

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A. C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Regulación por fijación en redes de
modelos neuronales linealmente acoplados**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestra en Control y Sistemas Dinámicos

PRESENTA:

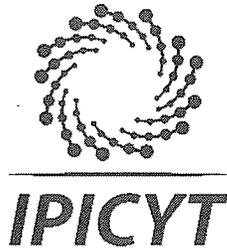
Liliana Ludivina Jiménez Zacarías

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P.

Julio de 2018



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Regulación por fijación en redes de modelos neuronales linealmente acoplados**” presentada para obtener el Grado de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Liliana Ludivina Jiménez Zacarías** y aprobada el **treinta y uno de julio del dos mil dieciocho** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



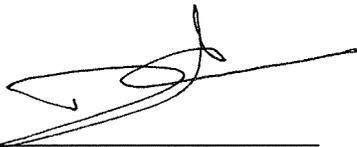
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Director de la tesis



Dr. Eric Campos Cantón
Jurado en el Examen



Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Jurado en el Examen



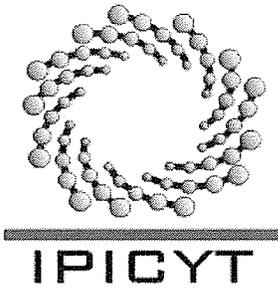
Dr. Diego Langarica Córdoba
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barrajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con el número 591454, así como apoyos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta Primero del Libro 029 de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 31 días del mes de julio del año 2018, se reunió a las 17:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Eric Campos Cantón	Presidente	IPICYT
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Secretario	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Sinodal	IPICYT
Dr. Diego Langarica Córdoba	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó la C.

Liliana Ludivina Jiménez Zacarías

sobre la Tesis intitulada:

Regulación por fijación en redes de modelos neuronales linealmente acoplados

que se desarrolló bajo la dirección de

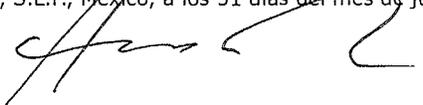
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

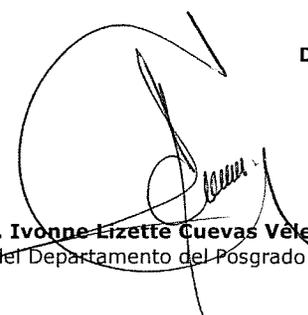
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 18:49 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 31 días del mes de julio de 2018.


Dr. Horacio Flores Zúñiga
Secretario Académico


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado



Dedicatoria

Al terminar esta tesis me di cuenta de que el trabajo que implicó realizarla no fue solo mío, sino que más bien, todo el trabajo en conjunto ha sido una colaboración siendo esta tesis el resultado del esfuerzo de muchas personas más, ya que gracias a la ayuda, paciencia, consejos y a toda la motivación que me brindaron día con día durante este trayecto de mi vida logré impulsarme a conseguir un grado más en mi carrera de tal forma que ahora el sueño que alguna vez tuve hoy en día se ha convertido en una realidad. Debido a esto, es que tengo que agradecer enormemente al apoyo de muchas personas. En primer lugar deseo agradecer el gran esfuerzo que ha hecho mi padre Macario Jiménez por mí, ya que gracias a él soy la persona de ahora. Le agradezco que desde pequeños nos haya enseñado el valor del trabajo, el sentido de la responsabilidad y el deseo de superación. Siempre he admirado querido Padre que te hayas portado a la altura cuando la desgracia se presentó en nuestras jóvenes vidas y más aún que hayas decidido cambiarlas y como consecuencia lograste salvarlas de todas las tempestades a las que estaban predestinadas si seguíamos creciendo en ese entorno. No sabes querido padre como admiro tu incansable lucha por la vida, tu bondad y tu valentía, eres y serás siempre la persona a la que le dedicare cada uno de mis triunfos. Madre tu has sido siempre mi principal motivación, el motor que me impulsa a hacer las cosas en esta vida, madre quiero que te sientas orgullosa de saber que la semilla que plantaste algún día está creciendo para bien. Estoy agradecida también por el apoyo que recibí de mi familia en

especial de mi hermano Juan Jesús quien siempre ha sido el consejero de mi vida, el cual también fue otro padre para mí, gracias hermano este logro es pequeño comparado con los que tú en tu corta vida haz realizado y espero y también te sientas orgulloso de ver como tu influencia y tus consejos han dado fruto. Quiero agradecer también a una de las personas que Dios me ha dado el privilegio de conocer, la cual además de ser un gran tesoro para mi, es el mejor compañero de viaje que esta vida me regalo, gracias a ti amor Luis Fraga por el apoyo incondicional que me has brindado durante todo este tiempo, muchas gracias por tu cariño y por ese corazón tan gigante que tienes que fue capaz de absorber toda la tristeza y la soledad que un día inundo mi vida. Doy gracias a Dios por tenerlos a ustedes y es ustedes a los que les dedico este trabajo con mucho amor. Quiero agradecer a otra de las personas que ha influenciado enormemente mi vida, aquella persona que no solo fue mi asesor, sino más bien fue mi guía, mi amigo y mi maestro el Dr. Juan Gonzalo Barajas por enseñarme a confiar en mí y por ayudarme a recorrer uno de los caminos más difíciles de mi carrera, gracias por todas sus palabras de aliento y los consejos que me dio los cuales recordare y siempre le estaré agradecida. A todos los amigos que hicieron que mi estancia en el Ipicyt fuera más placentera, en especial a Cristina mi amiga y casi hermana quien me llevo por primera vez a Ipicyt e hizo posible que conociera a una de las mejores personas que he conocido en toda mi vida la Dra. Imelda Bonifas, gracias Cris por todos tus consejos y regaños. También a mis compañeros de clase y amigos que hicieron que cada día en la institución me sintiera como en casa. Dios gracias por la oportunidad que me diste en Ipicyt, por ayudarme a lograr uno de mis sueños y por permitirme coincidir en la inmensidad del espacio y en la inmensidad del tiempo con cada una de las personas que arriba menciono. **Con cariño Liliana Jiménez.**

Agradecimientos

Quiero agradecer brevemente a todas aquellas personas e instituciones que contribuyeron en la realización de este trabajo. A IPICYT mi segunda casa, el cual me dio la oportunidad de realizar trabajo de investigación y además obtener el grado de maestría. A CONACYT por todo el apoyo económico que me brindo para que fuera posible realizar este trabajo de tesis. A mi asesor el Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez quien me brindo todo su apoyo, tiempo y conocimiento para iniciar en este mundo de las matemáticas. Quiero agradecer también a mis sinodales quienes se tomaron el tiempo para revisar este trabajo, además de darme sus apreciados comentarios.

Índice general

Resumen	XI
Abstract	XIII
Índice de Figuras	1
1. Introducción	2
1.1. Redes complejas	5
1.2. Modelo de red compleja	7
1.3. Modelo de red dinámica	11
1.4. Planteamiento del problema	16
2. Modelos neuronales: La neurona Hindmarsh-Rose	19
2.1. El modelo neuronal de Hodgkin y Huxley	22
2.2. El modelo neuronal de Hindmarsh y Rose	25
3. Red de neuronas idénticas con acoplamiento uniforme	33
3.1. Sincronización en redes dinámicas	35

3.1.1.	Ejemplo 1: Sincronización de una red uniforme de neuronas HR . . .	40
3.2.	Regulación por fijación en redes dinámicas	44
3.2.1.	Ejemplo 2. Regulación por fijación de una red de neuronas HR . . .	49
4.	Redes con pesos en las conexiones	55
4.1.	Sincronización en redes dinámicas con pesos en las conexiones	57
4.1.1.	Ejemplo 3: Sincronización de una red con pesos en las conexiones de neuronas HR	64
4.2.	Regulación por fijación en redes con pesos en las conexiones	67
4.2.1.	Ejemplo 4: Regulación por fijación en una red con pesos en las co- nexiones de neuronas HR	72
5.	Conclusiones	77

Resumen

En la vida real existen muchos sistemas complejos de diferente naturaleza ya sean biológicos, físicos, sociales o tecnológicos; los cuales pueden ser representados matemáticamente como grafos donde los nodos son sistemas dinámicos y los enlaces describen la forma en que interactúan para dar al sistema sus características y funcionalidad. A este modelo usualmente se le llama red dinámica compleja ya que se caracteriza por buscar capturar la complejidad estructural de las interacciones y la dinámica de los nodos que conforman al sistema original. Uno de los aspectos más interesantes del estudio de redes dinámicas complejas es determinar su comportamiento colectivo, es decir, establecer la forma en que la evolución dinámica de sus nodos genera un comportamiento auto organizado. Un fenómeno básico que se presenta en este tipo de sistemas es el surgimiento de comportamiento sincronizado, es decir, que los nodos de la red evolucionan coordinados en el tiempo. En general, este tipo de evolución dinámica al unísono no es necesariamente estable. En este caso, se pueden diseñar controladores para imponer un comportamiento deseado en la red. La naturaleza de las conexiones en la red permiten utilizar una metodología de diseño llamada control por fijación, en la cual una acción de control por retroalimentación local se aplica solo a un número muy reducido de nodos y se logra el objetivo de control en toda la red, ya sea este un estado estacionario o

seguir una referencia dada.

En este trabajo de tesis nos enfocamos en los problemas de sincronización y control por fijación cuando los nodos son funciones matemáticas de modelos neuronales, específicamente neuronas tipo Hindmarsh-Rose, los cuales describen matemáticamente una aproximación al comportamiento eléctrico de la neurona. En particular, reproducen los ciclos de disparos de picos característicos del comportamiento neuronal. Nuestro modelo de la red neuronal es una red compleja donde las neuronas están acopladas solamente en forma eléctrica. Para este modelo de la red neuronal establecemos condiciones para el surgimiento de sincronización idéntica cuando las conexiones son uniformes y también para el caso en que las conexiones tienen pesos. Así mismo, para ambos tipos de conexión proponemos controladores locales basados en la estrategia de control por fijación para imponer un comportamiento de punto de equilibrio estable en toda la red de neuronas.

Abstract

In real life there are many complex systems of different natures, they can be biological, physical, social or technological; which can be represented mathematically as graphs where the nodes are dynamical systems and the links describe the form in which they interact to give the system its characteristics and functionality. These models are usually called complex dynamical networks since they are characterized by the aim to capture the structural complexity of the interactions and the dynamics of the nodes that constitute the original complex system.

One of the most interesting aspects of the study of complex dynamical networks is determining its collective behavior, that is, establishing the way in which the nodes evolve dynamically to generate an autoorganized behavior. A basic phenomenon that is present in these type of systems is the emergence of synchronized behavior, that is, the nodes in the network evolve coordinated in time.

In general, this type of dynamical evolution at unison is not necessarily stable. In that case, controllers can be designed to impose the desired behavior on the network. The connected nature of the system allows us to use the pinning control strategy to design the controllers. Using this approach a local feedback control action can be applied only to a reduced number

of nodes to achieve the control objective for the entire network, the desired behavior can be a fixed point or a given time-varying reference.

In this thesis, we focus on the synchronization and pinning control problems when the nodes are neural models, specifically Hindmarsh-Rose type neurons, which describes mathematically an approximation to the electrical behavior of a neuron. In particular, it reproduces the spike bursting cycles that characterize the dynamics of a neuron. Our model of the neural network is a complex dynamical network which is only coupled electrically. For these model of the neural network, we establish conditions for the emergence of identical synchronization when the connections are uniform and also when the connections have weights. Also, for both types of connection, we propose local controllers based on the pinning strategy to impose a stable fixed point behavior to the entire network of neurons.

Índice de figuras

1.1. (a) Grafo no direccionado; (b) Dígrafo; (c) Dígrafo con pesos	3
1.2. Grafos regulares	5
2.1. Bosquejo de una neurona biológica	20
2.2. Esquema del flujo de corrientes iónicas a través de la membrana celular de la neurona.	20
2.3. a) Comportamiento del <i>potencial de acción</i> conocido como spike (picos); b) otro comportamiento del potencial de acción conocido como spike bursts (disparos de picos) ambos en la membrana [Fall <i>et al</i> (2002)].	21
2.4. a) Calamar <i>Lymnaea</i> ; b) muestra la forma en la que experimentalmente es excitado el axón de la neurona por medio de electrodos. [Fall <i>et al</i> (2002)].	22
2.5. Circuito eléctrico equivalente a la membrana neuronal.	24
2.6. Solución numérica del modelo de HR. (a)-(c) Los estados $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, respectivamente. (d) El espacio de estados del sistema HR.	26
2.7. Solución numérica del modelo de HR estabilizado a un punto de equilibrio por retroalimentación de estados.	31

2.8. Solución numérica del modelo de HR estabilizado a un punto de equilibrio por retroalimentación de salida. (a)-(c) Acción de control en los estados $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$; respectivamente.	32
3.1. Grafo del modelo de BA con $m_0 = m = 3$ y cincuenta nodos	41
3.2. Eigenvalores de la matriz Q de (4.12), que muestra que para $\bar{d} = -8$ y P la matriz identidad, Q es definida negativa para todo tiempo.	42
3.3. Estados de la red uniforme de neuronas tipo HR con $c = 10$ después de $t = 2000$	43
3.4. Error de sincronización de la red de neuronas tipo HR con $c = 10$ después de $t = 2000$	44
3.5. Estados de la red uniforme de neuronas tipo HR con $\kappa_7 = 40$ después de $t = 200$	52
3.6. Error de regulación por fijación de la red de neuronas tipo HR con $\kappa_7 = 40$ después de $t = 200$	53
4.1. Estados de la red con pesos cuyos nodos son neuronas de tipo HR.	66
4.2. Error de Sincronización de la red con pesos cuyos nodos son neuronas de tipo HR.	67
4.3. Grafo del modelo de BA con $m_0 = m = 5$ y veinticinco nodos	73
4.4. Estados de la red con pesos cuyos nodos son neuronas de tipo HR.	76
4.5. Error de regulación de la red con pesos cuyos nodos son neuronas de tipo HR.	76

Capítulo 1

Introducción

Todo en nuestro mundo esta entrelazado. Las ciudades están conectadas a través de carreteras, ferrocarriles y vuelos. Las páginas en la red informática mundial, conocida como WWW (World-Wide-Web), están enlazadas por hipervínculos; los componentes de un circuito eléctrico están conectados por medio de alambres; y las rutas a través de las cuales se propagan enfermedades están asociadas a nuestra red de contactos sociales.

Ingenieros, matemáticos y científicos analizan estos sistemas así como los problemas asociados con sus comportamientos colectivos. Para ellos una herramienta básica es la teoría de grafos. Matemáticamente un grafo, $G = (N, M)$, está definido por un par de conjuntos no vacíos, uno de nodos (N) y el otro de enlaces (M). Un ejemplo de grafo se muestra en la Figura 1.1 en el cual $N = \{1, 2, 3\}$. El conjunto de enlaces actúa sobre los nodos, es decir, cada enlace es un par ordenado que indica que nodos se conectan. El grafo que se muestra en la Figura 1.1(a), tiene como conjunto de enlaces $M = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ por lo tanto, es un grafo no dirigido o bidireccional. Un grafo dirigido o dígrafo, es aquel en que la

interacción entre nodos fluye en una dirección solamente, por ejemplo el grafo de la Figura 1.1(b) es un dígrafo, el cual tiene el mismo conjunto N que el grafo anterior, pero su conjunto de enlaces es $M = \{(1,3), (2,3)\}$, la flecha indica el flujo de información, es decir el enlace $(1,3)$ indica que la información fluye del nodo tres al nodo uno solamente. Adicionalmente, se puede asociar un peso a los enlaces de un grafo, esto indica la fuerza interacción entre dos nodos, un valor grande indica una interacción fuerte, mientras que un valor pequeño indica una interacción débil. Un grafo con peso se compone de tres elementos, $G_w = (N, M, W(M))$, donde N y M son los conjuntos de nodos y enlaces, respectivamente. La función $W : M \rightarrow \mathbf{R}^+$ asigna los pesos a cada enlace. Por ejemplo en la Figura 1.1(c) al enlace $(1,3)$ se le asigna un peso de $w_1 = 5$ y al enlace $(2,3)$ se le asigna un peso de $w_2 = 2$ [Chen *et al.* (2015)].

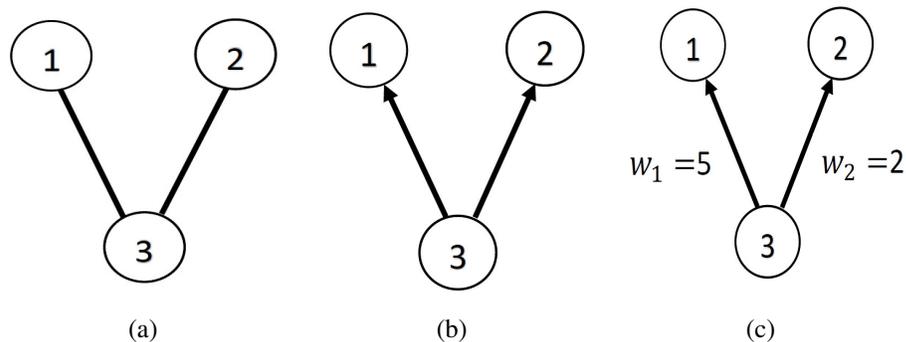


Figura 1.1: (a) Grafo no direccionado; (b) Dígrafo; (c) Dígrafo con pesos

Una forma de representar un grafo es mediante su matriz de adyacencia, A , la cual es una matriz cuadrada cuyos elementos son diferentes de cero si los nodos correspondientes a esa columna y renglón están conectados. Por ejemplo, las matrices de adyacencia de los grafos

en la Figura 1.1 son:

$$A_{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{(b)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Otra matriz asociada a un grafo que es de gran importancia es la matriz Laplaceana L , la cual se obtiene poniendo en la diagonal el negativo de la suma de los elementos del renglón correspondiente, en el caso de los grafos en la Figura 1.1 las matrices Laplaceanas son:

$$L_{(a)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad L_{(b)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad L_{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

En la literatura, algunas veces “red” se define de la misma manera que grafo, por ejemplo [Dorogovtsev y Mendes (2003)]. Sin embargo, en términos muy generales, una red es el modelo de cualquier sistema que admite una representación abstracta como un grafo, donde los nodos identifican elementos funcionales del sistema y el conjunto de enlaces representa la interacción entre esos elementos [Barrat *et al.* (2008)]. De modo que un modelo en red puede no solo usarse para representar sistemas simples, sino que también puede describir sistemas complejos. En [Boccaletti *et al.* (2006)] se define complejo como algo que está compuesto por un gran número de unidades o elementos que se relacionan en forma complicada. Así que básicamente, un sistema complejo es aquel que está compuesto por muchos elementos que

se relacionan de forma enmarañada. Representado este sistema con un grafo se captura su complejidad de conexiones. Por este motivo, al modelo que captura este tipo de complejidad comúnmente se le llama red compleja [Chen *et al.* (2015)].

1.1. Redes complejas

En [Barrat *et al.* (2008)] se enfatiza la diferencia entre una red simple y una red compleja, ya que se define a una red simple como una red de conexiones que forman un grafo regular (Figura 1.2).

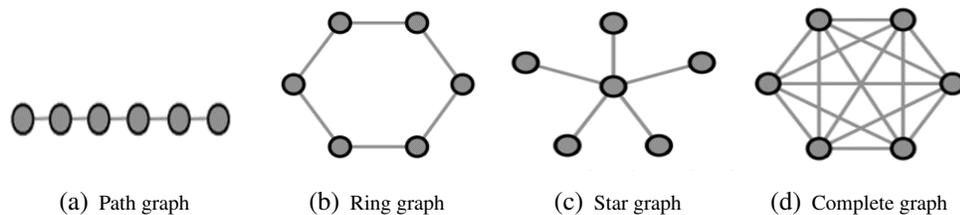


Figura 1.2: Grafos regulares

Por el contrario, una red compleja es una red que no satisface los requerimientos de una red simple, es decir, está conectada de manera irregular, con una estructura de conexión enmarañada. Puede inclusive incluir procesos de cambio en sus conexiones altamente no lineales, tales como el crecimiento e incluso considerar fenómenos en múltiples escalas espacio-temporales [Chen (2014)]. Steven Strogatz en el año 2001, propone que los modelos de sistemas complejos pueden incluir diferentes formas de complejidad para capturar de mejor manera la realidad que se está modelando. En particular, el modelo de red compleja puede enriquecerse incorporando alguna de las siguientes fuentes de complejidad [Strogatz (2001)]:

- *Complejidad estructural*: Incluir en el modelo mecanismos para describir lo complejo del diagrama de alambrado del sistema. Una forma de capturar esta forma de complejidad es construir un grafo de las conexiones del sistema, el cual puede ser muy intrincado o complejo.

- *Evolución estructural*: Incluir en el modelo procesos que permitan cambiar el diagrama de alambrado a través del tiempo. Una forma de hacer esto es considerando procesos de cambio como el crecimiento de la red u otros procesos de cambio en las conexiones [Barrat *et al.* (2008)].

- *Diversidad de conexión*: Considerar en el modelo que los enlaces entre los nodos pueden tener diferentes naturalezas. Una forma de incluir esta fuente de complejidad es considerar que el grafo de conexiones tienen pesos, direcciones y signos [Chen *et al.* (2015)].

- *Complejidad dinámica*: Incluir en el modelo reglas de evolución de los estados de la red. En particular, se puede considerar que solo los nodos tienen estados que cambian con el tiempo, por ejemplo, una red con un diagrama de conexiones fijo donde los nodos tienen estados que evolucionan según un conjunto de ecuaciones diferenciales o en diferencias, las cuales pueden ser no lineales con comportamiento complejo e inclusive caótico, a este tipo de redes usualmente se les llama redes complejas dinámicas [Chen (2014)].

- *Diversidad de nodos*: Incluir en el modelo del sistema complejo nodos de diferentes naturalezas. Por ejemplo, nodos descritos por distintos modelos dinámicos interconec-

tados por un grafo de conexiones fijo [Chen *et al.* (2015)].

- *Meta-complicación*: Considerar que diferentes fuentes de complejidad pueden influenciarse mutuamente, de modo que en el modelo del sistema complejo coexistan más de una de las complejidades mencionadas arriba.

Un ejemplo claro de una red con meta-complejidad es la red informática mundial WWW. Debido a que su alambrado es complejo, es decir tiene la fuente de complejidad estructural; las páginas web y los hipervínculos se crean y se destruyen muy frecuentemente, por lo tanto tiene evolución estructural; los hipervínculos no siempre son de ida y vuelta, de modo que las conexiones tienen dirección. Otro ejemplo que requiere considerar meta-complejidad en el modelado es la red neuronal, ya que además de tener un grafo de conexión complejo, los estados del comportamiento de cada neurona se puede describir con un sistema de ecuaciones diferenciales, además que los acoplamiento comúnmente deben considerar pesos, aún en las representaciones más simplistas del comportamiento de la sinapsis neuronal.

En este trabajo de tesis, se considera que al menos dos de las fuentes de complejidad están presentes en el modelo de la red. Por un lado, la estructura de conexión es compleja, adicionalmente consideraremos que los nodos serán sistema dinámicos y las conexiones tendrán diferentes pesos.

1.2. Modelo de red compleja

Para caracterizar la complejidad de un grafo de conexión usualmente se utilizan tres aspectos estructurales básicos, los cuales son invariantes ante deformaciones de las conexiones

que no cambien que nodos están conectados en la red, estos son [Chen *et al.* (2015)]:

- *Longitud de camino promedio (L)*, es el promedio de la distancia más pequeña medida en enlaces entre cualquier par de nodos en la red.
- *Coficiente promedio de agrupamiento (C)*, es el promedio sobre todos los nodos de la red del coeficiente de agrupamiento de nodo, esta medida de transitividad, se obtiene dividiendo el número de los vecinos del nodo i con sus vecinos entre sí, entre el número máximo de enlaces que puede haber entre ellos.
- *Distribución del grado de nodo ($P(k)$)*, es la función de densidad que describe la probabilidad de que un nodo elegido uniformemente al azar tenga un grado de nodo exactamente igual a k .

En términos generales, las redes complejas del mundo real se caracterizan por presentar los fenómenos estructurales de *mundo pequeño*, *escala libre* y *alto agrupamiento con escasas conexiones*. Los cuales se explican brevemente a continuación:

El fenómeno de *mundo pequeño* se relaciona con la medición de distancias en la red. Se presenta cuando L es muy pequeña comparada con el número de nodos en la red. Se asume que si L es proporcional al logaritmo del número de nodos en la red, se tiene el efecto estructural de *mundo pequeño* [Dorogovtsev y Mendes (2003)].

El fenómeno de *escala libre* se relaciona con la distribución de grado de nodo, se refiere a que una vez que se generan nodos que concentran las conexiones, llamados hubs, la proporción de hubs a nodos con pocas conexiones se mantiene a pesar del tamaño de la red, es decir, esta propiedad es libre de escala. Una característica de las redes con el fenómeno

estructural de *escala libre* es que tiene una distribución de grado de nodo similar a una ley de potencias [Barrat *et al.* (2008)].

El efecto estructural de *alto grado de agrupación con escasas conexiones*, se presenta ya que en general las redes complejas se organizan en grupos relativamente densos con algunas conexiones entre grupos, a estas se les llama puentes débiles, entonces, el grado de agrupamiento puede ser relativamente alto aunque solo se tengan unas cuantas conexiones [Chen *et al.* (2015)].

Aunque el estudio de grafos se puede decir que comenzó en el siglo XVI con los trabajos de Euler sobre los puentes de Königsberg. El proponer modelos que capturen los efectos estructurales asociados con redes del mundo real tomo varios siglos. Uno de los primeros modelos que exitosamente capturó algunas de las propiedades descritas arriba fue el grafo aleatorio propuesto y analizado por Erdős y Rényi (ER) en la década de 1960. El modelo consiste de dos pasos [Erdős y Rényi (1959)]:

1. Se comienza con N nodos sin conexiones.
2. Para cada par de nodos como un proceso estocástico de probabilidad uniforme p se determina si se coloca un enlace para ese par. Esto se repite hasta que todos los pares han sido considerados.

El grafo resultante es la realización del modelo de grafo aleatorio ER, la cual tiene una probabilidad crítica p^* relativamente baja a partir de la cual con probabilidad casi uno captura el fenómeno de mundo pequeño. Sin embargo, el coeficiente de agrupamiento es casi cero, aproximadamente p^* . Adicionalmente, su distribución de grado de nodo se asemeja a la

distribución de Poisson [Chen *et al.* (2015)].

Décadas más tarde, en el año de 1998, buscando capturar adicionalmente el alto grado de agrupamiento con escasas conexiones observado en redes del mundo real, Duncan J. Watts y Steven H. Strogatz (WS) propusieron un modelo de red que combina un grafo regular con uno aleatorio de la siguiente manera:

1. Regular. Comenzando con una red en forma de anillo con N nodos, donde cada nodo está conectado a $2K$ de sus vecinos inmediatos, con $K > 0$ un entero usualmente pequeño.
2. Aleatorio. Para cada enlace de la red anillo se realambra con una probabilidad uniforme p_r . El proceso de realambra consiste en desconectar el enlace y reconectarlo a otro nodo escogido al azar evitando auto-bucles y múltiples enlaces entre nodos.

Para valores adecuados de p_r la red resultante tiene el efecto de mundo pequeño y preserva un coeficiente de agrupamiento relativamente alto. Mientras que la distribución de grado de nodo, sigue siendo muy similar a la de Poisson. Al modelo de WS usualmente se le llama el modelo de red mundo pequeño [Chen *et al.* (2015)].

En un intento por capturar la distribución de grado de nodo observado en redes del mundo real. Barabási y Albert (BA) en 1999 propusieron un modelo de red que genera la realización del grafo de la siguiente manera [Barabási y Albert (1999)]:

1. Crecimiento. Comenzando con un número pequeño (m_0) de nodos, en cada paso de tiempo, un nuevo nodo es añadido a la red y se conecta a $m \leq m_0$ de los nodos existentes en la red.

2. Acoplamiento preferencial. Los nodos a los que se va a enlazar el nuevo nodo se escogen con una probabilidad que depende de su grado de nodo (k_i), es decir, la probabilidad $\Pi(i)$ de que el nuevo nodo se conecte al i -ésimo nodo está dada por:

$$\Pi(i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (1.1)$$

La red resultante después de t pasos tiene $N = t + m_0$ nodos y mt enlaces. En particular, se caracteriza por una distribución de grado de nodo con la forma de una ley de potencias $P(k) \propto k^{-3}$. Estas redes son no homogéneas, es decir, muchos nodos en la red tienen pocas conexiones mientras que pocos nodos concentran un gran número de enlaces, a estos nodos se les llama “hubs” (o nodos concentradores). Las redes construidas a través del modelo BA son llamadas redes de escala libre pues capturan un fenómeno presente en muchas redes de la vida real, el fenómeno de que “*El rico se hace más rico, y los pobres siguen pobres y son más*” independientemente del tamaño de la red. En este trabajo de investigación utilizaremos el modelo de red BA para incorporar la complejidad estructural en nuestra red de neuronas.

1.3. Modelo de red dinámica

En nuestro modelo de red compleja consideraremos que la complejidad dinámica es producida por modelos neuronales del tipo Hindmarsh-Rose (HR), los cuales exhiben dos comportamientos: uno llamado “picos” (spiking, en Inglés) que ocurre cuando la actividad eléctrica de la neurona alterna en una escala de tiempo rápida y uno llamado “dispa-

ros” (bursting) que es cuando la actividad se prende y apaga en una escala de tiempo lenta.

El comportamiento periódico característico de las neurona HR es llamado spike-busting, o

“disparos de picos” [Belykh *et al.* (2005)].

El modelo neuronal HR es una versión simplificada de las ecuaciones propuestas por Hodgkin y Huxley (HH) para modelar el comportamiento eléctrico de la neurona de axón gigante del calamar [Hodgkin y Huxley (1952)]. Cabe remarcar que el modelo HH describe el potencial de la membrana en forma fisiológicamente fundamentada y es el resultado de una serie de experimentos. Como el modelo HH es bastante complejo matemáticamente, se propuso una aproximación, llamada el modelo de HR con el objetivo principal de capturar los comportamientos de disparos de picos característicos de las neuronas reales. Por lo tanto, este modelo carece de interpretación fisiológica de sus parámetros tales como la dependencia del potencial de la membrana en la distancia espacial entre soma y axón, entre otros aspectos que pueden ser modelados del comportamiento de una neurona real. Sin embargo, capturan muchas de las propiedades inherentes de la neurona, incluyendo el comportamiento de pico en ambos regímenes tren de picos y disparos periódicos, así como su dependencia en la estimulación externa [Hindmarsh y Rose (1984)].

El sistema de ecuaciones que describe el modelo neuronal HR es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax(t)^3 + bx(t)^2 + I + y(t) - z(t) \\ e - dx(t)^2 - y(t) \\ \epsilon(s(x(t) + x_0) - z(t)) \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Donde las variables $x(t)$, $y(t)$, y $z(t)$ representan el potencial de la membrana, la variable de recuperada y la variable de adaptación, respectivamente. La corriente de estimulación externa esta denotada por la letra I y la constante $\varepsilon \ll 1$ representa el cambio de escala de tiempo entre la componente rápida ($x(t), y(t)$) y la lenta ($z(t)$). La dinámica del modelo (1.2) se analiza con mayor detalle en el siguiente capítulo.

En esta tesis utilizamos una red dinámica compleja para modelar una red neuronal real. Con este modelo buscamos capturar aspectos de su complejidad dinámica y estructural. Los nodos de la red son modelos neuronales de tipo HR (1.2), los cuales exhiben un comportamiento llamado *disparos de picos*. Para capturar la complejidad estructural de la red además de considerar conexiones generadas por un modelo de red compleja de tipo mundo pequeño o escala libre, se considerará el caso en que las conexiones tienen pesos. Partiendo de este punto, buscamos determinar las condiciones para el surgimiento de dos fenómenos de comportamiento colectivo, la sincronización y la regulación por fijación [Chen (2014)]:

Sincronización. Consideramos que este es un fenómeno colectivo se presenta cuando dos o más sistemas tienen comportamientos dinámicos coordinados en el tiempo, por ejemplo pueden evolucionar al unísono, lo cual es llamado sincronización idéntica [Wang y Chen (2002)]. En el caso de una red dinámica se dice que logra (asintóticamente) la sincronización idéntica si los estados de todos los nodos de la red tienden a una misma solución conforme el tiempo tiende a infinito.

Regulación por fijación. También llamada *control pinning*, es un fenómeno fuertemente relacionado con la sincronización en redes, en el cual se impone un comportamiento de punto de equilibrio estable en toda la red aplicando inyecciones de retroalimentación local lineal

solo a una pequeña fracción $\delta \ll N$ de nodos en la red [Wang y Chen (2002a)].

El control por fijación es un fenómeno colectivo común en redes de la vida real, puede observarse en los grupos sociales, por ejemplo en la dinámica de formación de opiniones, donde el resultado puede ser conducido por una pequeña porción de individuos claves, que son denominados líderes de opinión, los cuales son responsables de que el punto de vista de miles de agentes en la red sea homogéneo. Debido a las acciones de control, dentro de la misma red coexisten dos tipos de nodos: no-controlados (seguidores) y controlados (líderes). En particular, éstos últimos desempeñan el papel de agentes fijados dentro de toda la red, forzando las trayectorias de los nodos no controlados a dirigirse hacia el objetivo de control a través del efecto que tienen sobre ellos a través de la red, en otras palabras, mediante un *control virtual* [Li (2005)].

Diferentes trabajos en la literatura han investigado la dinámica de redes de neuronas. En [Steuer (2007)] la realización y sincronización de modelos HR en arreglos pequeños de hasta cinco neuronas fue investigada identificando comportamientos de sincronización parcial y completa. En [Kim y Allgower (2010)] se investigó un esquema de acoplamiento no lineal de neuronas HR desde una perspectiva de teoría de control lo que permitió establecer la estabilidad asintótica del comportamiento sincronizado. [Hrg (2013)] investigó la dinámica de dos modelos HR bajo acoplamiento unidireccional logrando identificar diferentes condiciones de estabilidad global y comportamiento sincronizado exponencialmente rápido. La sincronización en redes de neuronas difusivamente acopladas fue investigada en [Steuer *et al.* (2009), Steuer (2011)] mediante un análisis de semipasividad se mostró que con un acoplamiento suficientemente fuerte el comportamiento sincronizado surge en forma estable. En [Belykh *et*

al. (2005a,b)] se mostró que mediante los resultados de teoría de grafos se puede determinar la estabilidad del comportamiento sincronizado en redes de osciladores, usando a las neuronas HR como un ejemplo. En [Mamat *et al.* (2013)] se investigó el efecto de retardo en la sincronización de los modelos neuronales HR y se establecieron condiciones para lograr la sincronización en términos del número de miembros de la red que reciben información, resaltando que la sincronización puede ocurrir de forma diferente para el subsistema en la escala de tiempo rápida que para el subsistema de escala lenta. En [Solís-Perales y Zapata (2013)] se investigó la sincronización en redes de modelos neuronales HR con acoplamientos negativos. El caso de redes con evolución estructural se investigó en [Solís-Perales *et al.* (2016)]. Tomando estos resultados como base en [Solís-Perales y Barajas-Ramírez (2017)] se investigó la activación de redes de neuronas HR. Mientras que en [Djeundam *et al.* (2016)] se analizó la dinámica de redes de neuronas HR con acoplamiento tipo Kuramoto así como la sensibilidad del comportamiento sincronizado a cambios en el factor de desorden de la red.

Respecto del control por fijación recientemente se han publicado algunos tutoriales del tema, resaltando [Chen (2014), Chen *et al.* (2015)], así como el libro [Su y Wang (2013)]. En particular, respecto de redes de neuronas HR se puede mencionar [Zhou *et al.* (2008)] donde se investigó la sincronización por fijación en redes de neuronas HR. Cabe mencionar que en la literatura hay muchos trabajos enfocados en sincronización de redes de neuronas HR, pero muy pocos enfocados en la regulación de este tipo de redes, debido esto el trabajo de investigación de esta tesis se enfoca en el problema de regulación en redes de neuronas HR con acoplamientos uniformes y con pesos.

1.4. Planteamiento del problema

En este trabajo de investigación utilizamos la siguiente ecuación de estados para describir una red de nodos dinámicos idénticos conectados de manera lineal y bidireccional:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{i=1, j \neq i}^N l_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

Donde $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}] \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado del nodo i ; $f(x_i)$ es una función que describe la dinámica de cada nodo dentro de la red; c es la fuerza de acoplamiento y se considera uniforme para toda la red; $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de acoplamiento interno, compuesta por ceros y unos que describe cuales elementos de las variables de estado de los nodos conectados se acoplan entre sí. La matriz de acoplamiento externo $L = \{l_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ indica la manera en que los nodos están conectados. Una forma directa de incluir complejidad estructural en este modelo es considerar que la matriz L describe un grafo generado con un modelo de red compleja, tales como el grafo aleatorio de ER, una red de mundo pequeño o una red de escala libre [Chen *et al.* (2015)]. Adicionalmente, suponemos que la conexión de la red es difusiva esto significa que la suma de L por renglones es nula y debido a que es simétrica también lo es por columnas. Los elementos de la diagonal de L son de la forma:

$$l_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N l_{ij} \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

Siendo L la matriz Laplaceana de la red. Si utilizando las equivalencias anteriores, la

ecuación (1.3) se puede escribir como

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t), \text{ para } i = 1, \dots, N. \quad (1.5)$$

El problema de sincronización idéntica consiste en determinar bajo qué condiciones los estados de todos los nodos de (1.5) evolucionan asintóticamente a una solución común [Chen *et al.* (2015)].

Para resolver el problema de regulación por fijación, primero suponga que para una porción δ ($0 < \delta \ll N$) de nodos, se incluye una ley de control por retroalimentación de estados local

$$\mu_i(t) = -c\kappa_i \Gamma(x_i(t) - \bar{x}). \quad (1.6)$$

Con \bar{x} un punto de equilibrio común a todos los nodos de la red y $\kappa > 0$ la ganancia de control para el nodo i . Sin pérdida de generalidad, podemos reordenar los índices de (1.5) para que los nodos controlados sean los primeros δ . Entonces, la red dinámica compleja controlada tendrá dos partes en su ecuación de estados:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t) + \mu_i(t), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1.7)$$

El diseño de $\mu_i(t)$ que resuelve el problema de regulación por fijación tiene dos aspectos adicionales a considerar. Por un lado, decidir cuantos nodos deben ser fijados y por el otro,

cuáles de los nodos en la red se deben controlar. En este sentido, consideremos dos estrategias básicas para elegir los nodos controlados. En la primera se toman nodos en forma aleatoria, alternativamente se fijan los nodos según su grado de nodo. De acuerdo con los resultados de [Wang y Chen (2002a)] en general para una red escala libre la segunda estrategia es más efectiva logrando el objetivo de control con un número menor de nodos fijados.

El objetivo general de la tesis es determinar condiciones bajo las cuales una red de neuronas HR logran la sincronización idéntica cuando la conexión es uniforme y también para conexiones con pesos. Adicionalmente, se propone un diseño de control basado en la estrategia de regulación por fijación en la cual se controla solo un número muy reducido de los nodos de la red y se logra estabilizar la red completa a un punto de equilibrio homogéneo para redes con ambos tipos de conexiones.

El documento de tesis se divide en cinco capítulos. En el siguiente capítulo se presentan los aspectos básicos del modelado de neuronas y se discute a detalle el modelo HR. En el tercer capítulo se presentan las soluciones de los problemas de sincronización y regulación por fijación para el caso de redes de neuronas HR interconectadas eléctricamente de manera uniforme, bidireccional y difusiva. Mientras que en el cuarto capítulo extendemos estos resultados para el caso de redes neuronales con pesos en las conexiones. La tesis concluye con algunos comentarios finales y el planteamiento de trabajo futuro en el quinto capítulo.

Capítulo 2

Modelos neuronales: La neurona

Hindmarsh-Rose

En este capítulo introducimos varias nociones elementales de neurociencias, ya que en esta tesis nos enfocaremos en redes cuyos nodos son modelos neuronales y su comportamiento, cuando son acopladas en redes.

Los modelos neuronales son el resultado de una gran labor experimental y teórica por parte de la comunidad científica. Estos modelos, ayudan a predecir el comportamiento eléctrico de una neurona biológica para estudiar la forma en que estas procesan información. Una neurona biológica, es una célula de la forma mostrada en la Figura 2.1, que se comunica a través de señales electroquímicas mediante sus dendritas, las cuales se conectan al axón de la siguiente neurona mediante sinapsis y se encargan de transmitir señales de una neurona a la siguiente [Aizenberg (2011)].

Las neuronas cuando son excitadas por estímulos externos, muestran un comportamien-

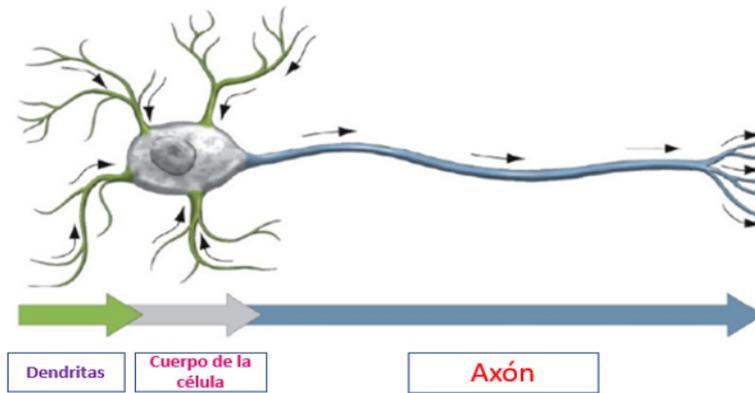


Figura 2.1: Bosquejo de una neurona biológica

to eléctrico clásico llamado *potencial de acción*, el cual es generado por el flujo de iones (átomos cargados eléctricamente) a través de los canales iónicos de la membrana celular, esto se muestra en la Figura 2.2. A este flujo también se le conoce como corriente iónica y está compuesta principalmente por la corriente debida al sodio (I_{Na^+}) y al potasio (I_{K^+}). Adicionalmente se considera una pequeña corriente de fuga (I_l) compuesta por el Cloro (Cl^-) y otros iones.

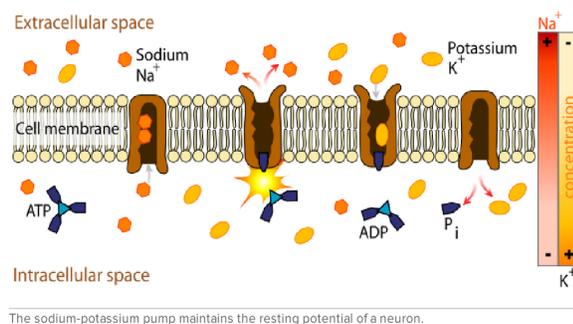


Figura 2.2: Esquema del flujo de corrientes iónicas a través de la membrana celular de la neurona.

Matemáticamente el *potencial de acción*, puede ser descrito por la diferencia de poten-

ciales adentro y afuera de la neurona (2.1), y esquemáticamente tiene la forma mostrada en la Figura 2.3.

$$V = V_{In} - V_{ext} \quad (2.1)$$

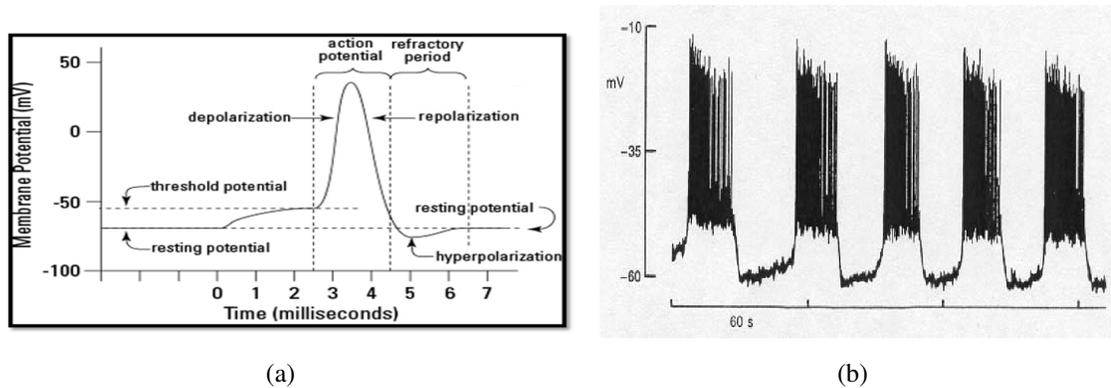


Figura 2.3: a) Comportamiento del *potencial de acción* conocido como spike (picos); b) otro comportamiento del potencial de acción conocido como spike bursts (disparos de picos) ambos en la membrana [Fall *et al* (2002)].

El pico o pulso mostrado en la Figura 2.3 a) es conocido como spike y es generado cuando una pequeña corriente positiva es aplicada a través de un electrodo externo, la cual se propaga como un pulso que viaja a través de axón en la membrana. Si el estímulo es suficientemente grande, la neurona crea un tren de pulsos. Por otro lado, se tiene el spike burst (Figura 2.3 b)). El comportamiento de disparos de picos se forma debido que alternan una escala de tiempo lento y una de tiempo rápido en la descripción del sistema. La escala de tiempo lento se caracteriza por la desactivación de la neurona cuando su umbral de excitabilidad muestra un estado de reposo, mientras que en la escala de tiempo rápida se generan rápidos y repetitivos picos y de esta manera ambas escalas de tiempo crean el disparo. Durante estos comportamientos las compuertas de los canales iónicos se abren y se cierran permitiendo

que el interior y el exterior de la membrana se carguen positiva y negativamente [Belykh *et al.* (2005)].

2.1. El modelo neuronal de Hodgkin y Huxley

El modelo Hodgkin-Huxley (HH) [Hodgkin y Huxley (1952)], es el resultado de una serie de experimentos en el axón gigante del calamar (Figura 2.4).

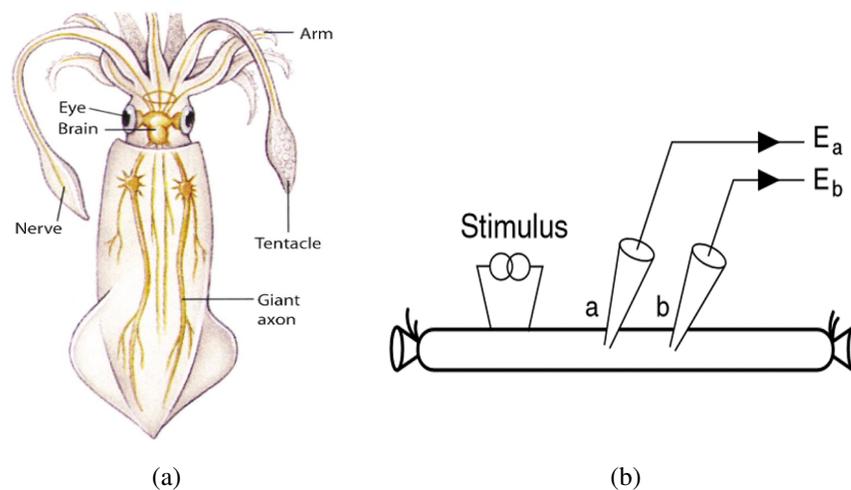


Figura 2.4: a) Calamar *Lymnaea*; b) muestra la forma en la que experimentalmente es excitado el axón de la neurona por medio de electrodos. [Fall *et al* (2002)].

Mediante ecuaciones diferenciales modelaron el flujo de corrientes iónicas que pasan a través de la membrana celular del calamar. En neurociencias este modelo (2.2), ha sido ampliamente utilizando para estudiar la dinámica del *potencial de acción* en la membrana de una neurona. Matemáticamente, el modelo de HH está compuesto por cuatro ecuaciones diferenciales, donde tres de estas describen tres tipos diferentes de canales iónicos (n, m, h):

$$\begin{bmatrix} C\dot{V} \\ \dot{n} \\ \dot{m} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{Na}m^3h(V - V_{Na}) - g_Kn^4(V - V_K) - g_l(V - V_l) + I \\ \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\ \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

En este sistema de ecuaciones diferenciales, V representa el potencial en la membrana, $I \in \mathbb{R}$ representa la estimulación externa, g_{Na} , g_K y $g_L \in \mathbb{R}^+$, y las funciones están dadas por $\alpha_n(V) = \frac{0.01(-50-V)}{e^{(-0.1(50+V)-1)}}$, $\beta_n = 0.125e^{\frac{-(60+V)}{80}}$, $\alpha_m(V) = \frac{-0.1(35+V)}{e^{-0.1(35+V)-1}}$, $\beta_m(V) = 4e^{\frac{-(60+V)}{18}}$, $\alpha_h(V) = 0.07e^{\frac{(-60-V)}{20}}$ y $\beta_h(V) = \frac{1}{e^{\frac{(-30+V)}{10}}} + 1$.

En el modelo (2.2), la primera ecuación obedece las leyes de Kirchhoff ya que nos indica que la sumatoria de las corrientes iónicas dadas por el Na (sodio), K (potasio), y por otras corrientes denotadas por l cuyo componente principal es el Cl (cloro), puede ser vista como la corriente iónica total denotada como I , donde además las corrientes iónicas en este modelo están representadas de acuerdo a la ley de Ohm, en relación a la facilidad y no a la resistencia con que fluyen las corrientes a través de los canales iónicos de la membrana, es decir que estas corrientes están relacionadas por la conductancia g definida como el inverso de la resistencia, de manera que estas corrientes están descritas por la siguiente ecuación $I_{Na,K,l} = gV$ siendo V como (2.2). La segunda ecuación del modelo de HH, modela la dinámica de activación del Potasio n a través de los canales iónicos cuando las compuertas están abiertas, esto puede verse en las Figuras 2.3 y 2.2. Las constantes α_n y β_n indican el estado de transición permisivos y no permisivos de las compuertas y cambian dependiendo del voltaje en la membrana V , durante la experimentación para el desarrollo de este modelo (2.2) Hudking

y Huxley observaron que la dinámica de la conductancia del sodio en los canales iónicos era compleja, y está no podía ser descrita por una sola ecuación, por lo que decidieron que era necesario separar la dinámica de activación y desactivación del flujo del sodio a través de los canales iónicos dado por m y h respectivamente, siendo modelado el comportamiento a través de las últimas dos ecuaciones de este (2.2), donde de la misma manera, α_m , α_h y β_m , β_h representan la transición de los estados permisivos y no permisivos de las compuertas respectivamente, esto puede observarse en la Figura 2.2.

El modelo de HH captura básicamente la esencia del comportamiento eléctrico de la membrana dado por el acción de potencial en la neurona, debido a esto es posible describirlo a través de un circuito eléctrico cuyo comportamiento es semejante al modelo de HH, el cual puede verse en la Figura 2.5.

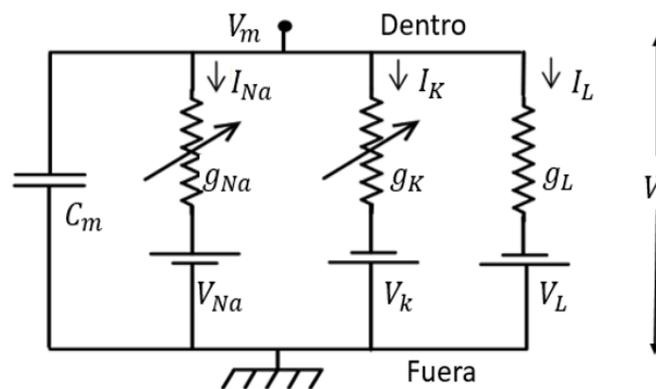


Figura 2.5: Circuito eléctrico equivalente a la membrana neuronal.

En este circuito, la membrana celular puede ser vista como un condensador que tiene la capacidad de almacenar carga iónica a medida que el potencial eléctrico cambia a través de la membrana, las resistencias representan las diferentes corrientes iónicas, una para Na^+ , una

para K^+ y otra para una fuga no específica en los diferentes canales iónicos en la membrana y las baterías actúan como las fuerzas de accionamiento electroquímicas las que impulsan a las corrientes iónicas a través de los canales iónicos. En este circuito la corriente capacitiva I_C que pasa a través de la membrana tiene dos componentes principales, uno asociado con la capacidad de la membrana de almacenar energía C_m , el otro está asociado con el flujo de iones que pasan a través de los canales en la membrana.

El modelo de HH es una base de la cual se derivan modelos neuronales más simplificados por ejemplo el modelo de HR propuesto por [Hindmarsh y Rose (1984)], el cual es el interés en este trabajo de investigación.

2.2. El modelo neuronal de Hindmarsh y Rose

El modelo HR [Hindmarsh y Rose (1984)], es un modelo matemático inspirado por el modelo HH para capturar el comportamiento dinámico de la propagación del *potencial de acción* a lo largo del axón de una neurona de manera intuitiva. Esto significa que no se modelan fenómenos biológicos o cognitivos verdaderos en la neurona, sino más bien es un modelo matemático abstracto de una neurona biológica. Sin embargo, el procesamiento de señales en el modelo de HR es muy parecido al de una neurona biológica, de manera que este modelo matemático produce una salida en respuesta a sus entradas y además su estructura matemática es muy simple y puede ser aplicado a muchos problemas específicos, por ejemplo la sincronización de redes neuronales.

El modelo de HR está formado por tres ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax(t)^3 + bx(t)^2 + y(t) - z(t) + I \\ e - dx(t)^2 - y(t) \\ \epsilon(s(x(t) + x_0) - z(t)) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

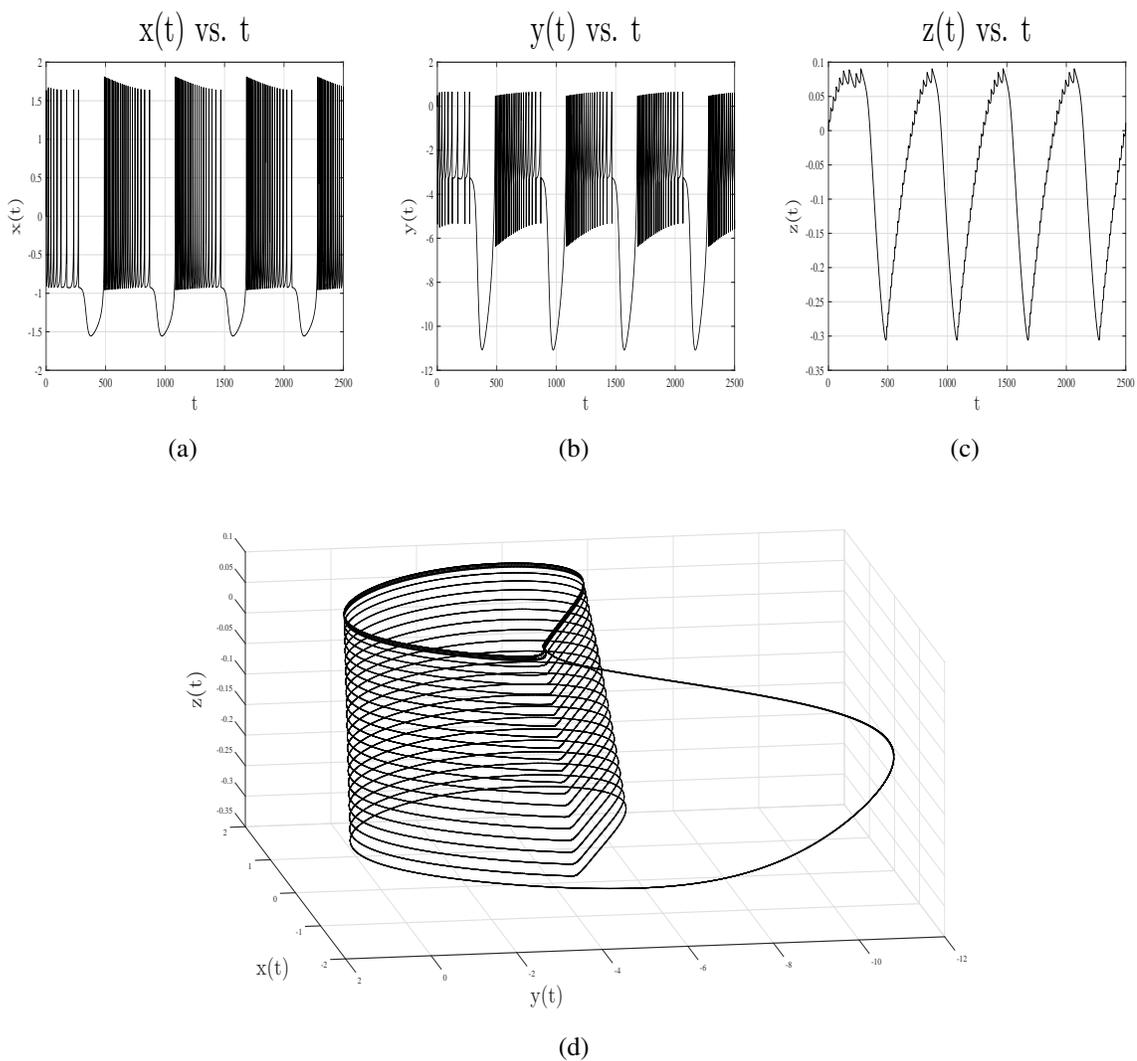


Figura 2.6: Solución numérica del modelo de HR. (a)-(c) Los estados $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, respectivamente. (d) El espacio de estados del sistema HR.

En el modelo de HR, la variable que expresa el *potencial de acción* es $x(t)$, $y(t)$ es la

variable de recuperación, mientras que $z(t)$ es la variable de adaptación, estas últimas se relacionan con el flujo de iones que cruzan a través de los canales iónicos de la membrana, esto significa que este modelo captura la dinámica del potasio (K) y el sodio (Na) dentro de la misma variable $y(t)$, además considera que la carga del K es positiva al igual que la del Na , esto quiere decir que estas corrientes son transportadas a través de canales rápidos, mientras que en la variable $z(t)$ se describe el flujo del cloro y otros iones considerados dentro de las corrientes de fuga, los cuales son transportados a través de los canales lentos. Debido a esto, su comportamiento puede ser dividido en dos subsistemas a diferentes escalas de tiempo, de forma que las variables $x(t)$ y $y(t)$ trabajan en una escala de tiempo t conocida como la escala de tiempo rápida y está dada por $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$, mientras que la variable $z(t)$ trabaja a una escala de tiempo lento τ , con el parámetro $0 < \varepsilon \ll 1$ la relación entre escalas de tiempo [Christian (2015), Djeundam *et al.* (2016)].

En (2.3) la variable I representa la corriente de estimulación externa y las constantes a , b , e , d , s y $x_0 \in \mathbb{R}^+$ son los parámetros del modelo HR. En particular, el comportamiento de disparos de picos se presenta para el conjunto de valores $\{a = 1, b = 3, e = 1, d = 5, s = 4, x_0 = 0.795, \varepsilon = 0.001\}$ y la condición inicial en $[x(0); y(0); z(0)] = [0; 0; 0]$. Como se muestra en la Figura 2.6 los estados del modelo HR presentan series de picos rápidos en disparos lentos periódicos, es decir, el comportamiento conocido como disparo de picos. La Figura 2.6 d), muestra el espacio de estados del modelo de HR (2.3) donde es posible observar la actividad de la neurona cuando alterna entre una escala de tiempo rápida y lenta. Así mismo se puede observar la desactivación de la neurona cuando su umbral de excitabilidad muestra un estado de reposo (para $z(t) < 0$) y los rápidos y repetitivos disparos formados por el

potencial de acción en la neurona (para $z(t) > 0$), esto puede verse en la órbita periódica cerrada y acotada de la solución en el espacio de estados.

Los puntos de equilibrio del modelo HR se obtienen anulando la dinámica, esto es, en los puntos $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ que solucionan la ecuación algebraica:

$$\begin{bmatrix} -a\bar{x}^3 + b\bar{x}^2 + \bar{y} - \bar{z} + I \\ e - d\bar{x}^2 - \bar{y} \\ \varepsilon(s(\bar{x} + x_0) - \bar{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

De (2.4) los puntos de equilibrio tienen como primer componente las raíces del polinomio de tercer orden:

$$\bar{x}^3 + \frac{d-b}{a}\bar{x}^2 + \frac{s}{a}\bar{x} + \frac{sx_0 - e - I}{a}.$$

Los cuales son: $(-0.6468 \pm 1.6334i, -0.7064)$ ya que (2.3) es un modelo de un sistema real, sus valores solo pueden ser reales. Bajo estas condiciones encontramos que existe un solo punto de equilibrio de interés:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -0.7064 \\ -1.4948 \\ 0.3545 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Para investigar la dinámica del modelo HR alrededor de este punto de equilibrio, primero

obtenemos la matriz Jacobiana de (2.3)

$$J(x(t), y(t), z(t)) = \begin{bmatrix} -3ax(t)^2 + 2bx(t) & 1 & -1 \\ -2dx(t) & -1 & 0 \\ \varepsilon s & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}.$$

De esta forma evaluamos (2.5) en la ecuación anterior y considerando los parámetros del modelo HR dados anteriormente es posible obtener la ecuación siguiente:

$$J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \simeq \begin{bmatrix} -5.7350 & 1 & -1 \\ 7.0637 & -1 & 0 \\ 0.0040 & 0 & -0.001 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Cuyos eigenvalores son: $\{-6.9264, 0.1883, 0.0020\}$. Debido a que dos eigenvalores tienen parte real positiva y uno tiene parte real negativa, este punto de equilibrio es considerado hiperbólico de tipo silla con dos direcciones inestables. Por lo tanto, aplica el teorema de Hartman-Grobman, siendo la dinámica alrededor del punto de equilibrio localmente inestable, es decir, se aleja del punto de equilibrio, pero se queda atrapada en el comportamiento periódico de disparos de picos, por lo tanto podemos decir que en términos globales es estable en el sentido de Lyapunov [Perko (2002)].

Suponga que el objetivo de control para este sistema es estabilizar el punto de equilibrio (2.5) por medio de una retroalimentación lineal local de la forma

$$u(t) = -K([x(t); y(t); z(t)] - [\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}]). \quad (2.7)$$

Con $K \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, de modo que el sistema en lazo cerrado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax(t)^3 + bx(t)^2 + y(t) - z(t) + I \\ e - dx(t)^2 - y(t) \\ \varepsilon(s(x(t) + x_0) - z(t)) \end{bmatrix} + Bu(t). \quad (2.8)$$

Por simplicidad, supongamos que la entrada de control puede utilizar todos los estados del sistema y se aplica a todas sus variables, es decir, las entradas de K son diferentes de cero y $B = [1; 1; 1]$. Más aún, considere que se asignan los eigenvalores del sistema en lazo cerrado en $\{-5, -5, -5\}$. Entonces, utilizando el método de asignación de polos la ganancia de control se obtiene como:

$$K = [-30.4774, -25.4517, 64.1931].$$

La simulación del sistema en lazo cerrado se presenta en la Figura 2.7. Como se puede observar de la simulación, la acción de control se aplicó al modelo HR hasta que $t > 1500$ como se muestra en las Figuras 2.7 a)-c), mientras que la evolución de los estados se presentan en la Figura 2.7 d) y el espacio de estados en 2.7 e), donde con un círculo se marca la localización del punto de equilibrio.

Ahora, si consideramos que solo tenemos acceso al estado $x(t)$ y que solo podemos aplicar el controlador en la primera coordenada del modelo HR. El diseño de control se complica

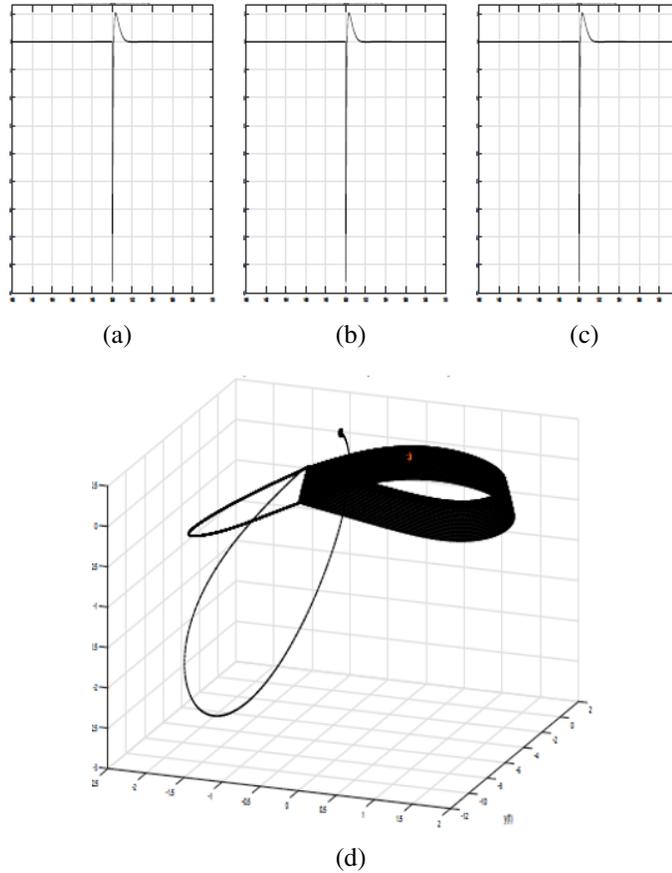


Figura 2.7: Solución numérica del modelo de HR estabilizado a un punto de equilibrio por retroalimentación de estados.

un poco más ya que $B = [1; 0; 0]$ y para tener que en lazo cerrado el punto de equilibrio es asintóticamente estable asignamos la ganancia de control en: $K = [30.4774, 0, 0]$. Entonces se obtiene el comportamiento que se muestra en la Figura 2.8.

En el siguiente capítulo abordamos el problema de sincronización de redes dinámicas complejas donde los nodos son modelos neuronales HR. Adicionalmente, diseñamos controladores locales para una fracción pequeña de nodo para estabilizar la red completa en el punto de equilibrio (2.5).

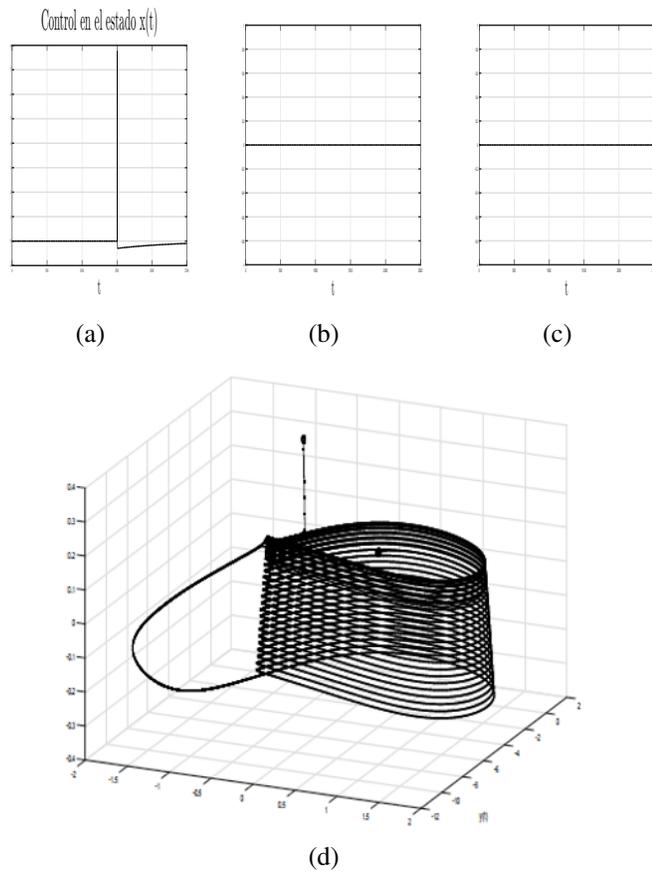


Figura 2.8: Solución numérica del modelo de HR estabilizado a un punto de equilibrio por retroalimentación de salida. (a)-(c) Acción de control en los estados $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$; respectivamente.

Capítulo 3

Red de neuronas idénticas con acoplamiento uniforme

Considere una red de N nodos idénticos acoplados de manera lineal y difusiva, sin dirección ni pesos en las conexiones, cuyos nodos son sistemas dinámicos n -dimensionales. La ecuación de estados de la red dinámica es:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1, j \neq i}^N l_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \text{ para } i = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Donde $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados del i -ésimo nodo; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal suave que describe la dinámica de un nodo aislado; la constante $c > 0 \in \mathbb{R}$ representa la fuerza de acoplamiento y es la misma para toda la red; la matriz de acoplamiento interno $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante de unos y ceros que determina la forma en la cual las variables de estado de los nodos se acoplan entre sí,

por simplicidad, asumimos que $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ donde $r_k = 1$ significa que los nodos acoplados i, j son enlazados a través de su k -ésima variable de estado. Asumimos que la matriz de acoplamiento externo $L = \{l_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tiene las siguientes características:

- (i) Es irreducible (*i.e.*, que no es posible generar columnas o renglones de puros ceros por operaciones de filas y columnas).
- (ii) Los elementos fuera de la diagonal son simétricos, $l_{ij} = l_{ji}$ para $i \neq j$. Para indicar que hay una conexión entre el nodo i y el nodo j , $l_{ij} = l_{ji} = 1$; de otra manera $l_{ij} = l_{ji} = 0$.
- (iii) Los elementos en la diagonal, l_{ii} están definidos como:

$$l_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N l_{ij} = - \sum_{i=1, j \neq i}^N l_{ji} = -k_i, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2)$$

Donde k_i es el grado del nodo i , es decir, el número de enlaces que conectan al i -ésimo nodo.

- (iv) Satisface la condición de difusividad, es decir, que la suma por columnas o por renglones es igual a cero. Esta condición describe un tipo de situación de balance; conceptualmente similar a la ley de Kirchhoff's en teoría de circuitos, debido a que los elementos de L satisfacen

$$\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3)$$

Como consecuencia de las condiciones (i)-(iv) y utilizando el teorema de los círculos

de Gerschgorin se puede demostrar que la matriz L tiene solamente un eigenvalor cero de multiplicidad 1, el cual está asociado al eigenvector derecho $[1, 1, \dots, 1]^T$. Además, el resto de los eigenvalores de L son estrictamente negativos, y se pueden escribir ordenadamente de la siguiente manera [Chen *et al.* (2015)]:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N \quad (3.4)$$

Utilizando (3.3) la red (3.1) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.5)$$

3.1. Sincronización en redes dinámicas

La sincronización de la red dinámica (3.5) se define como la solución en la cual asintóticamente las trayectorias de cada uno de sus nodos convergen a un mismo estado $s(t)$, esto es:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t), \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Donde $s(t) \in \mathbb{R}^n$ es la solución de un nodo aislado de la red, es decir

$$\dot{s}(t) = f(s(t)) \quad (3.7)$$

De hecho, $s(t)$ puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico [Chen *et al.* (2015)]. Para mostrar que el estado sincronizado $s(t)$ es una solución de la red (3.5) sustituimos $x_i(t) = s(t)$ para toda i , dando como resultado lo siguiente:

$$\dot{s}(t) = f(s(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma s(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.8)$$

Por (3.3), el segundo término de (3.8) se puede escribir como $\Gamma s(t) c \sum_{j=1}^N l_{ij} = 0$, dando como resultado que el estado sincronizado $s(t)$ es una solución de la red (3.5) repetida N veces.

Para conocer la estabilidad de la solución $s(t)$ en la red (3.5), definimos el error de sincronización $\eta_i(t)$ dado por:

$$\eta_i(t) = x_i(t) - s(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.9)$$

De tal manera que la dinámica del error de sincronización está dada por:

$$\dot{\eta}_i(t) = \dot{x}_i(t) - \dot{s}(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.10)$$

Ahora sustituimos la ecuación (3.5) y (3.7) en (3.10) obtenemos:

$$\dot{\eta}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t) - f(s(t)) \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.11)$$

Linealizando la función $f(x_i(t))$ alrededor de $s(t)$ mediante la serie de Taylor truncada a

la primera derivada, tenemos: $f(x_i(t)) \approx f(a)|_{a=s(t)} + \mathbf{D}f(a)|_{a=s(t)}(x_i(t) - a)|_{a=s(t)}$. Esto es:

$$f(x_i(t)) \approx f(s(t)) + \mathbf{D}f(s(t))\eta_i(t). \quad (3.12)$$

Donde $\mathbf{D}f(s(t))$ es el Jacobiano de f evaluado en $s(t)$. Despejando de (3.9) $\eta_i(t)$ y sustituyendo (3.12) en (3.11) obtenemos:

$$\dot{\eta}_i(t) = \mathbf{D}f(s(t))\eta_i(t) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}\Gamma\eta_j(t) \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) también puede ser escrita en forma vectorial, para esto se define la matriz de error:

$$\eta(t) = [\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_N(t)] \in \mathbb{R}^{n \times N}. \quad (3.14)$$

Escribiendo (3.13) en términos de $\eta(t)$ tenemos como resultado

$$\dot{\eta}(t) = \mathbf{D}f(s(t))\eta(t) + c\Gamma\eta(t)L. \quad (3.15)$$

Debido a que L es una matriz cuadrada, simétrica, e irreducible es posible diagonalizarla mediante un cambio de variable, definido como:

$$\eta(t) = W(t)\Phi^{-1}. \quad (3.16)$$

Donde $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz unitaria e invertible, tal que la matriz

L se descompone de la siguiente forma $L = \Phi\Lambda\Phi^{-1}$ con $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$, siendo λ_i para $i = 1, 2, \dots, N$, los eigenvalores de la matriz L .

Considerando lo anterior (3.15) se puede escribir en las variables $W(t)$ como:

$$\dot{W}(t) = \mathbf{D}f(s(t))W(t) + c\Gamma W(t)\Lambda. \quad (3.17)$$

Ahora, si descomponemos a (3.17) por columnas tenemos lo siguiente:

$$\dot{w}_i(t) = (\mathbf{D}f(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)w_i(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.18)$$

Donde $w_i(t) \in \mathbb{R}^n$. La ecuación (3.18) representa N ecuaciones lineales variantes en el tiempo asociadas a cada eigendirección de la matriz L . Además sabemos que el eigenvalor $\lambda_1 = 0$, está asociado al eigenvector derecho $[1, 1, \dots, 1]^T$ y por lo tanto, está relacionado con la dinámica del estado síncrono $s(t)$ según (3.7). Tomando esto en cuenta, el análisis de estabilidad del estado sincronizado $s(t)$, requiere que se determine la estabilidad de solamente $N - 1$ ecuaciones lineales variantes en el tiempo (3.18) correspondientes a las direcciones transversales de la solución de sincronización [Chen *et al.* (2015)].

De este modo, la estabilidad de $s(t)$ como solución de la red (3.5) se reduce a demostrar la estabilidad de las siguientes $N - 1$ ecuaciones:

$$\dot{w}_i(t) = (\mathbf{D}f(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)w_i(t) \text{ para } i = 2, 3, \dots, N. \quad (3.19)$$

Para mostrar que los sistemas lineales variantes en el tiempo (3.19) son asintóticamente

estables la función de Lyapunov propuesta es:

$$V_i(t) = w_i(t)^T \mathbf{P} w_i(t), \text{ para } i = 2, 3, \dots, N. \quad (3.20)$$

Donde $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva.

La derivada de (3.20) en las trayectorias de cada una de las ecuaciones de (3.19) está dada por

$$\dot{V}_i(t) = w_i(t)^T [(\mathbf{D}f(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{D}f(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)]w_i(t) \text{ para } i = 2, 3, \dots, N. \quad (3.21)$$

La derivada (3.20) es definida negativa, si se cumple la siguiente desigualdad matricial

$$(\mathbf{D}f(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{D}f(s(t)) + c\lambda_i\Gamma) \leq -Q \text{ para } i = 2, 3, \dots, N. \quad (3.22)$$

Donde $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva. Sabemos que los eigenvalores de L , están ordenados como en (3.4) y de acuerdo a este orden, λ_2 es el eigenvalor más grande diferente de cero. Supongamos que $d_i = c\lambda_i$ y que se satisface la desigualdad matricial

$$(\mathbf{D}f(s(t)) + d_i\Gamma)\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{D}f(s(t)) + d_i\Gamma) \leq -Q \text{ para } i = 2, 3, \dots, N. \quad (3.23)$$

Si existe un valor \bar{d} que es más grande que todos los d_i 's y para el cual la desigualdad

matricial se sigue cumpliendo. Este debe ser tal que:

$$\bar{d} \geq c\lambda_2 \quad (3.24)$$

Debido a que $0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N$ y $\bar{d} < 0$, entonces la condición de estabilidad del estado sincronizado (3.8) puede escribirse en términos de la fuerza de acoplamiento como:

$$c \geq \frac{|\bar{d}|}{|\lambda_2|}. \quad (3.25)$$

Si elegimos la fuerza de acoplamiento uniforme de la red c , suficientemente grande como para cumplir la desigualdad (3.25), podemos asegurar que la red se sincroniza a la solución de un nodo asilado $s(t)$. Este resultado es conocido en la literatura como el criterio de λ_2 (ver por ejemplo: [Wang y Chen (2002), Li (2005), Chen *et al.* (2015)]).

3.1.1. Ejemplo 1: Sincronización de una red uniforme de neuronas HR

Para ilustrar la validez de los resultados teóricos de la sección anterior, comenzamos por construir una red compleja de cincuenta nodos formado bajo el modelo de red propuesto por Albert László Barabási y Réka Albert mejor conocido como el modelo de escala libre BA [Barabási y Albert (1999)].

Para construir la matriz de acoplamiento externo $L = \{l_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ utilizamos los siguientes pasos:

- (i) La entrada l_{ij} para $i < j$ toma el valor de cero o uno, de acuerdo el algoritmo BA con

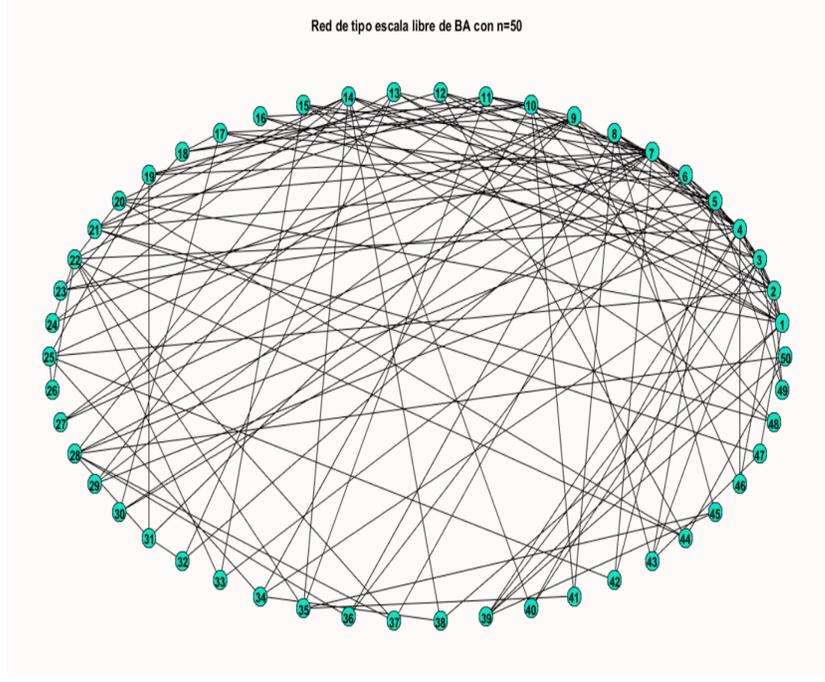


Figura 3.1: Grafo del modelo de BA con $m_0 = m = 3$ y cincuenta nodos

$m_0 = 3$ y $m = 3$ hasta llegar a $N = 50$.

- (ii) Dado que la matriz L es simétrica, asignamos las entradas tal que $l_{ij} = l_{ji}$.
- (iii) Para cumplir la condición de simetría difusiva, los elementos en la diagonal l_{ii} están definidos como: $l_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N l_{ij} = -\sum_{i=1, j \neq i}^N l_{ji} = -k_i$, para $i, j = 1, 2, \dots, N$. De modo que la suma por renglones o por columnas es nula.

La Figura 3.1, muestra una realización del grafo escala libre BA. En nuestra realización de red de escala libre, el grado de nodo máximo es dieciséis para uno de los nodos concentradores y el mínimo es tres para veintisiete nodos, por lo tanto, la distribución de grado de nodo se asemeja a una ley de potencias. La matriz Laplaciana resultante L tiene eigenvalores con

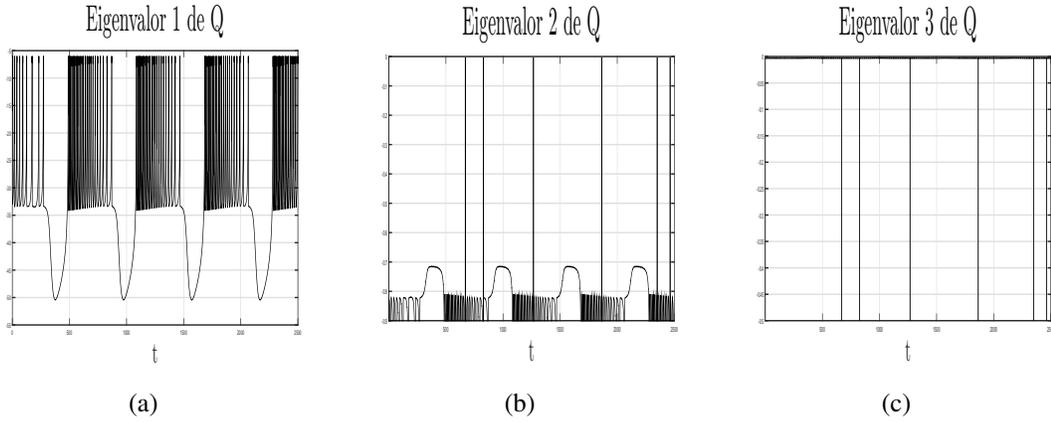


Figura 3.2: Eigenvalores de la matriz Q de (4.12), que muestra que para $\bar{d} = -8$ y P la matriz identidad, Q es definida negativa para todo tiempo.

el orden de (3.4). Para este ejemplo, tenemos que los eigenvalores se ordenan como sigue:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 = -1.4183 \geq \dots \geq \lambda_{50} = -17.6717$$

Utilizamos el modelo de la neurona HR (2.3) para cada uno de los nodos, de modo que $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), x_{i3}(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados de la i -ésima neurona HR. Suponiendo que las neuronas se acoplan solo eléctricamente, es decir, solo por la variable $x_{i1}(t)$, esto es equivalente a imponer $\Gamma = \text{diag}(1, 0, 0)$, entonces la ecuación de estados de nuestro modelo de la red de neuronas HR es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax_{i1}(t)^3 + bx_{i1}(t)^2 + x_{i2}(t) - x_{i3}(t) + I \\ e - dx_{i1}(t)^2 - x_{i2}(t) \\ \varepsilon(s(x_{i1}(t) + x_0) - x_{i3}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \sum_{j=1}^N l_{ij} x_{j1}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

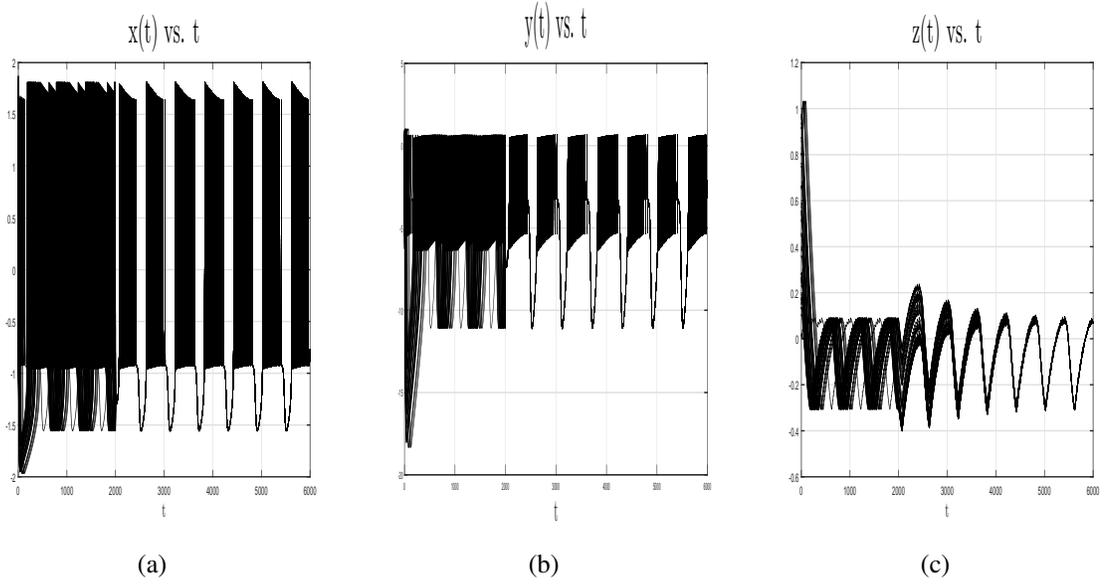


Figura 3.3: Estados de la red uniforme de neuronas tipo HR con $c = 10$ después de $t = 2000$.

para $i = 1, 2, \dots, N$.

Aplicando los resultados previos sabemos que si la fuerza de acoplamiento uniforme c satisface la condición (3.25) la red dinámica (3.26) se sincroniza en el sentido de (3.6) a la solución de una neurona aislada descrita en la Figura 2.6. Es decir, se debe encontrar el valor de \bar{d} tal que existan las matrices P y Q definidas positivas tal que

$$(\mathbf{D}f(s(t)) + \bar{d}\Gamma)P + P(\mathbf{D}f(s(t)) + \bar{d}\Gamma) \leq -Q. \quad (3.27)$$

Para cada valor de $s(t)$ de la trayectoria periódica de la neurona HR que se muestra en la Figura 2.6. Suponiendo que P es la matriz identidad, con $\bar{d} = -8$ los eigenvalores de Q en (3.27) son negativos para todo tiempo con valores en los intervalos

$$\lambda(Q) = \{[-50.4290, -5.9997], [-7.9794, -0.0030], [-2.0009, -0.0023]\}$$

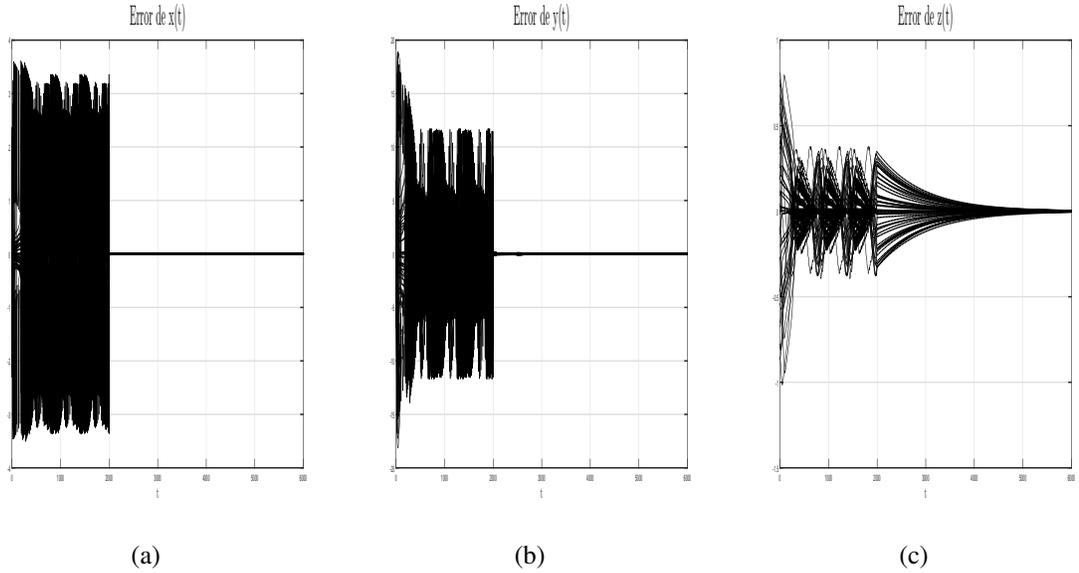


Figura 3.4: Error de sincronización de la red de neuronas tipo HR con $c = 10$ después de $t = 2000$.

como lo muestra la Figura 3.2. De modo que con $\bar{d} = -8$ existen las matrices P y Q tal que la desigualdad (4.12) se satisface. Por otro lado, la matriz de acoplamientos externos L tiene como su eigenvalor más grande diferente de cero a $\lambda_2 = -1.4183$. Entonces, de acuerdo con (3.25), si $c > \frac{8}{1.4183} = 5.64$ la red dinámica (3.26) se sincroniza en el sentido de (3.6) como se muestra en las Figuras 3.3 y 3.4

3.2. Regulación por fijación en redes dinámicas

Una vez haber logrado la sincronización en la red anterior, es posible regularla en un estado de control deseado de la siguiente manera. Suponga que el objetivo de control para la red dinámica (3.5) es que un estado estacionario homogéneo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ sea asintóticamente

estable, esto es, que para la red

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N.$$

La solución \bar{x} con $f(\bar{x}) = 0$ sea asintóticamente estable al menos localmente. En otras palabras, el objetivo de control es diseñar controladores tal que

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = \bar{x} \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Para que el objetivo de control se cumpla, se propone usar el método de control de redes llamado control por fijación (pinning) [Wang y Chen (2002a)]. En este método se diseñan controladores lineales de retroalimentación local solo para una pequeña fracción de nodos δ ($0 < \delta \ll N$) de la red, llamados nodos fijados, controlados o líderes [Su y Wang (2013)].

Sin pérdida de generalidad, asumimos que los nodos de la red (3.5) son ordenados de tal manera que los primeros índices corresponden a los nodos controlados, entonces la red dinámica controlada está dada por:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t) + \mu_i(t), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.29)$$

Donde $\mu_i(t)$ es la entrada de control para el nodo i y está definida como

$$\mu_i(t) = -c\kappa_i\Gamma(x_i(t) - \bar{x}). \quad (3.30)$$

Siendo $\kappa_i \in \mathbb{R}$ la ganancia de control para el i -ésimo nodo. El resto de las variables de (3.29) y (3.30) están descritas como en la sección anterior.

Sustituyendo $\mu_i(t)$ en la red (3.29) se obtiene lo siguiente:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}\Gamma x_j(t) - c\kappa_i\Gamma(x_i(t) - \bar{x}), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}\Gamma x_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.31)$$

Es fácil mostrar que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es una solución para la red controlada (3.31). Basta sustituir por cada nodo el estado \bar{x} y debido a la conectividad difusiva (3.3) de la matriz L , \bar{x} es solución estacionaria para la red repetida N veces.

Para establecer la estabilidad de \bar{x} como solución de la red (3.31) definimos el error de control $\varepsilon_i(t) = x_i(t) - \bar{x}$, para $i = 1, 2, \dots, N$, de modo que la dinámica del error de control está dada por:

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \dot{x}_i(t) - \dot{\bar{x}} = \dot{x}_i(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.32)$$

Entonces, sustituyendo (3.31) en (3.32) obtenemos:

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \begin{cases} f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}\Gamma\varepsilon_j(t) - c\kappa_i\Gamma\varepsilon_i(t), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}\Gamma\varepsilon_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.33)$$

Observamos que la dinámica de la red (3.33) es no lineal debido a la función f . Por lo tanto es necesario analizar el comportamiento alrededor de la solución estacionaria \bar{x} , para esto utilizaremos el método de linealización como en la sección anterior. De acuerdo a esto y debido a que $f(\bar{x}) = 0$ tenemos lo siguiente

$$f(x_i(t)) \approx f(\bar{x}) + \mathbf{D}f(\bar{x})(x_i(t) - \bar{x}) = \mathbf{D}f(\bar{x})\varepsilon_i(t).$$

La versión linealizada de la red controlada (3.33) alrededor de \bar{x} , es la siguiente:

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{D}f(\bar{x})\varepsilon_i(t) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}\Gamma\varepsilon_j(t) - c\kappa_i\Gamma\varepsilon_i(t), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ \mathbf{D}f(\bar{x})\varepsilon_i(t) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}\Gamma\varepsilon_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.34)$$

Donde $\mathbf{D}f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano de f evaluado en \bar{x} . En forma vectorial, la ecuación anterior (3.34) tiene la siguiente forma:

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{D}f(\bar{x})\xi(t) + c\Gamma\xi(t)(L - K). \quad (3.35)$$

Siendo $\xi(t) = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \dots, \varepsilon_N(t)] \in \mathbb{R}^{n \times N}$ la matriz de errores, cuyas columnas muestran el error de cada uno de los nodos. La matriz $K = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\delta, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es la matriz de ganancias. Ahora sea $B = L - K$, la ecuación (3.35) se reescribe como

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{D}f(\bar{x})\xi(t) + c\Gamma\xi(t)B. \quad (3.36)$$

Por herencia de L y K , la matriz B también es simétrica con entradas reales. Por lo tanto, sus eigenvalores se pueden ordenar de la forma

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_N \quad (3.37)$$

Así mismo, B se puede diagonalizar de la siguiente manera

$$B = \Delta \Omega \Delta^{-1} \quad (3.38)$$

Donde $\Delta = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y se forma con los eigenvectores σ_i de B , por otro lado $\Omega = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz diagonal formada por los eigenvalores α_i de B . Ahora si consideramos el siguiente cambio de variable $\xi(t) = Z\Delta$ la ecuación anterior (3.36) se convierte en la siguiente:

$$\dot{Z}(t) = \mathbf{D}f(\bar{x})Z(t) + c\Gamma Z(t)\Omega. \quad (3.39)$$

Descomponiendo por columnas la ecuación (3.39), obtenemos:

$$\dot{z}_i(t) = (\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_i\Gamma) z_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.40)$$

Donde $z_i \in \mathbb{R}^n$ en (3.40) y representa N sistemas lineales invariantes en el tiempo los cuales son exponencialmente estables si y solo si la parte real de los eigenvalores de la matriz $\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_i\Gamma$ para $i = 1, 2, \dots, N$, son negativos. Esto significa que todas las matrices

anteriores deben de ser Hurwitz. Si esta condición se satisface, todos los sistemas lineales de la ecuación (3.40) tienen a $\varepsilon_i(t) = 0$ como una solución exponencialmente estable y el estado estacionario homogéneo \bar{x} es asintóticamente estable para la red controlada (3.31), al menos de manera local. De acuerdo a (3.37), sabemos que α_1 es el eigenvalor con la parte real más grande de la matriz B , de tal manera que si $\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_1\Gamma$ es Hurwitz, el resto de las matrices para $i = 2, \dots, N$, también son Hurwitz. En [Chen *et al.* (2007)] este argumento es desarrollado para mostrar que se puede controlar una red fijando solamente un nodo. Con base al análisis anterior, el diseño de las ganancias de control nos dice que si elegimos κ_i tal que las matrices $\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_i\Gamma$ son Hurwitz para $i = 1, 2, \dots, N$ tenemos el problema de control resuelto. Concluyendo así, que la red controlada (3.31) es estable en el estado \bar{x} . En este sentido, el problema de diseño de control por fijación es seleccionar el número de nodos a controlar, los cuales pueden ser elegidos de manera aleatoria o estratégica dependiendo la topología de la red. Cabe mencionar que un valor pequeño de δ corresponderá un valor muy grande para κ , mientras que por el contrario, si tomamos un número grande de nodos δ el valor de κ será mucho menor para lograr que la red se estabilicé en el estado estacionario homogéneo \bar{x} .

3.2.1. Ejemplo 2. Regulación por fijación de una red de neuronas HR

Para ilustrar la validez de los resultados teóricos desarrollados en la sección anterior, proponemos el siguiente ejemplo. Se utilizará la misma red aleatoria que fue construida para el ejemplo anterior, es decir, una red BA de escala libre con cincuenta nodos. La red controlada de neuronas HR bajo la estrategia de control por pinning tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax_{i1}(t)^3 + bx_{i1}(t)^2 + x_{i2}(t) - x_{i3}(t) + I + c \sum_{j=1}^N l_{ij}x_{j1}(t) + \mu_i(t) \\ e - dx_{i1}(t)^2 - x_{i2}(t) \\ \varepsilon(s(x_{i1}(t) + x_0) - x_{i3}(t)) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

para $i = 1, 2, \dots, \delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, N$.

Note que aquí $\kappa_i = 0, \forall i \in [\delta + 1, \dots, N]$ cuando $\mu_i(t) = -c\kappa_i\Gamma(x_{i1}(t) - \bar{x}_1)$ y $\Gamma = \text{diag}([1, 0, 0])$.

El estado estacionario homogéneo \bar{x} es el punto de equilibrio real del sistema (2.5) que para los parámetros establecidos es

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.7064 \\ -1.4948 \\ 0.3545 \end{bmatrix}.$$

Se utilizan dos estrategias para elegir los nodos a fijar (controlar) ya sea aleatoriamente o escogiendo los nodos con más grande grado de nodo. En este ejemplo en particular, primero fijamos los nodos de manera estratégica, de tal manera que el nodo con mayor grado es elegido a fijar, el cual en la red el séptimo elemento, esto es; $k_7 = 16$. De acuerdo a esto, la matriz B está dada por la diferencia de la matriz L y la matriz $K = \text{diag}(0, \dots, \kappa_7, 0, \dots, 0)$. De acuerdo al análisis teórico anterior, sabemos que si elegimos de manera adecuada el valor de la ganancia κ tal que (3.40) sea Hurwitz podemos resolver el problema de control. Por lo tanto para este ejemplo en particular, si elegimos a $\kappa_7 = 40$, los eigenvalores de B ordenados

de acuerdo a (3.37) son los siguientes

$$\alpha_1 = -0.2008 \geq \dots \geq \alpha_{50} = -56.3133$$

Considerando el valor de la fuerza de acoplamiento $c = 10$, y bajo estos parámetros, comprobamos que (3.40) es Hurwitz, debido a que cuando $\alpha_1 = -0.2008$: $\lambda_1(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_1\Gamma) = -0.0044 - 2.9746i$, $\lambda_2(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_1\Gamma) = -0.0044 + 2.9746i$, $\lambda_3(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_1\Gamma) = -0.0015 + 0i$, ahora cuando $\alpha_2 = -1.4279$: $\lambda_1(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_2\Gamma) = -10.2118$, $\lambda_2(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_2\Gamma) = -2.0679$ y el último eigenvalor $\lambda_3(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_2\Gamma) = -0.0012$, para $\alpha_3 = -1.5642$: $\lambda_1(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_3\Gamma) = -11.7255$, $\lambda_2(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_3\Gamma) = -1.9172$, $\lambda_3(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_3\Gamma) = -0.0012$, \dots , y $\alpha_{50} = -56.3131$: $\lambda_1(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_{50}\Gamma) = -560.1142$, $\lambda_2(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_{50}\Gamma) = -1.0176$, $\lambda_3(\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_{50}\Gamma) = -0.0010$.

Comprobamos que esta matriz en cada α_i para $i = 1, \dots, N$ es Hurwitz, de tal manera que es posible concluir en este ejemplo que el estado estacionario \bar{x} igual a (2.5) es asintóticamente estable de manera exponencial, como se muestra en la Figura 3.5 y 3.6.

Siguiendo con esta estrategia de control y de acuerdo al análisis teórico anterior, sabemos que el valor de la ganancia requerido para estabilizar la red dependerá del número de nodos fijados dentro de la red. Como otro ejemplo, fijemos ahora a la red (3.41) en los 5 nodos con mayor grado de nodo siendo $k_1 = 12, k_3 = 12, k_4 = 14, k_5 = 14, k_7 = 16$, observamos que para asegurar la estabilidad de la red, es necesario valores de ganancia κ pequeños pero mayores o igual a 2.5, de tal manera que si el valor de la ganancia aumenta el tiempo necesario para alcanzar la estabilidad de la red disminuye. Por lo tanto, sea $\kappa = 5$, entonces los eigenvalores de la matriz $\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_i\Gamma$ para el eigenvalor más grande serán los siguientes,

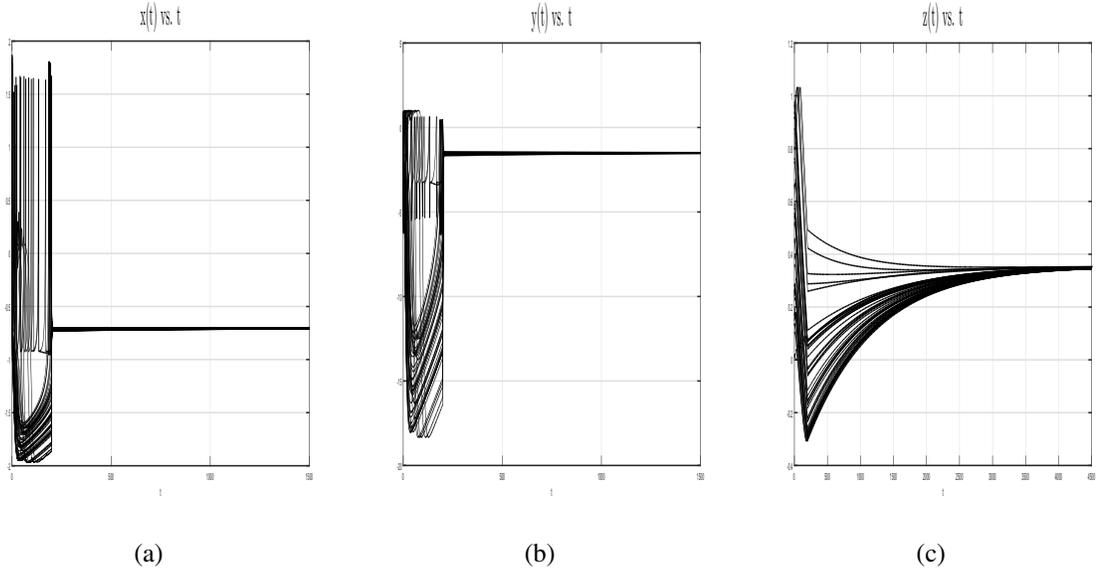


Figura 3.5: Estados de la red uniforme de neuronas tipo HR con $\kappa_7 = 40$ después de $t = 200$.

λ_1 y $\lambda_2 = (\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_1\Gamma) = -0.6724 \pm 3.1196i$, $\lambda_3 (\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\alpha_1\Gamma) = -0.0014$ y de la misma forma, podemos concluir que B es una matriz Hurwitz, teniendo sus eigenvalores el siguiente orden $\alpha_1 = -0.3344 \geq \dots \geq \alpha_{50} = -22.3479$. En estos dos casos. Observamos que al añadirle entradas de control a la red en los nodos hub, el valor de la ganancia necesario para estabilizar la red disminuye drásticamente.

Por otro lado, si fijamos los nodos de manera aleatoria en la red puede tener diferentes comportamientos, ya que puede se logre el objetivo de control o no, debido a que no siempre se fijaran los nodos adecuados debido a la naturaleza de crecimiento de la red de BA, en la cual por construcción muy pocos nodos tienen alto grado de nodo mientras que la mayoría presenta grado de nodo pequeño. Si deseáramos analizar esta estrategia aleatoria de control en la red, podríamos fijar la red en el nodo 12, 27 y 42 con $k = 5$, $k = 3$ y $k = 3$, respectivamente; debido a que estos nodos por naturaleza de crecimiento de la red de BA tienen más probabilidad de ser elegidos debido a que aproximadamente el 60% de los nodos dentro de

En el siguiente capítulo abordamos el problema de sincronización y regulación de redes dinámicas complejas cuyas conexiones no son uniformes donde los nodos son modelos neuronales HR. De la misma forma que en el capítulo anterior, diseñamos controladores por retroalimentación local para una fracción pequeña de nodos en la red para de esta forma lograr estabilizar la red completa en el punto de equilibrio (2.5).

Capítulo 4

Redes con pesos en las conexiones

Muchas conexiones presentes en las redes de la vida real, no pueden ser simplemente representadas por entidades binarias, ya que existen conexiones que son más fuertes que otras, de tal manera que si le asociamos valores, éstos dependerían de la fuerza con la que cada par de nodos en la red se acoplan entre sí; en otras palabras las interacciones entre un elemento de la red y sus vecinos depende del grado de cohesión que estos tengan. Un ejemplo de lo anterior, ocurre en la dinámica social, ya que si suponemos que cada grupo de individuos es un nodo y las interacciones entre ellos son los enlaces, podemos deducir su grado de convivencia, de tal manera que es posible medir el vínculo que existe entre individuos, siendo más fuerte o más débil la convivencia entre algunos de ellos. En este ejemplo y muchos más presentes en la vida real, es necesario que la matriz de adyacencia en el modelo de red ya no simplemente se represente con entradas de unos y ceros, si no que cada entrada dependa de la fuerza de atracción que cada nodo i tiene sobre su nodo vecino j . A estas fuerzas en los enlaces comúnmente se les llama pesos. En este capítulo, asumimos

que los pesos son números positivos, los cuales representan la atracción entre cada par de nodos de la red. Considere una red de N nodos idénticos acoplados de manera difusiva con pesos en las conexiones, cuyos nodos son sistemas dinámicos n -dimensionales. La ecuación de estados que describe este comportamiento es la siguiente:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

Donde $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados del i -ésimo nodo; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal suave que describe la dinámica de un nodo aislado de la red; la matriz de acoplamiento interno $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante de unos y ceros que determina la forma en la cual las variables de estado de los nodos se acoplan entre sí, por simplicidad, asumimos que $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ donde $r_k = 1$ significa que los nodos acoplados i, j son enlazados a través de su k -ésima variable de estado. La matriz de acoplamiento externo $C = \{c_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tiene las siguientes características:

- (i) Los elementos c_{ij} con $i \neq j$ son números reales no negativos.
- (ii) Los elementos fuera de la diagonal son simétricos, es decir, $c_{ij} = c_{ji}$. Para indicar que hay una conexión entre el nodo i y el nodo j , $c_{ij} = c_{ji} > 0$; de otra manera $c_{ij} = c_{ji} = 0$.
- (iii) Los elementos en la diagonal, c_{ii} están definidos como:

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} = - \sum_{i=1, j \neq i}^N c_{ji}, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.2)$$

(iv) Satisface la condición de difusividad, es decir:

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3)$$

Debido a la condición (iv), la ecuación (4.1) puede ser reescrita como:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma x_j(t), \text{ para } i = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

De la misma forma que en el capítulo anterior, se analizará el comportamiento colectivo de sincronización y regulación de la red con pesos (4.4) como se muestra a continuación.

4.1. Sincronización en redes dinámicas con pesos en las conexiones

Para investigar la estabilidad de la solución de sincronización de la red (4.4), es necesario ajustar el método presentado en el capítulo anterior. Para esto comencemos planteando el objetivo de sincronización, bajo el cual es necesario determinar si la solución de comportamiento al unísono es asintóticamente estable; esto es:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t), \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

La dinámica del estado sincronizado $s(t)$ está dada por:

$$\dot{s}(t) = f(s(t)) \quad (4.6)$$

De la misma forma que en capítulo anterior, es posible mostrar que el estado sincronizado $s(t)$ es una solución de la red (4.4). Para esto, sustituimos $s(t)$ en $x_i(t)$ para $i = 1, 2, \dots, N$ y por la condición de difusividad (4.25) que la matriz C satisface, $s(t)$ es una solución para toda la red (4.4).

Observamos que existen analogías entre la red con pesos (4.4) y en la red sin pesos (3.5), ya que ambas matrices L y C son difusivas. Por lo que, debido a esto es posible dar un criterio de sincronización para la red con pesos a partir del criterio de sincronización de la red sin pesos vista en el capítulo anterior.

Para analizar, la estabilidad de la solución $s(t)$ en la red (4.4), procedemos a generar una nueva matriz $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ de entradas cero-uno a partir de la matriz con pesos C de la siguiente manera

1. Los elementos de la matriz \mathbf{F} fuera de la diagonal se asignan como $F_{ij} = F_{ji} = 1$ si el nodo i y j están conectados ($c_{ij} > 0$), de otra forma $F_{ij} = F_{ji} = 0$.
2. Las entradas en la diagonal son calculadas de la siguiente manera:

$$F_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N F_{ij} = - \sum_{i=1, j \neq i}^N F_{ji}$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

La nueva matriz \mathbf{F} satisface la condición de difusividad, ya que la sumatoria por renglones y por columnas es igual a cero para $i = 1, 2, \dots, N$. Observamos que \mathbf{F} , es la matriz sin pesos resultante de la matriz con pesos C , cuyas características son las mismas que la matriz L del capítulo anterior. Después de esto, como siguiente paso se construye una matriz P a partir de la matriz \mathbf{F} de la siguiente manera:

$$P = \frac{c}{2} \mathbf{F}. \quad (4.7)$$

Donde $c \in \mathbb{R}^+$ y $P = \{p_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$. De esta manera, los elementos fuera de la diagonal de la matriz P son simétricos y están multiplicados por un número escalar $p_{ij} = \frac{c}{2}(F_{ij}) = \frac{c}{2}(F_{ji})$, al igual que los elementos de la diagonal $p_{ii} = \frac{c}{2}(F_{ii})$. Note que la constante c puede verse como la fuerza uniforme de conexión en una red sin pesos.

Ahora creamos una matriz \mathbf{Q} , la cual representa el error que existe entre estas matrices, de tal forma que sea

$$\mathbf{Q} = P - C. \quad (4.8)$$

Siendo $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, por construcción, sus elementos tienen las siguientes características:

- (i) Los elementos fuera de la diagonal son de la forma

$$\mathbf{q}_{ij} = p_{ij} - c_{ij}. \quad (4.9)$$

- (ii) Los elementos en la diagonal \mathbf{q}_{ii} , están definidos como:

$$\mathbf{q}_{ii} = p_{ii} - c_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} - \frac{c}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N F_{ij} \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.10)$$

Para poder garantizar la sincronización en la red (4.4), es necesario primero sincronizar la red sin pesos formada mediante la matriz \mathbf{F} , de tal forma que tenemos el siguiente modelo de red:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N F_{ij} \Gamma x_j(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.11)$$

Observamos que las características de conexión de la red (4.11) son similares a las del modelo de red del capítulo anterior (3.5), por lo que debido a esto, existe un error de sincronización denotado como

$$\beta_i(t) = x_i(t) - s(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.12)$$

Donde $s(t) \in \mathbb{R}^n$ está definido de la misma forma que en la sección anterior. Además es posible demostrar que $s(t)$ es una solución de la red (4.11), esto mediante un análisis similar al capítulo 1, debido a que se sabe que la matriz \mathbf{F} satisface la propiedad de difusividad. De la misma forma el análisis que se sigue para demostrar estabilidad de $s(t)$ en (4.11) es exactamente el mismo dado en el capítulo anterior, por lo tanto es posible obtener la dinámica del error de sincronización (4.12), la cual tiene la siguiente forma:

$$\dot{\beta}_i(t) = \dot{x}_i(t) - \dot{s}(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.13)$$

Ahora si sustituimos la ecuación (4.11) y (4.12) en la ecuación (4.13) se tiene lo siguiente:

$$\dot{\beta}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N F_{ij} \Gamma x_j(t) - f(s(t)) \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.14)$$

De la misma manera procedemos a linealizar la dinámica de la función $f(x_i(t))$ alrededor de $s(t)$, después de esto la ecuación resultante, se escribe en forma vectorial mediante la matriz de error $\beta(t) = [\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_N(t)] \in \mathbb{R}^{n \times N}$ quedando de la siguiente forma:

$$\dot{\beta}(t) = \mathbf{D}f(s(t))\beta(t) + c\Gamma\beta(t)\mathbf{F}. \quad (4.15)$$

Debido a las características de tamaño y simetría presentes en la matriz \mathbf{F} , es posible diagonalizarla mediante un cambio de variable dado por $\beta(t) = \Sigma(t)\Psi^{-1}$, donde Ψ es una matriz cuadrada dada por $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es unitaria y además invertible. A consecuencia de esto, \mathbf{F} puede ser descompuesta de la siguiente manera: $\mathbf{F} = \Psi\Upsilon\Psi^{-1}$, donde Υ es la matriz correspondiente a los eigenvalores γ_i para $i = 1, \dots, N$ de la matriz \mathbf{F} .

Ahora y mediante el cambio de variable anterior, es posible obtener un sistema descompuesto en columnas de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}_i(t) = (\mathbf{D}f(s(t)) + c\gamma_i\Gamma)w_i(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.16)$$

Donde $\sigma_i(t) \in \mathbb{R}^n$. Sabemos de acuerdo al análisis para redes sin pesos del capítulo anterior que solo es necesario analizar la estabilidad del estado sincronizado $s(t)$ en las $N - 1$ ecuaciones lineales variantes en el tiempo, de tal manera que la ecuación anterior (4.17) es ahora

la siguiente:

$$\dot{\sigma}_i(t) = (\mathbf{D}f(s(t)) + c\gamma_i\Gamma) w_i(t), \text{ para } i = 2, \dots, N. \quad (4.17)$$

Ahora de la misma forma, se propone una función de Lyapunov similar a la del capítulo anterior

$$V_i(t) = \sigma_i(t)^T \mathbf{P} \sigma_i(t), \text{ para } i = 2, 3, \dots, N. \quad (4.18)$$

Siendo $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. De acuerdo al análisis anterior sabemos que la derivada de (4.18) es definida negativa si se cumple la desigualdad de Lyapunov dada por

$$(\mathbf{D}f(s(t)) + c\gamma_i\Gamma)\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{D}f(s(t)) + c\gamma_i\Gamma) \leq -Q \quad (4.19)$$

Para $i = 2, 3, \dots, N$ y donde $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva.

Mediante este análisis es posible obtener un valor de c necesario tal que haga que la red (4.11) se sincronice, donde además se sabe que c debe de satisfacer lo siguiente

$$c \geq \frac{|\hat{d}|}{|\gamma_2(\mathbf{F})|}. \quad (4.20)$$

Donde \hat{d} es un número como en el capítulo anterior tal que hace que la desigualdad de Lyapunov (4.19) se siga satisfaciendo y siga siendo definida negativa.

Por otro lado y después de este análisis es necesario asegurar que la sumatoria de los elementos en la diagonal \mathbf{q}_{ii} de la matriz \mathbf{Q} es positiva, para esto los elementos de la matriz C son elegidos de tal manera que para cuando $c_{ij} > 0$ y $i \neq j$ solo se elegirán las entradas c_{ij}

de la siguiente forma

$$c_{ij} > \frac{c}{2}. \quad (4.21)$$

Para que de esta manera, $\mathbf{q}_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{c}{2}(p_{ij}) = |\mathbf{q}_{ii}|$, y por lo tanto la matriz \mathbf{Q} sea semidefinida positiva. De esta forma, los eigenvalores de la P son más grandes o iguales que los eigenvalores de C debido a que para que \mathbf{Q} sea semidefinida positiva las entradas de P deben ser más grandes que las de C . Si consideramos que además sus características de conectividad son similares entonces sabemos que sus eigenvalores están ordenados de acuerdo a (1.3) por lo tanto el eigenvalor más grande de cada uno de estos será λ_2 de cada una de estas matrices. Por lo tanto tenemos que

$$\lambda_2(C) \leq \frac{c}{2}\gamma_2(\mathbf{F}). \quad (4.22)$$

Y desde que $\lambda_2(P) \geq \lambda_2(C) + \lambda_n(P - C)$ se tiene que $\lambda_2(C) \leq \lambda_2(P) = \frac{c}{2}\gamma_2(\mathbf{F})$. De acuerdo al análisis anterior, sabemos que existe un $\hat{d} < 0$ que es más grande o igual que $(\frac{c}{2}\lambda_2(\mathbf{F}))$. De esta forma demostramos que los estados de la red con pesos (4.4) son asintóticamente estables al menos de manera local si y solo si elegimos correctamente en base a (4.21) las entradas de la matriz con pesos C . En el artículo Li y Chen (2006) menciona que la sincronización de una red de este tipo (4.4) puede ser caracterizada de la siguiente forma:

$$c_{ij} \geq \frac{|\hat{d}|}{|2\gamma_2(\mathbf{F})|}, \quad (i \neq j). \quad (4.23)$$

Cabe resaltar que solo es posible asegurar que el fenómeno de sincronización ocurre si el método para sincronizar redes con pesos se realiza de esta forma, ya que de otra manera no es posible asegurar que este fenómeno ocurra.

4.1.1. Ejemplo 3: Sincronización de una red con pesos en las conexiones de neuronas HR

En esta sección se propone un ejemplo con el cual se pretende ilustrar los resultados de sincronización anteriores. Para este ejemplo, se utilizó la misma topología de red del capítulo anterior la cual está dada por la Figura 3.1, el cual fue construido bajo el modelo de crecimiento de BA, sin embargo, en esta red los enlaces tienen pesos, los cuales fueron elegidos de acuerdo a (4.23), debido a que es necesario elegir las entradas de la matriz C de la forma correcta para asegurar la sincronización en la red (4.4). Por lo tanto, la matriz de acoplamiento externo $C = \{c_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ está construida de la siguiente manera:

- (i) Los pesos de la matriz C son números reales positivos, *i.e.*, $c_{ij} \in \mathbb{R}^+$.
- (ii) Para los elementos fuera de la diagonal. En la entrada de la matriz correspondiente, es necesario indicar los pesos entre cada par de nodos conectados i y j ($i \neq j$) en la red, esto es $c_{ij} = c_{ji} > 0$, de otra manera $c_{ij} = c_{ji} = 0$, por lo tanto es simétrica.
- (iii) Los elementos en la diagonal c_{ii} están definidos como:

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} = - \sum_{i=1, j \neq i}^N c_{ji}, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.24)$$

(iv) Los elementos por renglón satisfacen:

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.25)$$

Esta red está formada por 50 nodos cuya dinámica es el modelo de HR (2.3), de tal forma que la red descrita anteriormente se ve como en la siguiente ecuación de estados:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax_{i1}(t)^3 + bx_{i1}(t)^2 + I + x_{i2}(t) - x_{i3}(t) \\ e - dx_{i1}(t)^2 - x_{i2}(t) \\ \epsilon(s(x_{i1}(t) + x_0) - x_{i3}(t)) \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma x_j(t) \quad (4.26)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Donde $x_i(t) \in \mathbb{R}^3$ representa el vector de estados del i -ésimo nodo; la matriz Γ por simplicidad tiene de la siguiente forma $\Gamma = \text{diag}(1, 0, 0)$ y de acuerdo a esto las neuronas están acopladas internamente a través de su primer variable estado, el cual está relacionado con el potencial de acción. De acuerdo a lo anterior la ecuación (4.26) tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ax_{i1}(t)^3 + bx_{i1}(t)^2 + I + x_{i2}(t) - x_{i3}(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{j1}(t) \\ e - dx_{i1}(t)^2 - x_{i2}(t) \\ \epsilon(s(x_{i1}(t) + x_0) - x_{i3}(t)) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

Considerando que la red en este ejemplo tiene las mismas conexiones que la red en el ejemplo 1 del capítulo anterior, se sabe que la nueva matriz \mathbf{F} formada a partir de la matriz con pesos C tendrá las mismas características de la matriz L del ejemplo anterior, debido a esto es que es posible obtener las matrices consecutivas tales que a partir del análisis teórico se pueda saber el valor adecuado para escoger las entradas de la matriz C tal que hagan que la red se sincronice de acuerdo a (4.23). En este ejemplo, las entradas necesarias para que la red alcance el objetivo de sincronización deben de ser mayor a 5, debido a que consideramos que $\bar{d} = \hat{d} = -8$, $c = 10$ y $\gamma_2(F) = \lambda_2(L) = -1.4183$ valores obtenidos del ejemplo anterior. Este comportamiento se muestra en las siguientes Figuras 4.1 y 4.2.

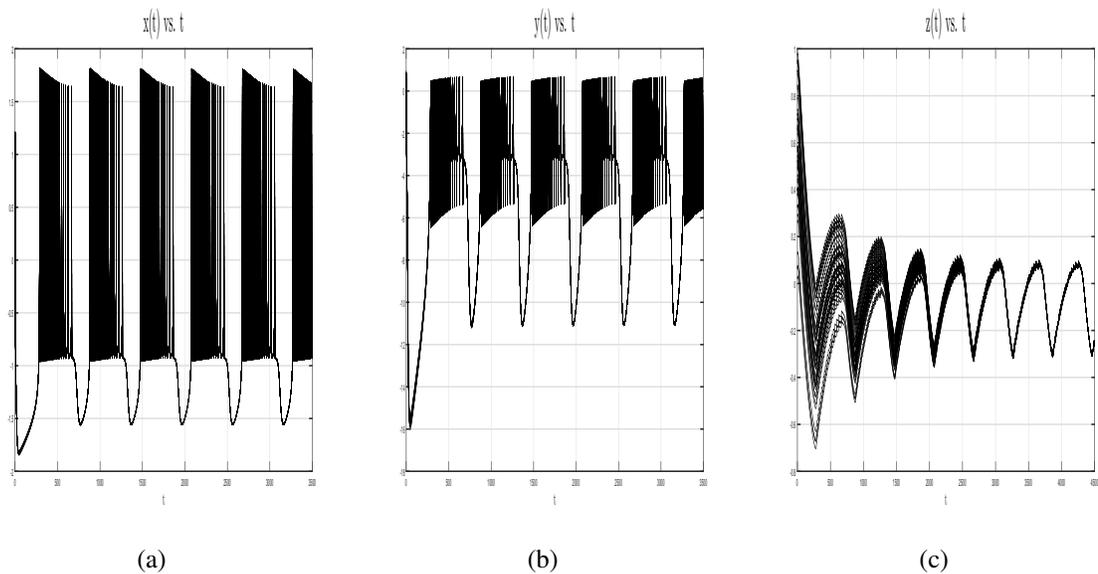


Figura 4.1: Estados de la red con pesos cuyos nodos son neuronas de tipo HR.

En este ejemplo en particular se ha demostrado que eligiendo de manera correcta las entradas de la matriz C , es posible asegurar que redes con peso de la forma (4.4) puedan alcanzar el estado de sincronización, siempre y cuando el análisis en estos modelos en particular se lleve a cabo bajo la forma anterior, ya que de otra manera no es posible asegurar que

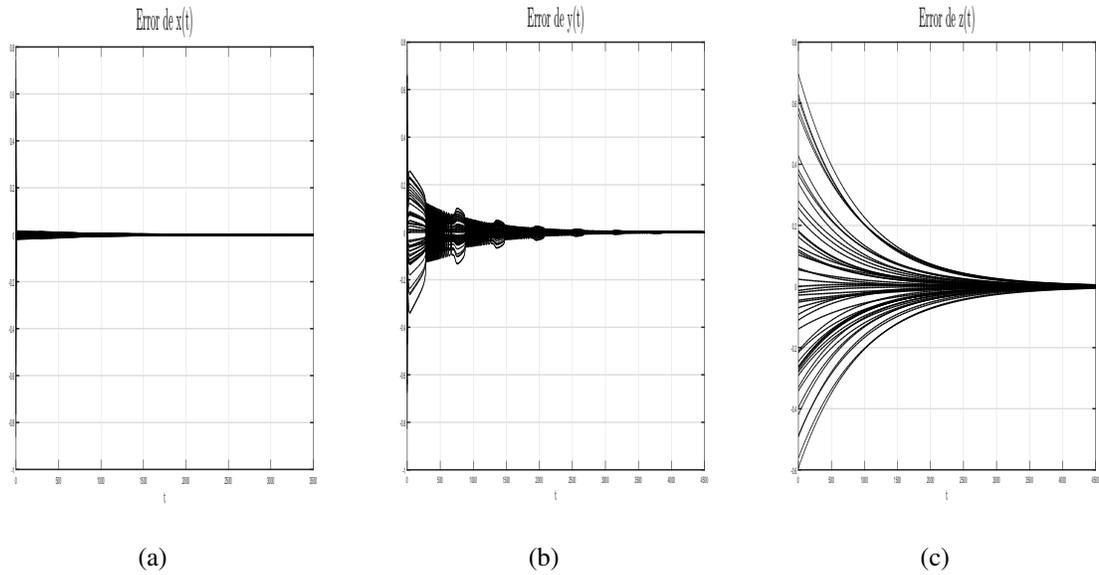


Figura 4.2: Error de Sincronización de la red con pesos cuyos nodos son neuronas de tipo HR.

el fenómeno de sincronización ocurra.

4.2. Regulación por fijación en redes con pesos en las conexiones

En la sección anterior observamos que una red que presenta conexiones con pesos asociados (4.4), puede ser conducida de la misma forma que en el capítulo 3 hacia un estado sincronizado $s(t)$. En esta sección en particular se busca que la misma red con pesos (4.4) converja a un estado estacionario homogéneo llamado \bar{x} , el cual de la misma forma que en el capítulo anterior, representa la solución de un nodo aislado de la red, por lo tanto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. De tal forma que el comportamiento dinámico descrito anteriormente y el cual además es el

objetivo de control en esta sección, se representa por la siguiente ecuación:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = \bar{x} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

El estado estacionario homogéneo \bar{x} satisface que $f(\bar{x}) = 0$. Para lograr el objetivo de control (4.28), de la misma forma que en capítulo anterior, se utilizó la estrategia de control por pinning, que de manera general consiste en diseñar entradas de control para una pequeña porción de nodos en la red llamada δ siendo $\delta \ll N$ siendo N el tamaño de la red. A través de esta estrategia de control, la cual es muy utilizada debido a que reduce el número de controles necesarios para que el objetivo de control sea alcanzado, la información se envía solo a una pequeña cantidad de nodos los cuales son elegidos de manera estratégica o aleatoria de tal forma que a través de sus conexiones hacia otros nodos la información pueda ser distribuida para que de esta forma, los nodos no controlados sigan el comportamiento de los nodos controlados para así alcanzar un comportamiento colectivo común en la red.

Con esto en mente, la red (4.4) bajó está estrategia de control donde además y por simplicidad los nodos de la red están ordenados de tal manera que los nodos controlados sean los primeros elementos en la red y los nodos no controlados sean los siguientes, tiene la siguiente forma:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma x_j(t) + \mu_i, & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma x_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (4.29)$$

Donde μ_i es la entrada de control y equivale a $-\kappa\Gamma(x_i(t) - \bar{x})$ siendo κ la ganancia de control ($\kappa > 0$), Γ la matriz de acoplamiento interno y está descrita como en la sección anterior.

Es necesario demostrar primero que \bar{x} es una solución común para todos los elementos de la red (4.29), para esto y de la misma forma al capítulo anterior, sustituimos \bar{x} en la ecuación (4.29) para $i = 1, \dots, N$; de tal forma que si seguimos con el procedimiento adecuado, nos damos cuenta que debido a la propiedad de difusividad que cumple la matriz C (4.25), es posible concluir que \bar{x} es solución de la red. Por otro lado, como hemos venido haciendo durante el transcurso de esta tesis, es necesario conocer la estabilidad de \bar{x} en la red (4.29), para esto y de manera similar al capítulo anterior definimos el error de control dado por:

$$\Psi_i(t) = x_i(t) - \bar{x}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.30)$$

Cuya dinámica es la siguiente ecuación:

$$\dot{\Psi}_i(t) = \dot{x}_i(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.31)$$

Ahora sustituimos la red (4.29) y la ecuación (4.30) en (4.31) obtenemos lo siguiente:

$$\dot{\Psi}_i(t) = \begin{cases} f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij}\Gamma\Psi_j(t) - \kappa_i\Gamma\Psi_i(t), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij}\Gamma\Psi_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (4.32)$$

Es necesario analizar la dinámica alrededor de la solución estacionaria \bar{x} para esto y

debido a que la dinámica de la función f en la red (4.32) es no lineal, se procede a linealizar la función f alrededor de \bar{x} , de tal manera que la red (4.32) es ahora la siguiente ecuación

$$\dot{\Psi}_i(t) = \begin{cases} f(\bar{x}) + \mathbf{D}f(\bar{x})\Psi_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}\Gamma\Psi_j(t) - \kappa_i\Gamma\Psi_i(t), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ f(\bar{x}) + \mathbf{D}f(\bar{x})\Psi_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}\Gamma\Psi_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (4.33)$$

Debido a que $f(\bar{x}) = 0$ la ecuación (4.33) es la siguiente

$$\dot{\Psi}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{D}f(\bar{x})\Psi_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}\Gamma\Psi_j(t) - \kappa_i\Gamma\Psi_i(t), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta; \\ \mathbf{D}f(\bar{x})\Psi_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij}\Gamma\Psi_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (4.34)$$

Es necesario definir una matriz Ψ tal que sus entradas, represente los errores de control de los N nodos; de tal manera que sea

$$\Psi(t) = [\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_N(t)] \in \mathbb{R}^{n \times N} \quad (4.35)$$

La ecuación (4.34) en forma matricial de acuerdo a (4.35) tiene la siguiente forma

$$\dot{\Psi}(t) = \mathbf{D}f(\bar{x})\Psi(t) + \Gamma\Psi(t)(C - K) \quad (4.36)$$

Donde $\mathbf{D}f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano de f evaluado en \bar{x} , la matriz de ganancias dada por $K = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\delta, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, donde $\kappa_i > 0$ si $i = 1, \dots, \delta$ y $\kappa_i = 0$ si $i = 1 + \delta, 2 + \delta, \dots, N$.

Ahora sea definida la matriz B , cuyas entradas representan la diferencia entre la matriz de pesos C y la matriz de ganancias K , de tal forma que (4.36) es ahora la siguiente

$$\dot{\Psi}(t) = \mathbf{D}f(\bar{x})\Psi(t) + \Gamma\Psi(t)B. \quad (4.37)$$

Los elementos de la matriz B son de la siguiente manera, para los elementos fuera de la diagonal $b_{ij} = c_{ij}$, mientras que los elementos en la diagonal $b_{ii} = c_{ii} - \kappa_i$. Las características de la matriz B permiten que sus eigenvalores pueden ser ordenados de la siguiente manera

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \dots \geq \beta_N \quad (4.38)$$

Donde además, se sabe que la matriz B se puede diagonalizar de la siguiente forma $B = \Delta\beta\Delta^{-1}$, siendo $\Delta = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y se forma con los eigenvectores derechos σ_i de B , por otro lado $\beta = \text{diag}[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ cuyas entradas representan los eigenvalores α_i de B .

Proponemos un cambio de variable de la forma $\Psi(t) = Z\Delta$, tal que la ecuación (4.37) sea la siguiente:

$$\dot{Z}(t) = \mathbf{D}f(\bar{x})Z(t) + \Gamma\Psi(t)\beta. \quad (4.39)$$

Ahora si descomponemos la ecuación anterior (4.39) en columnas, se obtiene lo siguiente:

$$\dot{z}_i = (\mathbf{D}f(\bar{x}) + \beta_i \Gamma) z_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.40)$$

Donde el vector $z_i \in \mathbb{R}^n$. La ecuación (4.40) representa N sistemas lineales invariantes en el tiempo los cuales de la misma manera que en el capítulo anterior, son asintóticamente estables si la matriz $\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\beta_i \Gamma$ para cada α_i cuando $i = 1, 2, \dots, N$ es Hurwitz. Si esto es cierto, se puede concluir que el estado estacionario homogéneo \bar{x} es asintóticamente estable y por lo tanto es una solución para la red controlada (4.29). De manera general y de acuerdo a la ecuación (4.38), sabemos que β_1 es el eigenvalor con la parte real más grande de la matriz B , de tal manera que si $\mathbf{D}f(\bar{x}) + \beta_1 \Gamma$ es una matriz Hurwitz entonces el resto de las matrices con β_i para $i = 2, \dots, N$, también serán Hurwitz. Y por lo tanto y de manera similar al análisis del capítulo anterior, sabemos que si elegimos el valor adecuado de la ganancia κ_i tal que los eigenvalores de las matrices $\mathbf{D}f(\bar{x}) + \beta_i \Gamma$ tengan la parte real negativa para $i = 1, 2, \dots, N$, podemos asegurar que el problema de control esté resuelto y por consecuencia concluir que el estado estacionario homogéneo \bar{x} es asintóticamente estable.

4.2.1. Ejemplo 4: Regulación por fijación en una red con pesos en las conexiones de neuronas HR

Para mostrar la validez de los resultados teóricos anteriores se propuso un ejemplo en el cual se utilizó el mismo modelo de red aleatoria de BA, Figura 4.3. Para este ejemplo, consideramos una red de N nodos idénticos acoplados de manera difusiva con pesos en las conexiones, cuyos nodos son sistemas dinámicos n -dimensionales de la forma (2.3).

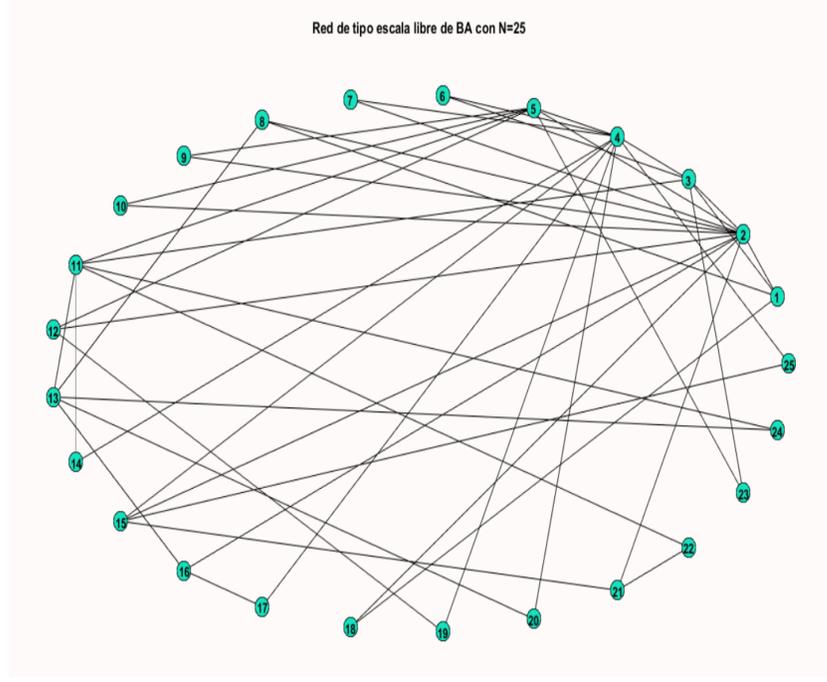


Figura 4.3: Grafo del modelo de BA con $m_0 = m = 5$ y veinticinco nodos

La matriz de acoplamiento externo $C = \{c_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ para este ejemplo, fue construida de la siguiente manera:

- (i) Las entradas fuera de la diagonal son simétricas, esto es $c_{ij} = c_{ji}$ cuando $i < j$, si hay conexión entre el nodo i y el nodo j ($i \neq j$) entonces les corresponderá un valor mayor a cero, si este no fuera el caso entonces no habrá conexión y por lo tanto $c_{ij} = c_{ji} = 0$.
- (ii) Las entradas en la diagonal c_{ii} de la están definidas de la siguiente manera:

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} = - \sum_{i=1, j \neq i}^N c_{ji}, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.41)$$

Esta matriz de acuerdo al modelo de crecimiento de BA comenzó con $m_0 = 5$ y cada paso del tiempo nuevos nodos fueron añadidos hasta llegar a un total de 25 nodos.

(iii) Esta matriz satisface la condición de difusividad, debido a que cada la sumatoria por renglón es igual a cero, esto es

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.42)$$

El comportamiento de red esta descrito por la siguiente ecuación de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax_{i1}(t)^3 + bx_{i1}(t)^2 + x_{i2}(t) - x_{i3}(t) + I \\ e - dx_{i1}(t)^2 - x_{i2}(t) \\ \varepsilon(s(x_{i1}(t) + x_0) - x_{i3}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N c_{ij}x_{j1}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

para $i = 1, \dots, N$. Donde μ_i es la entrada de control diseñada por retroalimentación lineal de la forma $\mu_i = -\kappa\Gamma(x_i(t) - \bar{x})$, siendo \bar{x} el punto de referencia y está dado por un punto de equilibrio real del sistema de HR el cual es $\bar{x} = (0.7069, -1.4983, -0.3525)$. Considerando esto, la ecuación anterior se ve de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax_{i1}(t)^3 + bx_{i1}(t)^2 + x_{i2}(t) - x_{i3}(t) + I + \sum_{j=1}^N c_{ij}x_{j1}(t) - \kappa_i(x_{i1}(t) - \bar{x}) \\ e - dx_{i1}(t)^2 - x_{i2}(t) \\ \varepsilon(s(x_{i1}(t) + x_0) - x_{i3}(t)) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

para $i = 1, 2, \dots, \delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, N$.

En este ejemplo y de acuerdo al modelo aleatorio de BA elegiremos fijar los controlado-

res en los nodos de manera estratégica. Para este ejemplo en particular elegimos el nodo 2, debido a que es un nodo hub el cual tiene el mayor número de enlaces dentro de la red. Del análisis anterior se sabe que para solucionar este problema de control, es necesario elegir de manera correcta el valor de la ganancia tal que haga que cada una de las matrices (4.40) sean Hurwitz para cada β_i con $i = 1, \dots, N$ de la matriz B , de tal forma que cada uno de los eigenvalores de (4.40) tengan la parte real negativa para así lograr que la red alcance el objetivo de control dado por (4.28). De esta forma elegimos a $\kappa_2 = 150$, siendo los eigenvalores de B de acuerdo al orden (4.38) los siguientes

$$\beta_1 = -0.3903 \geq \beta_2 = -1.0695 \geq \dots \geq \beta_{25} = -170.3659$$

Considerando esto, se procede a comprobar que (4.40) es Hurwitz, para esto se tiene que cuando $\beta_1 = -0.39033$:

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 (\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\beta_1\Gamma) = -0.9517 \pm 3.1363i \text{ y } \lambda_3 (\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\beta_1\Gamma) = -0.0014 + 0i$$

cuando $\beta_2 = -1.0695$: $\lambda_1 (\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\beta_1\Gamma) = -5.5184$, $\lambda_2 (\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\beta_1\Gamma) = -3.1772$ y $\lambda_3 (\mathbf{D}f(\bar{x}) + c\beta_1\Gamma) = -0.0012 + 0i$ de esta forma se realizó el análisis para cada valor de β_i cuando $i = 1, \dots, N$ y se comprobó que es Hurwitz, concluyendo así en este ejemplo que de la misma manera el estado estacionario \bar{x} es asintóticamente estable de manera exponencial, como se muestra en la Figura 4.4 y 4.5.

En el siguiente capítulo presentamos las conclusiones de este trabajo, al igual que el trabajo a futuro en este tema de investigación.

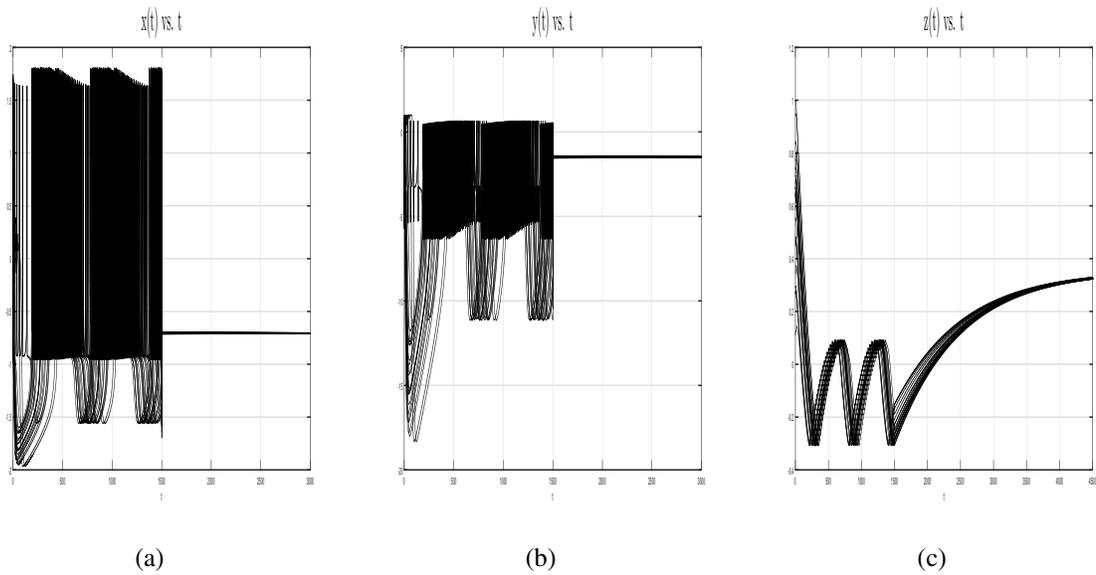


Figura 4.4: Estados de la red con pesos cuyos nodos son neuronas de tipo HR.

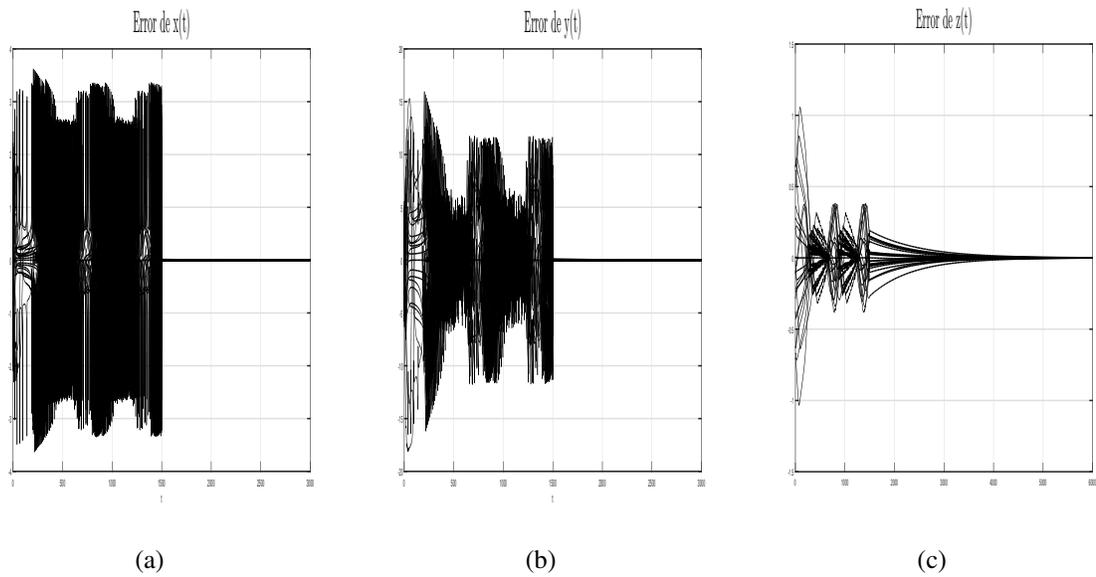


Figura 4.5: Error de regulación de la red con pesos cuyos nodos son neuronas de tipo HR.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis analizamos el comportamiento colectivo de una red dinámica compleja de N nodos, siendo cada uno de éstos, un sistema dinámico n -dimensional con acoplamientos lineales. En particular estudiamos la sincronización y regulación en dos casos. El primer caso, es cuando se tiene una fuerza de acoplamiento uniforme; en el segundo caso consideramos diferentes fuerzas de acoplamiento en los enlaces. Aun que, analizamos el comportamiento colectivo para una red general. El trabajo se enfoca en redes cuyos nodos son modelos neuronales de HR (2.3), el cual se asocia con el comportamiento eléctrico de la membrana neuronal.

Se analizó la estabilidad del estado sincronizado en redes complejas de nodos idénticos, basados en este resultado se abordó el problema de regulación. En el caso de redes con peso uniforme se utilizó un método similar al conocido en la literatura como *Criterio de λ_2* , el cual nos permite establecer condiciones de estabilidad asintótica de la solución sincronizada como la solución de un nodo aislado cualquiera $s(t)$ repetido N veces, de manera local mediante

una linealización de la dinámica y una descomposición de las conexiones.

Después de haber logrado la sincronización en la red uniforme, abordamos el problema de regulación de la red a un punto de equilibrio de los nodos aislados. Más aun, el objetivo de control se logra sin necesidad de controlar cada uno de los nodos. Para lograr este objetivo, se seleccionó una estrategia de control llamada *pinning*, la cual es muy usada debido a que reduce el número de controladores necesarios para controlar la red, ya que las entradas de control son añadidas de manera estratégica a una pequeña porción de nodos de la red llamada δ ($\delta \ll N$) aunque también estas pueden ser añadidas de manera aleatoria. En este trabajo aplicamos controladores solo a los nodos más conectados resultando en una regulación bastante rápida y efectiva.

Para el segundo modelo de red propuesto, las conexiones entre los nodos tienen pesos variados y la matriz de acoplamiento externo ya no tiene simplemente entradas de cero y uno por lo que se planteó que era necesario hacer extensiones de la teoría utilizada en el modelo de red con acoplamiento uniforme. En el sentido de tener una matriz de pesos que sea más definida negativa que la necesaria para sincronizar en una red con conexiones uniformes. Esto se corrobora debido a que en base al análisis anterior de redes sin peso se pudo establecer condiciones bajo las cuales el fenómeno de sincronización en la red con pesos se puede lograr. De manera consecutiva se deseaba demostrar que estas redes pueden alcanzar un punto de referencia dado y de la misma forma era necesario utilizar una estrategia de control económica, por lo que de la misma forma se utilizó la estrategia de control por pinning, a través de esta y mediante el uso de la teoría de álgebra lineal, control clásico y sistemas no lineales pudimos establecer las condiciones bajo las cuales la red con pesos en las conexiones

converge a un estado de control deseado llamado \bar{x} .

Como trabajo a futuro, en este tema de investigación se propone plantear nuevos fenómenos de interés de tal manera que nuevos modelos de red surjan, en los cuales mas características dadas por Steven Strogatz sean consideradas. Por ejemplo considerar que exista diversidad de conexión en el sentido de que los pesos en la red tengan diferentes signos y a partir de este establecer condiciones bajo las cuales el comportamiento de sincronización y regulación exista. Por otro lado y en este mismo contexto considerar que el modelo de red tiene direcciones es decir; la información entre los nodos fluye en un solo sentido y bajo una dirección. También se puede considerar que dentro de la misma red coexistan diferentes tipos de nodos, por ejemplo modelos neuronales de HH, Morris Lecar, Fitzhugh-Naguno (FN) y HR. Para que de la misma manera, se puedan establecer las condiciones de estabilidad bajo las cuales los fenómenos de sincronización y regulación ocurran.

Otra característica importante que puede ser considerada en un modelo de red es cuando todas las variables vistas anteriormente son consideradas juntas, de tal manera que todas estas complicaciones se influyan mutuamente y provoquen un comportamiento complicado y por consecuencia se asemeje más a un fenómeno real.

Bibliografía

- Chen, G.; Wang, X.; Li, X. (2015) *Introduction to Complex Networks: Models, Structures and Dynamics*, Wiley, Singapore.
- Dorogovtsev, S. N.; Mendes, J. F. F. (2003) *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, New York, EE. UU.
- Barrat, A.; Bathelmy, M.; Vespignani, A. (2008) *Dynamical Processes on Complex Networks*, Cambridge University Press, New York, EE. UU.
- Boccaletti, S.; Latora, V.; Moreno, Y.; Chavez, M.; Hwang, D. U. (2006) Complex Networks: Structure and dynamics, *Physics Reports*, 424, 175–308.
- Chen, G. (2014) Pinning control and synchronization on complex dynamical networks, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12(2), 221–230.
- Strogatz, S. H. (2001) Exploring complex networks, *Nature*, 410, 268–276.
- Erdős, P.; Rényi, A. (1959) On Random Graphs. I. *Publicationes Mathematicae*, 6, 290–297
- Barabási, A. L.; Albert, R. (1999) Emergence of Scaling in Random Networks, *Science*, 286, 509–512.

- Belykh, I.; Hasler, M.; Lauret, M.; Nijmeijer, H. (2005) Synchronization and graph topology, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(11), 3423–3433
- Hodgkin, A. L.; Huxley, A. F. (1952) A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.*, 117, 500–544.
- Hindmarsh, J. L.; Rose, R. M. (1984) A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations, *Proceedings of the Royal Society London, Series B, Biological Sciences*, 1222, 87–102.
- Wang, X. F.; Chen, G. (2002) Synchronization in scale-free dynamical network: robustness and fragility, *IEEE Transactions on circuits and systems-1: fundamental theory and applications*, 9, 54–62.
- Wang, X. F.; Chen, G. (2002) Pinning control of scale-free dynamical networks, *Physica A: statistical mechanics and its applications*, 310(3-4), 521–531.
- Li, X. (2005) Sync in complex dynamical networks: stability, evolution, control and application, *International Journal of Computational Cognition*, 3(4), 16–26.
- Steur, E. (2007) *On Synchronization of Electromechanical Hindmarsh-Rose Oscillators*, Eindhoven University of Technology, Eindhoven Holanda.
- Steur, E.; Tyukin, I.; Nijmeijer, H. (2009) Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators, *Physica D*, 238, 2119–2128
- Steur, E. (2011) Synchronous behavior in networks of coupled systems: with applications to

- neuronal dynamics, Eindhoven University of Technology, DOI: 10.6100/IR718842, Eindhoven Holanda.
- Kim, J.-S.; Allgower, F. (2010) A Nonlinear Synchronization Scheme for Hindmarsh-Rose Models, *Journal of Electrical Engineering & Technology*, 5(1), 163 – 170
- Hrg, D. (2013) Synchronization of two Hindmarsh–Rose neurons with unidirectional coupling, *Neural Networks*, 40, 73–79
- Mamat, M.; Kurniawan, P. W.; Kartono, A. (2013) Development of Dynamics and Synchronization Model for Coupled Neurons Using Hindmarsh-Rose Model, *Applied Mathematical Sciences*, 7(3), 135 – 152
- Solís-Perales, G.; Zapata, J. L. (2013) Synchronization of complex networks with negative couplings, *PHYSCON 2013*, San Luis Potosí, México, 1–4
- Solís-Perales, G.; Reyes, L. M.; Caín, J. (2016) Sincronización evolutiva de una red de neuronas, *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2016*, Querétaro, México, 1–6
- Solís-Perales, G.; Barajas-Ramírez, J. G. (2017) Activation of neuronal ensembles via controlled synchronization, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15(1), 122–128
- Belykh, I.; De Lange, E.; Hasler, M. (2005) Synchronization in pulse-coupled networks of bursting neurons, *International symposium on nonlinear theory and its applications 2005 (NOLTA2005)*, Bruges, Belgium, 269–702

- Belykh, I.; De Lange, E.; Hasler, M. (2005) Synchronization of Bursting Neurons: What Matters in the Network Topology, *Physical Review Letters*, 94, 188101
- Djeundam, S. R. D.; Yamapi, R.; Filatrella, G.; Kofane, T. C. (2016) Dynamics of Disordered Network of Coupled Hindmarsh–Rose Neuronal Models, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(3), 1650048
- Su, H.; Wang, X. F. (2013) *Pinning Control of Complex Networked Systems: Synchronization, Consensus and Flocking of Networked Systems via Pinning*, Shanghai Jiao Tong University Press - Springer, Shanghai-Berlin
- Zhou, J.; Wu, X.; Yu, W.; Small, M.; Lu, J.-a. (2008) Pinning synchronization of delayed neural networks, *CHAOS*, 18, 043111
- Aizemberg, I. (2011) *Complex-valued neuronal networks with multi-valued neurons*, Springer, Berlin
- Fall, C.P.; Marland, E.S.; Wagner, J.M.; Tyson, J.J. (2002) *Computational cell biology*, Springer-Verlag New York
- Christian, K. (2015) *Multiple time scale dynamics*, Springer Switzerland
- Perko, L. (2001) *Differential equations and dynamical systems*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York
- Li, X. (2005) Sync in complex dynamical networks: stability, evolution, control and application, *International Journal of Computational Cognition*, 3(4), 16–26

Chen, T.; Liu, X.; Lu, W. (2007) Pinning complex networks by a single controller, *IEEE*

Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 54(6), 1317–1326

Li, Z.; Chen, G. (2006) Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks, *IEEE Transactions on circuits and systems-II: express briefs*, vol. 53.