



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Densidades invariantes, intermitencia y transición de
fase en mapeos aleatorios en el intervalo**

Tesis que presenta

Ricardo Alejandro Pérez Otero

Para obtener el grado de

Maestro en control y sistemas dinámicos

Director de la Tesis:

César Octavio Maldonado Ahumada

San Luis Potosí, S.L.P., julio de 2018



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "*Densidades invariantes, intermitencia y transición de fase en mapeos aleatorios en el intervalo*" presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Ricardo Alejandro Pérez Otero** y aprobada el **dos de agosto del dos mil dieciocho** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Director de la tesis

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Jurado en el Examen

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus
Jurado en el Examen

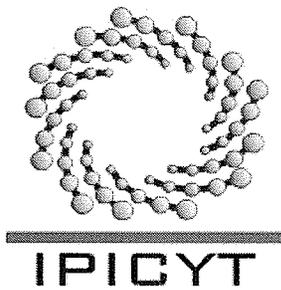
Dr. Raúl Salgado García
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de (Matemáticas Aplicadas) del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. César Octavio Maldonado Ahumada.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (612805) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 031 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 2 días del mes de agosto del año 2018, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus	Presidente	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Secretario	IPICYT
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Sinodal	IPICYT
Dr. Raúl Salgado García	Sinodal externo	UAEM

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Ricardo Alejandro Pérez Otero

sobre la Tesis intitulada:

Densidades invariantes, intermitencia y transición de fase en mapeos aleatorios en el intervalo

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 13:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del Interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 2 días del mes de agosto de 2018.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dr. Horacio Flores Zúñiga
Secretario Académico



Contenido

Constancia de aprobación de la tesis	Página II
Créditos institucionales	Página IV
Acta de examen	Página VI
Glosario (Notación)	Página VII
Resumen	Página VIII
Abstract	Página IX
Introducción	Página 1
Definiciones y conceptos preliminares	Página 5
Dinámica aleatoria	Página 23
Resultados	Página 29
Discusión y conclusiones	Página 49
Bibliografía	Página 51

Notación

\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales
\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros
\emptyset	Conjunto vacío
A^c	Conjunto complemento de A
$S _A$	Restricción de S al conjunto A
$S^{-1}(A)$	Preimagen del conjunto A bajo la transformación S
$S'(x)$	Derivada de S respecto a x
C^n	Conjunto de funciones n veces diferenciables
S^n	Iteración n de la transformación S
$\mu \ll \nu$	Medida μ absolutamente continua respecto a la medida ν
$ \cdot $	Valor absoluto
$V_{[a,b]}$	Variación de la función f sobre el conjunto $[a, b]$

Resumen

Densidades invariantes, intermitencia y transición de fase en mapeos aleatorios en el intervalo.

Palabras clave: m.i.a.c., operadores de Perron-Frobenius, propiedades estadísticas, decaimiento de correlaciones, exponente de Lyapunov, histogramas, exploración numérica.

Este trabajo de tesis está centrado en la exploración numérica de algunas familias de mapeos aleatorios en el intervalo para las cuales, los resultados teóricos existentes no garantizan que pueda contar con una medida invariante absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue (m.i.a.c.). La evidencia aquí presentada funge como un argumento de la plausibilidad de su existencia en este tipo de dinámicas que presentan una importante influencia de dinámicas con dirección no expansiva, o bien, contractiva estricta.

Abstract

Invariant densities, intermittency and phase transition on random interval maps.

Key word: measures, Perron-Frobenius operators, statistical properties, correlation decay, Lyapunov exponent, histograms, numeric computation.

This thesis explores numerically some random interval maps families, which are not granted to have an absolutely continuous invariant measure with respect to the Lebesgue measure (ACIM), since most of the existent results about the existence of an ACIM for random interval maps require the strict expansiveness of the dynamic. The numeric evidence shown here suggest that these theoretic results may be extended to interval maps with an important influence of non-expansive dynamics, or even strictly contractive ones.

Índice general

1. Introducción	1
2. Definiciones y conceptos preliminares	5
2.1. Mapeos en el intervalo	5
2.2. Medida y espacios de medida	7
2.3. Espacios L	11
2.4. Variación acotada	12
2.5. Compacidad y quasi compacidad	13
2.6. Ergodicidad y mezclado	13
2.7. Operador de Perron-Frobenius	16
2.8. Decaimiento de correlaciones	19
2.9. Exponente de Lyapunov	20
3. Dinámica aleatoria	23
3.1. Mapeos aleatorios	25
3.2. Existencia de las densidades invariantes	25
3.3. Obtención de las densidades invariantes	26
4. Resultados	29
4.1. Familia I de mapeos aleatorios	29
4.1.1. Estimación del exponente de Lyapunov	33
4.2. Familia II de mapeos aleatorios	34
4.2.1. Estimación de la medida invariante	34
4.2.2. Exponente de Lyapunov	40
4.2.3. Decaimiento de correlaciones	41
4.2.4. Evidencia adicional	44
5. Discusión y conclusiones	49
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

Catalogando a los sistemas dinámicos respecto a la predictibilidad de su comportamiento inherente para tiempos muy grandes, se identifican primero aquellos cuya órbita asume una dirección regular (por ejemplo, describen puntos fijos o puntos periódicos); y por otro lado, se tiene la colección de sistemas con una dinámica denominada a menudo como “errática”. El enfoque adoptado para el estudio del segundo tipo de sistemas es, o bien, el estudio del comportamiento asintótico de la órbita para un tiempo grande; o el estudio de la evolución de un conjunto “grande” de condiciones iniciales en el espacio de estados, esto es, el estudio del comportamiento estadístico de las órbitas. Resulta que ambos enfoques son equivalentes en el caso de los sistemas ergódicos. Esto es un resultado fundamental en la teoría, el teorema ergódico de Birkhoff (los detalles se pueden encontrar más adelante en el capítulo 2.6). En esta tesis nos enfocamos a dinámicas en el intervalo, específicamente en transformaciones a tiempo discreto cuyo espacio de estados es el intervalo unitario $[0, 1]$, donde, bajo ciertas condiciones generales es posible entender que las órbitas se distribuyen (para casi toda condición inicial) según una función de distribución o densidad.

Desde este enfoque, estudiar esta clase de sistemas dinámicos en particular significa estudiar la evolución de las densidades, esto se logra definiendo una acción en el espacio de las funciones (de densidad) que representa a la dinámica en el espacio de estados. Desde este punto de vista, establecer la existencia de una medida invariante respecto a la dinámica es equivalente a encontrar de un punto fijo para el operador asociado [6]. A este operador se le conoce como el operador de Perron Frobenius. La existencia de esta medida invariante, representa el punto de partida al estudio de las propiedades estadísticas del sistema dinámico en cuestión.

Un primer trabajo en el contexto de los mapeos en el intervalo, es el resultado postulado en [2], en el que se demuestra la existencia de una medida invariante absolutamente continua (respecto a Lebesgue) para una dinámica expansiva a trozos en el intervalo. La idea es mostrar que el operador de Perron Frobenius asociado a la dinámica cuenta con un punto fijo en un subespacio adecuado de las funciones con-

tinuas, esto es en el espacio de las funciones de variación acotada (ver los detalles en el capítulo 2.4), ya que en este subespacio el operador es contractivo y por tanto es posible usar las técnicas clásicas de teoremas de punto fijo.

Los mapeos expansivos en el intervalo han sido de gran interés en el estudio de los sistemas dinámicos y en particular en el estudio de las propiedades estadísticas, ya que representan ejemplos sencillos para describir fenómenos complejos, por ejemplo para modelar el fenómeno de turbulencia en fluidos [1]. Un ejemplo ahora clásico de dinámica en el intervalo que es expansivo en todas partes, excepto por un punto, es el mapeo de Manneville Pomeau. Este mapeo, o familia parametrizada de mapeos, fue definida por Manneville y Pomeau como un modelo sencillo del fenómeno de intermitencia [1] ya que cuenta con un punto fijo indiferente, cerca del cual la dinámica se “estanca” por intervalos largos de tiempo. Desde entonces ha sido estudiado ampliamente dada la riqueza de sus comportamientos (vea por ejemplo [3, 10]).

La familia de mapeos de Manneville Pomeau que está definida mediante la siguiente expresión para un parámetro $\alpha \geq 0$:

$$T_{\alpha}(x) = \begin{cases} x(1 + 2^{\alpha}x^{\alpha}), & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2x - 1, & 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

muestra cambios notables en su comportamiento estadístico en función del parámetro. Por ejemplo, presenta una medida invariante absolutamente continua (m.i.a.c.) respecto a Lebesgue, cuya densidad es una ley de potencias [3] para $0 < \alpha < 1$; una función constante, para $\alpha = 0$; o una función δ para algunas condiciones iniciales y para $\alpha = \infty$. En este sentido, se dice que presenta el fenómeno de transición de fase.

El trabajo en esta tesis está enfocado sobre el estudio de mapeos del intervalo; sistemas de una dimensión, y lineales por partes. Se propone un par de familias de mapeos aleatorios del intervalo, con el propósito de obtener modelos relativamente simples caracterizados por un solo parámetro, que asimilen algunas de las propiedades estadísticas mencionadas, como la existencia de una medida invariante absolutamente continua respecto a Lebesgue, transición de fase o intermitencia. La contribución principal radica en que se permite que la dinámica tenga componentes que no son estrictamente expansivas, ya que como se explica más adelante, la teoría existente sólo aborda dinámicas expansivas.

Existen trabajos que abordan el estudio de transformaciones aleatorias del intervalo (por ejemplo [4, 5]) respecto a la existencia de una medida invariante absolutamente continua y el espacio de las densidades alcanzables que la transformación aleatoria puede exhibir en función de los pesos de probabilidad, primordialmente para mapeos expansivos. En [9] se estudian sistemas aleatorios más generales. Ahí se da explícitamente una condición de expansividad en promedio como una condición suficiente para establecer la existencia de la m.i.a.c. Por último cabe mencionar que en [11] se estudian sistemas que cuentan con una dirección contractiva con ruido aditivo, sin embargo, en un contexto ligeramente distinto al abordado en esta tesis.

En el presente trabajo se reúnen y se proponen argumentos mediante evidencia numérica para resolver algunas preguntas abiertas acerca de estos sistemas de una dimensión, principalmente aquellos que cuentan con un carácter aleatorio. En el capítulo 2 se presentan las definiciones y herramientas básicas de análisis que atañen a esta tesis. Se da un poco de la teoría acerca de los espacios de funciones L^p y de variación acotada. Se da la definición del operador de Perron Frobenius. También se presenta el teorema de Lasota Yorke mencionado anteriormente que garantiza la existencia de una m.i.a.c. y establece que la densidad asociada pertenece al espacio de las funciones de variación acotada. Por último en este capítulo se dan las definiciones de decaimiento de correlaciones y exponente de Lyapunov que serán usadas en el capítulo de resultados.

En el capítulo 3 se establecen conceptos y resultados de interés acerca de dinámica aleatoria. Se define lo que es un mapeo aleatorio en el intervalo, que es el objeto principal de este trabajo de tesis. Se da teoría conocida respecto a la existencia de medidas invariantes asociadas a algunas clases particulares de mapeos aleatorios contenida en [4, 5].

Finalmente, en el capítulo 4 se estudian dos familias de mapeos aleatorios lineales por partes en el intervalo. En el caso de la primer familia se muestra evidencia numérica de la existencia de una densidad para todo valor del parámetro distinto de cero y la evidencia numérica obtenida y sugiere que el método propuesto por Gora y Boyarsky en [5] puede ser extendido a mapeos no estrictamente expansivos, con lo que se establece una conjetura acerca de la posible extensión del método a una clase más general de mapeos. De la misma forma se presentan resultados para la segunda familia de mapeos aleatorios. Se presentan los resultados numéricos y semi analíticos con los que se propone otra conjetura acerca de la existencia de la m.i.a.c. en función del parámetro que caracteriza su comportamiento estadístico. Las simulaciones numéricas incluyen la estimación de la densidad invariante para los distintos regímenes del parámetro, una estimación de decaimiento de correlaciones y del exponente de Lyapunov que nos sirven para proponer y estimar un valor crítico del parámetro para el cual existe un cambio en las propiedades de regularidad de la densidad invariante. Todo esto como argumentos de plausibilidad de que la teoría existente sobre mapeos aleatorios en el intervalo puede ser extendida en los sentidos aquí abordados.

Capítulo 2

Definiciones y conceptos preliminares

Un sistema dinámico es un conjunto de estados X , el cual es comúnmente un espacio métrico compacto, equipado con una transformación S del espacio X en sí mismo, que actúa como una evolución temporal. De aquí en adelante será denotado por el par (X, S) .

En el presente manuscrito nos restringimos a dinámica discreta, es decir que consideramos un mapeo con una evolución a tiempo discreto. Sea $S : X \rightarrow X$ una función que dice cual será el nuevo estado del sistema en un paso de tiempo. Si $x_0 \in X$ es el estado del sistema al tiempo cero, el estado en el tiempo 1 es $x_1 = S(x_0)$ y de manera más general el estado en el tiempo n está dado recursivamente por la iteración $x_n = S(x_{n-1})$. Esto a menudo se escribe $x_n = S^n(x_0)$ con $S^n = S \circ S \circ \dots \circ S$ (n veces), donde \circ es el símbolo de composición de funciones: $(S \circ g)(x) \equiv S(g(x))$. La sucesión $\{S^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es conocida como la *órbita de la trayectoria de la condición inicial* x_0 [7]. Si existe la función inversa de S , entonces la órbita está también definida para n negativos [7].

2.1. Mapeos en el intervalo

De ahora en adelante, estudiaremos sistemas dinámicos definidos en el intervalo $X = [0, 1]$, cuya imagen es sobre sí mismo. A pesar de su relativa simpleza, los mapeos en el intervalo tienen una gran riqueza de comportamientos. Algunos de estos son ejemplos muy representativos de comportamientos clave en el estudio de los sistemas dinámicos y de sus propiedades estadísticas. Un ejemplo importante es el mapeo logístico, que sin embargo no será de estudio en la presente tesis. Una clase general de dinámica en el intervalo, que ha sido ampliamente estudiada y que será el tema central de este trabajo son los *mapeos expansivos en el intervalo*.

Definición 2.1 (Mapeos expansivos en el intervalo). Sea $X = [0, 1]$, sean $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_K = 1$ una sucesión de números en el intervalo $a_i \in [0, 1]$ para toda $i = 0, \dots, K$, tal que forman una partición de $[0, 1]$. A la transformación $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ se le llama mapeo expansivo en el intervalo si satisface que:

1. El mapeo T restringido a cada elemento de la partición, $T_i := T|_{[a_i, a_{i+1}]}$ cumple con $T_i \in C^2$.
2. Existe una constante $\Lambda > 1$ tal que el $\inf_{x \in [0, 1]} |T'(x)| \geq \Lambda > 1$.

Uno de los ejemplos clásicos en los sistemas dinámicos es el siguiente (figura 2.1):

Ejemplo 2.1. El mapeo del intervalo $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$ está definido como

$$S(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2x - 1, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

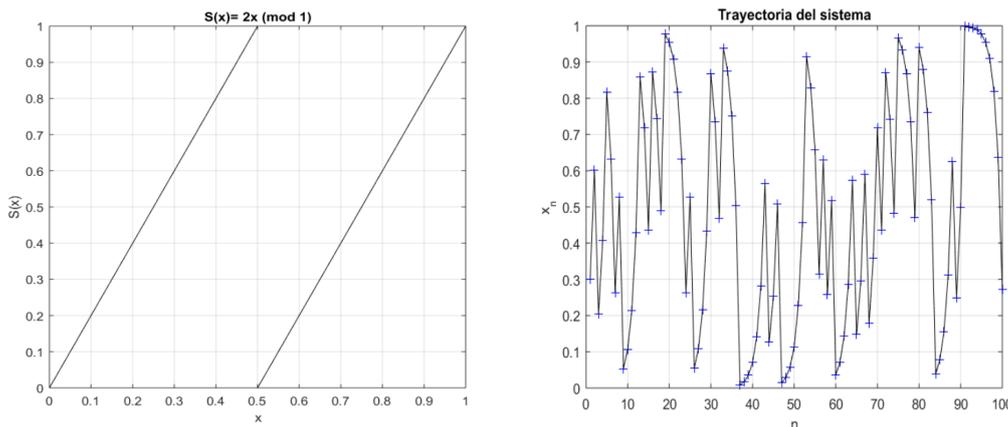


Figura 2.1: Transformación del intervalo $S(x) = 2x \pmod{1}$ (izquierda) y una muestra de su trayectoria típica, con 100 iteraciones (derecha).

Este ejemplo es importante ya que muestra un comportamiento “errático” de las trayectorias para casi toda condición inicial, de ahí que la figura (la densidad) describe la cantidad de veces que la trayectoria pasa por los distintos puntos en el intervalo, se distribuye de manera uniforme, una característica de los procesos estocásticos uniformemente distribuidos. Nótese que cada punto $f(x)$ posee dos preimágenes y por lo tanto el mapeo no es invertible.

El ejemplo anterior nos hace pensar que estudiar el comportamiento de una órbita en particular puede ser una tarea difícil “predecir” donde estará la órbita del sistema

al paso de tiempo 10000, sino que es más fácil preguntarse por la distribución de los puntos bajo la dinámica. Esto se definirá con detalle a continuación, por lo que hacen falta algunas definiciones preliminares.

Nota 2.1. *Si una cierta propiedad que involucra a los puntos de un espacio de medida se preserva excepto para un conjunto de medida cero, entonces se dice que esa propiedad es verdadera casi ciertamente (abreviado a.e. por su término en inglés). La notación $\mu - a.e.$ (o simplemente a.e. si μ está implícito), se utiliza a veces si la propiedad es válida casi siempre con respecto a la medida μ .*

Una manera de estudiar de forma empírica las propiedades estadísticas o probabilísticas de estos sistemas dinámicos es mediante la construcción de histogramas, realizados mediante el cálculo computacional de un número grande de iteraciones del sistema en cuestión; del mismo modo ayuda a ilustrar la frecuencia asintótica con la que la trayectoria del estado del sistema incide en determinadas regiones del espacio de estados [8]. Esto se logra de la siguiente manera. Se divide el espacio de estados $[0, 1]$ en n intervalos discretos disjuntos de modo que el i -ésimo intervalo es (se omite el punto final 1):

$$[i - 1/n, i/n) \quad i = 1, \dots, n$$

Después, dado un estado inicial del sistema x_0 , se calcula para una N grande

$$x_0, S(x_0), S^2(x_0), \dots, S^N(x_0)$$

de longitud N , donde $N \gg 2n$ [8]. Un histograma elaborado para una partición del espacio de estados suficientemente fina y una cantidad suficientemente grande de iteraciones, revela la forma aproximada que toma la función de densidad invariante asociada a un sistema dinámico. Para el ejemplo 2.1, se logra apreciar en la figura 2.2 cómo la frecuencia asintótica revela la posible densidad invariante asociada a la transformación del intervalo, que como se comprueba más adelante, lo es.

2.2. Medida y espacios de medida

Por conveniencia, a continuación se incluyen conceptos generales sobre espacios de medida y sistemas dinámicos medibles. Este contenido es una recopilación de lo más relevante (en lo que concierne al trabajo presente) acerca de los temas en cuestión. Estos preliminares son estándar y se puede encontrar información más detallada al respecto, por ejemplo, en [6], [7], [8], etc.

Definición 2.2 (σ -álgebra). *Sea X un conjunto no vacío arbitrario. Una clase de subconjuntos Σ de X es llamada σ álgebra sobre X si satisface:*

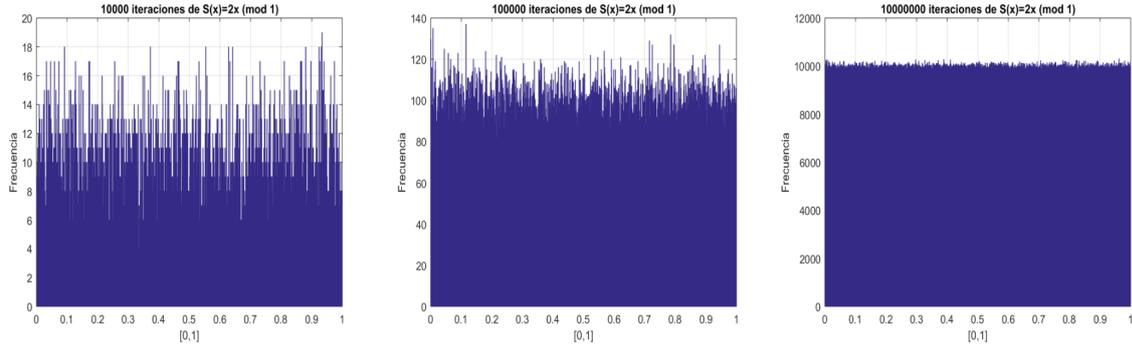


Figura 2.2: Histogramas para la transformación $S(x) = 2x \pmod{1}$, para 10^4 (izquierda), 10^5 (centro) y 10^7 iteraciones. Éstos aproximan gradualmente una función de densidad constante, correspondiente a una distribución uniforme.

1. Si $A \in \Sigma$ implica que $A^c \in \Sigma$, donde $A^c \equiv \{x \in X : x \notin A\}$ es el complemento de A en X .
2. Si $A_n \in \Sigma, n = 1, 2, \dots$ implica que la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.
3. Si $X \in \Sigma$.

Definición 2.3 (Medida). Una función no negativa μ de conjuntos a valores reales (incluyendo posiblemente ∞) definida sobre una σ -álgebra Σ es llamada medida si

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,

para cualquier sucesión finita o infinita $\{A_n\}$ de conjuntos disjuntos por pares de Σ , es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Definición 2.4 (Espacio de medida). La terna ordenada (X, Σ, μ) es llamada espacio de medida si está dada una σ -álgebra Σ sobre un conjunto X y una medida μ definida sobre Σ . Si la medida no está específicamente expresada, el par ordenado (X, Σ) es llamada espacio medible y cualquier $A \in \Sigma$ es llamado conjunto Σ medible, o simplemente, conjunto medible.

Definición 2.5 (Espacio σ -finito). Se dice que un espacio de medida (X, Σ, μ) es σ -finito si X es una unión numerable de sus subconjuntos con medida finita, es decir:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \Sigma, \quad \mu(A_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Definición 2.6 (Espacio finito de medida). *Se dice que un espacio de medida (X, Σ, μ) es finito si $\mu(X) < \infty$. En particular, si $\mu(X) = 1$, entonces el espacio de medida es llamado espacio de probabilidad o espacio de medida normalizado.*

Definición 2.7 (Función medible). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Una función de valores reales (o complejos) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C} resp.) se dice que es medible si $f^{-1}(G) \in \Sigma$ para todo conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), donde $f^{-1}(G) \equiv \{x \in X : f(x) \in G\}$ es la imagen inversa de G bajo f .*

Nota 2.2. *Más generalmente, se dice que una transformación $X \rightarrow Y$ desde un espacio medible (X, Σ) hacia un espacio medible (Y, \mathcal{A}) , es medible si $S^{-1}(A) \in \Sigma$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Así, una función medible f es una transformación medible desde (X, Σ) hacia $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Si X_1 y X_2 son espacios topológicos con sus respectivas σ -álgebras de Borel \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 , entonces una transformación continua $S : X_1 \rightarrow X_2$ es una transformación medible por Borel. En particular, una función continua sobre un espacio topológico es una función medible.*

Uno de los conceptos más relevantes en esta tesis es el de función de densidad, y antes de definirla, se define brevemente el concepto de variable aleatoria. Una función de densidad de probabilidad está comúnmente asociada a medidas invariantes absolutamente continuas en el sentido de que su existencia provee de una herramienta estadística para el estudio de los sistemas dinámicos.

Definición 2.8 (Variable aleatoria). *Una variable aleatoria es una transformación ξ del espacio de resultados X al conjunto de números reales, es decir*

$$\xi : X \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cualquier número real $x \in \mathbb{R}$

$$\{\omega \in X : \xi(\omega) \leq x\} \in \Sigma$$

Definición 2.9 (Función de densidad de probabilidad). *Se dice que una variable aleatoria ξ posee una función de densidad $F(x)$, donde F es una función integrable respecto a la medida de Lebesgue, si la densidad de ξ con respecto a una medida de referencia μ está dada por*

$$\nu(\xi \in A) = \int_{\xi^{-1}(A)} d\nu = \int_A F d\mu,$$

donde ν es la medida de la probabilidad de distribución de ξ en un conjunto A , para cualquier conjunto medible $A \in \Sigma$.

Definición 2.10 (Transformación que preserve la medida). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que una transformación medible $S : X \rightarrow X$ preserva la medida μ , o alternativamente, se dice que la medida μ es invariante ante S , si*

$$\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A), \quad \forall A \in \Sigma$$

Nota 2.3. De manera práctica es difícil verificar que una transformación preserva la medida para todo conjunto medible en la definición anterior, en la práctica si se verifica $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todos los conjuntos medibles en una subclase π que es cerrada bajo la operación de intersección de sus miembros, y que es generadora de Σ , es decir, Σ es la σ -álgebra más pequeña que contiene a π , entonces μ es invariante ante S . La subclase π con esta propiedad es llamada un π -sistema.

Con tal de definir la medida de ciertas funciones, o bien su valor esperado respecto a la medida definida en el sistema, es importante establecer la siguiente definición.

Definición 2.11 (Función simple). Una función medible $f : X \rightarrow [0, \infty)$ sobre un espacio medible es llamada función simple si su rango consiste de una cantidad finita de puntos. En otras palabras f es una función simple si

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, \quad A_i \in \Sigma,$$

donde α_i son los distintos valores que puede tomar la función y χ_{A_i} es la función característica de A_i .

En mediciones físicas, a menudo se considera una distribución de probabilidad de una cantidad física. Sea (S, X) un sistema dinámico, con X un espacio fase de medida finita $\mu(X) < \infty$ y sea A un subconjunto de X . En lugar de observar las propiedades determinísticas de las órbitas individuales, se consideran las propiedades probabilísticas observando las frecuencias de los primeros n términos de la órbita $\{S^n(x)\}$ de un punto inicial x que entra en A para todos los números naturales n . Para calcular la frecuencia, sea χ_A la función característica de A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Entonces, la frecuencia para un n dado es exactamente $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(S^i(x))$.

Definición 2.12 (Frecuencia asintótica de $A \in \Sigma$). Considere un subconjunto $A \in \Sigma$, la frecuencia asintótica o el promedio temporal de A está dada por el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(S^i(x)),$$

que de existir, mide qué tan frecuentemente entra la órbita en A , o el promedio temporal para el que la dinámica pasa por A .

Uno de los conceptos más importantes en este trabajo de tesis es el de *medida absolutamente continua*, que definiremos a continuación.

Definición 2.13 (Medida absolutamente continua). Sea μ una medida sobre una σ -álgebra Σ y sea ν una medida arbitraria sobre Σ ; ν puede ser positiva, real o compleja. Se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ y se escribe

$$\nu \ll \mu$$

si $\nu(A) = 0$ para cada $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$. Si se cumple que $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$, se dice entonces que las medidas ν y μ son equivalentes, escrito como $\mu \cong \nu$.

Teorema 2.1 (Teorema de Radon-Nikodym). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ finito y sea ν una medida de valores reales (o complejos) tal que es absolutamente continua respecto a μ . Entonces existe una única función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}), μ -integrable tal que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \Sigma. \quad (2.2)$$

Además, si $\nu \ll \mu$ y ν es σ -finita, entonces (2.2) es aún válida con una función medible no negativa f que puede no ser integrable respecto a μ .

2.3. Espacios L

Dado que se estudiará el comportamiento de densidades respecto a la evolución de la dinámica, es importante establecer el espacio donde actuará tal evolución, esto es, los espacios de funciones. Para empezar, el concepto de variación es fundamental para la definición de compacidad sobre espacios L^1 , que a su vez cobran relevancia al ser sobre los cuales están definidos los operadores de Perron-Frobenius.

Definición 2.14 (Espacio L^p y L^∞). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita. Sea p un número real tal que $1 \leq p < \infty$. La familia de todas las funciones μ -medibles de valores reales (o complejos) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) que satisface

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

está denotada por L^p . El espacio $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ está definido como la familia de todas las funciones medibles que están acotadas μ -a.e.

Definición 2.15 (Norma L^p). El número $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ es llamado norma L^p de $f \in L^p$ para $p < \infty$; y el número $\|g\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |g(x)|$ es referido como la norma L^∞ de $g \in L^\infty$.

Nota 2.4 (Supremo esencial). El $\text{ess sup}_{x \in X}$ de una función cualquiera $f \in L^p$ es el supremo de una función que es válido casi siempre (μ -a.e.):

$$\text{ess sup}_{x \in X} f(x) = \inf\{M : \mu(\{x : f(x) > M\}) = 0\}$$

Es bien sabido que bajo la definición arriba descrita de la norma L^p , $L^p(X, \Sigma, \mu)$ es un *espacio de Banach*, es decir, un espacio normado completo [6].

El *espacio dual*, o simplemente el *dual*, por definición es el espacio de todos los funcionales lineales acotados [6]. El teorema siguiente caracteriza el dual de L^p .

Teorema 2.2. *Sea $1 \leq p < \infty$. El dual de $L^p(X, \Sigma, \mu)$ es isomorfo a $L^{p'}(X, \Sigma, \mu)$, donde $1/p + 1/p' = 1$, para $p > 1$ y $p' = \infty$ si $p = 1$.*

La relación dual entre $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$ está dada por

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_X fg d\mu,$$

que satisface la desigualdad de Cauchy-Holder

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}, \quad \forall f \in L^p, g \in L^{p'}.$$

2.4. Variación acotada

Otro concepto importante para la clase de dinámica considerada en este trabajo es el concepto de variación acotada. Y la subclase de funciones de un espacio normado que satisfacen la propiedad de variación acotada.

Definición 2.16 (Variación). *Sea f una función de valores reales o complejos definida en un intervalo $[a, b]$. La variación de f sobre $[a, b]$ es el número no negativo (puede ser infinito)*

$$\bigvee_{[a,b]} f = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}.$$

Si $\bigvee_{[a,b]} f < \infty$, se dice que f es de variación acotada sobre $[a, b]$.

Nota 2.5. *Algunas veces se escribirá L^p en lugar de $L^p(X, \Sigma, \mu)$ cuando el espacio de medida queda implícito, $L^p(X)$, $L^p(\mu)$ o $L^p(\Sigma)$ cuando los respectivos elementos del espacio de medida sean implícitos.*

Definición 2.17 (Variación en L^1). *Sea $f \in L^1(a, b)$. Entonces, su variación sobre $[a, b]$ está definida como*

$$\bigvee_{[a,b]} f = \inf \left\{ \bigvee_{[a,b]} g : g(x) = f(x), \forall x \in [a, b], \mu - a.e. \right\}.$$

Si $\bigvee_{[a,b]} f < \infty$, entonces se dice que f es de variación acotada sobre $[a, b]$.

2.5. Compacidad y quasi compacidad

Uno de los resultados importantes para la clase de mapeos expansivos en el intervalo usa un teorema del punto fijo, de un operador aplicado en cierto espacio de funciones, una de las condiciones requeridas para la existencia del punto fijo, es una condición de compacidad.

Definición 2.18 (Precompacidad fuerte y compacidad). *Sea (X, Σ, σ) un espacio de medida y sea \mathcal{F} un subconjunto de $L^1(X)$. Se dice que el conjunto \mathcal{F} es (fuertemente) precompacto si para cada sucesión $\{f_n\} \in \mathcal{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_i}\}$ de $\{f_n\}$ tal que*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{n_i} - \bar{f}\| = 0$$

para algún $\bar{f} \in L^1$. Si además \mathcal{F} es cerrado en L^1 , entonces se dice que \mathcal{F} es compacto.

Definición 2.19 (Precompacidad y compacidad débiles). *Se dice que el conjunto \mathcal{F} es débilmente precompacto si cada sucesión $\{f_n\} \in \mathcal{F}$ contiene una subsucesión $\{f_{n_i}\}$ que converge débilmente a algún $\bar{f} \in L^1(X)$, i.e.,*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle f_{n_i}, g \rangle = \langle \bar{f}, g \rangle, \forall g \in L^\infty(X).$$

Si además \mathcal{F} es cerrado en la topología débil de $L^1(X)$, entonces se dice que \mathcal{F} es débilmente compacto.

Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal acotado sobre un espacio de Banach $(V, \|\cdot\|_V)$.

Definición 2.20 (Compacidad). *Se dice que T es compacto si mapea conjuntos acotados a conjuntos precompactos.*

Definición 2.21 (Quasi compacidad). *Se dice que T es quasi compacto si existe un entero positivo r y un operador compacto K tal que*

$$\|T^r - K\|_V < 1.$$

2.6. Ergodicidad y mezclado

Los sistemas dinámicos discretos caóticos, por definición satisfacen la propiedad de transitividad, este concepto a su vez está relacionado a la idescomponibilidad de la transformación [6] (que se definirá más adelante).

Si para una transformación que preserve la medida $S : (X, \Sigma, \mu) \rightarrow (X, \Sigma, \mu)$ existe un conjunto no trivial $A \in \Sigma$ diferente de X tal que $S^{-1}(A) = A$, entonces $S^{-1}(A^c) = A^c$ se tiene así que la dinámica de S puede ser descompuesta en dos

partes $S|_A : A \rightarrow A$ y $S|_{A^c} : A^c \rightarrow A^c$. Si ésto no puede suceder, entonces S tiene la propiedad de ergodicidad [6]. Se dice que un conjunto A es invariante ante S o un conjunto invariante de S si satisface

$$S^{-1}(A) = A.$$

Definición 2.22 (Ergodicidad). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que una transformación medible $S : X \rightarrow X$ es ergódica si cada conjunto invariante $A \in \Sigma$ de S es tal que $\mu(A) = 0$ o que $\mu(A^c) = 0$. En otras palabras, S es ergódica si y sólo si sus conjuntos invariantes o sus complementos son iguales al conjunto vacío a.e. Tales conjuntos son conocidos como los subconjuntos triviales de X .*

Teorema 2.3. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $S : X \rightarrow X$ una transformación no singular. Entonces S es ergódica si y sólo si para cada función medible acotada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$f(S(x)) = f(x), \quad \forall x \in X \quad \mu - a.e$$

implica que $f(x)$ es constante casi siempre (a.e.).

Las definiciones de mezclado y mezclado débil proveen nociones más robustas de la irregularidad para la dinámica determinística.

Definición 2.23 (Mezclante). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida de probabilidad y sea $S : X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida. Se dice que S es mezclante si para todo $A, B \in \Sigma$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(S^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Definición 2.24 (Débilmente mezclante). *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida de probabilidad y sea $S : X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida. Se dice que S es débilmente mezclante si para todo $A, B \in \Sigma$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(S^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Teorema 2.4 (Teorema ergódico puntual de Birkhoff). *Sea μ una medida de probabilidad sobre X que es invariante bajo una transformación $S : X \rightarrow X$. Entonces, para cualquier función integrable f definida sobre X y casi toda $x \in X$, el promedio temporal*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S_i(x))$$

existe y se denota por $\hat{f}(x)$. Además

$$\hat{f}(S(x)) = \hat{f}(x), \quad \forall x \in X \quad \mu - a.e$$

Si además S es ergódica, entonces \hat{f} es la función constante $\int_X f d\mu$.

El siguiente teorema ergódico expresa los conceptos de ergodicidad, mezclado débil y mezclado en forma funcional. Esto resulta útil para corroborar si transformaciones concretas poseen las propiedades mezclantes [6].

Teorema 2.5. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida de probabilidad y sea $S : (X, \Sigma, \mu) \rightarrow (X, \Sigma, \mu)$ una transformación que preserva la medida.*

1. *Las siguientes expresiones son equivalentes:*

a) *S es ergódica*

b) *Para toda $f, g \in L^2(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_X (f \circ S^i) g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu.$$

c) *Para toda $f \in L^2(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_X (f \circ S^i) f d\mu = \left(\int_X f d\mu \right)^2.$$

2. *Las siguientes expresiones son equivalentes:*

a) *S es débilmente mezclante*

b) *Para toda $f, g \in L^2(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_X (f \circ S^i) g d\mu - \int_X f d\mu \int_X g d\mu \right| = 0.$$

c) *Para toda $f \in L^2(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_X (f \circ S^i) f d\mu - \left(\int_X f d\mu \right)^2 \right| = 0.$$

d) *Para toda $f \in L^2(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_X (f \circ S^i) f d\mu - \left(\int_X f d\mu \right)^2 \right]^2 = 0.$$

3. *Las siguientes expresiones son equivalentes:*

a) *S es mezclante*

b) *Para toda $f, g \in L^2(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f \circ S^n) g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu.$$

c) *Para toda $f \in L^2(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f \circ S^n) f d\mu = \left(\int_X f d\mu \right)^2.$$

2.7. Operador de Perron-Frobenius

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $S : X \rightarrow X$ una transformación no singular. Dada una función $f \in L^1$, se define una medida de valores reales

$$\mu_f(A) = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu, \forall A \in \Sigma.$$

Dado que S es no singular, $\mu(A) = 0$ implica que $\mu_f(A) = 0$. Así, el teorema de Radon Nikodym implica que existe una única función $\hat{f} \in L^1$, tal que

$$\mu_f(A) = \int_A \hat{f} d\mu, \forall A \in \Sigma.$$

Definición 2.25 (Operador de Perron-Frobenius). *El operador $P : L^1 \rightarrow L^1$ definido por*

$$\int_A P f d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu, \quad \forall A \in \Sigma, \quad \forall f \in L^1,$$

es llamado el operador de Perron-Frobenius asociado a S .

Una expresión explícita del operador de Perron-Frobenius asociada a mapeos en el intervalo, cuyo desarrollo y demostración se puede encontrar en [6] es la siguiente:

$$P f(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([a,x])} f dm, \quad x \in [a, b], \quad a.e.$$

Así, el operador de Perron-Frobenius puede ser visto como una composición de un operador integral y un operador diferencial. Además, si la transformación $S : [a, b] \rightarrow [a, b]$ es diferenciable y monótona, de la ecuación anterior, resulta:

$$P f(x) = f(S^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx} S^{-1}(x) \right|,$$

o bien [7]:

$$P_S f(x) = \sum_{y, S(y)=x} \frac{f(y)}{|S'(y)|}$$

Si un sistema dado opera sobre una densidad como una condición inicial, en lugar de sobre un punto individual, entonces las densidades sucesivas están dadas por un operador lineal integral, el operador de Perron-Frobenius [8].

Ejemplo 2.2. *Considerando el ejemplo 2.1 (ecuación (2.1), se calculó cómo se obtiene la evolución de las densidades según el operador de Perron-Frobenius para la transformación (diferenciable y monótona por partes) $S(x) = 2x \pmod{1}$*

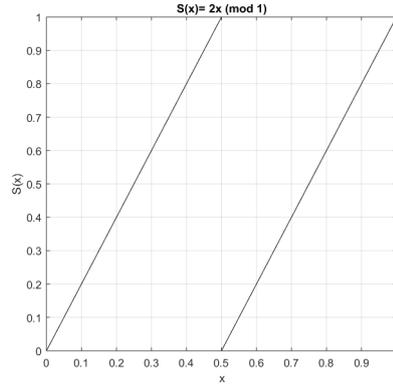


Figura 2.3: Transformación del intervalo $S(x) = 2x \pmod{1}$.

Se tiene que

$$S^{-1}(x) = \frac{1}{2}x, \quad \forall x \in [0, 0.5], \quad S^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}, \quad \forall x \in [0.5, 1],$$

y tomando $P_S^0 f(x)$ como $\hat{f}(x) = 1 - x$, la primera iteración del operador de Perron-Frobenius resulta como

$$P_S f(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}x \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x+1}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x = \hat{f}_2(x).$$

Al repetir el procedimiento con $\hat{f}(x) = \hat{f}_2(x)$ para calcular la segunda iteración $P_S^2 f(x)$, se obtiene $\hat{f}_2(x) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}x = \hat{f}_3(x)$. Luego, se procede a obtener una expresión explícita para $P_S^n f(x)$ por inducción matemática:

Suponga

$$P_S^n f(x) = \frac{2^n + 1}{2^{n+1}} - \frac{x}{2^n}.$$

Se verifica que cumpla para los primeros números naturales:

$$P_S^0 f(x) = 1 - x, \quad P_S f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x, \quad P_S^2 f(x) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}x.$$

Ahora, se supone como verdadera $P_S^n f(x)$ y se calcula $P_S^{n+1} f(x)$:

$$P_S^{n+1} f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n + 1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2}x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2^n + 1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) = \frac{2(2^n + 1) - 1}{2^{n+2}} - \frac{2x}{2^n + 2},$$

que puede reescribirse como

$$P_S^{n+1} f(x) = \frac{2^{(n+1)} + 1}{2^{(n+1)+1}} - \frac{x}{2^{(n+1)+1}},$$

lo cual demuestra por inducción matemática que la expresión propuesta para $P_S^n f(x)$ es correcta. Entonces, mediante el criterio de L'hopital se obtiene el límite para cuando n tiende a infinito del operador de Perron-Frobenius:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_S^n f(x) = \frac{1}{2},$$

se tiene una función constante, correspondiente a una distribución uniforme en el intervalo.

Nota 2.6. Esta operación demuestra lo que se estudió de manera empírica con la estimación de los histogramas, en la figura 2.2, la función de densidad invariante asociada a $S(x) = 2x \pmod{1}$ es una constante, correspondiente a una distribución uniforme.

Cabe mencionar que en el ejemplo anterior, cualquier función de densidad constante es densidad invariante asociada al mapeo $S(x) = 2x \pmod{1}$, o bien punto fijo del operador de Perron-Frobenius P_S , es decir la función que satisface la ecuación $P_S f^* = f^*$.

Para el caso general de los mapeos expansivos en el intervalo, se tiene un resultado clásico, de existencia de la densidad invariante bajo la acción del operador de Perron-Frobenius, este resultado usa para su demostración argumentos de compacidad y un teorema de punto fijo, cuando el operador actúa sobre un subespacio particular de $L^1(\mu)$.

Teorema 2.6 (Teorema de Lasota-Yorke, 1973 [2]). Sea $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función C^2 por partes tal que $\inf |\tau'| > 1$. Entonces para cualquier $f \in L_1$, la sucesión

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_\tau^k f$$

converge en norma a una función $f^* \in L_1$. La función límite posee las siguientes propiedades:

- (1) $f \geq 0 \implies f^* \geq 0$.
- (2) $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$.
- (3) $P_\tau f^* = f^*$ y consecuentemente la medida $d\mu^* = f^* dm$ es invariante bajo τ .
- (4) La función f^* es de variación acotada; además, existe una constante c independiente de la elección de la f inicial tal que la variación de f^* satisface la desigualdad siguiente

$$\bigvee_{[0,1]} f^* \leq c \|f\|.$$

Para ilustrar la convergencia del operador de Perron-Frobenius, de acuerdo al teorema 2.6, se muestra en la figura 2.4 las funciones resultantes tras aplicar el operador de Perron-Frobenius a la función inicial $P_S^0 f(x) = 1 - x$ Note que la función límite (en este caso $f^*(x) = \frac{1}{2}$) cumple con las cuatro condiciones que el teorema establece; la (4), con $c \geq 0$.

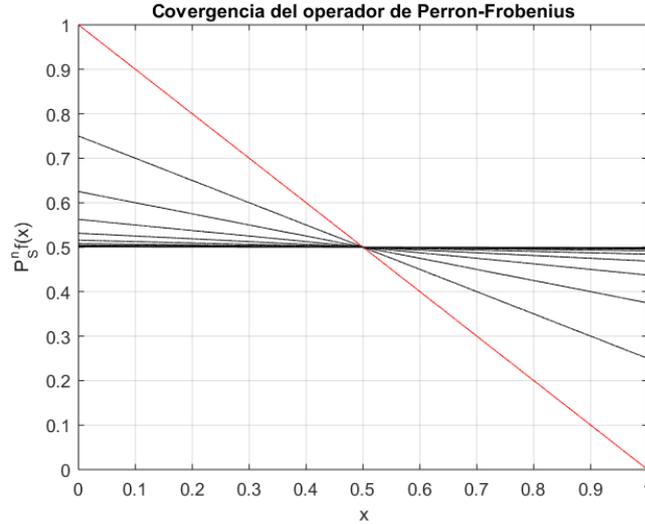


Figura 2.4: Convergencia de la sucesión de funciones de densidad tras aplicar el operador de Perron-Frobenius a la función inicial $P_S^0 f(x)$ (en rojo) para el mapeo del ejemplo 2.1.

2.8. Decaimiento de correlaciones

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida de probabilidad, y sea $S : X \rightarrow X$ una transformación no singular. Dadas dos funciones adecuadas f y g de un espacio de funciones, las cuales a menudo son llamadas también, en este contexto, *observables*, las diferencias

$$\int_X (g \circ S^n) f d\mu - \int_X f d\mu \int_X g d\mu$$

son llamadas funciones de correlación de los observables f y g . Si S preserva \mathbb{P} y es mezclante, entonces la función de correlación decae hacia cero cuando n tiende a infinito. La tasa del decaimiento de correlaciones mide la velocidad con la que la dinámica del sistema determinada por S y \mathbb{P} vuelve independiente de las condiciones iniciales [6].

Definición 2.26 (Coeficiente de correlación). *Sea μ una medida invariante de probabilidad para una transformación no singular $S : X \rightarrow X$ y sea n un entero positivo. Para cualquier $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$ la cantidad*

$$Cor(f, g, n) = \left| \int_X (g \circ S^n) f d\mu - \int_X f d\mu \int_X g d\mu \right|$$

es referida como el n -ésimo coeficiente de correlación.

En la práctica, la medida μ generalmente se desconoce y por lo tanto no es posible determinar el coeficiente de correlación analíticamente. En [7] se provee una

expresión para el coeficiente de correlación que se sigue del teorema ergódico puntual de Birkhoff y de la expresión del coeficiente de correlación, y es la siguiente:

$$\hat{C}or(f, g, n, k) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(x))g(S^{i+k}(x)) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(x)) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(S^i(x))$$

2.9. Exponente de Lyapunov

Otra de las características principales de los sistemas caóticos es que las trayectorias dependen de una manera muy sensitiva de las condiciones iniciales. Es decir, si se comienza con dos condiciones iniciales genéricas, la distancia entre las órbitas aumenta exponencialmente rápido en el tiempo. Este fenómeno del crecimiento de errores pequeños en la condición inicial es llamado *dependencia sensitiva a condiciones iniciales* [7].

Definición 2.27 (Punto fijo hiperbólico). *El punto x_0 es un punto fijo hiperbólico del mapeo S si $S(x_0) = x_0$ y $|S'(x_0)| \neq 1$.*

Definición 2.28 (Punto fijo hiperbólico atractor o repulsor). *Hay dos tipos de puntos fijos hiperbólicos. Se dice que un punto fijo es hiperbólico atractor si*

$$|S'(x_0)| < 1$$

Se dice que un punto fijo es hiperbólico repulsor si

$$|S'(x_0)| > 1$$

Nota 2.7. *Un sistema hiperbólico, esto es, con puntos fijos hiperbólicos, está caracterizado por la predictibilidad de sus órbitas (en el sentido de que convergen a un punto fijo, ciclos periódicos o al infinito), sin importar las condiciones iniciales. En un sistema hiperbólico repulsor, dos órbitas no pueden permanecer arbitrariamente cerca entre sí [7]. Y en un sistema hiperbólico atractor, las órbitas convergen hacia el punto fijo, para tiempos suficientemente grandes.*

Definición 2.29 (Transformación expansiva). *Se dice que transformación $S : X \rightarrow X$ es expansiva, si para todo elemento de su espacio de estados $x \in X$, se cumple que*

$$\inf_{x \in X} |S'(x)| > 1$$

La cantidad λ definida por:

$$\lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |S^n(x)| = \int \log |S'(\cdot)| d\mu,$$

es conocida como el exponente de Lyapunov de la transformación S para la medida μ . Frecuentemente el exponente de Lyapunov es interpretado como una medida cuantitativa de la dependencia sensitiva a condiciones iniciales en sistemas denominados caóticos [7]. Del teorema de Birkhoff y la expresión para el exponente de Lyapunov [7], se sigue la expresión que se empleará más adelante en el capítulo 4:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |S^n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |S'(S^j(x))|$$

Ya habiendo definido los conceptos y resultados útiles para esta tesis acerca de dinámica determinista (y mapeos del intervalo en general), se procede a presentar en el capítulo siguiente algunas definiciones y resultados correspondientes a dinámica aleatoria, pertinentes para la exposición y posterior discusión del capítulo 4.

Capítulo 3

Dinámica aleatoria

Con el fin de modelar procesos más realistas a partir de sistemas simples, se han definido sistemas dinámicos que están sujetos a un cierto tipo de perturbación, ya que los procesos físicos reales la mayoría de las veces, están sujetos a alguna forma de ruido.

Una forma de definir este tipo de fenómenos es utilizando modelos relativamente simples, por ejemplo mapeos aleatorios, que son sistemas dinámicos a tiempo discreto, en los que se selecciona tras cada iteración una transformación de entre una colección, de manera aleatoria. Para casos más generales y más detalles referimos a [13]. Esta tesis queda enfocada sobre la clase de mapeos aleatorios.

Antes de definir de forma precisa las dinámicas aleatorias en las que se centra este estudio, es necesario introducir nociones básicas de los procesos estocásticos y la teoría de las probabilidades.

El espacio de medida en esta sección es referido como un espacio de probabilidad y la notación empleada en esta sección para describirlo será $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, para el espacio de resultados, la σ -álgebra y la medida de probabilidad, respectivamente.

Definición 3.1 (Proceso estocástico). *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{\xi_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto ζ llamado espacio de estados.*

Definición 3.2 (Independencia). *Si se tiene un conjunto de datos $\{\omega_i\} \subset \mathcal{F}$, con $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^n F_i$, con $i = 1, 2, \dots, n$ para cada ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sobre un espacio de medida de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, se dice que los datos son independientes, si*

$$\mathbb{P}(F_n \cap F_m) = \mathbb{P}(F_n)\mathbb{P}(F_m), \quad n \neq m$$

Es decir, la probabilidad de observar dos valores ω_1 y ω_2 es simplemente la probabilidad de observar ω_1 multiplicada por la probabilidad de observar ω_2 . En el presente

trabajo, en la parte aleatoria que se utiliza para definir a los sistemas dinámicos aleatorios, sólo se consideran procesos independientes idénticamente distribuidos, ya que es una forma natural de modelar las perturbaciones y además por simplicidad [12].

Un resultado fundamental de la teoría de probabilidad es la ley de grandes números. Establece que en el límite de datos infinitos $n \rightarrow \infty$ el promedio de la muestra converge al valor esperado $\mathbb{E}(\xi_j)$. Es decir, con una cantidad suficientemente grande de datos, las aproximaciones incrementan su precisión [12].

Teorema 3.1 (Ley de grandes números). *Sea $\{\xi_n\}$ un proceso independiente e idénticamente distribuido con ley \mathbb{P} , con esperanza finita $\mathbb{E}(\xi_j)$. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$*

$$\mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \mathbb{E}(\xi_j) \geq \epsilon \right) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En el caso de los sistemas dinámicos, la ley fuerte de los grandes números es el teorema ergódico de Birkhoff, debido a que en éstos, el promedio temporal (ecuación 2.4) es análogo al valor esperado en un proceso estocástico.

Otro resultado fundamental de la teoría de probabilidad es el teorema del límite central, que se describe a continuación:

Teorema 3.2 (Teorema del límite central). *Dada una muestra n de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, denotadas $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, cada una asociada a un promedio m y varianza σ^2 . Sea $\mathbb{E}(\xi_j)$ el promedio de la muestra de los valores,*

$$\mathbb{E}(\xi_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Entonces en el límite asintótico de cuando $n \rightarrow \infty$ la variable aleatoria definida por

$$\sqrt{n}(\mathbb{E}(\xi_j) - m),$$

converge en distribución a una variable aleatoria normal con promedio cero y varianza σ^2 .

La noción de convergencia en distribución quiere decir que la función de distribución de probabilidad asociada al proceso estocástico es invariante.

Nota 3.1. *En el límite de tamaños de muestra suficientemente grandes el error en la estimación converge a cero a una tasa de \sqrt{n} [12].*

3.1. Mapeos aleatorios

Ahora se puede describir de forma más precisa lo que es el objeto central de esta tesis, los mapeos aleatorios.

Definición 3.3 (Mapeos aleatorios en el intervalo). *Un mapeo aleatorio en el intervalo $T_{(\Gamma, \omega)}$ es un sistema dinámico de tiempo discreto en el cual una transformación τ_k es seleccionada aleatoriamente y aplicada a cada iteración del proceso. El mapeo τ_k se elige de una colección de mapeos del intervalo Γ con probabilidad constante $p_k \in \omega$, donde ω es una colección de las probabilidades correspondientes, de modo que $p_k \geq 0$, para $k = 1, 2, \dots, K$, con $K \leq \infty$, y $\sum_{k=1}^K p_k = 1$.*

El teorema 2.6 es un resultado de existencia de la medida absolutamente continua para mapeos expansivos en el intervalo, sin embargo es cierto para dinámica completamente determinista. Una pregunta natural es preguntarse si es válida una versión aleatoria de este teorema. Esta pregunta en general no está completamente resuelta, sin embargo existen varios resultados válidos para distintas formas de perturbaciones como se verá a continuación.

3.2. Existencia de las densidades invariantes asociadas a un mapeo aleatorio

En [5] se muestra un teorema para determinar la existencia de una medida invariante absolutamente continua asociada a un mapeo aleatorio con probabilidades dependientes de la posición, el cual es el siguiente:

Teorema 3.3 (Gora-Boyarsky 2006). *Sea el mapeo aleatorio $T_{(\Gamma, \omega)}$ que cumple las siguientes suposiciones:*

- *Existen particiones $\mathcal{P} = \{I_1^{(k)}, \dots, I_{q_k}^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots, K$, tal que cada $\tau_{k_i} = \tau_k|_{I_i^{(k)}}$, con $i = 1, \dots, q_k$, $k = 1, 2, \dots, K$*
 1. *es monótono,*
 2. *C^2 ,*
 3. *$|\tau'_{k_i}| \geq \sigma > 1$, para alguna constante universal σ , y*
 4. *las funciones que asignan probabilidades a cada mapeo τ_k , $p_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, K$ son funciones C^1 por partes.*

Sea $\delta = \min\{\lambda(I_i^{(k)}) : i = 1, \dots, q_k, k = 1, 2, \dots, K\}$ y $\beta_k = \sup_{x \in I} p_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, K$, entonces para cada $f \in BV(I)$,

$$\bigvee_I (P_T f) \leq A \bigvee_I f + B \int_I |f| d\lambda,$$

donde

$$A = \frac{2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_K)}{\sigma}, \quad B = \frac{2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_K)}{\sigma \delta} + \max_{k=1,2,\dots,K} \sup_I \left| \left(\frac{p_k}{\tau_k'} \right)' \right|.$$

Si $A < 1$, entonces el mapeo aleatorio T posee una medida invariante absolutamente continua (m.i.a.c.) μ . Además, el operador P_T es cuasi compacto.

Existe un método descrito brevemente aquí y detallado en la referencia [5] para calcular las densidades invariantes de mapeos aleatorios dependientes de la posición. Un mapeo aleatorio dependiente de la posición $T = T_{(\Gamma, \omega)}$, donde $\Gamma = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K)$ es una colección de K mapeos en un intervalo y $\omega = (p_1, p_2, \dots, p_K)$ una colección de las probabilidades correspondientes dependientes de la posición, se tiene que $p_k(x) \geq 0$ para $k = 1, 2, \dots, K$ y $\sum_{k=1}^K p_k(x) = 1$. De modo que tras cada iteración, el mapeo aleatorio T se mueve del punto x al punto $\tau_k(x)$ con probabilidad $p_k(x)$. Para una colección fija de mapeos Γ , T puede poseer diferentes funciones de probabilidad invariantes, dependiendo en la elección de el peso de las probabilidades ω [5].

Definición 3.4. (Semi mapeo de Markov lineal por partes) Un mapeo τ es un semi mapeo de Markov lineal por partes sobre una partición $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_q\}$ si cualquier intervalo I_i puede ser particionado en subintervalos $\{J_1^{(i)}, \dots, J_{r_i}^{(i)}\}$ tal que $\tau|_{J_r^{(i)}}$ es lineal y su imagen es una unión de algunos intervalos de $\{I_1, I_2, \dots, I_q\}$. La densidad invariante de un semi mapeo de Markov lineal por partes es constante por partes sobre la partición \mathcal{P} .

3.3. Obtención de las densidades invariantes asociadas al mapeo aleatorio

Para el semi mapeo de Markov lineal por partes τ , el operador de Perron-Frobenius consiste en una matriz $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq q}$, con

$$m_{i,j} = \frac{1}{|\tau'|_{J_r^{(i)}}|} \cdot \delta(i, r, j),$$

donde $\delta(i, r, j) = 1$ si $\tau(J_r^{(i)}) \supset I_j$ y 0 en caso contrario. La densidad invariante de un semi mapeo de Markov lineal por partes está representada por un vector

$f = [f_1, f_2, \dots, f_q]$, $f_i = f|_{I_i}$ y está normalizado por el requerimiento $\sum_{i=1}^q f_i = q$. Similarmente, cada peso asignado a las probabilidades se asumen como constante sobre los elementos de la partición \mathcal{P} y queda representado por $p = [p(1), p(2), \dots, p(q)]$, $p_i = p|_{I_i}$, $0 \leq p(i) \leq 1$. Bajo esta notación, la densidad invariante ante T resulta como

$$f = \sum_{k=1}^K \mathbb{M}_k^\dagger \text{diag}(p_k) f,$$

donde “ \dagger ” denota la transpuesta de la matriz y $\text{diag}(p_k)$ es la matriz diagonal con elementos $p_k(1), p_k(2), \dots, p_k(q)$ en la diagonal. Se fija una colección de semi mapeos de Markov lineales por partes $\Gamma = (\tau_1, \dots, \tau_K)$ y se considera el conjunto de densidades alcanzables (o realizables) $\mathcal{A}_\Gamma^{\text{pc}}$ como el conjunto de funciones f tales que existe un vector $\omega = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_K(x))$ que asigna un peso a las probabilidades, de modo que f es una densidad invariante de el mapeo aleatorio en cuestión $T_{(\Gamma, \omega)}$. En [5] se demuestra que $\mathcal{A}_\Gamma^{\text{pc}}$ es convexo y en el mismo artículo se presenta un resultado para calcular sus puntos extremos al asignar un vector de probabilidades ω que consta de ceros y unos. El teorema es presentado a continuación.

Teorema 3.4 (Puntos extremos del conjunto de densidades alcanzables [5]). *Sea $\Gamma = (\tau_1, \dots, \tau_K)$ una colección fija de semi mapeos de Markov lineales por partes definidos sobre una partición común \mathcal{P} . Sea $\mathcal{A}_\Gamma^{\text{pc}}$ el conjunto de las densidades alcanzables que se considera asignando un peso de probabilidades que son constantes en elementos de \mathcal{P} . Si f es un punto extremo de $\mathcal{A}_\Gamma^{\text{pc}}$, entonces f corresponde a un peso de probabilidades $p_k = [p_k(1), \dots, p_k(q)]$, $k = 1, \dots, K$, donde los componentes de cada p_k son 0 ó 1.*

El caso siguiente, tomado de [5] ejemplifica el teorema 3.3:

Ejemplo 3.1. *Se consideran dos semi mapeos de Markov lineales por partes τ_1, τ_2 que preservan la medida de Lebesgue y tales que el mapeo aleatorio dependiente de la posición construido con éstos posee más de una densidad invariante. Sea τ_1, τ_2 definida sobre $[0, 1]$ con partición de Markov $\mathcal{P} = \{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$ y las matrices correspondientes de Perron-Frobenius*

$$\mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para las probabilidades $p_1 = (p_1(1), p_1(2)) = (s, t)$, $p_2 = (1 - p_1(1), 1 - p_1(2)) = (s, t)$ se obtiene la densidad invariante $f = (f_1, 2 - f_1)$ normalizada por la condición $f_1 + f_2 = 2$:

$$f_1 = \frac{8 - 2t}{8 - t - s}, \quad f_2 = 2 - f_1.$$

Nótese que f_1 puede asumir cualquier valor en el intervalo $[6/7, 8/7]$, con $f_1((1, 0)) = 6/7$ y $f_1((0, 1)) = 8/7$.

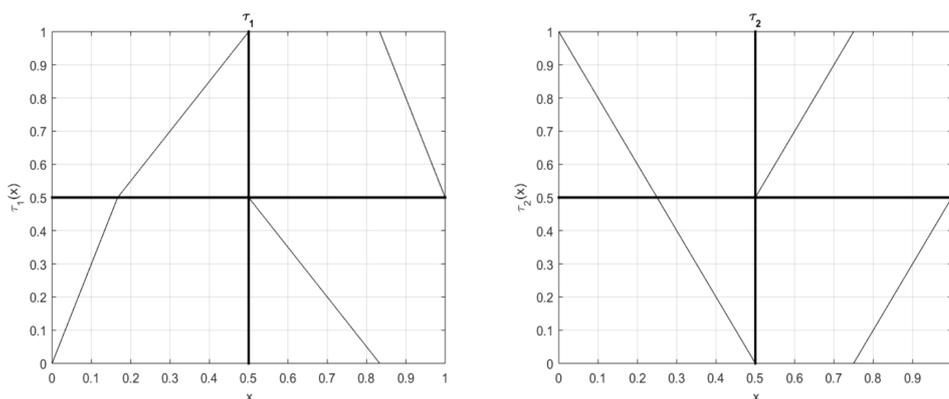


Figura 3.1: Representación posible de la configuración de los mapeos τ_1 y τ_2 , con base en sus matrices de Perron-Frobenius. Las líneas gruesas delimitan los elementos de \mathcal{P} .

Nota 3.2. Los resultados de los teoremas 3.3 y 3.4, así como del método propuesto en [5] para la obtención de las densidades invariantes están garantizados para semi mapeos de Markov lineales por partes, C^2 por partes y monótonos por partes, además de contar un peso de probabilidades asignado por su posición en el espacio de estados.

Así, habiendo establecido los conceptos y resultados preliminares concernientes a esta tesis, se procede en el capítulo siguiente a exponer los resultados numéricos obtenidos para un par de familias de mapeos aleatorios que no pertenecen a la clase de dinámicas para las cuales ya está garantizada la existencia de una m.i.a.c.

Capítulo 4

Resultados

En esta sección se exploran dos casos de estudio que consisten en mapeos aleatorios del intervalo $[0, 1]$, cuyas propiedades estadísticas quedan en función de un parámetro. La principal contribución de este trabajo de tesis es una exploración numérica para presentar una serie de conjeturas y dar argumentos de plausibilidad acerca de la existencia de una medida absolutamente continua para una sistema de mapeos aleatorios en el intervalo con la propiedad de no ser estrictamente expansivos todo el tiempo. Es decir que se da evidencia numérica de que algunos de los resultados mencionados en el capítulo anterior se pueden extender para mapeos eventualmente expansivos o que incluyen contracciones.

Estudiamos dos familias de mapeos, descritas con detalle a continuación.

4.1. Familia I de mapeos aleatorios

Para el primer caso de estudio, la dinámica está descrita por la elección aleatoria entre dos mapeos posibles, uno que tiene una rama no expansiva y el otro el $2x \pmod{1}$. Se tiene que se puede escribir como un mapeo aleatorio dependiente de la posición, mediante las consideraciones que son enunciadas a continuación.

Sean $T = T_{(\Gamma, \omega)}$ y $x_{n+1} = \tau_k(x_n)$, con $\Gamma = \{\tau_1, \tau_2\}$, donde

$$\tau_1(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2x - 1, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad y \quad \tau_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2x - 1, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Se tiene además la partición $\mathcal{P} = \{[0, 0.5], [0.5, 1]\}$ (figura 4.1), $f = [f_1, f_2]$, con $f_1 + f_2 = 2$, y $\omega = p_k = [p_k(1), p_k(2)]$ con $p_1 = [\alpha, \alpha]$ y para p_2 la probabilidad complementaria, de modo que $p_2 = [1 - \alpha, 1 - \alpha]$, es decir que el parámetro α es fijo para cada realización. Se procede a mostrar los cálculos algebraicos para las densidades invariantes asociadas al mapeo aleatorio. Primero, se construyen las matrices \mathbb{M}_1 y

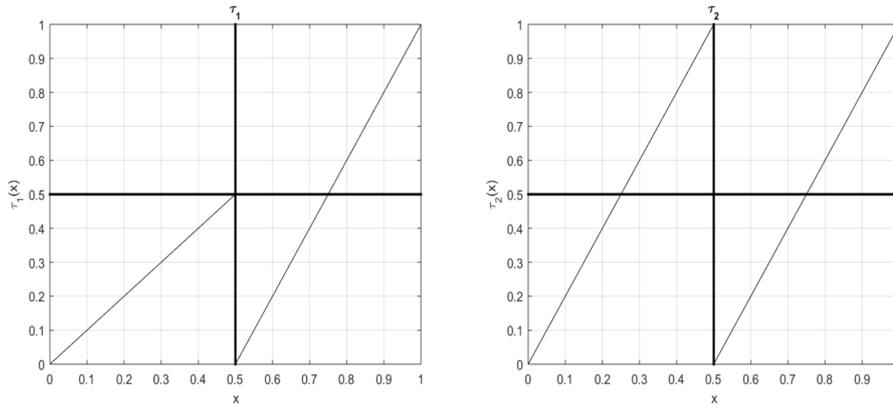


Figura 4.1: Familia I de mapeos aleatorios y su partición de Markov delimitada por la línea gruesa.

M_2 de acuerdo al método propuesto en [5], y se sustituyen junto con los datos de p_k y el vector f en la expresión antes presentada.

$$M_1^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad y \quad M_2^\dagger = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha f_1 \\ \alpha f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\alpha)f_1 \\ (1-\alpha)f_2 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} \alpha f_1 + \frac{1}{2}\alpha f_2 \\ \frac{1}{2}\alpha f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(1-\alpha)f_1 + (1-\alpha)f_2] \\ \frac{1}{2}[(1-\alpha)f_1 + (1-\alpha)f_2] \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+\alpha)f_1 + f_2 \\ (1-\alpha)f_1 + f_2 \end{bmatrix}$$

De modo que al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene una expresión para f_1 y para f_2 en función del parámetro α :

$$f_1 = \frac{2}{2-\alpha}, \quad f_2 = \frac{2-2\alpha}{2-\alpha}.$$

Y dado que α es un parámetro entre 0 y 1, al aplicar la metodología propuesta en el teorema 3.3, los puntos extremos del conjunto de densidades alcanzables, asignando pesos de 0 ó 1 a los elementos del vector de probabilidades constantes, se tiene que con $\alpha = 0$, $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$, de modo que se obtiene una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ (esto es consistente con la observación de que con $\alpha = 0$

sólo sucede el mapeo τ_2 , equivalente al $T = 2x \pmod{1}$). Y con $\alpha = 1$, se tiene que $f_1 = 2$ y $f_2 = 0$, evidenciando que al sólo suceder τ_1 la trayectoria se concentra en el intervalo $[0, 0.5]$ de manera uniforme, aunque realmente, se concentra en forma de una función delta.

Sin embargo, recordando que sólo está demostrado que la metodología arriba aplicada es válida para mapeos estrictamente expansivos (principalmente en cuanto a la existencia de la m.i.a.c.), se recurre a presentar estimaciones numéricas de estas densidades de probabilidad esperando corroborar los resultados analíticos para algunos casos genéricos.

Primero se realizó el conteo de la incidencia de la trayectoria del mapeo aleatorio dentro de cada uno de los 1000 subintervalos iguales en los que se dividió el espacio de estados $[0, 1]$, ilustrado mediante un histograma. Para cada uno de los valores del parámetro de probabilidad α se obtuvieron diferentes histogramas (figura 4.2).

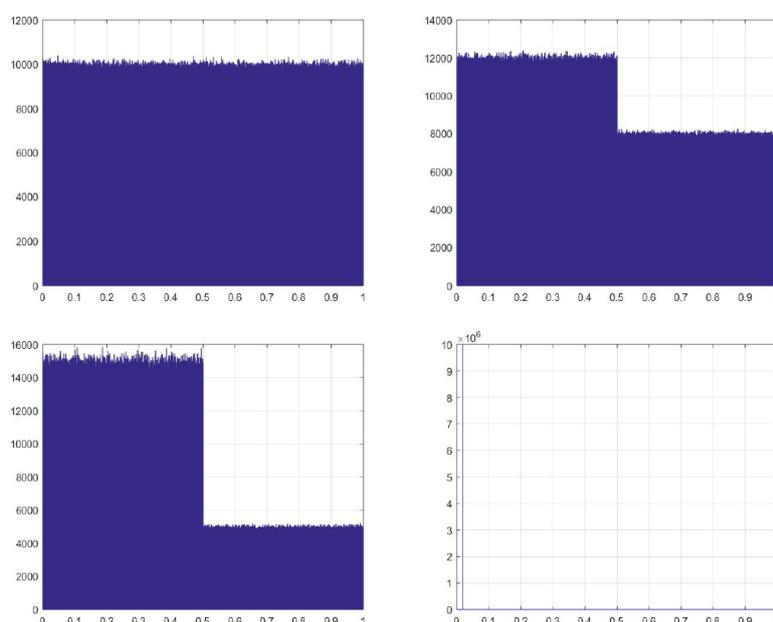


Figura 4.2: Histogramas obtenidos numéricamente para 10^7 iteraciones y diferentes valores de α . Se obtiene un histograma correspondiente a la distribución uniforme con $\alpha = 0$ (arriba, izquierda). Conforme se incrementa el parámetro, con $\alpha = 1/3$ (arriba, derecha) y $\alpha = 2/3$ (abajo, izquierda), la trayectoria se distribuye con cada vez mayor incidencia en el intervalo $I_1 = [0, 0.5]$ y uniformemente dentro de I_1 e I_2 . Con $\alpha = 1$ (abajo, derecha), sólo sucede τ_1 y la trayectoria se estanca en el primer punto de I_1 en el que cae (la distribución es una función delta).

A partir de los datos obtenidos de la distribución de la trayectoria, se obtuvo la aproximación numérica de la densidad invariante con base en el promedio del con-

teo de incidencia para cada elemento de \mathcal{P} (dado que la distribución es uniforme), normalizando los resultados de acuerdo a la metodología del método analítico antes discutido. Se puede observar que conforme se incrementa el número de iteraciones aplicadas al mapeo aleatorio, las densidades estimadas numéricamente coinciden con las que provee la expresión analítica obtenida (figura 4.3).

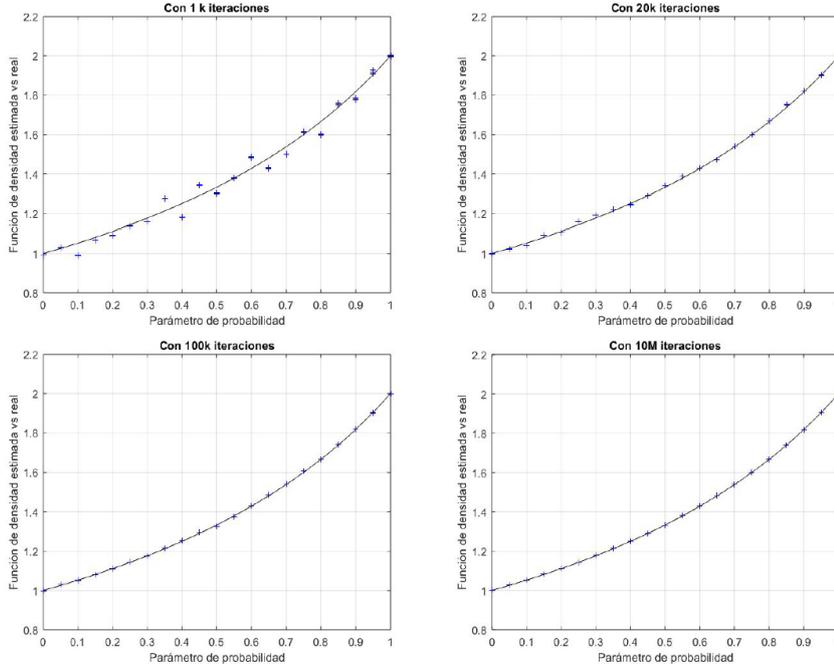


Figura 4.3: Convergencia numérica para 20 valores de α de la función de densidad estimada contra la analítica. En color negro se graficó $f_1 = 2/(2-\alpha)$. Las cruces color negro son el promedio de la incidencia de la trayectoria en I_1 , y las cruces azules son la desviación estándar, positiva y negativa. Note que se requiere de una cantidad relativamente baja de iteraciones para apreciar la convergencia.

Como resultado, se tiene que para la familia I de mapeos aleatorios debe ser posible obtener una expresión para calcular las densidades de probabilidad invariantes empleando el método propuesto en [5]. A pesar de que el mapeo aleatorio no cumple las condiciones del método de Gora y Boyarsky, (nota 3.2) se muestra evidencia de que las aproximaciones numéricas de estas densidades de probabilidad coinciden con las obtenidas analíticamente para una cantidad suficientemente grande de iteraciones. Con base en ésto, se propone la siguiente conjetura:

Conjetura 1. Sea $T_{(\Gamma, \omega)}$ la clase de mapeos aleatorios en el intervalo definidos por (4.1). Considere el parámetro $\alpha \in [0, 1]$ de probabilidad de elección entre los mapeos. Entonces para $\alpha \neq 1$ existe un número natural $N > 1$ suficientemente grande tal que

para todo $n \geq N$, $T_{(\Gamma, \omega)}^n$ es expansivo para casi toda condición inicial $x \in [0, 1]$. Como consecuencia el método de Gora y Boyarsky es aplicable.

4.1.1. Estimación del exponente de Lyapunov

Utilizando la expresión mencionada en el capítulo 2

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |S'(S^j(x))|$$

se calculó numéricamente el exponente de Lyapunov para el mapeo aleatorio, en función del parámetro de probabilidad α . Cuando $\alpha = 1$ o cuando $\alpha = 0$ se puede calcular analíticamente; es fácil ver que el exponente de Lyapunov decrece desde $\lambda = \ln(2)$ con $\alpha = 0$ hasta cero (con $\alpha = 1$) conforme se incrementa el valor del parámetro de probabilidad. Como se puede apreciar en la figura 4.4, no decrece de manera lineal, sino que describe una curva similar a la que genera $f_2 = (2 - 2\alpha)/(2 - \alpha)$. Al normalizar f_2 , ambas curvas coinciden; se puede atribuir alguna relación entre el cálculo del exponente de Lyapunov para mapeos aleatorios en función del parámetro de probabilidad α y el cálculo analítico de sus densidades de probabilidad invariantes.

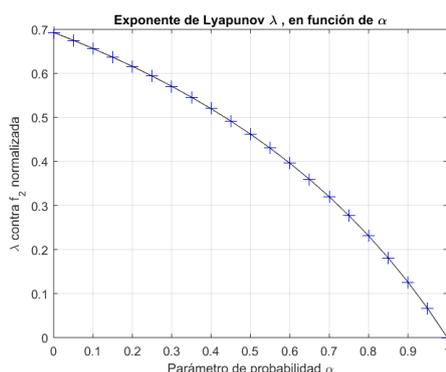


Figura 4.4: Exponente de Lyapunov, en función de α , graficado contra $f_2 = (2 - 2\alpha)/(2 - \alpha)$ con la normalización adecuada. Aparentemente están relacionados bajo la misma regla de cambio en función del parámetro de probabilidad.

Con esta información se puede concluir, recordando la conjetura 1, que a pesar de que el método propuesto en [5] sólo sería válido para mapeos aleatorios estrictamente expansivos, puede funcionar para mapeos que no lo son. Queda a considerar también que este ejemplo induce un caso patológico (degenerado) cuando el parámetro de probabilidad α es igual a 1; por lo que en un trabajo futuro sería plausible una revisión y ajuste de las condiciones del teorema para casos un tanto más generales; e igualmente proponer una metodología para el cálculo analítico del exponente de Lyapunov para mapeos aleatorios.

4.2. Familia II de mapeos aleatorios

El segundo caso consiste en el mapeo aleatorio $T = T_{(\Gamma, \omega)}$, donde $\Gamma = \{\tau_k\}$ es una colección con cardinalidad no numerable de mapeos con probabilidad constante p_k y $\omega = \{p_k\}$ una colección de las probabilidades correspondientes, se tiene que $p_k \geq 0$ para $k = 1, 2, \dots$ y $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, $\forall k$, con una distribución uniforme de la probabilidad de elegir en cada iteración, cualquiera de los mapeos en la colección Γ , definidos mediante

$$\tau_k(x) = \begin{cases} \beta_k x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2x - 1, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (4.2)$$

donde $x_{n+1} = \tau_k(x_n)$, y β_k es un número real en $[\gamma, 2]$, siendo $\gamma \in [0, 2]$ un parámetro fijo para cada realización, que determina el rango de valores que β_k puede asumir para cada iteración del mapeo aleatorio.

Este mapeo posee para todos valores del parámetro un punto fijo en $x = 0$ que en función de γ y de cada iteración, es casi siempre hiperólico atractor o repulsor, e indiferente con probabilidad 0 (note que para $\gamma > 1$ este $x = 0$ es siempre repulsor, y con $\beta_k = 1$, indiferente); mientras el otro punto fijo $x = 1$ es repulsor.

4.2.1. Estimación de la medida invariante

La primer labor sobre este caso de estudio consistió en explorar mediante simulaciones numéricas la distribución de la órbita para una cantidad de iteraciones igual a 10^7 , para lo cual se elaboraron los histogramas correspondientes para 200 valores del parámetro, comenzando con $\gamma = 0$ e incrementando γ en 0.01 con condiciones iniciales aleatorias. A partir de ésto se distinguen cinco patrones de característicos de la dinámica en función de γ .

a) $\gamma \in [0, 0.26]$: Para el primer valor explorado $\gamma = 0$, se tiene que para cada estado $x_n \in [0, 0.5]$ hay una probabilidad de $1/2$ de que la órbita asuma alguna dinámica expansiva, o bien, no expansiva (repulsora o atractora, respectivamente, desde la perspectiva del punto fijo en $x = 0$). Naturalmente, conforme se incrementa el valor del parámetro, la probabilidad de que predomine la dinámica no contractiva se incrementa. Sin embargo, los histogramas generados por la dinámica para este intervalo de valores, consisten en una función delta concentrada en cero (figura 4.5).

En el histograma la órbita se concentra en cero, no obstante, al visualizar la trayectoria para una cantidad relativamente baja de iteraciones es posible señalar diferencias notables en la dinámica conforme se incrementa γ (figura 4.6).

b) $\gamma \in (0.26, 0.4]$: A partir de aquí los histogramas generados por el mapeo aleatorio muestran una distribución de la órbita que abarca todo el intervalo $[0, 1]$; y para

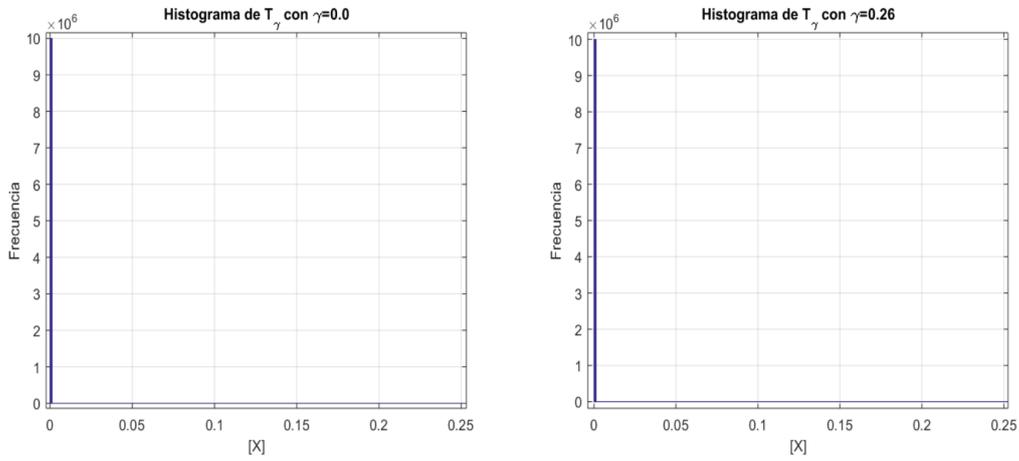


Figura 4.5: Acercamiento de los histogramas sobre el intervalo $[0, 0.25]$, generados por la dinámica con 10^7 iteraciones, para $\gamma = 0$ (izquierda) y $\gamma = 0.26$ (derecha). La trayectoria se concentra en una vecindad suficientemente pequeña del punto fijo $x = 0$, de modo que la función de densidad apreciada es una función delta centrada en 0.

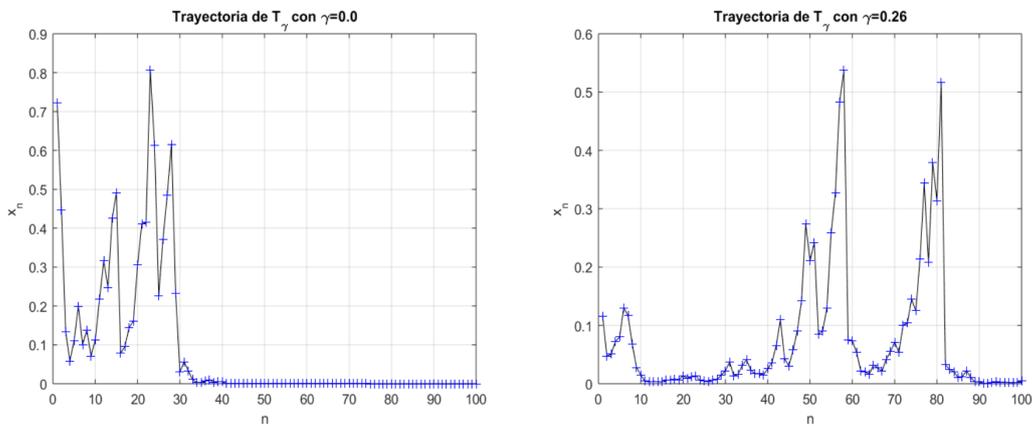


Figura 4.6: Diagrama de la trayectoria típica para $\gamma = 0$ (izquierda) y $\gamma = 0.26$ (derecha). Note que la tendencia a permanecer cerca del cero decrece conforme se incrementa γ . Con $\gamma = 0.26$, aun cuando la trayectoria incide relativamente cerca del punto fijo durante una cierta cantidad de iteraciones, suele alejarse por instantes.

este rango de valores, se obtiene una distribución correspondiente a una curva decreciente, que no se logró ajustar numéricamente a una ley de potencias o a una curva exponencial por completo, sino que solamente alrededor del punto fijo $x = 0$ (figura 4.7). Sin embargo, es posible notar por los histogramas que predomina la dirección de la dinámica de los mapeos expansivos de la colección, y aparece el fenómeno de intermitencia que se observa en el Manneville-Pomeau, en que las trayectorias tienden a pasar largas excursiones en una vecindad del 0. Por lo tanto, se muestra evidencia de que existe una transición de fase en cuanto al comportamiento general de la dinámica en función de un valor del parámetro $\gamma \in [0.26, 0.27]$, que conlleva incluso el surgimiento de una función de densidad absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. En la figura 4.8 se presentan un par de histogramas representativos de este patrón.

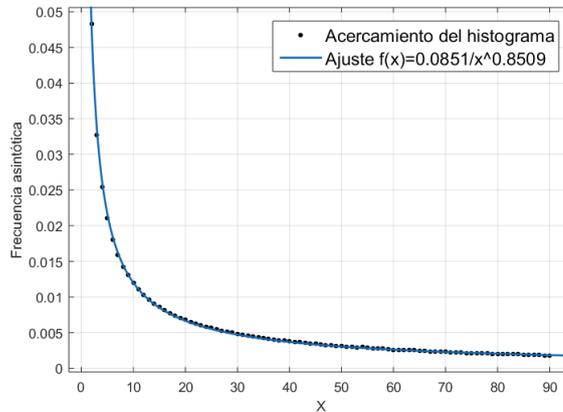


Figura 4.7: Ajuste de la curva del histograma normalizado para $\gamma = 0.34$. En este acercamiento alrededor del punto fijo en $x = 0$, es posible ajustar la curva descrita por la función de densidad, como una ley de potencias, con exponente 0.8509. Para el resto de valores de $\gamma \in (0.26, 0.4]$ se mantiene este patrón.

c) $\gamma \in (0.4, 1]$: Con una presencia en declive de la dinámica contractiva, el mapeo aleatorio para este intervalo de valores de γ produce histogramas que describen una función de densidad dividida en dos secciones. Esta división paulatinamente se torna más visible en función de γ . La primera, correspondiente al intervalo $[0, \gamma/2]$ describe una curva que eventualmente pasa de ser una curva decreciente, a tomar la forma de una recta monótona decreciente que termina en el punto $\gamma/2$. La porción restante, el intervalo $(\gamma/2, 1]$ mantiene en apariencia su naturaleza como curva “rápdaamente” decreciente (en el sentido de que se asemeja a una ley de potencias o curva exponencial, como ya se mencionó. En los histogramas (figura 4.9), la función de densidad exhibe un punto de no diferenciabilidad cuya localización cambia en función del valor de γ , a una razón de $\gamma/2$, lo que hace pensar que existe una transición

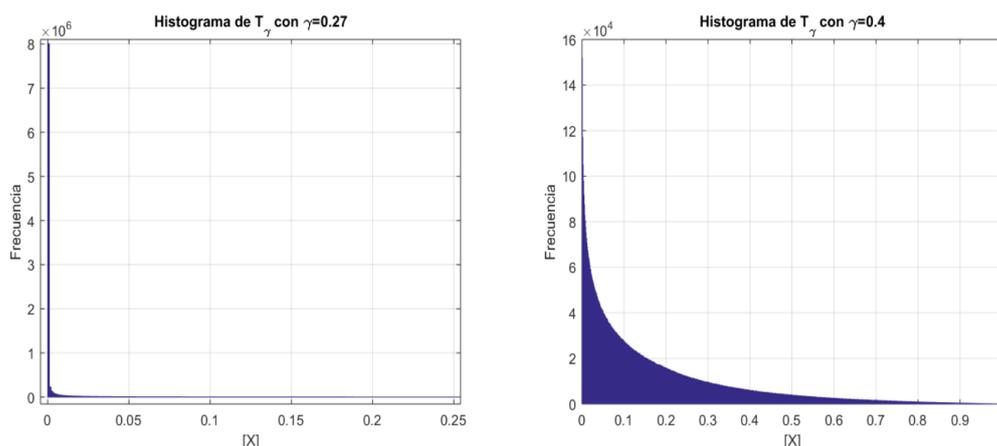


Figura 4.8: Histogramas generados por la dinámica con 10^7 iteraciones, para $\gamma = 0.27$ (acercamiento sobre la región $[0, 0.25]$, izquierda) y $\gamma = 0.4$ (derecha). Advierta que aunque la trayectoria tiende a incidir aún alrededor del cero, la función de densidad empírica es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.

de fase de segundo orden para algún valor de $\gamma \in [0.4, 0.41]$.

d) $\gamma \in (1, 1.5]$: La dinámica del mapeo aleatorio bajo estos valores de γ , es ya estrictamente expansiva, así que el punto fijo $x = 0$ es repulsor con probabilidad de 1, por que podría esperarse una concentración menor de la órbita alrededor de $x = 0$. De manera similar al rango de valores de γ descrito arriba, en función del aumento del parámetro, se presenta una nueva fragmentación del espacio de estados, desde el punto de vista de la medida asociada, revelando un nuevo punto de no diferenciabilidad aproximadamente en $x = \gamma - 1$, obteniendo así una división del intervalo en tres secciones. Además, la función de densidad para el sector del intervalo $[\gamma/2, 1]$ pasa de ser una curva que decrece de manera inmediata, a ajustarse a la forma de una recta decreciente monótona; de nuevo, asemejando lo que sucede con la división del intervalo $[0, \gamma/2]$ para el rango anterior de valores de γ (ver figura 4.10). La distribución sigue propensa a disminuir su incidencia cerca del punto fijo $x = 0$ en función de γ .

e) $\gamma \in [1.5, 2]$: Dentro de esta gama de valores del parámetro, los histogramas revelan la aparición de más puntos de no diferenciabilidad en la función de densidad, pero con una localización aún no determinada. Eventualmente, la función de densidad se vuelve suave (diferenciable), posiblemente a causa de una subdivisión suficientemente fina en $[0, \gamma - 1]$ y para valores más grandes del parámetro adopta gradualmente la naturaleza de una función constante, correspondiente a una distribución uniforme (véase figura 4.11). Esto es de esperarse ya que este mapeo aleatorio es equivalente al mapeo determinista del intervalo $T(x) = 2x \pmod{1}$, para $\gamma = 2$.

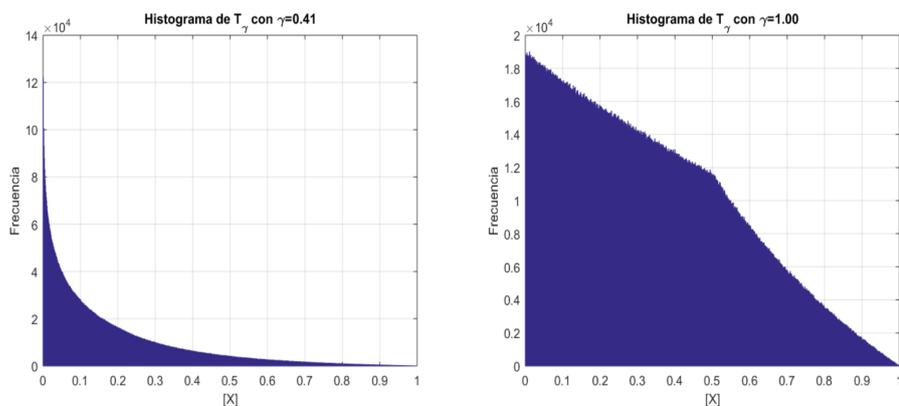


Figura 4.9: Histogramas generados por la dinámica con 10^7 iteraciones, para $\gamma = 0.4$ (izquierda) y $\gamma = 1.00$ (derecha). Observe el punto $x = \gamma/2$, principalmente para valores más grandes en este rango del parámetro, surge un punto de no diferenciabilidad en la función de densidad, por lo que la órbita posee una regla distinta de distribución para diferentes regiones del espacio de estados.

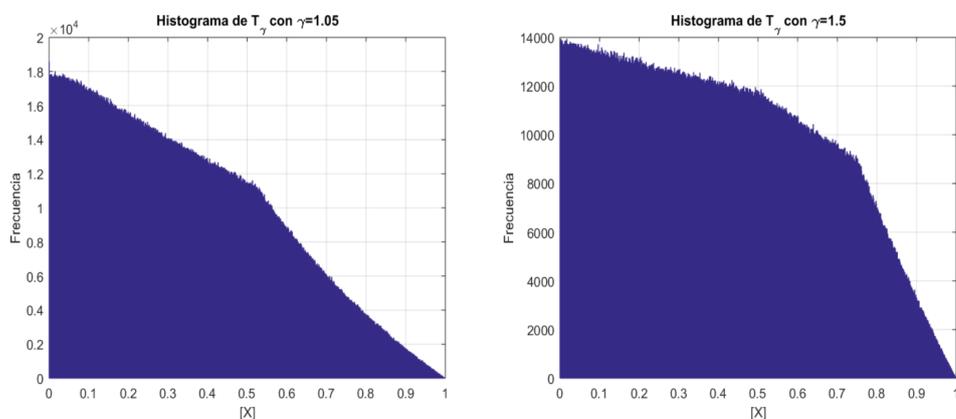


Figura 4.10: Histogramas generados por la dinámica con 10^7 iteraciones, para $\gamma = 1.05$ (izquierda) y $\gamma = 1.5$ (derecha). Note que la función de densidad es ahora lineal por partes, y presenta dos puntos de no diferenciabilidad, aproximadamente en $x = \gamma - 1$ y en $x = \gamma/2$.

En general, de acuerdo con los histogramas, la trayectoria del mapeo aleatorio mantuvo su tendencia a incidir alrededor del punto fijo $x = 0$; es decir, las regiones más cercanas a $x = 0$ contienen una mayor parte de la incidencia asintótica de la órbita.

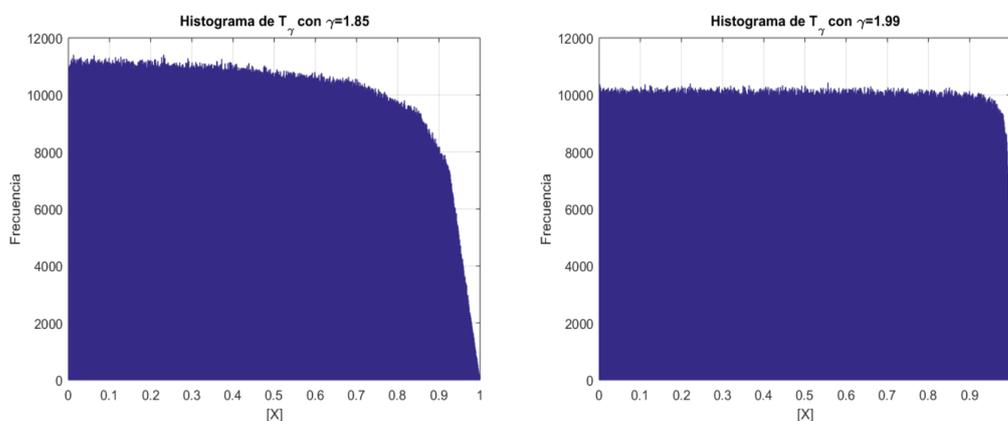


Figura 4.11: Histogramas generados por la dinámica con 10^7 iteraciones, para $\gamma = 1.85$ (izquierda) y $\gamma = 1.99$ (derecha). La función de distribución tiende a suavizarse en $[0, \gamma - 1]$ y finalmente, a convertirse en una función constante para valores de γ cercanos a 2.

Entonces, como resultado se tiene que para el segundo caso de estudio, se proporciona evidencia de que para algún valor, o intervalo de valores del parámetro que le caracteriza, existe una medida de probabilidad absolutamente continua, respecto a la medida de Lebesgue. La teoría existente funciona para transformaciones que preservan la medida o bien, para mapeos equipables con una partición de Markov, y es el caso que esta familia de mapeos carece de estas propiedades. En este sentido, un resultado analítico, extendería la teoría actual. De acuerdo con la exploración numérica realizada de las propiedades estadísticas del mapeo aleatorio en función del parámetro, se presenta una transición de fase evidente para un valor específico del parámetro, al que se denomina como crítico (γ_c). Esta contribución es interesante ya que es un modelo sencillo de mapeos aleatorios del intervalo que da lugar al fenómeno de transición de fase, que hasta donde es de nuestro conocimiento no existe. Con esto se puede establecer la siguiente conjetura:

Conjetura 2. *Considere la familia de mapeos aleatorios en el intervalo definida por (4.2). Entonces existe un valor de parámetro $\gamma_c \in [0, 1/2]$ tal que para todo $\gamma \geq \gamma_c$, el mapeo aleatorio posee una medida invariante absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, y no la posee para $\gamma < \gamma_c$.*

4.2.2. Exponente de Lyapunov

Se estimó numéricamente el exponente de Lyapunov, para realizaciones de $N = 10^7$ iteraciones, ejecutando el cálculo con los últimos $n = 2 \times 10^6$ valores de la trayectoria, para los mismos 200 valores para los que se obtuvieron los histogramas. De acuerdo a esta estimación numérica, y recordando la conjetura 2, para las realizaciones hechas existe un valor crítico del parámetro γ (aquí denotado por γ_c) para el cual el exponente de Lyapunov pasa de ser negativo a positivo, haciendo notar una transición de fase en la dinámica del mapeo, en la que la órbita pasa de poseer una naturaleza ordenada, en el sentido de que las trayectorias con condiciones iniciales similares tienden a acercarse exponencialmente, a asumir una dinámica mayormente expansiva y por lo tanto mezclante.

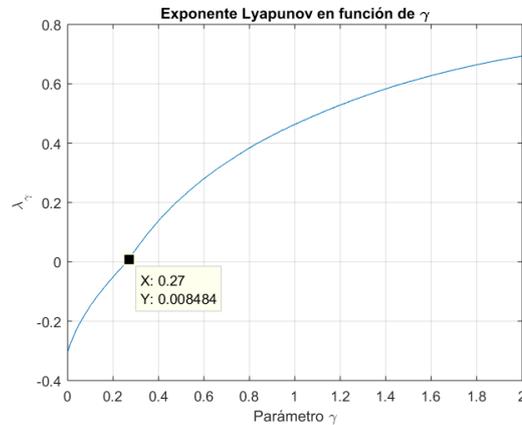


Figura 4.12: Estimación numérica del exponente de Lyapunov, en función de γ . Al igual que con los histogramas, con $\gamma = 0.27$ se presenta un cambio importante en las propiedades del mapeo, que se mantiene para valores mayores de γ . En este caso, la dependencia sensitiva a condiciones iniciales.

Como se ve en la figura 4.12, el exponente de Lyapunov en función de γ crece de manera no lineal, hasta llegar un valor igual al $\ln(2) \approx 0.6931$, cuando el mapeo aleatorio es equivalente al $T(x) = 2x \pmod{1}$ y cambia de signo para un valor del parámetro $\gamma \in [0.26, 0.27]$.

A causa de esto último, se repitió la aproximación numérica del exponente de Lyapunov con la misma precisión, para 200 valores del parámetro $\gamma \in [0.26, 0.27]$ considerando el promedio de 100 realizaciones, con el fin de obtener una cota más precisa del valor γ_c . Dentro de este intervalo de valores de γ , el exponente de Lyapunov cambia de signo repetidamente, lo que se atribuye a la dinámica aleatoria del mapeo. Aunque a la vez que γ se incrementa, esta tendencia de cambiar de signo disminuye porque también posee una naturaleza creciente. Para las realizaciones

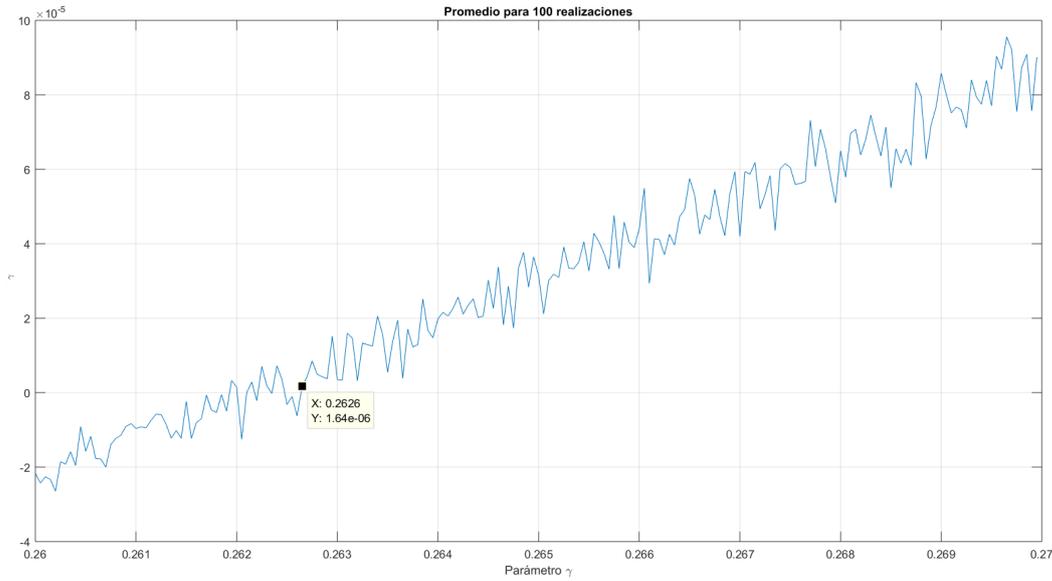


Figura 4.13: Estimación numérica del exponente de Lyapunov (promedio de 100 realizaciones), para $\gamma \in [0.26, 0.27]$. En la etiqueta, el valor más pequeño de γ para el cual el exponente de Lyapunov comienza a mantenerse positivo.

efectuadas, el valor más grande del parámetro γ para el cual el exponente de Lyapunov se mantiene negativo, es $\gamma = 0.2626$ y en adelante, continúa incrementándose de manera no lineal, para $\gamma > \gamma_c$ (figura 4.13), exhibiendo una notoria y creciente tendencia del mapeo aleatorio a ser mayormente expansivo.

4.2.3. Decaimiento de correlaciones

Al no conocerse la medida de probabilidad invariante asociada al mapeo aleatorio, se elaboraron dos aproximaciones numéricas de la función que describe la tasa del decaimiento de correlaciones para los distintos valores del parámetro γ . En ambos casos, se calculó a partir de una trayectoria de $n = 10^7 - k$ iteraciones, con $k = 1, 2, \dots, K$ y $K = 3000$. La primera estimación con los observables $f = g = \chi_A(x)$ definidos como la función característica del intervalo $A = [0, 0.05]$ y la segunda estableciendo los observables $f = g = T^{i+k}$ como el estado del sistema. Por lo tanto, las aproximaciones numéricas corresponden a las expresiones siguientes:

$$\hat{C}or_{\chi_A, n}(k) = \frac{1}{n - k + 1} \sum_{i=0}^{n-k} \chi_A(T^i(x)) \chi_A(T^{i-k}(x)) - \left(\frac{1}{n - k + 1} \sum_{i=0}^{n-k} \chi_A(T^{i+k}(x)) \right)^2, \quad (4.3)$$

$$\hat{C}or_{T,n}(k) = \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=0}^{n-k} (T^i(x))(T^{i-k}(x)) - \left(\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=0}^{n-k} (T^{i+k}(x)) \right)^2. \quad (4.4)$$

La tasa del decaimiento de correlaciones estimada presenta, describiéndolo en un sentido amplio, tres tipos de comportamientos distintivos en función de γ , para las diferentes selecciones de observables.

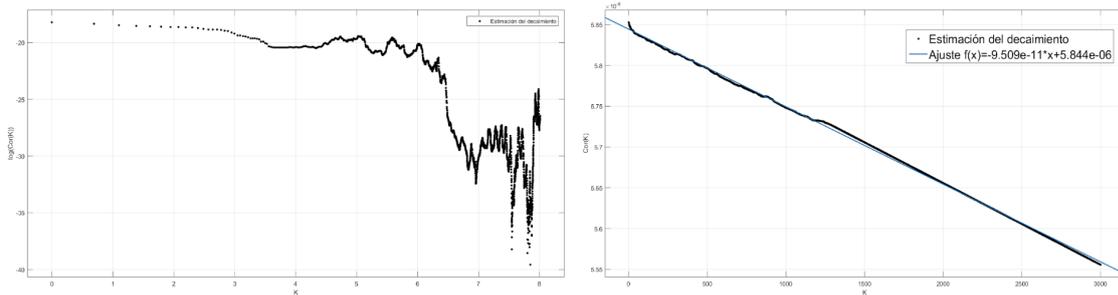


Figura 4.14: Gráficas para la estimación de la tasa del decaimiento de correlaciones en función de k , con $0.25 = \gamma < \gamma_c$ para $k = 3000$. Considerando $f = g$ como el estado del sistema (izquierda, gráfica *log-log*) el coeficiente de correlación varía de manera irregular y no fue posible realizar un ajuste de la curva, mientras que para $f = g$ siendo la función característica de un intervalo $A = [0, 0.5]$ (derecha) el decaimiento es lineal.

A) Para la estimación con (4.3):

- Tomando como observable a la función característica, para valores de $\gamma < \gamma_c$ se identifica una tasa de decaimiento lineal (figura 4.14).
- Conforme se incrementa γ relativamente cerca de γ_c , la estimación del coeficiente de correlaciones comienza a adoptar una forma de una curva no lineal. Posteriormente se graficaron los datos en escala logarítmica para ambos ejes (conocida como *log-log*) para realizar un ajuste; ya sea para una curva exponencial o una ley de potencias (figura 4.15). Sin embargo, la gráfica revela que existe un cambio del régimen de decaimiento en función de K , pasando de parecer de acuerdo al ajuste, ley de potencias, a un régimen de decaimiento más inmediato, que no se logró ajustar a una curva exponencial o de ley de potencias. Y finalmente, para los últimos valores de K que se estimaron, el decaimiento vuelve a ajustarse a la curva de ley de potencias pero con una tasa menos decreciente.

- Para valores de γ mayores y relativamente lejanos a γ_c (por ejemplo, $\gamma = 0.3$), el comportamiento del decaimiento descrito en el punto anterior se mantiene, aunque con ligeros cambios. Paulatinamente, el régimen inicial de ley de potencias se torna más breve, y en cambio, régimen final de ley de potencias se prolonga (figura 4.16) y se acerca eventualmente a cero. Mientras el régimen intermedio, a su vez, se acorta de manera que la gráfica logarítmica del decaimiento bien puede quedar separada en dos regímenes: uno de ley de potencias rápidamente decreciente y otro en el que se mantiene en cero.

B) Para la estimación con (4.4):

- Tomando como observable al estado del sistema, para valores de $\gamma < \gamma_c$, graficando los datos de manera lineal, se identifica una tasa de decaimiento en la que aparentemente el decaimiento es cero siempre. Sin embargo, tras graficarlos de manera logarítmica (figura 4.14) se presenta un cambio en el coeficiente de correlación irregular, que por períodos decrece y por momentos crece, por lo que para este observable, la información aquí obtenida es poca.
- Al incrementar γ relativamente cerca de γ_c (aproximadamente en el intervalo $[0.26, 0.28]$), la estimación de correlaciones, como en el caso con la función característica, comienza a adoptar una forma de una curva no lineal. De igual modo se graficaron en la figura 4.15 los datos en escala logarítmica para ambos ejes (conocida como *log-log*) para realizar un ajuste exponencial o de ley de potencias, lo cual se logró de manera clara, pero para valores del parámetro entre 0.265 y 0.275, debido a que al incrementar más γ , el ajuste de ley de potencias se pierde, ya que la curva descrita presenta el mismo comportamiento que la que se obtiene con la función característica, es decir con un régimen de decaimiento rápido entre dos regímenes de ley de potencias. Sin embargo, cabe resaltar que con ésta elección de observables sí se logró al menos para un rango pequeño de valores de γ el ajuste del decaimiento a una ley de potencias.
- Para valores de $\gamma > \gamma_c$ la curva que describe el decaimiento es muy similar a la que se describe para la estimación con la función característica como observable.

Ahora bien, es importante recalcar que para los casos en que el decaimiento del coeficiente de correlaciones se asemeja a una ley de potencias, se podría concluir, con base en el teorema 2.5, que dado γ , conforme la probabilidad de escoger en cada iteración una dinámica expansiva se incrementa, hasta $\gamma \approx \gamma_c$, entonces estaría garantizado que el coeficiente n irá a cero y que para determinado valor del parámetro (γ_c) el mapeo es por lo menos, débilmente expansivo. Sin embargo, en este caso aún no se ha logrado demostrar que este mapeo aleatorio preserva la medida

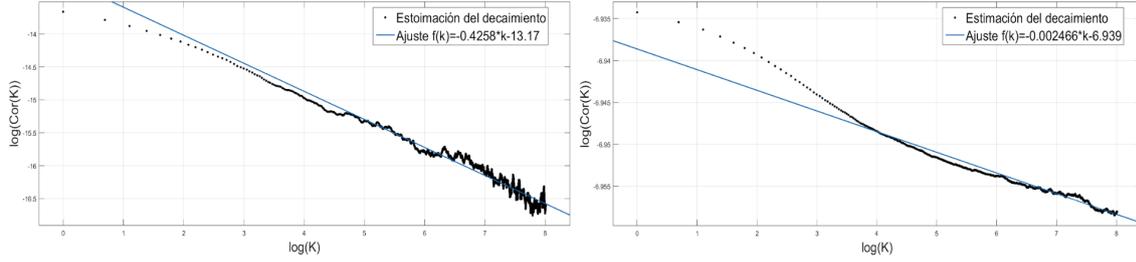


Figura 4.15: Gráfica $\log\text{-}\log$ de la estimación de la tasa del decaimiento de correlaciones, con $\gamma \approx \gamma_c$ para $K = 3000$. Considerando $f = g$ como el estado del sistema (izquierda), y para $f = g$ siendo la función característica de un intervalo $A = [0, 0.5]$ (derecha). En ambos casos, con $\gamma = 0.265$ la tasa comienza a adoptar un comportamiento de decaimiento ajustable mediante una ley de potencias decreciente, sin embargo, para la estimación de las correlaciones con la función característica del sistema, este ajuste es menos preciso.

de Lebesgue para algún valor del parámetro γ ; así que lo único que puede respaldar el decaimiento en ley de potencias de correlaciones alrededor de γ_c y más inmediato aún para valores mayores, es que la dinámica de la transformación se vuelve cada vez más independiente de las condiciones iniciales para γ más grandes. Luego, que la medida asociada para cada valor del parámetro, para $\gamma > \gamma_c$ es de hecho, invariante.

4.2.4. Evidencia adicional

En esta sección se presentará evidencia numérica adicional que respalda la conjetura 2, de la existencia de una medida invariante absolutamente continua para esta familia de mapeos aleatorios.

En en [9] se demuestra una condición necesaria y suficiente para la existencia de una medida de probabilidad invariante absolutamente continua asociada a un mapeo aleatorio, definido con una colección Γ de cardinalidad finita. La condición planteada en el ejemplo que en la referencia se propone, es equivalente a

$$\prod_{k=1}^K |\tau'_k(x)|^{p_k} > 1, \quad k = 1, \dots, K, \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1,$$

que adecuada al caso de estudio en cuestión, se reescribió como

$$\prod_{k=1}^K \beta_i > 1, \tag{4.5}$$

siendo β_i la pendiente del mapeo τ_k correspondiente a la iteración i , con $i = 1, 2, \dots, n$.

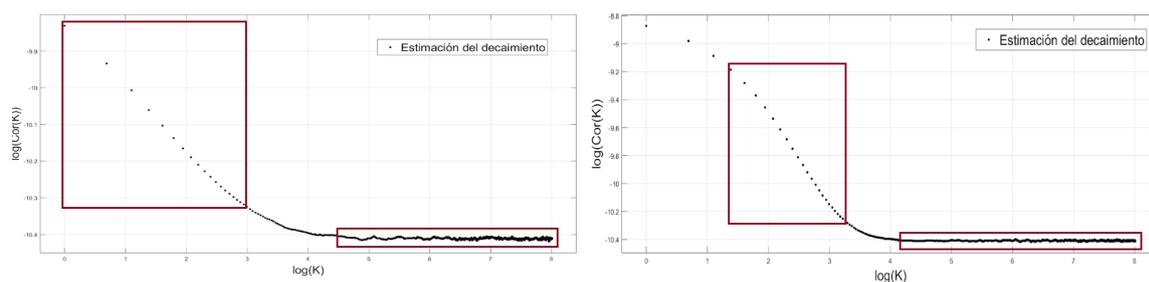


Figura 4.16: Gráficas *log-log* de la estimación de la tasa del decaimiento de correlaciones, con (4.4) (izquierda), y (4.3) (derecha). En ambos casos, con $\gamma = 0.265$ la tasa comienza a adoptar un comportamiento de decaimiento ajustable mediante una ley de potencias en los primeros datos (recuadros de la izquierda), sin embargo, presenta un régimen de decaimiento más inmediato aún no identificado, que no permite el ajuste exponencial y de ley de potencias, y conforme crece k , el decaimiento se mantiene constante (recuadros de la derecha). Este patón del decaimiento de correlaciones se mantiene para valores mayores del parámetro, excepto que eventualmente son menos notables los regímenes primero y segundo, y el decaimiento permanece constante para la mayor parte de los valores de k .

El cálculo se realizó para hasta 10^6 iteraciones, con 1000 valores de $\gamma \in [0.25, 0.3]$, que es un rango de valores de interés, donde se encuentra γ_c . Igualmente, se acotó de esta manera debido a que a mayor cantidad de iteraciones, el valor del producto crece exponencialmente y el resultado para γ mayores es mostrado simplemente como indefinido (∞). Las gráficas a continuación mostradas revelan una cota del parámetro γ a partir del cual la condición se cumple con $\gamma > \gamma_c$, que consistentemente con la evidencia presentada hasta ahora, atribuyen a γ_c un valor aproximado de 0.2631 (figura 4.17).

También, en [5] se refiere una condición suficiente para la existencia de una medida invariante absolutamente continua para mapeos aleatorios \mathcal{C}^2 por partes y expansivos:

$$\sum_{k=1}^K \frac{p_k}{|\tau_k|} \leq \sigma < 1, \quad (4.6)$$

para alguna constante σ . En el presente trabajo sumatoria fue estimada numéricamente para este mapeo aleatorio aproximándolo mediante de una cantidad finita, cada vez mayor de los mapeos de la colección Γ con una distribución uniforme (por ende $p_k = 1/K$).

Para realizar las gráficas presentadas más adelante, primero se estableció la cantidad de mapeos K con la que se calcularía la aproximación de la sumatoria, después se incrementó el valor de γ desde 0 hasta 2 en incrementos de 0.01 y se calculó la

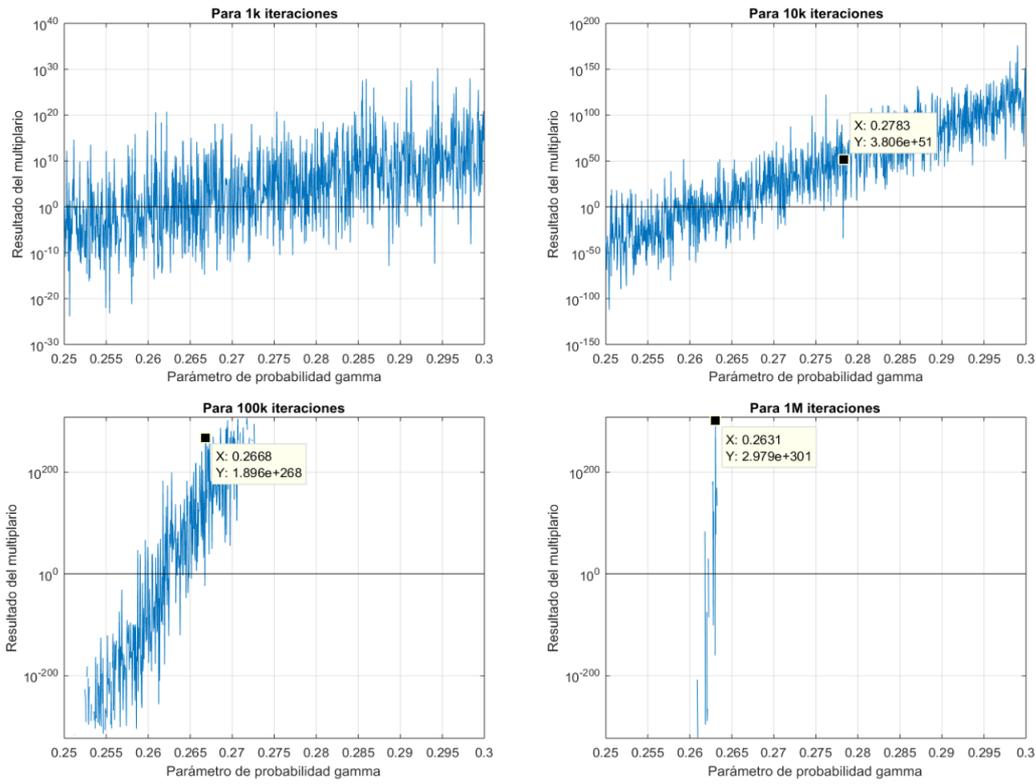


Figura 4.17: Estimación numérica de la condición discutida en [9]. La etiqueta indica el primer valor de γ para el cual, al seguir incrementando γ , la condición se sigue cumpliendo, asegurando una cota mínima para γ_c . Note que al aumentar el número de iteraciones se acota de manera más precisa el valor de γ_c .

sumatoria, aproximando una función de γ que nos provee una cota del parámetro para la cual la medida invariante absolutamente continua existe.

De acuerdo con la estimación, al considerar una cantidad mayor de mapeos $\tau_k \in \Gamma$, el valor de la sumatoria indica que para un valor del parámetro $\gamma \approx 0.41$ y $0.41 < \gamma < 2$, se mantiene estrictamente por debajo del valor de 1, con una tendencia decreciente (figura 4.18). Así que por lo menos, para la aproximación del mapeo con Γ de cardinalidad finita, la existencia de la m.i.a.c. queda garantizada. Se realizó una aproximación hasta para $K = 10000$.

Por último, se realizó la integral numérica para el intervalo $[1/2, 1]$ en los 200 histogramas de la distribución de la órbita, con el fin de estimar numéricamente la probabilidad de que la trayectoria incida dentro de este intervalo. A partir del histograma normalizado, con una densidad empírica \hat{h} , se calculó para 200 valores de γ

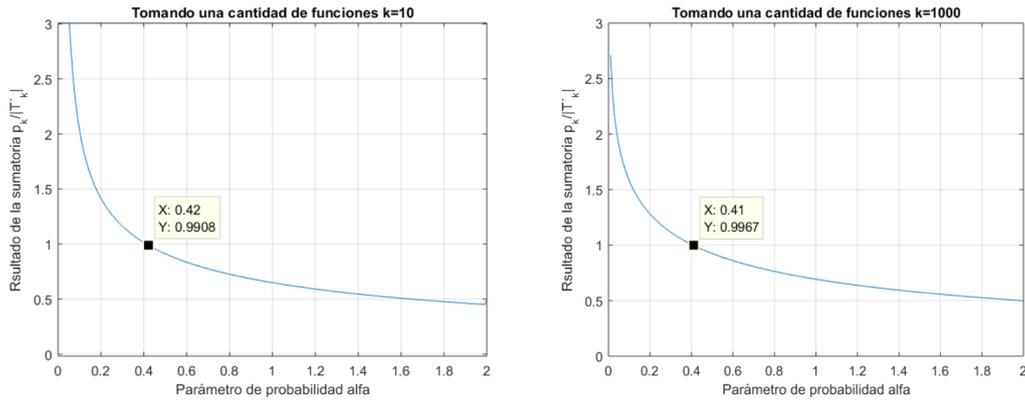


Figura 4.18: Estimación numérica de la condición discutida en [5], con $K = 10$ (izquierda) y $K = 1000$. Al mejorar la aproximación, con K mayores, la función cambia relativamente poco y provee una cota del valor parámetro γ para el cual la aproximación del mapeo con Γ de cardinalidad finita posee una m.i.a.c.

la estimación numérica de

$$\hat{\mathbb{P}}(x_n \in [1/2, 1]) = \int_{1/2}^1 \hat{h} dm,$$

donde m es la medida de Lebesgue. Para los valores del parámetro $\gamma < \gamma_c$, la probabilidad $\hat{\mathbb{P}}(x_n \in [1/2, 1])$ se mantiene muy cercana a cero y se acrecenta en función de γ a una tasa prácticamente nula. Sin embargo, para $\gamma = 0.27$, se tiene que $\hat{\mathbb{P}}(x_n \in [1/2, 1]) = 5.4 \times 10^{-6}$ y para valores más grandes, $\hat{\mathbb{P}}(x_n \in [1/2, 1])$ comienza a aumentar hasta llegar a un valor de 0.5, cuando el mapeo aleatorio es equivalente al mapeo determinista $T(x) = 2x \pmod{1}$ el cual posee una distribución uniforme.

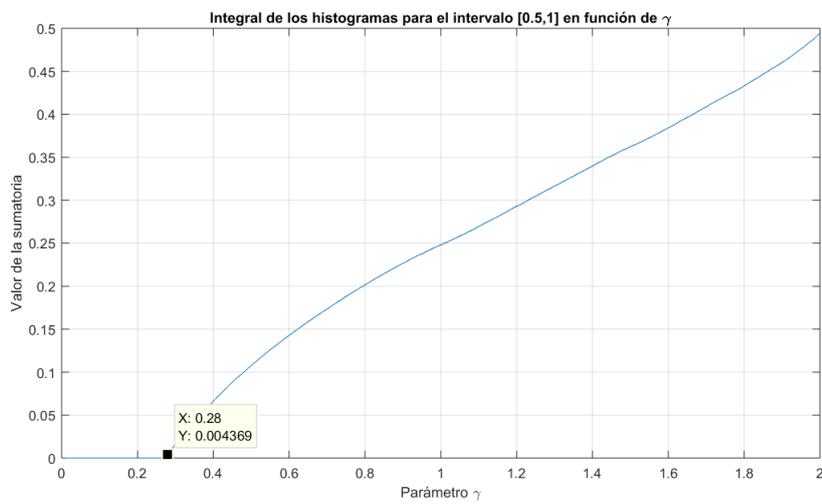


Figura 4.19: Estimación numérica de $\mathbb{P}(x_n \in [1/2, 1])$. Observe que para valores de $\gamma < \gamma_c$ el valor de la integral numérica se mantiene muy cercano a 0, sin embargo, con $\gamma = 0.27$, $\hat{\mathbb{P}}(x_n \in [1/2, 1]) = 5.4 \times 10^{-6}$, y con $\gamma = 0.28$, $\hat{\mathbb{P}}(x_n \in [1/2, 1]) = 0.004369$. Para de $\gamma > \gamma_c$, $\hat{\mathbb{P}}(x_n \in [1/2, 1])$ crece de manera aparentemente regular.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

Primero, para la familia I de mapeos aleatorios, los resultados presentados en esta tesis arrojan evidencia de que un mapeo aleatorio no requiere una condición de expansividad estricta para garantizar que posee una medida invariante absolutamente continua respecto a Lebesgue. Además, que el método propuesto en [5] provee de resultados certeros para calcular las densidades invariantes asociadas; con una condición de expansividad eventual, por lo que los teoremas 3.3, 3.4, así como el método pueden ser revisados y plantearse para casos más generales. Por otro lado, el cambio del exponente de Lyapunov parece estar relacionado con el cambio de la densidad invariante asociada a la dinámica en función del parámetro, lo que sugiere que hay una manera analítica de calcular el exponente de Lyapunov en mapeos aleatorios que toma en cuenta los pesos de probabilidad asignados a los mapeos de una familia aleatoria.

El caso de la segunda familia de mapeos aleatorios exige un enfoque diferente, porque no se sabe todavía para qué valores de γ preserva la medida y hasta ahora no se le ha podido equipar con una partición de Markov, lo que dificulta el cálculo la medida invariante asociada a éste mediante el operador de Perron Frobenius. No obstante, por lo menos para la versión finita de esta familia, los resultados numéricos ya mostrados (expresiones (4.5) y (4.6)) garantizan su existencia debido a que no depende de las realizaciones y en versiones finitas, es posible verificarlo. También dan una cota aproximada del valor crítico del parámetro para el cual podría suceder la transición de fase y el decaimiento de correlaciones respaldaría la invarianza de la medida. Entonces sería interesante demostrar que existe un valor preciso del parámetro crítico y demostrar que los resultados aplicables a familias finitas de mapeos aleatorios se pueden extender a familias infinitas, así como que existe una transición de fase de segundo orden para otro valor de γ , en que la función de densidad se vuelve C^1 por partes.

Una constante sobre este par de casos de estudio es que cuentan con significativa dirección de la dinámica no expansiva y además, contractiva para la familia II.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El motivo de esta tesis está basado en que la mayoría de los resultados conocidos sobre medidas invariantes absolutamente continuas en mapeos aleatorios en el intervalo, tratan con dinámicas estrictamente expansivas, por lo que obtener resultados analíticos en este ámbito, es decir, demostrar las conjeturas 1 y 2 (ya respaldadas por evidencia numérica) abriría una brecha para proponer una metodología analítica para comprobar la existencia de una m.i.a.c. y para el cálculo de sus densidades invariantes, así como para tratar casos más generales, e inclusive, de lograr adecuarlos a una clase más global de dinámicas, generalizar para sistemas deterministas.

Bibliografía

- [1] Yves Pomeau y Paul Manneville. Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. *Communications on Mathematical Physics*, 74:189-197, 1980.
- [2] A. Lasota y James A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 186:481-488, 1973.
- [3] Carlangelo Liverani, Benoit Saussol y Sandro Vaienti. A probabilistic approach to intermittency. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 19:671-685, 1999.
- [4] Paweł Góra y Abraham Boyarsky. Absolutely continuous invariant measures for random maps with position dependent probabilities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 278:225-242, 2003.
- [5] Paweł Góra y Abraham Boyarsky. Attainable densities for random maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 317:257-270, 2006.
- [6] Jiu Ding y Aihui Zhou. Statistical Properties of Deterministic Systems. *Tsinghua University Press*, 1:1,248, 2009.
- [7] Pierre Collet y Jean-Pierre Eckman. Concepts and Results in Chaotic Dynamics: A Short Course. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1:1-237, 2000.
- [8] Andrzej Lasota y Michael C. Mackey. Chaos, Fractals and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics. *Applied Mathematical Sciences*, 97:1-481, 1985.
- [9] Takehiko Morita. Random iterations of one dimensional transformations. *Osaka J. Math.*, 22:489-518, 1985.
- [10] Roberto Venegeroles. Thermodynamic phase transitions for Pomeau-Manneville maps. *Physical Review E*, 86:(021114-1)-(021114-4), 2012.
- [11] Davide Faranda et. al. Statistical properties of random dynamical systems with contracting direction. *J. Phys. A: Math. Theor*, 49:1-17, 2016.
- [12] Aaron Clauset. A brief primer on probability distributions. *CSCI*, 7000-001:1-7, 2011.
- [13] Arnold Ludwig. Random Dynamical Systems. *Springer Monographs in Mathematics*, 1:XV-586, 1998.