



IPICYT

INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y
TECNOLÓGICA A.C.

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Una aproximación determinista de orden fraccionario
al movimiento Browniano**

Tesis que presenta

M.C.S.D. Héctor Eduardo Gilardi Velázquez

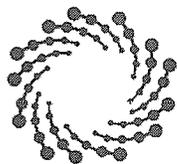
Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Eric Campos Cantón

San Luis Potosí, S.L.P., Junio de 2018



IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Una aproximación determinista de orden fraccionario al movimiento Browniano**” presentada para obtener el Grado de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Héctor Eduardo Gilardi Velázquez** y aprobada el **trece de julio del dos mil dieciocho** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Eric Campos Cantón
Director de la tesis

Dr. Guillermo Huerta Cuéllar
Jurado en el Examen

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Jurado en el Examen

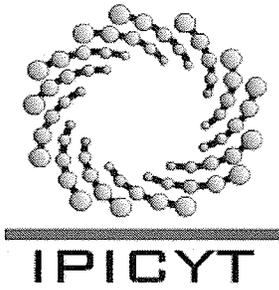
Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Eric Campos Cantón.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT-262243 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 006 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 13 días del mes de julio del año 2018, se reunió a las 17:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Guillermo Huerta Cuéllar	Presidente	UdeG
Dr. Eric Campos Cantón	Secretario	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Sinodal	IPICYT
Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Héctor Eduardo Gilardi Velázquez

sobre la Tesis intitulada:

Una aproximación determinista de orden fraccionario al movimiento Browniano

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Eric Campos Cantón

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 18:45 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 13 días del mes de julio de 2018.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dr. Horacio Flores Zúñiga
Secretario Académico



Dedicatoria

A mi familia. Y para ella, la mujer que me ha acompañado a lo largo de este camino, Bahía.

Agradecimientos

Durante esta etapa de vida que hoy termina, agradezco a todas las personas que han intervenido para que este trabajo tenga un final feliz. Aún si no se encuentran en esta lista, pero estuvieron en el camino, muchas gracias.

De manera muy especial quiero agradecer a mi hermosa esposa Bahia, gracias por permitirme formar parte de tu vida, gracias por tu amor, gracias por ser como eres, gracias por ser la mujer con los mejores sentimientos que he conocido, gracias por ayudarme con las correcciones, gracias por aguantarme, pero sobre todo gracias por motivarme a hacer las cosas de la mejor manera. Mi vida, te adoro.

A mis padres, Carlos y Leticia así como a mi hermano y mis sobrinas Caro y Naty, gracias por apoyarme en todo momento, por los valores de me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

A mi asesor de tesis, el Dr. Eric Campos Cantón por la confianza, orientación y ayuda que me brindó para la realización de este trabajo, por su apoyo, los conocimientos y experiencia.

A la familia Dorantes Gilardi por el apoyo durante esta etapa, sus sabios consejos y abrirme las puertas de su hogar, por haberme hecho sentir siempre en casa y en familia, por su cariño y comprensión. Agradezco también a la familia Cassal Quiroga por el cariño, es especial a mi querida suegra Verónica, por su fe inquebrantable en la vida y sus desafíos.

A mis sinodales, Dr. Huerta, Dr. Maldonado , Dr. Rosu , gracias por darme la oportunidad, sus consejos, comentarios y por el tiempo que me han dedicado para leer este trabajo.

A todos mis profesores de IPICYT que me enseñaron tanto de la profesión como de la vida, impulsándome siempre a seguir adelante.

A mis compañeros y amigos del IPICYT. Omar, Luis, Anzo, Ismael, Roberto, Pablo, Aide, Adriana, Rodolfo, Diana, Ernesto, Erick, Angeles, Nelly, gracias por pasar a mi lado estos momentos de vida y estar siempre en las buenas y en las malas, jamás los olvidaré.

A la familia Campos Mendez, mi familia de corazón, gracias por la calidez de su hogar y por hacerme sentir como uno más de ellos.

Finalmente a la vida que me dio la oportunidad de contar con todos y cada uno de ustedes.

Índice de figuras

1.1. Representación de las colisiones que experimenta una partícula Browniana.	3
2.1. Desplazamiento en el tiempo (U.A.) de una partícula Browniana en una dimensión obtenido con el modelo (2.6) propuesto por Trefán y colaboradores.	15
2.2. Distribucion de probabilidad obtenidas para el Booster utilizado por Trefán (imagen obtenida de [18]).	16
2.3. Desplazamiento en el tiempo (U.A.) de una partícula Browniana en una dimensión obtenido con el modelo (2.9) propuesto por Huerta-Cuellar y colaboradores.	18
2.4. Distribuciones de probabilidad obtenidas para posición, velocidad y aceleración respectivamente comparada con un ajuste (linea continua, imagen obtenida de [19]).	19
2.5. Función b_3 dada por (2.15). La distancia entre cada escalón está dada por α	26
3.1. Region de estabilidad para un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccional $0 < \alpha < 1$ [42].	34

4.1.	a) Diagrama de bifurcación del sistema dado por las ecuaciones (2.11) con (2.15) y (4.1) para el valor de $0 < \nu \leq 2$, la Figura b) muestra la bifurcación para el rango $0.95 \leq \nu \leq 1.5$ para 1,000,000 de iteraciones. Figuras c) y d) muestran el número de dominios \mathcal{D}_i visitados por la trayectoria del sistema para los mismos valores de parámetros anteriores. La condición inicial considerada para ambos diagramas es $\mathbf{X}_0 = (0.7, 0, 0)^T$	41
4.2.	Proyecciones de la trayectoria para el sistema dado por ec. (4.1), con $c = 6.3$ y $\alpha = 0.6$. para $\nu = 1$ a) sobre el plano (x_1, x_2) , c) sobre el plano (x_1, x_3) . Para $\nu = 10/7$ b) sobre el plano (x_1, x_2) , d) sobre el plano (x_1, x_3) . Marcadas con línea negra las superficies de conmutacion generadas por la función (2.15), con línea roja el eigenvector real y con línea azul el eigenvector complejo. Las flechas negras muestran la direccion de la trayectoria.	45
4.3.	Intersecciones de la trayectoria del sistema (2.11) con (2.15) y (4.1) con la superficie de conmutación Σ ubicada en $x_{1_{cs}}$ para a) $\nu = 1$, b) $\nu = 1.42$. Marcado con círculos azules las trayectorias salientes de \mathcal{D}_1 cerca de $E^u \cap \Sigma$. Los asteriscos naranjas representan las trayectorias entrantes a \mathcal{D}_1 . El triángulo naranja representa $E^s \cap \Sigma$, y la línea azul corresponde a la intersección de la variedad inestable con la superficie de conmutación.	47
4.4.	Proyección de SW perpendicular sobre el plano (x, v) (lineas azules), el punto rojo representa una partícula Browniana que se desplaza a lo largo de una dimensión x . La SW delimita cada región de potencial y cuando la partícula cruza la superficie representa un cambio de potencial en la partícula.	50

4.5.	Soluciones del sistema (4.6) en el espacio fase para diferentes valores de α : (a) $\alpha = 0.8248$, (b) $\alpha = 0.9500$	51
4.6.	Serie de tiempo (U.A.) x de movimiento Browniano determinista obtenida con el modelo propuesto dado por (4.6) con $\alpha = 0.95$	53
4.7.	Desplazamiento cuadrático medio obtenido de la solución del sistema (4.6), del cual se muestra un crecimiento lineal en el tiempo.	54
4.8.	Propiedades estadísticas obtenidas del sistema (4.6), La densidad de probabilidad obtenida para el movimiento mostrado por medio de un histograma normalizado (línea azul punteada), para desplazamiento (a), velocidad (b), y aceleración (c), comparada con una distribución Gaussiana teórica (línea roja punteada).	55
4.9.	Maximo exponente de Lyapunov obtenido para el sistema propuesto (4.6) con $\alpha = 0.95$	56
4.10.	$\eta \approx 1.5$ obtenido por el DFA indica el comportamiento Browniano del movimiento observado (Figura 4.6).	59
5.1.	Movimiento Browniano bajo la influencia de un potencial armónico bajo los tres casos: Sobreamortiguado, críticamente amortiguado, subamortiguado respectivamente (imagen tomada de [2])	64
5.2.	Serie de tiempo (U.A.) de la variable x de movimiento Browniano determinista obtenida con el modelo propuesto bajo un potencial armónico, dado por (5.4) con $\alpha = 0.95$ y la solución en el espacio de estados respectivamente, para los tres casos (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado (c) subamortiguado.	67

5.3. Propiedades estadísticas obtenidas del sistema (5.4). La densidad de probabilidad obtenida para el movimiento mostrado por medio de un histograma normalizado (línea azul punteada), comparada con una distribución Gaussiana teórica (línea roja punteada), y se muestra un crecimiento lineal para el desplazamiento cuadrado promedio respectivamente. Para los tres casos (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado (c) subamortiguado.	68
5.4. Máximo exponente de Lyapunov obtenido para el sistema propuesto (5.4) con $\alpha = 0.95$, para los tres casos (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado (c) subamortiguado.	69
5.5. $\eta \approx 1.5$ obtenido por el DFA indica el comportamiento Browniano del movimiento observado para los tres casos (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado (c) subamortiguado.	70

Resumen

A partir de la ecuación de Langevin, un modelo determinista para la generación de movimiento Browniano es propuesto. Reemplazando el término estocástico por una variable de estado adicional da un grado de libertad más a la ecuación de Langevin y la transforma en un sistema de tres ecuaciones diferenciales lineales, además derivadas fraccionarias son consideradas; las cuales nos permiten obtener mejores propiedades estadísticas propias del movimiento Browniano real. Como parte de la aceleración fluctuante se establecen superficies de conmutación en el modelo. El sistema final no contiene términos estocásticos, esto es, el movimiento obtenido es completamente determinista. Además, del análisis de series de tiempo, encontramos que el comportamiento del sistema presenta las propiedades características de movimiento Browniano, tales como: crecimiento lineal en tiempo para el desplazamiento cuadrado promedio, distribución de probabilidad Gaussiana para el desplazamiento promedio. Adicionalmente, usamos el análisis de fluctuación sin tendencia para probar el carácter Browniano de las series obtenidas.

Abstract

From the Langevin equation, a deterministic model for Brownian motion generation is proposed. Replacing the stochastic term with an additional state variable gives a degree of freedom to the Langevin equation and transforms it into a system of three linear differential equations, also fractional derivatives are considered; which allow us to obtain better statistics properties of the real Brownian movement. As a part of the fluctuating acceleration, switching surfaces are established in the model. The final system does not contain a stochastic terms, that is, the obtained motion is completely deterministic. In addition, from the time series analysis, we found that the system behavior exhibits statistics properties of Brownian motion, such as, a linear growth in time of the mean square displacement, Gaussian probability distribution for the average displacement. Furthermore, we use the detrended fluctuation analysis to prove the Brownian character of this motion.

Índice general

Constancia de aprobación de la tesis	III
Créditos Institucionales	V
Acta de examen	VII
Dedicatoria	IX
Agradecimientos	XI
Lista de figuras	XVI
Resumen	XVII
Abstract	XIX
1. Introducción	1
1.1. Movimiento Browniano	2
1.2. Motivación y Objetivo	5
2. Antecedentes	11
2.1. Modelos	12
2.1.1. Modelo de Einstein [3]	12
2.1.2. Modelo de Langevin [5]	13
2.1.3. Trefán y colaboradores [18]	14
2.1.4. Modelo de Huerta-Cuellar [19]	16

2.2. Atractores caóticos basados en sistemas inestables disipativos	18
3. Cálculo fraccionario y Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario	27
3.1. Operadores fraccionarios	28
3.2. Existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales fraccionarias de Caputo	29
3.3. Sistemas dinámicos de orden fraccionario	32
3.4. Método numérico para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias .	36
4. Modelo determinista fraccionario para generar movimiento Browniano.	39
4.1. Análisis del modelo de orden entero	40
4.1.1. Transición entre el fenómeno mono-estable a multi-estable . .	45
4.2. Aproximación fraccionaria	48
4.3. Resultados numéricos	52
5. Modelo determinista fraccionario para generar movimiento Browniano en un campo de fuerza.	61
5.1. Movimiento Browniano en un campo de fuerza	62
5.2. Resultados numéricos para movimiento Browniano en un campo de fuerza armónico	65
Conclusiones	71
A. Productividad	73
Bibliografía	75

Capítulo 1

Introducción

Con el afán de comprender el comportamiento del universo se han desarrollado distintas técnicas y herramientas para la generación de conocimiento estructurado que han permitido entender diferentes fenómenos en la naturaleza, buscando formular leyes que describan en muchas ocasiones comportamiento complejo. En lo que respecta a las ciencias exactas, se han desarrollado modelos matemáticos que nos ayudan a describir la evolución temporal del universo, ya sea de manera determinista o estocástica. No obstante fue hasta el siglo XX que se empezó a considerar la teoría probabilística. En ciertas condiciones un sistema dinámico puede ser determinista y no ser predecible. A pesar de la complejidad que pueda tener un sistema, en muchas ocasiones, se puede descomponer en sus partes más simples y ser analizado de esta manera; sin embargo, en algunos de estos casos existen limitaciones que no nos permiten predecir su comportamiento ni construir un sistema dinámico determinista que lo represente. Esto no significa que no se pueda decir algo de dichos sistemas debido a las propiedades que presentan. Estos sistemas pueden ser entendidos con la ayuda de la teoría de probabilidades, ejemplo de ello son las turbulencias y las

oscilaciones físico-químicas y biológicas. Vale la pena recordar el paradigma de Pierre Laplace para poder ampliar la idea sobre determinista y predecible. Laplace imaginó un demonio que es capaz de conocer la posición y velocidad de todas las partículas del Universo en un momento dado y también es capaz de resolver las ecuaciones de Newton del Universo. Un demonio con estas capacidades (sobrehumanas pero no sobrenaturales) conocería el devenir de todo lo que existe, conocería el más pequeño movimiento de cualquier cosa o persona que viviera en los próximos cien mil millones de años. Ni los seres humanos ni las computadoras pueden hacer esto, ya que utilizan una cantidad finita de condiciones iniciales y un número limitado de cifras en sus cálculos. Da igual que un demonio así no exista, pero nos permite darnos cuenta de nuestra imperfección como seres limitados que somos. Un ejemplo de un sistema, característico por su complejidad, que ha sido ampliamente estudiado con teoría de probabilidad, a pesar de conocerse su naturaleza, es el movimiento Browniano.

1.1. Movimiento Browniano

El estudio del movimiento Browniano se ha desarrollado a partir de los estudios reportados por Robert Brown en 1821 [1]. Brown estudiaba el proceso de fertilización de las flores, viendo a través de un microscopio el polen en agua, observó pequeñas partículas en un “rápido movimiento oscilatorio”. Las primeras especulaciones sobre el movimiento Browniano era que las partículas tenían vida. Para 1917 Thomson [2] dice que no se puede asegurar que los movimientos de organismos diminutos sean vitales. Thomson describe el movimiento Browniano debido a un bombardeo molecular figura 1.1. Gouy [2] realizó experimentos con los cuales daba argumentos que apoyaban la teoría cinética. De su trabajo entre otros surgen las siguientes características:

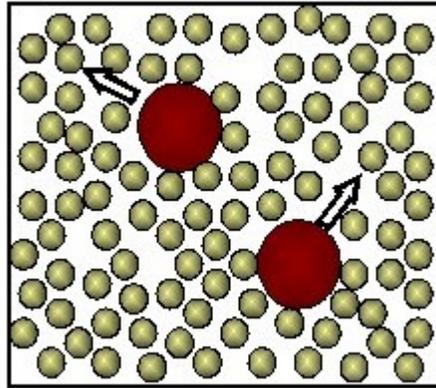


Figura 1.1: Representación de las colisiones que experimenta una partícula Browniana.

1. El movimiento es muy irregular, compuesto de traslaciones y rotaciones, y la trayectoria aparenta no tener tangente.
2. Dos partículas aparentan tener movimiento independiente, siempre y cuando su aproximación no sea menor que su diámetro.
3. El movimiento es mayor para partículas pequeñas.
4. La composición y densidad de las partículas no aparenta afectar.
5. El movimiento es mayor en un fluido de menos viscosidad.
6. El movimiento es mayor a altas temperaturas.
7. El movimiento dura infinitamente.

Para 1895, la teoría cinética del movimiento Browniano era el bombardeo por las moléculas del fluido figura 1.1, esta parecía la más acertada.

Einstein, en el desarrollo de la teoría de la cinética molecular descubrió que de acuerdo con la teoría atómica, podría haber un movimiento de partículas microscópicas suspendidas que podrían observarse, esto sin saber sobre las observaciones concernientes al movimiento Browniano las cuales eran en realidad muy familiares [3]. Más tarde, Smoluchowski [4] dio la solución al problema y atrajo la atención de los físicos sobre el problema.

El argumento de Einstein para este fenómeno es que por medio de una densidad de probabilidad es posible estimar que una partícula Browniana esté en x a un tiempo t . Einstein deriva una ecuación considerando lo que se conoce como coeficiente de difusión, el cual relaciona con una fuerza externa “virtual”. El argumento de Einstein no da una teoría dinámica sobre el movimiento Browniano solo determina la naturaleza del movimiento y el valor del coeficiente de difusión[3].

El estudio del movimiento Browniano ha sido extenso desde Robert Brown, Louis Bachelier y Albert Einstein, quien propuso la primer descripción matemática del movimiento Browniano de una partícula libre, después Paul Langevin obtuvo una aproximación a partir de la segunda ley de Newton. El modelo propuesto por Langevin [5] está basado en una ecuación diferencial de segundo orden con un término estocástico, el cual representa la aleatoriedad de la naturaleza del movimiento. En comparación con el modelo de Einstein dice Langevin que el de él es infinitamente más simple. Es gracias a este modelo que Langevin es conocido como el fundador de la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas [6].

Para su modelo Langevin considera dos fuerzas que actúan sobre la partícula. La primera relacionada a la resistencia viscosa, esto de acuerdo con la fórmula de Stokes,

y por la irregularidad de los impactos de las moléculas de su alrededor. La segunda una fuerza estocástica que él llama fuerza complementaria. Con este modelo Langevin obtiene el mismo resultado que Einstein para el desplazamiento cuadrado medio.

1.2. Motivación y Objetivo

La ecuación de Langevin ha sido usada en muchas áreas, tales como modelado de procesos de evacuación [23], conteo de photoelectrones [24], análisis de la bolsa de valores [25], estudio de suspensiones en fluidos [26], dinámica de conjunto de deuterones [27], dinámica de proteínas [28], auto organización en sistemas complejos [29], etc. Para otras aplicaciones de la ecuación de Langevin en física, química e ingeniería eléctrica, nos podemos referir a [30]. El estudio de la ecuación de Langevin clásica esta basado en la hipótesis de que el proceso estocástico es un proceso de Markov, esto es, las fuerzas aleatorias son independientes. A pesar de que la ecuación de Langevin juega un papel importante en muchos campos, todavía hay algunos comportamientos como la difusión anómala (superdifusión y subdifusión), distribuciones de ley de potencias, interacciones de largo alcance que la ecuación clásica de Langevin no puede describir bien. Es común encontrar problemas físicos modelados a partir de variaciones en el modelo de Langevin [7, 8, 9, 10]. Por ejemplo: el movimiento Browniano de un dipolo molecular en un potencial periódico [15]. En estos casos donde son considerados otros factores en la ecuación de Langevin se le conoce como la ecuación de Langevin generalizada (GLE) [11]. Se ha mostrado que para los distintos casos derivados de la GLE es posible obtener distintos comportamientos. La GLE se ha aplicado a muchos sistemas los cuales son caracterizados por un proceso de difusión anómalo en los cuales diferentes Kernels de memoria son considerados. En este sentido S. C.

Kou and X. Sunney Xie [12] usan la GLE con ruido gaussiano fraccionario para describir el fenómeno de subdifusión de la transferencia de un electrón dentro de una proteína. Así mismo, Wei Min et al [13] determinan a través de la GLE el kernel de memoria de las fluctuaciones entre el par fluorescein-tyrosine dentro de una proteína compleja. Por otro lado, también podemos encontrar la GLE en varios campos de la física, como por ejemplo, el movimiento armónico perturbado por alguna interacción con un objeto. Por lo cual es importante analizar los efectos asociados con la naturaleza desordenada de un entorno a través del estudio de la dinámica de disipación de un oscilador armónico inmerso en un ambiente desordenado. A. D. Viñales [14] derivan la solución exacta para la GLE de una partícula bajo la influencia de una fuerza externa armónica usando transformadas de Laplace. Adicionalmente, S. Burov and E. Barkai, describen la dinámica de una partícula armónica a través de la ecuación de Langevin fraccional considerando los casos: sobreamortiguado, subamortiguado y críticamente amortiguado para los cuales encuentran comportamientos diferentes de los normales. Es importante recalcar que en cada uno de los trabajos antes mencionados el comportamiento dinámico obtenido en cada caso difiere de los demás, esto muestra la versatilidad de la ecuación de Langevin para caracterizar distintos fenómenos de difusión. Por lo tanto, varios modelos fraccionarios basados en la ecuación de Langevin fueron propuestos en [30, 31, 32]. Es por eso que la ecuación de Langevin fraccionaria puede capturar las características que la ecuación Langevin no puede hacer.

Además, se cree que el movimiento Browniano se puede derivar totalmente de modelos Hamiltonianos de mecánica clásica, según el método de Van Hove [15], Prigogine y Grigolini [16, 17]. El movimiento Browniano se ha estudiado como un proceso estocástico continuo en el tiempo caracterizado por una distribución normal,

el cual puede explicarse a escala molecular por una serie de colisiones en una dimensión, en la cual pequeñas partículas experimentan choques con una partícula mayor [4], por lo que nació la pregunta, ¿es este proceso estocástico o determinista?

El comportamiento del movimiento Browniano es caracterizado por propiedades específicas, tales como: crecimiento lineal en tiempo para el desplazamiento cuadrado promedio, distribución de probabilidad Gaussiana para el desplazamiento promedio, un decaimiento exponencial en tiempo de la función de autocorrelación posicional. Adicionalmente el análisis de fluctuación sin tendencia, (DFA) desarrollado por Peng y colaboradores [36], permite determinar las propiedades de correlación de una señal, tales como ruido blanco o ruido Browniano.

La idea del movimiento Browniano determinista ha sido discutida en hidrodinámica y reactores químicos con comportamiento oscilatorio, donde el movimiento es completamente determinista y en algunas ocasiones es referido como caos microscópico [37]. Trefán y colaboradores [18] proponen modelar el movimiento Browniano a partir de un proceso microscópico sin introducir aleatoriedad. El movimiento errático macroscópico se muestra como una consecuencia de un proceso filtrado que es microscópicamente caótico y produce una ecuación de Langevin para la velocidad de la partícula y una ecuación de Fokker-Planck correspondiente en el régimen de parámetro apropiado. Lo anterior convierte al modelo de Langevin en un generador de movimiento determinista, sin embargo las propiedades estadísticas de este proceso difiere considerablemente con las suposiciones estándar de la estadística Gaussiana.

Huerta-Cuellar y colaboradores [19] proponen una aproximación para generar movimiento Browniano determinista, agregando un grado de libertad a la ecuación de

Langevin obteniendo un modelo de tercer orden en el cual el término estocástico es reemplazado por una nueva variable definida por una tercer ecuación diferencial (ecuación Jerk), con la cual se genera una distribución de probabilidad tipo Gaussiana. Basados en los antecedentes antes mencionados para este trabajo de investigación se planteó el siguiente objetivo.

Objetivo:

Construir un modelo matemático que describa la dinámica de movimiento Browniano de manera determinista, tal que se cumplan las propiedades estadísticas de un movimiento Browniano real.

En esta propuesta de investigación se busca, a partir del modelo propuesto por Huerta-Cuellar y colaboradores, determinar hasta qué orden fraccionario de derivación del modelo se puede garantizar el tener la aproximación a un movimiento Browniano con el que se garantice una distribución de probabilidad Gaussiana, de tal manera que estos modelos puedan ser utilizados para obtener una descripción adecuada que nos permita representar el movimiento Browniano de algunos sistemas naturales.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: En el capítulo dos se presentan algunos de los antecedentes en el estudio del movimiento Browniano así como la teoría de sistemas dinámicos en la cual basaremos la construcción de nuestro modelo. En el Capítulo tres se muestran conceptos básicos sobre la teoría de ecuaciones diferenciales fraccionarias así como los operadores diferenciales, la teoría de estabilidad en sistemas fraccionarios y un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias. En el capítulo cuatro se presenta un análisis dinámico

al modelo de orden entero, su aproximación fraccionaria junto con su análisis de estabilidad, los resultados numéricos obtenidos con dicha aproximación para una partícula libre. En el capítulo cinco los resultados para una partícula Browniana bajo la influencia de un campo de fuerza externo. Por último, en el capítulo seis se presenta un resumen de las conclusiones obtenidas de este trabajo.

Capítulo 2

Antecedentes

En general el término movimiento Browniano es reservado para el fenómeno físico y para el caso del movimiento Browniano en en teoría de probabilidades el término utilizado es proceso de Wiener.

Definición 2.0.1. *Un proceso estocástico real $\{W_t, t \geq 0\}$ se llama un proceso de Wiener si*

- $W_0 = 0$;
- $W_t - W_s$ se distribuye como una variable aleatoria normal $N(0; t - s)$, para cualesquiera $t > s \geq 0$;
- para todo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes;
- W_t tiene trayectorias continuas.

2.1. Modelos

A inicios del siglo pasado, tanto A. Einstein [3] como M. Smoluchowski [4] plantearon y resolvieron exitosamente el problema de la descripción del movimiento Browniano. Con el método de Einstein, el movimiento Browniano es descrito a través de la probabilidad $\rho(r, t)$ de encontrar a la partícula en la posición r al tiempo t , la cual satisface la ecuación macroscópica de difusión. Unos pocos años más tarde, P. Langevin propuso otro método para resolver el problema, usar ecuaciones diferenciales estocásticas. Por otro lado, en lo que respecta al movimiento Browniano determinista, el primer modelo reportado en la literatura fue propuesto por Trefán y colaboradores en el cual reemplazan en la ecuación de Langevin el proceso estocástico por un mapeo caótico, con dicho modelo ellos logran obtener movimiento Browniano de manera macroscópica sin embargo, este modelo no cumple con las propiedades estadísticas del fenómeno. En este sentido, Huerta-Cuellar y colaboradores proponen un modelo determinista para la generación de un movimiento Browniano a partir del modelo propuesto por Langevin agregando un grado de libertad al sistema, por medio de reemplazar el término estocástico, relacionado a la aceleración fluctuante, por una ecuación diferencial de tercer orden (ecuación Jerk).

2.1.1. Modelo de Einstein [3]

Durante el desarrollo de la teoría de la cinética molecular Einstein descubrió que es posible observar el movimiento de partículas microscópicas suspendidas lo cual era entonces muy similar al movimiento Browniano. Einstein propone una función de probabilidad $\rho(x, t)$ de encontrar una partícula Browniana en una posición x a un tiempo t dada por:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}, \quad (2.1)$$

donde D es el coeficiente de difusión el cual relaciona a una fuerza externa (fuerza virtual), relacionada a la densidad del fluido y su temperatura, con lo cual considerando que la partícula Browniana experimenta una resistencia viscosa $mv = 6\pi\eta a$, con m la masa de la partícula, v su velocidad, a el radio de la partícula y η el coeficiente de viscosidad, se obtuvo que el coeficiente de difusión es de la forma:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \quad (2.2)$$

Con dicha densidad de probabilidad y el coeficiente de difusión. Einstein llega a que el desplazamiento cuadrático medio (DCM) de una partícula Browniana a un tiempo τ está dado por:

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\eta a} \tau. \quad (2.3)$$

Este modelo determina la naturaleza del movimiento, mas sin embargo no proporciona una teoría dinámica sobre el fenómeno.

2.1.2. Modelo de Langevin [5]

Langevin postuló que, primero, la partícula sentiría una fuerza de fricción simplemente por estar inmersa en un líquido. De acuerdo a la ley de Stokes para una partícula de radio r en un medio de viscosidad η , el cambio de la velocidad de la partícula en el tiempo satisface:

$$\frac{dv}{dt} = -6\pi\eta av = -\gamma v. \quad (2.4)$$

A esta ecuación Langevin agrega una fuerza estocástica a la que le llama fuerza complementaria relacionada a la irregularidad de los impactos de las moléculas del fluido. Con esto Langevin postuló la siguiente ecuación, que lleva su nombre:

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v + A_f(t), \quad (2.5)$$

donde el término $A_f(t)$ representa la fluctuación en la aceleración, el cual provee el carácter estocástico del movimiento Browniano y caracteriza un proceso Gaussiano.

Con este modelo Langevin llega al mismo resultado que Einstein acerca del desplazamiento cuadrático medio de la partícula dado por la ecuación (2.3), así como provee un modelo más general y exacto para la dinámica de una partícula Browniana.

2.1.3. Trefán y colaboradores [18]

En lo que respecta al movimiento Browniano determinista, el primer modelo reportado en la literatura fue propuesto por Trefán y colaboradores, ellos no derivan un sistema de ecuaciones microscópico para esto consideran a nivel microscópico un proceso determinista llamado “Booster”, el cual es caótico y lo relacionan a fluctuaciones térmicas de la partícula Browniana; en este sentido el Booster debe cumplir con las propiedades estadísticas características de la fuerza complementaria de la ecuación diferencial (Distribución Gaussiana). Para este modelo parten de la ecuación de Langevin y reemplazan en la ecuación el proceso estocástico por el Booster (un mapeo caótico),

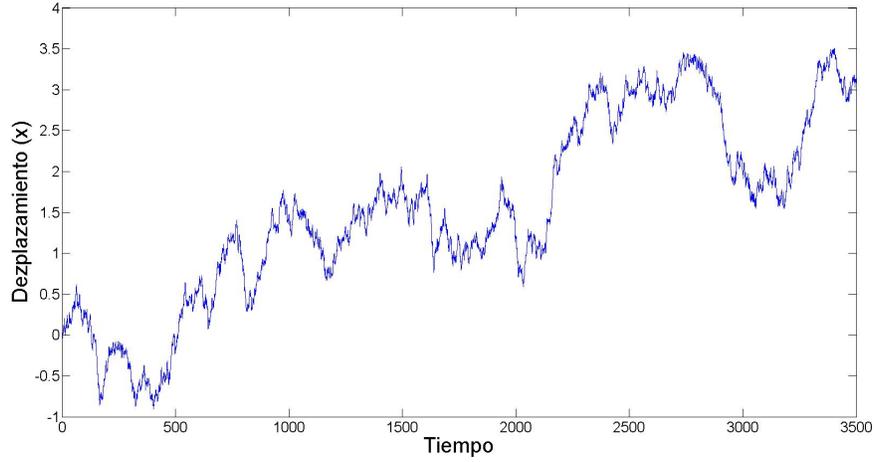


Figura 2.1: Desplazamiento en el tiempo (U.A.) de una partícula Browniana en una dimensión obtenido con el modelo (2.6) propuesto por Trefán y colaboradores.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\gamma y + \xi_0(t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde ξ_0 es la fuerza determinista resultante del proceso caótico. El cual está definido por el mapeo:

$$\xi_{n+1} = \alpha \left[\frac{\eta}{2} - \xi_n \right] \left[\frac{\eta}{2} + \xi_n \right] + \frac{\eta}{2}. \tag{2.7}$$

Con dicho modelo ellos logran obtener movimiento Browniano de manera macroscópica, ver Figura 2.1. Sin embargo, este modelo no cumple con las propiedades estadísticas del fenómeno, ver Figura 2.2. En otras palabras, Trefán y colaboradores proponen un generador de movimiento Browniano determinista el cual presentan como un sistema discreto que genera números pseudo-aleatorios; no obstante las propiedades estadísticas de este proceso difieren considerablemente con las asunciones estándar de la estadística Gaussiana. La principal aportación de Trefán y colabora-

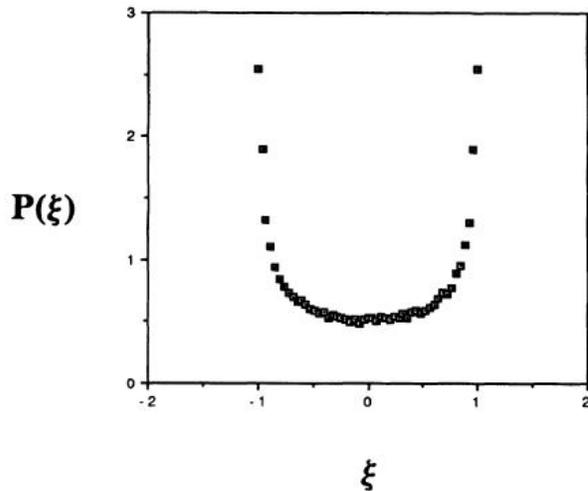


Figura 2.2: Distribucion de probabilidad obtenidas para el Booster utilizado por Trefán (imagen obtenida de [18]).

dores, es que nos muestran que es posible generar dinámica Browniana de manera determinista, sin la necesidad de imponer las asunciones estadísticas.

2.1.4. Modelo de Huerta-Cuellar [19]

Huerta-Cuellar y colaboradores proponen un modelo determinista para la generación de movimiento Browniano, a partir del modelo propuesto por Langevin y agregando un grado de libertad al sistema; esto reemplazando el proceso estocástico, relacionado a la aceleración fluctuante, por una ecuación diferencial de tercer orden. Huerta-Cuellar y colaboradores obtuvieron una aproximación a la generación de movimiento Browniano de manera determinista transformando el modelo propuesto por Langevin en un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden. En dicho modelo el término estocástico es reemplazado por una nueva variable definida por una ecuación diferencial de tercer orden (ecuación Jerk), para lo cual haciendo un

cambio de variable en la ecuación de Langevin (2.5) se obtuvo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\gamma y + A_f(t).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Con la finalidad de generar movimiento Browniano determinista, el término estocástico es reemplazado por una nueva variable z definida como una ecuación diferencial de tercer orden (ecuación Jerk). La variable z que proponen, actúa como la aceleración fluctuante, produce una dinámica de movimiento determinista; que está relacionada a los cambios de velocidad y aceleración ocasionados por la fricción y las colisiones con otras partículas del medio. Tomando todas estas consideraciones en la ecuación Jerk definen el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\gamma y + z, \\ \dot{z} &= -\alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z + \alpha_4.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Con este modelo Huerta-Cuellar y colaboradores logran obtener movimiento Browniano Figura 2.3 y una aproximación a una distribución de probabilidad tipo Gaussiana Figura 2.4 y un desplazamiento cuadrado lineal. En este caso se obtiene un modelo completamente continuo en el tiempo, en el cual la aceleración fluctuante depende de los estados de dicho sistema. Con este modelo se lograron obtener características estadísticas muy similares a las de movimiento Browniano tales como: un desplazamiento cuadrático medio lineal, una distribución de probabilidad semejante a una Gaussiana, una ley de potencia para el espectro de frecuencias de “-2” y una ley de potencia de “1.5”, esta última obtenida por el Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia (DFA, por sus siglas en inglés) [19], lo cual confirma el carácter Browniano

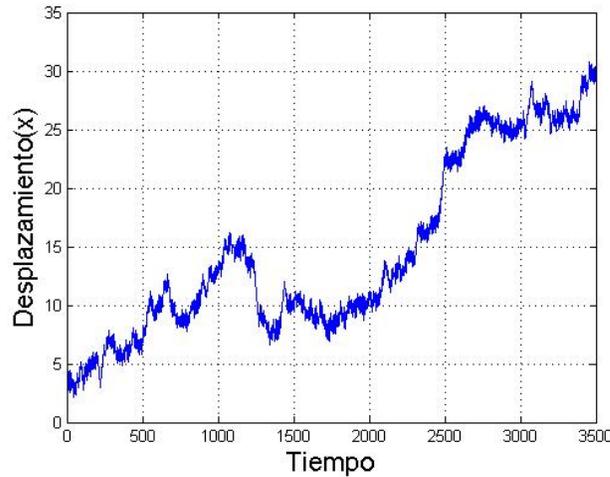


Figura 2.3: Desplazamiento en el tiempo (U.A.) de una partícula Browniana en una dimensión obtenido con el modelo (2.9) propuesto por Huerta-Cuellar y colaboradores.

del movimiento observado.

2.2. Atractores caóticos basados en sistemas inestables disipativos

Considere el sistema dinámico el cual es definido por una clase de sistemas lineales afín dados por:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X}), \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ representa un vector real y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ denota el operador lineal que es no singular con entradas (a_{ij}) , $i, j = 1, 2, 3$. El punto de equilibrio de este sistema resulta en $\mathbf{X}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

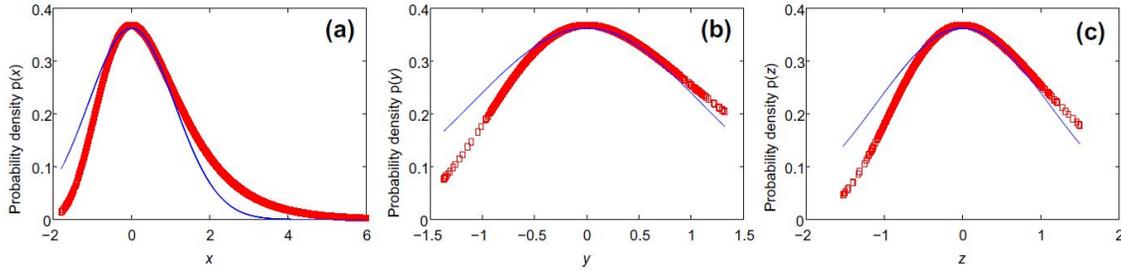


Figura 2.4: Distribuciones de probabilidad obtenidas para posición, velocidad y aceleración respectivamente comparada con un ajuste (línea continua, imagen obtenida de [19]).

La clase de sistemas lineales afín considerados aquí, son aquellos que presentan oscilaciones al rededor del equilibrio de acuerdo con las variedades estables e inestables E^s y E^u , respectivamente. Estas variedades son definidas de tal forma que $\vartheta = (\vartheta_{1,2,3})$ es un conjunto de eigenvectores columna tal que $\mathbf{A}\vartheta_i = \lambda_i\vartheta_i$ con $i = 1, 2, 3$; $E^s = \text{Span}\{\vartheta_1\}$ y $E^u = \text{Span}\{\vartheta_{2,3}\}$. Con la finalidad de presentar dichas oscilaciones y siguiendo un mecanismo similar como en [20, 21, 22], dos tipos de sistemas disipativos con dinámica inestable han sido estudiados a los cuales vamos a llamar sistemas disipativos inestables (UDS por sus siglas en inglés), no obstante solo un tipo de ambos será considerado en el presente trabajo. Este tipo es definido en la siguiente forma:

Definición 2.2.1. *Un sistema lineal $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, donde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es el operador lineal y $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, son los eigenvalores de \mathbf{A} . Si $\sum_{i=1}^3 \text{Re}(\lambda_i) < 0$, y λ_1 es un número real negativo ($\lambda_1 < 0$), con $\lambda_{2,3}$ complejos conjugados con parte real positiva ($\text{Re}\{\lambda_{2,3}\} > 0$) entonces el sistema lineal es llamado*

un UDS de tipo I.

Si el sistema lineal afín dado por ec. (2.10) satisface la definición 2.2.1 con $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ entonces es posible generar un atractor \mathfrak{A} por medio de un sistema PWL bajo las siguientes consideraciones para el vector \mathbf{B} :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X}),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathbf{B}_1, & \text{if } \mathbf{X} \in \mathcal{D}_1; \\ \mathbf{B}_2, & \text{if } \mathbf{X} \in \mathcal{D}_2; \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{B}_k, & \text{if } \mathbf{X} \in \mathcal{D}_k. \end{cases} \quad (2.11)$$

El vector afín \mathbf{B} debe ser una función de conmutación que cambie dependiendo del dominio, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^3 = \cup_{i=1}^k \mathcal{D}_i$, donde esté localizada la trayectoria. El equilibrio del sistema (2.11) está dado por $\mathbf{X}_i^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_i$, con $i = 1, \dots, k$, y cada vector \mathbf{B}_i del sistema es considerado con la finalidad de generar un atractor multi-enroscado.

La idea del método reside en definir vectores \mathbf{B}_i con la finalidad de asegurar la estabilidad de una clase de sistemas en \mathbb{R}^3 con oscilaciones dentro del atractor \mathfrak{A} . De manera que para cada condición inicial $\mathbf{X}_0 \in \mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^3$, donde \mathfrak{B} es la cuenca de atracción, el sistema dado por ec. (2.11) induce en el espacio de fase \mathbb{R}^n el flujo $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Así, cada condición inicial $\mathbf{X}_0 \in \mathfrak{B}$ genera una trayectoria dada por $\phi^t(\mathbf{X}_0) : t \geq 0$ la cual es atrapada en un atractor \mathfrak{A} después de definir por lo menos dos vectores \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 , como es descrito en [21].

Esta clase de sistemas despliegan varios atractores multi-enroscados como resul-

tado de la combinación de varias trayectorias inestables en “espiral”. El número de enroscados depende de la cantidad de vectores B_i , $i = 1, \dots, k$ introducidos en el sistema, así los puntos de equilibrio están dados por $\mathbf{X}_i^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_i$ y sus trayectorias oscilan alrededor de ellos. Esto es consecuencia de una característica importante de este tipo de UDS, donde ellos pueden resultar en un atractor de un enroscado para cada punto de equilibrio agregado apropiadamente en los dominios $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}^n$ en los cuales el sistema es dividido [21].

Consideramos la siguiente familia de sistemas lineales afín que por simplicidad y sin pérdida de generalidad, asumimos que la ec. (2.10) está dada por una ecuación tipo Jerk [22]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad B(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma(\mathbf{X}) \end{pmatrix}; \quad (2.12)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$ y $\sigma(\mathbf{X}) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ es una función escalón la cual está determinada por una ley de conmutación para controlar el equilibrio del sistema como sigue:

$$\sigma(\mathbf{X}) = \begin{cases} b_1, & \text{if } \mathbf{X} \in D_1 = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v}^\top \mathbf{X} < \delta_1\}; \\ b_2, & \text{if } \mathbf{X} \in D_2 = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3 : \delta_1 \leq \mathbf{v}^\top \mathbf{X} < \delta_2\}; \\ \vdots & \vdots \\ b_m, & \text{if } \mathbf{X} \in D_m = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3 : \delta_{m-1} \leq \mathbf{v}^\top \mathbf{X}\}; \end{cases} \quad (2.13)$$

donde $b_i \in \mathbf{R}$ y D_i , $i = 1, \dots, m$, genera una partición del espacio de fase, con $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ (con $\mathbf{v} \neq 0$) un vector constante y $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_{m-1}$ determina las superficies de conmutación $\Sigma_j = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3 | \mathbf{v}^\top \mathbf{X} = \delta_j\}$, $j = 1, \dots, m - 1$. En particular, asumimos

que las superficies de conmutación Σ_j son definidas usando $\mathbf{v} = [1, 0, 0]^\top \in \mathbf{R}^3$ y diferentes valores de δ_j . El rol de la función de conmutación σ es el de especificar cual vector constante se activa para un dominio dado D_i , esto es, si $\sigma(\mathbf{X}) = b_i$ para $i \in I = \{1, \dots, m\}$, entonces el sistema lineal afín que gobierna la dinámica en el dominio de conmutación D_i está dado por $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} + (0, 0, b_i)^\top$.

Nuestro caso de estudio es cuando cada dominio de conmutación contiene un único punto de equilibrio tipo silla en $x_i^* = A^{-1}B_i$, con $i \in I$. El mecanismo de generación de atractores multi-enroscado basado en esta clase de sistemas es de acuerdo con las variedades estables e inestables. Por ejemplo, considerando dos dominios D_i y D_{i+1} , y la superficie de conmutación Σ_i entre ellos. Cuando la trayectoria $\phi_t(x_0)$, con condición inicial $x_0 \in D_i$, alcanza la superficie de conmutación Σ_i y cruza a la región D_{i+1} , donde es nuevamente atrapada en un nuevo enroscado con punto de equilibrio localizado en $x_{i+1}^* = A^{-1}B_{i+1}$.

Hay dos factores importantes sobre la generación de atractores multi-enroscados, primero que los enroscados son generados de acuerdo con los eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, por lo cual los enroscados incrementan su tamaño de acuerdo a su variedad inestable. Segundo, que la trayectoria del sistema la cual oscila alrededor del punto de equilibrio x_i^* escapa desde el dominio D_i . Esto ocurre cerca de la variedad inestable $E_i^u \subset D_i$ donde cruza la superficie de conmutación y es atraída por la variedad estable $E_{i+1}^s \subset D_{i+1}$ hacia el punto de equilibrio x_{i+1}^* en el dominio D_{i+1} . El proceso es repetido en forma inversa formando enroscados alrededor de cada punto de equilibrio.

En este contexto, el sistema (2.10)-(2.12) puede desplegar varios atractores multi-

enroscados como resultado de la combinación de varias trayectorias de un espiral [21], donde la conmutación entre regiones está gobernada por la función de conmutación (2.13).

Los siguientes resultados proveen condiciones para garantizar que el sistema (2.10) es *UDS Tipo I* para un operador lineal general $A = \{\alpha_{ij}\} \in \mathbb{R}^3$, con $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i, j = 1, 2, 3$.

Proposición 2.2.2. [34] *considere la familia de sistemas lineales afín (2.10) con operador lineal A dado por (2.12) con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$. Sea $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ un conjunto de números reales no cero llamados parámetros de control. Si $\alpha_1 = \mathbf{c}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b})$, $\alpha_2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b} + 2\mathbf{a}\mathbf{c}$ y $\alpha_3 = \mathbf{c} - 2\mathbf{a}$ con $\mathbf{b}, \mathbf{c} > \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} < \mathbf{c}/2$, entonces el sistema (2.10)-(2.12) es *UDS Tipo I*.*

Demostración. El polinomio característico del operador lineal A es:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 + \alpha_3\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_1, \\ &= \lambda^3 + (\mathbf{c} - 2\mathbf{a})\lambda^2 + (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b} + 2\mathbf{a}\mathbf{c})\lambda + (\mathbf{c}\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}\mathbf{b}), \\ &= (\lambda + \mathbf{c})(\lambda^2 - 2\mathbf{a}\lambda + (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b})). \end{aligned}$$

Las raíces de $p(\lambda)$ dan las siguientes expresiones para el eigen espectro $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de A: $\lambda_1 = -\mathbf{c}$ y $\lambda_{2,3} = \mathbf{a} \pm \mathbf{i}\sqrt{\mathbf{b}}$. Note que $\lambda_1 < 0$ y $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -\mathbf{c} + 2\mathbf{a} < 0$ si $\mathbf{a} < \mathbf{c}/2$ y $\mathbf{c} > 0$. Entonces, de acuerdo con la definición 2.2.1 el sistema (2.10)-(2.12) es *UDS Tipo I*. \square

Proposición 2.2.3. [34] *Considere la familia de sistemas lineales afín dados por (2.10), el operador lineal A basado en el sistema Jerk (2.12) con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$. Si $\alpha_1 > 0$, $0 < \alpha_2 < \alpha_1/\alpha_3$ y $\alpha_3 > 0$, entonces el sistema (2.10)-(2.12) es *UDS Tipo I*.*

Demostración. Supongamos $\alpha_1, \alpha_3 > 0$. Ya que, por definición, $-\alpha_3 = \text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$, el sistema (2.10) es disipativo. Adicionalmente, con $\alpha_1 = \det(A)$ el sistema (2.10) tiene un equilibrio tipo silla, el cual está determinado por el polinomio característico del operador lineal (2.12) es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_1,$$

el cual para $\alpha_2 < \alpha_1/\alpha_3$, de acuerdo con el criterio polinomial de Hurwitz, implica inestabilidad. Debido a que α_1, α_2 y α_3 son positivos y de acuerdo con la regla de los signos de Descartes, el polinomio característico no tiene raíces positivas, entonces solo tiene una raíz negativa de acuerdo con que el punto de equilibrio es tipo silla. Entonces el eigen-espectro esta dado por un eigenvalor real negativo y un par de complejos conjugados con parte real positiva. \square

Solo un UDS tipo I genera un espiral inestable al rededor del punto de equilibrio x^* tal que una trayectoria $\phi_t(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^3 - E^s$, cruza muchas veces un plano de Poincaré Π , si Π es definido sobre el punto de equilibrio x^* y perpendicular a la variedad inestable $E^u \perp \Pi$.

Definición 2.2.4. *Sea $\{x_i^*\}_{i=1}^m$ un conjunto de equilibrios de un sistema PWL (2.12) basado en UDS Tipo I que genera un atractor caótico \mathcal{A} . Decimos que el sistema (2.12) genera un atractor caótico multi-enroscado con el mínimo de equilibrios tipo silla, si la trayectoria caótica $\phi_t(x_0) \subset S_i$, cruza cada plano de Poincaré Π_i definido en x_i^* y $\Pi_i \perp E_i^u$ más de una vez antes de dejar el dominio S_i e ir a los dominios S_{i-1} o S_{i+1} .*

Agregar más equilibrios al sistema se puede implementar fácilmente mediante el uso de una función escalón, en lugar de generar superficies de conmutación manual-

mente, esto es, utilizando una función de generación automática de escalones tal como se ha aplicado en [19]. Aquí una función $round(x)$ se implementará para simplificar y automatizar este proceso. La función se definirá de la siguiente manera:

$$round(x) = \begin{cases} \lceil x - 1/2 \rceil, & \text{para } x < 0; \\ \lfloor x + 1/2 \rfloor, & \text{para } x \geq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Por ejemplo, para tener superficies de conmutación y ubicaciones de puntos de equilibrio similares a las descritas en ec. (2.13), Considere el vector de conmutación $\mathbf{B} = (0, 0, b_3)^T$ dado por la siguiente función:

$$b_3(x_1) = c * round(x_1/\alpha), \quad (2.15)$$

donde $c \in \mathbb{R}$ corresponde a la amplitud de la función que es similar a la variable c_i , y α corresponde a la longitud del paso dado por la función redondeo centrada en el origen, esto se representa en el gráfico de la Figura 2.5.

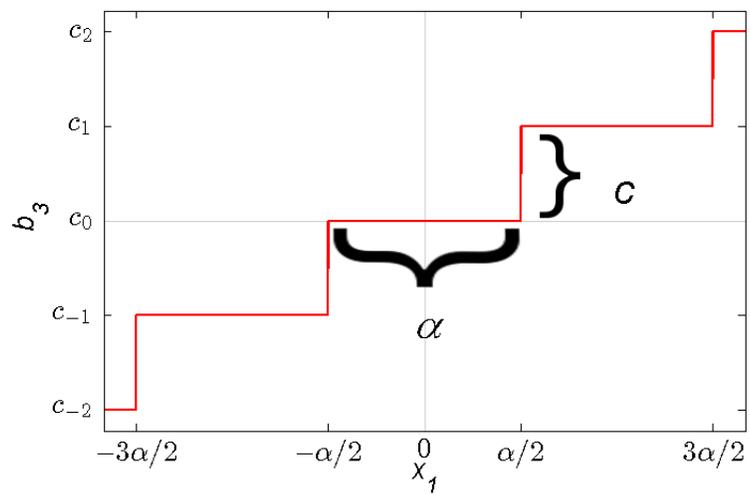


Figura 2.5: Función b_3 dada por (2.15). La distancia entre cada escalón está dada por α .

Capítulo 3

Cálculo fraccionario y Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

Las derivadas e integrales no enteras son apropiadas para el modelado de sistemas complejos. Se ha mostrado que los modelos de orden fraccionario son más adecuados para modelar sistemas en los que se presentan las propiedades de no localidad, hereridad, auto similitud y pseudo-aleatoriedad tales como: problemas de mecánica inversa, cinética estocástica, caos determinista, movimiento en fluidos viscosos, entre otras. Un ejemplo de este tipo de fenómenos es el movimiento Browniano. La idea de movimiento Browniano fraccionario es útil en modelos de series de tiempo naturales. La principal ventaja del movimiento Browniano fraccionario es que permite tener infinitos lapsos de independencia entre sus incrementos. La teoría y resultados presentados a lo largo de este capítulo han sido tomados principalmente de la referencia [38].

3.1. Operadores fraccionarios

Las derivadas e integrales de orden fraccionario son generalizaciones de las de orden entero. No obstante, en la literatura podemos encontrar una variedad de diferentes definiciones para derivadas fraccionarias [38, 39, 40, 41], siendo las definiciones de Riemann-Liouville y Caputo las más utilizadas [38]. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville está definida como:

$$D_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-n)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{n-m+1}} dt, \quad (3.1)$$

y la definición Caputo es descrita por:

$$D_0^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{n-m+1}} dt, \quad (3.2)$$

con $n \in \mathbb{R}$, m la función cielo de n ($m = \lceil n \rceil$), y Γ es la función gama la cual es definida como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.3)$$

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville jugó un papel determinante en el desarrollo del cuerpo teórico del cálculo fraccionario, y se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Pero al tratar de realizar las modelizaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales también de orden fraccionario. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso práctico del cálculo fraccionario. El operador diferencial de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, emplea como con-

diciones iniciales derivadas de orden entero, es por esto que el operador de estudio utilizado en este trabajo es el operador de Caputo.

3.2. Existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales fraccionarias de Caputo

Ahora, correspondiente al operador de Caputo en esta sección discutiremos el problema de existencia y unicidad de las soluciones.

Considera la ecuación de la forma:

$$D_0^{n_k} x(t) = f(t, x(t)), \quad (3.4)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$x^{(j)}(0) = x_0^{(j)}, \text{ with } j = 0, 1, \dots, [n_k] - 1.$$

Con respecto a la existencia de la solución, el primer resultado corresponde al teorema de existencia de Peano para ecuaciones de primer orden.

Teorema 3.2.1. *Sea $0 < n$ y $m = [n]$. Además sea $x_0^0, \dots, x_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$, $K > 0$ y $h^* > 0$. Defina $G := \{(t, x) : t \in [0, h^*], |x - \sum_{k=0}^{m-1} t^k x_0^{(k)} / k!| \leq K\}$, y sea la función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Además defina $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$ y*

$$h := \begin{cases} h^*, & \text{si } M = 0; \\ \min\{h^* \cdot (K\Gamma(n+1)/M)^{1/n}\}, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, existe una función $x \in C[0, h]$ que resuelve el problema del valor inicial (3.4).

Lema 3.2.2. *Asuman las hipótesis del teorema 3.2.1. La función $x \in C[0, h]$ es una solución del problema del valor inicial (3.4) si y solo si es una solución de la ecuación integral no lineal de Volterra de segundo tipo*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (x - \tau)^{n-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (3.5)$$

Es importante notar que bajo ciertas suposiciones, la solución existe en el intervalo completo $[0, h^*]$ (y para todo t para el cual $f(t, x)$ está definido) y no solo para el subintervalo $[0, h]$ con algún $h \leq h^*$.

Ahora abordaremos el teorema sobre unicidad de las soluciones el cual corresponde al bien conocido resultado de Picard-Lindelöf.

Teorema 3.2.3. *Sea $0 < n$ y $m = \lceil n \rceil$. Además sea $x_0^0, \dots, x_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$, $K > 0$ y $h^* > 0$. Defina al conjunto G conforme al teorema 3.2.1 y sea la función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continua y Lipschitz con respecto a una segunda variable, esto es:*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad (3.6)$$

con una constante $L > 0$ independiente de t, x_1 y x_2 . Entonces, denotando h como en el teorema 3.2.1, existe una única función $y \in C[0, h]$ que resuelve el problema del valor inicial (3.4).

En el caso de los sistemas lineales es necesario considerar otro teorema para la existencia y unicidad. En el cual se consideran un conjunto de suposiciones ligeramente diferentes que nos permiten llegar a un resultado de existencia y unicidad para una clase mas amplia de sistemas entre los cuales se incluyen las ecuaciones lineales.

Teorema 3.2.4. *Sea $0 < n$ y $m = \lceil n \rceil$. Además sea $x_0^0, \dots, x_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$ y $h^* > 0$. Defina el conjunto $G := [0, h^*] \times \mathbb{R}$ y sea la función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continua y satisfaga la condición de Lipschitz con respecto a una segunda variable con una constante de Lipschitz $L > 0$ que es independiente de t, x_1 y x_2 . Entonces existe una única función definida $x \in C[0, h^*]$ que resuelve el problema del valor inicial (3.4).*

Se obtiene la consecuencia inmediata:

Corolario 3.2.5. *Sea $0 < n$ y $m = \lceil n \rceil$. Además sea $x_0^0, \dots, x_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$ y $h^* > 0$. Defina el conjunto $G := [0, \infty) \times \mathbb{R}$ y sea la función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continua y satisfaga la condición de Lipschitz con respecto a una segunda variable con una constante de Lipschitz $L > 0$ que es independiente de t, x_1 y x_2 . Entonces existe una única función definida $x \in C[0, \infty]$ que resuelve el problema del valor inicial (3.4).*

Ahora podemos encontrar la solución explícita de un sistema para una clase simple de ecuaciones diferenciales fraccionarias de tipo Caputo, llamadas ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.

Teorema 3.2.6. *Sea $0 < n$ y $m = \lceil n \rceil$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. La solución del problema del valor inicial*

$$D_0^n x(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = x_0, \quad x^k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-1), \quad (3.7)$$

está dada por:

$$x(t) = x_0 E_n(\lambda t^n), \quad t \geq 0. \quad (3.8)$$

Con E_n la función Mittag-Leffler.

Definición 3.2.7. Sea $n > 0$. La función E_n definida por:

$$E_n(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(jn + 1)}. \quad (3.9)$$

Siempre que la serie converja es llamada la función de Mittag-Leffler de orden n .

La ecuación diferencial considerada en el teorema 3.2.6 es un ejemplo simple de una ecuación diferencial lineal fraccionaria. Para las pruebas de los resultados presentados en esta sección véase la referencia [38].

3.3. Sistemas dinámicos de orden fraccionario

Teorema 3.3.1. [38] Un sistema general invariante en tiempo de orden fraccionario conmensurado es descrito de la siguiente manera:

$$D_0^{n_k} x(t) = f(t, x(t), D_0^{n_1} x(t), D_0^{n_2} x(t), \dots, D_0^{n_{k-1}} x(t)), \quad (3.10)$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$x^{(j)}(0) = x_0^{(j)}, \text{ con } j = 0, 1, \dots, \lceil n_k \rceil - 1,$$

donde $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Q}$, tal que $n_k > n_{k-1} > \dots > n_1 > 0$, $n_j - n_{j-1} \leq 1$ para todo $j = 2, 3, \dots, k$ y $0 < n_1 \leq 1$, sea M el mínimo común múltiplo del denominador de n_1, n_2, \dots, n_k y sea $\alpha = 1/M$ y $N = Mn_k$.

Entonces la ecuación (3.10) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
D_0^\alpha x_0(t) &= x_1(t), \\
D_0^\alpha x_1(t) &= x_2(t), \\
&\vdots \\
D_0^\alpha x_{N-2}(t) &= x_{N-1}(t), \\
D_0^\alpha x_{N-1}(t) &= f(t, x_0(t), x_{n1/\alpha}(t), \dots, x_{n_{k-1}/\alpha}(t)).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

con condiciones iniciales

$$x_j(0) = \begin{cases} x_0^{(j/M)} & \text{si } j/M \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Además de acuerdo con el teorema 3.3.1, este sistema lineal invariante en el tiempo se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = A\mathbf{x}, \tag{3.12}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador lineal, y α es el orden conmensurado de derivada de orden fraccionario $0 < \alpha < 1$.

En los sistemas de orden fraccionario, la región de estabilidad depende del orden de derivada α tal como se representa en Figura 3.1 (tomada de [42]). Es importante notar que la estabilidad del punto de equilibrio puede ser controlada por medio del orden de derivada α , por ejemplo, un punto de equilibrio hiperbólico tipo silla de un sistema de orden entero puede ser transformado a un punto de equilibrio estable al cambiar el orden de derivada α del sistema.

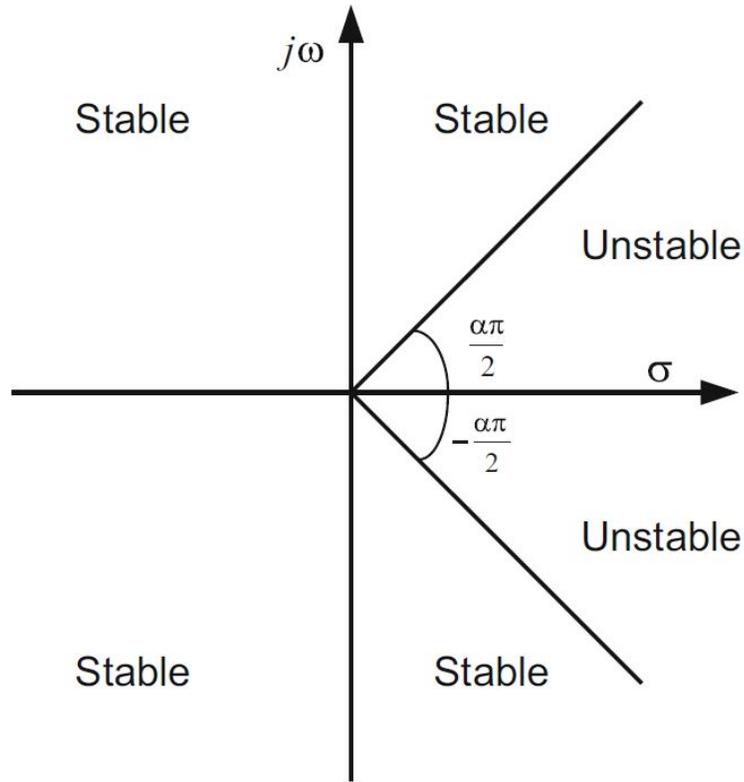


Figura 3.1: Region de estabilidad para un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccional $0 < \alpha < 1$ [42].

Está es una consideración importante para el diseño de un modelo matemático de movimiento Browniano debido a que nosotros estamos interesados en dinámica inestable.

La estabilidad de sistemas de orden fraccionario se enuncia de la siguiente manera:

- **Asintóticamente estable:** El sistema (3.12) es asintóticamente estable si y sólo si $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ para todos los eigenvalores λ de la matriz A . En este caso,

la solución $x(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$.

- **Estable:** El sistema (3.12) es estable si y sólo si $|\arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ para todos los eigenvalores λ de la matriz A obedeciendo que los eigenvalores críticos deben satisfacer $|\arg(\lambda)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ y tienen multiplicidad geométrica de uno.

El interés es tener dinámica inestable con la finalidad de obtener movimiento Browniano, entonces el sistema es restringido a tener por lo menos un eigenvalor en la región inestable, esto es, el sistema (3.12) es inestable si y sólo si $|\arg(\lambda)| < \frac{\alpha\pi}{2}$ para por lo menos uno de sus eigenvalores λ de la matriz A .

Adicionalmente, el sistema dado por (3.12) con su punto de equilibrio en el origen puede ser generalizado por un sistema lineal afín como sigue:

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = A\mathbf{x} + B, \quad (3.13)$$

donde $B \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador lineal no singular. Ahora el punto de equilibrio $p \equiv (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T = -A^{-1}B$ de un sistema lineal afín general conmensurado de orden fraccionario (3.13) con orden fraccionario $0 < \alpha < 1$, es un punto de equilibrio tipo silla si sus eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa, \lambda_{\kappa+1}, \dots, \lambda_n$ de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio cumple la siguiente condición.

$$\begin{aligned} |\arg(\lambda_i)| &> \frac{\alpha\pi}{2} && \text{con } i = 1, 2, \dots, \kappa, \\ |\arg(\lambda_i)| &< \frac{\alpha\pi}{2} && \text{con } i = \kappa + 1, \kappa + 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nótese que estamos interesados en trabajar con sistemas inestables, esto es, siste-

mas que no cumplan la condición de estabilidad local asintótica.

$$\min |arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.15)$$

3.4. Método numérico para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias

No hay métodos que puedan proporcionar, analíticamente, la solución exacta de cualquier ecuación diferencial fraccionaria como las que proporcionan los sistemas de orden entero, por lo tanto, es necesario utilizar métodos numéricos. El método de Adams-Bashforth-Moulton (ABM), un esquema predictor corrector, fue reportado en [43] y es usado para obtener la evolución temporal de sistemas fraccionarios. El algoritmo es una generalización del integrador clásico de Adams-Bashforth-Moulton el cual es conocido para la solución de problemas de primer orden como de sistemas conmutados [42].

Ahora presentamos el método que es ampliamente utilizado y que se ha probado su eficiencia en muchas aplicaciones prácticas [44, 45].

Considere la ecuación diferencial fraccionaria que es descrita por (3.10) como sigue:

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= f(t, x(t)), & 0 \leq t \leq T; \\ x^{(k)}(0) &= x_0^{(k)}, & k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Asumimos la función f es tal que una única solución existe en un intervalo $[0, T]$,

y asumimos que trabajamos en una malla uniforme $\{t_j = jh : j = 0, 1, \dots, N\}$ con algún entero N y $h = T/N$.

La solución de (3.16) está dada por una ecuación integral de tipo Volterra como:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} f(z, x(z)) dz, \quad (3.17)$$

$$x_{k+1} = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, x_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, x_{k+1}^P) \right), \quad (3.18)$$

donde

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} (k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha), & \text{si } j=0; \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} ((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}), & \text{si } 1 \leq j \leq k; \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}, & \text{si } j = k+1. \end{cases} \quad (3.19)$$

con el esquema predictor dado como sigue.

$$x_{k+1}^P = x(0) + \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, x_j), \quad (3.20)$$

y

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha). \quad (3.21)$$

El error de esta aproximación está dado por:

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |x(t_j) - x_h(t_j)| = O(h^p). \quad (3.22)$$

Es importante mencionar que en esta tesis se consideraran modelos de orden fraccionario. Por lo cual el algoritmo antes presentado es utilizado para obtener las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales fraccionarias presentadas en el trabajo.

Capítulo 4

Modelo determinista fraccionario para generar movimiento Browniano.

El principio del movimiento Browniano es una partícula suspendida. El movimiento de esta partícula ocurre debido a las colisiones entre las moléculas del fluido, y considerando que en cada colisión una molécula cambia su velocidad en pequeñas cantidades. Este hecho se debe a que la partícula suspendida en condiciones normales sufre aproximadamente 10^{21} colisiones por segundo, entonces el efecto acumulado resulta ser considerable. Cada una de estas colisiones está siempre determinada por el último evento el cual es producido por las interacciones físicas en el sistema. Dado que se puede pensar que cada colisión produce un cambio en el camino de la partícula, no se puede esperar seguir el camino con ningún detalle, esto es, los detalles de la trayectoria que sigue la partícula son infinitamente finos. Por lo tanto, la partícula Browniana realiza un movimiento fluctuante. Es por esto que los modelos estocásti-

cos de movimiento Browniano siguen el movimiento promedio de una partícula, no una trayectoria particular de una partícula.

La teoría estocástica del movimiento Browniano de una partícula libre (en ausencia de un campo de fuerza externo) generalmente se rige por la ecuación de Langevin.

Se hicieron dos suposiciones principales sobre este término estocástico $A_f(t)$ para producir el movimiento Browniano:

- $A_f(t)$ es independiente de x y v .
- $A_f(t)$ varía extremadamente rápido en comparación con la variación de v .

La última suposición implica que existe un intervalo de tiempo Δt durante el cual las variaciones en v son muy pequeñas. Alternativamente, podemos decir que aunque $v(t)$ y $v(t + \Delta t)$ difieran en una cantidad insignificante, no exista correlación entre $A_f(t)$ y $A_f(t + \Delta t)$ debido a que es un término estocástico.

4.1. Análisis del modelo de orden entero

Ahora basados en el método previo para la generación de movimiento Browniano [19], el siguiente operador lineal y vector constante es considerado:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 \\ -10.5 * \nu & -7.0 * \nu & -0.7 * \nu \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu * b_3 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $\nu \in \mathbb{R}^+$ es un parámetro constante.

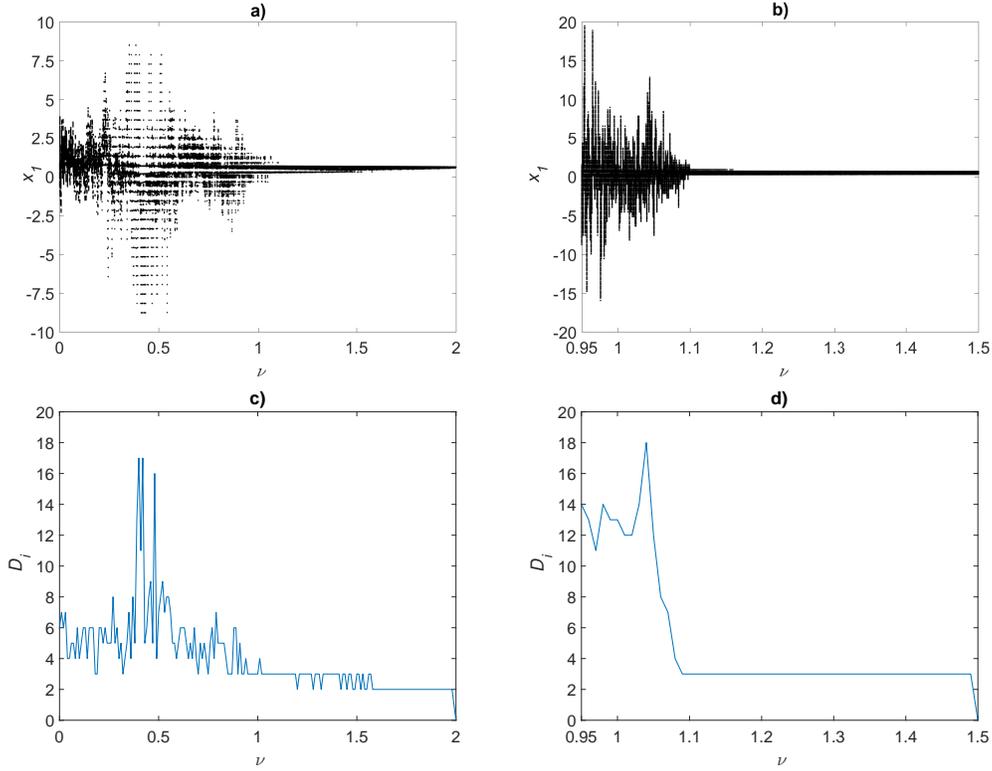


Figura 4.1: a) Diagrama de bifurcación del sistema dado por las ecuaciones (2.11) con (2.15) y (4.1) para el valor de $0 < \nu \leq 2$, la Figura b) muestra la bifurcación para el rango $0.95 \leq \nu \leq 1.5$ para 1,000,000 de iteraciones. Figuras c) y d) muestran el número de dominios \mathcal{D}_i visitados por la trayectoria del sistema para los mismos valores de parámetros anteriores. La condición inicial considerada para ambos diagramas es $\mathbf{X}_0 = (0.7, 0, 0)^T$.

Con este vector \mathbf{B} , el desplazamiento de los puntos de equilibrio es a lo largo del eje x_1 , donde b_3 conmuta de acuerdo con la función *round* dada por ec. (2.14).

El parámetro ν es usado para cambiar el eigen-espectro del operador lineal del sistema, principalmente las direcciones de las variedades estables e inestables, entonces ν puede ser tomado como un parámetro de bifurcación [33] y de acuerdo con

la proposición 2.2.3 ν está restringido al intervalo $0 < \nu < 2.14$ para preservar el caracter UDS del operador lineal A . Las figuras 4.1 a) y b) muestran el diagrama de bifurcación por medio de considerar los máximos locales en cada dominio \mathcal{D}_i de cada enroscado representado en x_1 , esto es, si el flujo $\phi_{x_1}^{t_j} \geq \phi_{x_1}^{t_n} \in \mathcal{D}_i$ (con $t_j > t_n$) para el rango de parámetro $0 < \nu \leq 2$ y el acercamiento en $0.95 \leq \nu \leq 1.5$. ambos diagramas fueron calculados con la misma condición inicial $\mathbf{X}_0 = (0.7, 0, 0)^T$, la diferencia es que en la figura 4.1 a) fue calculada para 10,000 iteraciones mientras que la figura 4.1 b) para 1,000,000 de iteraciones.

Es importante notar que para $\nu < 1.1$ los máximos locales aumentan de acuerdo con el tiempo, como el crecimiento lineal en tiempo para el desplazamiento cuadrado promedio reportado en [19]. Por otra parte, para $\nu \geq 1.1$ los máximos locales permanecen constantes a pesar del tiempo. Esto muestra la transición dinámica entre el escape en tiempo y el confinamiento. Adicionalmente las figuras 4.1 c) y d) muestran el número de dominios \mathcal{D}_i que el sistema visita para los mismos valores de ν , respectivamente. notese que, si el rango de $\nu \geq 1.1$ aproximadamente el número de dominios \mathcal{D}_i visitados permanece en el valor constante de 3, esto debido a que el sistema presenta un atractor de solo un enroscado localizado en el dominio interno como se muestra en la figura 4.2. Esto se puede apreciar mejor en el área ampliada en la Figura 4.1 d).

Con estos valores de parámetros el equilibrio del sistema esta dado por $\mathbf{X}_0^* = (b_3/10.5, 0, 0)^T$. Por lo tanto $c = 6.3$ y $\alpha = c/10.5$ son asignados a la función ec. (2.15). El eigen-espectro de la matriz \mathbf{A} depende ahora del parámetro de bifurcación ν , el cual, por ejemplo, para el valor de $\nu = 10/7$ está dado por:

$$\lambda(10/7) = \{-1.4164, 0.2082 \pm i3.2475\},$$

$$\vartheta(10/7) = \{\vartheta_{1,2,3}(\nu)\} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0.3771 \\ -0.5342 \\ 0.7566 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0.0892 \pm i0.0115 \\ 0.0187 \pm i0.2919 \\ -0.9520 \end{array} \right) \right\}, \quad (4.2)$$

probando que la definición 2.2.1 se satisface. Considerando estos valores, el sistema resulta en un interesante fenómeno de multiestabilidad debido a la función redondeo y la ubicación de los eigenvectores como se muestra en la figura 4.2 b) para la condición inicial $\mathbf{X}_0 = (-0.1, 0, 0)^T$. El atractor se encuentra cerca del equilibrio en el origen debido a la condición inicial dada. No obstante, no hay oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio adyacentes, la razón reside en los eigenvectores, esto es, la variedad estable del dominio en el cual la trayectoria está oscilando, no empata y ni se cruza con las variedades estables de los dominios adyacentes.

Esto puede ser fácilmente observado en la figura 4.2 como es ahora explicado. Las figuras 4.2 a) y b) presentan una proyección de la trayectoria en el plano (x_1, x_2) para los sistemas (2.11) con (2.15) y (4.1), ambos inicializados con la misma condición inicial cerca del origen $\mathbf{X}_0 = (-0.1, 0, 0)^T$, pero considerando los valores para el parámetro de bifurcación de $\nu = 1$ y $\nu = 10/7$, respectivamente. Observe en las proyecciones que a medida que el tiempo aumenta la trayectoria oscila en el sentido de las agujas del reloj, en ambos sistemas el atractor crece hasta que las trayectorias de los enroscados cruzan la superficie de conmutación cerca de la variedad inestable E^u marcada con líneas azules. Aparentemente, ambas trayectorias de los sistemas cruzan el plano de superficie de conmutación $x_1 = x_{1_{cs}}$ marcado con líneas negras,

en un vecindario cerca de la intersección de la variedad inestable y estable marcadas con línea azul y roja (dependiendo si la trayectoria está escapando o entrando al dominio), respectivamente. Sin embargo, al observar diferentes proyecciones de los atractores, por ejemplo, la proyección en el plano (x_1, x_3) en las figuras 4.2 c) y d), se puede apreciar que la dirección de las variedades han cambiado ligeramente con respecto a las intersecciones con las superficies de conmutación debido a la variación del parámetro de $\nu = 1$ a $\nu = 10/7$.

Observando de manera más de cerca al gráfico en la figura 4.2 c) entre $-1 < x_1 < -0.3$. En este dominio \mathcal{D}_{-1} la trayectoria del sistema está entrando desde la parte superior cerca de $x_3 \approx 2$ donde la flecha negra representa la dirección del cruce en la intersección de la variedad inestable E^u con la superficie de conmutación $x_1 = x_{-1cs}$. Antes de entrar al dominio \mathcal{D}_{-1} la trayectoria es dirigida por debajo de la variedad estable E^s en este dominio marcado con la línea roja, y luego cruza al dominio \mathcal{D}_0 cerca de la intersección de la siguiente variedad estable en \mathcal{D}_0 en $x_3 \approx -0.9$. Observe que algunas de las trayectorias que entran en este dominio terminan oscilando en el enroscado como lo muestra la flecha en la parte inferior. Sin embargo, algunas de las trayectorias en lugar de alcanzar el plano de enroscamiento en \mathcal{D}_0 son dirigidos nuevamente a \mathcal{D}_{-1} y oscilan en el enroscado sobre la variedad inestable E^u .

Este comportamiento es completamente diferente en la proyección del atractor en la Figura 4.2 d) para $\nu = 10/7$. Aquí, cuando la trayectoria escapa del dominio \mathcal{D}_0 cerca $x_3 \approx 3$ y entra \mathcal{D}_{-1} , la trayectoria se dirige hacia la ubicación de la variedad estable y cruces cerca de la intersección $E^s \cap x_{-1cs}$ en aproximadamente $x_3 \approx 0.1$. Después de cruzar la trayectoria se redirige hacia el enroscado en \mathcal{D}_0 como la dirección que representan las flechas. Este proceso se repite continuamente desde los dos

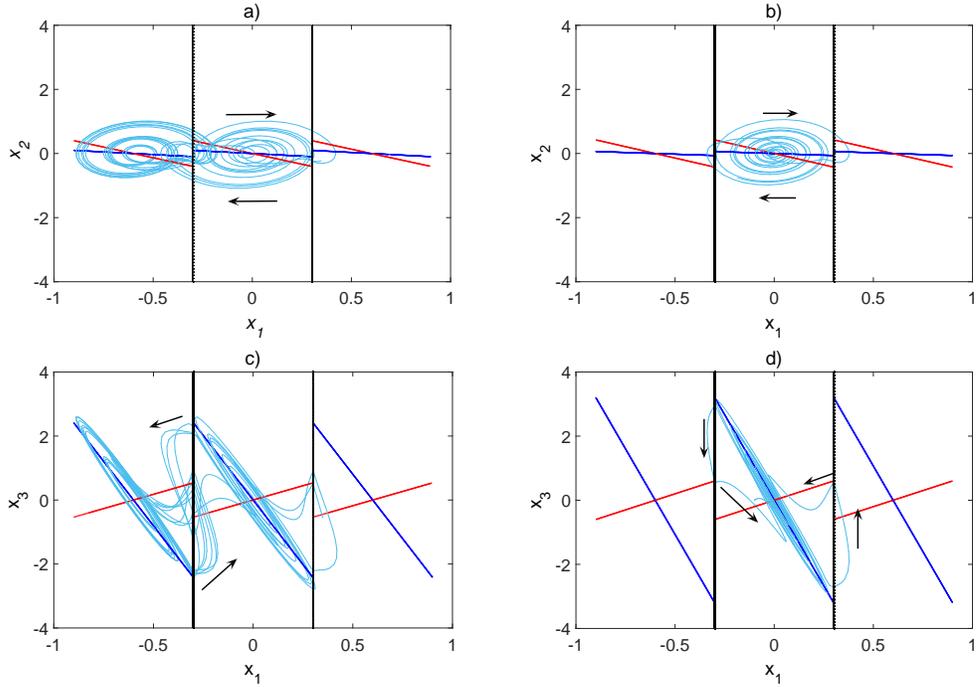


Figura 4.2: Proyecciones de la trayectoria para el sistema dado por ec. (4.1), con $c = 6.3$ y $\alpha = 0.6$. para $\nu = 1$ a) sobre el plano (x_1, x_2) , c) sobre el plano (x_1, x_3) . Para $\nu = 10/7$ b) sobre el plano (x_1, x_2) , d) sobre el plano (x_1, x_3) . Marcadas con línea negra las superficies de conmutación generadas por la función (2.15), con línea roja el eigenvector real y con línea azul el eigenvector complejo. Las flechas negras muestran la dirección de la trayectoria.

dominios contiguos al dominio en el que se encuentra el atractor.

4.1.1. Transición entre el fenómeno mono-estable a multi-estable

Ahora, para comprender el fenómeno y visualizar la ubicación exacta de la intersección de E^s y E^u junto con los puntos que pertenecen el atractor \mathfrak{A} en la superficie de conmutación $x_1 = x_{1_{cs}}$, un plano de Poincaré se implementó exactamente en

la superficie de conmutación [33]. Primero, el plano de Poincaré es definido como $\Sigma := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_4 = 0\}$, donde $\mu_1, \dots, \mu_4 \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de la ecuación del plano cuyos valores se consideran dependiendo de la ubicación en estudio, que en este caso será en las superficies de conmutación $x_1 = x_{i_{cs}}$ con $i \in \mathbb{Z}$ garantizando $\mathfrak{A} \cap \Sigma \neq \emptyset$. Los eventos de cruce de interés son $\{\phi_{in}^{t_1}(\mathbf{X}_0), \phi_{out}^{t_2}(\mathbf{X}_0), \phi_{in}^{t_3}(\mathbf{X}_0), \phi_{out}^{t_4}(\mathbf{X}_0), \dots, \phi_{in}^{t_{m-1}}(\mathbf{X}_0), \phi_{out}^{t_m}(\mathbf{X}_0)\} \in \Sigma$ con $m \in \mathbb{Z}^+$. Donde m corresponde al total de eventos de cruce en Σ , y ϕ_f^j corresponde a la j -th intersección de $\mathfrak{A} \cap \Sigma$ en la dirección $f = in, out$. El subíndice *out* corresponde a trayectorias que cruzan Σ con $dx_1/dt > 0$, y *in* corresponde a trayectorias que cruzan Σ con $dx_1/dt < 0$. Las figuras 4.3 a) y b) presenta el plano de $\Sigma := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_{1_{cs}} = 0\}$ para los valores de $\nu = 1$ y $\nu = 1.42$, respectivamente.

Distribución de las intersecciones con el plano de Poincaré

Considere una trayectoria en $\mathfrak{A} \cap \mathcal{D}_i$, con punto de equilibrio $X_i^* \in \mathcal{D}_i$. Cuando la trayectoria $\phi^t(\mathbf{X}_0)$ oscila alrededor de X_i^* aumenta la distancia al punto de equilibrio y sale del dominio actual \mathcal{D}_i a \mathcal{D}_{i+1} (o \mathcal{D}_i a \mathcal{D}_{i-1}) a través de la superficie de conmutación cerca de la región de intersección de la variedad inestable con el plano de Poincaré ($E^u \cap \Sigma$), como se puede apreciar en la figura 4.3 con los puntos de intersección de la trayectoria $\phi_{out}^{t_j}(\mathbf{X}_0)$ marcados en círculos azules. El triángulo azul corresponde a la intersección del vector $Real(\vartheta_2(\nu))$ con el plano de Poincaré, esto es $Real(\vartheta_2(\nu)) \cap \Sigma$. La línea azul que aparece en ambas figuras 4.3 a) y b), corresponde a la intersección de la variedad inestable con el plano de Poincaré $E^u \cap \Sigma$. Observe que la mayoría de las trayectorias cruzan cerca de esta sección debido al comporta-

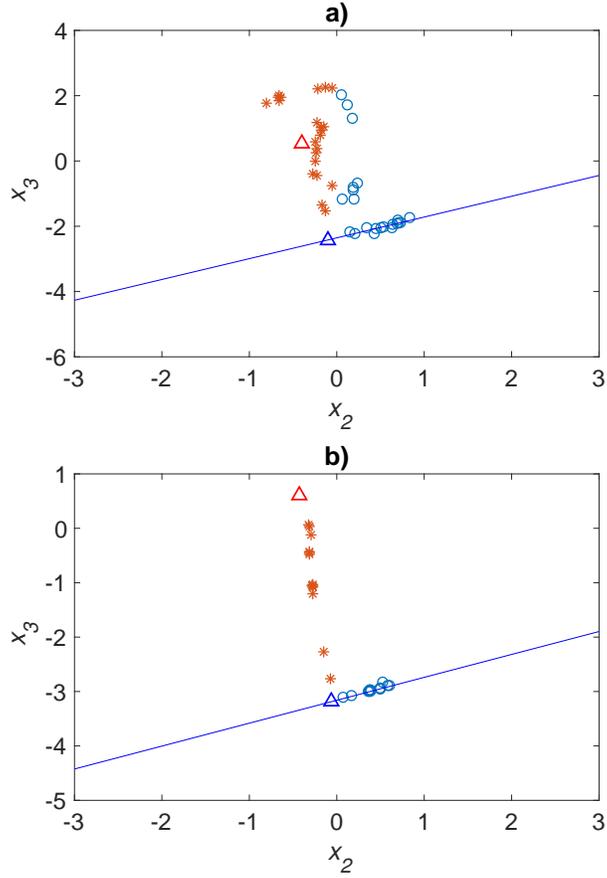


Figura 4.3: Intersecciones de la trayectoria del sistema (2.11) con (2.15) y (4.1) con la superficie de conmutación Σ ubicada en $x_{1_{cs}}$ para a) $\nu = 1$, b) $\nu = 1.42$. Marcado con círculos azules las trayectorias salientes de \mathcal{D}_1 cerca de $E^u \cap \Sigma$. Los asteriscos naranjas representan las trayectorias entrantes a \mathcal{D}_1 . El triángulo naranja representa $E^s \cap \Sigma$, y la línea azul corresponde a la intersección de la variedad inestable con la superficie de conmutación.

miento del enroscamiento en o cerca de la variedad inestable, esto es, la mayoría de los círculos azules se encuentran a lo largo de la intersección marcada con la línea azul. Sin embargo, la figura 4.3 a) presenta una región de intersección de puntos de escape $\phi_{out}^{t_j}(\mathbf{X}_0)$ no cerca de la variedad inestable (círculos azules no ubicados en la intersección marcados en la línea azul), que aparece como una de las principales

diferencias entre los puntos de escape en la figura 4.3 b) para un valor mayor del parámetro de bifurcación. También tenga en cuenta que los puntos de intersección de entrada $\phi_{in}^{t_j}(\mathbf{X}_0)$, marcados con asteriscos naranja para $\nu = 1$ están dispersos alrededor de la intersección de la variedad estable y el plano de $E^s \cap \Sigma$ marcada con el triángulo rojo en la figura 4.3 a), pero en la figura 4.3 b), los eventos de cruce se encuentran debajo de esta intersección de una manera aparentemente ordenada o alineada. Teniendo en cuenta este cambio en los eventos de cruce, es fácil determinar que la distancia entre los eventos de cruce de trayectoria y los puntos de intersección de las variedades está disminuyendo (Tenga en cuenta los rangos de valores tomados por el eje x_3 en la figura 4.3 a) y b)).

De acuerdo a este análisis de bifurcación nuestro interés es tener un mayor número de puntos de cruce, para lo cual consideramos el valor del parámetro de bifurcación $\nu = 1/7$ de acuerdo con lo observado en la Figura 4.1 y el eigen-espectro de la matriz \mathbf{A} dado por:

$$\begin{aligned} \lambda(\nu) &= \{-0.8851, 0.3925 \pm i1.2413\}, \\ \vartheta(\nu) = \{\vartheta_{1,2,3}(\nu)\} &= \left\{ \left(\begin{array}{c} 0.6796 \\ -0.5643 \\ 0.4686 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -0.3640 \pm i0.2123 \\ 0.1482 \pm i0.5250 \\ -0.7332 \end{array} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2. Aproximación fraccionaria

Ahora, basados en cálculo fraccionario, se han propuesto varias ecuaciones de Langevin fraccionarias para generar movimiento Browniano, véase [30, 31, 32]. Estos modelos difieren de la ecuación de Langevin habitual al reemplazar las derivadas con

respecto al tiempo por la derivada fraccionaria de orden α .

$$\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} = -\gamma \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} + A_f(t), \quad (4.4)$$

donde x denota la posición de la partícula y v su velocidad.

Podemos reescribir la ecuación fraccionaria de Langevin (4.4) en dos ecuaciones diferenciales fraccionarias por un cambio de variables,

$$\begin{aligned} D_0^\alpha x &= v, \\ D_0^\alpha v &= -\gamma v + A_f(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde D_0^α es el operador derivada de Caputo.

Para generar un modelo determinista de movimiento Browniano, se agrega un grado de libertad adicional al sistema (4.5) para evitar el término estocástico mediante el reemplazo de la aceleración fluctuante $A_f(t)$. Cambiamos el término estocástico A_f por una nueva variable z que se define mediante una ecuación diferencial de tercer orden como se reporta en [19]. La variable propuesta z actúa como aceleración fluctuante y produce un movimiento dinámico determinista sin término estocástico, pero el comportamiento presenta las características estadísticas del movimiento Browniano tal como se mostró en trabajos previos [18]. Sin embargo, en nuestro modelo, la aceleración fluctuante tiene una dependencia directa de la posición, velocidad y aceleración debido a la ecuación Jerk implicada [46]. Cuando una partícula se mueve en un fluido, la fricción y las colisiones con otras las partículas, que existen en el entorno, necesariamente producen cambios en la velocidad y aceleración del movimiento; todos estos cambios se consideran en la ecuación Jerk. Sin pérdida

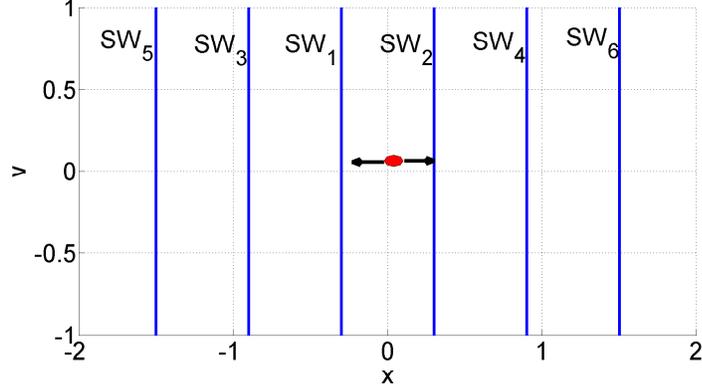


Figura 4.4: Proyección de SW perpendicular sobre el plano (x, v) (lineas azules), el punto rojo representa una partícula Browniana que se desplaza a lo largo de una dimensión x . La SW delimita cada región de potencial y cuando la partícula cruza la superficie representa un cambio de potencial en la partícula.

de generalidad, definimos nuestro enfoque basado en sistemas disipativos inestables (UDS) [20, 21] como sigue.

$$\begin{aligned}
 D^\alpha x &= v, \\
 D^\alpha v &= -\gamma v + z, \\
 D^\alpha z &= -a_1 x - a_2 v - a_3 z - a_4(x),
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ son parámetros constantes, con $i = 1, 2, 3$, y $a_4(x) \in \mathbb{R}$ actúa como una función constante por partes, esto es, una función escalón.

Las primeras dos ecuaciones de la ecuación de Langevin fraccionaria (4.5) se derivan de la ecuación de Langevin (2.4) con un pequeño cambio: el término estocástico es reemplazado por un término determinista en el mismo espíritu que [20, 21]. Ahora construimos superficies de conmutación (SW), Figura 4.4. Sin pérdida de generalidad, las SW se definen por planos perpendiculares al eje x , por lo que los dominios se

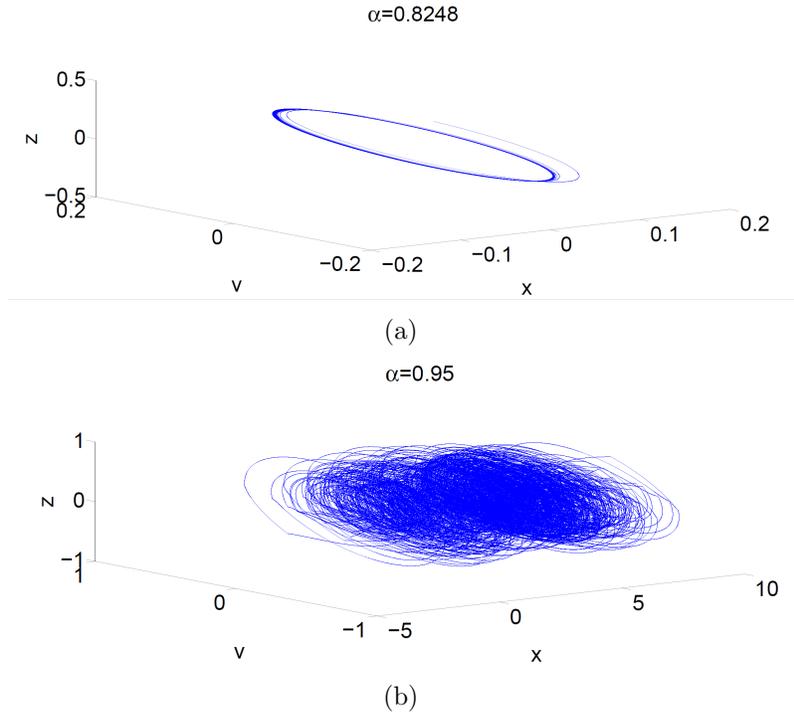


Figura 4.5: Soluciones del sistema (4.6) en el espacio fase para diferentes valores de α : (a) $\alpha = 0.8248$, (b) $\alpha = 0.9500$.

definen entre estas SW que se consideran como fronteras de cada dominio. En el caso de sistemas reales, las SW se puede ver como un potencial de múltiples pozos con tiempo de escape fluctuante corto, donde cada dominio definido por las SW conserva su comportamiento inestable de acuerdo con la parte lineal del sistema. El parámetro a_4 es definido como sigue

$$a_4(x) = c_1 \text{round}(x/c_2), \quad (4.7)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes. Aquí, la función $\text{round}(x)$ se implementará para simplificar el proceso de generación de las SW.

4.3. Resultados numéricos

En esta sección, investigamos numéricamente el comportamiento a largo plazo de las soluciones del sistema (4.6) al considerar diferentes órdenes de derivadas y los siguientes valores de parámetros obtenidos del análisis del sistema de orden entero: $\gamma = 7 \times 10^{-5}$; $\alpha_1 = 1.5$; $\alpha_2 = 1.2$; $\alpha_3 = 0.1$; $C1 = 0.9$ y $C2 = 0.6$. Vale la pena mencionar que estos valores de parámetros son los mismos que los utilizados para generar comportamiento Browniano en [19]. Para estudiar el movimiento Browniano generado por el sistema (4.6), fijamos los valores de los parámetros y exploramos diferentes órdenes de derivadas (valores de α). La estabilidad de los sistemas de orden fraccionario es dada por la ecuación (3.15), entonces el comportamiento local cerca del punto de equilibrio es determinado por el Jacobiano del sistema (4.6) que tiene el siguiente espectro $\Lambda = \{\lambda_1 = -0.8304, \lambda_2 = 0.3651 + 1.2935i, \lambda_3 = 0.3651 - 1.2935i\}$. Este espectro determina el valor crítico del orden de derivada $\alpha_c \approx 0.8249$ para obtener el sistema (4.6) con comportamiento estable,

$$\alpha < \frac{2}{\pi} \min |arg(\lambda_i)| \approx 0.8249. \quad (4.8)$$

De acuerdo con los comentarios antes mencionados, a fin de preservar el sistema (4.6) siendo inestable para generar un comportamiento oscilatorio, nosotros consideramos $\alpha > \alpha_c$. La figura 4.5 (a) muestra una solución del sistema (4.6) para $\alpha = 0.8248$ y condición inicial $(x_0, v_0, z_0)^T = (1.0, 1.0, 1.0)^T$, este valor de orden de derivada da como resultado un comportamiento estable debido a $\alpha < \alpha_c$. Por otro lado, la figura 4.5 (b) muestra la solución del sistema (4.6) para $\alpha = 0.95$ y la misma condición inicial, pero ahora este valor de orden de derivada da como resultado un comportamiento inestable debido a $\alpha > \alpha_c$. Simulaciones numéricas se realizan utilizando el algoritmo Adams-Bashforth-Moulton explorando diferentes valores de α .

La Figura 4.6 muestra una serie de tiempo de la posición de una partícula para $\alpha = 0.95$ donde se puede ver claramente el comportamiento característico del movimiento Browniano. La trayectoria del movimiento Browniano está determinada por las condiciones iniciales y los valores de los parámetros antes mencionados. Como hay muchos pasos con una duración de tiempo corto y pocos pasos con una duración de tiempo prolongada, se observa el desplazamiento cuadrado medio pronosticado en tiempos cortos.

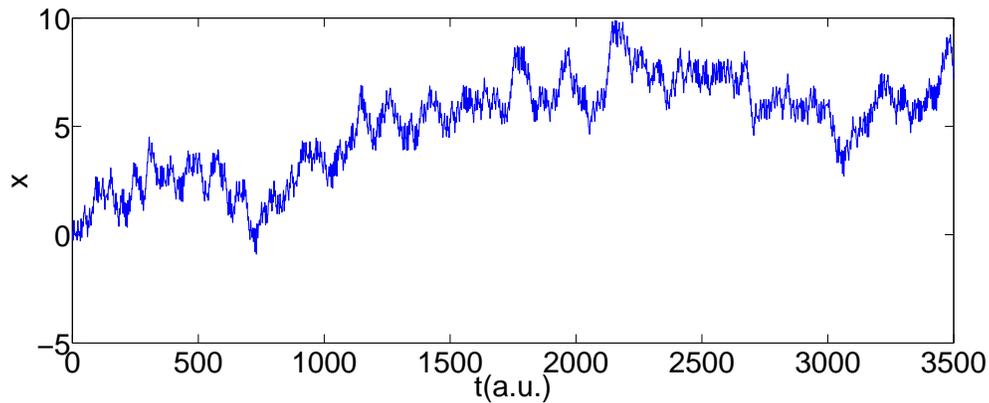


Figura 4.6: Serie de tiempo (U.A.) x de movimiento Browniano determinista obtenida con el modelo propuesto dado por (4.6) con $\alpha = 0.95$.

Las Figuras 4.7 y 4.8 muestra las propiedades estadísticas obtenidas para las series de tiempo del sistema (4.6) para $\alpha = 0.95$. La figura 4.7 muestra el crecimiento lineal en el tiempo del desplazamiento cuadrático medio predicho, en relación con el movimiento Browniano tradicional distribuciones de probabilidad Gaussianas de valor cero pueden ser observadas en las Figuras 4.8 (a), (b), (c) para desplazamiento, velocidad y aceleración de la partícula, respectivamente, en las cuales se puede ver

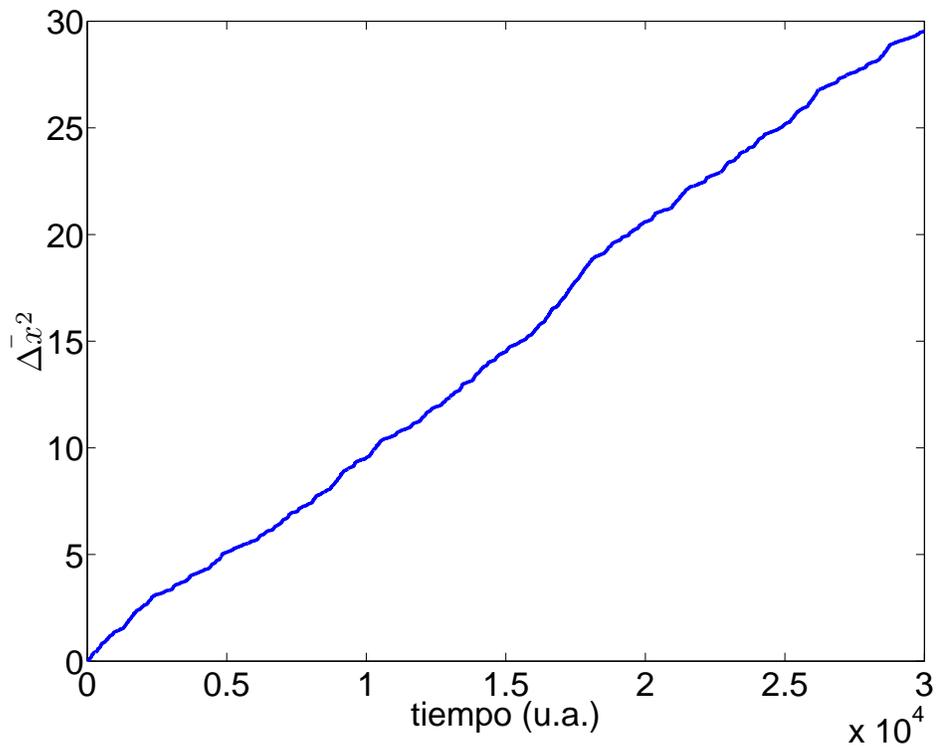


Figura 4.7: Desplazamiento cuadrático medio obtenido de la solución del sistema (4.6), del cual se muestra un crecimiento lineal en el tiempo.

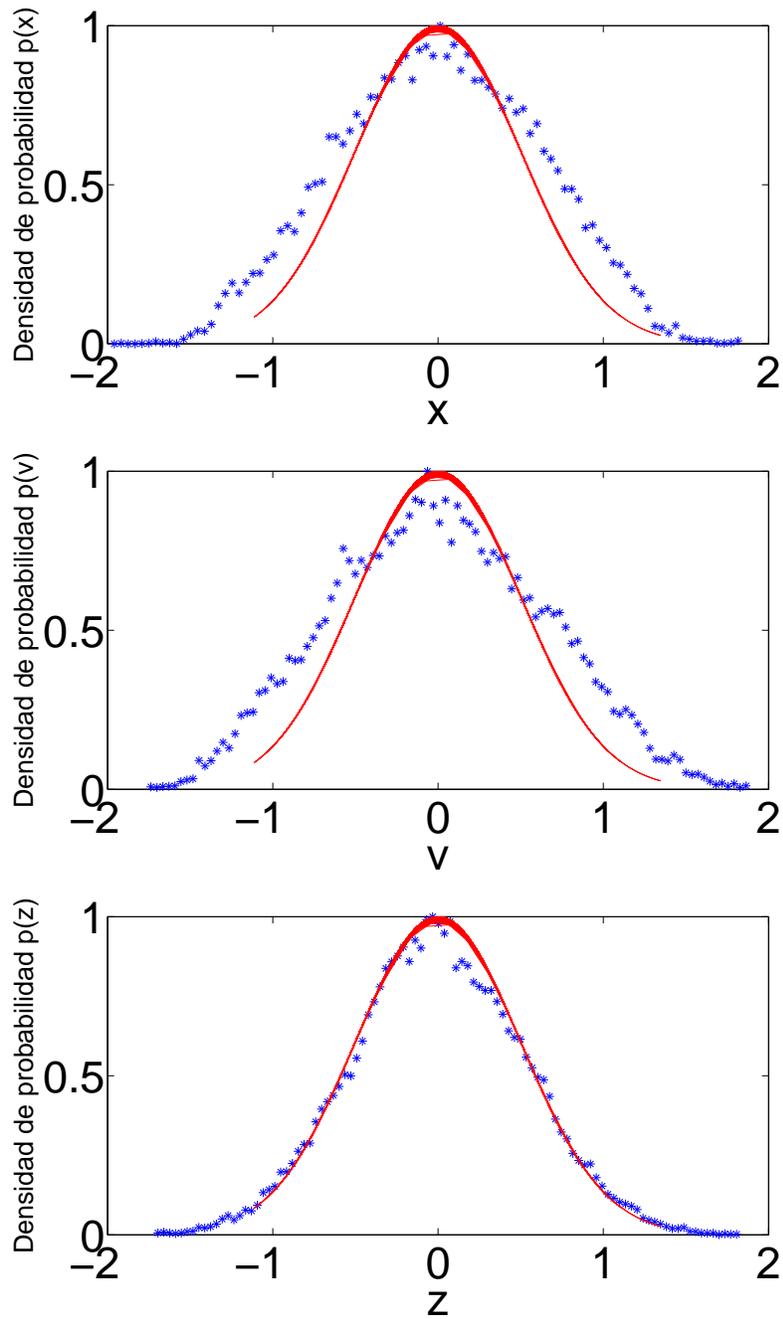


Figura 4.8: Propiedades estadísticas obtenidas del sistema (4.6), La densidad de probabilidad obtenida para el movimiento mostrado por medio de un histograma normalizado (línea azul punteada), para desplazamiento (a), velocidad (b), y aceleración (c), comparada con una distribución Gaussiana teórica (línea roja punteada).

que las distribuciones obtenidas del movimiento generado por nuestro sistema tienen una mejor aproximación Gaussiana que la obtenida con orden entero en [19].

Como se sabe, una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales es una característica esencial inherente al caos. En el caso de movimiento Browniano (visto como ruido) también es esencial la fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales, y ambos pueden caracterizarse por un exponente de Lyapunov positivo. Aunque ambos comportamientos pueden caracterizarse por el exponente de Lyapunov, la dinámica es completamente diferente; el movimiento Browniano como ruido no forma un atractor en el espacio de fase, es decir, son trayectorias no acotadas. Las trayectorias Brownianas y de ruido tienden al infinito, mientras que la dinámica caótica genera un atractor localizado dentro de una cierta área del espacio de fase, por lo que las trayectorias caóticas están acotadas.

En la Figura 4.9 el máximo exponente de Lyapunov obtenido, de acuerdo con [47], del sistema propuesto se muestra para confirmar la divergencia de las trayectorias esperadas en el movimiento Browniano.

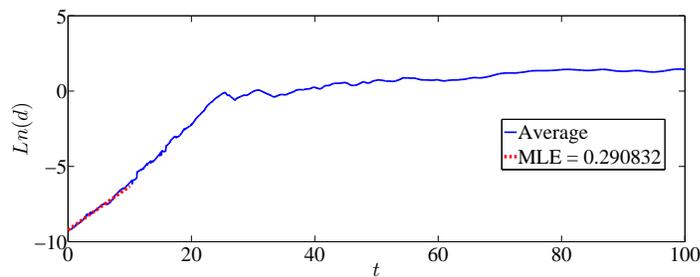


Figura 4.9: Máximo exponente de Lyapunov obtenido para el sistema propuesto (4.6) con $\alpha = 0.95$.

Finalmente, la propiedad de correlación de las señales generadas por (4.6) se caracteriza por el análisis de fluctuación sin tendencia (DFA), que fue desarrollado por Peng [36]. Entonces, la técnica de DFA nos ayuda a garantizar que el sistema propuesto genere movimiento Browniano, aplicamos el método de evaluación de DFA a las series de tiempo obtenidas con los valores de parámetros antes mencionados. El DFA es una herramienta importante para la detección de auto-correlaciones de largo alcance en series de tiempo no estacionarias. El DFA se basa en la teoría del camino aleatorio que consiste en un análisis de escala. Las principales ventajas del DFA sobre muchos otros métodos son que permite la detección de correlaciones de largo alcance de una señal incrustada en series temporales aparentemente no estacionarias, y también evita la falsa detección de aparentes correlaciones de largo alcance que son un artilugio de no estacionariedad.

El procedimiento de DFA consiste en los siguientes cinco pasos:

- * Se calcula la media de la serie de tiempo \bar{x} .
- * Se integran las series intermedias por intervalos de la serie de tiempo (de largo total N).

$$y(k) = \sum_{i=1}^k [x(i) - \bar{x}]. \quad (4.9)$$

- * La serie integrada es dividida en bloques de igual tamaño n . La tendencia local es obtenida por mínimos cuadrados y es removida de cada bloque.
- * la raíz de la fluctuación cuadrada promedio de esta serie integrada y sin ten-

dencia es calculada por:

$$f(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}. \quad (4.10)$$

* Las fluctuaciones pueden ser caracterizadas por un exponente de escalamiento η , la pendiente de la recta que relaciona $\log F(n)$ con $\log n$

$$f_m(n) \sim n^\eta. \quad (4.11)$$

cuando el exponente de escala es $\eta > 0.5$ tres regímenes distintos se pueden definir de la siguiente manera.

- 1 Si $\eta \approx 1$, DFA define ruido $1/f$.
- 2 Si $\eta > 1$, DFA define un comportamiento no estacionario o desacotado.
- 3 Si $\eta \approx 1.5$, DFA define movimiento Browniano o ruido Browniano.

La ley de escalamiento con $\eta = 1.5401$ revelado por el DFA y mostrado en la Figura 4.10 confirma el comportamiento Browniano de las series de tiempo obtenidas.

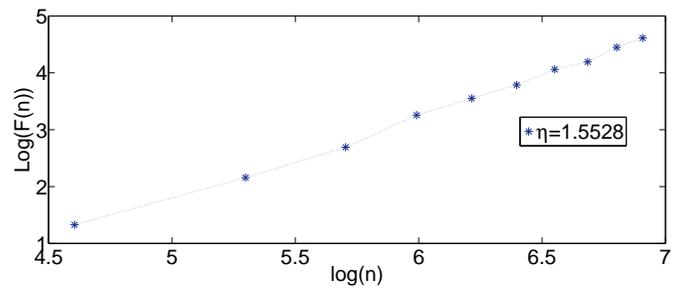


Figura 4.10: $\eta \approx 1.5$ obtenido por el DFA indica el comportamiento Browniano del movimiento observado (Figura 4.6).

Capítulo 5

Modelo determinista fraccionario para generar movimiento Browniano en un campo de fuerza.

El uso de la ecuación de Langevin ha sido ampliamente discutido y estudiado, pero es común encontrar problemas físicos modelados a partir de variaciones en el modelo de Langevin [7, 8, 9, 10]. Por ejemplo: el movimiento Browniano de un dipolo molecular en un potencial periódico [14]. S.C. Kou y X. Sunney Xie [12] usan la ecuación de Langevin generalizada con ruido Gaussiano Fraccionario para describir el fenómeno de subdifusión de la transferencia de un electrón dentro de una proteína.

5.1. Movimiento Browniano en un campo de fuerza

Supongamos una partícula Browniana inmersa en un campo de fuerzas externo dado por $K(x, t)$ en unidades de aceleración, la ecuación de Langevin dentro de la teoría de Ornstein-Uhlenbeck resulta:

$$\begin{aligned} dx(t) &= v(t)dt, \\ dv(t) &= K(x(t), t)dt - \gamma v(t)dt + dB(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Siguiendo la metodología propuesta en el capítulo 4 el término estocástico es reemplazado por un término determinista.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= K(x(t), t) - \gamma y + z, \\ \dot{z} &= \alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z + \alpha_4(x), \\ \alpha_4 &= c_1 \text{Round}(x/c_2). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ahora para garantizar el comportamiento inestable se considera el operador lineal asociado al Jacobiano del sistema 5.2,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial K(x(t), t)}{\partial x} & -\gamma & 1 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix},$$

para el cual es necesario encontrar los valores de parámetros α tal que el sistema siga siendo UDS tipo I.

El primer caso que se puede considerar, por su simplicidad, es en el cual $K(x(t), t)$ es constante para el cual la solución y comportamiento del sistema no se ve afectado de forma significativa, esto se puede ver en el operador lineal A asociado ya que la derivada es cero y el operador lineal toma la misma forma que en el caso de una partícula libre.

Ahora consideremos el caso en el que $K(x(t), t)$ es lineal e independiente de t como ejemplo tenemos a S. Burov y E. Barkai [48], quienes describen la dinámica de una partícula armónica a través de la ecuación de Langevin fraccionaria considerando los casos: sobreamortiguado, subamortiguado y críticamente amortiguado. Consideremos entonces el oscilador armónico unidimensional con frecuencia angular ω la ecuación de Langevin en la teoría de Ornstein-Uhlenbeck queda de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - \gamma y + A_f(t).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Al igual que en la teoría del oscilador armónico, se distinguen 3 casos:

- Sobreamortiguado $\gamma > 2\omega$.
- Críticamente amortiguado $\gamma = 2\omega$.
- Subamortiguado $\gamma < 2\omega$.

Estos tres casos pueden observarse en la figura 5.1 para el caso de la ecuación diferencial estocástica (5.3).

Nuestra aproximación determinista queda definida de la forma:

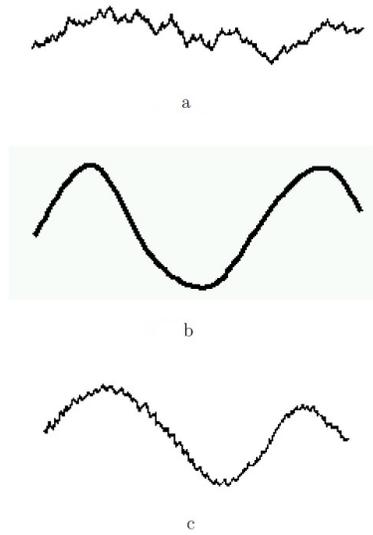


Figura 5.1: Movimiento Browniano bajo la influencia de un potencial armónico bajo los tres casos: Sobreamortiguado, críticamente amortiguado, subamortiguado respectivamente (imagen tomada de [2])

$$\begin{aligned}
 D^n x &= y, \\
 D^n y &= -\omega^2 x - \gamma y + z, \\
 D^n z &= -\alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z - \alpha_4(x), \\
 \alpha_4 &= c_1 \text{Round}(x/c_2),
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

donde $\alpha_{i=1,2,3}$, c_1 y c_2 son constantes.

5.2. Resultados numéricos para movimiento Browniano en un campo de fuerza armónico

Considerando los valores de parámetros definidos en el capítulo anterior las soluciones numéricas obtenidas para los tres casos se muestran en la figura 5.2 para el caso (a) sobreamortiguado, (b) críticamente amortiguado y (c) subamortiguado. En la cual se pueden observar las series de tiempo para la posición así como la solución del sistema en el espacio de estados, en estas imágenes se puede ver el comportamiento ruidoso característico del movimiento Browniano así como el comportamiento oscilatorio asociado al oscilador armónico.

Figura 5.3 muestra las propiedades estadísticas obtenidas para las series de tiempo del sistema (5.4). La figura 5.3 muestra las distribuciones de probabilidad de la partícula en relación con el movimiento Browniano tradicional, distribuciones de probabilidad Gaussianas de valor cero así como el crecimiento lineal en el tiempo del desplazamiento cuadrático medio predicho, para el caso (a) sobreamortiguado, (b) críticamente amortiguado, (c) subamortiguado, en las cuales se puede ver que las distribuciones de probabilidad obtenidas del movimiento generado por nuestro sistema tienen una buena aproximación Gaussiana.

Como se mencionó en el capítulo anterior, una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales es una característica esencial en el movimiento Browniano, y puede caracterizarse por un exponente de Lyapunov positivo. El movimiento Browniano como ruido no forma un atractor en el espacio de fase, es decir, son trayectorias no acotadas. Las trayectorias Brownianas como ruido tienden al infinito. En la figura 5.4 el máxi-

mo exponente de Lyapunov obtenido, de acuerdo con [47], del sistema propuesto se muestra para confirmar la divergencia de las trayectorias del movimiento Browniano.

Finalmente, la propiedad de correlación de las señales generadas por el sistema (5.4) se caracteriza por el análisis de fluctuación sin tendencia (DFA) que fue desarrollado por Peng [36]. Entonces al igual que en el caso de una partícula libre, la técnica de DFA nos ayuda a garantizar que el sistema propuesto genere movimiento Browniano, aplicamos el método de evaluación de DFA a las series de tiempo obtenidas con los valores de parámetros antes mencionados. El DFA es una herramienta importante para la detección de auto-correlaciones de largo alcance en series de tiempo no estacionarias. El DFA se basa en la teoría del camino aleatorio que consiste en un análisis de escala. En la figura 5.5 La ley de escalamiento con $\eta = 1.5401$ revelado por el DFA del sistema propuesto se muestra para confirmar el carácter Browniano de las series de tiempo.

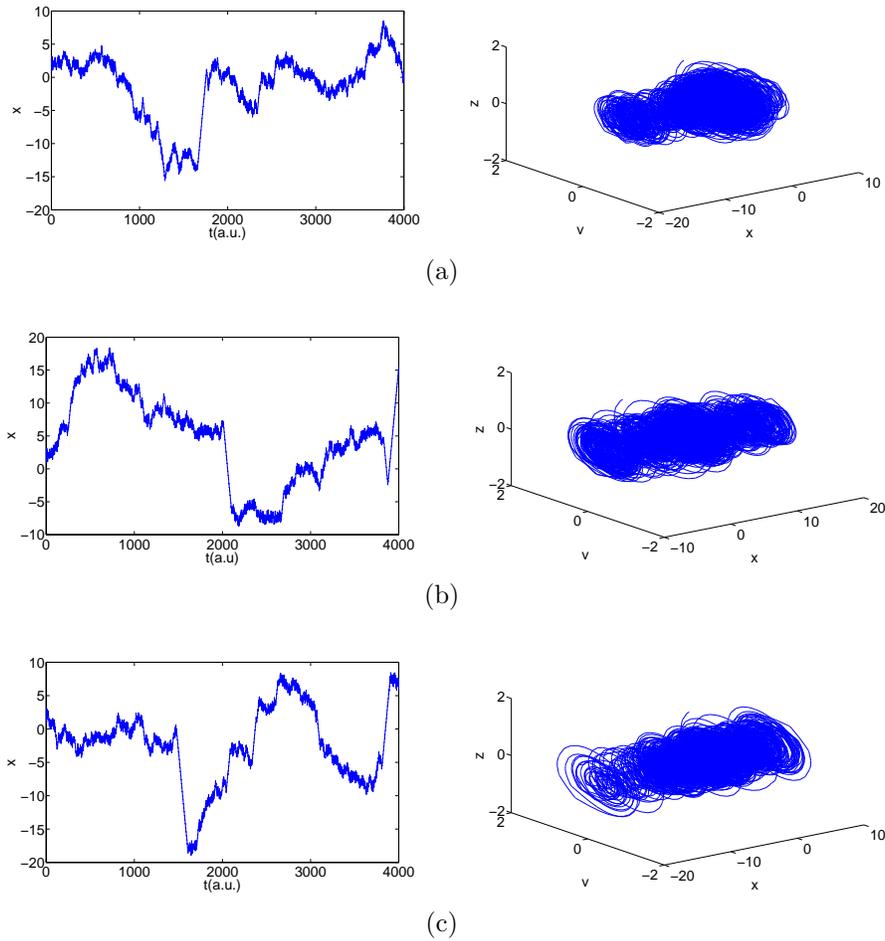


Figura 5.2: Serie de tiempo (U.A.) de la variable x de movimiento Browniano determinista obtenida con el modelo propuesto bajo un potencial armónico, dado por (5.4) con $\alpha = 0.95$ y la solución en el espacio de estados respectivamente, para los tres casos (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado (c) subamortiguado.

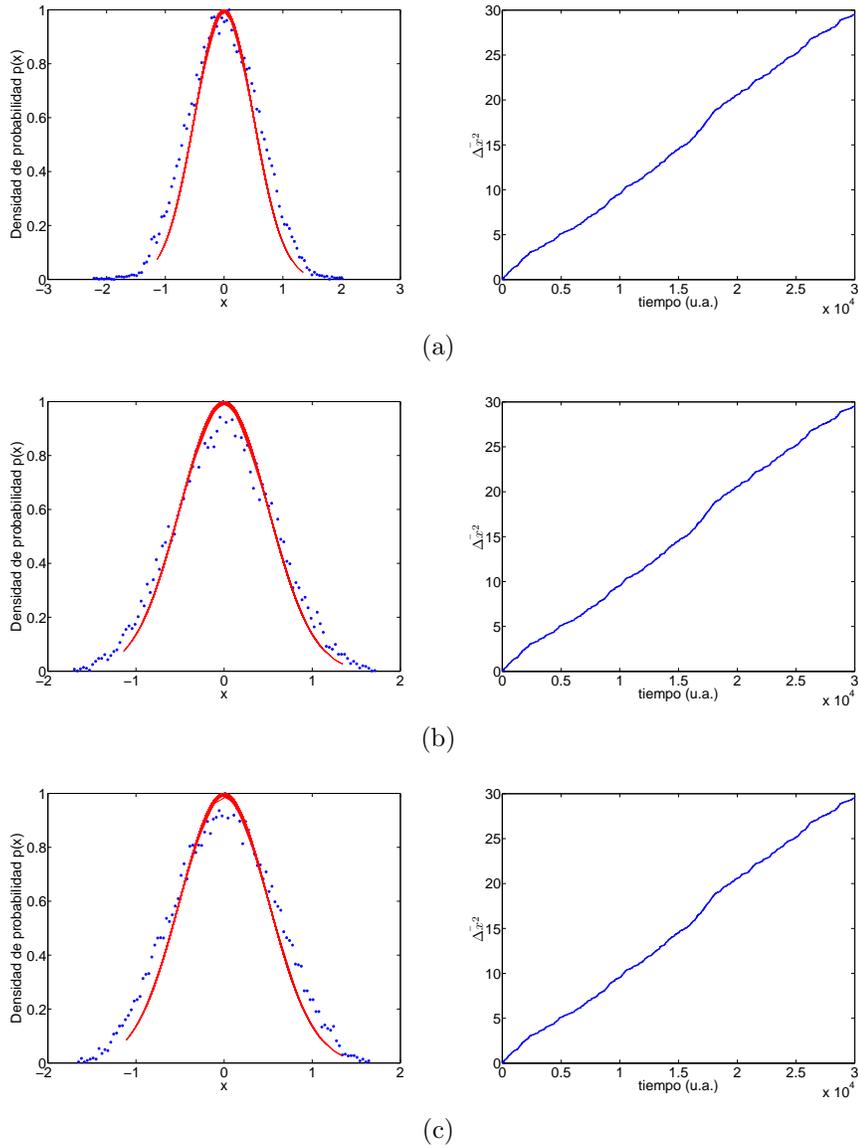


Figura 5.3: Propiedades estadísticas obtenidas del sistema (5.4). La densidad de probabilidad obtenida para el movimiento mostrado por medio de un histograma normalizado (línea azul punteada), comparada con una distribución Gaussiana teórica (línea roja punteada), y se muestra un crecimiento lineal para el desplazamiento cuadrado promedio respectivamente. Para los tres casos (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado (c) subamortiguado.

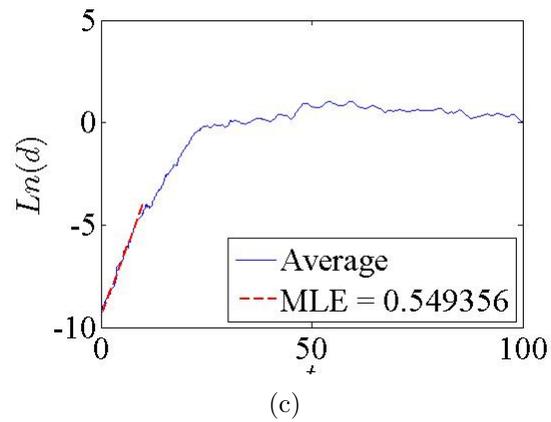
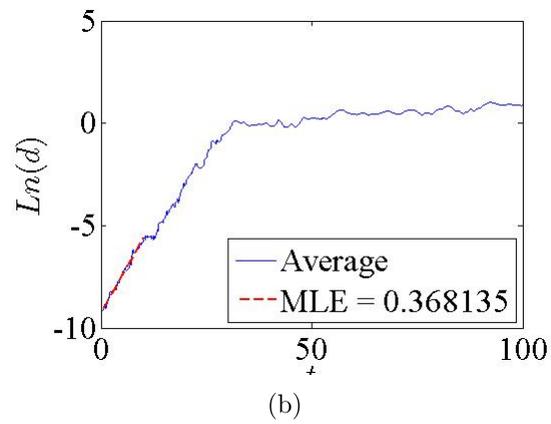
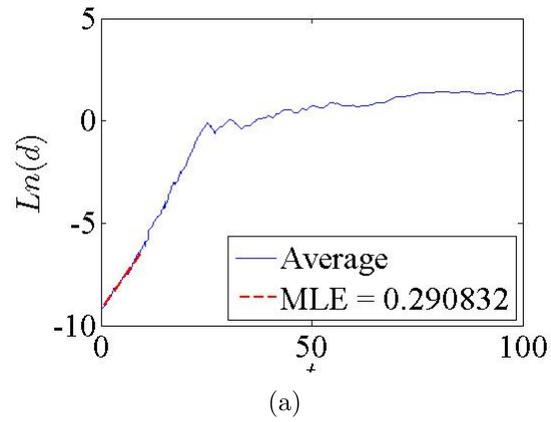
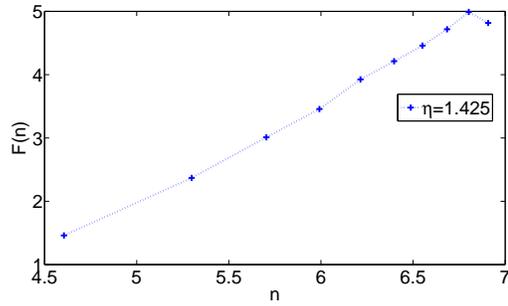
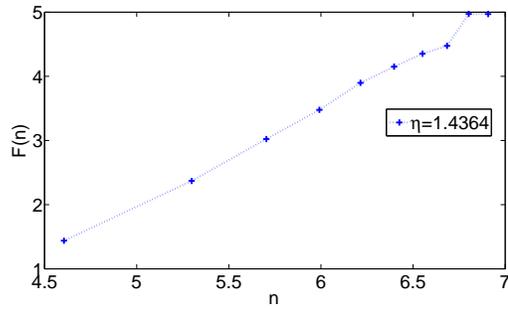


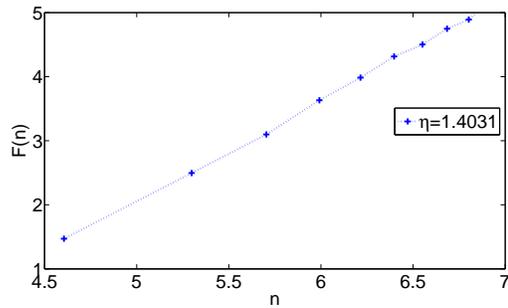
Figura 5.4: Máximo exponente de Lyapunov obtenido para el sistema propuesto (5.4) con $\alpha = 0.95$, para los tres casos (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado (c) subamortiguado.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.5: $\eta \approx 1.5$ obtenido por el DFA indica el comportamiento Browniano del movimiento observado para los tres casos (a) sobreamortiguado (b) críticamente amortiguado (c) subamortiguado.

Conclusiones

En este trabajo de tesis doctoral se abordó el problema de modelado del movimiento Browniano desde una perspectiva determinista. Del cual se obtuvo un modelo determinista que exhibe series de tiempo con propiedades del movimiento Browniano. A partir de la ecuación de Langevin, para la construcción del modelo se utilizaron sistemas lineales por partes basados en la teoría UDS y superficies de conmutación para emular los cambios de potenciales asociados a otras partículas del medio. Para este modelo se consideró la ecuación Jerk en lugar del proceso estocástico, este cambio en la ecuación de Langevin modifica al sistema añadiendo un grado de libertad extra obteniendo un sistema de tres dimensiones. Esta nueva variable definida por la ecuación Jerk tiene distribución de probabilidad Gaussiana la cual fue confirmada de forma numérica. Adicionalmente para el modelado se consideraron derivadas de orden fraccionario como herramienta para compensar incertidumbres asociadas al sistema y mejorar las propiedades estadísticas comparadas con las del sistema de orden entero. Siguiendo la metodología propuesta para la construcción del modelo dos casos fueron considerados; el caso de una partícula libre y el caso de una partícula bajo la influencia de un campo de fuerza externo.

El análisis estadístico aplicado a las series de tiempo obtenidas con el modelo

propuesto presentan las características típicas del movimiento Browniano, llamadas, crecimiento lineal para el desplazamiento cuadrado promedio, una distribución de probabilidad tipo Gaussiana para el desplazamiento, velocidad y aceleración. Además, el carácter Browniano de las series de tiempo obtenidas fue confirmado mediante el análisis de fluctuación sin tendencia así como la sensibilidad a las condiciones iniciales característica del ruido fue confirmada mediante el cálculo del máximo exponente de Lyapunov. Estos resultados muestran que las series obtenidas con el modelo propuesto cumplen las principales características del movimiento Browniano obtenido mediante un proceso estocástico. Basados en estos resultados los cuales fueron obtenidos usando sistemas inestables disipativos se presentó la teoría para la construcción de un modelo para movimiento Browniano bajo la influencia de un campo de fuerza externo. Particularmente se mostró para el caso de un potencial armónico así como en el caso de la partícula libre, se realizó el mismo análisis estadístico y aplicación de pruebas a las series de tiempo obtenidas, con los cuales se validó el carácter Browniano.

Por otro lado creemos que estos resultados pueden ser usados para la construcción de modelos de difusión anómala, así como para el desarrollo adecuado de modelos realistas basados en series de tiempo experimentales con la finalidad de caracterizar o imitar el comportamiento de movimiento Browniano en sistemas reales.

Apéndice A

Productividad

Publicaciones en revistas

- H. E. Gilardi-Velázquez, L. J. Ontañón-García D. G. Hurtado-Rodriguez and E. Campos-Cantón. Multistability in Piecewise Linear Systems versus Eigenspectra Variation and Round Function. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 27, No. 9 (2017) 1730031 (14 pages).
- A. Anzo-Hernández H. E. Gilardi-Velázquez and E. Campos-Cantón. On multistability behavior of Unstable Dissipative Systems. *Chaos* Vol. 28 No. 3, (2018) 033613.
- H. E. Gilardi-Velázquez and E. Campos-Cantón. Nonclassical point of view of the Brownian motion generation via fractional deterministic model. *International Journal of Modern Physics C* Vol. 29, No. 2 (2018) 1850020 (16 pages).

Congresos internacionales

- 2015 Mexican Workshop on chaos and nonlinear dynamics sponsored by IEEE-CAS, Poster: Generation of Brownian motion via deterministic models.
- Second Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems IFAC MICNON 2018, Artículo: Bistable behavior via switching dissipative systems with unstable dynamics and its electronic design (Aceptado).

Congresos nacionales

- LIX Congreso nacional de física Poster: Movimiento Browniano determinista en un campo de fuerza armónico
- XLVIII Congreso nacional de la sociedad matemática mexicana, Platica: Una descripción de la respuesta temporal de sistemas dinámicos de orden fraccional.
- LVII Congreso Nacional de Física 2014 Poster: MOVIMIENTO BROWNIANO ¿ESTOCÁSTICO O DETERMINISTA?

Difusión

- H. E. Gilardi-Velázquez y E. Campos-Cantón. ¿Es el movimiento Browniano un proceso estocástico o determinista? Bol. Soc. Mex. Fís. 29-2, 2015.

Bibliografía

- [1] R. Brown, A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Philosophical Magazine N. S.* **4**, 161-173, (1828).
- [2] G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein, On the theory of the Brownian motion, *Physical review*, **36(5)**, 823 (1930).
- [3] A. Einstein, Investigations on the theory of Brownian movement, edited with notes by R. Furth, translated by A. D. Cowper, Dover, *Dover publications inc*, (1956).
- [4] M. Smoluchowski, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. Mathematisch-naturwissenschaftliche classe, *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie. Classe des sciences math. et naturelles*, 202–213 (1906).
- [5] P. Langevin, On the Theory of Brownian Motion, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **146**, p. 530–533 (1908).

- [6] E. Nelson, *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton university press, (1967).
- [7] R. Metzler, & J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Physics reports*, **339(1)**, 1-77 (2000).
- [8] F. Amblard, A. C. Maggs, B. Yurke, A. N. Pargellis, & S. Leibler, Subdiffusion and anomalous local viscoelasticity in actin networks, *Physical review letters*, **77(21)**, 4470 (1996).
- [9] Q. Gu, E. A. Schiff, S. Grebner, F. Wang, & R. Schwarz, Non-Gaussian transport measurements and the Einstein relation in amorphous silicon, *Physical review letters*, **76(17)**, 3196 (1996).
- [10] F. Sciortino, & P. Tartaglia, Harmonic dynamics in supercooled liquids: the case of water, *Physical review letters*, **78(12)**, 2385 (1997).
- [11] R. Zwanzig, *Nonequilibrium statistical mechanics*, Oxford University Press, USA (2001).
- [12] S. C. Kou, & X. S. Xie, Generalized Langevin equation with fractional Gaussian noise: subdiffusion within a single protein molecule, *Physical review letters*, **93(18)**, 180603 (2004).
- [13] W. Min, G. Luo, B. J. Cherayil, S. C. Kou, & X. S. Xie, Observation of a power-law memory kernel for fluctuations within a single protein molecule, *Physical review letters*, **94(19)**, 198302 (2005).
- [14] A. D. Viñales, & M. A. Despósito, Anomalous diffusion: Exact solution of the generalized Langevin equation for harmonically bounded particle, *Physical Review E*, **73(1)**, 016111 (2006).

- [15] L. Van-Hove, Quantum-mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation, *Physica*, **21(1)**, 517 (1955).
- [16] I. Prigogine, Non-Equilibrium Statistical Mechanics, *Courier Dover Publications*, (2017).
- [17] P. Grigolini, A. Rocco, and B. J. West, Fractional Calculus as a Macroscopic Manifestation of Randomness, *Physical Review E*, **59(3)**, 2603 (1999).
- [18] G. Trefán, P. Grigolini, & B. J. West, Deterministic Brownian motion, *Physical Review A*, **45(2)**, 1249 (1992).
- [19] G. Huerta-Cuellar, E. Jiménez-López, E. Campos-Cantón, A.N. Pisarchik, An approach to generate deterministic Brownian motion, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **8**, 2740-2746 (2014).
- [20] E. Campos-Cantón, J. G. Barajas-Ramírez, G. Solis-Perales, & R. Femat, Multiscroll attractors by switching systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **20(1)**, 013116 (2010).
- [21] L. J. Ontañón-García, E. Jiménez-López, E. Campos-Cantón, & M. A. Basin, family of hyperchaotic multi-scroll attractors in \mathbb{R}^n , *Appl. Math. Comput.*, **233** (2014).
- [22] E. Campos-Cantón, R. Femat, & G. Chen, Attractors generated from switching unstable dissipative systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **22**, 033121 (2012).
- [23] R.A. Kosinski, A. Grabowski, Langevin equations for modeling evacuation processes, *Acta Phys. Pol. B* **3(2)**, 365–377 (2010).

- [24] K. Wodkiewicz, M.S. Zubairy, Exact solution of a nonlinear Langevin equation with applications to photoelectron counting and noise-induced instability, *J. Math. Phys.* **24(6)**, 1401–1404 (1983).
- [25] J.P. Bouchaud, R. Cont, A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes, *Eur. Phys. J. B* **6(4)**, 543–550 (1998).
- [26] E.J. Hinch, Application of the Langevin equation to fluid suspensions, *J. Fluid Mech.*, **72(3)**, 499–511 (1975).
- [27] A. Takahashi, *Basics of Deuteron-Cluster Dynamics by Langevin Equation*, Oxford University Press, (2009).
- [28] J. Schluttig, D. Alamanova, V. Helms, U.S. Schwarz, Dynamics of protein-protein encounter: A Langevin equation approach with reaction patches, *J. Chem. Phys.*, **129(15)**, (2008).
- [29] J.G.E.M. Fraaije, A.V. Zvelindovsky, G.J.A. Sevink, N.M. Maurits, Modulated Self-Organization in Complex Amphiphilic Systems, *Mol. Simul.* **25(3-4)**, 131–144 (2000).
- [30] W.T. Coffey, Y.P. Kalmykov and J.T. Waldron, The Langevin Equation: With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering, in *Chemistry and Electrical Engineering*, World Scientific Press, Singapore (2004).
- [31] V. Kobelev, E. Romanov, Fractional Langevin Equation to Describe Anomalous Diffusion, *Prog. Theor. Phys.* **2000(139)**, 470– 479 (2000).

- [32] F. Mainardi, F. Tampieri, Diffusion regimes in Brownian motion induced by the Basset history force, *Techn. Pap. No 1 (ISAO-TP-99/1), ISAO-CNR*, 25 (1999).
- [33] H. E. Gilardi-Velázquez, L. J. Ontañón-García D. G. Hurtado-Rodriguez & E. Campos-Cantón, Multistability in Piecewise Linear Systems versus Eigenspectra Variation and Round Function, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **27(9)**, 1730031 (2017).
- [34] A. Anzo-Hernández H. E. Gilardi-Velázquez & E. Campos-Cantón. On multistability behavior of Unstable Dissipative Systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **28(3)**, 033613 (2018).
- [35] H. E. Gilardi-Velázquez, & E. Campos-Cantón, Nonclassical point of view of the Brownian motion generation via fractional deterministic model, *International Journal of Modern Physics C* **29(3)**, 1850020 (2018).
- [36] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, & A. L. Goldberger, Mosaic organization of DNA nucleotides, *Physical review E*, **49(2)**, 1685 (1994).
- [37] P. Gaspard, M. E. Briggs, M. K. Francis, J. V. Sengers, R. W. Gammon, J. R. Dorfman, & R. V. Calabrese, Experimental evidence for microscopic chaos, *Nature*, **394(6696)**, 865 (1998).
- [38] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, Berlin (2010).
- [39] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, New York (1999).

- [40] C.A. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, *Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications*, Springer, London (2010).
- [41] I. Petras, *Fractional-Order Nonlinear Systems Modeling, Analysis and Simulation*, Higher Education Press and Springer, Beijing and Berlin (2011).
- [42] E. Zambrano-Serrano, E. Campos-Cantón, & J. M. Muñoz-Pacheco, Strange attractors generated by a fractional order switching system and its topological horseshoe, *Nonlinear Dynamics*, **83(3)**, 1629-1641 (2016).
- [43] K. Diethelm, F. Neville & A.D. Freed, A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations, *Nonlinear Dynamics*, **29**, 3–22 (2002)
- [44] N.J. Ford & J.A. Connolly, Comparing numerical methods for ordinary differential equations, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **5**, 289–307 (2006)
- [45] M.S. Tavazoei, M. Haeri, S. Bolouki & M. Siami, Stability preservation analysis for frequency-based methods in numerical simulation of fractional order systems, *SIAM J. Numer. Anal.* **47**, 321–328 (2008)
- [46] J. C. Sprott, Some simple chaotic jerk functions, *American Journal of Physics* **65(6)**, 537-543 (1997).
- [47] M. T. Rosenstein, J. J. Collins, & C. J. De Luca, A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **1-2**, 117-134 (1993).
- [48] S. Burov, & E. Barkai, Fractional Langevin equation: Overdamped, underdamped, and critical behaviors, *Physical Review E*, **78(3)**, 031112 (2008).