

**Este artículo puede ser usado únicamente para uso personal o académico.
Cualquier otro uso requiere permiso del autor o editor.**

El siguiente artículo fue publicado en las *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2005*.

CONVERTIDOR ELEVADOR: MAPA UNIDIMENSIONAL Y DINAMICA NO LINEAL

Sergio C. Yáñez Campos^(*), Ricardo Femat^(**) y Jesús Leyva-Ramos^(**).

^(*)Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Av. Dr. Manuel Nava No. 8, San Luis Potosí, S. L. P., 78290, México. scyanez@ipicyt.edu.mx

^(**) Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Camino a la presa de San José 2055, , San Luis Potosí, S. L. P, México. rfemat@ipicyt.edu.mx, jleyva@ipicyt.edu.mx

Resumen—En esta contribución se realiza el desarrollo de un mapa discreto en el tiempo del convertidor elevador controlado en modo corriente pico a partir de sus formas de onda. Se presentan criterios de existencia de puntos fijos, puntos periódicos y su estabilidad. Las propiedades geométricas del mapa discreto son ilustradas mediante ejemplos de simulación.

Palabras clave— Caos, Sistemas dinámicos, convertidores CD-CD, corriente programada

I. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, el análisis y diseño de los circuitos electrónicos de potencia se ha llevado a cabo por medio de modelos lineales, esto se debe a que la linealización es una técnica segura cuando se quiere estudiar el comportamiento del sistema alrededor de un punto de operación deseado. Sin embargo, estos modelos no describen los diversos fenómenos no lineales que pueden presentar estos circuitos.

En años recientes se ha prestado especial interés en analizar los fenómenos no lineales presentes en los circuitos electrónicos de potencia con el propósito de comprenderlos de una manera profunda y así darles una aplicación práctica y segura. Para esto, se han desarrollado modelos promedio no linealizados, estos capturan el comportamiento de los circuitos en el dominio de las bajas frecuencias y pueden predecir un comportamiento periódico de periodo dos. Por otro lado, los mapas discretos en el tiempo permiten una representación clara de una gran variedad de sistemas físicos [1], [2]. De esta manera, diferentes investigaciones han reportado diversos fenómenos no lineales como son: periodicidad, oscilaciones cuasiperiódicas y caos [1] - [3].

La idea fundamental de los mapas discretos en el tiempo se basa en el muestreo y asignación del vector de estados del estado actual al siguiente estado. Normalmente, esta asignación genera mapas con dimensiones mayores o iguales a dos lo que complica su análisis. Tradicionalmente, el análisis de estos mapas, se lleva a cabo por medio del

Jacobiano del mapa discreto y diagramas de bifurcación [1] – [3]. En [1], se presentan diferentes modelos discretos en el tiempo clasificados de acuerdo al instante de muestreo; también se presenta la derivación de un modelo llamado two-by-two que realiza el muestreo en cada conmutación, el cual, solo es válido bajo el esquema de control en modo voltaje. Por otro lado, se ha reportado una clase diferente de bifurcaciones llamada bifurcaciones por colisiones en el borde (border collisions bifurcations) las cuales son particulares de sistemas suaves a trozos como es el caso de los convertidores conmutados. La derivación de un mapa estroboscópico lineal en la vecindad de dichos bordes es presentada en [2]. En [3] se presenta un estudio de las bifurcaciones en una configuración maestro-esclavo de dos convertidores reductores conectados en paralelo.

El propósito de este trabajo consiste en obtener un mapa discreto en el tiempo de dimensión-uno que permita el análisis de una forma clara y sencilla los diversos fenómenos no lineales presentes en el convertidor elevador.

La idea principal se basa en la derivación de una ecuación diferencia a partir de las formas de onda del convertidor elevador controlado en modo corriente pico sin rampa estabilizadora. Esta ecuación diferencia, genera una ecuación iterativa similar a una ecuación logística, la cual asigna el estado actual al estado siguiente [1], [2], [6]. En este caso, el estado es el ciclo de trabajo del convertidor elevador. El análisis de la ecuación iterativa se realiza por medio de criterios de estabilidad y gráficamente se lleva a cabo mediante mapas iterativos (cobweb diagrams).

La organización del texto es como sigue. La descripción del convertidor elevador controlado en modo corriente pico se discute en la sección II. La derivación del mapa unidimensional a partir de la geometría de las formas de onda del convertidor se lleva a cabo en la sección III. En la sección IV, se presentan criterios para el estudio de las propiedades geométricas del mapa obtenido, en el dominio del ciclo de trabajo. Finalmente, en la sección V se presentan ejemplos ilustrativos de simulaciones numéricas

donde el mapa iterativo presenta diferentes tipos de comportamiento.

II. CONVERTIDOR ELEVADOR CONTROLADO EN MODO CORRIENTE

El convertidor elevador (figura 1), como su nombre lo implica, proporciona un voltaje de salida mayor que el voltaje de entrada. La operación básica del convertidor elevador implica que el circuito conmute entre dos diferentes topologías cuando el mosfet es encendido y apagado. De esta forma, el convertidor es un circuito multitopológico. En la práctica este tipo de convertidor puede tomar dos diferentes modos de operación: a) conducción en modo continuo (CCM) y b) conducción en modo discontinuo (DCM). En este trabajo se considera que el convertidor elevador opera en conducción en modo continuo; Es decir, la corriente del inductor nunca decae hasta cero.

El convertidor elevador es un circuito multitopológico. En CCM el convertidor toma dos diferentes topologías de acuerdo al estado del mosfet. Cuando el mosfet es encendido el sistema es gobernado por un conjunto de ecuaciones ordinarias (ODE's) y cuando es apagado el sistema es gobernado por otro conjunto de ODE's. Por esta razón, el convertidor elevador operando en CCM presenta el comportamiento de un sistema dinámico suave a trozos. Los conjuntos de ecuaciones ordinarias que gobiernan el comportamiento del convertidor elevador en sus diferentes estados o topologías son los siguientes:

estado uno (mosfet encendido)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{E}{L} \quad (1.a)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{CR} \quad (1.b)$$

estado dos (mosfet apagado)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{E - v_c}{L} \quad (2.a)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{i_L}{C} - \frac{v_c}{CR} \quad (2.b)$$

La solución de estos sistemas de ecuaciones puede obtenerse numéricamente por métodos comunes. Nótese que en el espacio de estados, cada uno de estos sistemas de ecuaciones diferenciales es suave y continuo, sin embargo, la secuencia de estos sistemas es suave a trozos, esto produce interesantes fenómenos no lineales como veremos adelante.

El estado del mosfet es gobernado por una función de conmutación que toma los valores discretos 1 o 0. El valor discreto de la función de conmutación es obtenido al comparar la corriente del inductor sensada i_s con la señal de

referencia i_{ref} . Ver figura 1 y 2. De esta forma, la topología del circuito conmute de un estado a otro siempre que la expresión $i_s - i_{ref}$ cambia de signo, tal que, el mosfet es encendido cuando $i_s < i_{ref}$ y es apagado cuando $i_s > i_{ref}$. Por lo tanto, la condición de conmutación es $i_s - i_{ref} = 0$.

La operación completa del convertidor elevador controlado en modo corriente sin rampa estabilizadora es como sigue. Existen dos topologías que puede tomar el circuito de acuerdo al estado del mosfet. Idealmente, en la práctica, el mosfet es encendido por un pulso periódico de reloj a una frecuencia fija.

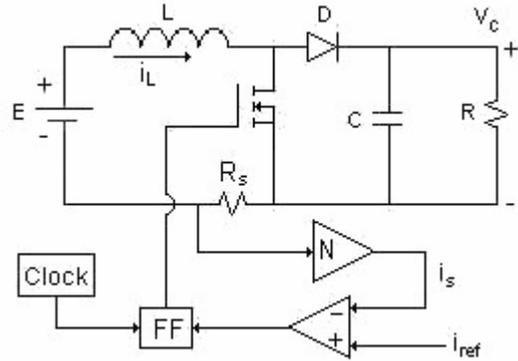


Fig. 1. Convertidor elevador controlado en modo corriente sin rampa estabilizadora.

Durante el tiempo que el mosfet es encendido, la corriente que fluye a través del inductor se incrementa linealmente. El mosfet es apagado hasta que la corriente del inductor sensada i_s iguala la señal de referencia i_{ref} . Durante el intervalo de tiempo que el interruptor es apagado la corriente del inductor decae de una manera exponencial. El mosfet se mantiene apagado hasta que es encendido nuevamente por el pulso del reloj. Estos eventos se repiten periódicamente de acuerdo a los pulsos del reloj. Sin embargo, en la práctica también se puede tener otro tipo de comportamientos como se describe a continuación. Cuando el mosfet está encendido y se recibe otro pulso de reloj este es ignorado puesto que el mosfet ya está encendido, de esta forma el mosfet puede mantenerse encendido por más de un periodo del pulso del reloj. La forma de onda de la corriente del inductor que ilustra estos comportamientos se muestra en la figura 2.

III. DERIVACIÓN DEL MAPA ITERATIVO UNIDIMENSIONAL

En esta sección se deriva una ecuación diferencia de la forma general $x_{k+1} = f(x_k)$. Esta expresión genera un mapa iterativo que relaciona el estado actual x_k con el siguiente estado x_{k+1} en el espacio real R. En este trabajo el estado x es el ciclo de trabajo d . Este es determinado como la relación del tiempo de encendido del mosfet entre el periodo del pulso del reloj T y su complemento $d' = (1-d)$ como la

relación del tiempo de apagado del mosfet entre el periodo del pulso del reloj.

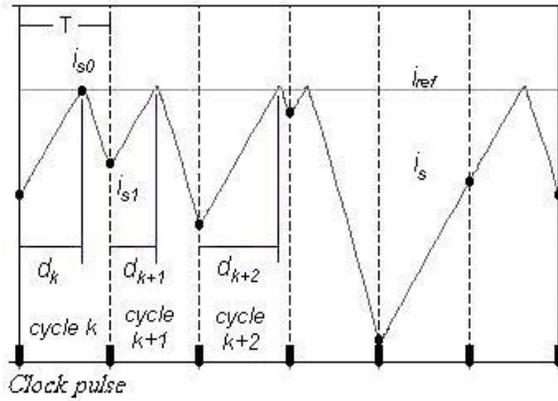


Fig. 2 Forma de onda de la corriente del inductor.

La derivación de la ecuación iterativa se lleva a cabo obteniendo una expresión para el ciclo de trabajo a partir de la forma de onda de la corriente del inductor sensada. La figura 2 muestra que la distancia entre la señal de referencia y la corriente del inductor sensada (i_{s1}) al final del ciclo k es la misma que la corriente sensada al inicio del ciclo $k+1$, esta relación puede ser expresada por medio de la siguiente ecuación

$$i_{s1} = i_{ref} - Md_{k+1}TNR_s \quad (3)$$

donde $M = E/L$ es la pendiente de la corriente del inductor, R_s es la resistencia de sensado de la corriente del inductor y N es la ganancia de la corriente sensada del inductor. Resolviendo esta expresión para d_{k+1} se tiene la siguiente relación para el ciclo de trabajo en el ciclo $k+1$

$$d_{k+1} = \frac{i_{ref} - i_{s1}}{MTNR_s} \quad (4)$$

Ahora por claridad se denota el tiempo de encendido del mosfet como t_1 y t_2 como el tiempo de apagado del mosfet. De esta manera, la corriente sensada del inductor al final del ciclo k , cuando el mosfet esta apagado se determina por

$$i_{s1} = i_L(t_2)NR_s \quad (5)$$

nótese que la corriente del inductor de esta expresión depende del ciclo de trabajo d_k . Ahora bien, el sistema de ecuaciones que gobierna la corriente del inductor cuando el mosfet se encuentra apagado está definido por el sistema de ecuaciones (2). Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las siguientes expresiones para la corriente del inductor y el voltaje de salida respectivamente

$$i(t_2) = \exp(-\alpha t_2) \left[\frac{\alpha L REF + E - v_1}{\omega L} \text{sen}(\omega t_2) + REF \cos(\omega t_2) \right] + \frac{E}{R} \quad (6)$$

$$v(t_2) = E - \exp(-\alpha t_2) \left[\left(\alpha v_1 - \alpha E - \frac{REF}{C} \right) \frac{\text{sen}(\omega t_2)}{\omega} + (E - v_1) \cos(\omega t_2) \right] \quad (7)$$

donde, $\alpha = 1/(2RC)$, $v_1 = \exp(-2\alpha t_1)$,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} \text{ y } REF = \frac{i_{ref}}{NR_s} - \frac{E}{R}.$$

Nótese que las ecuaciones (6) y (7) contienen a v_1 que es el voltaje inicial del capacitor en t_2 , es decir, cuando $t_2 = 0$ y es dependiente del intervalo de tiempo t_1 . Para obtener la ecuación diferencial se elimina esta dependencia tomando la ecuación diferencial (2.b) como una diferencia de voltaje en un tiempo determinado más que como un diferencial de la siguiente manera

$$\frac{dv(t_2)}{dt_2} = \frac{\Delta v}{t_2} = \frac{v_1 - v(t_2)}{t_2} \quad (8)$$

reacomodando la ecuación (2.b) se tiene

$$\frac{v_1 - v(t_2)}{t_2} = \frac{i(t_2)}{C} - \frac{v(t_2)}{CR} \quad (9)$$

sustituyendo las ecuaciones (6) y (7) en esta ecuación se obtiene una expresión dependiente de v_1 que toma la siguiente forma

$$\frac{v_1 - v(t_2, v_1)}{t_2} = \frac{i(t_2, v_1)}{C} - \frac{v(t_2, v_1)}{CR} \quad (10)$$

despejando v_1 de esta expresión y sustituyendo en (6) se obtiene una expresión para la corriente del inductor que no depende de v_1 , sustituyendo la expresión obtenida en (5) y posteriormente en (6) se obtiene una ecuación para d_{k+1} en función de t_2 de la forma general $d_{k+1} = f(t_2)$. Realizando la expansión en series de Taylor de $f(t_2)$ y truncando hasta los términos de segundo orden, se tiene

$$d_{k+1} = \frac{4t_2 RCT(i_{ref}R - NR_s E)}{MNR_s T[3t_2(R^2C - L) + 4LRC]} \quad (14)$$

por otro lado, se tienen las relaciones $t_1 = d_k T$ y $t_2 = (1-d_k)T$ que son validas en condiciones normales de operación; es decir, cuando el mosfet se enciende y apaga en un periodo de pulso de reloj. Sin embargo, cuando el mosfet es encendido por más de un periodo de pulso de reloj la relación para t_2 no se cumple puesto que $d_k > 1$, $(1-d_k) < 0$ y $t_2 < 0$ lo cuál no es posible en un sistema físico. Ahora bien, considerando que el muestreo se realiza en forma discreta en la transición apagado encendido del mosfet y no cada vez que se realiza el pulso de reloj; es decir, el muestreo es asíncrono, entonces, se puede escribir la relación para t_2 de la siguiente manera

$$t_2 = [1 - \text{mod}(d_k, 1)]T \quad (15)$$

El uso de la función modulo en esta expresión es valido bajo el siguiente razonamiento técnico. Una vez que el mosfet ha sido encendido por un pulso de reloj, este se mantendrá encendido invariablemente los pulsos de reloj necesarios hasta que la corriente del inductor iguale la señal de referencia y entonces se apagará (figura 2). Note que la función modulo regresa la parte fraccionaria al dividir el ciclo de trabajo d_k entre 1, la interpretación física de esto es que esta función proporciona el ciclo de trabajo en el último periodo de pulso de reloj; es decir, el tiempo de encendido del mosfet en el ultimo periodo T , por lo tanto se puede conocer el tiempo de apagado t_2 .

Sustituyendo la ecuación (15) en (14) se obtiene la ecuación diferencia que relaciona el estado actual del ciclo de trabajo d_k con el estado siguiente d_{k+1}

$$d_{k+1} = \frac{4RC[1 - \text{mod}(d_k, 1)]T(i_{ref}R - NR_s E)}{MNR_s T[3(1 - \text{mod}(d_k, 1))T(R^2 C - L) + 4LRC]} \quad (16)$$

puesto que esta expresión presenta en forma explicita los parámetros del convertidor elevador, presenta un medio muy conveniente de analizar el comportamiento dinámico del ciclo de trabajo en función de cualquiera de los parámetros. En este trabajo se realiza el análisis de esta expresión usando la corriente de referencia como parámetro de bifurcación.

IV. PROPIEDADES GEOMETRICAS

La ecuación diferencia (16) presenta una gran variedad de comportamientos dinámicos que van desde un comportamiento periódico de periodo uno hasta un comportamiento caótico. El objetivo principal del estudio de un sistema dinámico consiste en conocer su comportamiento, para esto sobra decir que es necesario conocer los puntos fijos del sistema y el comportamiento de las trayectorias en la vecindad de estos puntos.

A. Puntos fijos y puntos periódicos.

Considerar el mapa escalar $x_{k+1} = f(x_k)$ donde la regla de asignación $f: R^{0+} \rightarrow R^{0+}$ donde R^{0+} es el conjunto de los números reales positivos incluyendo el cero, esta dado por (16). Entonces la orbita $O(x_0)$ de un punto inicial $x_0 \in R^{0+}$ es definida como el conjunto de puntos $O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0) \dots\}$ donde $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f$, etc.

La ecuación (16) es una formula explicita para los puntos $f^k(d_0)$ en la orbita de un punto inicial d_0 . Ahora bien, es de suma importancia encontrar las orbitas que consisten de un solo punto. Dichos puntos son llamados puntos fijos d^* o puntos de equilibrio. Representando (16) en la forma general

$$d_{k+1} = f(d_k) \quad (17)$$

se puede escribir la siguiente definición:

Definición 1: Un punto d^* se dice que es un punto fijo del mapa f (17) si $f(d^*) = d^*$.

Nótese que para un punto fijo d^* la orbita consiste solo del punto d^* . Para encontrar el punto fijo de (17) se debe resolver la ecuación $d = f(d)$.

La importancia de la noción de periodicidad se debe a que muchos fenómenos físicos muestran patrones que se repiten en forma cíclica, estos patrones son las orbitas de un punto periódico.

Definición 2: Dado d^p en el dominio del mapa f . Entonces, d^p se dice que es un punto periódico de f con periodo k si $f^k(d^p) = d^p$ para algún entero positivo k .

La orbita de un punto periódico de periodo k es el conjunto $O(d^p) = \{d^p, f(d^p), f^2(d^p) \dots, f^{k-1}(d^p)\}$ y es frecuentemente llamado un ciclo k . Para encontrar los puntos periódicos de periodo dos, primero se tiene que encontrar $f^2 = f \circ f = f(f(d))$ y resolver la expresión $f^2 = d$. De la misma manera, para encontrar los puntos periódicos de periodo tres se tiene que resolver $f^3 = d$ que en la mayoría de los casos no es posible.

B. Criterios de estabilidad.

En esta sección se establecen criterios para la estabilidad local de los puntos fijos. El siguiente criterio establece las condiciones para que un punto fijo d^* sea estable.

Teorema 1 [6]: Sea d^* un punto fijo del del mapa f , donde f es continuamente diferenciable en d^* . Entonces las siguientes condiciones son verdaderas:

1. Si $|f'(d^*)| < 1$, entonces d^* es asintoticamente estable.
2. Si $|f'(d^*)| > 1$, entonces d^* es inestable.

Ahora se centra la atención en la estabilidad de los puntos periódicos.

Teorema 2 [6]: Sea $O(d^p) = \{d^p, f(d^p), f^2(d^p) \dots, f^{k-1}(d^p)\}$ la orbita del punto periódico d^p de periodo k , donde f es una función continuamente diferenciable en d^p . Entonces las siguientes condiciones son verdaderas:

1. d^p es asintoticamente estable si $|f'(d^p)f'(f(d^p)) \dots f'(f^{k-1}(d^p))| < 1$.
2. d^p es inestable si $|f'(d^p)f'(f(d^p)) \dots f'(f^{k-1}(d^p))| > 1$.

V. SIMULACIONES NUMERICAS

En lo que sigue se presentan simulaciones numéricas donde se ilustra el comportamiento dinámico del mapa f dado por (16). Estas fueron realizadas usando los siguientes

valores de los parámetros; $R = 39 \Omega$, $L = 4.43 \text{ mH}$, $C = 20 \mu\text{F}$, $N = 21.44$, $E = 5 \text{ V}$, $T = 100 \mu\text{s}$ y la corriente de referencia i_{ref} como parámetro de bifurcación.

La figura 3, muestra un comportamiento estable del ciclo de trabajo puesto que la pendiente en el punto fijo es menor que 1; por lo tanto, la trayectoria converge al punto fijo d^* . En la figura 5, se muestra una dinámica del ciclo de trabajo diferente puesto que presenta un comportamiento periódico de periodo dos y la orbita del ciclo de trabajo se establece en los puntos periódicos d_1^2 y d_2^2 donde el superíndice indica la periodicidad y el subíndice el número del punto periódico. En este caso la pendiente de $f(d)$ es mayor que uno en d^* . El valor que toma el ciclo de trabajo d en cada iteración k correspondiente a la figura 5 se muestra en la figura 6. Finalmente, la figura 7 muestra un comportamiento errático del ciclo de trabajo. Note la existencia de tres puntos fijos en este caso; donde, ninguno de ellos es estable puesto que la pendiente de $f(d)$ en cualquiera de estos puntos es mayor que 1. En la figura 8 se muestra el valor del ciclo de trabajo en cada iteración. Note como el ciclo de trabajo toma valores en la vecindad del punto fijo $d_2^* = 1.53$ de manera repetitiva; sin embargo, como este es inestable la trayectoria se aleja de el para posteriormente regresar; este fenómeno es conocido como intermitencia y es característico de un sistema caótico.

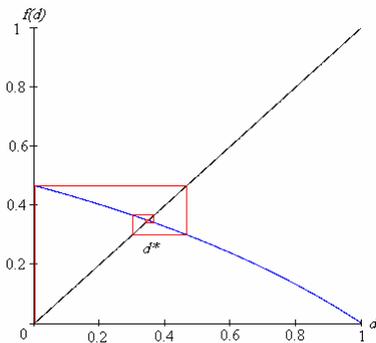


Fig. 3. Trayectoria que converge al punto fijo d^* .
 $i_{ref} = 0.128$, $d^* = 0.347$.

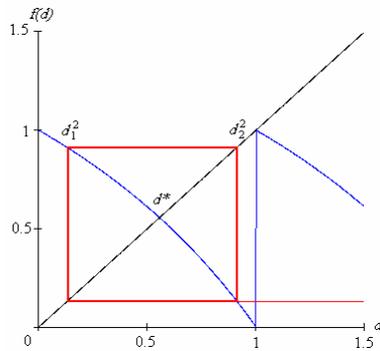


Fig. 4. Orbita periódica de periodo 2.
 $i_{ref} = 0.19$, $d^* = 0.548$, $d_1^2 = 0.13$, $d_2^2 = 0.912$.

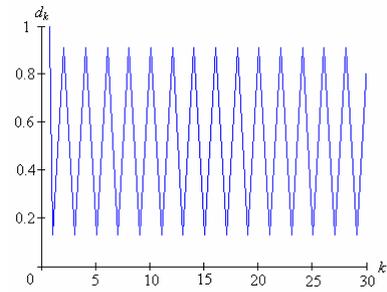


Fig. 5. Comportamiento periódico de periodo 2.

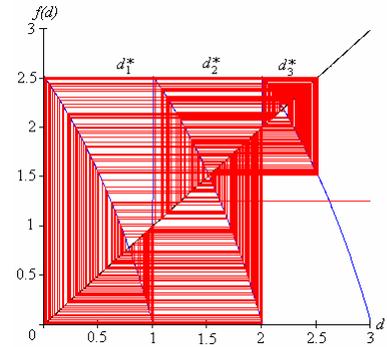


Fig. 6. Comportamiento errático.
 $i_{ref} = 0.366$, $d_1^* = 0.78$, $d_2^* = 1.53$, $d_3^* = 2.2$.

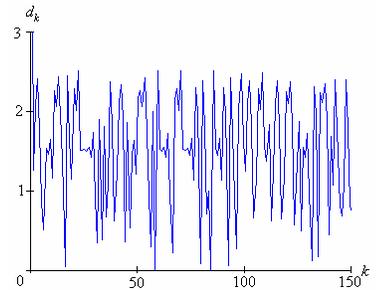


Fig. 7. Comportamiento errático.

VI. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un mapa discreto en el tiempo de dimensión-uno que describe el comportamiento dinámico del convertidor elevador controlado en modo corriente pico. La principal contribución es la claridad del mapa (16) ya que los parámetros físicos del convertidor están disponibles y cualquiera de ellos puede ser usado como parámetro de bifurcación. De esta manera, se facilita el análisis de los diferentes comportamientos no lineales presentes en el convertidor elevador. Por otro lado, los criterios de existencia de puntos fijos, puntos periódicos y estabilidad pueden ser aplicados con facilidad para determinar el tipo de comportamiento presente en el convertidor bajo un conjunto de parámetros determinado. Mapas similares pueden ser obtenidos para otros convertidores básicos.

REFERENCIAS

- [1] H. S. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos", Addison-Wesley, 1994.
 - [2] S. Wiggins, "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", Springer-Verlag, 1990.
 - [3] M. di Bernardo & F. Vasca, "Discrete-time maps for the analysis of bifurcation and chaos in DC/DC converters", IEEE Trans. Circ. and Syst. I, Vol 47, No. 2, pp. 130-143, Mayo, 2000.
 - [4] S. Banerjee, P. Ranjan & C. Grebogi, "Bifurcations in two-dimensional piecewise-smooth maps-theory and applications in switching circuits", IEEE Trans. Circ. and Syst. I, Vol 47, No. 5, pp. 633-643, Feb., 2000.
 - [5] H. H. Lu & C. K. Tse, "Bifurcation behavior in parallel-connected Buck converters", IEEE Trans. Circ. and Syst. I, Vol 48, No. 2, pp. 233-240, Feb., 2001.
 - [6] N. Elaydi, "Discrete Chaos", Chapman & Hall/CRC
-