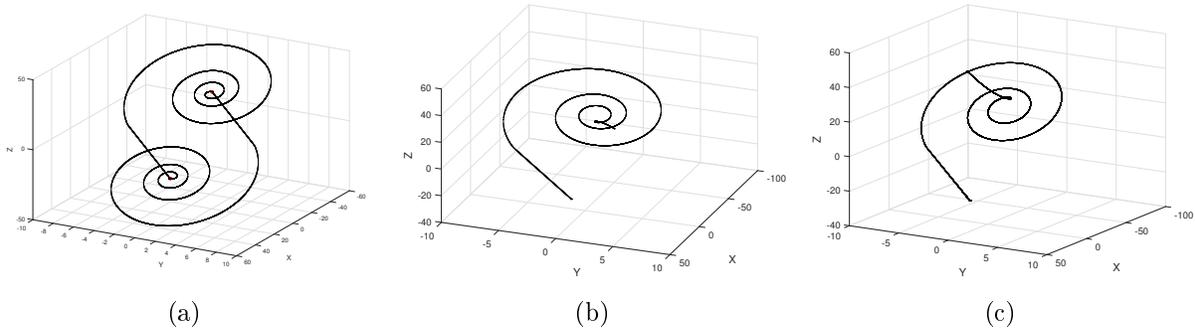


Figura 2.10: Validación numérica de la órbita Heteroclínica del circuito de Chua.

Ejemplo 2 (Circuito de Chua: Órbita heteroclínica)

La familia de campos vectoriales tipo double-hook está muy relacionada con su contra parte tipo double-scroll. La mayor diferencia entre las familias de campos vectoriales es que en la double-hook el origen es un nodo-silla; esto es, los eigenvalores de $Df(\bar{x})$ son todos reales, no cero y no todos tienen el mismo signo.

El circuito de Chua (2.6.5) para los parámetros

$$\alpha = -4.50746268737, \quad \beta = -3.3373353844, \quad m_0 = -2.4924, \quad m_1 = -0.93 \quad (2.7.3)$$

es llamado double-hook y se sabe que tiene un ciclo heteroclínico [Silva, 1993].

Las simulaciones por computadora en la Figura 2.10, las cuales son análogos a los de las Figuras 2.7 y 2.8 para la órbita homoclínica en el circuito de Chua, ilustran el ciclo heteroclínico \mathcal{H}^L , el cual consiste en dos órbitas heteroclínicas.

Observar la existencia del ciclo heteroclínico a partir de las simulaciones de (2.6.5) con los parámetros (2.7.3) se vuelven incluso más difícil que en el caso de la órbita homoclínica, ya que \mathcal{H}^L conecta dos focos-silla muy separados entre si y la sensibilidad numérica es más fuerte, los punto de equilibrio en el ciclo heteroclínico son

$$\bar{x}_i = (\pm 22.32, 0, \mp 22.32)^T, \quad i = 1, 2 \quad (2.7.4)$$

los cuales están separados por una distancia euclidiana de 63.13. Además \bar{x}_i ($i = 1, 2$) tiene estabilidad inversa, esto es, γ y σ tienen signos opuestos comparados con el foco-silla del Ejemplo 1. Por esta razón, realizamos las simulaciones en tiempo inverso, esto es, con el lado derecho de (2.6.5) con signo contrario.

El ciclo heteroclínico del circuito de Chua se puede observar simulando cada órbita heteroclínica a partir de las siguientes condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_i(0) = (\pm 22.2861576, \mp 0.009506608, \mp 22.28662665)^T, \quad i = 1, 2 \quad (2.7.5)$$

por 26 segundos en tiempo negativo.

En este caso se utilizaron las mismas precisiones absoluta y relativa que en el caso de la órbita homoclínica del Ejemplo 1. En la Figura 2.10(a) se muestra el ciclo heteroclínico uniendo la simulación partiendo de cada uno de los dos puntos de equilibrio

\bar{x}_1 y \bar{x}_2 . Mientras que la Figura 2.10(b) presenta la simulación partiendo de \bar{x}_1 con un valor $\alpha = -4.50746269$, en este caso la trayectoria se flexiona a la derecha. En la Figura 2.8(c) se presenta la simulación partiendo de \bar{x}_1 para un valor $\alpha = -4.50746260$, en este caso la trayectoria se flexiona a la izquierda. Por continuidad de las soluciones podemos argumentar que existe una órbita heteroclínica uniendo \bar{x}_1 con \bar{x}_2 , por simetría existe otra órbita conectando \bar{x}_2 con \bar{x}_1 generando un ciclo heteroclínico entre ambos puntos de equilibrio.

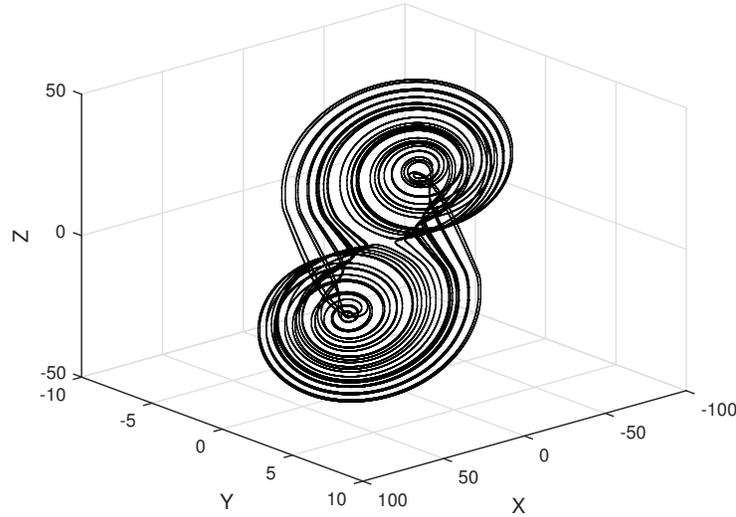


Figura 2.11: Atractor extraño en el espacio de estados para los parámetros (2.7.3) en la ecuación (2.6.5)

En este ejemplo, los eigenvalores del Jacobiano evaluado en $\bar{x}_i (i = 1, 2)$ están dados por

$$\gamma_i = -0.9506607987, \quad \sigma_i \pm j\omega_i = 0.1330915934 \pm j1.044002616; \quad i = 1, 2 \quad (2.7.6)$$

Los cuales satisfacen las condiciones de Shilnikov en el Teorema 2, por lo tanto el sistema tiene caos heteroclínico. En la Figura 2.11 se muestra el atractor caótico del double-hook para el circuito de Chua (2.6.5) con los parámetros (2.7.3).

Los problemas de sensibilidad numérica y argumentaciones intuitivas indican que una prueba rigurosa es necesaria para asegurar la existencia de las órbitas homoclínicas y ciclos heteroclínicos. En el siguiente capítulo proponemos algoritmos que nos permiten construir sistemas dinámicos lineales por partes en los cuales se garantiza rigurosamente la existencia de estas órbitas y, mediante el método de Shilnikov, que estas familias son caóticas.

Capítulo 3

Construcción de familias de sistemas lineales por partes con caos homoclínico/heteroclínico

En este capítulo se presentan los resultados principales de esta tesis, empezando por explicar una serie de condiciones bajo las cuales podemos construir sistemas lineales por partes en los cuales existen órbitas heteroclínicas y que al cumplir con las restricciones del método de Shilnikov son caóticos.

3.1. Resultados previos

En el artículo [Li y Chen, 2009] los autores presentan una manera de construir sistemas caóticos basados en el teorema de Shilnikov heteroclínico. Ellos proponen sistemas lineales por partes los cuales son escogidos de modo que se garantizan intersecciones entre los eigenespacios de sus puntos de equilibrio para y así asegurar la existencia de ciclos heteroclínicos. Los sistemas afines propuestos son:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} (\mathbf{x} - f(x)) \quad (3.1.1)$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$, $f(x)$ es una función constante por partes de la forma

$$f(x) = \begin{cases} (f_1^1, f_1^2, f_1^3)^T, & \text{para } \mathbf{S}_1 \\ (f_2^1, f_2^2, f_2^3)^T, & \text{para } \mathbf{S}_2 \\ \dots & \dots \\ (f_m^1, f_m^2, f_m^3)^T, & \text{para } \mathbf{S}_m \end{cases}$$

con $(f_1^1, f_1^2, f_1^3)^T \in \mathbf{R}^3$, el dominio es $\cup_i \mathbf{S}_i = \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ y las variedades de conmutación son $\sum_{ij} := \bar{\mathbf{S}}_i \cap \bar{\mathbf{S}}_j$, como se describió en el capítulo 2.

El Jacobiano del sistema es:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

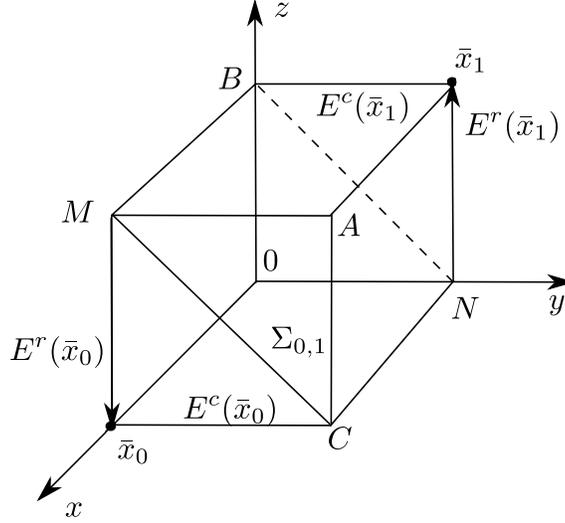


Figura 3.1: Bosquejo de la geometría de los eigenespacios del sistema

de modo que, seleccionando adecuadamente los valores de a y γ los eigenvalores cumplen con la desigualdad de Shilnikov.

Los eigenplanos en cada punto de equilibrio son paralelo al plano $z = 0$ y las eigenrectas son paralelas al eje z . Al elegir la ubicación de cada punto de equilibrio se puede proponer un plano de switcheo de la forma $y + z = 1$ con un ángulo de 45° . Con esta elección es posible garantizar la intersección del eigenespacio inestable de un punto de equilibrio, el plano de switcheo y el eigenespacio estable de otro punto de equilibrio generando así órbitas heteroclínicas, por simetría se generan ciclos heteroclínicos. De esta manera, el método de Shilnikov es una prueba rigurosa de caos para esta familia de sistemas.

En el artículo [Li y Chen, 2009] se propone el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} (\mathbf{x} - f(x)) \quad (3.1.2)$$

con $a = 0.2$, $\gamma = -1$ y $f(x) = \begin{cases} (1, 0, 0)^T, & \text{para } \mathbf{S}_0 \\ (0, 1, 1)^T, & \text{para } \mathbf{S}_1 \end{cases}$ donde $\mathbf{S}_0 = \{(x, y, x)^T : x + y < 1\}$ y $\mathbf{S}_1 = \{(x, y, x)^T : x + y \geq 1\}$.

Los puntos de equilibrio son $\bar{x}_0 = (1, 0, 0)$ y $\bar{x}_1 = (0, 1, 1)$, con las intersecciones definidas como se muestra en la Figura 3.1, esto es, los segmentos de recta $BM = E^c(\bar{x}_1) \cap \Sigma_{0,1}$ y $CN = E^c(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1}$, así como los puntos de intersección $M = E^r(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1}$ y $N = E^r(\bar{x}_1) \cap \Sigma_{0,1}$.

Dado que ambos eigenplanos son inestables y las eigenrectas son estables, para generar una órbita heteroclínica será necesario que el eigenplano de \bar{x}_0 se intersecte con la eigenrecta de \bar{x}_1 , por simetría, lo mismo ocurre de \bar{x}_1 a \bar{x}_0 generando un ciclo heteroclínico.

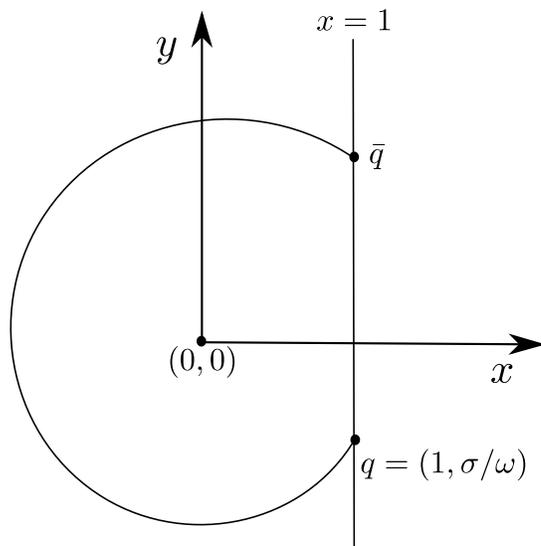


Figura 3.2: Foco en \mathbf{R}^2

3.2. Método de construcción propuesto

La intersección de los eigenespacios no es suficiente para garantizar la existencia de órbitas homoclínicas/heteroclínicas. Como se comenta en [Carmona *et al.*, 2008] la conexión de la eigenrecta y el eigenplano debe ocurrir en una región específica de la intersección $E^c(\bar{x}) \cap \Sigma_{0,1}$, esta región es en la cual $E^c(\bar{x})$ que coincide con la variedad estable/inestable local del sistema lineal por partes alrededor del punto de equilibrio.

Para identificar cuáles son las variedades estables/inestables locales del sistema donde la conexión debe ocurrir consideremos un plano cuya dinámica es la correspondiente a la de un foco en el eigenplano, como se muestra en la Figura 3.2, donde la dinámica está dada por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma x & -\omega y \\ \omega x & \sigma y \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

Suponiendo que el equilibrio está en el origen y la recta $r = \{(x, y) \mid x = 1\}$ delimita el dominio de la función (3.2.1). Además, suponemos que $q \in r$ es el punto en el cual el campo vectorial es tangente a r , de modo que el punto $\bar{q} \in r$ parte de la trayectoria que pasa por q . Entonces, si la dinámica tipo foco es estable, una trayectoria con condición inicial en \bar{q} tocará nuevamente a r a través del punto q y posteriormente girará en espiral dentro del dominio hasta llegar al punto de equilibrio. Similarmente, si el foco es inestable, hay una trayectoria que diverge del punto de equilibrio tocando una vez a r en el punto q para volver a la recta pasando por \bar{q} .

La variedad local estable/inestable en (3.2.1) está delimitada por el segmento de recta Q con puntos finales q y \bar{q} . Para este sistema podemos definir a la variedad estable/inestable local como el conjunto de trayectorias que tocan a cada uno de los puntos en Q . Debido a esto, no es suficiente con garantizar la intersección de un eigenespacio estable, plano de switcheo y eigenespacio inestable, este punto de intersección debe estar contenido en el segmento de recta Q para que exista una órbita heteroclínica.

Para calcular q buscamos condiciones en las cuales se cumple que $\langle f(x), h \rangle = 0$, donde la dirección de $h = (1, 0)$ es normal a r . Se obtiene que $q = (1, \sigma/\omega)$.

Si evaluamos q en (3.2.1) tenemos que

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega + \frac{\sigma^2}{\omega} \end{pmatrix}$$

de modo que tanto el sentido de giro como la segunda componente de q depende de ω . Tal que para $\omega < 0$, q tiene signo negativo en su segunda componente y debido al sentido de giro, la segunda componente de \bar{q} debe tener signo contrario a q y dado que es un foco inestable, $|\bar{q}| > |q|$. Por esto, una sección de recta con puntos finales $(1, \sigma/\omega)$ y $(1, -\sigma/\omega)$ debe estar contenida en la segmento de recta Q . En base a esto es suficiente conocer a q para identificar una región en la intersección entre $E^c(\bar{x})$ y el plano de switcheo que coincida con la otra intersección entre la variedad local del sistema con el plano de switcheo.

A diferencia del artículo [Li y Chen, 2009], en esta tesis no se propone un sistema con caos heteroclínico sino una familia de sistemas así como un método para construirlos. Además, utilizando pautas similares a las descritas en esta sección para proponer familias de sistemas con caos homoclínico. A continuación se describe el método de construcción de familias de sistemas lineales por partes con dos dominios donde el caos heteroclínico se puede mostrar directamente utilizando el método de Shilnikov con caos heteroclínico.

3.3. Método I. Caos heteroclínico

Supongamos que el espacio de estados de un sistema lineal por partes consta de dos dominios \mathbf{S}_0 , \mathbf{S}_1 y de un plano de switcheo $\Sigma_{0,1}$, como se muestra en la Figura 3.3, siendo \bar{x}_0 y \bar{x}_1 los puntos de equilibrio correspondientes. Definimos los siguientes puntos de interés

$$N = E^c(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^r(\bar{x}_1),$$

$$M = E^r(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^c(\bar{x}_1).$$

donde $E^c(\bar{x})$ es un eigenplano inestable, $E^r(\bar{x})$ una eigenrecta estable, q_0 y q_1 son puntos en los cuales el campovectorial es tangente a la recta intersección entre los eigenplanos y el plano de switcheo. Los puntos \bar{q}_0 y \bar{q}_1 son los puntos correspondientes a través de las trayectorias de los dominios \mathbf{S}_0 y \mathbf{S}_1 que tocan al plano de switcheo con condición inicial q_0 y q_1 , respectivamente. Q_0 es la sección de recta con puntos finales q_0 y \bar{q}_0 ; mientras que Q_1 es la sección de recta con puntos finales q_1 y \bar{q}_1 . Una órbita heteroclínica que conecta a \bar{x}_0 con \bar{x}_1 deberá divergir de \bar{x}_0 en $E^c(\bar{x}_0)$ y pasar por el plano de switcheo tocando el punto de intersección N para finalmente llegar a \bar{x}_1 a lo largo de $E^r(\bar{x}_1)$, para que esto ocurra es necesario que N pertenezca a la sección de recta Q_0 ya que de este modo garantizamos la conexión de la variedad local inestable de \bar{x}_0 la variedad local estable de \bar{x}_1 . De manera similar, una órbita heteroclínica que conecta \bar{x}_1 con \bar{x}_0 deberá divergir de \bar{x}_1 a través de $E^c(\bar{x}_1)$ cruzar el plano de switcheo $\Sigma_{0,1}$ por M y converger en \bar{x}_0 a lo largo de $E^r(\bar{x}_0)$, además M debe pertenecer al segmento de recta Q_1 .

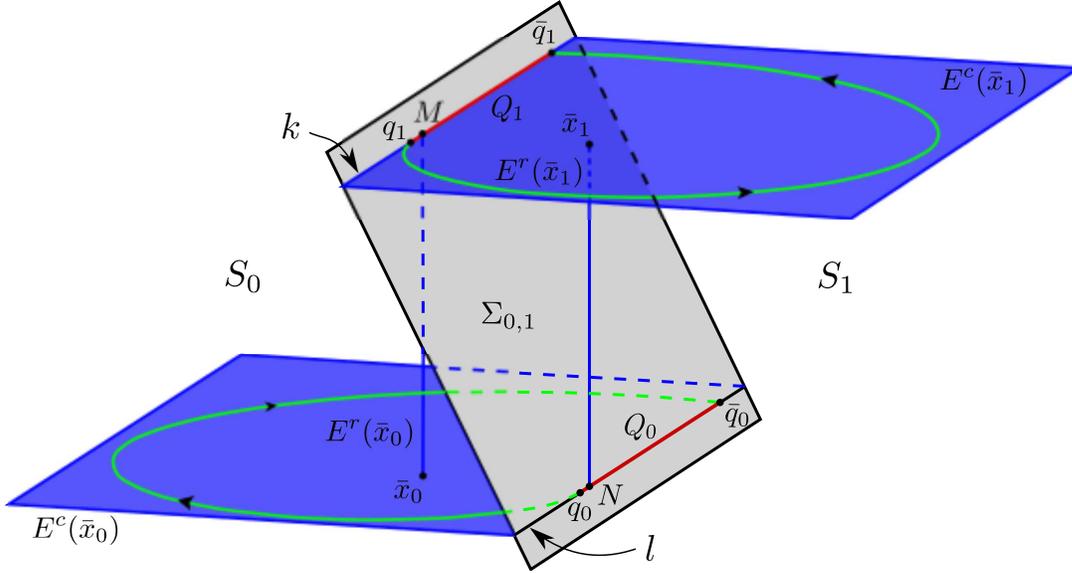


Figura 3.3: Eigenespacios y puntos de interés para la construcción de órbitas heteroclinicas

Para construir las órbitas heteroclinicas partimos de sistemas lineales afines los cuales tienen como matriz Jacobiana una en la forma canónica de Jordan, de modo que los eigenespacios son un plano paralelo a dos de los ejes y una recta paralela al tercer eje, esto sin importar la magnitud de los eigenvalores asociados a cada eigenespacio. Consideramos también un plano de switcheo con un ángulo, por conveniencia, de 45° y posicionamos los puntos de equilibrio de modo que N y M existen, como se muestra en la Figura 3.3. Ahora, para garantizar que $N \in Q_0$ y $M \in Q_1$ hacemos que $|N| < |q_0| + \bar{x}_{0y}$ y $|M| < |q_1| + \bar{x}_{1y}$ donde \bar{x}_y es la componente y de \bar{x} .

Considerando las pautas recién comentadas, y garantizando la desigualdad de Shilnikov, es posible construir familias de sistemas lineales por partes con caos heteroclinico. Para lo cual se proponen los siguientes pasos.

3.3.1. Algoritmo de construcción de órbitas heteroclinicas en sistemas lineales con dos pedazos

Presentamos a continuación un algoritmo para construir órbitas heteroclinicas mediante las pautas recién establecidas utilizando la notación de la Figura 3.3.

1. Partimos de un sistema lineal afín de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - f_0^1 \\ y - f_0^2 \\ z - f_0^3 \end{pmatrix}$$

donde E^c es inestable y $f_0(x) = (f_0^1(x), f_0^2(x), f_0^3(x))$ es una función constante por partes la cual particiona el espacio de estados y define la ubicación de los puntos de equilibrio. para este subsistema elegimos la ubicación del punto de equilibrio, por ejemplo $f_0(x) = \bar{x}_0 = (0, 0, 0)$.

2. Se define un plano de switcheo $\Sigma_{0,1}$ de la forma $x + z = a$ (esto genera un plano a 45 grados) donde a es una constante, el plano de switcheo no debe contener a \bar{x}_0 y de modo que \bar{x}_0 esta en \mathbf{S}_0 . Por ejemplo $x + z = 1$.
3. Definimos un segundo sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - f_1^1 \\ y - f_1^2 \\ z - f_1^3 \end{pmatrix}$$

en el dominio \mathbf{S}_1 con un punto de equilibrio \bar{x}_1 el cual es ubicado sobre la linea de intersección l y a la altura de la recta k de modo que los puntos de intersección N y M están en l y k respectivamente. Por ejemplo para el plano de switcheo $x + z = 1$ las coordenadas x y z de \bar{x}_1 son igual a 1, de este modo los puntos N y M se intersectan con las rectas l y k respectivamente.

4. Se ajusta la posición del punto de equilibrio \bar{x}_1 para garantizar que la intersección de N con l ocurre en el segmento de recta Q_0 y la intersección de M con k ocurre en Q_1 , una manera de garantizar esto es ubicando la coordenada y de \bar{x}_1 de modo que N es el punto en l más cercano a \bar{x}_0 , por ejemplo podemos ubicar el punto de equilibrio tal que $\bar{x}_1 = (1, 0, 1)$. Con esto fijamos, $f_1(x) = (1, 0, 1)$, como resultado tenemos un sistema lineal por partes el cual tiene un par de órbitas heteroclínicas generando un ciclo heteroclínico.
5. Por último se seleccionan los eigenvalores de modo que cumplan la desigualdad de Shilnikov y por lo tanto tener un sistema con caos heteroclínico.

Notas:

- a) El plano $\Sigma_{0,1}$ tiene un angulo de 45° respecto x y z pero puede tener cualquier grado de inclinación deseado, sin que el algoritmo descrito arriba deje de funcionar, ya que en cualquier caso se toma como referencia el primer punto de equilibrio propuesto.
- b) En el punto 4 del algoritmo tenemos la libertad de posicionar la componente y de \bar{x}_1 como queramos siempre y cuando se cumpla que N y M sean puntos de Q_0 y Q_1 , respectivamente.

3.3.2. Caos heteroclínico en una familia de sistemas lineales con dos pedazos

Consideremos al sistema lineal por partes de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, & \text{si } x + z < 1 \\ \begin{pmatrix} \sigma_2 & -\omega_2 & 0 \\ \omega_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix}, & \text{si } x + z \geq 1 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

donde $\bar{x}_0 = (0, 0, 0)$ es el punto de equilibrio correspondiente al dominio $\mathbf{S}_0 = \{(x, y, z) | x + z < 1\}$ y $\bar{x}_1 = (1, 0, 1)$ el punto de equilibrio en el dominio $\mathbf{S}_1 = \{(x, y, z) | x + z \geq 1\}$ con $\Sigma_{0,1} = \{(x, y, z) | x + z = 1\}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 < 0$, $\omega_1 < 0$ y $\omega_2 > 0$. Los eigenespacios correspondientes a cada punto de equilibrio son:

$$E^r(\bar{x}_0) = \{(x, y, z) | x = y = 0\}$$

$$E^c(\bar{x}_0) = \{(x, y, z) | z = 0\}$$

$$E^r(\bar{x}_1) = \{(x, y, z) | x = 1, y = 0\}$$

$$E^c(\bar{x}_1) = \{(x, y, z) | z = 1\}$$

dando así los puntos de interés:

$$N = E^c(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^r(\bar{x}_1) = (1, 0, 0)$$

$$M = E^r(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^c(\bar{x}_1) = (0, 0, 1)$$

$$q_0 = (1, \sigma_1/\omega_1, 0)$$

$$q_1 = (0, -\sigma_2/\omega_2, 1)$$

En base a lo discutido en la sección anterior, si

$$|N| < |q_0| + \bar{x}_{0y} \tag{3.3.2}$$

y

$$|M| < |q_1| + \bar{x}_{1y} \tag{3.3.3}$$

existe un ciclo heteroclínico entre \bar{x}_0 y \bar{x}_1 , dado que cada par N y q_0 , M y q_1 son colineales a una recta paralela al eje y . Por esto, las condiciones anteriores recaen en los componentes y de cada punto. Entonces podemos concluir que si para el sistema (3.1) se cumplen las siguientes condiciones

$$(i) \sigma_1/\omega_1 < 0 < -\sigma_1/\omega_1, \quad (ii) -\sigma_2/\omega_2 < 0 < \sigma_2/\omega_2 \quad \text{y} \quad (iii) |\gamma_i| > |\sigma_i|, \quad i = \{1, 2\}, \tag{3.3.4}$$

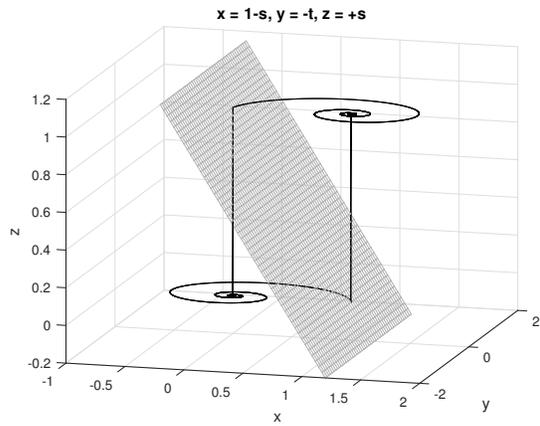
el sistema presenta caos heteroclínico. Por como esta construido el sistema (3.3.1) las condiciones (i) e (ii) de (3.3.4) siempre se cumplen quedando pendiente la condición (iii) la cual corresponde a la desigualdad de Shilnikov.

Ahora presentamos un ejemplo de sistema dinámico dentro de esta familia. Sea

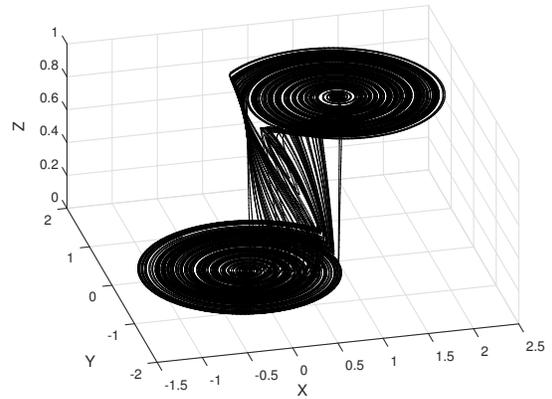
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.2 & 4 & 0 \\ -4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{si } x + z < 1$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.2 & -4 & 0 \\ 4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{si } x + z \geq 1 \tag{3.3.5}$$

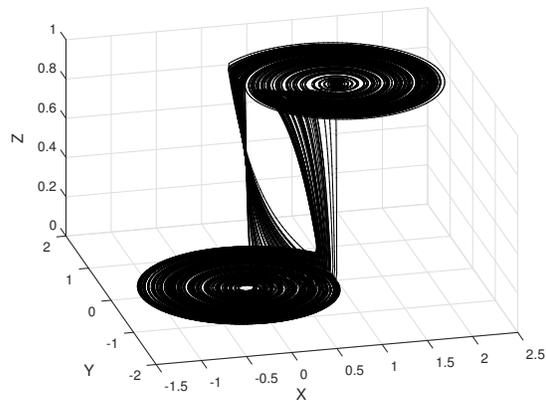
Con $\gamma \in [-10, -5]$ cumplimos las tres condiciones para que pertenezca a nuestra familia caótica. En la Figura 3.4 se observan las órbitas heteroclínicas y los espacios de estado para algunos parámetros en particular.



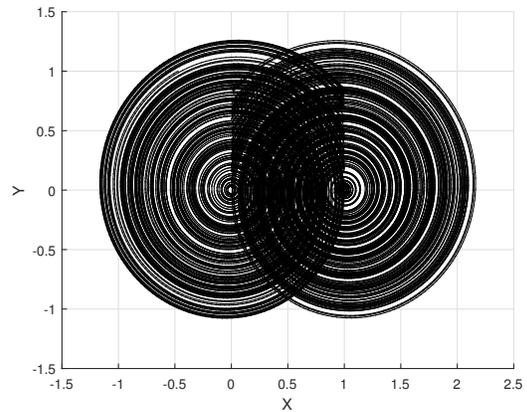
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.4: Simulación numérica del sistema 3.3.5 con parámetros (a) $\gamma = -5$, (b) $\gamma = -10$ (c) proyección xy para $\gamma = -5$.

3.4. Método II. Caos homoclínico

Supongamos que el espacio de estados de un sistema lineal por partes consta de dos subespacios y de un plano de switcheo $\Sigma_{0,1}$, como en la Figura 3.5, siendo \bar{x}_0 y \bar{x}_1 sus puntos de equilibrio. Definimos los siguientes puntos de interés

$$N = E^c(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^i(\bar{x}_1),$$

$$M = E^r(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^i(\bar{x}_1).$$

donde $E^c(\bar{x})$ es un foco inestable, $E^r(\bar{x})$ una recta estable y $E^i(\bar{x})$ un centro con sentido de giro positivo, q_0 es el punto en el cual el campo vectorial es tangente a la recta l , la intersección entre $E^c(\bar{x}_0)$ y el plano de switcheo. Una órbita homoclínica que conecta a \bar{x}_0 con síg mismo deberá divergir de \bar{x}_0 en $E^c(\bar{x}_0)$ y atravesar el plano de switcheo $\Sigma_{0,1}$ pasando por el punto de intersección N , cruzar a través del medio círculo dado por $E^i(\bar{x}_1)$ para llegar nuevamente el plano de switcheo a través de M , y finalmente converger a \bar{x}_0 a lo largo de $E^r(\bar{x}_0)$, para que esto ocurra es necesario que N pertenezca al segmento de recta Q_0 . Destacamos que en un plano con un centro dado por una matriz en la forma canónica de Jordan la magnitud $|x(t)|$ es constante, por lo cual si N y M son elementos de la misma trayectoria en este plano, entonces debe cumplirse $|N - \bar{x}_1| = |M - \bar{x}_1|$.

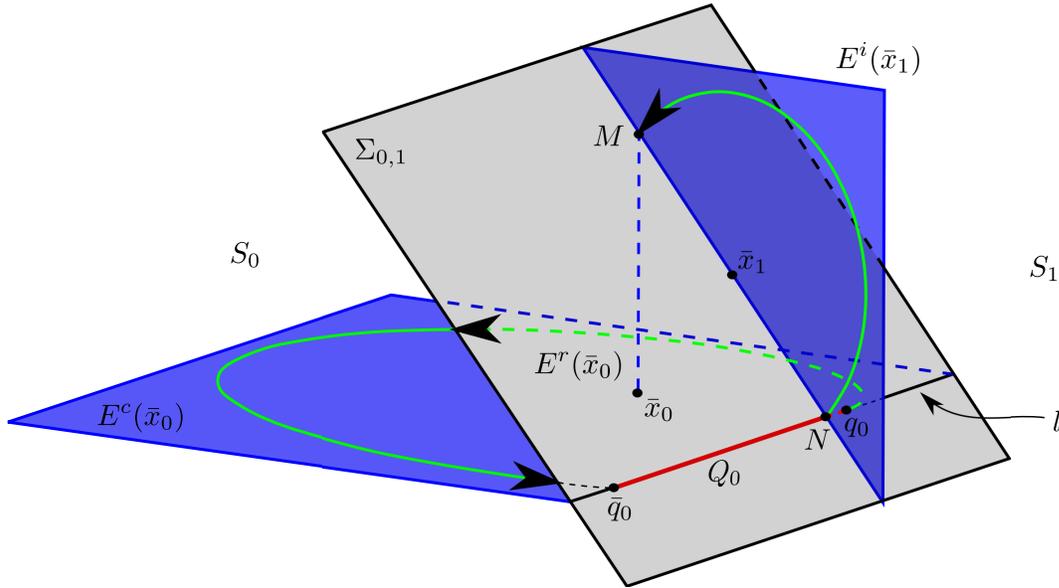


Figura 3.5: Eigenespacios y puntos de interés para la construcción de órbitas homoclínicas

Para construir una órbita homoclínica tomamos consideraciones similares que en caso heteroclínico para en el dominio S_0 con la diferencia de que N debe ser conectado a M al pertenecer ambos a $E^i(\bar{x}_1)$, cumplirse $|N - \bar{x}_1| = |M - \bar{x}_1|$ y tener una dirección de rotación congruente a las direcciones estable e inestable en S_0 para conectar de este modo $E^r(\bar{x}_0)$ con $E^c(\bar{x}_0)$ y formar la órbita homoclínica.

3.4.1. Algoritmo de construcción de órbitas homoclínicas en sistemas lineales con dos pedazos

Presentamos a continuación un algoritmo para construir órbitas homoclínicas mediante las pautas recién establecidas y se aclara que la notación en la Figura 3.5 será utilizada.

1. Partimos de un sistema lineal afín de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - f_0^1 \\ y - f_0^2 \\ z - f_0^3 \end{pmatrix}$$

donde E^c asociado a este es inestable y $f_0(x) = (f_0^1(x), f_0^2(x), f_0^3(x))$ es una función constante por partes la cual particiona el espacio de estados y define la ubicación de los puntos de equilibrio. para este subsistema elegimos la ubicación del punto de equilibrio, por ejemplo $f_0(x) = \bar{x}_0 = (0, 0, 0)$.

2. Se define un plano de switcheo $\Sigma_{0,1}$ de la forma $y + z = a$ (esto genera un plano a 45 grados) donde a es una constante, el plano de switcheo no debe contener a \bar{x}_0 y de modo que \bar{x}_0 esta en \mathbf{S}_0 . Por ejemplo $y + z = 1$.
3. Se propone un segundo sistema lineal afín en el subespacio \mathbf{S}_1 de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - f_1^1 \\ y - f_1^2 \\ z - f_1^3 \end{pmatrix}$$

de modo que el eigenplano E^i es perpendicular al plano de switcheo. Elegimos la posición del punto de equilibrio \bar{x}_1 tal que la distancia de este con N y M sea la misma y N sea el punto de l mas cercano a \bar{x}_1 . Por ejemplo el punto de equilibrio $f_1(x) = \bar{x}_1 = (0, 0.5, 0.5)$

4. Por último se seleccionan los eigenvalores de modo que cumplan la desigualdad de Shilnikov y por lo tanto tener un sistema con caos homoclínico.

Notas:

- a) la ubicación de el punto de equilibrio en el paso 3 es sobre el plano de switcheo, sin embargo esto no es necesario, el punto de equilibrio puede estar completamente adentro o afuera de su subespacio de definición pero debe cumplir $|N - \bar{x}_1| = |M - \bar{x}_1|$.
- b) El plano $\Sigma_{0,1}$ tiene un angulo de 45° respecto x y z pero puede tener cualquier grado de inclinación y el algoritmo funciona en cualquier caso teniendo como referencia el primer punto de equilibrio propuesto.

3.4.2. Caos homoclínico en una familia de sistemas lineales con dos pedazos

Ahora consideremos

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, & \text{si } y + z < 1 \\ \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_2 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0.5 \\ z - 0.5 \end{pmatrix}, & \text{si } y + z \geq 1 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

donde $\bar{x}_0 = (0, 0, 0)$ es el punto de equilibrio correspondiente al dominio $\mathbf{S}_0 = \{(x, y, z) | y + z < 1\}$ y $\bar{x}_1 = (0, 0.5, 0.5)$ el punto de equilibrio en el dominio $\mathbf{S}_1 = \{(x, y, z) | y + z \geq 1\}$ con $\Sigma_{0,1} = \{(x, y, z) | y + z = 1\}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 < 0$, $\omega_1, \omega_2 > 0$. Los eigenspacios correspondientes a cada punto de equilibrio son:

$$E^r(\bar{x}_0) = \{(x, y, z) | x = y = 0\}$$

$$E^c(\bar{x}_0) = \{(x, y, z) | z = 0\}$$

$$E^r(\bar{x}_1) = \{(x, y, z) | y = 0.5, z = 0.5\}$$

$$E^i(\bar{x}_1) = \{(x, y, z) | x = 0\}$$

dando así los puntos de interés:

$$N = E^c(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^i(\bar{x}_1) = (0, 1, 0)$$

$$M = E^r(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^i(\bar{x}_1) = (0, 0, 1)$$

$$q_0 = (-\sigma_1/\omega_1, 1, 0).$$

Es importante destacar que debido a la estabilidad de $E^r(\bar{x}_0)$ y $E^c(\bar{x}_0)$, $E^i(\bar{x}_1)$ gira en sentido positivo, es decir, de N hacia M como se ilustra en la Figura 3.5.

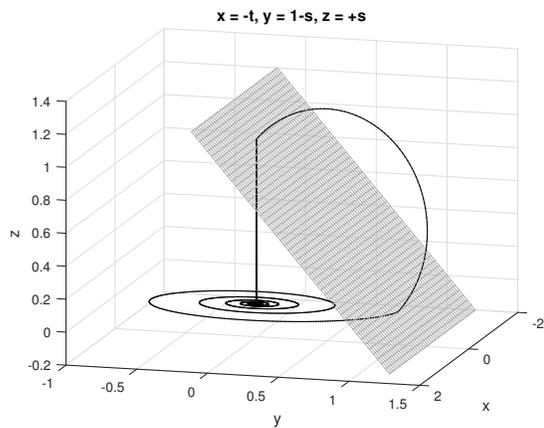
En base a las discusiones anteriores, si

$$|N| < |q_0| + \bar{x}_{0x} \quad (3.4.2)$$

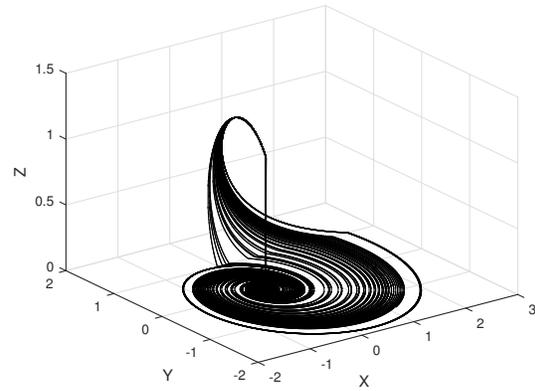
existe una órbita homoclínica basada en \bar{x}_0 . Entonces al ser N y q_0 colineales a una línea paralela al eje x podemos concluir que si para el sistema (3.4.1) se cumplen las siguientes condiciones

$$(i) \sigma_1/\omega_1 < 0 < -\sigma_1/\omega_1, \quad (ii) |\gamma_1| > |\sigma_1|, \quad (3.4.3)$$

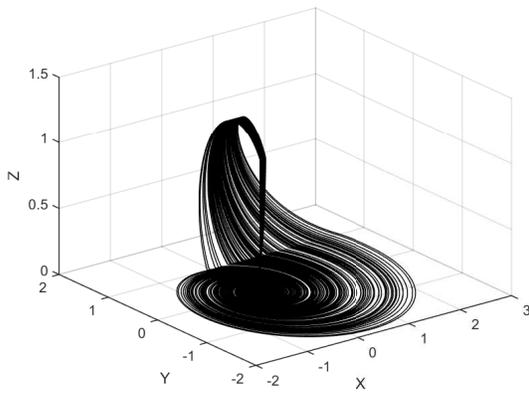
el sistema presenta caos homoclínico. Por como esta construido el sistema (3.4.1) las condiciones (i) de (3.4.3) se cumplen para cualquier valor de los eigenvalores, quedando pendiente la condición (ii) de (3.4.3), la cual corresponde a la desigualdad de Shilnikov.



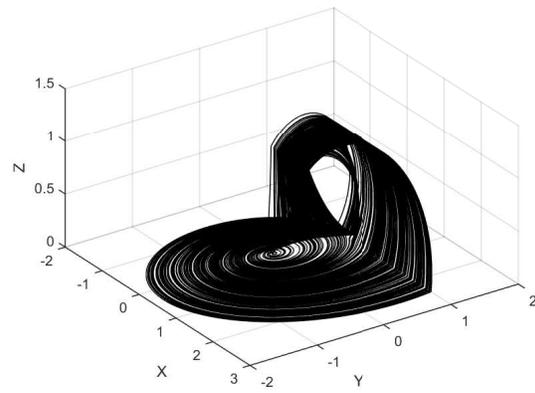
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.6: Simulación numérica del sistema 3.4.4 con parámetros (a) $\gamma = -2$, (b) $\gamma = -1$ (c) proyección xy para $\gamma = -0.3$.

Ahora presentamos un ejemplo de sistema dinámico dentro de esta familia. Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.2 & -1 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{si } y + z < 1$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0.5 \\ z - 0.5 \end{pmatrix}, \quad \text{si } y + z \geq 1$$
(3.4.4)

Con $\gamma \in [-2, -0.3]$ cumplimos las condiciones para que pertenezca a nuestra familia caótica. En la Figura 3.6 se observa lo órbita homoclínica y los espacios de estado de algunos parámetros en particular.

3.5. Método III. Caos heteroclínico en sistemas con tres partes

Para el caso de caos en un sistema con tres pedazos partimos de las pautas establecidas en los dos casos anteriores.

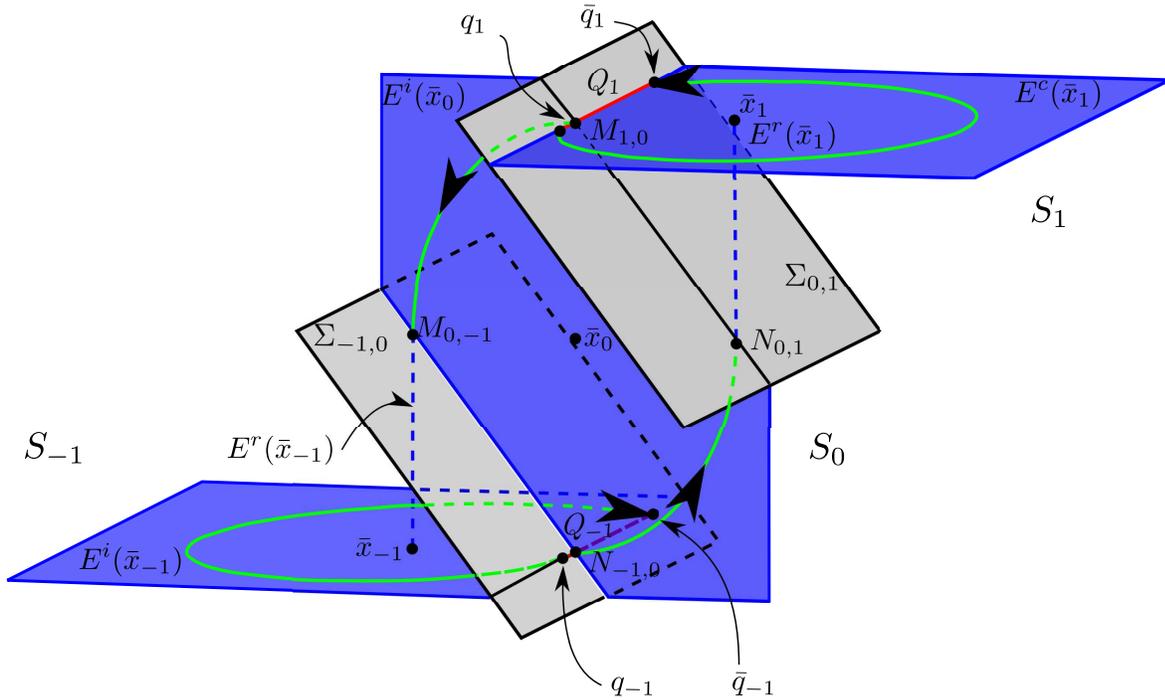


Figura 3.7: Eigenespacios y puntos de interés para la construcción de órbitas heteroclínicas en sistema con tres pedazos.

Supongamos que el espacio de estados de un sistema lineal por partes consta de tres subespacios y dos planos de switcheo $\Sigma_{-1,0}$ y $\Sigma_{0,1}$ como se muestra en la Figura 3.7,

siendo \bar{x}_{-1} , \bar{x}_0 y \bar{x}_1 sus puntos de equilibrio. Definimos los siguientes puntos de interés

$$N_{-1,0} = E^c(\bar{x}_{-1}) \cap \Sigma_{-1,0} \cap E^i(\bar{x}_0),$$

$$N_{0,1} = E^i(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^r(\bar{x}_1),$$

$$M_{0,1} = E^c(\bar{x}_1) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^i(\bar{x}_0),$$

$$M_{-1,0} = E^i(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{-1,0} \cap E^r(\bar{x}_{-1}).$$

con q_{-1} y q_1 son puntos en los cuales el campo vectorial es tangente a la recta intersección entre sus respectivos eigenplanos y el planos de switcheo. Una órbita heteroclínica que conecta a \bar{x}_{-1} con \bar{x}_1 deberá divergir de \bar{x}_{-1} en $E^c(\bar{x}_{-1})$ y pasar por el plano de switcheo $\Sigma_{-1,0}$ tocando el punto de intersección $N_{-1,0}$ cruzar el dominio \mathbf{S}_0 a través de $E^i(\bar{x}_0)$ conectando con $N_{0,1}$ para finalmente llegar a \bar{x}_1 a lo largo de $E^r(\bar{x}_1)$, para que esto ocurra es necesario que $N_{-1,0}$ pertenezca al segmento de recta Q_{-1} y, como en el caso homoclínico, $|N_{-1,0} - \bar{x}_0| = |N_{0,1} - \bar{x}_0|$. De manera similar, una órbita heteroclínica que conecta \bar{x}_1 con \bar{x}_{-1} deberá divergir de \bar{x}_1 a través de $E^c(\bar{x}_1)$ cruzar el plano de switcheo $\Sigma_{0,1}$ por $M_{0,1}$, cruzar el dominio \mathbf{S}_0 a través de $E^i(\bar{x}_0)$ conectándose con $M_{-1,0}$ y finalmente converger a \bar{x}_{-1} por medio de $E^r(\bar{x}_{-1})$, además $M_{0,1}$ debe pertenecer al segmento de recta Q_1 y $|M_{-1,0} - \bar{x}_0| = |M_{0,1} - \bar{x}_0|$.

3.5.1. Algoritmo de construcción de órbitas heteroclínicas en sistemas lineales con tres pedazos

Presentamos a continuación un algoritmo para construir órbitas heteroclínicas mediante las pautas recién establecidas utilizando la notación en la Figura 3.7.

1. Partimos de un sistema lineal afín de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - f_{-1}^1 \\ y - f_{-1}^2 \\ z - f_{-1}^3 \end{pmatrix}$$

donde E^c asociado a este es inestable y $f_0(x) = (f_0^1(x), f_0^2(x), f_0^3(x))$ es una función constante por partes la cual particiona el espacio de estados y define la ubicación de los puntos de equilibrio. para este subsistema elegimos la ubicación del punto de equilibrio, por ejemplo $f_{-1}(x) = \bar{x}_{-1} = (0, -1, -1)$.

2. Se define dos planos de switcheo, $\Sigma_{-1,0}$ y $\Sigma_{0,1}$, de la forma $y + z = a$ (esto genera dos plano a 45 grados) donde a es una constante, los planos de switcheo no deben contener a \bar{x}_{-1} o \bar{x}_1 de modo que \bar{x}_{-1} estará en \mathbf{S}_{-1} y \bar{x}_1 en \mathbf{S}_1 , estos planos son paralelos entre sí. Por ejemplo $y + z = -1$ y $y + z = 1$.
3. Se propone el segundo subsistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - f_0^1 \\ y - f_0^2 \\ z - f_0^3 \end{pmatrix}$$

en el dominio \mathbf{S}_0 , donde el la dinámica de $E^i(\bar{x}_0)$ en la de un centro y es paralelo al plano y y z , el punto de equilibrio es seleccionado de modo que los puntos $N_{-1,0}$ y $M_{-1,0}$ son equidistantes a \bar{x}_0 , a la vez que los planos $\Sigma_{-1,0}$ y $\Sigma_{0,1}$ también son equidistantes a \bar{x}_0 . $N_{-1,0}$ es el punto en $E^c(\bar{x}_{-1}) \cap \Sigma_{-1,0}$ mas cercano \bar{x}_{-1} . Por ejemplo $f_0(x) = \bar{x}_0 = (0, 0, 0)$

4. Definimos un tercer subsistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - f_1 \\ y - f_2 \\ z - f_3 \end{pmatrix}$$

dentro del dominio \mathbf{S}_1 donde el E^c asociado a este es inestable. Para este subsistema elegimos la ubicación del punto de equilibrio de modo que los puntos $N_{0,1}$ y $M_{0,1}$ son equidistantes a \bar{x}_0 , por ejemplo $f(x)_1 = \bar{x}_1 = (0, 1, 1)$.

5. Por último se seleccionan los eigenvalores de modo que cumplan la desigualdad de Shilnikov y por lo tanto tener un sistema con caos heteroclínico.

3.5.2. Caos heteroclínico en una familia de sistemas lineales con tres pedazos

Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}, & \text{si } y + z \geq 1 \\ \begin{pmatrix} \sigma_2 & -\omega_2 & 0 \\ \omega_2 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 0 \\ y + 1 \\ z + 1 \end{pmatrix}, & \text{si } y + z \leq -1 \\ \begin{pmatrix} \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_3 \\ 0 & \omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, & |y + z| < 1 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

donde $\bar{x}_0 = (0, 0, 0)$ es el punto de equilibrio correspondiente al dominio $\mathbf{S}_0 = \{(x, y, z) | y + z < 1, y + z > -1\}$, $\bar{x}_1 = (0, 1, 1)$ el punto de equilibrio en el dominio $\mathbf{S}_1 = \{(x, y, z) | y + z \geq 1\}$ con $\Sigma_{0,1} = \{(x, y, z) | y + z = 1\}$, $\bar{x}_{-1} = (0, -1, -1)$ en el subdominio $S_{-1} = \{(x, y, z) | y + z \leq -1\}$. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 < 0$, $\omega_1, \omega_3 > 0, \omega_2 < 0$. Los eigenspacios correspondientes a cada punto de equilibrio son:

$$E^r(\bar{x}_{-1}) = \{(x, y, z) | x = -1, y = 0\}$$

$$E^c(\bar{x}_{-1}) = \{(x, y, z) | z = -1\}$$

$$E^r(\bar{x}_0) = \{(x, y, z) | y = z = 0\}$$

$$E^i(\bar{x}_0) = \{(x, y, z) | x = 0\}$$

$$E^r(\bar{x}_1) = \{(x, y, z) | x = 1, y = 1\}$$

$$E^c(\bar{x}_1) = \{(x, y, z) | z = 1\}$$

dando así los puntos de interés:

$$N_{-1,0} = E^c(\bar{x}_{-1}) \cap \Sigma_{-1,0} \cap E^i(\bar{x}_0) = (0, 0, -1)$$

$$M_{-1,0} = E^r(\bar{x}_{-1}) \cap \Sigma_{-1,0} \cap E^i(\bar{x}_0) = (0, -1, 0)$$

$$q_{-1} = (-\sigma_1/\omega_1, 0, -1).$$

$$N_{0,1} = E^i(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^r(\bar{x}_1) = (0, 1, 0)$$

$$M_{0,1} = E^i(\bar{x}_0) \cap \Sigma_{0,1} \cap E^c(\bar{x}_1) = (0, 0, 1)$$

$$q_1 = (\sigma_1/\omega_1, 0, 1).$$

En base a las discusiones anteriores, si

$$|N_{-1,0}| < |q_{-1,0}| + \bar{x}_{0x} \quad (3.5.2)$$

y

$$|M_{0,1}| < |q_1| + \bar{x}_{1x} \quad (3.5.3)$$

además de

$$|N_{-1,0} - \bar{x}_0| = |N_{0,1} - \bar{x}_0|$$

$$|M_{-1,0} - \bar{x}_0| = |M_{0,1} - \bar{x}_0|$$

existe una órbita heteroclínica que conecta \bar{x}_{-1} con \bar{x}_1 cruzando por \mathbf{S}_0 y de manera similar una órbita heteroclínica que conecta \bar{x}_1 con \bar{x}_{-1} . Entonces podemos concluir que si para el sistema (3.5.1) se cumplen las siguientes condiciones

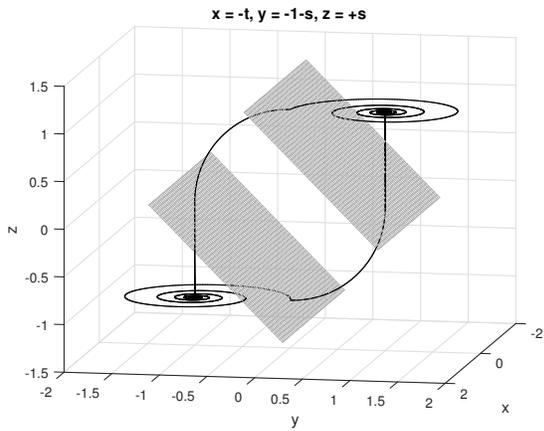
$$(i) -\sigma_1/\omega_1 < 0 < \sigma_1/\omega_1, \quad (ii) \sigma_2/\omega_2 < 0 < -\sigma_2/\omega_2 \quad \text{y} \quad (iii) |\gamma_i| > |\sigma_i|, \quad i = \{1, 2\}, \quad (3.5.4)$$

entonces el sistema con 3 pedazos es caótico con un ciclo heteroclínico

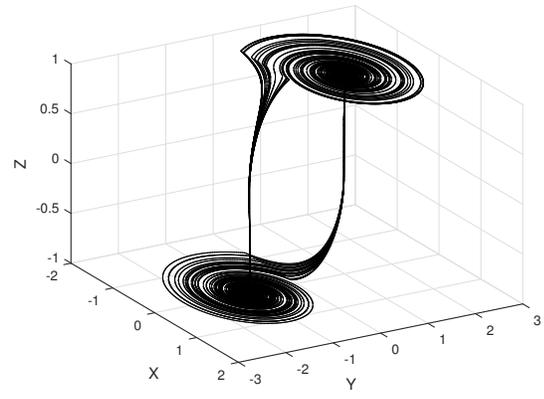
Ahora presentamos un ejemplo de sistema dinámico dentro de esta familia. Sea

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \gamma & .2 & -2 \\ 0 & 2 & .2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{si } y + z \geq 1 \\ \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \gamma & .2 & -2 \\ 0 & 2 & .2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y + 1 \\ z + 1 \end{pmatrix}, \quad \text{si } y + z \leq 1 \\ \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad |y + z| < 1 \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

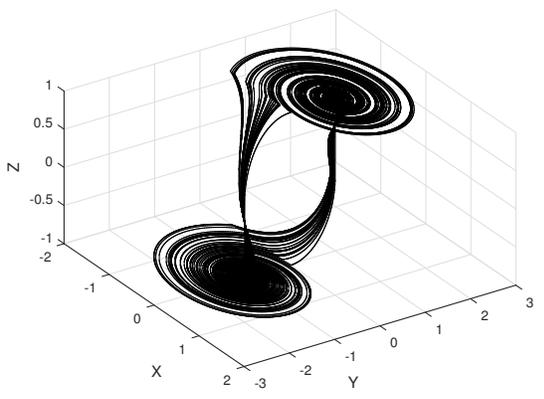
Con $\gamma \in [-2, -0.8]$ cumplimos las condiciones para que pertenezca a nuestra familia caótica. En la Figura 3.8 se observan las órbitas heteroclínicas y los espacios de estado con algunos parámetros en particular.



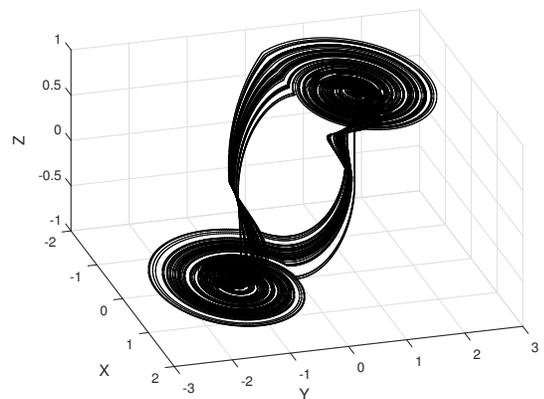
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.8: Simulación numérica del sistema 3.4.4 con parámetros (a) $\gamma = -3$, (b) $\gamma = -1.6$ (c) proyección xy para $\gamma = -0.8$.

Capítulo 4

Conclusiones

El objeto de estudio este trabajo de tesis son sistemas lineales por partes los cuales presentan caos de Shilnikov, es decir, que poseen puntos de equilibrio tipo foco-silla, los eigenvalores asociados a los estos puntos de equilibrio cumplen con la desigualdad de Shilnikov y que existen órbitas homoclínicas/heteroclínicas basadas en estos. Lo que proponemos en esta tesis es: Algoritmos para construir familias de sistemas lineales por partes con dos dominios las cuales presentan caos heteroclínico o caos homoclínico y familias de sistemas lineales por partes con tres dominios las cuales presentan caos heteroclínico.

Conseguimos esto al proponer la dinámica en de cada subsistema lineal de modo que la matrices Jacobianas son en la forma canónica de Jordan, con lo cual obtenemos una geometría simple e invariante de los eigenespacios asociados a cada punto de equilibrio. Esto junto con una adecuada selección de los planos de swithceo y la ubicación de los puntos de equilibrio nos permite garantizar la correcta intersección de las variedades locales del sistema alrededor de los puntos de equilibrio generando así órbitas homoclínicas o heteroclínicas, tras esto se proponen eigenvalores que satisfagan la desigualdad de Shilnikov y garantizamos dinámica caótica en las familias propuestas.

Utilizando el algoritmo presentado construimos un sistema lineal por partes con dos dominios y un ciclo heteroclínico el cual tiene un atractor caótico en forma de dos enroscados en el espacio de estados. Un sistema lineal dos dominios y una órbita homoclínica el cual muestra un atractor caótico con un solo enroscado. Un sistema lineal con tres dominios y un ciclo heteroclínico el cual conecta a los dos puntos de equilibrio en los dominios externos transitando por el dominio central.

Como trabajo a futuro está la posibilidad de extender el caso heteroclínico para sistemas lineales por partes con n enroscados. Esto puede llevarse a cabo al extender el algoritmo presentado y permitir agregar de manera sucesiva dominios, con los correspondientes planos de swithceo y puntos de equilibrio, de modo que podemos generar cualquier cantidad de dominios y enroscados. Sin embargo, la zona en el eigenplano que coincide con la variedad local del sistema alrededor de los puntos de equilibrio no esta delimitada de la misma manera que en la presentada en esta tesis, por lo cual es necesaria una extensión a las condiciones mencionadas para identificar de forma efectiva las variedades locales y garantizar la existencia de las órbitas heteroclínicas.

Otro trabajo a futuro a partir de esta tesis podría ser el estudio de condiciones bajo

las cuales un sistema caótico es atractivo o no. Por ejemplo, en las familias propuestas al seleccionar valores de $\sigma > 0.3$ fue difícil encontrar valores de γ y ω tales que el sistema mostrara un atractor caótico. Debido a la gran flexibilidad que nos aporta la manera en la que estas construidas las familias es viable el estudio de las condiciones dinámicas bajo las cuales un sistema con un invariante caótico exhibe un atractor extraño.

Bibliografía

- [di Bernardo *et al.*, 2008] di Bernardo, M.; Budd, C. J.; Champneys, A. R.; Kowalczyk, P. (2008) *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Springer, London.
- [Poincaré, 1890] Poincaré, H. (1890) Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta mathematica 1890*, 13, 1–270.
- [Birkhoff y Smithi, 1928] Birkhoff, G. D.; Smithi, PP. A. (1928) Structure analysis of surface transformations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7, 345–379.
- [Cartwright y Littlewood, 1945] Cartwright M. L.; Littlewood J. E. (1945) On Non-Linear Differential Equations of the Second Order, *Journal of the London Mathematical Society*, 7, 180–185.
- [Smale, 1963] Smale, S. (1963) Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, *Annalo della Scoula Normale Superiore di Pisa*, 17, 97–116.
- [Wiggins, 2003] Wiggins, S. (2003) *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York.
- [Lorenz, 1963] Lorenz, E. N. (1963) Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the atmospheric sciences*, 20, 130–141.
- [Ott, 1993] Ott, E. (1993) *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Canadá.
- [Perko, 2001] Perko, L. (2001) *Chaos in Dynamical Systems, third edition*, Springer-Verlag, New York.
- [Devaney, 1992] Devaney, R. L. (1992) *An introduction to Chaotic dynamincal Systems*, Perseus Books Publishing, EE. UU.
- [Argyris *et al.*, 2015] Argyris, J.; Faust, G.; Haase, M.; Friedrich, R.(2015) *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*, Springer, Berlin.
- [Sprott, 2010] Sprott, J. C. (2010) *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*, World Scientific, Singapore.

- [Ruelle y Takens, 1971] Ruelle, D.; Takens, F. (1971) Deterministic nonperiodic flow, *Communications in Mathematical Physics*, 20, 167–192.
- [Silva, 1993] Silva, C. P. (1993) Shil’nikov’s Theorem-A Tutorial, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40, 675–682.
- [Li y Chen, 2009] Li, G.; Chen, X. (2009) Constructing piecewise linear chaotic system based on the heteroclinic Shil’nikov theorem, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 194–203.
- [Carmona *et al.*, 2008] Carmona, V.; Fernández-Sánchez, F.; Teruel, A. E. (2008) Existence of a reversible T-point heteroclinic cycle in a piecewise linear version of the Michelson system, *Journal on Applied Dynamical Systems*, 7, 1032–1048.
- [Chua *et al.*, 1986] Chua, L.; Kuromo, M.; Matsumoto T. (1986) The Double Scroll Family, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 33, 1072–1118.
- [Medrano-T *et al.*, 2003] Medrano-T, R. O.; Baptista, M. S.; Caldas, I. L. (2003) Homoclinic orbits in a piecewise system and their relation with invariant sets, *Physica. D, Nonlinear Phenomena*, 186, 133–147.
- [Tresser, 1984] Tresser, C.; (1984) About some theorems of L. P. Shilnikov, *Annales de l’ institut Henri Poincaré*, 40, 441–461.