

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A. C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Sincronización en redes dinámicas
con diferentes estructuras de conexión**

Tesis que presenta

Adriana Ruiz Silva

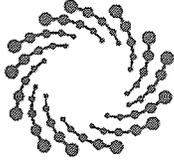
Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la tesis:

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., 31 de Enero de 2019



IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Sincronización de redes dinámicas con diferentes estructuras de conexión**" presentada para obtener el Grado de Doctora en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Adriana Ruiz Silva** y aprobada el **treinta y uno de enero del dos mil diecinueve** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Director de la tesis

Dr. Diego Langarica Córdoba
Jurado en el Examen

Dr. Eric Campos Cantón
Jurado en el Examen

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Jurado en el Examen

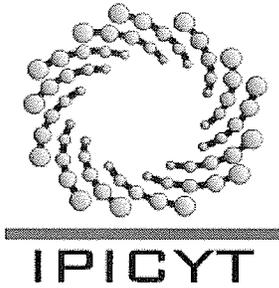
Dr. Jonatán Peña Ramírez
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con el número 389235, así como apoyos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 008 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 31 días del mes de enero del año 2019, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Eric Campos Cantón	Presidente	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Secretario	IPICYT
Dr. Diego Langadica Córdoba	Sinodal externo	UASLP
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTORA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó la C.

Adriana Ruiz Silva

sobre la Tesis intitulada:

Sincronización de redes dinámicas con diferentes estructuras de conexión

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 14:15 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 31 días del mes de enero de 2019.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dr. Horacio Flores Zúñiga
Secretario Académico



Dedicatoria

A mi familia

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a Dios por acompañarme todos los días, por darme la fortaleza y la capacidad para elegir, seguir y terminar mis estudios y este trabajo de tesis.

A mi madre Yolanda Silva, mi hermano Humberto Ruiz y a mi padre Guillermo Encinas, gracias por brindarme su apoyo, confianza y amor a pesar de la distancia, por estar en los momentos más felices y difíciles de mi vida. Gracias por ayudarme a cumplir esta meta, por las porras, besos y buenos deseos. Los amo.

A mi director de tesis, el Dr. Gonzalo Barajas no me queda más que agradecerle por haber depositado su confianza en mí para realizar este trabajo, muchas gracias por prepararme para enfrentarme al campo laboral, por sus comentarios y preguntas durante todos estos años y sobre todo por su paciencia, tiempo y esfuerzo para transmitir conocimientos.

A mis sinodales, el Dr. Eric Campos, el Dr. Diego Langarica, el Dr. César Maldonado y el Dr. Jonatán Peña gracias por tomarse su tiempo para leer y revisar este trabajo.

A los investigadores de la División de Matemáticas Aplicadas, por contribuir en mi formación, gracias por sus consejos y enseñanzas durante estos años en el IPICYT.

A CONACYT por la beca de doctorado, a la fundación Sofía Kovaleskaia, a la Sociedad Matemática Mexicana e IPICYT, por el apoyo otorgado y facilitarme los medios para desarrollar mi proyecto doctoral.

A mis amigos y compañeros del IPICYT, muchas gracias por brindarme recuerdos felices dentro del instituto, por su paciencia, consejos y convivencia.

A la familia Gilardi Cassal muchísimas gracias por todo su tiempo, comprensión, apoyo, por escucharme cuando lo necesitaba, por siempre tener un abrazo y un beso para mí. Gracias por permitirme formar una familia con ustedes, por abrigarme como una hija, los amo y los amaré siempre. Y por último, pero no menos importante a unas personas que en este tiempo se han convertido en una parte muy importante de mi vida, Héctor, Bahía, Ismael, Aide, Rodolfo y Pablo, esas personas que me han demostrado que no se necesitan lazos de sangre para quererlas. Muchísimas gracias por su infinita paciencia, por su compañía, por su apoyo incondicional, por todos los momentos que pasamos juntos, y por la convivencia todos estos años. Mis respetos y admiración para cada uno de ustedes. Los quiero mucho.

A todos los que por descuido no han sido incluidos en estas líneas, pero han sido fundamentales en mi formación como profesional y persona, mis más sinceros agradecimientos.

Adriana Ruiz Silva

Resumen

En este trabajo de tesis se investiga el surgimiento de un comportamiento colectivo sincronizado en modelos de sistemas complejos. Usualmente, los sistemas complejos son modelados como un conjunto de sistemas dinámicos interconectados con estructuras topológicamente complicadas, donde es posible considerar que existen diferentes formas de conexión, nodos de diferente naturaleza e interacciones entre distintos grupos de nodos. Este tipo de características se pueden observar comúnmente en sistemas biológicos, en los cuales el fenómeno de sincronización es de suma importancia, ya que la presencia o ausencia de sincronía se puede relacionar a una función específica del sistema o incluso a una disfunción del mismo. Inspirados en esta realidad biológica, nos enfocamos en el problema de sincronización en redes cuyos nodos son sistemas dinámicos y los enlaces representan la interconexión entre estos sistemas dinámicos, por lo que proponemos tres diferentes casos de estudio.

En el primer caso nos enfocamos en un modelo de red formado por osciladores idénticos acoplados de manera lineal, simétrica, bidireccional y difusiva. Para este modelo presentamos un procedimiento para el diseño de controladores locales que imponen un mapeo estático e independiente del tiempo, como la relación deseada entre los nodos de la red, esto impone el surgimiento de la sincronización generalizada en redes. En el segundo caso de estudio proponemos un modelo de red que considera nodos de distinta naturaleza y diferentes tipos de conexión, donde además se supone que existe una tendencia de los nodos a organizarse en grupos o comunidades, modelando el sistema complejo como una red de redes. Para este modelo determinamos que condiciones sencillas como difusividad y simetría entre grupos garantizan el surgimiento de la sincronización por clúster, es decir, nodos que pertenecen al mismo grupo o comunidad están sincronizados, mientras que nodos de diferentes grupos no. En el tercer caso de estudio consideramos una red de osciladores idénticos donde existen enlaces de distinta naturaleza, modelando este tipo de sistemas como una hiperred dinámica. En este caso identificamos condiciones para la estabilidad del estado sincronizado en la hiperred dinámica aún cuando algunos enlaces son no lineales. Finalmente, los resultados teóricos obtenidos en cada caso de estudio se ilustran por medio de simulaciones numéricas.

Abstract

In this thesis the emergence of a synchronized collective behavior in models of complex systems is investigated. Usually, complex systems are modeled as a set of interconnected dynamical systems with topologically complicated structures, where it is possible that there are different forms of connection, nodes of different nature and interactions between different groups of nodes. This type of characteristics can be observed in biological systems, in which the phenomenon of synchronization is important, since the presence or absence of synchronization can be related to a specific function of the system or even a system dysfunction. Inspired by this biological reality, we focus on the problem of synchronization in networks which nodes are dynamical systems and edges represent the interconnection between these dynamical system, so three different case studies are proposed.

In the first case we focus on a network model formed by identical oscillators coupled linearly, symmetrically and diffusively. For this model we present a procedure for the design of local controllers that impose a static and time independent mapping, as the desired relationship between the nodes of the network, this imposes the emergence of generalized synchronization in networks. In the second case study we propose a network model that considers nodes of different nature and different types of connection, where it is also assumed that there is a tendency for nodes to organize themselves into groups or communities, modeling the complex system as a network of networks . For this model we determine that simple conditions such as diffusivity and symmetry between groups guarantee the emergence of cluster synchronization, that is, nodes belonging to the same group or community are synchronized, while nodes of different groups do not. In the third case of study we consider a network of identical oscillators where there are edges of different nature, modeling this type of systems as a dynamic hyper-network. In this case we identify conditions for the stability of the synchronized state in the dynamic hyper-network even when some edges are non-linear. Finally, the theoretical results obtained in each case of study are illustrated by means of numerical simulations.

Índice general

Constancia de aprobación de la tesis	II
Créditos Institucionales	III
Acta de examen	IV
Dedicatoria	V
Agradecimientos	VI
Resumen	VII
Abstract	VIII
Índice general	X
Índice de figuras	XIII
1. Introducción	1
1.1. Sistemas complejos como redes	1
1.1.1. Redes complejas	3
1.1.2. Redes dinámicas	7
1.2. Planteamiento del problema	9
1.3. Objetivos	11
1.4. Descripción del documento	12
2. Sincronización en redes	15
2.1. Antecedentes del análisis estructural	15
2.1.1. Red de redes	19

2.1.2. Hiperredes	22
2.2. Modelo de una red dinámica	26
2.2.1. Sincronización idéntica en una red dinámica	28
2.2.2. Ejemplo: Sincronización en un modelo del islote pancreático	33
3. Sincronización generalizada en redes	41
3.1. ¿Qué es sincronización generalizada?	41
3.2. ¿Cómo detectar sincronización generalizada en redes?	43
3.2.1. Método indirecto mediante el sistema auxiliar	44
3.2.2. Método directo mediante sincronización controlada	45
3.3. Diseño de controladores para la sincronización generalizada en redes con acoplamiento bidireccionales	50
3.3.1. Identificando el mapeo de sincronización generalizada en la red	55
3.3.2. Ejemplo: Sincronización generalizada en una red bidireccional de células β	59
3.3.3. Ejemplo: Sincronización generalizada en una red bidireccional de osciladores caóticos idénticos.	62
4. Sincronización por clúster para una red de redes	71
4.1. De red dinámica a redes de redes dinámicas	72
4.2. Modelo propuesto para una red de redes dinámica	74
4.3. Análisis de sincronización por clúster	78
4.3.1. Ejemplo: Sincronización por clúster para una red de redes formada por osciladores caóticos	87
5. Sincronización en hiperredes	97
5.1. De redes dinámicas a hiperredes dinámicas	97
5.2. Un modelo de una hiperred dinámica	99
5.3. Sincronización idéntica en una hiperred dinámica	101
5.4. Un ejemplo: Sincronización idéntica en una hiperred de células excitables	107
6. Conclusiones y trabajo a futuro	113
Productividad	117
Bibliografía	118

Índice de figuras

2.1.	Representación esquemática de diferentes tipos de grafos y sus respectivas matrices de adyacencia.	17
2.2.	Matrices Laplacianas de los grafos presentados en la Figura 2.1.	18
2.3.	Representación esquemática de una red con dos redes y su respectiva matriz de adyacencia ($N = 5, M = 2, N_1 = 3, N_2 = 2$).	20
2.4.	Representación esquemática de una red con dos redes formada por nueve nodos y su respectiva matriz de adyacencia ($N = 9, M = 2, N_1 = 5, N_2 = 4$).	21
2.5.	Representación esquemática de un hipergrafo y su correspondiente matriz vértice-arista de incidencia.	23
2.6.	Matrices de adyacencia de los hiperenlaces pertenecientes al hipergrafo mostrado en la Figura 2.5	23
2.7.	Representación esquemática de un hipergrafo formado por cinco nodos con cuatro hiperenlaces.	24
2.8.	Representación esquemática de un hipergrafo formado por cinco nodos con dos hiperenlaces y sus respectivas matrices de adyacencia para cada hiperenlace.	25
2.9.	Representación esquemática de un hipergrafo formado por cinco nodos con tres hiperenlaces y sus respectivas matrices de adyacencia.	26
2.10.	Simulación numérica de una solución del sistema (2.2.24)	35
2.11.	Grafo para un arreglo de cinco células β con acoplamiento bidireccional y su respectiva matriz Laplaciana.	36
2.12.	Máximo valor propio de la matriz $Df(s(t)) - \bar{d}\Gamma$ para distintos valores de $-\bar{d}$	37
2.13.	Simulación numérica para una red (2.2.27) formada por cinco nodos con fuerza de acoplamiento $g = 0.02$	38

2.14. Errores de sincronización para la red (2.2.27) formada por cinco nodos con fuerza de acoplamiento $g = 0.02$	38
2.15. Simulación numérica para una red (2.2.27) formada por cinco nodos con fuerza de acoplamiento $g = 2$	39
2.16. Errores de sincronización para la red (2.2.27) formada por cinco nodos con fuerza de acoplamiento $g = 2$	40
3.1. Grafo para una red conformada por dos nodos con acoplamiento bidireccional.	55
3.2. Grafo para una red conformada por tres nodos con acoplamiento bidireccional y una topología de todos contra todos.	56
3.3. Errores de sincronización para dos células β mutuamente acopladas en variables transformadas.	61
3.4. Errores de sincronización para dos células β mutuamente acopladas en variables originales.	61
3.5. Error de sincronización generalizada para dos células β	62
3.6. Errores de sincronización de la red en las variables transformadas w_i	64
3.7. Simulación numérica de la red controlada (3.3.27) en las variables originales.	65
3.8. Errores entre las variables originales de la red dinámica controlada (3.3.27).	65
3.9. Errores de sincronización generalizada $E_1 = x(t) - \mathcal{H}_1 x(t)$	66
3.10. Errores de sincronización generalizada $E_2 = x(t) - \mathcal{H}_2 x(t)$	66
3.11. Errores de sincronización generalizada $E_3 = x(t) - \mathcal{H}_3 x(t)$	67
3.12. Errores de sincronización generalizada $E_4 = x(t) - \mathcal{H}_4 x(t)$	67
3.13. Errores de sincronización generalizada $E_5 = x(t) - \mathcal{H}_5 x(t)$	68
3.14. Errores de sincronización generalizada $E_6 = x(t) - \mathcal{H}_6 x(t)$	68
3.15. Errores de sincronización generalizada $E_7 = x(t) - \mathcal{H}_7 x(t)$	69
3.16. Errores de sincronización generalizada $E_8 = x(t) - \mathcal{H}_8 x(t)$	69
4.1. Representación esquemática de un comunidad con 10 unidades compactas cada una de ella con trece nodos ($M = 1$, $N_1 = 10$ y $r = 13$) [92].	77
4.2. Representación esquemática de una red de redes con dos comunidades. ($M = 2$, $N_1 = 4$, y $N_2 = 5$) [92].	79
4.3. Esquemático de una red de subredes dividida en tres comunidades.	88
4.4. Simulación numérica de una unidad compacta con osciladores Lorenz	89
4.5. Simulación numérica de una unidad compacta con osciladores Chen	90
4.6. Simulación numérica de una unidad compacta con osciladores Lu	90
4.7. Evolución en el tiempo de los errores de sincronización en la primer comunidad.	92

4.8. Evolución en el tiempo de los errores de sincronización en la segunda comunidad.	93
4.9. Evolución en el tiempo de los errores de sincronización en la tercer comunidad.	93
4.10. Evolución del error de sincronización entre la primera y segunda comunidad	94
4.11. Evolución del error de sincronización entre la primera y tercer comunidad .	94
4.12. Evolución del error de sincronización entre la segunda y tercer comunidad .	95
5.1. Solución numérica del modelo de Hindmarsh-Rose, con condiciones iniciales $x_0 = (1, 0.5, -0.3)^\top$	108
5.2. Hipergrafo para un arreglo de seis células excitables con dos tipos de acoplamiento.	110
5.3. Simulación numérica para una hiperred (5.2.1) formada por seis nodos. . .	112
5.4. Error de sincronización de los estados de la hiperred dinámica (5.2.1) . . .	112

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Sistemas complejos como redes

En la naturaleza abundan ejemplos de sistemas complejos, que van desde reacciones químicas hasta procesos sociales y culturales. Por sistema entendemos al conjunto de partes o elementos que interactúan entre sí para alcanzar un objetivo; es en sí la interacción entre diferentes elementos la que lo convierte en un ente individual, es decir, lo que los vuelve un sistema. De modo que, sin una coordinación adecuada entre los elementos es imposible que un conjunto de partes puedan realizar un objetivo común que le de sentido como sistema. En otras palabras, un conjunto de elementos no constituye un sistema sin tener estos dos requisitos: una estructura de conexión y un objetivo común, por otra parte el adjetivo “complejo” lo adquiere un sistema cuando está formado por un gran número de partes o por que las interacciones entre ellas son intrincadas, o difíciles de describir llanamente. Por lo tanto, un sistema complejo está formado por varios elementos que se relacionan en formas intrincadas, surgiendo de ello un comportamiento en común [1].

El análisis de los sistemas complejos puede ser abordado desde diferentes perspectivas y con varias herramientas, en este sentido la Teoría de Control y Sistemas Dinámicos pueden ser utilizadas exitosamente para analizar sus comportamientos. Una forma de describir los sistemas complejos es modelándolos como redes, en las cuales los nodos son sistemas dinámicos y sus interacciones se representan por medio de grafos [2, 3, 4, 5]. Naturalmente, en esta descripción de red muchos detalles del sistema complejo pueden omitirse. Sin em-

bargo, aún en esta simplificación podemos capturar características esenciales de interés para el análisis del sistema complejo. Al modelar un sistema como una red compleja, diferentes *fuentes de complejidad* del sistema pueden ser incluidas en el modelo, tales como [6]:

1. *Complejidad estructural*: Si consideramos que la estructura de conexión entre los elementos es enmarañada, complicada o difícil de visualizar, se está tomando en cuenta la complejidad estructural del sistema. Por ejemplo, las redes sociales y neuronales presentan efectos estructurales como mundo pequeño [7], escala libre [8] y alta modularidad [9], incluyendo en el modelo esta fuente de complejidad.
2. *Evolución estructural*: Si consideramos que la estructura de conexión cambia a lo largo del tiempo, esto es, que el número nodos, de conexiones o quién se conecta con quién, cambian de acuerdo con reglas preestablecidas. Entonces, en el modelo estamos considerando esta fuente de complejidad. Por ejemplo, World-Wide-Web puede ser modelado como una red con evolución estructural, ya que las páginas y los enlaces son creados y eliminados cada minuto [8].
3. *Diversidad en las conexiones*: Si consideramos que las relaciones entre los elementos pueden presentar características heterogéneas. En el contexto de redes, esto se ve reflejado en las características de los enlaces del grafo, donde se considera que pueden tener dirección [10], un peso asociado [11], existir sólo entre elementos de diferentes conjuntos [12], o distintos tipos de conexiones [13]. Por ejemplo, la sinapsis en las neuronas del sistema nervioso pueden ser señales químicas o eléctricas, al asociarle alguna característica numérica o de otro tipo a los enlaces, se está considerando la diversidad de conexiones como una fuente de complejidad.
4. *Complejidad dinámica*: Si consideramos que los elementos tienen una dinámica propia, es decir, cada nodo está descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen los cambios de sus estados internos. Al incluir esto en el modelo se está tomando en cuenta esta fuente de complejidad. Por ejemplo, un arreglo de neuronas puede ser modelado como una red, donde cada nodo es un sistema dinámico que representa la actividad eléctrica de las neuronas, como el modelo de Hodgkin–Huxley [14] para tiempo continuo o el modelo de Rulkov [15] para tiempo discreto.

5. *Diversidad de nodos*: Si consideramos que los elementos del sistema son de distinta naturaleza, es decir, son modelados por sistemas dinámicos diferentes, se toma en cuenta la diversidad de nodos como una fuente de complejidad. Por ejemplo, en una red neuronal algunos nodos pueden estar descritos por un sistema de cinco ecuaciones diferenciales, como el modelo de Hodgkin-Huxley [14], mientras que otros por un sistema de tres ecuaciones diferenciales, como el modelo de Hindmarsh-Rose [16].

Usualmente, al modelar una red del mundo real podemos considerar más de una fuente de complejidad. Entonces, siempre que consideremos en el modelo más de una complejidad estamos hablando de una *meta-complejidad* [6]. Es importante destacar que en este trabajo de tesis, se consideran varias fuentes de complejidad al modelar un sistema complejo como una red, tales como: diversidad de conexiones, complejidad dinámica y diversidad de nodos, de las cuales se hablará más adelante.

1.1.1. Redes complejas

Enfocándose exclusivamente en la estructura de conexión del sistema complejo, el modelo resultante usualmente recibe el nombre de red compleja, que topológicamente son grafos, cuyo estudio se centra en obtener una descripción cualitativa de los patrones de conexión y analizar las propiedades del grafo o la matriz que representen la estructura del sistema. Existe un gran variedad de sistemas que pueden ser descritos de esta forma, tales como la redes sociales, redes eléctricas, Internet o nuestro cerebro; en esta representación los elementos, ya sean individuos, generadores, computadoras, o neuronas están representados por nodos y las interacciones como la forma de relaciones sociales, las conexiones físicas, virtuales, eléctricas o químicas son representadas por enlaces en un grafo [17]. En el siguiente capítulo abordaremos con más detalle la teoría de grafos y generalizaciones de ellos.

Cabe mencionar que incluso con el mismo conjunto de nodos se pueden definir diferentes estructuras de la red compleja, dependiendo de la manera que se caracterice las relaciones entre nodos. Por ejemplo, la colaboración científica se puede describir como una red considerando que los científicos son los nodos, mientras los escritos son los enlaces entre ellos. En el mismo conjunto es posible definir otra red, considerando que dos científicos están co-

nectados si pertenecen a la misma institución. Claramente, la red definida a través de los escritos es distinta a la red definida a través de las instituciones, ya que el hecho de que dos científicos pertenezcan a la misma institución no implica que tengan algún escrito en común, y viceversa. En ambos casos, la relación entre científicos se establece de forma recíproca, por tanto la red es bidireccional y puede representarse como un grafo no dirigido. Por otra parte, existen ejemplos donde las relaciones entre nodos no son recíprocas, tal como una serie de llamadas o mensajes de correo electrónico entre un grupo de amigos, donde cada llamada o mensaje va en una sola dirección formando una red dirigida, la cual puede ser representada por un dígrafo. Además, en cada uno de estos tipos de redes es posible asociar un peso para cada uno de sus enlaces, donde este peso o valor numérico indica la fuerza de conexión del enlace. Tomando el ejemplo la red de colaboración, el peso de los enlaces puede representar el número de escritos donde son coautores, este se indica con un valor numérico en los enlaces [12]. Es importante mencionar que una red compleja difiere de un grafo puesto que describe también las interacciones presentes de un sistema complejo concreto, mientras que un grafo en general no tiene por qué estar asociado a un sistema complejo.

En algunos casos el uso de grafos no proporciona una descripción adecuada del sistema complejo, debido a que los elementos se pueden acoplar a través de distintos tipos de conexiones de forma simultánea. Como es el caso de un grupo de neuronas que suelen estar conectadas a través de acoplamientos de distintas naturaleza, tales como sinapsis eléctrica y química, donde cada tipo de acoplamiento corresponde a un grafo [18]. Otro ejemplo, es la estructura formada por un banco de peces, donde las conexiones no solo son por las señales visuales entre los peces, sino también por la liberación de señales químicas en el agua [19]. Ambos sistemas pueden ser modelados como un hipergrafo, que es una generalización del concepto de grafo y se utiliza para modelar sistemas complejos donde diferentes tipos de acoplamiento coexisten y operan de manera simultánea [13]. Un concepto similar, que se ha utilizado para describir principalmente sistemas sociales, es una red con estructura de comunidades. Por ejemplo, grupos de nodos en una red social representan individuos que pertenecen a comunidades sociales, grupos de nodos fuertemente conectados en la red World-Wide-Web corresponden a páginas sobre temas comunes, o bien, en las redes celulares y genéticas se dividen en módulos funcionales. En general, este tipo de sistemas pueden

ser modelados como un grafo donde diferentes grupos están interconectados, es decir, como una red de redes [20, 21], y para estos casos es importante encontrar la relación que tienen la estructura y dinámica de cada una de las redes con el comportamiento global del sistema, o bien, entender cómo es la jerarquía de conexiones dentro del sistema.

El estudio de las estructuras de interacción para una gran variedad de sistemas complejos revela que a pesar de las diferencias en la topología de la red, existen algunos efectos estructurales que dependen de las conexiones entre elementos, y que aparecen en la mayoría de los sistemas reales, tales como: los efectos de “mundo pequeño” y de “escala libre”. El primero de ellos se relaciona con la distancia medida en número de enlaces entre dos nodos cualesquiera de la red, la cual se considera pequeña comparada con el número total de nodos en la red [7, 22]. Mientras que el segundo efecto se relaciona con una distribución heterogénea de los grados de nodo en una red y la existencia de nodos concentradores, es decir, en la red existen nodos muy conectados y pocos conectados, donde las conexiones siguen una distribución de ley de potencias, la cual se preserva independientemente del número de nodos en la red, es decir, es una propiedad libre de escala [8, 23]. Por lo tanto, con la finalidad de realizar una descripción cualitativa de los patrones de conexión o la dinámica de cómo se forman las redes complejas, se propusieron distintos algoritmos de construcción que capturan estos efectos estructurales en el grafo resultante. En particular, la fuente de ideas es el estudio de los *grafos aleatorios* en los cuales los enlaces se distribuyen aleatoriamente.

Erdős y Rényi (ER) propusieron un modelo donde los enlaces de la red aparecían con cierta probabilidad p uniforme, donde el modelo de red resultante de este proceso se conoce como *grafo aleatorio*. El principal resultado obtenido es que existe un valor de probabilidad crítica $p_c \approx 1/N$ (con N el número total de nodos), el cual para valores p mayores a la probabilidad crítica se obtiene un grafo donde todos los nodos tienen el mismo número de conexiones, mientras que para el caso contrario, el grafo resultante es una estructura con pocas conexiones y nodos aislados [24]. Un estudio detallado de las redes aleatorias muestra que estas redes tienen un coeficiente de agrupamiento pequeño y una distancia media pequeña, en tanto que las redes reales presentan un coeficiente de agrupamiento alto y una distancia media pequeña [25].

El modelo de Watts y Strogatz (WS) fue propuesto como una forma de extender el algo-

ritmo de ER para ajustarse a las observaciones de las redes reales, en particular la propiedad de mundo pequeño y el alto coeficiente de agrupamiento. Para obtener dichas propiedades en el algoritmo se inicia con un grafo regular, es decir, un grafo donde los nodos tienen el mismo número de conexiones, y en cada iteración seleccionamos un par de nodos al azar y los realambamos a otros nodos con una probabilidad p , generando un algoritmo de transición entre un grafo regular y un grafo aleatorio. En este caso, el coeficiente de agrupamiento es grande y la longitud de camino promedio es pequeña, como lo observado en las redes reales [7, 12]. Una característica importante de los modelos de ER y WS es que la función de distribución de grados tiene un máximo en el valor medio del grado y decae exponencialmente, lo que quiere decir que casi todos los nodos de la red tienen el mismo número de conexiones. Por ello es común denominar a estos tipos de redes como redes exponenciales o redes homogéneas.

Otro descubrimiento fundamental en el ámbito de redes complejas, fue la observación de que muchas redes del mundo real son libres de escala, es decir, la función de distribución de grados sigue una ley de potencias y que esta característica es independiente de la escala de una red [26]. A diferencia de una red exponencial, una red libre de escala es no homogénea: la mayoría de los nodos tienen pocas conexiones pero hay nodos que tienen muchas, de forma que los nodos no se agrupan alrededor de un valor medio característico. En particular, Barabási y Albert (BA) propusieron un algoritmo para la construcción de un grafo donde se tiene una distribución de grados de nodo tipo ley de potencias [8]. Dicho algoritmo está basado en cómo la WWW se ha ido formando, y tiene dos aspectos fundamentales: crecimiento y acoplamiento preferencial. Para generar el grafo iniciamos con un número pequeño de nodos y en cada iteración un nuevo nodo es agregado en la red, donde el nuevo nodo es conectado a los ya existentes con una probabilidad preferencial a los nodos con más alto grado. Este hecho implica que exista una alta heterogeneidad en los posibles grados de la red, así como la existencia de nodos con un alto número de conexiones, conocidos como nodos concentradores. En un principio los algoritmos de generación de grafos se enfocaban en analizar la estructura de ciertas redes del mundo real. Sin embargo, los algoritmos antes mencionados buscan capturar las características de los sistemas reales, con la finalidad de obtener una descripción cualitativa de la estructura del sistema complejo. En los modelos de

grafos aleatorios antes mencionados se asume que los nodos permanecen estáticos mientras que la estructura de la red evoluciona. Sin embargo, en la mayoría de los sistemas complejos los elementos no son necesariamente estáticos, por tanto, es necesario incluir en los modelos de estructura la complejidad dinámica de los nodos, mencionada por Strogatz [6]. De modo que los sistemas complejos pueden ser modelados como una red dinámica, de la cual hablaremos en la siguiente sección.

1.1.2. Redes dinámicas

Una forma de modelar los sistemas complejos es como una red dinámica cuyos nodos son sistemas dinámicos y el acoplamiento entre ellos es representado por un grafo. El estudio de este tipo de sistemas es de interés debido a sus potenciales aplicaciones en áreas como física, biología, ingeniería, entre otras [5, 27]. Uno de los principales problemas de investigación en redes dinámicas consiste en determinar las condiciones bajo las cuales un conjunto de sistemas dinámicos interconectados logran un comportamiento coordinado tal como sincronización. En el contexto de redes dinámicas el concepto de sincronización se refiere al fenómeno colectivo en el que dos o más elementos tienen comportamientos dinámicos coordinados en el tiempo [28, 29]. Ejemplos claros y espectaculares de sincronización se observan en la naturaleza, tales como un grupo de luciérnagas que emiten luz durante el apareamiento; de igual forma cuando un conjunto de neuronas disparan sus potenciales de acción de manera unísona; o cuando el público de un concierto aplaude de manera simultánea para convencer al artista de volver a actuar, son ejemplos de sincronización [30].

Al plantear el problema de análisis para el surgimiento del comportamiento colectivo en redes dinámicas, en la mayoría de los casos comenzamos con supuestos como redes de nodos idénticos con acoplamiento uniforme, lineal, simétrico y difusivo. La condición de un acoplamiento difusivo es un supuesto básico en este tipo de problemas, ya que este requisito surge de forma natural en varias redes del mundo real y, como tal, es una condición relativamente suave para imponer en la estructura del modelo de red. En general, cuando consideramos sistemas con una gran cantidad de elementos, el efecto de la estructura de conexión en el comportamiento de un solo elemento se puede aproximar en el contexto del *campo medio*, donde se considera que el efecto de todos los elementos es el promedio en

todo el sistema, una forma de aplicar este enfoque en las conexiones de una red, es requerir el acoplamiento difusivo [2]. Por ejemplo, en una red de neuronas donde las conexiones se modelan como sinapsis eléctricas, una forma de promediar el efecto de todas las neuronas vecinas es exigir que las conexiones sean difusas, en este sentido a la matriz de conexión que representa su grafo de conexión, se le pide que tenga suma cero por filas. Otro ejemplo, son las leyes de Kirchhoff para un circuito, donde la suma de voltajes de todos los elementos tiene un promedio de cero, es decir, sus conexiones son difusas [31].

En general, la dinámica de una red es determinada por la interacción entre su estructura y la dinámica de los nodos, de modo que estos dos factores determinan la estabilidad de su comportamiento sincronizado. Para un par de sistemas acoplados, así como para redes de sistemas dinámicos, cuando se investiga la estabilidad del comportamiento sincronizado, un enfoque común es linealizar la dinámica de error alrededor de la solución síncrona de manera que se obtienen resultados locales [32]. Por el contrario, la sincronización global se establece si la validez de los resultados se cumple para todo el espacio de estado de los sistemas acoplados [33]. El problema de la sincronización se puede resolver desde dos perspectivas: por un lado, las conexiones entre los sistemas se pueden diseñar para que la solución síncrona sea estable. Por otro lado, controladores pueden diseñarse para imponer un comportamiento sincronizado, esto se puede lograr utilizando metodologías de control tales como: retroalimentación de estado, control lineal, modos deslizantes, entre otros [34, 35, 36, 37]. Usando estas técnicas de control, los acoplamientos se complementan con los controladores para imponer la solución de sincronización, usualmente llamada sincronización controlada [38].

La estabilidad del comportamiento sincronizado de una red dinámica puede analizarse como en los trabajos de Wu y Chua [39] donde se estudia una red de nodos idénticos con una estructura de conexión lineal y difusiva, demostrando que dicha red logra la sincronización siempre que sea posible estabilizar la dinámica de un nodo aislado con una retroalimentación negativa sobre sus estados. Posteriormente, Pecora y Carroll [32], se concentraron en la sincronización completa para sistemas no lineales idénticos y proponen un criterio de sincronización conocido como Función Maestra de Estabilidad, *MSF* por sus siglas en inglés, la cual establece una relación entre la fuerza de acoplamiento y el máximo exponente transverso de Lyapunov. De modo que si la *MSF* es negativa para un intervalo de valores de la

fuerza de acoplamiento, entonces el estado sincronizado es estable en dicho intervalo. Años más tarde, autores como Wang y Chen [31, 40] consideraron un modelo de red formado por nodos idénticos con acoplamiento uniforme e investigan los criterios de sincronización para una red cuya topología de interacciones es una red compleja de mundo pequeño o escala libre, mediante el formalismo de funciones de Lyapunov describen el criterio de λ_2 [40]. En estos trabajos un problema importante es evaluar las condiciones para la estabilidad del comportamiento síncrono en una red con una configuración de acoplamiento genérico. Sin embargo, los resultados anteriores son muy limitados, en el sentido que son válidos para una red muy específica, es decir, una red de nodos idénticos con un acoplamiento lineal, difusivo y con una estructura estática. Si bien es cierto que la restricción del acoplamiento difusivo ayuda a simplificar el análisis de la estabilidad del estado sincronizado, es una restricción bastante fuerte, ya que no siempre es posible cumplir con condiciones de simetría como la difusividad.

En la literatura, podemos encontrar extensiones sobre el análisis del comportamiento síncrono para redes de nodos idénticos, donde consideran diferentes topologías y otras características de los sistemas relacionadas con las diferentes fuentes de complejidad propuestas por Strogatz [2, 41, 42]. En particular [43, 44] consideran que existe una diversidad de conexiones y estudian la sincronización para una red de nodos idénticos con retardos en la comunicación. Por otra parte, [45, 46] estudian la sincronización en un modelo con diferentes formas de comunicación entre sus nodos, como el caso de las neuronas que se comunican a través de diferentes tipos de sinapsis.

En la siguiente sección, planteamos nuestro problema de tesis, donde se busca extender el análisis de estabilidad del estado sincronizado de una red compleja donde se consideran diferentes fuentes de complejidad, tales como: diversidad de nodos y en las conexiones.

1.2. Planteamiento del problema

En los sistemas biológicos el fenómeno de sincronización es de suma importancia, ya que ocurre de manera natural y además la presencia o ausencia de sincronía se puede relacionar a una función específica o incluso a una enfermedad [3]. Inspirados en esta realidad biológica

en este trabajo de tesis nos enfocamos en el surgimiento del comportamiento síncrono de la dinámica de redes de osciladores biológicos. Como punto de partida, en este tema de investigación, consideramos un modelo de red dinámica simplificado, es decir, suponemos que los nodos son sistemas dinámicos idénticos y consideramos que el acoplamiento entre estos sistemas es modelado como una combinación lineal de los estados, la cual depende de sus nodos vecinos. Inspirados en una realidad biológica, incluimos en el modelo de red anterior algunas fuentes de complejidad como diversidad de nodos y diversidad en las conexiones, por lo que proponemos diferentes escenarios de estudio. En el primer escenario nos enfocamos en un modelo de red formado por nodos idénticos acoplados de manera lineal, simétrica, bidireccional y difusiva. Para este modelo presentamos un procedimiento para el diseño de controladores locales, es decir, un controlador para cada nodo, tal que se imponga un mapeo estático e independiente del tiempo, como la relación deseada entre los nodos de la red, esto impone el surgimiento de la sincronización generalizada en redes [47].

En el segundo escenario considerando que en los sistemas biológicos sus elementos pocas veces son idénticos, nos obliga a pensar en un modelo de red donde se considere una diversidad de nodos, es decir, un modelo de red dinámica donde los nodos son diferentes, ya sea por considerar cambios en los parámetros del sistema que representa el nodo e inclusive considerar sistemas dinámicos diferentes para cada nodo [29, 48]. En este caso el problema de sincronización no es trivial, ya que no se espera tener una sincronización completa de la red, más bien se espera tener otros tipos de comportamientos colectivos tales como la sincronización generalizada [47], sincronización externa [49], o la activación de las células (la transición de una solución estable a una solución oscilatoria) o la inhibición (la transición de una solución oscilatoria a un punto de equilibrio estable) [50]. Si además, en este modelo consideramos que existen diferentes tipos de conexión y suponemos que existen una tendencia de los nodos a organizarse en grupos o comunidades, modelando el sistema complejo como una red de redes, logramos acotar un poco el problema de sincronización a un tipo de sincronización particular. En este modelo de red de redes determinamos que condiciones sencillas como difusividad y simetría entre grupos garantizan el surgimiento de la sincronización por clúster, es decir, nodos que pertenecen al mismo grupo o comunidad están sincronizados, mientras que nodos de diferentes grupos no [51, 52, 53]. Finalmente, en

el tercer escenario de estudio nos enfocamos en la sincronización en redes de células excitables donde los enlaces son de distintas naturalezas, de manera que se busca analizar cómo la naturaleza de los enlaces afecta el surgimiento de la sincronización en la red [18].

De modo que, la pregunta que surge como consecuencia de los diferentes escenarios de estudio planteados es *¿Qué efecto tiene la dinámica local de los elementos y las diferentes características de la estructura de conexión en el comportamiento colectivo de la red?* Para responder esta pregunta en cada escenario recurrimos al análisis de estabilidad del estado sincronizado basado en funciones de Lyapunov, con el cual obtenemos condiciones bajo las cuales el comportamiento colectivo de la red sea estable.

En la siguiente sección, presentamos los objetivos generales y particulares de este trabajo de tesis.

1.3. Objetivos

En el presente trabajo de tesis estudiamos *el surgimiento de comportamientos colectivos en sistemas dinámicos interconectados, modelados como redes dinámicas complejas con diferentes estructuras de interconexión*. A manera de resumen, el objetivo general y los objetivos particulares de este trabajo de tesis son los siguientes:

Objetivo general:

- Determinar condiciones para el surgimiento de comportamientos colectivos estables, tales como sincronización idéntica, generalizada o por clústeres, en un arreglo de sistemas conectados en diferentes estructuras de conexión, tales como redes de redes o hiperredes.

Objetivos particulares:

- Establecer bajo que condiciones surge la sincronización generalizada en una red dinámica de nodos idénticos con acoplamientos bidireccionales.
- Determinar las condiciones bajo las cuales se logra la sincronización por clúster para una red de redes con estructura de comunidades.

- Establecer las condiciones para lograr la sincronización idéntica en una red dinámica con diferentes tipos de acoplamiento, es decir, una hiperred dinámica.

La estructura del documento de tesis se presenta en la siguiente sección.

1.4. Descripción del documento

El documento de tesis se organiza como sigue: El *Capítulo 2* está dividido en dos partes importantes, por un lado se presentan los aspectos básicos en la teoría de grafos, donde incluimos la representación de las redes dinámicas como grafos y matrices, así como diferentes extensiones de los grafos, es decir, los antecedentes del análisis estructural de una red. Mientras que en la segunda parte, abordamos el problema de sincronización para redes de nodos idénticos con un acoplamiento lineal, simétrico y difusivo, donde se presenta un análisis de estabilidad del estado sincronizado de la red, el cual es un punto de partida en nuestro trabajo de investigación de la tesis.

En el *Capítulo 3*, el problema de sincronización generalizada en redes dinámicas es abordado, se presenta el problema de sincronización generalizada en redes dinámicas y además, el análisis para garantizar este tipo de sincronización, donde utilizamos el método directo, o bien, la sincronización controlada mediante transformación de variables. En este procedimiento suponemos que existe una transformación para cada nodo, y garantizamos la sincronización idéntica en términos de las variables transformadas lo que obliga a los nodos de la red a lograr la sincronización generalizada en términos de las variables originales.

En el *Capítulo 4*, proponemos un modelo de red de redes con diferentes niveles de interconexión, donde se incluye en el modelo una diversidad de conexiones, es decir, diferentes características para sus enlaces y además incluimos la diversidad dinámica de sus nodos, considerando sistemas dinámicos diferentes pero de la misma dimensión. En este capítulo abordamos el problema de sincronización por clúster y presentamos un análisis para garantizar la sincronía en cada nivel, de dicho análisis obtenemos condiciones para la estructura de la red de redes tales como difusividad y simetría.

En el *Capítulo 5*, abordamos el problema de sincronización idéntica para un modelo de red con múltiples tipos de conexiones, la cual modelamos como una hiperred dinámica.

Esta construcción simple hace una descripción elegante para arreglos de sistemas dinámicos donde dos tipos de conexiones están presentes. Para este modelo hemos realizado un análisis de estabilidad que garantiza la sincronización en la hiperred, donde se obtienen condiciones sencillas para las funciones de acoplamiento y la estructura del hipergrafo con las que se logra la sincronización completa.

Por último, en el *Capítulo 6*, se presenta un resumen de las conclusiones más importantes de todos los capítulos. Adicionalmente, se presentan algunas recomendaciones de trabajo a futuro y la productividad del trabajo de tesis.

CAPÍTULO 2

Sincronización en redes

En los últimos años la investigación en redes complejas ha tomado importancia como una herramienta para modelar una variedad de sistemas del mundo real. Para generar un modelo de un sistema complejo como una red implica una representación de los componentes del sistema como nodos y las interacciones entre ellos como enlaces. Naturalmente, en una descripción de red muchos detalles del sistema original no son considerados. Sin embargo, la simplificación captura características esenciales del sistema. A continuación, exponemos los antecedentes matemáticos que ayudarán en el análisis de las redes dinámicas complejas.

2.1. Antecedentes del análisis estructural

La teoría de grafos [4] es el marco natural para el tratamiento matemático de redes complejas. Ya que la estructura de conexión de un sistema complejo puede representarse matemáticamente como un grafo. A continuación se describe formalmente la terminología de la teoría de grafos que utilizaremos en el resto de la tesis.

Un *grafo* \mathcal{G} está definido como un par ordenado compuesto por dos conjuntos $\mathcal{G} = (V, E)$, donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ es el conjunto de nodos, es decir, los elementos que se desea representar; y el conjunto de enlaces, $E = \{(v_i, v_j) \in V \times V | v_i, v_j \in V\}$, representa la relación entre los nodos. En esta definición, el conjunto de enlaces está formado por pares de nodos de la forma (v_i, v_j) con $v_i \neq v_j$. Si para cada par ordenado $(v_i, v_j) \in E$ existe $(v_j, v_i) \in E$ se dice que el grafo es *no dirigido*. En otro caso, el grafo es *dirigido*. El número total de nodos del grafo es denotado por N y define el orden del grafo. Vale la pena señalar que en

muchos sistemas complejos, N define el tamaño físico de la red, ya que identifica el número de elementos que componen el sistema. Sin embargo, en teoría de grafos, el tamaño del grafo se identifica por el número total de enlaces E . A menos que se especifique consideramos que N es el tamaño de la red. Otra forma de extender la definición de grafo es asociando un peso a cada uno de los enlaces, ya sean grafos dirigidos o no. El peso de un enlace puede representar alguna propiedad de conexión, como la fuerza de interacción, la cantidad del flujo de información entre cada par de nodos, entre otras. Usualmente, un valor grande en el enlace indica una interacción fuerte entre cada par, mientras que un valor pequeño indica una interacción débil. Los pesos de los enlaces se asignan mediante una función $W : E \rightarrow \mathbb{R}$, donde el símbolo $w_{ij} \in \mathbb{R}$ denota el pesos del enlace (v_i, v_j) [2, 4, 54].

Una forma de simplificar la información del grafo es con el uso del álgebra matricial. De este modo, las interconexiones en un grupo de nodos se describen con la *matriz de adyacencia*, $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, donde cada elemento de la matriz representa la presencia o ausencia de un enlace entre cada par de nodos, cuyas entradas se definen como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ con } i \neq j; \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde $(v_i, v_j) \in E$ implica que el nodo v_i está conectado con el nodo v_j . Para un grafo no dirigido compuesto por N nodos, la matriz de adyacencia, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, es una matriz cuadrada y simétrica, es decir, sus elementos satisfacen $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, N$ con $i \neq j$, y los elementos de la diagonal principal son ceros. Mientras que para un dígrafo, la matriz de adyacencia no es simétrica, $A \neq A^\top$. Por otra parte, el grafo con pesos es representado por una matriz de adyacencia con sus entradas iguales a los pesos de sus enlaces, es decir:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & (v_i, v_j) \in E \text{ con } i \neq j; \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

donde $w_{ij} \in \mathbb{R}$. En general, es posible considerar que los valores de w_{ij} tengan asociados diferentes signos, pero para este trabajo de tesis solo se consideran que w_{ij} son reales no negativos, es decir, $w_{ij} \geq 0$.

En la Figura 2.1 se muestran diferentes tipos de grafos y sus correspondientes matrices de adyacencia. Para los grafos no dirigidos los enlaces son representados por una línea los cuales indican la conexión entre dos nodos; para los dígrafos los enlaces son representados por flechas las cuales indican el nodo inicial y el final, donde el nodo que recibe información se le asigna el valor numérico 1. Mientras que para los grafos con pesos en los enlaces se puede observar el valor del peso asociado.

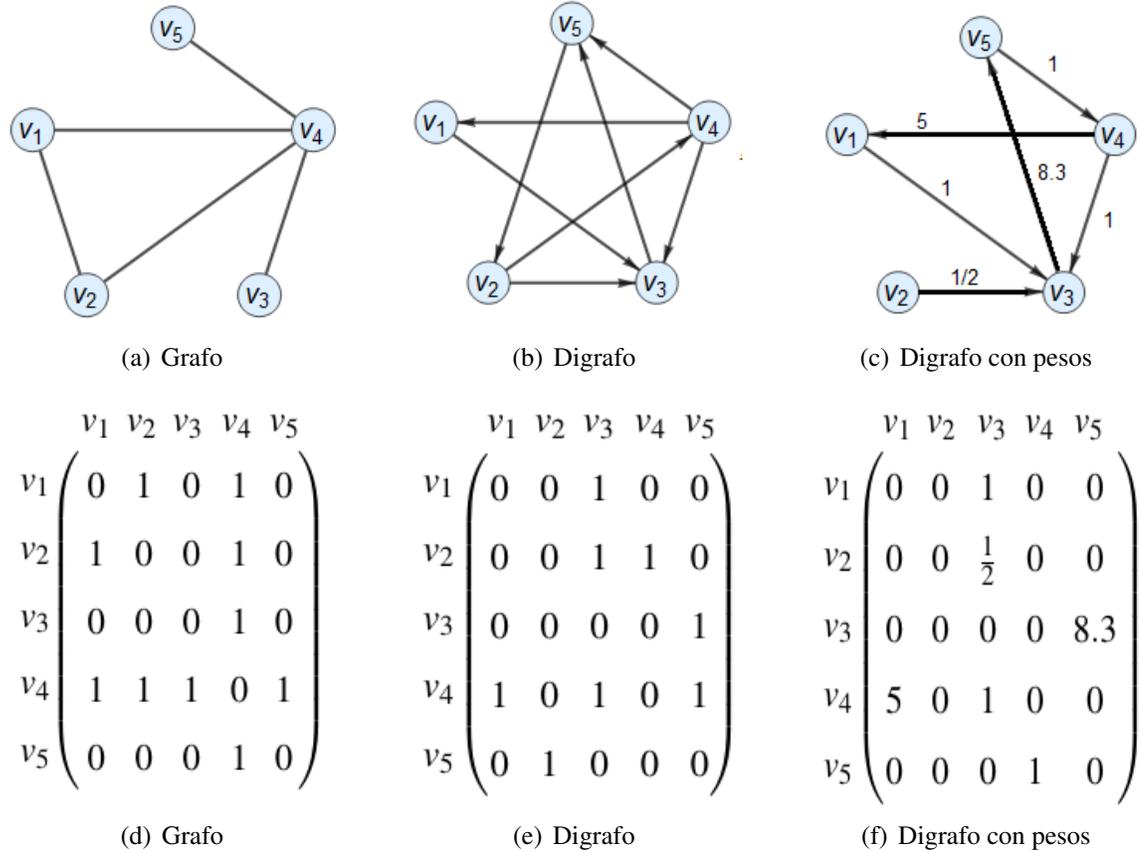


Figura 2.1: Representación esquemática de diferentes tipos de grafos y sus respectivas matrices de adyacencia. Se presenta un grafo no dirigido (a), dígrafo (b), y dígrafo con pesos (c); mientras que su matriz de adyacencia correspondiente está dada en (d)-(f).

Otra matriz importante asociada a grafos es la *matriz Laplaciana*, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, la cual se construye como sigue:

$$\mathcal{L} = A - D, \tag{2.1.3}$$

donde $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ con d_i como el grado de nodo para el i -ésimo nodo, el cual podemos calcular como $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ para toda $i = 1, 2, \dots, N$. Los elementos de la

matriz Laplaciana están dados por

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -d_i, & \text{para } i = j; \\ 1, & (v_i, v_j) \in E \quad i \neq j; \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \quad i \neq j. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

En la Figura 2.2 se pueden observar algunos ejemplos de matrices Laplacianas para los grafos presentados en la Figura 2.1.

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.3 & 0 & 8.3 \\ 5 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
(a) Grafo no dirigido	(b) Digrafo	(c) Digrafo con pesos

Figura 2.2: Matrices Laplacianas de los grafos presentados en la Figura 2.1.

En general, las matrices Laplacianas son un elemento clave para caracterizar la dinámica de un conjunto de elementos interconectados, ya que a partir de los valores propios y vectores propios de la matriz Laplaciana, es posible encontrar información sobre las propiedades estructurales del grafo. En particular, para un grafo no dirigido formado por N nodos de tal forma que no existen nodos aislados, se tiene que la matriz Laplaciana presenta las siguientes características [2, 27, 39]:

- *Difusividad*: La matriz $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ satisface que $\sum_{j=1}^N \ell_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Como una consecuencia, los elementos de la diagonal principal pueden escribirse como

$$\ell_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \ell_{ij}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1.5)$$

- *Irreducibilidad*: La red está conectada en el sentido de que para cualesquier par de nodos, existe al menos un camino que los conecta. En otras palabras no existen grupos de nodos aislados en la red.

- *Simetría:* La matriz \mathcal{L} satisface $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\top$, es decir, sus elementos satisfacen $\ell_{ij} = \ell_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, N$ con $i \neq j$.
- Si \mathcal{L} es una matriz simétrica, difusiva e irreducible, entonces todos los valores propios son reales, y se pueden ordenar de forma decreciente

$$0 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N. \quad (2.1.6)$$

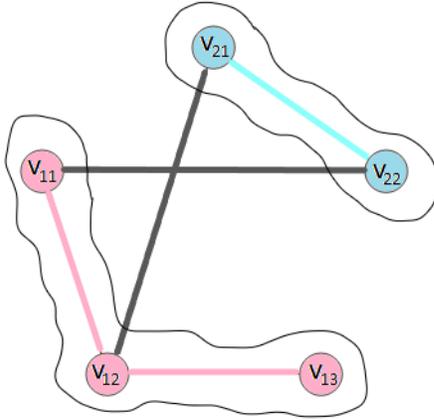
Como se mencionó anteriormente, estas propiedades nos brindan información sobre la estructura del grafo, y con ellas se puede facilitar el análisis de sincronización. Sin embargo, aunque toda la investigación en la literatura se ha centrado en redes que se pueden modelar como un grafo sin autoenlaces, ni múltiples conexiones entre nodos [5, 29], en muchos casos de interés la estructura de conexión del sistema original depende de otros procesos y solo puede ser adecuadamente representada como una red de redes, hipergrafos, redes multiplexadas, etc [18, 21, 55], donde se consideran otras fuentes de complejidad o características en el modelo para una mejor presentación del sistema complejo.

2.1.1. Red de redes

Considerando que los sistemas complejos tienen la tendencia de organizarse en comunidades o módulos, donde cada comunidad tiene características particulares [9]. El sistema complejo puede ser modelado como un conjunto de redes interconectadas, es decir, una *red de redes*. Al igual que en el caso de una sola red, cuya estructura de comunicación se puede describir como un grafo, las redes de redes se pueden representar como un grafo con sus respectivas matrices de adyacencia y laplaciana, las cuales indicarán como son las conexiones entre los nodos de cada red, y la forma en que las redes se conectan entre ellas para formar el modelo del sistema complejo [21, 55].

En general, una red de redes está constituida por un conjunto de N nodos divididos en M redes, donde cada una tiene N_k elementos (para $k = 1, 2, \dots, M$) con $N = \sum_{k=1}^M N_k$. La representación matricial de dicha estructura es un arreglo de matrices $\mathcal{A} = \{A_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, donde los bloques de la diagonal principal de \mathcal{A} representan la estructura interna de cada red,

$A_{ii} = \{a_{kl}^{[i]}\} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$, cuyas entradas se definen como: $a_{kl}^{[i]} > 0$ si existe una conexión entre el k -ésimo nodo y l -ésimo nodo de la i -ésima red; en otro caso, $a_{kl}^{[i]} = 0$. Mientras que los bloques fuera de la diagonal principal de \mathcal{A} , $A_{ij} = \{a_{kl}^{[ij]}\} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_j}$ con $i \neq j$, representan las conexiones entre los nodos de diferentes redes. Para este caso, los elementos de estas matrices se definen como $a_{kl}^{[ij]} > 0$ si existe una conexión entre el k -ésimo nodo de la i -ésima red y el l -ésimo nodo de la j -ésima red; por lo contrario, si dichos nodos no están conectados, entonces $a_{kl}^{[ij]} = 0$. Con el objetivo de ejemplificar la construcción de una matriz de adyacencia para una red de redes, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, en la Figura 2.3 se presenta una red de redes formada por $N = 5$ nodos divididos en $M = 2$ redes. Observemos que cada red del grafo mostrado en la Figura 2.3(a) es representada por un color, mientras que las conexiones entre redes son representadas por líneas de color gris.



(a) Grafo

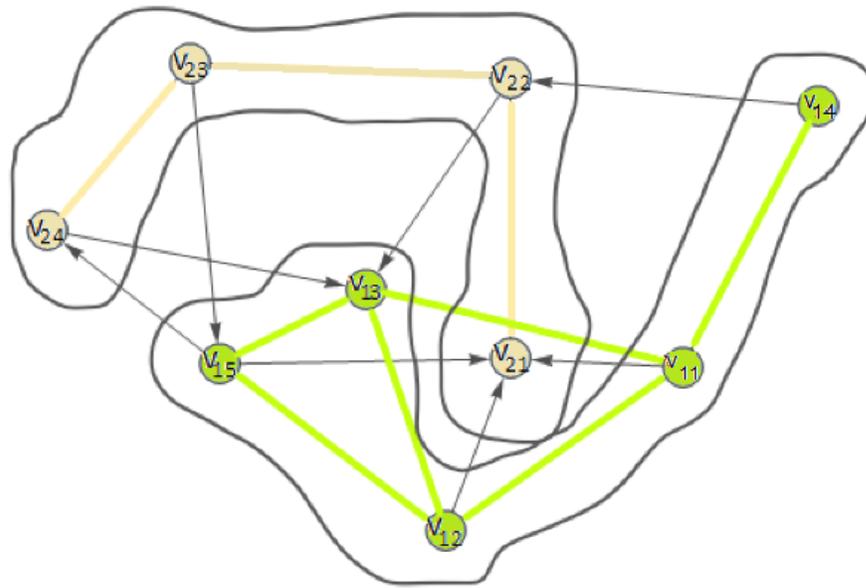
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz de adyacencia por bloques

Figura 2.3: Representación esquemática de una red con dos redes y su respectiva matriz de adyacencia ($N = 5$, $M = 2$, $N_1 = 3$, $N_2 = 2$).

En la representación matricial mostrada en la Figura 2.3(b) consideramos que la primer red está formada por tres nodos y la segunda red está formada por dos nodos, por tanto, $A_{11} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $A_{22} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Mientras las matrices de acoplamiento entre redes son $A_{12} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ y $A_{21} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$. Observe que en el caso que cada red contiene diferentes números de elementos, los bloques A_{ij} con $i \neq j$ no son matrices cuadradas. En este caso particular podemos notar que la matriz de adyacencia $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ es una matriz simétrica, pero esto se debe a que las conexiones dentro de las redes y entre las redes son bidireccionales y sin pesos. Sin embargo, no todas las matrices de adyacencia para una red de redes cumplen como está condición de

simetría. Un ejemplo de lo anterior, se puede observar en la Figura 2.4 donde presentamos una red de $N = 9$ nodos divididos en $M = 2$ redes. En este caso, las conexiones dentro de cada red son bidireccionales y se ilustran con líneas de color crema y verde para cada red, por tanto, los bloques de la diagonal principal de \mathcal{A} son matrices simétricas y de tamaño $A_{11} = A_{11}^\top \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ y $A_{22} = A_{22}^\top \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, respectivamente. En cambio las conexiones entre redes son enlaces con dirección, ilustrados en la 2.4(a) con flechas de color gris. Por lo tanto, la matriz de adyacencia resultante también es cuadrada pero no simétrica (ver Figura 2.4(b)), ya que $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}^\top$.



(a) Grafo

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz de adyacencia por bloques

Figura 2.4: Representación esquemática de una red con dos redes formada por nueve nodos y su respectiva matriz de adyacencia ($N = 9$, $M = 2$, $N_1 = 5$, $N_2 = 4$).

2.1.2. Hiperredes

Considerando que los sistemas complejos pueden estar conectados por enlaces de diferente naturaleza, en ocasiones no es suficiente un grafo para describir la estructura de sus conexiones. Por ejemplo, en el caso de un conjunto de neuronas que pueden estar conectadas por diferentes tipos de sinapsis, tal como: sinapsis químicas y eléctricas; o bien, una red de colaboración donde los científicos se pueden conectar por pertenecer a la misma institución o por artículos donde son coautores, entre otras. En estos casos se tiene la necesidad de representar al sistema complejo como una generalización del grafo, es decir, este tipo de sistemas pueden ser modelados como un conjunto de N nodos conectados a través de dos o más distintas redes, donde cada red corresponde a un tipo de interacción, y nos referimos a dicha estructura como un *hipergrafo* [13, 18].

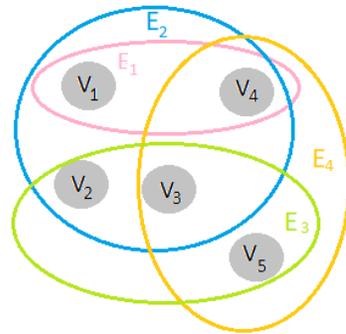
Formalmente, un hipergrafo \mathcal{H} es un par ordenado $\mathcal{H} = (V, E)$, donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ es el conjunto de nodos y $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ es el conjunto de hiperenlaces, donde cada hiperenlace $E_i \neq \emptyset$ forma un grafo y al igual que en los grafos simples se excluyen los casos donde existan autoenlaces o múltiples enlaces. Además, es posible construir hipergrafos ponderados asociando valores no negativos en por lo menos hiperenlace; o construir un hipergrafo dirigido por asociar enlaces direccionados en por lo menos un hiperenlace [56, 57, 58].

Una forma de representar a los hipergrafos es con su matriz *vértice-arista de incidencia*, $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{N \times m}$, la cual tiene N renglones, es decir tantos como la cardinalidad del conjunto V , y m columnas tantas como el número de hiperenlaces; donde las entradas de la matriz \mathcal{M} se definen como $M_{ij} = 1$ si el vértice v_i está en el hiperenlace E_j , o $M_{ij} = 0$ en caso contrario [57]. A partir de la matriz vértice-arista de incidencia se puede obtener la *matriz de adyacencia para el hipergrafo*, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, la cual es una matriz cuadrada y simétrica cuyas entradas son $a_{ij} \geq 0$ y representa el número de hiperenlaces que contiene tanto al nodo v_i como al nodo v_j para toda $i \neq j$, mientras los elementos de la diagonal principal son cero. Esta matriz se puede obtener de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \mathcal{M} \mathcal{M}^{\top} - \mathcal{D}, \quad (2.1.7)$$

donde $\mathcal{M}^{\top} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ es la transpuesta de la matriz vértice-arista de incidencia, y $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$

es una matriz diagonal cuyos elementos d_i son el grado de nodo, el cual puede ser calculado como la suma del renglón correspondiente de la matriz de incidencia, i.e., $d_i = \sum_{j=1}^m M_{ij}$ [58]. Con el objetivo de ejemplificar las dos matrices presentadas, en la Figura 2.5 se presenta la representación esquemática para un hipergrafo formado por cinco nodos y cuatro hiperenlaces, con su respectiva matriz de vértice-arista de incidencia. Mientras que las matrices de adyacencia de cada hiperenlace son presentadas en la Figura 2.6.



$$\mathcal{M} = \begin{matrix} & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ v_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ v_3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ v_4 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ v_5 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(a) Hipergrafo

(b) Matriz de incidencia

Figura 2.5: Representación esquemática de un hipergrafo y su correspondiente matriz vértice-arista de incidencia.

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.6: Matrices de adyacencia de los hiperenlaces pertenecientes al hipergrafo mostrado en la Figura 2.5

La matriz de adyacencia del hipergrafo mostrado en la Figura 2.5 está dada por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otra forma de visualizar a un hipergrafo \mathcal{H} es con un multigrafo, es decir, como un grafo que tiene múltiples enlaces entre los mismos nodos, el cual es generado por la matriz de adyacencia $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ donde los elementos a_{ij} indican el número de enlaces que existe entre el nodo v_i y el nodo v_j . Para el hipergrafo presentado en las figuras anteriores tenemos un multigrafo asociado como el mostrado en la Figura 2.7, cuya representación matricial está dada por la matriz de adyacencia anterior, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$.

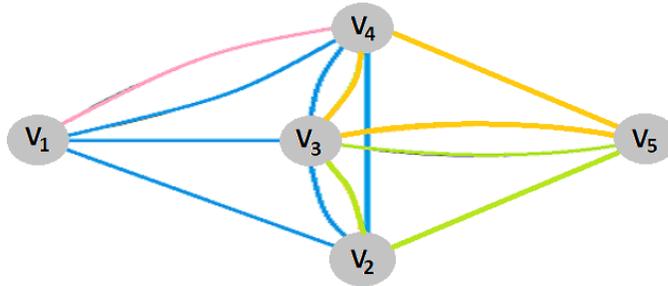
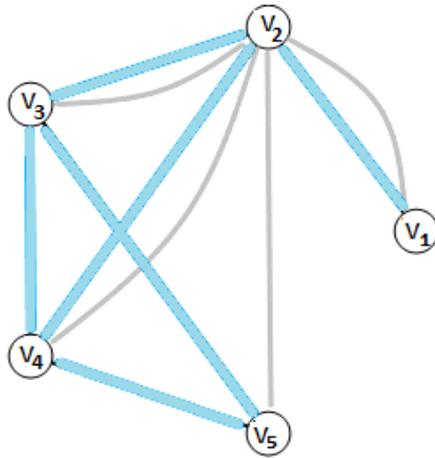


Figura 2.7: Representación esquemática de un hipergrafo formado por cinco nodos con cuatro hiperenlaces.

Al igual que en los grafos es posible considerar que los nodos y las conexiones dentro de cada hiperenlace tengan diferentes características, es decir, se puede considerar que un hiperenlace contiene enlaces direccionados, enlaces con pesos, o ambos. En estos casos, una mejor representación es determinar las conexiones dentro de cada hiperenlace, mediante una matriz de adyacencia (ver ecuación (2.1.2)). De modo que la representación del hipergrafo se forma con la suma de las matrices de adyacencia de cada hiperenlace. Por ejemplo, en la Figura 2.8 se presenta un hipergrafo, formado por cinco nodos y dos hiperenlaces, donde las conexiones dentro del primer hiperenlace se ilustran de color azul, mientras que las conexiones del segundo hiperenlace se ilustran de color gris. Además, suponemos que las

conexiones dentro de cada hiperenlace son bidireccionales, por tanto, las matrices resultantes E_1 y E_2 son simétricas, y la matriz de adyacencia resultante para el hipergrafo está dada por

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



(a) Hipergrafo

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Matrices de adyacencia

Figura 2.8: Representación esquemática de un hipergrafo formado por cinco nodos con dos hiperenlaces y sus respectivas matrices de adyacencia para cada hiperenlace.

Mientras que en la Figura 2.9 presentamos una hiperred de cinco nodos con tres hiperenlaces con diferentes características, las conexiones dentro del primer hiperenlace son direccionadas y en la figura son ilustradas con una flecha de color gris; mientras que las conexiones para el segundo hiperenlace tienen pesos y se ilustran en la figura de color azul; por último, las conexiones dentro del tercer hiperenlace son bidireccionales e ilustradas de color amarillo. La matriz de adyacencia del hipergrafo está dada por:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \frac{4}{3} \\ 3 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

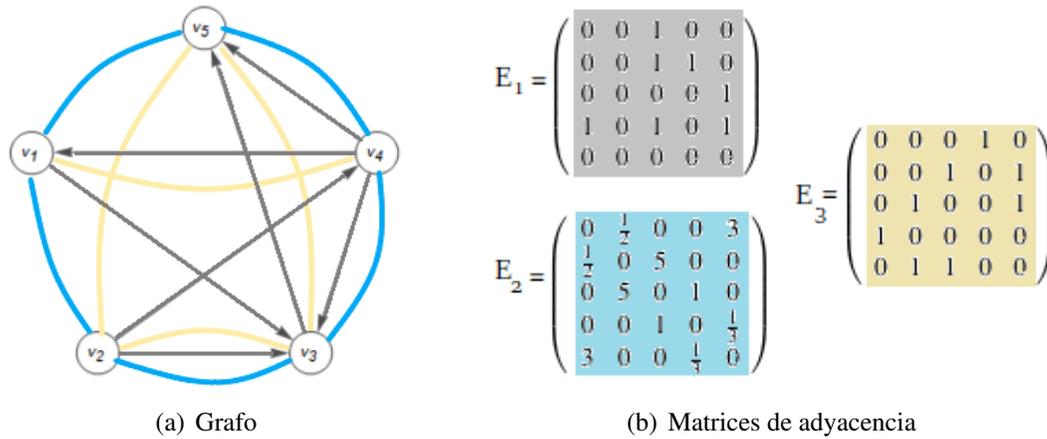


Figura 2.9: Representación esquemática de un hipergrafo formado por cinco nodos con tres hiperenlaces y sus respectivas matrices de adyacencia.

En resumen, existen diferentes formas para representar un sistema complejo tal como los grafos, la red de redes e hipergrafos, donde cada tipo de representación nos proporciona información diferente sobre la estructura del sistema. Sin embargo, en la mayoría de los sistemas complejos, los elementos no son necesariamente estáticos, por tanto, es necesario incluir en los modelos de estructura la complejidad dinámica de los nodos, mencionada por Strogatz [6]. De modo que los sistemas complejos pueden ser modelados como una red dinámica, de la cual hablaremos en la siguiente sección.

2.2. Modelo de una red dinámica

Una red compleja donde las unidades fundamentales son modeladas como sistemas dinámicos y la estructura de conexión es fija, se le conoce como *red dinámica*. Considerando que cada elemento es descrito como un sistema dinámico n -dimensional,

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)), \quad (2.2.1)$$

donde $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado del i -ésimo nodo; $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua que describe la dinámica del i -ésimo nodo en la red, y puede ser un sistema lineal, no lineal o incluso un oscilador caótico. A lo largo de este

documento de tesis se considera el caso que los sistemas son osciladores biológicos, los cuales presentan un comportamiento oscilatorio acotado.

Cuando estos sistemas están conectados de acuerdo a una matriz de adyacencia (2.1.1), la ecuación (2.2.1) es modificada con el fin de incluir la interacción de cada nodo con sus vecinos, bajo la suposición que el efecto de los vecinos sobre la dinámica individual de cada nodo es aditivo. Adicionalmente, consideraremos que el conjunto de N sistemas dinámicos son idénticos, es decir, el campo vectorial $f_i(\cdot) = f(\cdot)$ es el mismo para todos los nodos, y suponiendo que el acoplamiento es lineal, en otras palabras, la interacción es representada como una combinación lineal de las salida de sus nodos vecinos. Entonces, la ecuación de la red está dada por:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.2)$$

donde la constante $g > 0$ es la fuerza de acoplamiento común a todas las conexiones de la red. La matriz constante de ceros y unos, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, describe el acoplamiento entre las variables de estado para cada par de nodos. Por simplicidad, suponemos que $\Gamma = \text{Diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal donde $\gamma_i = 1$ si los nodos se conectan a través de la i -ésima variable de estado; $\gamma_i = 0$ en caso contrario. La matriz de adyacencia $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ describe la estructura de conexiones de la red, y es definida como (2.1.1), donde a_{ij} es uno si el i -ésimo y el j -ésimo nodo están conectados, y es cero si no lo están. Ahora, si se considera que la estructura de la red satisface la condición de difusividad, entonces la matriz de adyacencia A puede ser reemplazada por la matriz Laplaciana $\mathcal{L} = \{\ell_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ que se define como (2.1.3); con estas suposiciones, la ecuación (2.2.2) se reescribe como:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.3)$$

En resumen, el modelo de red dinámica (2.2.3) tiene las siguientes simplificaciones: todos los nodos tienen el mismo sistema dinámico, la fuerza de acoplamiento es constante y uniforme para todos los enlaces en la red, la matriz Γ es diagonal y es la misma para toda la red, y la matriz de conexiones \mathcal{L} es simétrica y difusiva.

Dependiendo del sistema complejo que deseemos modelar, es posible cambiar algunas de estas simplificaciones como veremos más adelante en esta tesis, nosotros consideramos una red dinámica donde se agregan algunas fuentes de complejidad en el modelo, tales como, nodos no idénticos, enlaces de distintas naturaleza, redes con estructura de comunidades, para los cuales determinaremos las condiciones para el surgimiento de comportamiento colectivo sincronizado estable, al menos localmente.

En la siguiente sección investigamos la sincronización en una red dinámica de nodos idénticos descrita por (2.2.3).

2.2.1. Sincronización idéntica en una red dinámica

La *sincronización completa o idéntica* entre dos o más sistemas puede surgir cuando estos son idénticos. Es decir, el comportamiento de sincronización idéntica en una red dinámica ocurre cuando los estados de todos los nodos de la red evolucionan de manera unísona [28, 39, 40]. Matemáticamente, se dice que la red dinámica (2.2.3) se logra la *sincronización idéntica o completa* de forma asintótica, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0 \text{ para toda } i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.4)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclideana [39, 40, 43, 59]. Una vez sincronizada la red dinámica (2.2.3) evoluciona en una *variedad de sincronización* descrita por

$$\Omega = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)\}. \quad (2.2.5)$$

Es importante mencionar que si todos los estados de los nodos alcanzan la variedad de sincronización, entonces el estado sincronizado debe ser uno una solución del sistema. Además, cuando los nodos están sincronizados, por la condición del acoplamiento difusivo (2.1.5) en la red dinámica (2.2.3), se garantiza que la solución de sincronización es una solución de un nodo aislado $\dot{x}(t) = f(x(t))$, denotada por $s(t) \in \mathbb{R}^n$, la cual satisface $\dot{s}(t) = f(s(t))$ [60].

Para mostrar que $s(t)$ es una solución de la red (2.2.3) sustituimos, $x_i(t) = s(t)$ para toda $i = 1, 2, \dots, N$, con lo que obtenemos

$$\dot{s}(t) = f(s(t)) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma s(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.6)$$

por la condición de difusividad (2.1.5) el segundo término en la derecha de la ecuación (2.2.6) es igual a cero. Por lo tanto, la solución de sincronización $s(t)$ es una solución de la red dinámica (2.2.3) repetida N veces. Por esta razón, como se sugiere en [39, 40, 60] la condición de sincronización (2.2.4) también se puede definir como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0 \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.7)$$

para algún $s(t) \in \mathbb{R}^n$ que satisface $\dot{s}(t) = f(s(t))$. Observemos que para la condición de sincronización (2.2.7), la solución de sincronización $s(t) \in \mathbb{R}^n$ no es específica, puede ser un punto de equilibrio, una solución periódica o inclusive una solución acotada de la red dinámica (2.2.3), y en este sentido la condición (2.2.7) siempre es equivalente a (2.2.4). En cambio, si $s(t)$ es una solución deseada o una solución a imponer, entonces (2.2.7) se convierte en un problema típico de seguimiento de la teoría de control [61].

Considerando que las condiciones (2.2.4) y (2.2.7) son equivalentes esto se implica que el problema de lograr la sincronización idéntica en una red dinámica (2.2.3) es equivalente a garantizar que la solución de sincronización $s(t)$ es asintóticamente estable. A continuación se presenta un análisis para determinar la estabilidad de la solución de sincronización $s(t)$ en una red de nodos idénticos.

Definimos el *error de sincronización* como $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ para $i = 1, 2, \dots, N$. De manera que la dinámica del error de sincronización está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{x}_i(t) - \dot{s}(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \\ &= f(x_i(t)) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma x_j(t) - f(s(t)) \\ &= f(e_i(t) + s(t)) - f(s(t)) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma e_j(t) + g \Gamma s(t) \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Por la condición de difusividad (2.1.5) el cuarto término en la derecha de la ecuación anterior es cero. Entonces, la dinámica del error de sincronización está dada por

$$\dot{e}_i(t) = f(e_i(t) + s(t)) - f(s(t)) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma e_j(t) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.9)$$

Realizamos una expansión por Serie de Taylor en primer orden para la función $f(e_i(t) + s(t))$ de la siguiente forma

$$f(e_i(t) + s(t)) \approx f(s(t)) + Df(s(t))e_i, \quad (2.2.10)$$

donde $Df(s(t))$ es el Jacobiano de $f(\cdot)$ evaluado en $s(t)$. Sustituyendo (2.2.10) en (2.2.9) obtenemos

$$\dot{e}_i(t) \approx Df(s(t))e_i(t) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma e_j(t), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.11)$$

Consideramos la matriz con las variables del error de sincronización para todos los nodos de la red, $\xi(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_N(t)] \in \mathbb{R}^{n \times N}$, y reescribimos la ecuación (2.2.11) en forma matricial como

$$\dot{\xi}(t) = Df(s(t))\xi(t) + g\Gamma\xi(t)\mathcal{L}^\top. \quad (2.2.12)$$

Como consideramos que la red dinámica (2.2.3) no tiene nodos aislados y las conexiones son bidireccionales, se tiene que la matriz $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz real y simétrica. Por lo tanto, existe una matriz unitaria e invertible $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $\Phi\Phi^{-1} = I_N$, tal que

$$\Phi\mathcal{L}\Phi^{-1} = \Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (2.2.13)$$

con $\Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$, donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, N$ son los valores propios asociados a la matriz Laplaciana \mathcal{L} [2]. Proponemos el siguiente cambio de variable para la ecuación (2.2.12): $\varepsilon(t) = \xi(t)\Phi^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times N}$, y al derivar obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \dot{\xi}(t)\Phi^{-1} \\ &= (Df(s(t))\xi(t) + g\Gamma\xi(t)\mathcal{L})\Phi^{-1}, \end{aligned}$$

utilizando álgebra matricial y la ecuación (2.2.13) obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}(t) &= (Df(s(t))\xi(t)\Phi^{-1} + g\Gamma\xi(t)(\Phi^{-1}\Phi)\mathcal{L}\Phi^{-1})\epsilon(t) \\ &= Df(s(t))\epsilon(t) + g\Gamma\epsilon(t)\Lambda.\end{aligned}\quad (2.2.14)$$

Ahora, considerando que $\epsilon_i(t) \in \mathbb{R}^n$ (con $i = 1, 2, \dots, N$) son las N componentes de $\epsilon(t)$, las cuales expresamos como:

$$\dot{\epsilon}_i(t) = (Df(s(t)) + g\lambda_i\Gamma)\epsilon_i(t) \text{ con } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.15)$$

De modo que el problema de estabilidad del estado sincronizado se reduce a demostrar la estabilidad de las N ecuaciones lineales variantes en tiempo de n -dimensionales (2.2.15). Notemos que el primer valor propio de la matriz Laplaciana es $\lambda_1 = 0$ y está relacionado con la dinámica de un sólo nodo aislado, es decir, corresponde a la dinámica del estado sincronizado. Por lo tanto, si quitamos el índice $i = 1$ en (2.2.15) obtenemos

$$\dot{\epsilon}_k(t) = (Df(s(t)) + g\lambda_k\Gamma)\epsilon_k(t) \text{ para } k = 2, 3, \dots, N. \quad (2.2.16)$$

De manera que solo es suficiente probar la estabilidad de las $N - 1$ ecuaciones lineales variantes en tiempo, demostrando así que la solución de sincronización $s(t)$ es estable. En ese sentido, Wang y Chen [31, 40] proponen realizar un análisis de estabilidad de la ecuación (2.2.16) alrededor del origen en términos de funciones de Lyapunov. El resultado principal de su análisis es comúnmente conocido como criterio de λ_2 y está presentado en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1. [31, 40] : *Considere la red dinámica (2.2.3). Suponga que existe una matriz diagonal $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida y dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\bar{\tau} > 0$ tal que*

$$(Df(s(t)) + d\Gamma)^\top P + P(Df(s(t)) + d\Gamma) \leq -\bar{\tau}I_n \quad (2.2.17)$$

para toda $d \leq \bar{d}$, donde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Si la fuerza de acoplamiento

satisface

$$g \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|, \quad (2.2.18)$$

con λ_2 el segundo valor propio más grande de la matriz \mathcal{L} . Entonces la variedad de sincronización (2.2.5) de la red dinámica (2.2.3) es exponencialmente estable, y como consecuencia la red dinámica (2.2.3) logra la sincronización completa.

Demostración. Consideramos las siguientes funciones de Lyapunov

$$V_k(t) = \varepsilon_k^\top(t) P \varepsilon_k(t) > 0 \text{ para } k = 2, 3, \dots, N, \quad (2.2.19)$$

con $P = P^\top > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz positiva definida. La derivada de $V_k(t)$ con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema correspondiente en (2.2.16) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(t) &= \dot{\varepsilon}_k^\top(t) P \varepsilon_k(t) + \varepsilon_k^\top(t) P \dot{\varepsilon}_k(t) \\ &= \varepsilon_k^\top(t) \left[(Df(s(t)) + g\lambda_k \Gamma)^\top P + P(Df(s(t)) + g\lambda_k \Gamma) \right] \varepsilon_k(t) \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

para $k = 2, 3, \dots, N$. Debido a que los valores propios de la matriz \mathcal{L} se pueden ordenar como (2.1.6), tenemos que

$$\dot{V}_2(t) \geq \dot{V}_3(t) \geq \dots \geq \dot{V}_N(t). \quad (2.2.21)$$

Utilizando la ecuación anterior si $\dot{V}_2(t) \leq 0$ las $N - 2$ ecuaciones restantes son negativas. Como la derivada $\dot{V}_2(t)$ es una función cuadrática sólo es necesario verificar si

$$(Df(s(t)) + g\lambda_2 \Gamma)^\top P + P(Df(s(t)) + g\lambda_2 \Gamma) \leq 0. \quad (2.2.22)$$

Por lo tanto, definimos $\bar{d} < 0$ tal que

$$(Df(s(t)) + \bar{d}\Gamma)^\top P + P(Df(s(t)) + \bar{d}\Gamma) \leq -\tau I_n \quad (2.2.23)$$

con $\tau > 0$. Entonces, si $\bar{d} \geq g\lambda_2$ la función $\dot{V}_2(t) \leq 0$ es negativa y como consecuencia el conjunto de ecuaciones (2.2.16) es estable en el sentido de Lyapunov. Lo que implica que la variedad de sincronización (2.2.11) es exponencialmente estable. \square

El resultado anterior es muy limitado, en el sentido que sólo es válido para una red de nodos idénticos lineal y difusivamente acoplados con una estructura estática. En esta tesis se presentan extensiones sobre el análisis de sincronización en redes de nodos idénticos, donde se consideran diferentes topologías y además en el modelo se incluyen distintas fuentes de complejidad tales como diversidad en enlaces, enlaces de distinta naturaleza e incluso diversidad de nodos. En la siguiente sección se presenta un ejemplo de una sistema complejo biológico modelado como una red dinámica así como las condiciones bajo las cuales este modelo de red dinámica presenta la sincronización idéntica.

2.2.2. Ejemplo: Sincronización en un modelo del islote pancreático

En el páncreas las células están organizadas en conglomerados celulares llamados islotes de Langerhans, estos arreglos están formados principalmente por cuatro tipos de células capaces de secretar compuestos endocrinos. Las células pancreáticas β , que son las encargadas de producir y secretar insulina, representan entre el 60 y 80 por ciento de las células del islote, por lo tanto, usualmente el islote se modela como una red de células β eléctricamente acopladas [62]. Por otra parte, la liberación de insulina de las células β está directamente relacionada con la actividad eléctrica de su membrana. En particular, la secreción está asociada a un patrón de oscilaciones llamado disparos de picos, también conocido como *spike-bursts*, los cuales están asociados con el estado activo de la célula; mientras que un comportamiento no oscilatorio, está asociado con los estados de inhibición o silente de la célula β [63, 64]. Existen diversos modelos matemáticos que describen la actividad eléctrica de una célula β , en términos del potencial de membrana (x_{i1}), la activación de los canales iónicos (x_{i2}), y la concentración de agentes de regulación (x_{i3}). Pernarowski propuso un modelo adimensional simplificado de la actividad eléctrica para una célula pancreática β el cual está descrito por las siguientes ecuaciones [62]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}(x_{i1}(t)) - x_{i2}(t) - x_{i3}(t) \\ (w_{\infty}(x_{i1}(t)) - x_{i2}(t)) \\ \varepsilon_{\beta}(h(x_{i1}(t)) - x_{i3}(t)) \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)),$$

donde $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), x_{i3}(t)]^\top \in \mathbb{R}^3$ es la variable de estado; $\hat{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el campo vectorial que describe la dinámica de una célula β aislada; y $\varepsilon_\beta \ll 1$ es un parámetro positivo muy pequeño, que brinda al modelo dos distintas escalas de tiempo: el subsistema rápido $[x_{i1}(t), x_{i2}(t)]$ y el subsistema lento $[x_{i3}(t)]$. Las funciones $\hat{f}(x_{i1}(t))$, $w_\infty(x_{i1}(t))$ y $h(x_{i1}(t))$ se aproximan como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_{i1}(t)) &= -\frac{a}{3}x_{i1}(t)^3 + a\hat{u}x_{i1}(t)^3 + (1 - a(\hat{u}^2 - \eta^2))x_{i1}(t) \\ w_\infty(x_{i1}(t)) &= \left(1 - \frac{a}{3}\right)x_{i1}(t)^3 + a\hat{u}x_{i1}(t)^2 + (1 - a(\hat{u}^2 - \eta^2) - 3)x_{i1}(t) - 3 \\ h(x_{i1}(t)) &= \beta(x_{i1}(t) - u_\beta) \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

donde los parámetros pueden ser ajustados para obtener diferentes tipos de comportamientos del sistema (2.2.24). En particular, un patrón de disparos cuadrados similar al observado para la actividad eléctrica de las células β activa se obtiene con los parámetros $a = \frac{1}{4}$, $\eta = \frac{3}{4}$, $\hat{u} = \frac{3}{2}$, $\beta = 4$, $u_\beta = -0.954$ y $\varepsilon_\beta = 0.0025$. Además, a partir un análisis de los subsistemas rápido y lento Pernarowski identificó que el parámetro más significativo es u_β , ya que el subsistema lento es el encargado de establecer la dinámica de los disparos cuadrados, por lo tanto, manteniendo todos los parámetros iguales a excepción de $u_\beta = -1.375$ el sistema (2.2.24) se va un a a un punto de equilibrio estable, lo que representa el estado inhibido de la célula. En la Figura 2.10 se muestran los resultados de las simulaciones numéricas del sistemas (2.2.24) utilizando estos conjuntos de parámetros, donde el comportamiento activo de la célula se presenta con la línea azul, y el comportamiento inactivo se presenta con la línea sesgada roja.

Por otra parte, varios estudios *in vivo* e *in vitro* han demostrado que la aparición de disparos de picos en la actividad eléctrica de las células β se puede observar dentro de un islote, pero no en una célula de forma aislada [62, 65]. Por ello, es de interés analizar el efecto que las características estructurales en un conjunto de células tiene sobre la dinámica local de cada elemento y el comportamiento colectivo del conjunto. Por lo cual, una propuesta para modelar el islote pancreático es como una red de células β acopladas eléctricamente, con una estructura de conexiones simétrica y difusiva [62, 66].

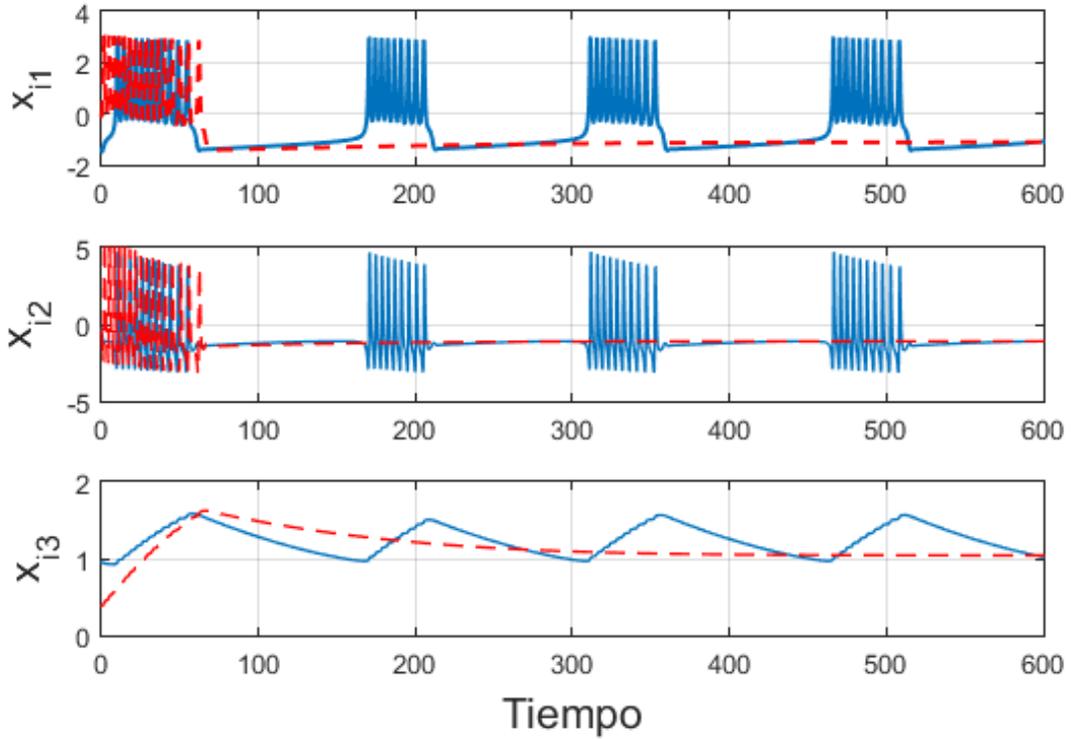


Figura 2.10: Simulación numérica de una solución del sistema (2.2.24) con diferentes valores del parámetro u_β .

El acoplamiento entre dos células adyacentes dentro del islote pancreático se debe principalmente al flujo de iones mediante diferentes canales de hendidura o *gap-junction channels* [65, 66, 67]. Bajo esta suposición, la interacción eléctrica entre cada par de células es aproximada por

$$I_{mn}(t) = g_{mn}(x_{m1}(t) - x_{n1}(t)), \quad (2.2.26)$$

donde $I_{mn}(t)$ representa la corriente entre las células m y n , la cual se debe a una diferencia de potencial de membrana ($x_{m1}(t)$ y $x_{n1}(t)$), mientras que la conductancia de los canales de hendidura que conecta a cada par es dada por g_{mn} , de los resultados experimentales no se tiene una forma clara de g_{mn} , de modo que para fines de análisis al modelar el islote se asume que la conductancia de la red es uniforme i.e., $g_{mn} = g$. Además, algunos trabajos previos han propuesto el acomodo de las células dentro del islote como un arreglo regular, modela como grafos de vecinos cercanos [64] o globalmente conectados [68].

Utilizando todos los supuestos anteriores la dinámica individual de cada célula β dentro

de un islote está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}(x_{i1}(t)) - x_{i2}(t) - x_{i3}(t) \\ (w_\infty(x_{i1}(t)) - x_{i2}(t)) \\ \varepsilon_\beta(h(x_{i1}(t)) - x_{i3}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} x_{j1}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.27)$$

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma x_j(t) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N$$

con $\Gamma = \text{Diag}(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ya que las células están acopladas solo por sus primeras coordenadas. Además, por construcción del modelo suponemos que la matriz $\mathcal{L} = \{\ell_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz constante de ceros y unos, la cual describe la topología de la red, y es construida como se menciona en (2.1.3), y suponemos que la matriz Laplaciana tiene las características de ser una matriz simétrica, irreducible y difusiva.

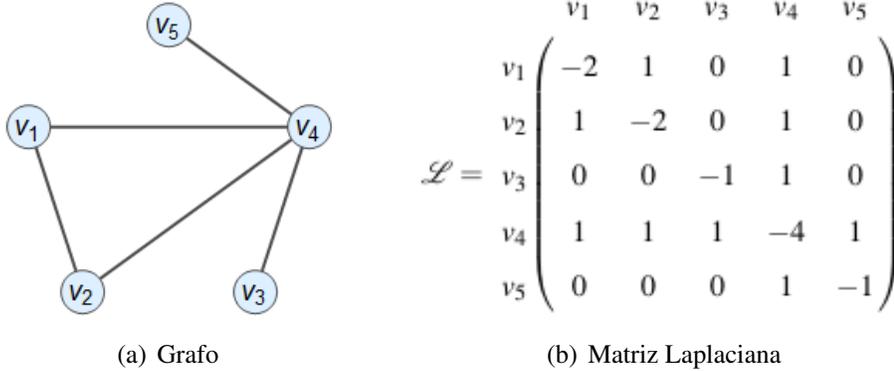


Figura 2.11: Grafo para un arreglo de cinco células β con acoplamiento bidireccional y su respectiva matriz Laplaciana.

Debido a que el modelo propuesto para el islote es una red de nodos idénticos con acoplamiento lineal, simétrico y difusivo (2.2.27) podemos utilizar el Teorema 2.2.1 para obtener la mínima fuerza de acoplamiento para garantizar la sincronización completa de los elementos. Siguiendo con el teorema se debe encontrar el valor de d tal que exista una matriz $P > 0$ positiva definida que cumpla con la ecuación (2.2.17). Suponiendo que la matriz P es la matriz identidad de tamaño 3×3 , una forma de encontrar el valor d es a partir de los valores propios de la matriz $Df(s(t)) + d\bar{\Gamma}$, ya que si todos son negativos se cumple con la ecuación (2.2.17).

En la Figura 2.12 presentamos el máximo valor propio de la matriz $Df(s(t)) - |\bar{d}|\Gamma$ para diferentes valores de $|\bar{d}|$, donde es posible observar numéricamente como aproximadamente para el valor $|\bar{d}| = 1.95$ el máximo valor propio se vuelve no positivo. Por lo tanto, el valor de umbral para la fuerza de acoplamiento es calculado con la ecuación (2.2.18) de donde obtenemos que si $g \geq \left| \frac{1.95}{\lambda_2} \right|$, entonces la red dinámica de nodos idénticos (2.2.27) se sincroniza en forma completa.

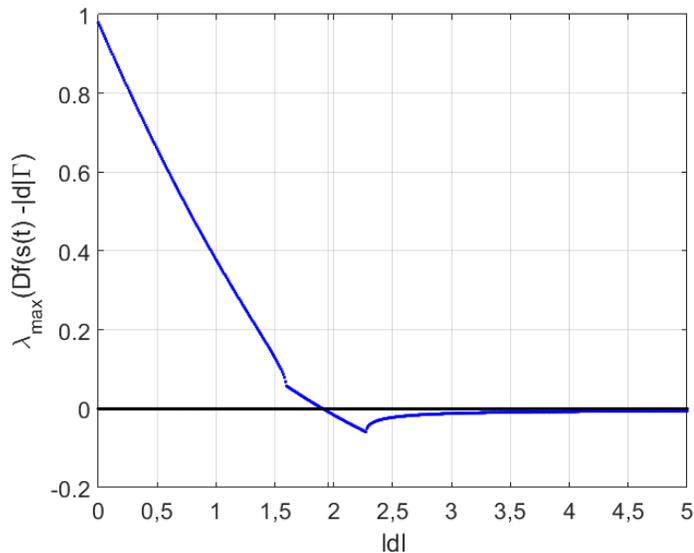


Figura 2.12: Máximo valor propio de la matriz $Df(s(t)) - \bar{d}\Gamma$ para distintos valores de $-\bar{d}$.

A manera de ilustración en las Figuras 2.13 y 2.15 presentamos las simulaciones numéricas para el sistema (2.2.27) formado por una red de cinco nodos con una estructura de conexión dada por el grafo mostrado en la Figura 2.11(a). En las figuras consideramos las mismas condiciones iniciales para ambas redes, pero diferentes fuerza de acoplamiento para cada figura con la finalidad de ilustrar si es posible o no lograr la sincronización idéntica en la red.

En la Figura 2.13 consideramos una fuerza de acoplamiento uniforme de $g = 0.02$, donde de acuerdo con el Teorema 2.2.1 no es suficiente para lograr la sincronización idéntica de la red. Esto se puede observar en la simulación numérica con los picos de disparos entre las células, ya que estos presentan un patrón asíncronos entre sus soluciones. Por otra parte, podemos comprobar que los errores de sincronización entre los estados no tienden a cero, como se muestra en la Figura 2.14, obteniendo así una comprobación numérica de que no se

logra la sincronización idéntica en esta red con una fuerza de acoplamiento menor.

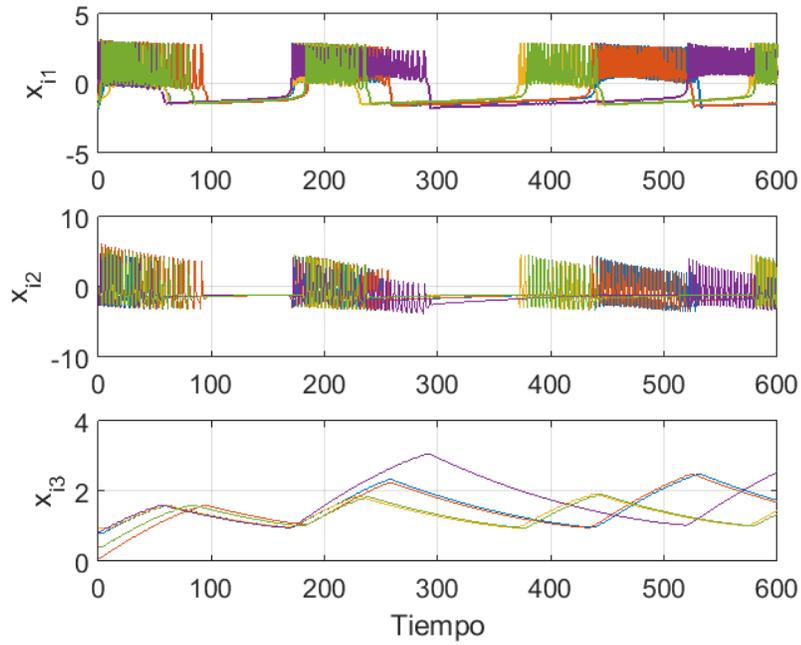


Figura 2.13: Simulación numérica para una red (2.2.27) formada por cinco nodos con fuerza de acoplamiento $g = 0.02$.

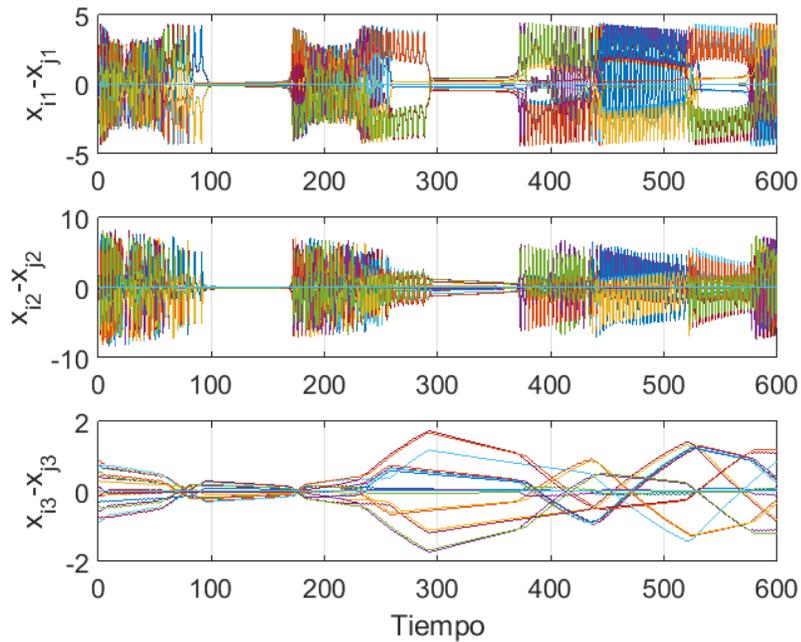


Figura 2.14: Errores de sincronización para la red (2.2.27) formada por cinco nodos con fuerza de acoplamiento $g = 0.02$.

En la Figura 2.15 se presenta la misma red de nodos idénticos (2.2.27), solo que en este caso se considera una fuerza de acoplamiento $g = 2$, la cual es mayor a la mínima fuerza de acoplamiento obtenida por el Teorema 2.2.1, $g \geq \left| \frac{1.9}{-1} \right| = 1.9$. En este caso particular, es posible observar como los nodos de la red (2.2.27) logran la sincronización completa. Inicialmente en la Figura 2.15 consideramos que las células están desacopladas, y es posible observar cómo los picos de disparos son asíncronos. Después de un tiempo de 150 segundos de simulación las células se acoplan en la red, con una fuerza de acoplamiento de $g = 2$ donde observamos que la red logra una sincronización completa. Lo anterior se puede comprobar numéricamente si calculamos los errores de sincronización entre los estados, mostrados en la Figura 2.16 donde podemos apreciar como estos tienden a cero conforme el tiempo crece.

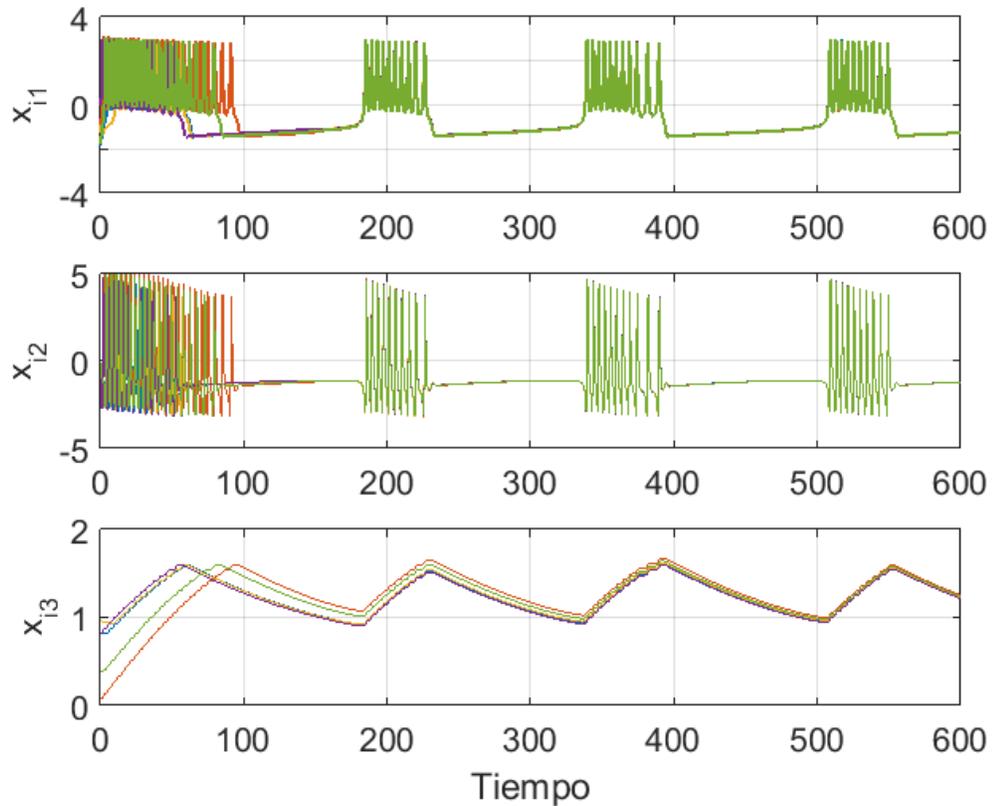


Figura 2.15: Simulación numérica para una red (2.2.27) formada por cinco nodos con fuerza de acoplamiento $g = 2$.

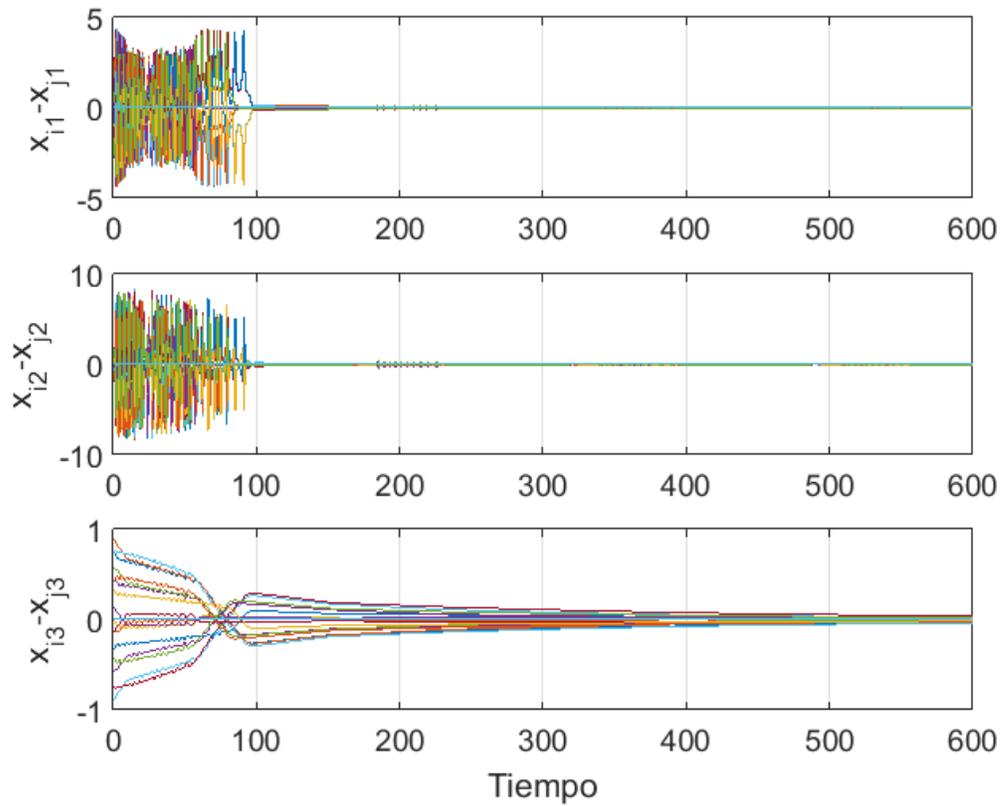


Figura 2.16: Errores de sincronización para la red (2.2.27) formada por cinco nodos con fuerza de acoplamiento $g = 2$.

Además de la sincronización completa o idéntica en redes es posible estudiar el surgimiento de los diferentes tipos de comportamientos sincronizados, como pueden ser la sincronización en fase [46, 70], sincronización externa [49], sincronización generalizada [47], sincronización por clúster [51, 52, 53], entre otras. En particular, la sincronización generalizada y la sincronización por clúster son abordados en los siguientes capítulos de esta tesis.

CAPÍTULO 3

Sincronización generalizada en redes

En este capítulo presentamos el problema de sincronización generalizada para redes de nodos idénticos con un acoplamiento bidireccional. Suponemos que para cada nodo del modelo existe una transformación de coordenadas y buscamos garantizar la sincronización idéntica en términos de las variables transformadas lo que impone a los nodos de la red a lograr la sincronización generalizada en términos de las variables originales.

3.1. ¿Qué es sincronización generalizada?

En términos generales dos o más sistemas están sincronizados si existe una relación clara en el tiempo de sus soluciones y a partir de esta relación se clasifican los diferentes tipos de sincronización. Por ejemplo, la *sincronización completa* se caracteriza por la evolución idéntica de las variables de estado de un sistema respecto de otro [28]. En la *sincronización de fase* existe una relación entre las fases de los sistemas que interactúan, mientras que las amplitudes pueden estar no correlacionadas [46, 70]. Mientras que, la *sincronización generalizada* surge cuando existe una función independiente del tiempo y de las trayectorias de los sistemas involucrados, y a través de dicha función las trayectorias de dos o más sistemas coinciden exactamente de manera asintótica [47].

El concepto de sincronización generalizada fue originalmente definido para sistemas caóticos acoplados de manera unidireccional, es decir, en una configuración maestro-esclavo, donde existe una relación funcional entre los estados de ambos sistemas, de modo que coincidan de manera asintótica [47, 71, 72]. Posteriormente, con el objetivo de extender este

concepto para múltiples sistemas acoplados en distintas configuraciones, donde es posible considerar configuraciones donde solamente se tiene un sistema maestro y el múltiples sistemas esclavos, así como configuraciones donde existe un subgrupo de sistemas maestro y un subgrupo de elementos controlados [73, 74, 75, 76]; o incluso diferentes grupos interconectados en un esquema maestro-esclavo [77, 78, 79]. En cualesquiera de estos casos, debe existir una relación funcional entre los nodos conectados para hablar de sincronización generalizada, sin embargo es posible considerar diferentes tipos de relaciones dentro de la red.

En paralelo a los trabajos mencionados, se abordó el problema de sincronización generalizada para dos osciladores mutuamente acoplados [80] y redes de osciladores con acoplamiento bidireccional [81], donde el problema que se plantea es un poco diferente al esquema maestro-esclavo, ya que los elementos están influenciados unos con otros, además en estas configuraciones no es tan fácil definir que osciladores son los maestros y cuales son esclavos. De modo que la relación funcional entre cada par de nodos puede estar influenciada por el acoplamiento de la red [76, 82].

Tanto para sistemas acoplados de forma unidireccional y sistemas acoplados de forma bidireccional, existen diferentes enfoques para establecer la sincronización generalizada: el método indirecto, el cual es conocido como enfoque del sistema auxiliar [71, 75, 83, 84], establece que la sincronización generalizada se deduce a partir de la sincronización idéntica de dos sistemas que actúan bajo la misma señal de entrada. Por otra parte, el método directo o también conocido como sincronización controlada, utilizan controladores para imponer una relación funcional entre los sistemas acoplados, donde se puede considerar una ley de control para todo el sistema o una ley de control diferente para cada elemento esclavo [76, 85].

La diferencia principal entre ambos métodos es si la descripción de la relación funcional entre los nodos es o no significativa, ya que en el caso del enfoque del sistema auxiliar su existencia es implícita, mientras que en la sincronización controlada una relación funcional específica es impuesta mediante el diseño de controladores.

En la siguiente sección presentamos la definición de sincronización generalizada en redes dinámicas, así como los diferentes enfoques para establecer este tipo de sincronización.

3.2. ¿Cómo detectar sincronización generalizada en redes?

Siguiendo la descripción del capítulo 2, la dinámica de un nodo en una red de sistemas dinámicos idénticos con acoplamiento lineal y difusivo está dada por (2.2.3):

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Si consideramos que en cada nodo es posible incorporar una acción de control la dinámica de la red controlada es:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma x_k(t) + u_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.1)$$

donde $u_i \in \mathbb{R}^n$ es un controlador local a diseñar, en este caso con el objetivo de imponer la sincronización generalizada en la red.

Por otra parte, la red dinámica controlada (3.2.1) logra la *sincronización idéntica o completa* si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.2)$$

De modo que este criterio para lograr la sincronización completa se puede interpretar como el requerir que las variables de estado de cualesquier nodo en la red sean exactamente mapeadas a las variables de estado de cualesquier otro nodo. Si consideramos que la relación entre las variables de estado de los nodos es diferente a la identidad, es posible introducir una generalización de la interpretación de sincronización en la red [72]. Entonces, se dice que la red dinámica controlada (3.2.1) se sincroniza en un sentido generalizado si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - H^* x_j(t)\| = 0, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.3)$$

donde H^* es una relación funcional que no depende del tiempo, ni las trayectorias de los nodos. Con la condición anterior, se entiende que se logra la sincronización generalizada cuando, las soluciones del j -ésimo nodo se relacionan a través de la relación funcional H^* con las soluciones del i -ésimo nodo. Esta relación puede ser la misma para todos los nodos o diferente para cada par de nodos. En este sentido, si consideramos que cada nodo puede

tener su propia transformación de coordenadas \mathcal{T}_i para $i = 1, 2, \dots, N$, entonces podemos reinterpretar (3.2.3) como la siguiente condición para lograr la *sincronización generalizada*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_i(x_i(t)) - \mathcal{T}_j(x_j(t))\| = 0, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.4)$$

donde si adicionalmente solicitamos que todas las transformaciones sean invertibles, tenemos que $H^* = \mathcal{T}_i^{-1} \circ \mathcal{T}_j$ es la composición de las transformaciones de cada par de nodos [86].

En las siguientes secciones presentamos dos diferentes métodos para establecer la sincronización generalizada en redes.

3.2.1. Método indirecto mediante el sistema auxiliar

El método del sistema auxiliar fue desarrollado para garantizar la sincronización generalizada de dos sistemas caóticos acoplados en una configuración maestro-esclavo [71]. Este método ha sido aplicado para analizar el surgimiento de la sincronización generalizada en una red dinámica [75, 83, 84]. Sin embargo, debe señalarse que este método determina la existencia de una relación funcional H^* , pero no su descripción exacta.

El punto clave en este método es que para cualesquier nodo en la red, el acoplamiento con los otros nodos puede considerarse un sistema maestro. En particular, para la red dinámica (2.2.3) se puede aplicar el método del sistema auxiliar, considerando una réplica exacta de la dinámica de los nodos de la red, conocida como *sistema auxiliar* o *red auxiliar*,

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = f(\hat{x}_i(t)) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma(\hat{x}_k(t) - x_j(t)), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.5)$$

donde $\hat{x}_i(t) = [\hat{x}_{i1}(t), \hat{x}_{i2}(t), \dots, \hat{x}_{in}(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado de la red auxiliar, y el resto de las variables son descritas como en (2.2.3).

Siguiendo el método del sistema auxiliar propuesto por Abarbanel [71], la red dinámica (2.2.3) logra la sincronización generalizada si se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - \hat{x}_i(t)\| = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.6)$$

para diferentes condiciones iniciales $x_i(0) \neq \hat{x}_i(0)$ con $i = 1, 2, \dots, N$. En otras palabras, la dinámica de cada par de nodos es idéntica sin importar las condiciones iniciales del sistema en forma asintótica. Para demostrar que esto se cumple, definimos el error de sincronización entre los nodos de la red orginal y los nodos de la red auxiliar, i.e., $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, y utilizando las ecuaciones (2.2.3) y (3.2.5) calculamos la dinámica del error, la cual está dada por

$$\dot{e}_i(t) = f(x_i(t)) - f(\hat{x}_i(t)) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma e_k(t), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2.7)$$

por lo que garantizar la estabilidad del error de sincronización (3.2.7) es equivalente a garantizar la sincronización generalizada en la red (2.2.3). En la literatura, es posible encontrar diferentes resultados para garantizar la sincronización generalizada mediante este enfoque, donde se considera que los nodos son Lipschitz acoplados de manera lineal, unidireccional y difusiva. Por ejemplo, en [84] utilizan fuerzas de acoplamiento adaptables para lograr el objetivo de sincronización generalizada. En [47, 80] extienden este método para sistemas mutuamente acoplados, donde se considera que existe un sistema auxiliar para cada nodo. Mientras que en los trabajos [81, 82] han aplicado este enfoque para redes con acoplamiento bidireccional. Por otra parte, [87, 88] establece que el método indirecto no es aplicable para todas las redes bidireccionales, ya que solamente se puede definir en sistemas que pueden ser analizados en una configuración maestro-esclavo.

En todos los casos, el método del sistema auxiliar para la sincronización generalizada se puede establecer para que los nodos de la red estén sincronizados en un sentido generalizado. Sin embargo, aunque con este método se tiene la existencia de las relaciones funcionales, H^* , no es posible determinar su forma específica. Por tanto, si deseamos imponer una relación funcional entre los nodos de la red, es necesario utilizar el enfoque sincronización generalizada controlada que se presenta a continuación.

3.2.2. Método directo mediante sincronización controlada

Con el método de sincronización generalizada controlada se busca imponer una relación funcional entre los nodos de la red, la cual puede ser la misma relación para todos los nodos

o diferente en algunos pares de nodos. Además, esta relación funcional debe ser una función estática y que no depende de los estados de los nodos. En particular, a la red dinámica controlada (3.2.1) se puede aplicar este método considerando que es necesario diseñar una ley de control, u_i , tal que se cumpla con la definición de sincronización generalizada

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - \mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j(x_j(t))\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.8)$$

donde $\mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j$ es el mapeo que se desea imponer entre los nodos de la red. La dificultad de este método es que los controladores diseñados suelen ser bastante complicados y se deben aplicar a todos los nodos de la red, pero es un método útil para imponer un mapeo de sincronización. Con el fin de imponer esta relación funcional $\mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j$ y diseñar los controladores, definimos el error de sincronización como $e_{ij}(t) = x_i(t) - \mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j(x_j(t))$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, N$, donde el objetivo de control es $\|e_{ij}(t)\| \rightarrow 0$. En otras palabras, se busca que la dinámica de los errores sean asintóticamente estables.

Lo anterior se puede probar mediante el uso de funciones de Lyapunov, es decir, se considera que existe una función $V(e_{ij}(t))$ con las siguientes propiedades: $V(e_{ij}(t)) > 0$ para todos $e_{ij}(t) \neq 0$ y $V(e_{ij}(t)) = 0$ para $e_{ij}(t) = 0$. Si la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de la trayectoria del error satisface $\dot{V}(e_{ij}(t)) \leq 0$ el error es asintóticamente estable, por tanto, se logra la sincronización generalizada entre los nodos de la red.

En la literatura, es posible encontrar diferentes resultados para garantizar la sincronización generalizada mediante el método directo. Un ejemplo es considerar que para la red controlada (3.2.1) existe solamente un nodo maestro o líder dentro de la red, donde la trayectoria maestra es $s_M(t) \in \mathbb{R}^n$ y cuya dinámica está dada por $\dot{s}_M(t) = f_M(s_M(t))$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que el primer índice de los nodos en la red corresponde al nodo maestro, por tanto, necesitamos diseñar los controladores locales $u_i \in \mathbb{R}^n$, tal que los $N - 1$ nodos restantes sigan a este nodo maestro. En este sentido, la sincronización generalizada se define como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - H^* s_M(t)\| = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (3.2.9)$$

donde H^* es la relación funcional a imponer, la cual suponemos es la misma para todos los nodos de la red dinámica controlada (3.2.1).

Con el fin de imponer la relación funcional y el diseño de los controladores, definimos el error de sincronización generalizada como $e_i(t) = x_i(t) - H^*s_M(t)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, cuya dinámica del error está dada por

$$\dot{e}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma x_k(t) + u_i - DH^*(s_M(t))f_M(s_M(t)) \quad (3.2.10)$$

donde $DH^*(\cdot)$ es el Jacobiano del mapeo $H^*(\cdot)$.

Ahora, como parte del diseño de los controladores locales u_i para $i = 1, 2, \dots, N$ que estabilice el error de sincronización generalizada proponemos

$$u_i = DH^*(s_M(t))f_M(s_M(t)) + \kappa e_i(t) - f_M(H^*(s_M(t))) - g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma H^*s_M(t), \quad (3.2.11)$$

para $i = 2, 3, \dots, N$, donde $\kappa \geq 0$ es una constante no negativa. De modo que, la dinámica del error de sincronización controlada (3.2.10) en lazo cerrado puede ser escrita como:

$$\dot{e}_i(t) = f(x_i(t)) - f_M(H^*(s_M(t))) + \kappa e_i(t) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma e_k(t) \quad (3.2.12)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

Notemos que los primeros dos términos a la derecha de la ecuación anterior denotan la diferencia entre la dinámica individual de un nodo y la dinámica del nodo maestro, como consideramos que la red dinámica controlada (3.2.1) es una red de nodos idénticos, entonces es razonable esperar que estos dos términos estén acotados, es decir, suponemos que se cumple

$$\|f(x_i(t)) - f_M(H^*s_M(t))\| \leq \zeta \|x_i(t) - H^*s_M(t)\| \quad (3.2.13)$$

con $\zeta \geq 0$ una constante no negativa.

Para garantizar la estabilidad de la dinámica del error (3.2.12), consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^\top(t) e_i(t). \quad (3.2.14)$$

Calculamos la derivada de la función de Lyapunov con respecto al tiempo a lo largo de la trayectorias del sistema (3.2.12), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N e_i^\top(t) \dot{e}_i(t) + \sum_{i=1}^N \dot{e}_i^\top(t) e_i(t) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^\top(t) \left(f(x_i(t)) - f_M(H^* s_M(t)) + \kappa e_i(t) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma e_k(t) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(f(x_i(t)) - f_M(H^* s_M(t)) + \kappa e_i(t) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma e_k(t) \right)^\top e_i(t). \quad (3.2.15)
 \end{aligned}$$

Utilizando (3.2.13) en la ecuación anterior y que la matriz \mathcal{L} es simétrica obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N \left(\zeta e_i^\top(t) e_i(t) + \kappa e_i^\top(t) e_i(t) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} e_i^\top(t) \Gamma e_k(t) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \left((\zeta + \kappa) e_i^\top(t) e_i(t) + g \sum_{k=1}^N \ell_{ik} e_i^\top(t) \Gamma e_k(t) \right) \quad (3.2.16)
 \end{aligned}$$

Sea $e(t) = [e_1^\top(t), e_2^\top(t), \dots, e_N^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{nN}$ el vector de todos los errores de sincronización, entonces reescribimos la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= (\zeta + \kappa) e^\top(t) e(t) + e^\top(t) (\mathcal{L} \otimes \Gamma) e(t) \\
 &\leq (\zeta + \kappa + \lambda_2 \gamma) \sum_{i=1}^N e_i^\top(t) e_i(t) \quad (3.2.17)
 \end{aligned}$$

donde \otimes es el producto de Kronecker; λ_2 es el segundo valor propio más grande de la matriz de conectividad \mathcal{L} y $\gamma > 0$ es el mínimo valor propio de la matriz Γ . Entonces, si se cumple que $\zeta + \kappa + \lambda_2 \gamma < 0$ la derivada de la función de Lyapunov es negativa, lo que implica que el error de sincronización generalizada es asintóticamente estable.

Logrando así la sincronización generalizada para esta configuración de un nodo maestro y $N - 1$ nodos esclavos. Una descripción más detallada sobre este tipo de problemas lo podemos consultar en [76, 85, 86] y las referencias que ahí se mencionan.

Otro ejemplo para la red (3.2.1), es considerar que existe un subconjunto de nodos líderes, los cuales forman una *subred líder*, cuya solución de sincronización es una trayectoria

promedio de los nodos de este subconjunto, y está dada por $\bar{s}_M(t) \in \mathbb{R}^n$. En particular, para este caso, el objetivo de control del diseño de u_i es estabilizar los nodos controlados en esta trayectoria promedio $\bar{s}_M(t)$. Sin pérdida de generalidad, es posible suponer que los primeros P índices en la red corresponden a los nodos controlados, mientras que los $N - P$ restantes son los nodos que pertenecen a la subred líder, o nodos maestros. En consecuencia, la red dinámica (3.2.1) puede reescribirse como

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + g \sum_{k=1}^N a_{ik} \Gamma x_k(t) + u_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, P \quad (3.2.18)$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + g \sum_{k=1}^N a_{ik} \Gamma x_k(t) \text{ para } i = P + 1, P + 2, \dots, N \quad (3.2.19)$$

donde (3.2.18) y (3.2.19) describen la dinámica de la subred controlada y la subred maestra, respectivamente.

Para este caso, la sincronización generalizada se define como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - H^* \bar{s}_M(t)\| = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.20)$$

donde H^* es la relación funcional de entre los nodos de la subred controlada y no controlada y \bar{s}_M es la trayectoria de referencia.

De manera similar al ejemplo anterior, definimos el error de sincronización generalizada como $e_i(t) = x_i(t) - H^* \bar{s}_M(t)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, y realizamos un análisis de estabilidad muy similar al presentado en el ejemplo anterior, con el cual se diseñan los controladores locales y se determina si el error de sincronización es asintóticamente estable, garantizando con esto la sincronización generalizada entre subredes. Una descripción más detallada sobre este tipo de problemas se puede consultar en [77, 78, 79, 89] y las referencias que ahí se mencionan.

Por otra parte, si se desea imponer una relación funcional entre los nodos de una red controlada con acoplamiento bidireccional (3.2.1) definimos la sincronización generalizada como (3.2.8):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_i x_i(t) - \mathcal{T}_j x_j(t)\|, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, N$$

donde $\mathcal{T}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $i = 1, 2, \dots, N$ son transformaciones invertibles para cada nodo. Además, es importante mencionar que en este caso particular todos los nodos son maestros y esclavos a la vez. En este sentido, para lograr la sincronización generalizada en la red se deben analizar todos los errores de sincronización generalizada entre cada par de nodos, esto es, $e_{ij} = \mathcal{T}_i x_i(t) - \mathcal{T}_j x_j(t)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, donde la relación funcional que define la sincronización generalizada de la red dependerá de las transformaciones de los nodos, como se muestra en la siguiente sección.

3.3. Diseño de controladores para la sincronización generalizada en redes con acoplamiento bidireccionales

Consideremos una red dinámica controlada (3.2.1) formada por N nodos idénticos con un acoplamiento lineal, simétrico y difusivo, donde además la función $f(\cdot)$ satisface la siguiente condición QUAD [90]

$$(x(t) - y(t))^\top [f(x(t)) - f(y(t)) - \Delta(x(t) - y(t))] \leq -\theta(x(t) - y(t))^\top (x(t) - y(t)) \quad (3.3.1)$$

para cualesquier $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$, donde $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal arbitraria y $\theta \geq 0$ es un escalar no negativo.

Con el fin de imponer una relación funcional $\mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j$ y diseñar los controladores locales u_i , consideramos que para cada nodo existe una transformación de coordenadas definida como $w_i(t) = \mathcal{T}_i x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ con $i = 1, 2, \dots, N$. Además, suponemos que las transformaciones son invertibles, es decir, $x_i(t) = \mathcal{T}_i^{-1} w_i(t)$ para toda $i = 1, 2, \dots, N$. Más aún, suponemos que estas transformaciones son diferentes al menos para algún par de nodos en la red dinámica. Bajo todas estas consideraciones podemos reescribir la ecuación de la red (3.2.1) en las coordenadas transformadas como:

$$\dot{w}_i(t) = F_i(w_i(t)) + g \mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k w_k(t) + v_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (3.3.2)$$

donde $F_i(w_i(t)) = \mathcal{T}_i^{-1} f(\mathcal{T}_i w_i(t)) \in \mathbb{R}^n$ es la dinámica de cada nodo en las variables trans-

formadas y $v_i = \mathcal{T}_i^{-1} u_i \in \mathbb{R}^n$ son los controladores locales expresados en términos de las variables transformadas.

Como cada transformación \mathcal{T}_i es diferente, al menos para un par de nodos, la ecuación de red (3.3.2) corresponde a una red controlada de nodos no idénticos con acoplamiento lineal, simétrico y difusivo. De modo que, el problema de sincronización generalizada se transforma en el diseño de los controladores locales v_i , tal que se logre la sincronización completa en las variables transformadas $w_i(t) \in \mathbb{R}^n$, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w_i(t) - w_j(t)\| = 0, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3.3)$$

Notemos que cuando se logra la sincronización completa en las variables transformadas, entonces en las variables originales se cumple con la definición de sincronización generalizada (3.2.8):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_i x_i(t) - \mathcal{T}_j x_j(t)\| = 0, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Además, como suponemos que las transformaciones de coordenadas son invertibles, de la ecuación anterior obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - \mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j x_j(t)\| = 0, \text{ o bien } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_j^{-1} \mathcal{T}_i x_i(t) - x_j(t)\| = 0. \quad (3.3.4)$$

En este sentido, se fija un mapeo de sincronización con respecto a las transformaciones de coordenadas para cada par de nodos de la red con $\mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j \neq \mathcal{T}_j^{-1} \mathcal{T}_i$. Con las condiciones (3.3.4) se entiende que se logra la sincronización generalizada cuando, las soluciones de j -ésimo nodo se relacionan a través del mapeo $\mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j$ con las soluciones del i -ésimo nodo. Si esto no es posible, entonces las soluciones del i -ésimo nodo se relacionan a través del mapeo $\mathcal{T}_j^{-1} \mathcal{T}_i$ con las soluciones del j -ésimo nodo.

Con lo anterior supongamos que el objetivo de control es la sincronización completa de la red controlada (3.3.2) en el sentido de (3.3.3). En particular, como los nodos en las variables transformadas provienen del mismo sistema dinámico, podemos argumentar que la solución de sincronización es una trayectoria promedio de sus nodos, $w_s(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w_j(t) \in \mathbb{R}^n$ cuya

dinámica está dada por

$$\dot{w}_s(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_j(w_j(t)) = F_s(w_s(t)). \quad (3.3.5)$$

Para diseñar los controladores locales v_i definimos el error de sincronización generalizada $e_i(t) = w_i(t) - w_s(t) \in \mathbb{R}^n$ para $i = 1, 2, \dots, N$. Utilizando (3.3.2) y (3.3.5) obtenemos la dinámica del error dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= F_i(w_i(t)) + g\mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k w_k(t) + v_i - F_s(w_s(t)) \\ &= F_i(w_i(t)) - F_s(w_s(t)) + g\mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k (e_k(t) + w_s(t)) + v_i \\ &= F_i(w_i(t)) - F_s(w_s(t)) + g\mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k e_k(t) + g\mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k w_s(t) \\ &\quad + v_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Por lo tanto, con el objetivo de estabilizar la dinámica del error de sincronización (3.3.6) proponemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.1. *Si los controladores locales v_i se construyen como*

$$v_i = -g\mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k w_s(t) + \kappa e_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.3.7)$$

donde $\kappa \geq 0$ es una constante no negativa. Entonces, la red de nodos no idénticos (3.3.2) con las variables transformadas, logra la sincronización completa con la solución de sincronización $w_s(t) \in \mathbb{R}^n$. De manera equivalente, la red de nodos idénticos (3.3.1), en las variables originales, logra la sincronización generalizada en el sentido de (3.3.4) y en términos de las transformación de coordenadas $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_k$.

Demostración. Utilizando el controlador propuesto en (3.3.7) la dinámica del error de sincronización (3.3.6) en lazo cerrado está dada por

$$\dot{e}_i(t) = F_i(w_i(t)) - F_s(w_s(t)) + \kappa e_i(t) + g\mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k e_k(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3.8)$$

La estabilidad de la dinámica del error alrededor del origen puede ser determinada utilizando la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^\top(t) e_i(t) \quad (3.3.9)$$

cuya derivada a lo largo de la trayectoria del error (3.3.8) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N e_i^\top(t) \dot{e}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^N e_i^\top(t) \left[F_i(w_i(t)) - F_s(w_s(t)) + \kappa e_i(t) + g \mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k e_k(t) \right] \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Consideramos que la dinámica individual de cada nodo en las variables transformadas provienen del mismo sistema dinámico $f(\cdot)$, por lo tanto, es posible argumentar que las diferencias entre los nodos en las variables transformadas están acotadas. Además, como se considera que la dinámica de cada nodo en variables originales es QUAD (3.3.1) en las variables transformadas tenemos

$$e_i^\top(t) [F_i(w_i(t)) - F_s(w_s(t)) + \Delta e_i(t)] \leq -\theta_i e_i^\top(t) e_i(t) \quad (3.3.11)$$

donde $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal arbitraria y $\theta_i \geq 0$ son constantes no negativas.

Sea $\kappa > \delta_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$, utilizando la ecuación (3.3.11) podemos acotar la derivada de la función de Lyapunov (3.3.10) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq - \sum_{i=1}^N \theta_i e_i^\top(t) e_i(t) + g \sum_{i=1}^N e_i^\top(t) \mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k e_k(t) \\ &= -\theta \sum_{i=1}^N e_i^\top(t) e_i(t) + g \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \ell_{ik} e_i^\top(t) \Gamma \mathcal{T}_{ik} e_k(t) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

con $\theta = \max\{\theta_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ y $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_k$.

Ahora, definimos el vector de las variables del error de todos los nodos como

$$E(t) = [e_1^\top(t), e_2^\top(t), \dots, e_N^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{nN}. \quad (3.3.13)$$

Además, considere la matriz $\mathcal{L} = -g\mathcal{L} \otimes \Gamma \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, donde \otimes es el producto de Kronecker; y la matriz por bloques $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_{ik}\} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, cuyos elementos son bloques de matrices definidos como $\mathcal{T}_{ik} = \mathcal{T}_i^{-1}\mathcal{T}_k \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \forall i, k = 1, 2, \dots, N$. Entonces la desigualdad (3.3.12) puede ser reescrita como

$$\dot{V}(t) \leq -\theta E^\top(t)E(t) - E^\top(t)(\mathcal{L} \circ \mathcal{T})E(t) \quad (3.3.14)$$

donde \circ es el producto de Hadamard [91].

Como las matrices $\mathcal{L} \geq 0$ y $\mathcal{T} \geq 0$ son matrices semidefinidas positivas, entonces utilizando el Teorema de Schur [91] para el producto de Hadamard, se tiene que $\mathcal{L} \circ \mathcal{T}$ es también semidefinida positiva. Por lo tanto, se logra que $\dot{V}(t) < 0$. Entonces, la dinámica del error es asintóticamente estable alrededor del origen, lo cual implica que la red (3.3.2) en las variables transformadas logra la sincronización completa. Como consecuencia, la red (3.2.1) en las variables originales logra la sincronización generalizada en el sentido de (3.2.8), con respecto a las transformaciones de coordenadas \mathcal{T}_i .

□

Con el Teorema anterior podemos imponer una relación funcional entre cada par de nodos de la red dinámica controlada (3.2.1). Sin embargo, con esta metodología existen algunas limitaciones para lograr nuestro objetivo, como lograr la sincronización completa en una red de nodos distintos, ya que este no es un problema trivial, pero se soluciona fácilmente al inducir el controlador. Por otra parte, la ventaja de utilizar este método es que se puede imponer cualquier transformación de coordenadas para los nodos, y con ellas encontrar fácilmente la relación funcional $\mathcal{T}_i^{-1}\mathcal{T}_k$ que indican la sincronización generalizada para cada par de nodos en la red.

3.3.1. Identificando el mapeo de sincronización generalizada en la red

En la sección anterior hemos construido los controladores locales para imponer un comportamiento en la red, tal que se logra la sincronización generalizada entre los nodos. Sin embargo, como sabemos la sincronización generalizada en sentido estricto requiere una relación funcional entre las dinámicas de los nodos. Por ello, es necesario identificar cuál es el mapeo de sincronización generalizada para una red con acoplamiento bidireccional.

Una forma de ilustrar como identificamos el mapeo de sincronización generalizada de la red dinámica controlada con acoplamiento bidireccional es comenzando con un caso sencillo. Por esto, consideramos una red dinámica controlada formada por dos nodos con un acoplamiento bidireccional, cuya ecuación de estados está dada por (3.2.1)

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{k=1}^2 \ell_{ik} \Gamma x_k(t) + u_i, \text{ para } i = 1, 2$$

y el grafo que representa la estructura de la red está dada por la Figura 3.1.

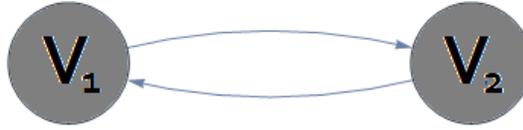


Figura 3.1: Grafo para una red conformada por dos nodos con acoplamiento bidireccional.

Con el Teorema 3.3.1, presentado en la sección anterior, es posible diseñar los controladores locales para cada nodo tal que se logra la sincronización generalizada de la red. Sin embargo, es necesario definir bajo qué esquema se establece la sincronización generalizada, en otras palabras, quién es el nodo maestro y quién es el nodo esclavo en la red. Siguiendo con la definición de sincronización generalizada (3.3.4) tenemos que para la ecuación de red anterior se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t) - \mathcal{T}_1^{-1} \mathcal{T}_2 x_2(t)\| = 0, \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t) - \mathcal{T}_2^{-1} \mathcal{T}_1 x_1(t)\| = 0. \quad (3.3.15)$$

De modo que, con las ecuaciones anteriores tenemos que las trayectorias del nodo v_2 son mapeadas por $\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_1^{-1} \mathcal{T}_2$ con las trayectorias del nodo v_1 , es decir, el nodo v_1 es el maestro

del nodo v_2 . Además, el nodo v_1 es esclavo del nodo v_2 , ya que las trayectorias del nodo v_1 son mapeadas por $\mathcal{T}_{21} = \mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{T}_1$ de modo que coinciden con las trayectorias del nodo v_2 .

Reescribiendo las ecuaciones (3.3.15) en forma vectorial obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \right\| &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \mathcal{H}x(t)\| &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

con $x(t) = [x_1(t)^\top, x_2(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2n}$ y el mapeo de sincronización generalizada está dada por la matriz

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{21} & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (3.3.17)$$

donde los bloques $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_i^{-1}\mathcal{T}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son generados por las transformaciones impuestas en cada nodo. Siendo este el único mapeo de sincronización generalizada para la red dinámica controlada formada por dos nodos mutuamente acoplados.

Del mismo modo, consideremos una red dinámica controlada formada por tres nodos con un acoplamiento bidireccional y cuya estructura de conexión es establecida como en la Figura 3.2. La ecuación de estados de la red dinámica controlada está dada por

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{k=1}^3 \ell_{ik} \Gamma x_k(t) + u_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (3.3.18)$$

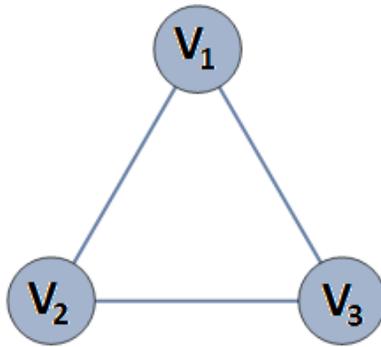


Figura 3.2: Grafo para una red conformada por tres nodos con acoplamiento bidireccional y una topología de todos contra todos.

Siguiendo con la definición de sincronización generalizada en forma vectorial tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \mathcal{H}x(t)\| = 0 \quad (3.3.19)$$

donde $x(t) = [x_1(t)^\top, x_2(t)^\top, x_3(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{3n}$, y la matriz $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ representa el *mapeo de sincronización generalizada* para la red. Es importante mencionar, que para este caso el mapeo de sincronización generalizada no es único, ya que depende de la forma en que se construye la matriz \mathcal{H} . Por ejemplo, si nosotros establecemos que las soluciones del nodo dos siguen a través del mapeo \mathcal{T}_{12} a las soluciones del nodo 1; mientras que las soluciones del nodo 1 siguen a través del mapeo \mathcal{T}_{21} a las soluciones del nodo 2; y las soluciones del nodo 1 siguen a través del mapeo \mathcal{T}_{31} a las soluciones del nodo 3. Entonces, obtenemos que el nodo 1 es maestro y esclavo del nodo 2, y además, el nodo 3 también es maestro del nodo 1. En este caso, el mapeo de sincronización generalizada se define como:

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}_{12} & 0 \\ \mathcal{T}_{21} & 0 & 0 \\ \mathcal{T}_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3n \times 3n} . \quad (3.3.20)$$

y la sincronización generalizada se establece en el sentido que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t) - \mathcal{T}_{12}x_2(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t) - \mathcal{T}_{21}x_1(t)\| = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_3(t) - \mathcal{T}_{31}x_1(t)\| = 0.$$

En cambio, si consideramos que el nodo 1 es maestro del nodo 2, el nodo 2 es maestro del nodo 1 y el nodo 3 es maestro del nodo 2. Matemáticamente, tenemos que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t) - \mathcal{T}_{12}x_2(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t) - \mathcal{T}_{21}x_1(t)\| = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_3(t) - \mathcal{T}_{32}x_2(t)\| = 0.$$

De modo que, también es posible establecer la sincronización generalizada con esta configuración, la diferencia principal es que el mapeo de sincronización generalizada es diferente,

ya que está dado por:

$$\mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}_{12} & 0 \\ \mathcal{T}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_{32} & 0 \end{pmatrix}_{3n \times 3n} . \quad (3.3.21)$$

En general, podemos construir diferentes mapeos de sincronización generalizada para la misma red y con las mismas transformaciones de coordenadas, solamente es necesario establecer diferentes configuraciones maestro-esclavo entre los nodos. En el caso particular de la red formada por tres nodos con acoplamiento bidireccional, tenemos que existen ocho posibles mapeos de sincronización generalizada, los cuales están dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}_{12} & 0 \\ \mathcal{T}_{21} & 0 & 0 \\ \mathcal{T}_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{H}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}_{12} & 0 \\ \mathcal{T}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_{32} & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{H}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{T}_{23} \\ \mathcal{T}_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{H}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{T}_{13} \\ \mathcal{T}_{21} & 0 & 0 \\ \mathcal{T}_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{H}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{T}_{13} \\ \mathcal{T}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_{32} & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{H}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{T}_{13} \\ 0 & 0 & \mathcal{T}_{23} \\ 0 & \mathcal{T}_{32} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{H}_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{T}_{13} \\ 0 & 0 & \mathcal{T}_{23} \\ \mathcal{T}_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{H}_8 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{T}_{23} \\ \mathcal{T}_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde cada $\mathcal{H}_k \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ y los bloques $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_i^{-1} \mathcal{T}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde los elementos \mathcal{T}_i corresponden a las transformaciones de coordenadas para cada nodo.

Si aumentamos el número de nodos en la red, N , entonces el número de relaciones funcionales posibles \mathcal{H}_i aumenta de forma exponencial, ya que las posibles combinaciones de construir la matriz \mathcal{H}_i está dada de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_i = \left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & \square & \dots & \square \\ \square & \ddots & \square & \vdots \\ \vdots & \square & \ddots & \square \\ \square & \dots & \square & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} N-1 \\ N-1 \\ \vdots \\ N-1 \end{array} \\ \end{array} \right\} N \text{ veces} \quad (3.3.22)$$

por lo tanto, conforme el número de nodos aumenta en la red, entonces consideramos que existen

$$N_{\mathcal{H}} = (N - 1)^N \quad (3.3.23)$$

posibles mapeos de sincronización generalizada.

Considerando que $x(t) = [x_1(t)^\top, x_2(t)^\top, \dots, x_N(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{Nn}$ son las variables de estado de todos los nodos de una red, la condición para lograr la sincronización generalizada puede escribirse $N_{\mathcal{H}}$ formas posibles, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \mathcal{H}_k x(t)\| = 0, \quad \text{para algún } k = 1, 2, \dots, N_{\mathcal{H}} \quad (3.3.24)$$

donde $N_{\mathcal{H}}$ es el número de posibles relaciones funcionales.

3.3.2. Ejemplo: Sincronización generalizada en una red bidireccional de células β

A manera de ilustración consideramos una red de dos nodos mutuamente acoplados, como los mostrados en la Figura 3.1. Para este ejemplo, utilizamos el modelo de Pernarowski para una célula β (2.2.24) en cada uno de los nodos, y suponemos que las células se acoplan solo eléctricamente, a través de las conexiones de hendidura, es decir, solo por la variable x_{i1} de cada nodo. De modo que, la ecuación de estados para nuestra red dinámica controlada de dos células β está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}(x_{i1}(t)) - x_{i2}(t) - x_{i3}(t) \\ w_\infty(x_{i1}(t)) - x_{i2}(t) \\ \varepsilon_\beta(h(x_{i1}(t)) - x_{i4}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} x_{j1}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{bmatrix} \quad (3.3.25)$$

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \Gamma_j(t) + u_i, \quad i = 1, 2$$

donde $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), x_{i3}(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del i -ésimo nodo y el resto de las variables son descritas como en (2.2.27); además, $u_i = [u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}]^\top \in \mathbb{R}^3$ son los controladores locales a diseñar. Para este ejemplo consideramos las siguientes transformaciones

de coordenadas $w_1(t) = \mathcal{T}_1 x_1(t)$ y $w_2(t) = \mathcal{T}_2 x_2(t)$, donde \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 se definen como:

$$\mathcal{T}_1 = \text{Diag}(-1, -1, -1) \text{ y } \mathcal{T}_2 = \text{Diag}(2, 2, 2), \quad (3.3.26)$$

con sus respectivas transformaciones inversas $\mathcal{T}_1^{-1} = \mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2^{-1} = \text{Diag}(1/2, 1/2, 1/2)$. Entonces, la red controlada en las variables transformadas está dada por (3.3.2):

$$\dot{w}_i(t) = F_i(w_i(t)) + g \mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N \ell_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k w_k(t) + v_i, \text{ para } i = 1, 2,$$

con $w_1(t) = [-x_{11}(t), -x_{12}(t), -x_{13}(t)]^\top \in \mathbb{R}^3$ y $w_2(t) = [2x_{21}(t), 2x_{22}(t), 2x_{23}(t)]^\top \in \mathbb{R}^3$ y $v_i = H_i^{-1} u_i \in \mathbb{R}^3$ para $i = 1, 2$. Utilizando el Teorema 3.3.1 es posible encontrar la ley de control v_i tal que los nodos en las variables transformadas logran la sincronización completa, la cual está dada por

$$v_i = -g \mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^N a_{ik} \Gamma \mathcal{T}_k w_s(t) + \kappa e_i(t), \quad i = 1, 2,$$

con $\kappa > 1.95$.

En la Figura 3.3 presentamos los errores de sincronización en las variables transformadas, donde a partir de un tiempo de simulación de $t = 400$ se aplican los controladores locales v_i . En dicha figura es posible apreciar como los errores entre las variables transformadas tienden a cero, con lo que comprobamos numéricamente que la red dinámica controlada (3.3.2) logra la sincronización completa en las variables transformadas. Mientras que, en la Figura 3.4 presentamos los errores de sincronización en las variables originales, en dicha figura es posible apreciar cómo estos errores no tienden a cero, por lo que no existe una sincronización idéntica o completa en las variables originales. Sin embargo, si calculamos los errores de sincronización generalizados, $x_1(t) - \mathcal{T}_{12} x_2(t)$ y $x_2(t) - \mathcal{T}_{21} x_1(t)$ es posible apreciar que estos tienden a cero, como mostramos en la Figura 3.5. Por lo tanto, podemos inferir que las soluciones del nodo 2 siguen a través del mapeo \mathcal{T}_{12} a las soluciones del nodo 1; mientras que las soluciones del nodo 1 siguen a través del mapeo \mathcal{T}_{21} a las soluciones del nodo 2. En otras palabras, el nodo 1 es maestro y esclavo del nodo 2, y análogamente el nodo 2 es maestro y esclavo del nodo 1.

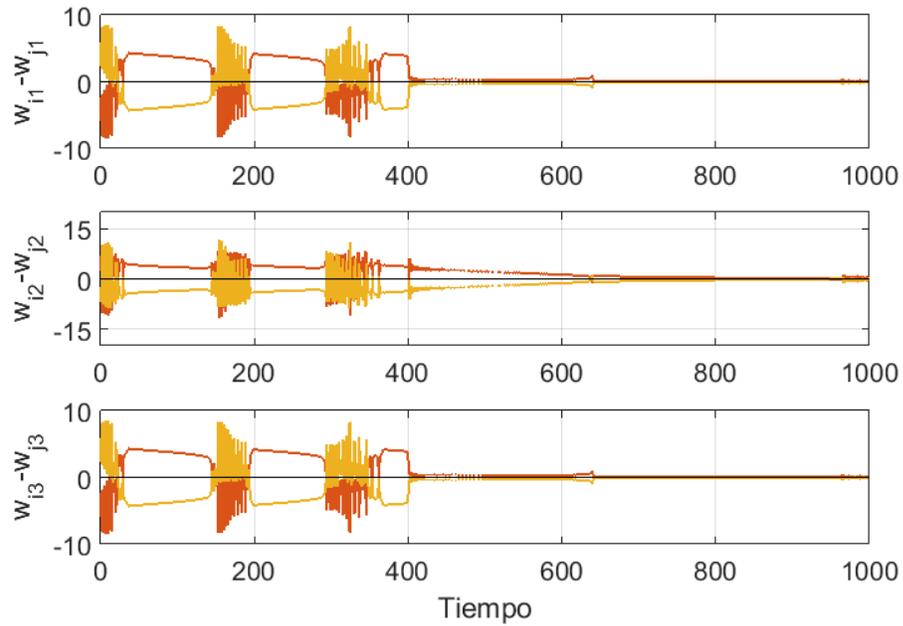


Figura 3.3: Errores de sincronización para dos células β mutuamente acopladas en variables transformadas.

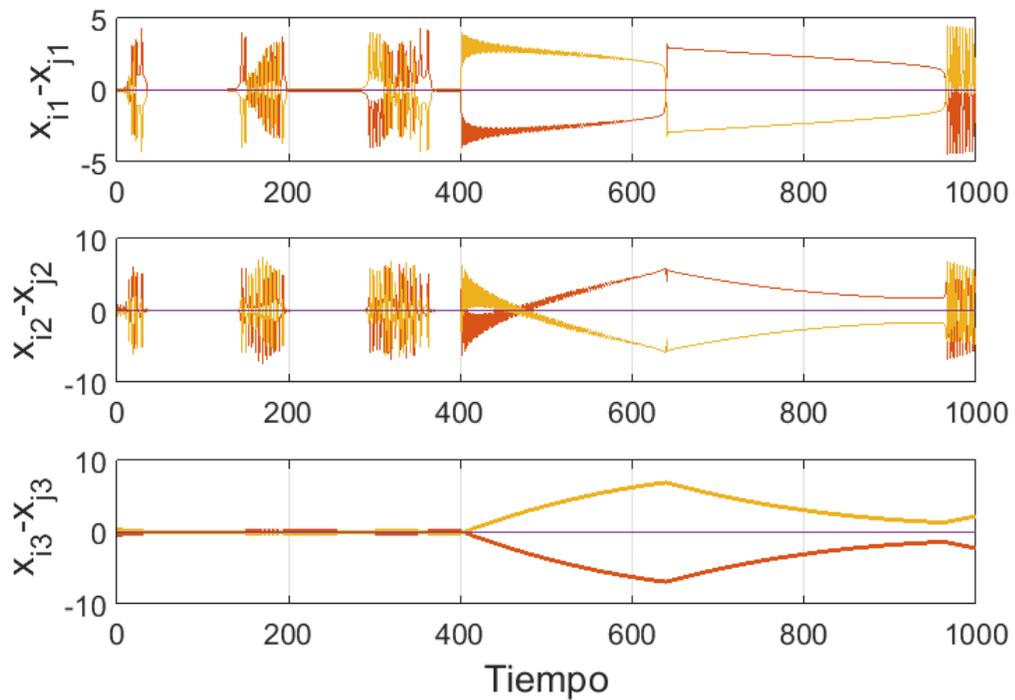


Figura 3.4: Errores de sincronización para dos células β mutuamente acopladas en variables originales.

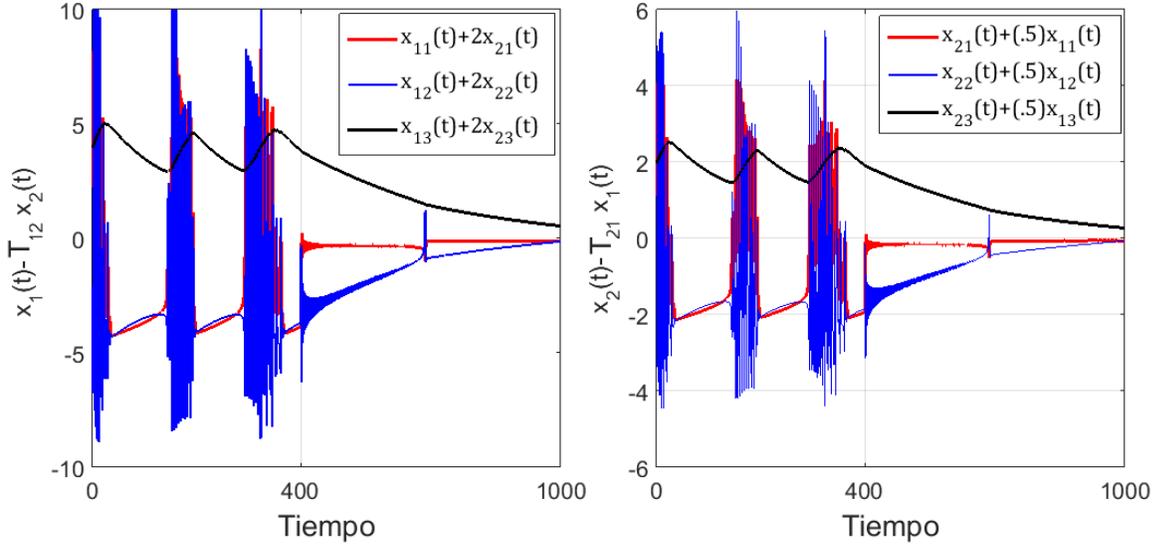


Figura 3.5: Error de sincronización generalizada para dos células β .

3.3.3. Ejemplo: Sincronización generalizada en una red bidireccional de osciladores caóticos idénticos.

Consideramos una red de tres nodos conectados por el grafo mostrado en la Figura 3.2. Utilizamos un oscilador de Lorenz [40] en cada uno de los nodos, de modo que el vector de estado del i -ésimo nodo es: $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), x_{i3}(t)]^\top \in \mathbb{R}^3$. Además, consideraremos que los nodos solamente se acoplan a través de la primer variable de estado $x_{i1}(t)$. Por tanto, la red dinámica controlada puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10(x_{i2} - x_{i1}) \\ 28x_{i1} - x_{i1}x_{i3} - x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} - \frac{8}{3}x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \sum_{j=1}^N \ell_{ij} x_{j1}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{bmatrix} \quad (3.3.27)$$

donde $u_i = [u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}]^\top \in \mathbb{R}^3$ son los controladores locales a diseñar, y el resto de las variables son descritas como en (3.2.1).

Luego, consideramos las siguientes transformaciones de coordenadas \mathcal{T}_i para cada uno

de los nodos de la red (3.3.27)

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y sus respectivas inversas

$$\mathcal{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

De modo que, utilizando estas transformaciones la red de nodos idénticos (3.3.27) se transforma a una red de nodos distintos, dada por

$$\dot{w}_i(t) = F_i(w_i(t)) + g\mathcal{T}_i^{-1} \sum_{k=1}^3 \ell_{ik}\Gamma \mathcal{T}_k w_k(t) + v_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Utilizando el Teorema 3.3.1 es posible encontrar la ley de control v_i tal que los nodos de la red en variables transformadas logran la sincronización completa; para la red presentada en este ejemplo consideramos una fuerza de acoplamiento $g = 2.67$ y un valor de $\kappa = 7.9$.

En la Figura 3.6 mostramos los errores de sincronización para la red en variables transformadas, donde el controlador local se aplica después de un tiempo de 50 segundos, podemos apreciar como los errores de sincronización entre los estados tienden a cero, y como consecuencia podemos afirmar que la red en variables transformadas logra la sincronización idéntica.

Por otra parte, en la Figura 3.7 se presenta la simulación numérica de la red dinámica controlada en las variables originales (3.3.27). En esta simulación se aplican los controladores locales en variables originales a partir del instante $t = 50$. Además, es posible apreciar que las soluciones de los nodos parecen estar no sincronizadas y no es posible observar un patrón claro entre ellas. De hecho, si calculamos los errores de sincronización entre estas variables originales (ver Figura 3.8) es posible observar como los errores no tienden a cero, por tanto, los nodos no están sincronizados de forma idéntica en las variables originales.

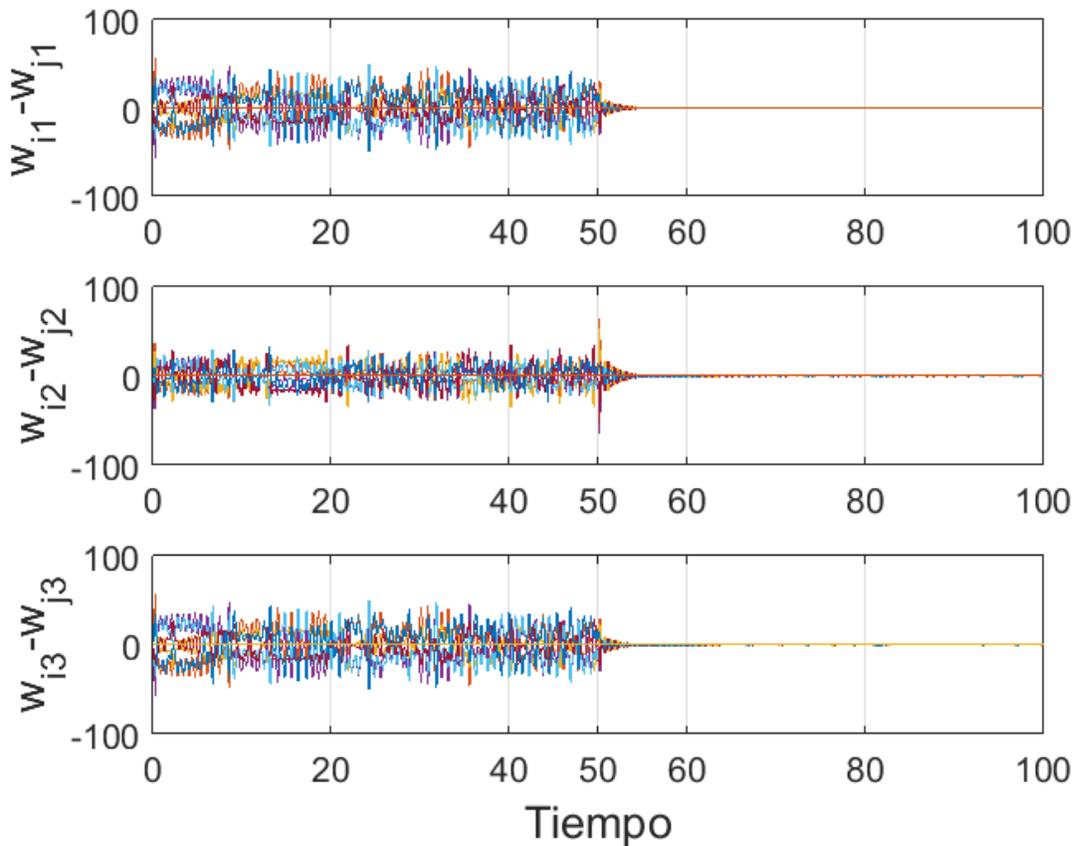


Figura 3.6: Errores de sincronización de la red en las variables transformadas w_i .

En cambio, al calcular el error de sincronización generalizado, $E_k = x(t) - \mathcal{H}_k x(t)$ para $k = 1, 2, \dots, 8$, podemos verificar numéricamente que los errores de sincronización generalizada tienden a cero, obteniendo así una comprobación numérica de que es posible lograr la sincronización generalizada en la red. Por ejemplo, en la Figura 3.9 presentamos los errores de sincronización generalizados para el mapeo \mathcal{H}_1 , donde de color rojo presentamos los errores de sincronización generalizada entre los primeros estados; de color azul se presentan los errores de sincronización generalizada entre las segundas variables de estados; mientras que de negro se presentan los errores entre las terceras variables de estado. Siguiendo la construcción del mapeo \mathcal{H}_1 se puede inferir que los nodos de la red dinámica controlada logran la sincronización generalizada en el siguiente sentido: el nodo uno es maestro y esclavo del nodo 2, y mientras que el nodo 3 también es maestro del nodo 1. Esto se puede verificar con los errores de sincronización generalizada presentados en la Figura 3.9, donde se

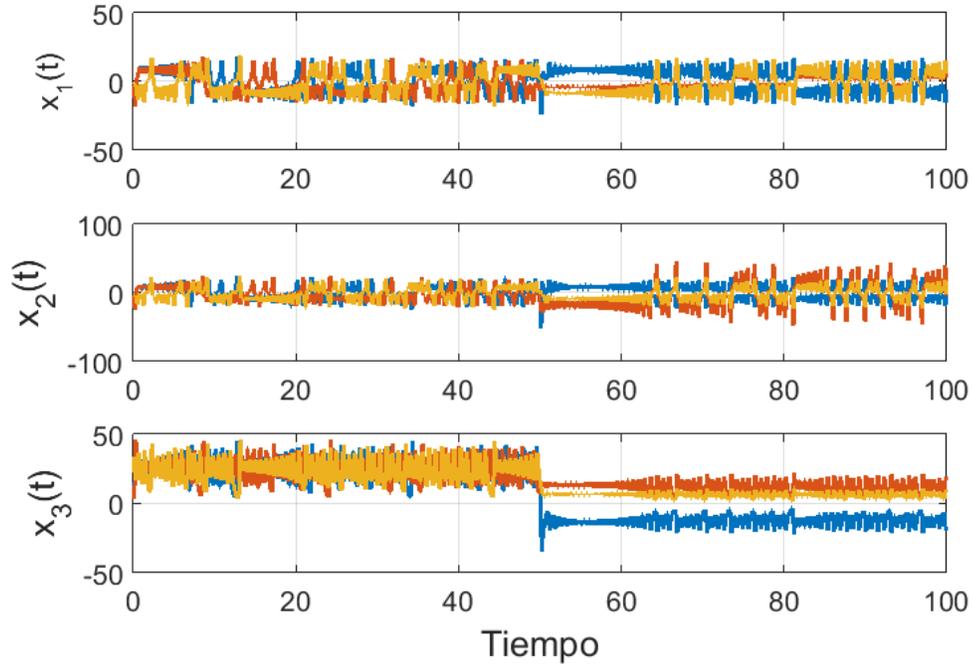


Figura 3.7: Simulación numérica de la red controlada (3.3.27) en las variables originales.

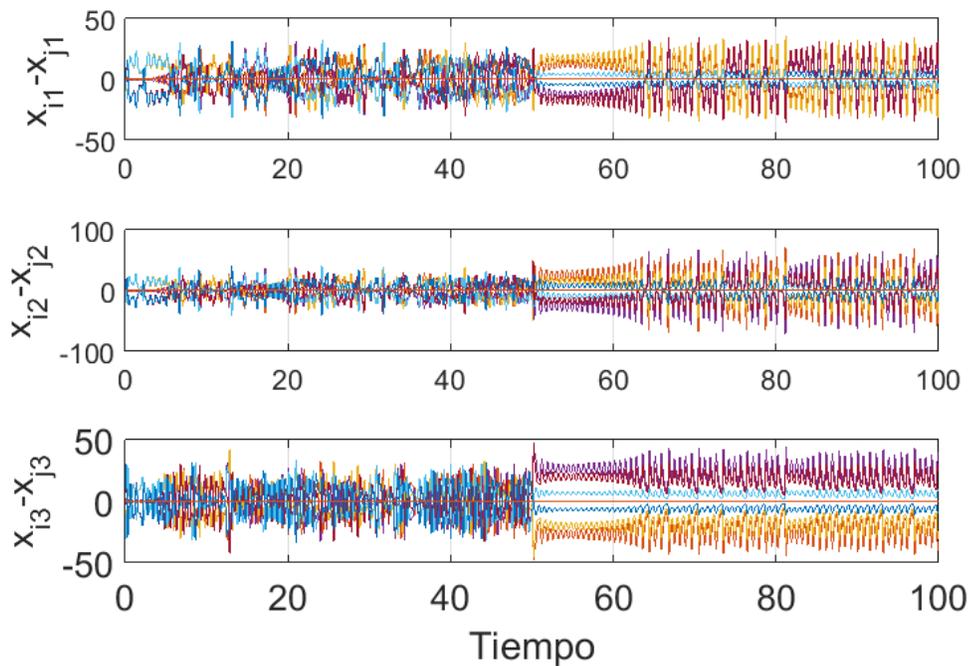


Figura 3.8: Errores entre las variables originales de la red dinámica controlada (3.3.27).

ha calculado $x_1(t) - \mathcal{T}_{12}x_2(t)$, $x_2(t) - \mathcal{T}_{21}x_1(t)$ y $x_3(t) - \mathcal{T}_{31}x_1(t)$. Además, en las siguientes figuras presentamos los errores de sincronización generalizados para cada uno de los mapeos

de sincronización \mathcal{H}_k generados en la sección anterior.

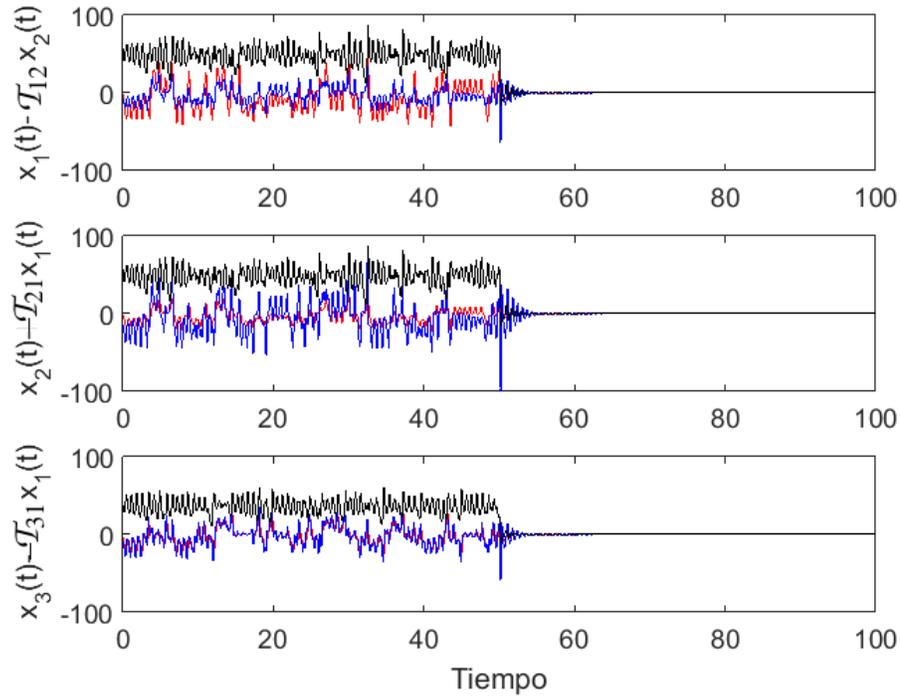


Figura 3.9: Errores de sincronización generalizada $E_1 = x(t) - \mathcal{H}_1 x(t)$

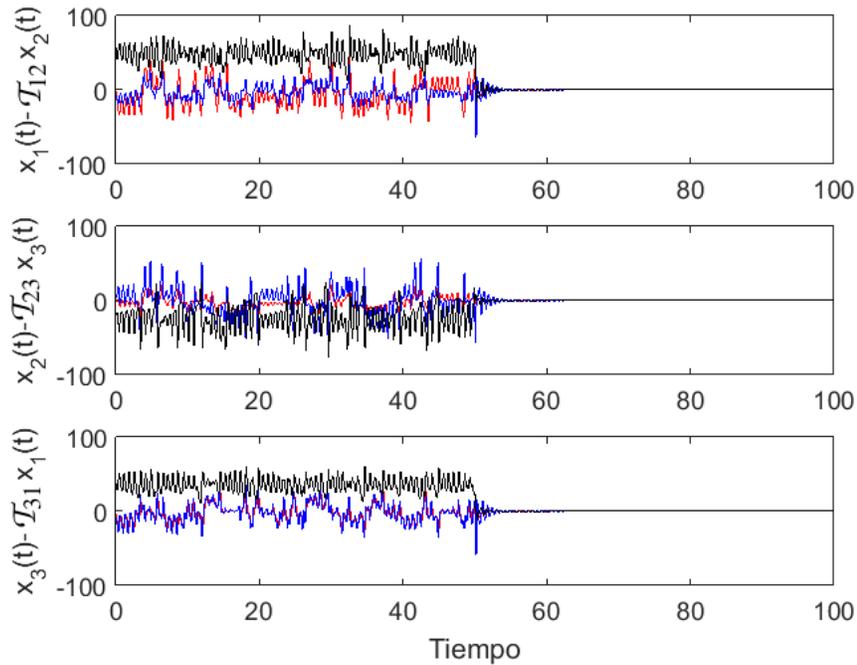


Figura 3.10: Errores de sincronización generalizada $E_2 = x(t) - \mathcal{H}_2 x(t)$.

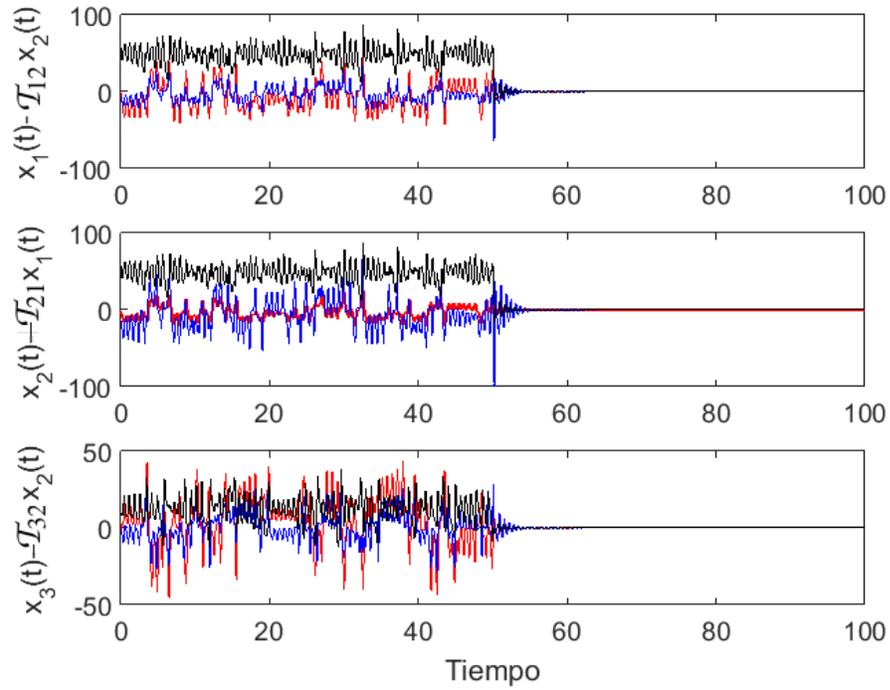


Figura 3.11: Errores de sincronización generalizada $E_3 = x(t) - \mathcal{H}_3 x(t)$.

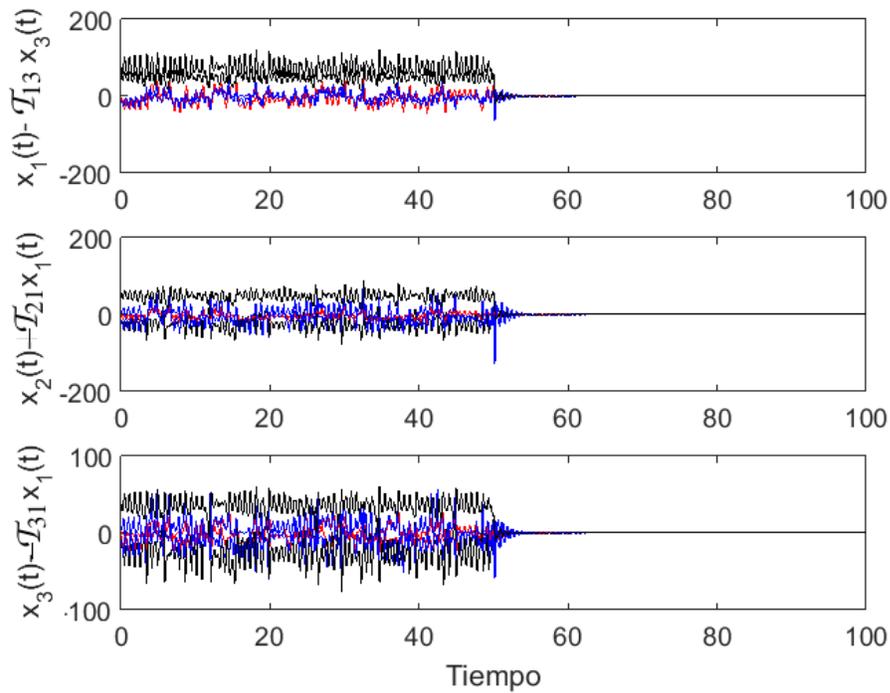


Figura 3.12: Errores de sincronización generalizada $E_4 = x(t) - \mathcal{H}_4 x(t)$.

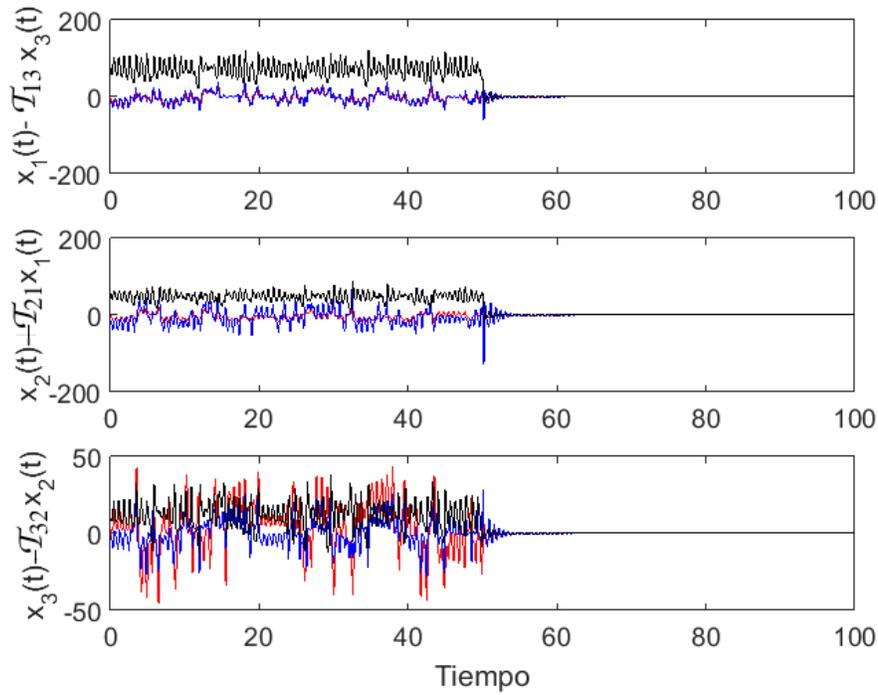


Figura 3.13: Errores de sincronización generalizada $E_5 = x(t) - \mathcal{H}_5 x(t)$

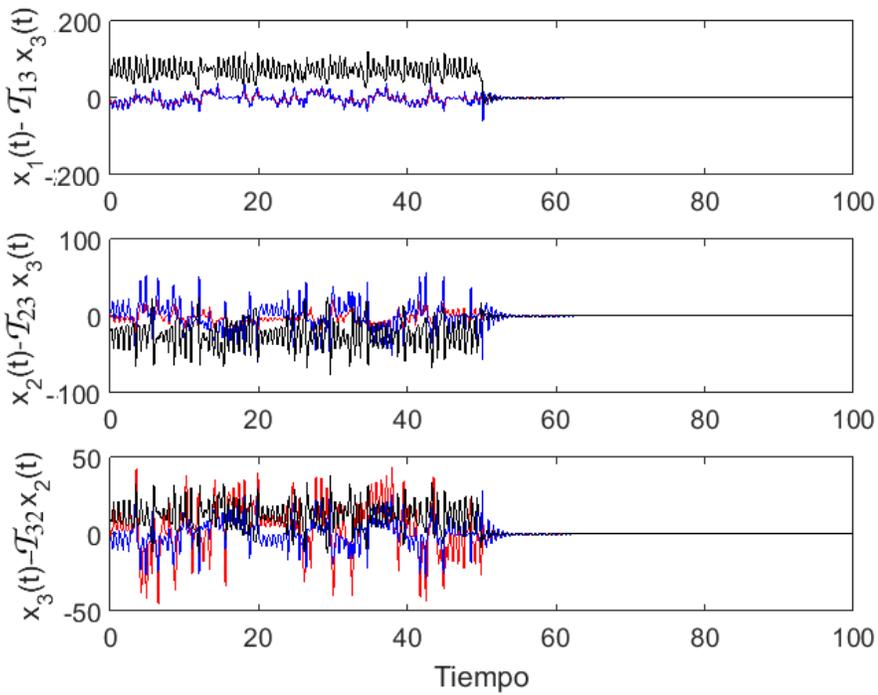


Figura 3.14: Errores de sincronización generalizada $E_6 = x(t) - \mathcal{H}_6 x(t)$

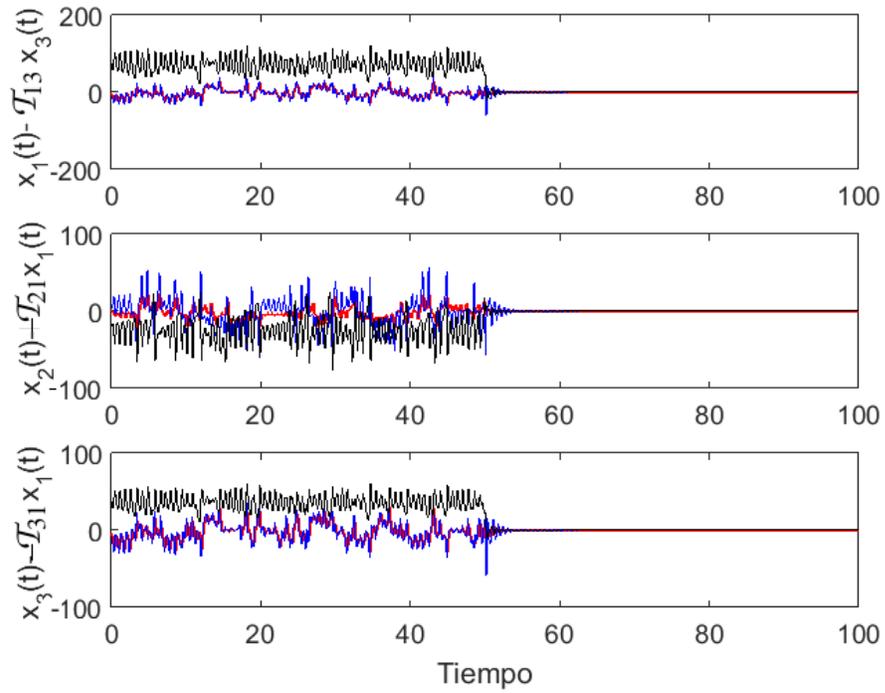


Figura 3.15: Errores de sincronización generalizada $E_7 = x(t) - \mathcal{H}_7 x(t)$

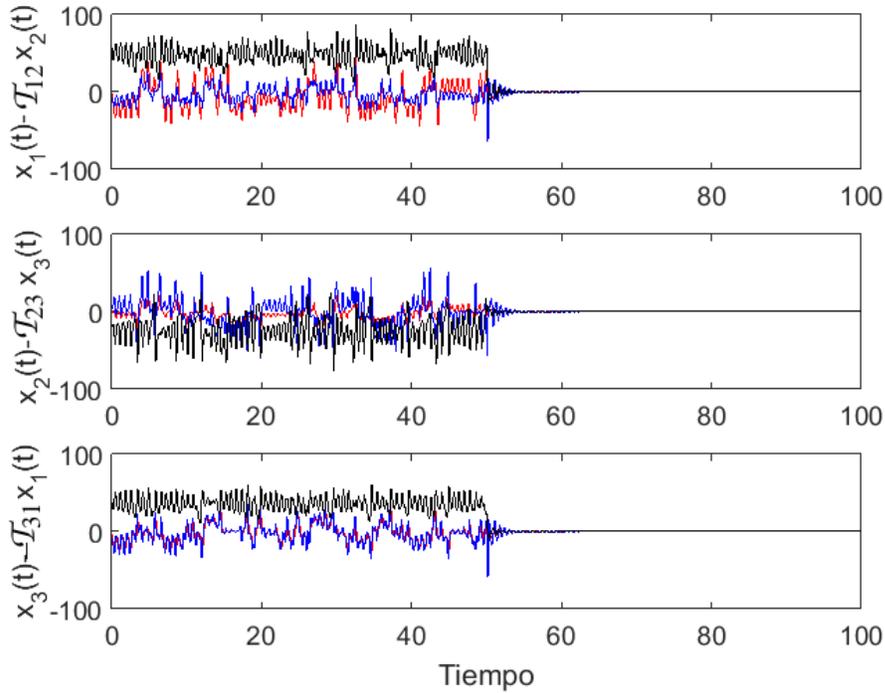


Figura 3.16: Errores de sincronización generalizada $E_8 = x(t) - \mathcal{H}_8 x(t)$

En este capítulo abordamos el problema de sincronización generalizada para una red de nodos idénticos con un acoplamiento lineal, simétrico y difusivo, donde diseñamos los controladores para imponer el mapeo de sincronización. Por otra parte, en el siguiente capítulo abordamos el surgimiento de la sincronización por clústeres para una red de redes, formada por nodos no idénticos y con diferentes formas de interconexión entre grupos.

CAPÍTULO 4

Sincronización por clúster para una red de redes

En este capítulo presentamos un modelo de red de redes con estructura de comunidades. En este modelo consideramos que existen diferentes niveles de conexión. En el primer nivel, los nodos adyacentes se encuentran fuertemente acoplados y se modelan como una unidad compacta donde las conexiones son uniformes y no dirigidas. En el segundo nivel, suponemos que las conexiones se producen entre unidades compactas con comportamientos dinámicos similares formando comunidades y modeladas como una red con interacciones con peso y dirección. Mientras que el tercer nivel de conexión, establece la interconexión de las comunidades donde se considera que las conexiones son con peso y dirección, obteniendo con esto el modelo de la red. Este modelo es una generalización del modelo de red dinámica presentado en los capítulos anteriores ya que se incluye la diversidad dinámica y diversidad en los enlaces. Además, en este capítulo realizamos un análisis de estabilidad del estado sincronizado utilizando un enfoque de Lyapounov para mostrar que es posible lograr la sincronización por clústeres en este modelo de red de redes, obteniendo algunas restricciones bastantes sencillas para la estructura. Los resultados presentados en este capítulo están publicados en [92].

4.1. De red dinámica a redes de redes dinámicas

Muchos sistemas complejos relacionados con redes de la vida real no pueden ser representados como una red dinámica; ya que algunos sistemas naturales o artificiales, como redes biológicas o Internet tiene la tendencia de organizarse en distintos grupos o comunidades, donde la operación adecuada del sistema completo depende la colaboración de distintos subgrupos conectados entre sí [20, 21]. De modo que este tipo de sistemas pueden ser modelados como un conjunto de redes interconectadas, es decir, como una red de redes.

En general, una red de redes está compuesta por un gran conjunto de nodos conectados entre sí, donde se pueden identificar distintos subconjuntos de nodos, también conocidos como redes, clústeres, comunidades o grupos, que comparten alguna característica dinámica o topológica en común. Al estudiar este tipo de sistemas complejos, las investigaciones se pueden dividir en dos líneas principales. Por un lado, se investigan las propiedades estructurales o espectrales de la red de redes que representa al sistema complejo, donde el objetivo principal es caracterizar una “estructura de la comunidades” dentro del sistema, es decir, se busca identificar grupos de nodos que estén estrechamente relacionados entre sí [9, 12, 16]. En esta misma línea de investigación, se pueden incluir el estudio de diferentes propiedades estructurales, como la transitividad, la distribución de grados, la existencia de motifs y las propiedades espectrales de sus matrices laplacianas [93, 94, 95].

Por otra parte, la segunda línea de investigación se enfoca en las propiedades dinámicas de cada grupo de nodos y el comportamiento colectivo de la red de redes. En este contexto, se considera que cada subred está conformada por un conjunto de nodos con propiedades dinámicas idénticas o similares, mientras que los nodos que pertenecen a distintas redes tienen dinámicas diferentes [52, 96]. Para este caso, la principal preocupación es describir la naturaleza del comportamiento colectivo, tal como sincronización controlada [97], sincronización generalizada [71], sincronización externa [49], sincronización completa [96, 98] o sincronización por clústeres [52, 99, 100].

En este capítulo nos enfocamos en el surgimiento de la sincronización por clústeres para una red de redes, donde se considera que los nodos dentro de cada subred tienden a sincronizarse entre sí, pero no existe un patrón de sincronización entre nodos de diferentes redes.

Este tipo de sincronización ha sido investigada por diversos autores. Por ejemplo, L. Chen analizó el surgimiento de la sincronización por clústeres para una red formada por dos redes de distintos tamaños [51]. Mientras que Huang *et. al* [99] investigaron el mismo fenómeno de sincronización para una red de redes con la misma estructura, donde además consideran que los acoplamientos son lineales y la estructuras regulares. Una extensión de este trabajo se propone en [101] donde consideran redes de redes con acoplamientos negativos y no simétricos. Mientras que en [53] investigan la sincronización por clústeres en una red de redes con acoplamiento no lineal.

Considerando la complejidad estructural de las redes reales, la suposición de que todos los nodos de la red están acoplados de la misma manera es difícil de justificar. Por esta razón, se propone un modelo que señala la existencia de diferentes tipos de acoplamiento en distintos niveles de organización. Por tanto, nuestra propuesta para el modelo de red de redes considera que existen tres niveles de organización, caracterizados por distintas formas de conexión para cada nivel. En el primer nivel, se considera que las conexiones son estrechas, es decir, que los nodos adyacentes se acoplan de manera bidireccional y uniforme, en estructuras regulares, los cuales denominamos “unidades compactas (UC)”. Además, suponemos que dentro de cada unidad compacta todos los nodos son idénticos y que tienen exactamente la misma estructura de red, donde la estabilidad de su dinámica colectiva se puede determinar fácilmente usando resultados previos como el criterio λ_2 [40, 29]. En el segundo nivel de la organización, las unidades compactas que comparten características dinámicas similares se unen en comunidades, donde la conexión dentro de cada comunidad son bidireccionales y con pesos. Además, bajo el supuesto que cada unidad compacta dentro de la comunidad está sincronizada de manera idéntica, y su comportamiento colectivo es el de un nodo aislado, entonces el comportamiento colectivo de la comunidad puede analizarse como una red ponderada [33]. Finalmente, el tercer nivel de organización forma toda la red, y se considera la conexión entre diferentes comunidades, las cuales están conectadas en un esquema de acoplamiento unidireccional y con conexión con pesos. En este nivel de organización se investiga el surgimiento de la sincronización por clústeres, es decir, una sincronización idéntica dentro de cada comunidad, mientras que la dinámica entre comunidades permanece sin sincronizar.

4.2. Modelo propuesto para una red de redes dinámica

Consideramos una red de N nodos agrupados en M comunidades, donde cada una está formada por N_k subredes denominadas unidades compactas. Para hacer una descripción más clara iniciamos la descripción con el primer nivel, es decir, se considera que cada unidad compacta está formada por r nodos idénticos, donde cada nodo es un sistema dinámico continuo en el tiempo n -dimensional, y además todos los nodos se conectan de manera lineal y difusiva a través de enlaces bidireccionales. Por tanto, las ecuaciones de estado para cada unidad compacta dentro de una comunidad están dada por:

$$\dot{\Psi}_i(t) = f(\Psi_i(t)) + g \sum_{j=1}^r a_{ij} \Gamma \Psi_j(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, r \quad (4.2.1)$$

donde $\Psi_i(t) = [\Psi_{i1}(t), \Psi_{i2}(t), \dots, \Psi_{in}(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado del i -ésimo nodo; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal, la cual describe la dinámica de un nodo aislado. El segundo término a la derecha en (4.2.1) describe el acoplamiento del i -ésimo nodo con sus vecinos, donde $g > 0$ denota la fuerza de acoplamiento uniforme para la unidad compacta; $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal de ceros y unos que describe el acoplamiento interno entre los nodos de la unidad compacta, mientras que el acoplamiento externo de la unidad lo describe la matriz $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, la cual se construye como sigue: si existe una conexión entre los nodos i y j (con $i \neq j$), entonces $a_{ij} = a_{ji} = 1$, en otro caso $a_{ij} = a_{ji} = 0$. Además, para satisfacer la condición de acoplamiento difusivo, los elementos diagonales de A están dados por

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^r a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^r a_{ji}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.2.2)$$

Con esto suponemos que cada unidad compacta está conectada, en el sentido que no tiene nodos aislados. Además, la matriz de acoplamiento A es simétrica e irreducible, y sus valores propios son reales no positivos, los cuales se pueden ordenar de la siguiente manera [40]:

$$0 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r. \quad (4.2.3)$$

Ahora, definimos $x(t) = [\psi_1(t)^\top, \psi_2(t)^\top, \dots, \psi_r(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{nr}$ como la variable de estado para la unidad compacta, y en notación corta la ecuación (4.2.1) se reescribe como

$$\dot{x}(t) = F(x(t), g, \Gamma, A) \quad (4.2.4)$$

donde $F : \mathbb{R}^{nr} \rightarrow \mathbb{R}^{nr}$ describe la dinámica dentro de la unidad compacta.

Para simplificar el análisis de estabilidad para las unidades compactas y la red de redes, se consideran las siguientes suposiciones:

- S1.** Todas las unidades compactas tienen la misma estructura de conexión y el mismo número de nodos.
- S2.** Dentro de cada unidad compacta, todos los nodos tienen las mismas descripciones dinámicas y solo difieren en sus condiciones iniciales.

En el segundo nivel de organización, las unidades compactas se agrupan en una comunidad de la siguiente manera: si dos unidades compactas tienen la misma descripción dinámica, entonces pertenecen a la misma comunidad, de lo contrario deben estar en comunidades diferentes. La estructura de conexión de la k -ésima comunidad se toma como una red de N_k unidades compactas cuyas conexiones tienen pesos. Por lo tanto, la ecuación de estado de la k -ésima comunidad dentro de la red está dada por

$$\dot{x}_i^{[k]}(t) = F^{[k]}(x_i^{[k]}(t), g^{[k]}, \Gamma^{[k]}, A^{[k]}) + \sum_{j=1}^{N_k} c_{ij}^{[k]} \hat{\Gamma}_{ij}^{[k]} x_j^{[k]}(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, N_k \quad (4.2.5)$$

donde $x_i^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^{nr}$ es la variable de estado de la i -ésima unidad compacta dentro de la k -ésima comunidad. Mientras que la conexión entre los estados de las i -ésima y j -ésima unidades compactas dentro de la k -ésima comunidad son descritos por una matriz diagonal de ceros y unos descrita por

$$\hat{\Gamma}_{ij}^{[k]} = \text{diag}(\gamma_1^\top, \gamma_2^\top, \dots, \gamma_r^\top) \in \mathbb{R}^{nr \times nr} \quad (4.2.6)$$

donde una entrada no cero en los vectores $\gamma_p = [\gamma_{q+(p-1)}] \in \mathbb{R}^n$ ($q = 1, 2, \dots, n, p = 1, 2, \dots, r$) indica que el q -ésimo estado del p -ésimo nodo de la i -ésima unidad compacta está acoplado

al estado q -ésimo estado del p -ésimo nodo de la j -ésima unidad compacta, ambas dentro de la k -ésima comunidad. Además, la matriz $C^{[k]} = \{c_{ij}^{[k]}\} \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$ describe cuales son las unidades compactas conectas y se construye de la siguiente manera: si existe una conexión ente el i -ésimo y el j -ésimo unidad compacta con $i \neq j$, entonces $c_{ij}^{[k]} = c_{ji}^{[k]} > 0$, en otro caso $c_{ij}^{[k]} = c_{ji}^{[k]} = 0$, y los elementos de la diagonal principal están dados por

$$c_{ii}^{[k]} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_k} c_{ij}^{[k]} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_k} c_{ji}^{[k]}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N_k. \quad (4.2.7)$$

Como tal la matriz de acoplamiento $C^{[k]}$ tiene una suma cero por filas y columnas, es decir, el acoplamiento entre las unidades compactas es difusivo, por tanto, los valores propios de $C^{[k]}$ se puede ordenar como en (4.2.3) [40].

Sea $\chi^{[k]}(t) = [x_1^{[k]}(t)^\top, x_2^{[k]}(t)^\top, \dots, x_{N_k}^{[k]}(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{nrN_k}$ las variables de estado de la k -ésima comunidad de la red. Entonces, la ecuación (4.2.5) puede ser expresada como

$$\dot{\chi}^{[k]}(t) = \mathcal{F}^{[k]}(\chi^{[k]}(t), g^{[k]}, \Gamma^{[k]}, A^{[k]}, \hat{\Gamma}, C^{[k]}) \quad (4.2.8)$$

donde $\mathcal{F}^{[k]} : \mathbb{R}^{nrN_k} \rightarrow \mathbb{R}^{rnN_k}$ describe la dinámica de la k -ésima comunidad. Por simplicidad, en el resto del capítulo utilizamos la siguiente notación abreviada $\mathcal{F}^{[k]}(\chi^{[k]}(t))$ para la dinámica de la k -ésima comunidad.

A manera de ilustración, en la Figura 4.1 se presenta la estructura de una comunidad formada por $N_1 = 10$ unidades compactas, cada una representada por un octágono de color gris; las líneas sesgadas de color azul representan las conexiones entre unidades compactas. A su vez cada unidad compacta tiene $r = 13$ nodos, representados como puntos y las líneas solidas representan la conexión uniforme entre los nodos.

En el tercer nivel, toda la red de redes se construye como una conexión dirigida y con pesos entre comunidades. Entonces, se tiene que la siguiente ecuación de estado, representa la dinámica de una comunidad dentro de la red de subredes:

$$\dot{\chi}^{[i]}(t) = \mathcal{F}^{[i]}(\chi^{[i]}(t)) + \sum_{j=1}^M D_{ij} \chi^{[j]}(t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.2.9)$$

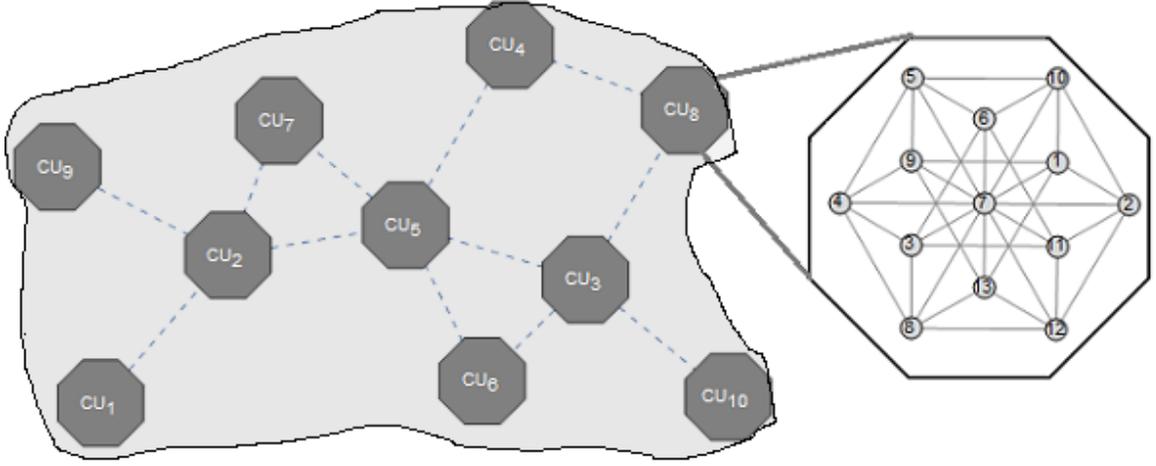


Figura 4.1: Representación esquemática de un comunidad con 10 unidades compactas cada una de ella con trece nodos ($M = 1$, $N_1 = 10$ y $r = 13$) [92].

donde $D_{ij} \in \mathbb{R}^{nrN_i \times nrN_j}$ es la matriz de acoplamiento entre la i -ésima y la j -ésima comunidad dentro de la red. En forma vectorial, la dinámica de la red completa puede escribirse como:

$$\dot{\chi}(t) = \mathcal{F}(\chi(t)) + D\chi(t) \quad (4.2.10)$$

donde las variables de estado de la red completa son $\chi(t) = [\chi^{[1]}(t)^\top, \dots, \chi^{[M]}(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{nN}$; y $\mathcal{F}(\chi(t)) = [\mathcal{F}^{[1]}(\chi^{[1]}(t))^\top, \dots, \mathcal{F}^{[M]}(\chi^{[M]}(t))^\top]^\top : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ describen la dinámica de una comunidad aislada. Mientras que las conexiones entre comunidades son descritas por $D = \{D_{ij}\} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$.

Observemos que los N nodos de la red son divididos en M comunidades cada una con N_k unidades compactas, las cuales están formadas por r nodos. En otras palabras, el número total de nodos en la red de subredes es

$$N = r \sum_{k=1}^M N_k, \text{ con } N_k \geq 1, \forall k. \quad (4.2.11)$$

Adicionalmente, dado que cada nodo es un sistema dinámico n -dimensional, la matriz de acoplamiento entre la i -ésima y j -ésima comunidad son de dimensión $nrN_i \times nrN_j$, la cual en general, es una matriz rectangular. Mientras que los bloques en la diagonal principal de D , es decir, $D_{kk} \in \mathbb{R}^{nrN_k \times nrN_k}$, $k = 1, \dots, M$, son matrices cuadradas. En consecuencia con estas consideraciones, la matriz de acoplamiento para toda la red de subredes, D , es una matriz

cuadrada pero no simétrica.

Como se mencionó anteriormente en **S1**, todas las unidades compactas tiene la misma dimensión, es decir, el mismo número de nodos. Entonces, la matriz de acoplamiento entre las diferentes comunidades puede reescribirse como

$$D_{ij} = \mathcal{D}_{ij} \otimes \hat{\Gamma} \quad (4.2.12)$$

donde \otimes es el producto de Kronecker; $\hat{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de acoplamiento interno entre unidades compactas, definida en (4.2.6); las entradas de $\mathcal{D}_{ij} = \{d_{kl}^{[ij]}\} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_j}$, son tal que $d_{kl}^{[ij]} > 0$ indican que la k -ésima unidad compacta de la i -ésima comunidad está acoplada por la l -ésima unidad compacta de la j -ésima comunidad, en otro caso $d_{kl}^{[ij]} = 0$.

Observemos que en nuestro modelo se supone que si dos unidades compactas están conectadas, entonces sus estados están acoplados de la misma manera y por los mismos estados. Un ejemplo de la estructura de para una red de redes se muestra en la Figura 4.2, donde existen dos comunidades: una formada por cinco unidades compactas, las cuales están representadas por octágonos; mientras que la segunda comunidad está formada por cuatro unidades compactas, las cuales están representadas por pentágonos. La línea solida describe las conexiones entre unidades compactas de la misma comunidad, y las flechas representan el acoplamiento con dirección y pesos entre unidades compactas de diferentes comunidades.

En la siguiente sección, se presenta las condiciones para lograr la sincronización por clúster en el modelo de red de redes (4.2.9).

4.3. Análisis de sincronización por clúster

De manera similar a la forma en que se presentó el modelo para una red de redes, en esta sección se presenta el análisis de sincronización por clústeres. Consideremos que cada unidad compacta es una red de sistemas dinámicos idénticos acoplados de manera uniforme, lineal y difusiva, cuya descripción de la dinámica está dada por (4.2.1). El objetivo de sincronización en este nivel es lograr la sincronización completa de sus nodos, es decir, que los nodos de

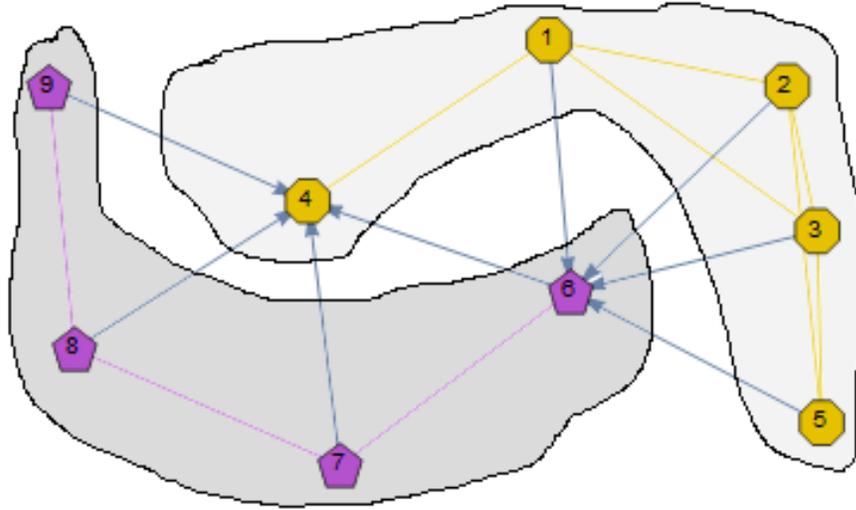


Figura 4.2: Representación esquemática de una red de redes con dos comunidades. ($M = 2$, $N_1 = 4$, y $N_2 = 5$) [92].

cada unidad compacta se muevan al unísono, esto es:

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \cdots = \psi_r(t) = s(t), \quad (4.3.1)$$

es decir, para cualquier condición inicial cercana a la solución de sincronización $s(t) \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi_i(t) - s(t)\| = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, r, \quad (4.3.2)$$

donde $s(t)$ es la solución de un nodo aislado que satisface $\dot{s}(t) = f(s(t))$. Existen diferentes métodos para establecer la estabilidad de $s(t)$ como solución de (4.2.1). Por ejemplo, en [40] las dinámicas de error se linealizan alrededor de $s(t)$ y utilizando la diagonalización de la matriz de acoplamiento $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$ en términos de sus valores propios, se obtiene el criterio de λ_2 para la estabilidad de la solución de sincronización. Realizando un análisis similar al presentado en la sección 2.2.1 se obtiene la sincronización completa de la unidad compacta.

Proposición 4.3.1. *Una unidad compacta aislada de la forma (4.2.1) logra la sincronización completa si la fuerza de acoplamiento g , satisface la siguiente condición*

$$g \geq \left| \frac{\alpha}{\lambda_2} \right|, \quad (4.3.3)$$

donde λ_2 es el valor propio más grande distinto de cero de la matriz A , y $\alpha < 0$ es una constante que satisface la desigualdad de Lyapunov

$$[Df(s(t)) + \alpha\Gamma]^\top P + P[Df(s(t)) + \alpha\Gamma] \leq -Q \quad (4.3.4)$$

donde $Df(s(t))$ es la matriz Jacobiana de la dinámica del nodo evaluada en $s(t)$, $P = P^\top > 0$ y $Q = Q^\top > 0$ son matrices positivas definidas [40].

Para el resto el capítulo se considera que lo siguiente se satisface:

S3. La fuerza de acoplamiento uniforme g en todas las unidades compactas es lo suficientemente grande como para satisfacer la condición (4.3.3).

Ahora consideremos la k -ésima comunidad aislada (4.2.5), la cual es modelada como una red de nodos idénticos donde las conexiones entre sus nodos son lineales, difusivas y con pesos. En el mismo sentido que la unidad compacta, se dice que la k -ésima comunidad logra la sincronización completa a una solución de sincronización si

$$x_1^{[k]}(t) = x_2^{[k]}(t) = \dots = x_{N_k}^{[k]}(t) = S^{[k]}(t), \quad (4.3.5)$$

es decir, si para cualesquier condición inicial en la vecindad de $S^{[k]}(t)$ se satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i^{[k]}(t) - S^{[k]}(t)\| = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N_k. \quad (4.3.6)$$

donde $S^{[k]}(t) = [s(t)^\top, \dots, s(t)^\top]^\top \in \mathbb{R}^{nr}$ es la solución de sincronización de la k -ésima comunidad y satisface ser la dinámica de una unidad compacta aislada en la k -ésima comunidad, i.e., $\dot{S}^{[k]}(t) = F^{[k]}(S^{[k]}(t), g^{[k]}, \Gamma^{[k]}, A^{[k]})$. Para este caso, considerando que el modelo de red que describe la comunidad es una red con pesos y acoplamiento bidireccional, formada por N_k unidades compactas idénticas. Por lo tanto, el análisis de estabilidad se realiza siguiendo un procedimiento similar al presentado en [33].

Con el fin de garantizar la estabilidad de la solución $S^{[k]}(t)$, es necesario primero garantizar la sincronización en la comunidad sin pesos. Por tanto, se genera una matriz de

acoplamiento con entradas ceros y unos $\mathcal{B}^{[k]} = \{b_{ij}^{[k]}\} \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$ de la siguiente manera:

$$b_{ij}^{[k]} = b_{ji}^{[k]} = \begin{cases} 1, & c_{ij}^{[k]} \neq 0 \\ 0, & c_{ij}^{[k]} = 0 \end{cases}, \quad \text{y } b_{ii}^{[k]} = - \sum_{j=1, i \neq j}^{N_k} b_{ij}^{[k]} \quad (4.3.7)$$

para $i = 1, 2, \dots, N_k$. Es claro ver que la matriz resultante $\mathcal{B}^{[k]}$ representa la matriz de acoplamiento sin pesos relacionada con la matriz $C^{[k]}$ de la k -ésima comunidad. Además, la matriz $\mathcal{B}^{[k]}$ satisface las mismas características que la matriz $C^{[k]}$ presentadas en la sección anterior.

Ahora, considere el modelo de red para la comunidad de nodos idénticos, donde las conexiones no tienen pesos, con un acoplamiento lineal, simétrico y difusivo. De modo que, la ecuación de estado para las unidades compactas de la comunidad están dadas por

$$\dot{x}_i^{[k]}(t) = F^{[k]}(x_i^{[k]}(t), g^{[k]}, \Gamma^{[k]}, A^{[k]}) + \tilde{c} \sum_{j=1}^{N_k} b_{ij}^{[k]} \hat{\Gamma}_{ij}^{[k]} x_j^{[k]}(t) \quad (4.3.8)$$

con $\tilde{c} > 0$ la fuerza de acoplamiento uniforme; $\mathcal{B}^{[k]}$ es la matriz de acoplamiento sin pesos asociada a $C^{[k]}$, y el resto de las variables se definen como en (4.2.5). Como el modelo de red para la comunidad es una red de nodos idénticos, con un acoplamiento lineal, simétrico y difusivo, el análisis de estabilidad es exactamente el mismo al presentado en el capítulo 2. Por lo tanto, para la red (3.2.20) se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.3.2. *La comunidad (4.3.8) modelada como una red de nodos idénticos con acoplamiento lineal, simétrico y difusivo logra la sincronización completa si la fuerza de acoplamiento \tilde{c} satisface la condición*

$$\tilde{c} \lambda_2(\mathcal{B}^{[k]}) \leq \alpha \quad (4.3.9)$$

donde $\lambda_2(\mathcal{B}^{[k]})$ es el segundo valor propio más grande y distinto de cero de la matriz $\mathcal{B}^{[k]}$ y $\alpha < 0$ es una constante que satisface la desigualdad de Lyapunov

$$[DF^{[k]}(S^{[k]} + \alpha \hat{\Gamma})]^\top P + P[DF^{[k]}(S^{[k]} + \alpha \hat{\Gamma})] \leq -Q \quad (4.3.10)$$

donde $DF^{[k]}(S^{[k]})$ es la matriz Jacobiana de la comunidad evaluada en $S^{[k]}(t)$.

Ahora, la condición (4.3.9) puede ser expresada en términos de las entradas de la matriz con pesos $C^{[k]}$ como se presenta en el siguiente Teorema. En consecuencia, con este resultado es posible garantizar la sincronización completa en una comunidad donde las conexiones tienen pesos.

Teorema 4.3.3. *La comunidad de unidades compactas (4.2.5) logra la sincronización completa, si los elementos de la matriz $C^{[k]}$ satisfacen*

$$c_{ij}^{[k]} > \left| \frac{\alpha}{\lambda_2(\mathcal{B}^{[k]})} \right|, \quad (i \neq j) \quad i, j = 1, 2, \dots, N_k \quad (4.3.11)$$

Demostración. Considere el error entre matrices definido como $Q^{[k]} = \tilde{c}\mathcal{B}^{[k]} - C^{[k]}$, cuyas entradas son

$$q_{ij}^{[k]} = \tilde{c}b_{ij}^{[k]} - c_{ij}^{[k]}, \quad (i \neq j), \quad y \quad (4.3.12)$$

$$q_{ii}^{[k]} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_k} (c_{il}^{[k]} - \tilde{c}b_{il}^{[k]}) \quad (4.3.13)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, N_k$. Bajo la restricción $c_{ij}^{[k]} > \tilde{c}$ los elementos de la matriz diagonal de $Q^{[k]}$ son positivos, $q_{ii}^{[k]} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, N_k$, y tomando el valor absoluto de los elementos fuera de la diagonal principal se tiene $|q_{ij}^{[k]}| = |\tilde{c} - c_{ij}^{[k]}|$. Entonces,

$$|q_{ii}^{[k]}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N_k} |q_{ij}^{[k]}| \quad (4.3.14)$$

Por lo tanto, $Q^{[k]} \geq 0$ es una matriz semidefinida positiva, si

$$c_{ij}^{[k]} > \tilde{c}, \quad (i \neq j) \quad i, j = 1, 2, \dots, N_k \quad (4.3.15)$$

Se sigue que $\tilde{c}\mathcal{B}^{[k]} \geq C^{[k]}$, lo cual puede expresarse en términos de sus valores propios como $\lambda_j(\tilde{c}\mathcal{B}^{[k]}) \geq \lambda_j(C^{[k]})$ para toda $j = 1, 2, \dots, N_k$. Debido a que las matrices $\mathcal{B}^{[k]}$ y $C^{[k]}$ comparten algunas características en común, por ejemplo, son matrices simétricas, irreducibles

y semidefinidas negativas, entonces se sabe que sus eigenvalores se pueden ordenar como en (4.2.3). Por lo tanto, el valor propio más grande y distinto de cero de cada una de estas matrices, se denota por λ_2 . Por lo tanto, se tiene que

$$\lambda_2(C^{[k]}) \leq \lambda_2(\tilde{c}\mathcal{B}^{[k]}) = \tilde{c}\lambda_2(\mathcal{B}^{[k]}) \quad (4.3.16)$$

Utilizando el resultado previo de sincronización (4.3.16) y la ecuación (4.3.9), se obtiene la condición (4.3.11). \square

De esta forma se ha demostrado que los estados de la comunidad con pesos (4.2.5) son asintóticamente estables y se logra la sincronización completa de la comunidad. En el mismo sentido que las unidades compactas, se considera que todas las comunidades de la red de redes cumplen con la siguiente condición:

- S4.** Las entradas de la matriz de acoplamiento $c_{ij}^{[k]}$ de todas las comunidades satisfacen la condición (4.3.11).

El supuesto anterior es simplemente para facilitar el análisis de estabilidad para el tercer nivel de interconexión de la red de redes, donde las comunidades están conectadas en una red con acoplamiento unidireccional y con pesos, el objetivo es lograr la sincronización por clústeres. En este sentido, se dice que la red (4.2.10) logra la sincronización por clúster, si para cualesquier par de unidades compactas dentro de la misma comunidad se logra la sincronización completa, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i^{[k]}(t) - S^{[k]}\| = 0, \text{ for } i = 1, 2, \dots, N_k. \quad (4.3.17)$$

Mientras que cualesquier par de unidades compactas pertenecientes a diferentes comunidades no logran la sincronización, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S^{[k]}(t) - S^{[l]}(t)\| \neq 0 \text{ para } k, l = 1, 2, \dots, M \text{ con } k \neq l. \quad (4.3.18)$$

donde $S^{[k]}(t)$ y $S^{[l]}(t)$ son las soluciones de sincronización de la k -ésima y l -ésima comunidad, respectivamente [51].

Con el objetivo de lograr este tipo de sincronización en nuestro modelo de red de redes (4.2.10) es necesario considerar los siguientes supuestos que simplifican el análisis de estabilidad:

S5. Condición misma-entrada. Las matrices $\mathcal{D}_{ij} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_j}$ que representan la conexión entre las i -ésima y j -ésima comunidades (con $i \neq j$) se dice que satisface la condición misma-entrada, si sus elementos satisfacen

$$d_{kl}^{[ij]} = d_{ml}^{[ij]}, \quad \text{con } i \neq j \text{ y } k \neq m \quad (4.3.19)$$

para $k, m = 1, 2, \dots, N_i$ y $l = 1, 2, \dots, N_l$.

S6. La condición diagonal. Las matrices $\mathcal{D}_{ii} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ son matrices diagonales que muestran la fuerza de acoplamiento en cada comunidad, las cuales satisfacen la siguiente condición

$$d_{kk}^{[ii]} = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M \sum_{l=1}^{N_i} d_{kl}^{[ij]} \quad (4.3.20)$$

para $i = 1, 2, \dots, M$.

Siguiendo los supuestos anteriores, es fácil mostrar que la suma por filas de la matriz de acoplamiento \mathcal{D} es cero. Por tanto, la solución de sincronización $S^{[k]}(t)$ es una solución del sistema (4.2.10) incluso considerando el acoplamiento externo.

A continuación se presenta el Teorema principal de este capítulo, con el cual es posible garantizar la sincronización por clústeres para una red de redes modelada como en la ecuación (4.2.9):

Teorema 4.3.4. *Considere una red de redes (4.2.9), donde cada comunidad sin acoplamiento externo logra la sincronización completa, y los estados sincronos entre las distintas comunidades son diferentes. Si cada bloque fuera de la diagonal \mathcal{D}_{ij} con $i \neq j$ satisface la ecuación (4.3.19) y los bloques diagonales $\mathcal{D}_{ii} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ satisfacen (4.3.20) y lo siguiente*

$$\mathcal{D}_{ii} \leq d_k I_{N_i} \quad (4.3.21)$$

donde $d_k < 0$ es una constante negativa tal que

$$\omega_{pq}^{[k]} + d_k \leq 0 \quad (4.3.22)$$

donde $\omega_{pq}^{[k]}$ es una constante que garantiza la sincronización completa de la k -ésima comunidad sin el acoplamiento externo. Entonces, la red de redes logra la sincronización por clústeres.

Demostración. Considere el error de sincronización para cualesquier par de unidades compactas dentro de la misma comunidad, el cual se define como

$$e_{pq}^{[k]}(t) = x_q^{[k]}(t) - x_p^{[k]}(t) \quad \text{para } p, q = 1, 2, \dots, N_k \text{ y } k = 1, 2, \dots, M. \quad (4.3.23)$$

Se calcula la derivada del error de sincronización (4.3.23), la cual está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_{pq}^{[k]}(t) = & F^{[k]}(x_q^{[k]}(t)) - F^{[k]}(x_p^{[k]}(t)) + d_{qq}^{[kk]} \hat{\Gamma} x_q^{[k]}(t) - d_{pp}^{[kk]} \hat{\Gamma} x_p^{[k]}(t) \\ & + \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^M \sum_{\substack{j=1 \\ p \neq j}}^{N_j} (d_{qj}^{[kl]} - d_{pj}^{[kl]}) \hat{\Gamma} x_j^{[l]} \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

para $p, q = 1, 2, \dots, N_k$ y $k = 1, 2, \dots, M$.

Utilizando las ecuaciones (4.3.19) y (4.3.20), la dinámica del error puede ser reescrita como

$$\dot{e}_{pq}^{[k]}(t) = F^{[k]}(x_q^{[k]}(t)) - F^{[k]}(x_p^{[k]}(t)) + d_{pq}^{[k]} \hat{\Gamma} e_{pq}^{[k]}(t). \quad (4.3.25)$$

esto se debe a que el acoplamiento satisface el supuesto **S5** denominado condición de misma-entrada, y con ello se tiene $d_{pq}^{[k]} = d_{qq}^{[kk]} = d_{pp}^{[kk]}$.

Ahora, para garantizar la estabilidad del error de sincronización alrededor del origen. Se considera la siguiente función de Lyapunov

$$\mathcal{V}_k(t) = e_{pq}^{[k]\top} e_{pq}^{[k]}, \quad (4.3.26)$$

cuya derivada a lo largo de la trayectoria de (4.3.25) está dada por

$$\dot{\mathcal{V}}_k(t) = e_{pq}^{[k]\top}(t) \left[F^{[k]}(x_q^{[k]}(t)) - F^{[k]}(x_p^{[k]}(t)) \right] + e_{pq}^{[k]\top}(t) \left[d_{pq}^{[k]} \hat{\Gamma} e_{pq}^{[k]} \right] \quad (4.3.27)$$

Para probar que $\mathcal{V}_k(t)$ es negativa definida, observé que con los supuestos **S3** y **S4**, la comunidad tiene una fuerza de acoplamiento lo suficientemente fuerte como para lograr la sincronización completa entre sus unidades compactas. Por lo tanto, existe una constante ω_{pq} talque

$$\dot{\mathcal{V}}_k(t) \leq e_{pq}^{[k]\top}(t) \left[\omega_{pq} I_{nr} + d_{pq}^{[k]} \hat{\Gamma} \right] e_{pq}^{[k]}(t) \quad (4.3.28)$$

Entonces, si $\omega_{pq} I_{nr} + d_{pq}^{[k]} \hat{\Gamma} \leq 0$ que se satisface cuando $\omega_{pq} + d_{pq}^{[k]} \leq 0$ se garantiza que $\dot{\mathcal{V}}_k(t) \leq 0$. Lo que implica que $\|e_{pq}^{[k]}\| \rightarrow 0$ para $p, q = 1, 2, \dots, N_k$ y $k = 1, 2, \dots, M$, es decir, los errores de sincronización $e_{pq}^{[k]}$ son estables alrededor del origen. En consecuencia, la k -ésima comunidad logra la sincronización completa incluso con el acoplamiento entre comunidades.

Por otra parte, para garantizar la sincronización por clústeres es necesario analizar también el error entre comunidades $e_{pq}^{[kl]} = x_p^{[k]} - x_q^{[l]}$. Sin embargo, utilizando los supuestos **S3** y **S4**; y considerando que cada comunidad logra la sincronización completa es decir, en la variedad de sincronización se dice que las trayectorias de cada comunidad colapsan a la solución de un unidad compacta aislada $S^{[k]}$, donde además se considera que las soluciones de sincronización son diferentes para cada comunidad, i.e., $S^{[k]} \neq S^{[l]}$ para $k \neq l$. Entonces, el error de sincronización entre comunidades, se puede definir como

$$E^{[kl]} = S^{[k]} - S^{[l]}, \quad \text{para } k, l = 1, 2, \dots, M \text{ con } k \neq l \quad (4.3.29)$$

y la derivada del error con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{E}^{[kl]} = \dot{S}^{[k]} - \dot{S}^{[l]} = F^{[k]}(S^{[k]}) - F^{[l]}(S^{[l]}) \quad (4.3.30)$$

y como $F^{[k]}(S^{[k]}) \neq F^{[l]}(S^{[l]})$ se cumple para todo $k \neq l$. Se tiene que el error entre comunidades no es estable alrededor del origen. Por lo tanto, se tiene que la red de redes (4.2.9) logra

la sincronización por clústeres. □

Con el resultado anterior es posible garantizar que se satisfacen las condiciones (4.3.17) y (4.3.18). Pero es importante resaltar que para el buen funcionamiento de este resultado son necesarios todos los supuestos de construcción y que además cada matriz de acoplamiento determina si se logra la sincronización en su nivel de organización correspondiente. En otras palabras, $A^{[k]}$ determina si se logra la sincronización completa en cada unidad compacta; mientras que $C^{[k]}$ determina las condiciones para lograr la sincronización completa en la comunidad k -ésima comunidad; y finalmente, si \mathcal{D} satisface las condiciones en **S5**, **S6** y el Teorema 4.3.4 la red de redes logra la sincronización del clúster.

En la siguiente sección se propone un ejemplo numérico con el cual pretendemos ilustrar la efectividad de nuestros resultados teóricos, aplicado a una red de redes formada por diferentes osciladores caóticos.

4.3.1. Ejemplo: Sincronización por clúster para una red de redes formada por osciladores caóticos

Para este ejemplo se considera una red de 90 nodos divididos en 18 unidades compactas con cinco nodos cada una, donde la dinámica de los nodos son osciladores caóticos. La estructura de la red se presenta en el esquemático mostrado en la Figura 4.3, donde la estructura de cada unidad compacta es presentada en el pentágono de color negro, además las unidades compactas que pertenecen a la misma comunidad son ilustradas por el mismo color, y cada comunidad es presentada con un color diferente. Es decir, la primer unidad tiene por $N_1 = 6$ unidades compactas ilustradas por pentágonos de color azul, la segunda comunidad está formada por $N_2 = 8$ unidades compactas y es ilustrada de color rojo, mientras que la tercer comunidad está formada por $N_3 = 4$ unidades compactas y es ilustrada de color amarillo. Observé que las líneas sólidas describen las conexiones entre unidades compactas de la misma comunidad, mientras que las flechas representan las conexiones entre comunidades, que corresponden a los acoplamientos unidireccionales y con pesos.

En particular, en este ejemplo consideramos que existen tres comunidades diferentes y cómo en nuestro resultado teórico cada comunidad es determinada por la dinámica de los

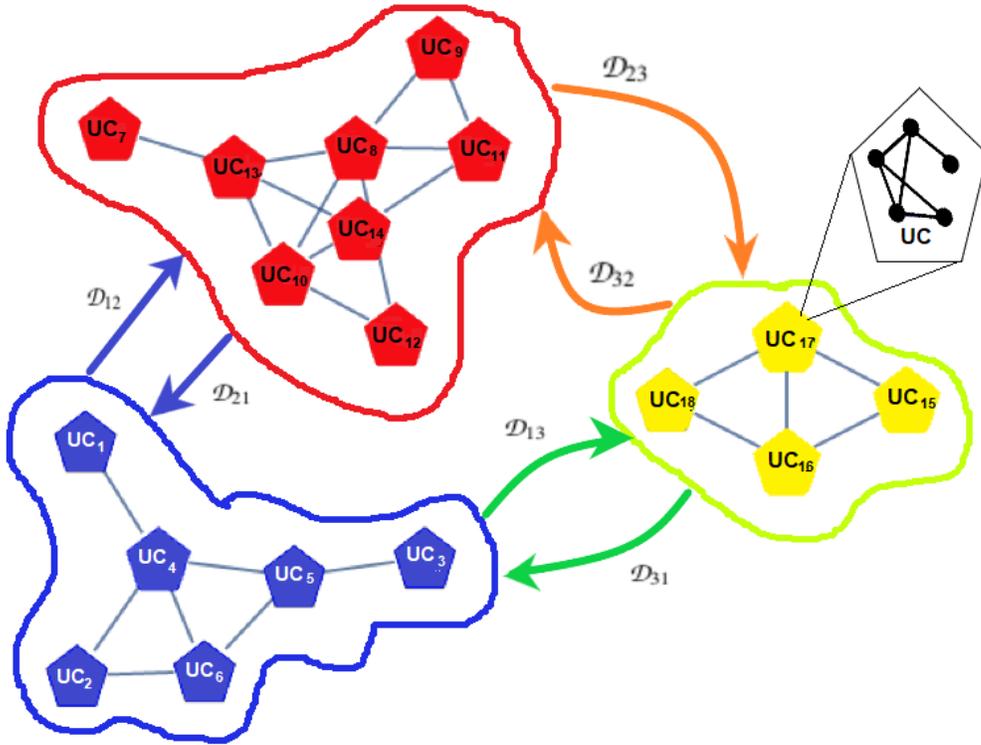


Figura 4.3: Esquemático de una red de subredes dividida en tres comunidades.

nodos, entonces se supone que existen tres tipos de osciladores caóticos en nuestra red. De modo que, para la primer comunidad se considera que los nodos de cada unidad compacta son osciladores de Lorenz [40]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_{i1} \\ \dot{\psi}_{i2} \\ \dot{\psi}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10(\psi_{i2} - \psi_{i1}) \\ 28\psi_{i1} - \psi_{i1}\psi_{i3} - \psi_{i2} \\ \psi_{i1}\psi_{i2} - \frac{8}{3}\psi_{i3} \end{bmatrix}, \quad (4.3.31)$$

mientras que los nodos de la segunda comunidad son osciladores de Chen [2]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_{i1} \\ \dot{\psi}_{i2} \\ \dot{\psi}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35(\psi_{i2} - \psi_{i1}) \\ -7\psi_{i1} - \psi_{i1}\psi_{i3} - 28\psi_{i2} \\ \psi_{i1}\psi_{i2} - 3\psi_{i3} \end{bmatrix}, \quad (4.3.32)$$

y finalmente, los nodos de las unidades compactas de la tercer comunidad son osciladores de

Lu [97]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi}_{i1} \\ \dot{\Psi}_{i2} \\ \dot{\Psi}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36(\Psi_{i2} - \Psi_{i1}) \\ 20\Psi_{i2} - \Psi_{i1}\Psi_{i3} \\ \Psi_{i1}\Psi_{i2} - 3\Psi_{i3} \end{bmatrix}. \quad (4.3.33)$$

Siguiendo los esquemas de construcción de la red de subredes y los análisis de estabilidad desarrollados en las secciones anteriores, es posible establecer la sincronización por clúster en esta red de subredes. Primero, considere que cada unidad compacta tiene la estructura de conexión mostrada en la Figura 4.3 de color negro. Además, considere que las unidades compactas cumplen con los supuestos **S1.** y **S2.** presentados en la sección 4.2, es decir, se considera que todas las unidades compactas tiene la misma estructura de conexión, el mismo número de nodos y la misma descripción dinámica. Entonces, utilizando la proposición 4.3.1 es posible obtener la mínima fuerza de acoplamiento necesaria para garantizar la sincronización completa dentro de cada unidad compacta.

Con la finalidad de ilustrar este resultado en las Figuras 4.4–4.6 se presentan las simulaciones numéricas de una unidad compacta aislada dentro de cada comunidad. Inicialmente en cada figura se considera que los nodos no están acoplados y después del instante $t = 20$ los nodos se acoplan con la estructura de una unidad compacta con una fuerza de acoplamiento uniforme, donde es posible observar que cada unidad compacta logra la sincronización completa de sus nodos.

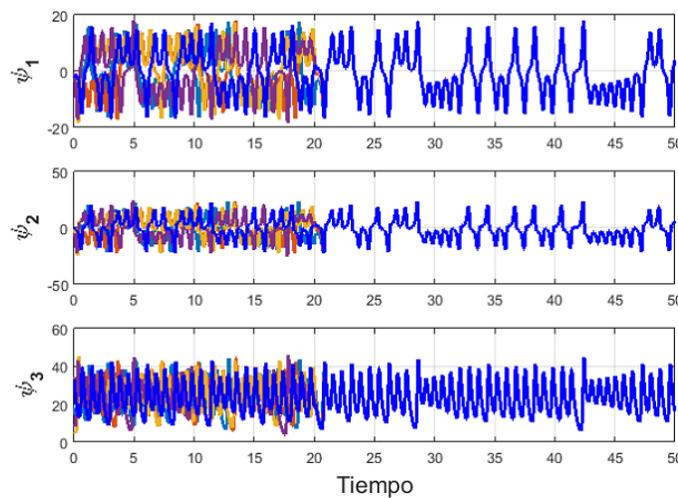


Figura 4.4: Simulación numérica para cinco osciladores de Lorenz conectados como una unidad compacta aislada con una fuerza de acoplamiento de $g_1 = 1$.

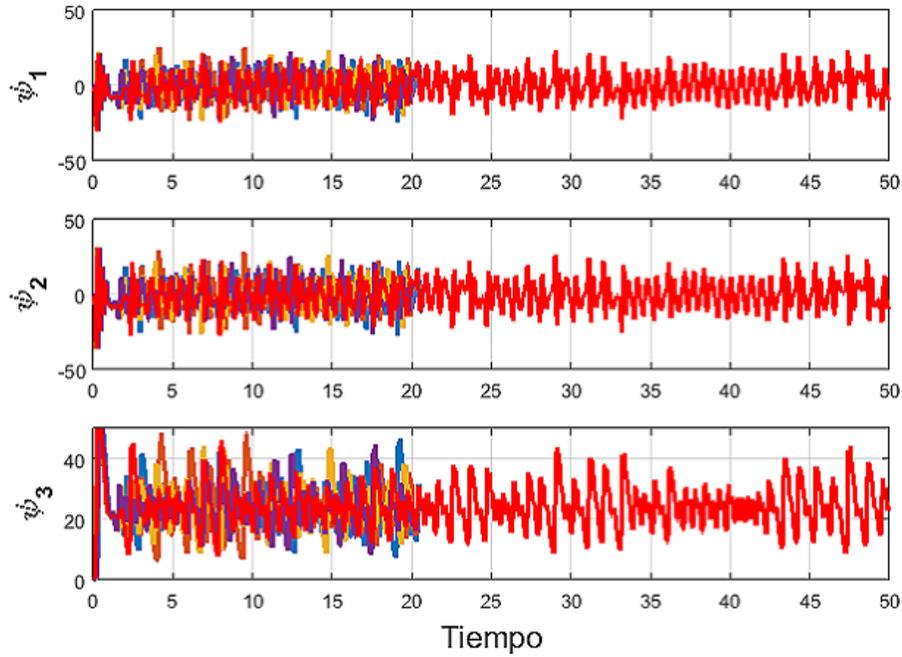


Figura 4.5: Simulación numérica para cinco osciladores de Chen conectados como una unidad compacta aislada con una fuerza de acoplamiento de $g_2 = 0.84$.

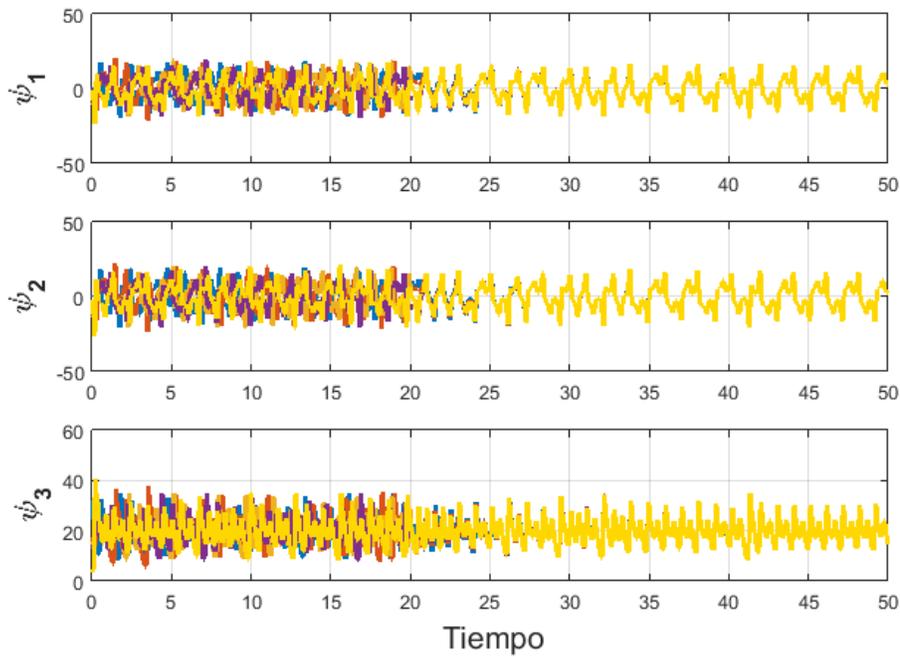


Figura 4.6: Simulación numérica para cinco osciladores de Lu conectados como una unidad compacta con una fuerza de acoplamiento de $g_3 = 0.368$.

Ahora, dentro de cada comunidad es necesario elegir los pesos de las entradas de la matriz de acoplamiento $C^{[k]}$ con $k = 1, 2, 3$ para garantizar la sincronización completa de las unidades compactas dentro de la comunidad. Por lo tanto, utilizando las estructuras de conexión presentadas en la Figura 4.3 y el **Teorema 4.3.3** para obtener los valores críticos de los pesos para las entradas de las matrices de acoplamiento de cada comunidad, los cuales están dados por:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}^{[1]} &> 2.67 \text{ para } i \neq j, \text{ con } i, j = 1, \dots, 6 \\
 c_{ij}^{[2]} &> 2.58 \text{ para } i \neq j, \text{ con } i, j = 7, \dots, 14 \\
 c_{ij}^{[3]} &> 0.46 \text{ para } i \neq j, \text{ con } i, j = 15, \dots, 18
 \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

Finalmente, para la conexiones entre comunidades se consideran las siguientes matrices de acoplamiento entre comunidades, $\mathcal{D}_{ij} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_j}$, donde es fácil ver que las matrices cumplen con el supuesto **S4. Condición misma-entrada** presentado en la sección 4.3.

$$\mathcal{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.43 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.43 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.43 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.43 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.43 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.43 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.28 & 0.16 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0.18 & 0.28 & 0.16 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0.18 & 0.28 & 0.16 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0.18 & 0.28 & 0.16 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0.18 & 0.28 & 0.16 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0.18 & 0.28 & 0.16 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0.18 & 0.28 & 0.16 & 0 & 0.14 & 0 \\ 0.18 & 0.28 & 0.16 & 0 & 0.14 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0.27 & 0 & 0.3 & 0 & 0.28 & 0.19 & 0.3 \\ 0 & 0.27 & 0 & 0.3 & 0 & 0.28 & 0.19 & 0.3 \\ 0 & 0.27 & 0 & 0.3 & 0 & 0.28 & 0.19 & 0.3 \\ 0 & 0.27 & 0 & 0.3 & 0 & 0.28 & 0.19 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Además, con la finalidad de satisfacer el supuesto **S5**. y el **Teorema 4.3.4** las matrices $\mathcal{D}_{ii} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ deben satisfacer:

$$\mathcal{D}_{11} \leq 1.58 I_{N_1}, \quad \mathcal{D}_{22} \leq 0.96 I_{N_2}, \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_{33} \leq 1.85 I_{N_3}.$$

A continuación se presentan los resultados numéricos para la dinámica del error dentro de cada comunidad a pesar de que exista una conexión entre comunidades. En la Figura 4.7 se muestran la dinámica del error entre los nodos de la primer comunidad. Mientras que en la Figura 4.8 se muestra la dinámica del error entre los nodos de la segunda comunidad. Y para la tercer comunidad los resultados del error se muestran Figura 4.9. Inicialmente en cada figura se considera que las unidades compactas están desacopladas, después de un tiempo de $t = 10$ se considera que las unidades compactas se acoplan con las estructuras de conexiones mostradas en la Figura 4.3 y todas las condiciones anteriores, donde es posible observar que los errores de sincronización dentro de cada comunidad, $e_{ij}^{(k)}$, tienden a cero, es decir, las comunidades logran la sincronización completa de forma interna.

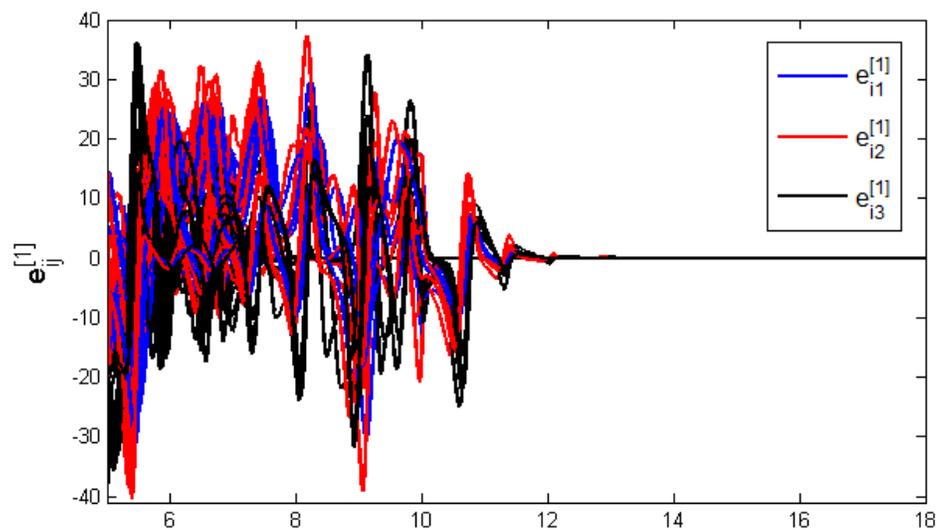


Figura 4.7: Evolución en el tiempo de los errores de sincronización en la primer comunidad.

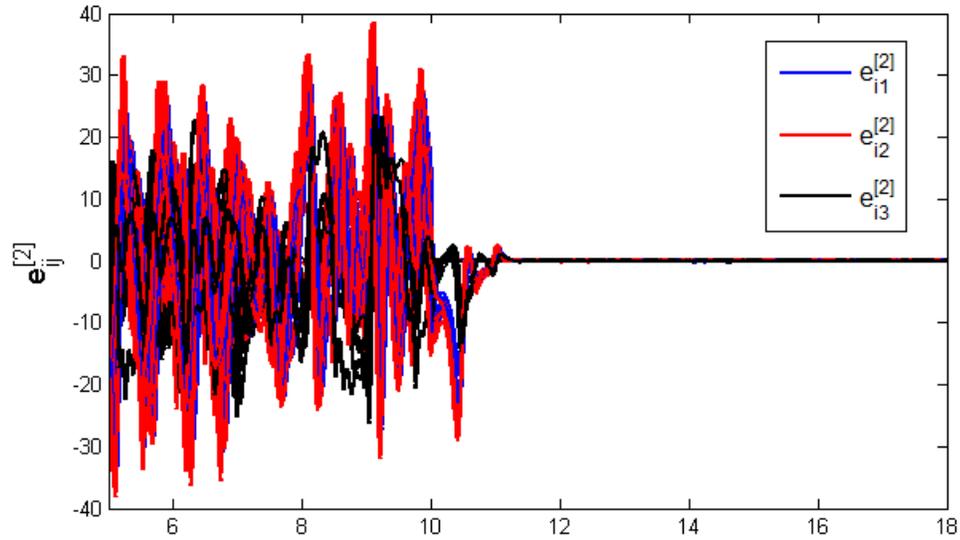


Figura 4.8: Evolución en el tiempo de los errores de sincronización en la segunda comunidad.

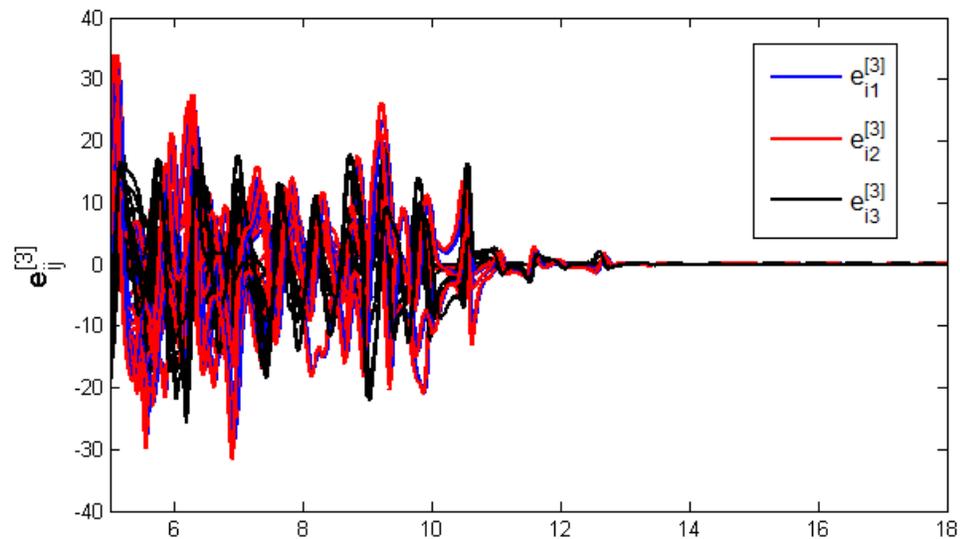


Figura 4.9: Evolución en el tiempo de los errores de sincronización en la tercer comunidad.

Por otra parte, en las Figuras 4.10 - 4.12 se presentan los errores de sincronización entre la k -ésima y la l -ésima comunidad, denotado por $E^{[kl]}$, los cuales no convergen a cero pero se mantienen acotados, con esto se puede mostrar que las unidades compactas de diferentes comunidades no están sincronizadas de forma completa, cumpliendo así la definición de sincronización por clústeres, ya que los errores dentro de la comunidades $\|e_{ij}^{(k)}\| \rightarrow 0$, mientras que el error entre comunidades $\|E^{[KL]}\| \neq 0$ conforme el tiempo tiende a infinito.

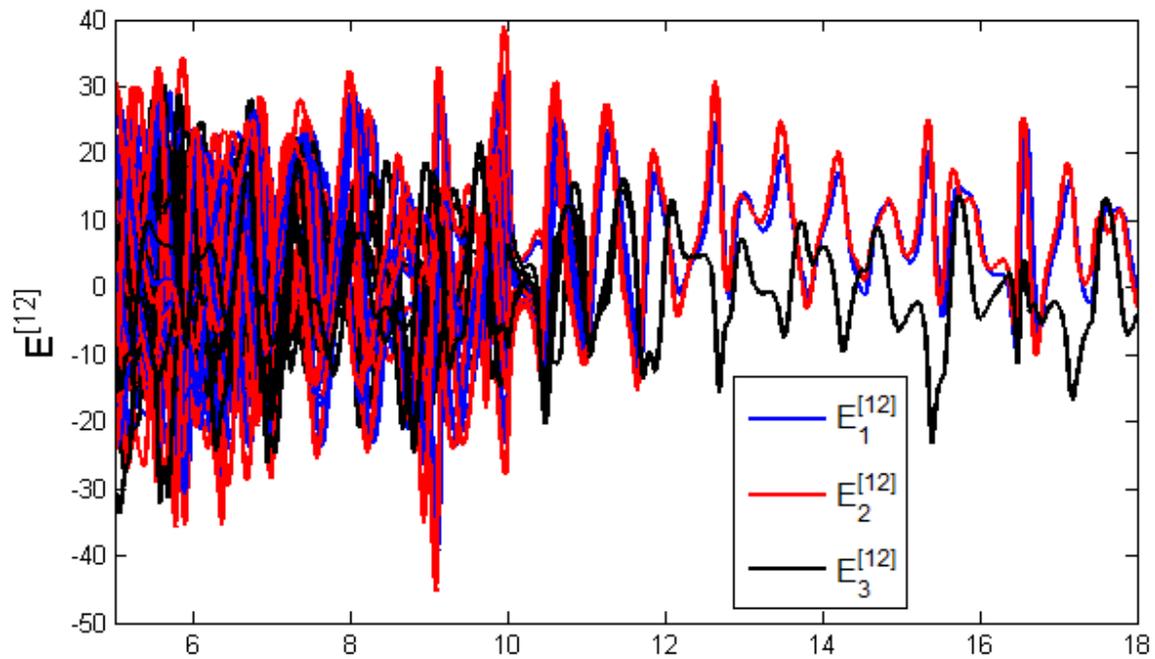


Figura 4.10: Evolución del error de sincronización entre la primera y segunda comunidad

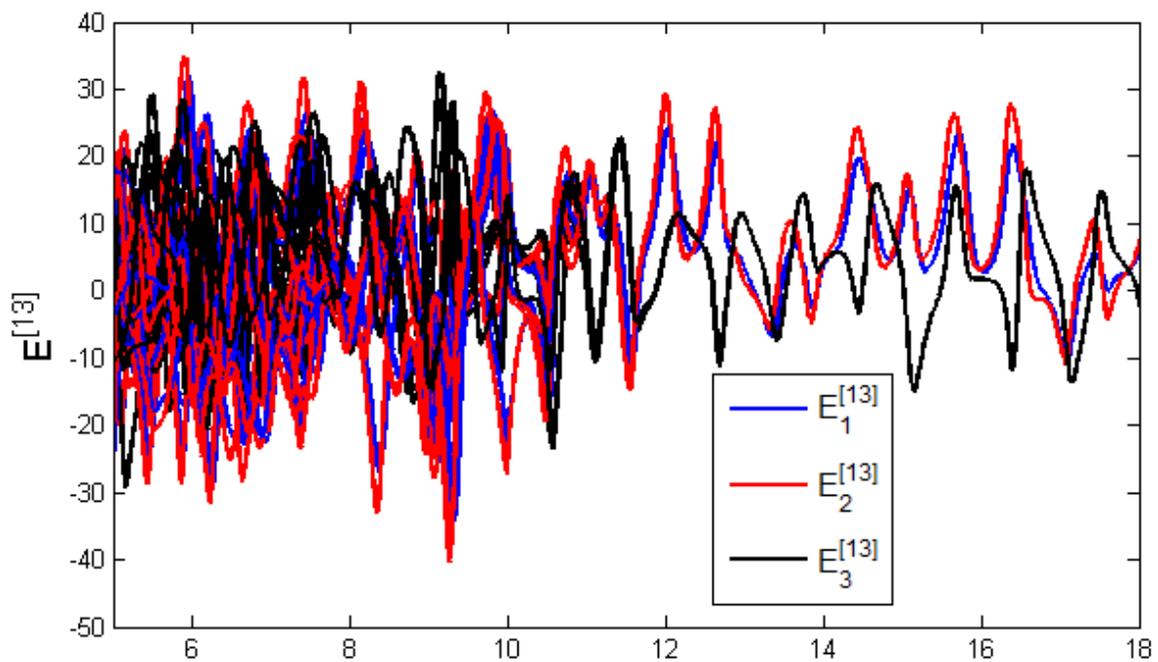


Figura 4.11: Evolución del error de sincronización entre la primera y tercer comunidad

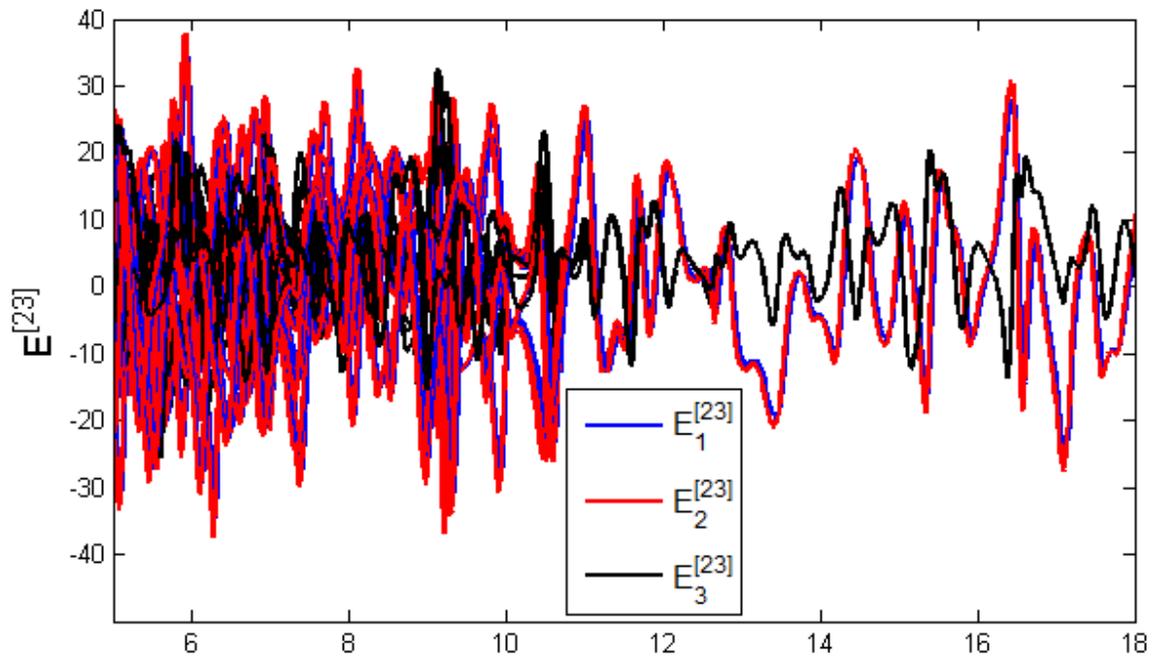


Figura 4.12: Evolución del error de sincronización entre la segunda y tercer comunidad

En el siguiente capítulo aboramos el problema de sincronización de redes dinámicas con dos tipos de acoplamiento, es decir, hiperredes dinámicas. De la misma forma que en este capítulo, se presenta un análisis de estabilidad del estado sincronizado de donde obtenemos condiciones suficientes para garantizar la sincronización de la hiperred dinámica.

Sincronización en hiperredes

En este capítulo presentamos un modelo de red formada por nodos idénticos, donde las conexiones entre los nodos pueden ser de diferentes naturaleza. En particular, este tipo de sistemas se modelan con una estructura de interconexión dada por un hipergrafo, y dicho modelo lo llamaremos una *hiperred dinámica*. En este capítulo presentamos las condiciones suficientes bajo las cuales surge un comportamiento síncrono en la hiperred dinámica.

5.1. De redes dinámicas a hiperredes dinámicas

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, el fenómeno de sincronización ha recibido mucha atención por parte de la comunidad científica, ya que desempeña un papel central en la función o disfunción de una amplia variedad de redes reales. La mayor parte del trabajo publicado hasta ahora, se enfoca en el problema de sincronización para un conjunto de osciladores conectados a través de un grafo, como los modelos presentados en los capítulos 2 y 3, donde consideramos que existe solamente un tipo de acoplamiento. Sin embargo, en muchos sistemas reales las unidades fundamentales se pueden acoplar a través de múltiples tipos de conexiones. Un ejemplo típico es un grupo de neuronas que suelen estar conectadas a través de acoplamientos de distinta naturaleza, tales como sinapsis eléctrica y química, donde cada una corresponde a un modelo de conexión con funciones de acoplamiento diferentes [103]. Otro ejemplo, se observa en un banco de peces donde las conexiones son por medio de señales químicas liberadas en el agua y las señales visuales que enfoca cada pez [104]. En general, este tipo de sistemas pueden ser modelados como sistemas interconectados

donde diferentes tipos de acoplamiento coexisten y operan de manera simultánea. En estos casos, consideramos que los nodos están acoplados a través de diferentes tipos de conexiones, donde cada tipo de conexión forma una red, y nos referimos a dicho sistema como una *hiperred dinámica* [18, 55].

De manera similar a las redes dinámicas, donde se estudia el fenómeno de sincronización como un problema de estabilización de la dinámica del error alrededor del origen. Normalmente, en las redes dinámicas la solución de sincronización es estable cuando la fuerza de acoplamiento entre los osciladores excede un valor de umbral. En el caso de las hiperredes dinámicas la pregunta central es garantizar la estabilidad del estado sincronizado cuando múltiples formas de acoplamiento están presentes. Como mencionamos en los capítulos anteriores, existen varias técnicas para resolver el problema de sincronización en redes dinámicas, tal como la función maestra de estabilidad [32], el método de conexión de grafos [102] o el criterio de λ_2 [40]. En este sentido, algunos investigadores como F. Sorrentino y colaboradores en [18, 104] han realizado una extensión de la función maestra de estabilidad para hiperredes dinámicas, cuando distintas funciones de acoplamiento están presentes. En esta metodología la idea es obtener una función maestra de estabilidad para cada red asociada a un tipo de acoplamiento. Sin embargo, los resultados obtenidos con esta técnica muestran que la generalización de función maestra de estabilidad sólo es aplicable para ciertas topologías de la hiperred. Específicamente, en hiperredes donde sus grafos asociados sean simultáneamente diagonalizables, lo cual es posible solamente si las matrices Laplacianas de los grafos asociados conmutan, o bien si uno de grafos tiene una estructura de todos contra todos. Por otro lado, Carter [105] realiza una extensión del método de conexión de grafos para hiperredes con acoplamiento lineal mediante diferentes variables de estado. A diferencia de la función maestra de estabilidad en este resultado no es necesaria la conmutación de las matrices de acoplamiento, incluso no es necesario conocer de manera explícita el espectro de las matrices de conexión para garantizar la estabilidad. Con este método se debe conocer mejor las medidas de centralidad de cada uno de los grafos, con el fin de mejorar la sincronizabilidad de la hiperred dinámica. Incluso, es posible pasar de redes que no se sincronizan con enlaces simples, es decir, conectadas por una sola variable de estado, a redes que se sincronizan con enlaces mixtos. Sin embargo, este trabajo solo se ha realizado para

grafos no dirigidos, donde los diferentes tipos de acoplamiento dependen de las variables de estado por las cuales se conectan los nodos.

Desafortunadamente con los trabajos antes mencionados es posible observar que las técnicas conocidas para lograr la sincronización en redes dinámicas, no pueden ser aplicadas de manera directa, debido a que en el análisis de estabilidad del error para hiperredes dinámicas no es posible realizar algunas simplificaciones o cambios de coordenadas que facilitan el análisis. No obstante, es posible aprovechar la metodología de las funciones de Lyapunov para garantizar la estabilidad del error de sincronización y con ello extender los resultados de sincronización para hiperredes dinámicas.

En este capítulo abordamos de forma muy particular el problema de sincronización para una hiperred dinámica, donde consideramos que los nodos son sistemas dinámicos de tiempo continuo, y los enlaces entre los nodos de la hiperred son de distintas naturaleza, por ejemplo las funciones lineales y no lineales. Ejemplos de este tipo de sistemas, puede ser la sincronización en un grupo de neuronas, donde se considera que la comunicación celular puede darse por dos tipos de sinapsis: eléctrica y química. La sinapsis eléctrica modelada como una función lineal que representa una diferencia de potencial entre las neuronas. Mientras que la sinapsis química es modelada como una función no lineal, que representa la saturación de la función de difusión. Con este análisis se busca proporcionar información sobre el fenómeno de sincronización en este tipo de sistemas y determinar las condiciones bajo las cuales es posible lograr la sincronización cuando diferentes tipos de acoplamiento están presentes.

5.2. Un modelo de una hiperred dinámica

Consideramos un conjunto de N nodos idénticos, donde cada nodo es un sistema dinámico n -dimensional, cuya estructura de interconexión está dada por un hipergrafo como los presentados en el Capítulo 2. Para hacer una descripción más clara del sistema consideramos que en el modelo existen solamente dos tipos de acoplamiento de distinta naturaleza. En particular, suponemos que uno de los acoplamientos es representado como una combinación lineal de las variables de estado, mientras que el otro es representado por un acoplamiento no lineal. Además, suponemos que cada tipo de acoplamiento tiene una estructura de conexión

generada por un grafo conexo, en el sentido que no existen nodos aislados para cada tipo de acoplamiento. Con estas consideraciones la ecuaciones de estado de los nodos dentro de la hiperred dinámica están dadas por:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g_a \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t) + g_b \sum_{j=1}^N b_{ij} \mathcal{G}(x_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.2.1)$$

donde $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado del i -ésimo nodo de la hiperred; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal arbitraria que describe la dinámica del nodo aislado. $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante de ceros y unos, que representa a través de que variables de estado se conectan los nodos. La función $\mathcal{G}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal, que representa las funciones de salida del acoplamiento de la segunda red; mientras que las constantes $g_a \geq 0$ y $g_b \geq 0$ representan las fuerza de acoplamiento para cada red. Las interacciones individuales entre cada par de nodos de las distintas redes son descritas con las matrices de acoplamiento $\mathcal{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\mathcal{B} = \{b_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, la cuales describen la topología de cada red, donde los elementos de cada una de estas matrices se definen como sigue: si existe un enlace entre los nodos i y j con $i \neq j$, entonces $a_{ij} \geq 0$ (o $b_{ij} \geq 0$); en otro caso, $a_{ij} = 0$ (o $b_{ij} = 0$). Además, suponemos que ambas matrices tienen suma por renglones igual a cero, por tanto, los elementos de la diagonal de cada matriz cumplen:

$$a_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \quad \text{y} \quad b_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N b_{ij}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.2.2)$$

Observemos que el modelo de hiperred (5.2.1) es muy general ya que representa hiperredes con acoplamiento uniforme, con peso, dirección. Además, las matrices de conectividad \mathcal{A} y \mathcal{B} , pueden representar cualesquier tipo de topología, la única restricción es que cada grafo sea irreducible, es decir, suponemos que no se consideran que existen nodos aislados en cada red [2]. Además, es importante mencionar que estas matrices no son necesariamente idénticas. Incluso, una matriz puede representar una red con acoplamiento bidireccional y la otra una red con acoplamiento unidireccional.

En la siguiente sección investigamos la sincronización idéntica para el modelo de hiperred dinámica con dos tipos de acoplamiento.

5.3. Sincronización idéntica en una hiperred dinámica

Consideramos la hiperred dinámica de nodos idénticos (5.2.1) con una función de salida lineal y una función no lineal. En el mismo sentido que se presentó en el capítulo 2 para una red dinámica, se dice que la hiperred (5.2.1) logra la sincronización idéntica cuando los estados de todos los nodos evolucionan de manera unísona [18]. Formalmente, se dice que la hiperred dinámica logra la *sincronización idéntica* de forma asintótica sí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \text{ para toda } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.3.1)$$

Una vez sincronizada la hiperred dinámica evoluciona en una *variedad de sincronización* descrita por

$$\Omega_H = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t)\}, \quad (5.3.2)$$

donde $s(t) \in \mathbb{R}^n$ es la solución de sincronización, la cual satisface ser solución de un nodo aislado $\dot{s}(t) = f(s(t))$. Es importante mencionar que cuando la hiperred dinámica (5.2.1) logra la sincronización en el sentido de (5.3.1), es decir, cuando todos los nodos se mueven al unísono. Por la condición de difusividad de cada red (5.2.2) los últimos dos términos a lado derecho de la ecuación (5.2.1) se desvanecen, y con esto se garantiza que la solución de sincronización $s(t)$ es la solución de un nodo aislado N veces repetida. Por esta razón, para cualesquier condición inicial cercana a la solución de sincronización $s(t)$, la condición (5.3.1) puede ser descrita como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.3.3)$$

A continuación presentamos un análisis para determinar la estabilidad del comportamiento sincronizado $s(t)$ en una hiperred de nodos idénticos. Siguiendo la ecuación (5.3.3), definimos el error de sincronización como $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, y obtenemos su dinámica

$$\dot{e}_i(t) = f(x_i(t)) - f(s(t)) + g_a \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(e_j(t) + s(t)) + g_b \sum_{j=1}^N b_{ij} \mathcal{G}(e_j(t) + s(t)) \quad (5.3.4)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Realizamos una expansión en Series de Taylor en primer orden para las funciones $f(\cdot)$ y $\mathcal{G}(\cdot)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(e_i(t) + s(t)) &\approx f(s(t)) + Df(s(t))e_i(t), \\ \mathcal{G}(e_i(t) + s(t)) &\approx \mathcal{G}(s(t)) + D\mathcal{G}(s(t))e_i(t), \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

donde $Df(s(t))$ y $D\mathcal{G}(s(t))$ son las matrices Jacobianas de las funciones $f(\cdot)$ y $\mathcal{G}(\cdot)$, respectivamente evaluadas en $s(t)$. Al sustituir estas expresiones en (5.3.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= Df(s(t))e_i(t) + g_a \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma e_j(t) + g_a \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma s(t) + g_b \sum_{j=1}^N b_{ij}D\mathcal{G}(s(t))e_j(t) \\ &+ g_b \sum_{j=1}^N b_{ij}\mathcal{G}(s(t)) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Observemos que por la condición de difusividad de las matrices de conexión (5.2.2) los términos

$$g_a \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma s(t) = 0 \quad \text{y} \quad g_b \sum_{j=1}^N b_{ij}\mathcal{G}(s(t)) = 0 \quad (5.3.7)$$

se desvanecen. Entonces, la dinámica del error de sincronización está dada por

$$\dot{e}_i(t) = Df(s(t))e_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma e_j(t) + \sum_{j=1}^N b_{ij}D\mathcal{G}(s(t))e_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.3.8)$$

Reescribimos ahora la ecuación (5.3.8) en forma vectorial como

$$\dot{E}(t) = \left[\left(I_N \otimes Df(s(t)) \right) + g_a \left(\mathcal{A} \otimes \Gamma \right) + g_b \left(\mathcal{B} \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right) \right] E(t) \quad (5.3.9)$$

donde $E(t) = [e_1^\top(t), e_2^\top(t), \dots, e_N^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{Nn}$ es el vector con las variables del error de todos los nodos, I_N es la matriz identidad de tamaño $N \times N$, \otimes es el producto de Kronecker, y las matrices $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ son las matrices Laplacianas de cada grafo que forman la hiperred dinámica. Nuestro objetivo es encontrar condiciones bajo las cuales el error de sincronización (5.3.9) sea asintóticamente estable alrededor del origen, y como consecuencia se logró la sincronización idéntica en la hiperred dinámica (5.2.1). Con el fin de presentar el análisis de estabilidad siguiendo un procedimiento similar al presentado en [106] y con

ello presentar el resultado principal de este capítulo y lograr nuestro objetivo es necesario considerar los siguientes supuestos que simplifican el análisis de estabilidad:

S1. Suponemos que existe una constante no negativa η , tal que

$$Df(s(t)) + Df(s(t))^\top \leq \eta I_n \quad (5.3.10)$$

donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

S2. Suponemos que para la función de salida no lineal existe una constante positiva $\eta_G > 0$ tal que

$$D\mathcal{G}(z(t)) = D\mathcal{G}(z(t))^\top \geq \eta_G I_n \quad (5.3.11)$$

para todo $z(t) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.3.1. *Sea una hiperred dinámica de nodos idénticos (5.2.1), donde la dinámica individual de cada nodo satisface la condición **S1**. Si las matrices de conexión son difusivas (5.2.2), la función de salida no lineal satisface la condición **S2**, y además se cumplen las siguientes condiciones*

$$\alpha_a + g_a \left(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) + \max_{1 \leq k \leq N} \{A_k\} \right) < 0, \text{ con } \alpha_a > \eta/2\lambda_{\min}(\Gamma), \quad (5.3.12)$$

$$\alpha_b + g_b \left(\lambda_2(\bar{\mathcal{B}}) + \max_{1 \leq k \leq N} \{B_k\} \right) < 0, \text{ con } \alpha_b > \eta/2\eta_G \quad (5.3.13)$$

donde

$$\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathcal{A}^\top - \text{Diag}(A_1, A_2, \dots, A_N), \quad A_j = \sum_{k=1}^N a_{kj} \quad (5.3.14)$$

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} + \mathcal{B}^\top - \text{Diag}(B_1, B_2, \dots, B_N), \quad B_j = \sum_{k=1}^N b_{kj} \quad (5.3.15)$$

Entonces la solución de sincronización $s(t)$ es asintóticamente estable. Como consecuencia, la hiperred dinámica de nodos idénticos (5.2.1) logra la sincronización idéntica.

Demostración. Consideramos la siguiente función de Lyapunov

$$V(t) = E^\top(t)(I_N \otimes I_n)E(t) \quad (5.3.16)$$

cuya derivada a lo largo de la trayectoria (5.3.9) está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = & E^\top(t)(I_N \otimes I_n) \left[\left(I_N \otimes Df(s(t)) \right) + g_a \left(\mathcal{A} \otimes \Gamma \right) + g_b \left(\mathcal{B} \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right) \right] E(t) \\ & E^\top(t) \left[\left(I_N \otimes Df(s(t)) \right) + g_a \left(\mathcal{A} \otimes \Gamma \right) + g_b \left(\mathcal{B} \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right) \right]^\top (I_N \otimes I_n) E(t).\end{aligned}\tag{5.3.17}$$

Considerando que los nodos cumplen la condición **S1** y la función de salida no lineal cumple la condición **S2** tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) & \leq \eta E^\top(t)(I_N \otimes I_n)E(t) + E^\top(t) \left[g_a((\mathcal{A} + \mathcal{A}^\top) \otimes \Gamma) + g_b((\mathcal{B} + \mathcal{B}^\top) \otimes D\mathcal{G}(s(t))) \right] E(t) \\ & = \eta E^\top(t)(I_N \otimes I_n)E(t) + g_a E^\top(t) \left[(\bar{\mathcal{A}} + D_{\mathcal{A}}) \otimes \Gamma \right] E(t) \\ & \quad + g_b E^\top(t) \left[(\bar{\mathcal{B}} + D_{\mathcal{B}}) \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t)\end{aligned}\tag{5.3.18}$$

con $D_{\mathcal{A}} = \text{Diag}(A_1, A_2, \dots, A_N)$, $D_{\mathcal{B}} = \text{Diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)$, $\bar{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\bar{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definidas en (5.3.14) y (5.3.15), respectivamente.

Como $\bar{\mathcal{A}}$ es una matriz con entradas reales, simétrica e irreducible, entonces existe una matriz unitaria e invertible $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $\Theta\Theta^\top = I_N$, tal que

$$\Theta \bar{\mathcal{A}} \Theta^\top = \Lambda_{\bar{\mathcal{A}}} = \text{Diag}(\lambda_1(\bar{\mathcal{A}}), \lambda_2(\bar{\mathcal{A}}), \dots, \lambda_N(\bar{\mathcal{A}}))\tag{5.3.19}$$

donde $\lambda_i(\bar{\mathcal{A}})$ es el i -ésimo valor propio asociado a la matriz $\bar{\mathcal{A}}$. Además, estos valores propios se pueden ordenar de forma decreciente, tal como: $0 = \lambda_1(\bar{\mathcal{A}}) > \lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) \geq \dots \geq \lambda_N(\bar{\mathcal{A}})$ [2]. Luego, proponemos el siguiente cambio de variables

$$\Upsilon(t) = (\Theta^\top \otimes I_n)E(t)\tag{5.3.20}$$

donde $\Upsilon(t) = (y_1^\top(t), y_2^\top(t), \dots, y_N^\top(t))$, con $y_k(t) \in \mathbb{R}^n$ y $\Upsilon(t)^\top \Upsilon(t) = E(t)^\top (I_N \otimes I_n) E(t)$. Observé que $\lambda_1(\bar{\mathcal{A}}) = 0$ es un valor propio de $\bar{\mathcal{A}}$ y su vector propio correspondiente es $y_1(t) = (1/\sqrt{N}, 1/\sqrt{N}, \dots, 1/\sqrt{N})^\top$, tal que

$$y_1(t) = (u_1^\top \otimes I_n)E(t) = 0.\tag{5.3.21}$$

Utilizando las ecuaciones (5.3.19), (5.3.20) y (5.3.21) en (5.3.18) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \eta E^\top(t)(I_N \otimes I_n)E(t) + \Upsilon(t)^\top \left[g_a \Lambda_{\mathcal{A}} \otimes \Gamma \right] \Upsilon(t) + g_a E^\top(t) \left[D_{\mathcal{A}} \otimes \Gamma \right] E(t) \\
 &\quad + g_b E^\top(t) \left[(\bar{\mathcal{B}} + D_{\mathcal{B}}) \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t) \\
 &= \eta E^\top(t)(I_N \otimes I_n)E(t) + \sum_{k=1}^N g_a \lambda_k(\bar{\mathcal{A}}) y_k(t)^\top \Gamma y_k(t) + g_a E^\top(t) \left[D_{\mathcal{A}} \otimes \Gamma \right] E(t) \\
 &\quad + g_b E^\top(t) \left[(\bar{\mathcal{B}} + D_{\mathcal{B}}) \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t) \\
 &\leq \eta E^\top(t)(I_N \otimes I_n)E(t) + \sum_{k=1}^N g_a \lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) y_k(t)^\top \Gamma y_k(t) + g_a E^\top(t) \left[D_{\mathcal{A}} \otimes \Gamma \right] E(t) \\
 &\quad + g_b E^\top(t) \left[(\bar{\mathcal{B}} + D_{\mathcal{B}}) \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t) + E^\top(t) \left[(\alpha_a I_N - \alpha_a I_N) \otimes \Gamma \right] E(t) \\
 &\leq E^\top(t) \left[(\eta I_N \otimes I_n) - (\alpha_a I_N \otimes \Gamma) \right] E(t) + g_b E^\top(t) \left[(\bar{\mathcal{B}} + D_{\mathcal{B}}) \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t) \\
 &\quad + E^\top(t) \left[(\alpha_a I_N + g_a(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) I_N + D_{\mathcal{A}})) \otimes \Gamma \right] E(t). \tag{5.3.22}
 \end{aligned}$$

De manera análoga, $\bar{\mathcal{B}}$ es una matriz con entradas reales, simétrica y con suma por renglones igual a cero. Realizando los mismos pasos que en las ecuaciones (5.3.19), (5.3.20) y (5.3.21) en la ecuación (5.3.22) para la matriz $\bar{\mathcal{B}}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= E^\top(t) \left[(\eta I_N \otimes I_n) - (\alpha_a I_N \otimes \Gamma) \right] E(t) + \Upsilon(t)^\top \left[g_b \Lambda_{\mathcal{B}} \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] \Upsilon(t) \\
 &\quad + E^\top(t) \left[(\alpha_a I_N + g_a(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) I_N + D_{\mathcal{A}})) \otimes \Gamma \right] E(t) + g_b E^\top(t) \left[D_{\mathcal{B}} \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t) \\
 &= E^\top(t) \left[(\eta I_N \otimes I_n) - (\alpha_a I_N \otimes \Gamma) \right] E(t) + \sum_{k=1}^N g_b \lambda_k(\bar{\mathcal{B}}) y_k(t)^\top D\mathcal{G}(s(t)) y_k(t) \\
 &\quad + E^\top(t) \left[(\alpha_a I_N + g_a(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) I_N + D_{\mathcal{A}})) \otimes \Gamma \right] E(t) + g_b E^\top(t) \left[D_{\mathcal{B}} \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t) \\
 &\leq E^\top(t) \left[(\eta I_N \otimes I_n) - (\alpha_a I_N \otimes \Gamma) \right] E(t) + \sum_{k=1}^N g_b \lambda_2(\bar{\mathcal{B}}) y_k(t)^\top D\mathcal{G}(s(t)) y_k(t) \\
 &\quad + E^\top(t) \left[(\alpha_a I_N + g_a(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) I_N + D_{\mathcal{A}})) \otimes \Gamma \right] E(t) + g_b E^\top(t) \left[D_{\mathcal{B}} \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t) \\
 &= E^\top(t) \left[(\eta I_N \otimes I_n) - (\alpha_a I_N \otimes \Gamma) - (\alpha_b I_N \otimes \eta_{\mathcal{G}} I_n) \right] E(t) \\
 &\quad + E^\top(t) \left[(\alpha_a I_N + g_a(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) I_N + D_{\mathcal{A}})) \otimes \Gamma \right] E(t) \\
 &\quad + E^\top(t) \left[(\alpha_b I_N + g_b(\lambda_2(\bar{\mathcal{B}}) I_N + D_{\mathcal{B}})) \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t) \tag{5.3.23}
 \end{aligned}$$

Reenombremos los sumando de (5.3.23) como:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \left(\frac{1}{2}\eta - \alpha_a \lambda_{\min}(\Gamma)\right) E^\top(t) \left[I_N \otimes I_n \right] E(t), \\
 V_2 &= \left(\frac{1}{2}\eta - \alpha_b \eta_{\mathcal{G}}\right) E^\top(t) \left[I_N \otimes I_n \right] E(t), \\
 V_3 &= E^\top(t) \left[(\alpha_a I_N + g_a(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) I_N + D_{\bar{\mathcal{A}}})) \otimes \Gamma \right] E(t), \\
 V_4 &= E^\top(t) \left[(\alpha_b I_N + g_b(\lambda_2(\bar{\mathcal{B}}) I_N + D_{\bar{\mathcal{B}}})) \otimes D\mathcal{G}(s(t)) \right] E(t),
 \end{aligned}$$

tal que $\dot{V}(t) \leq V_1 + V_2 + V_3 + V_4$, y analizamos cada uno de ellos para verificar si $\dot{V}(t) \leq 0$. Utilizando las condiciones para α_a y α_b de las ecuaciones (5.3.12) y (5.3.13) obtenemos que $V_1 \leq 0$ y $V_2 \leq 0$.

Ahora, para el sumando V_3 utilizamos la condición (5.3.12) y obtenemos

$$\begin{aligned}
 V_3 &= \sum_{k=1}^N \left(\alpha_a + g_a(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) + A_k) \right) e_k^\top(t) \Gamma e_k(t) \\
 &\leq \left(\alpha_a + g_a(\lambda_2(\bar{\mathcal{A}}) + \max_{1 \leq k \leq N} \{A_k\}) \right) \sum_{k=1}^N e_k^\top(t) \Gamma e_k(t) \leq 0 \quad (5.3.24)
 \end{aligned}$$

ya que $e_k^\top(t) \Gamma e_k(t) > 0$ para toda $k = 1, 2, \dots, N$ y para todo tiempo. Finalmente, para el sumando V_4 utilizamos la condición (5.3.13) y el supuesto **S2**, es decir, $D\mathcal{G}(s(t)) > 0$, obteniendo que

$$\begin{aligned}
 V_4 &= \sum_{k=1}^N \left(\alpha_b + g_b(\lambda_2(\bar{\mathcal{B}}) + B_k) \right) e_k^\top(t) D\mathcal{G}(s(t)) e_k(t) \\
 &\leq \left(\alpha_b + g_b(\lambda_2(\bar{\mathcal{B}}) + \max_{1 \leq k \leq N} \{B_k\}) \right) \sum_{k=1}^N e_k^\top(t) D\mathcal{G}(s(t)) e_k(t) \leq 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, con los sumandos $V_1 \leq 0$, $V_2 \leq 0$, $V_3 \leq 0$ y $V_4 \leq 0$ son no positivos, entonces se tiene que $\dot{V}(t) \leq 0$. Por lo que podemos concluir que el error de sincronización (5.3.9) es asintóticamente estable, y como consecuencia la hiperred dinámica (5.2.1) logra la sincronización completa. □

A continuación presentamos un ejemplo numérico de una hiperred de células excitables con la finalidad de ilustrar nuestro resultado teórico.

5.4. Un ejemplo: Sincronización idéntica en una hiperred de células excitables

Consideramos un conjunto de células excitables que se comunican por medio de sinapsis eléctrica y sinapsis química, modeladas en un arreglo de hiperred dinámica, donde consideramos que los nodos son modelos matemáticos que representan la actividad eléctrica de las células excitables y la estructura de conexión es representada por medio de un hipergrafo. Particularmente, en este ejemplo utilizamos el modelo de Hindmarsh-Rose [63] para representar la actividad eléctrica de cada una de las células excitables.

De modo que $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), x_{i3}(t)]^\top \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado de la i -ésima célula, y el modelo es descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax_{i1}(t)^3 + bx_{i2}(t)^2 + x_{i2} - x_{i3}(t) + I \\ e - dx_{i2}(t)^2 - x_{i2}(t) \\ \varepsilon(s(x_{i1}(t) + x_0) - x_{i3}(t)) \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t))$$

donde los parámetros $a = 1$, $b = 3$, $e = 1$, $d = 5$, $s = 4$, $x_0 = 0.795$, $\varepsilon = 0.795$ e $I = 3.2$. El modelo de Hindmarsh-Rose es un modelo adimensional, donde la primer variable de estado, x_{i1} , es relativa al potencial de membrana; la segunda variable de estado, x_{i2} , es relativa a la activación o inhibición de canales; y la tercer variable de estado, x_{i3} , es relativa a la concentración de agentes reguladores de la actividad eléctrica. En la Figura 5.1 se presenta los estados del modelo de Hindmarsh-Rose para una célula, donde es posible apreciar la dinámica rápida que genera los trenes de disparos en la actividad eléctrica y la dinámica lenta de la tercer variable de estado.

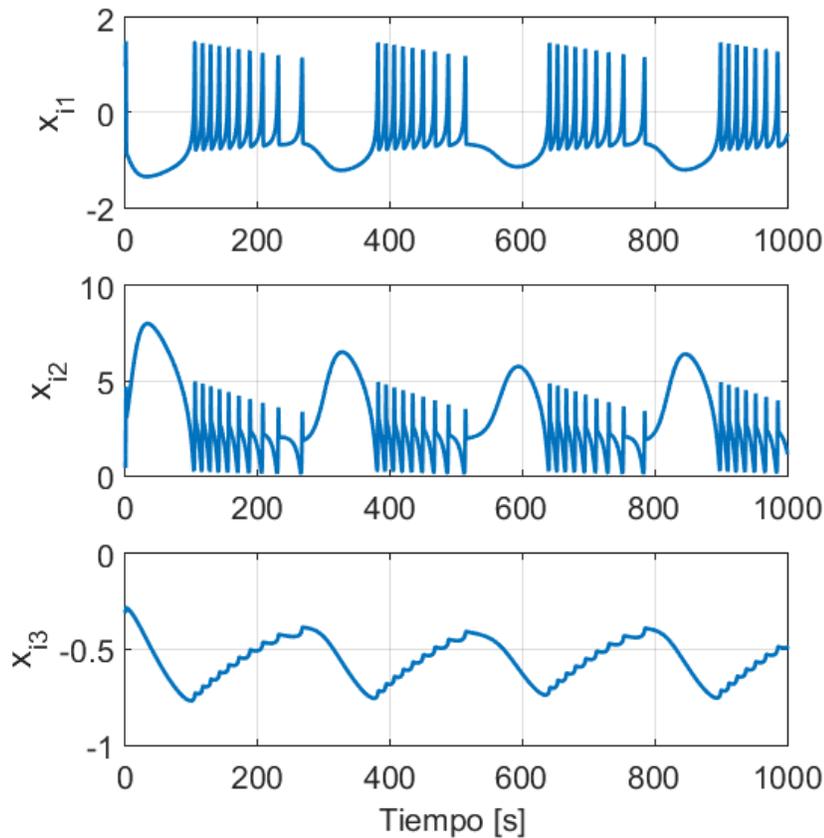


Figura 5.1: Solución numérica del modelo de Hindmarsh-Rose, con condiciones iniciales $x_0 = (1, 0.5, -0.3)^\top$

En general, la sinapsis es la unión intracelular especializada entre las células excitables, y esta unión ocurre cuando dos células se encuentran muy cercanas y sus membranas están equipadas para transmitir señales químicas o eléctricas. La sinapsis eléctrica surge por la unión de las membranas plasmáticas de las células, en donde la transmisión entre las células no se producen por la secreción de un neurotransmisor, sino por el paso de iones de una célula a otra a través de uniones tipo hendidura; las cuales son pequeños canales formados por acoplamiento proteicos, en células estrechamente adheridas. En estas conexiones la corriente fluye en ambos sentidos y prácticamente no hay retardos sinápticos. Sin embargo, los canales no siempre están abiertos y son modulados por agentes reguladores. Matemáticamente, este tipo de sinapsis se puede definir como una función de salida entre el potencial eléctrico de las células multiplicado por la conductancia eléctrica del canal, y la expresión está dada

por

$$I_{mn}(t) = g_{mn}(x_m(t) - x_n(t)) \quad (5.4.2)$$

donde g_{mn} es la conductancia del canal y x_m, x_n son los potenciales eléctricos de las membranas. Si consideramos al conjunto de N células, la sinapsis eléctrica se puede definir con

$$I_i(t) = \left[g \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), 0, 0 \right]^T, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.4.3)$$

donde se considera que la conductancia es uniforme $g > 0$; los elementos a_{ij} definen la conexión entre las células, además se supone que la matriz \mathcal{A} es simétrica y difusiva.

Por otra parte, la sinapsis química es un tipo de comunicación celular especializada entre las células excitables, esta función ocurre por la transmisión de información a partir de una sustancia química o neurotransmisor, de manera que el flujo de información no es continuo y puede ocurrir en múltiples conexiones a pesar de que los cuerpos no estén contiguos. Consideramos también que existen dos tipos de sinapsis química, sinapsis excitatoria y sinapsis inhibitoria. Matemáticamente, la sinapsis química se puede definir como una función de salida dada por

$$I_{mn} = g(x_m - x) \mathcal{G}(x_n) \quad (5.4.4)$$

donde, $g > 0$ es la conductancia de los canales iónicos y se considera uniforme, y $\mathcal{G}(x_n)$ es una función de salida no lineal que se aproxima a la función de difusión del neurotransmisor, la cual se considera que está dada por

$$\mathcal{G}(x_n) = [1 + \exp(\lambda(x_n - \theta))]^{-1} \quad (5.4.5)$$

donde θ es el umbral alcanzado por cada potencial de acción de la célula, y dicho umbral oscila entre -30 mV y -10 mV dependiendo del modelo; el parámetro λ es la constante excitación y x_n es el potencial sináptico de la membrana el cual define si la sinapsis excitatoria o inhibitoria, es decir, si $x_n > x_{rep}$ la sinapsis es excitatoria, mientras que si $x_n < x_{rep}$ la sinapsis es inhibitoria.

En este ejemplo, consideramos un conjunto de seis células excitables acopladas a través de dos tipos de sinapsis, esto es modelado por la hiperred dinámica (5.2.1), cuya ecuación de estado está dada por:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g_e \sum_{j=1}^6 a_{ij} \Gamma x_j(t) + g_q \sum_{j=1}^6 b_{ij} \mathcal{G}(x_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

donde $\Gamma = \text{Diag}(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, y $\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ está descrita en (5.4.5). Las matrices de acoplamiento para cada una de las redes están dadas por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Una representación del hipergrafo generado con estas matrices se presenta en la Figura 5.2, donde las líneas de color negro representan los enlaces el grafo generado con la matriz de acoplamiento \mathcal{A} , mientras que las flechas de color rojo representan los enlaces del grafo generado con la matriz de acoplamiento \mathcal{B} .

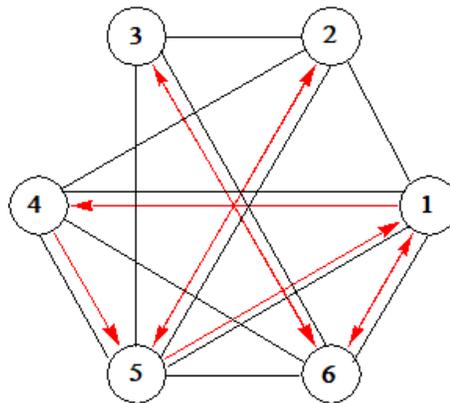


Figura 5.2: Hipergrafo para un arreglo de seis células excitables con dos tipos de acoplamiento.

Con la finalidad de satisfacer las condiciones del Teorema 5.3.1 para lograr la sincronización idéntica de la hiperred dinámica. Primero es necesario considerar la constante que satisface la condición **S1** para el modelo de Hindmarsh-Rose, la cual cumple si $\eta = 8$ para cualesquier solución de sincronización, $s(t)$. Por otro lado, calculando los eigenvalores de las matrices $\vec{\mathcal{A}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$ obtenemos:

$$\sigma(\vec{\mathcal{A}}) = \{0, -6, -8, -10, -12, -12\},$$

$$\sigma(\vec{\mathcal{B}}) = \{0, -0.654893, -1.74676, -3.45251, -5.42506, -6.72078\}.$$

Con estos valores, es posible calcular los valores de umbrales para la fuerza de acoplamiento de la hiperred dinámica, donde en este ejemplo deben de satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \alpha_a + g_a \left(\lambda_2(\vec{\mathcal{A}}) + \max_{1 \leq k \leq 6} \{A_k\} \right) &< 0, \text{ con } \alpha_a > 4, \\ \alpha_b + g_b \left(\lambda_2(\vec{\mathcal{B}}) + \max_{1 \leq k \leq 6} \{B_k\} \right) &< 0, \text{ con } \alpha_b > 4/\eta_G, \end{aligned}$$

Además, en este ejemplo se cumple que $\max_{1 \leq k \leq 6} \{A_k\} = 0$ y $\max_{1 \leq k \leq 6} \{B_k\} = 0$, ya que la suma por columnas de cada matriz es igual a cero.

A manera de ilustración en la Figura 5.3 se presenta la simulación numérica para una hiperred dinámica formada por seis nodos, cuya ecuación de estados está dada en (5.2.1). En esta simulación es posible observar la solución con respecto al tiempo de las tres variables de estado de cada célula, donde después de un tiempo de simulación de $t = 300$ se conectan en una hiperred dinámica con sus respectivas matrices de acoplamiento, y una fuerza de acoplamiento $g_a = 0.67$ y $g_b = 1.65$. Mientras que en la Figura 5.4 presentamos los errores de sincronización para los tres estados, donde es posible observar que dichos errores tienden a cero conforme el tiempo tiende a infinito. De modo que, se tiene una comprobación al menos numéricamente de como se logra la sincronización completa en la hiperred dinámica.

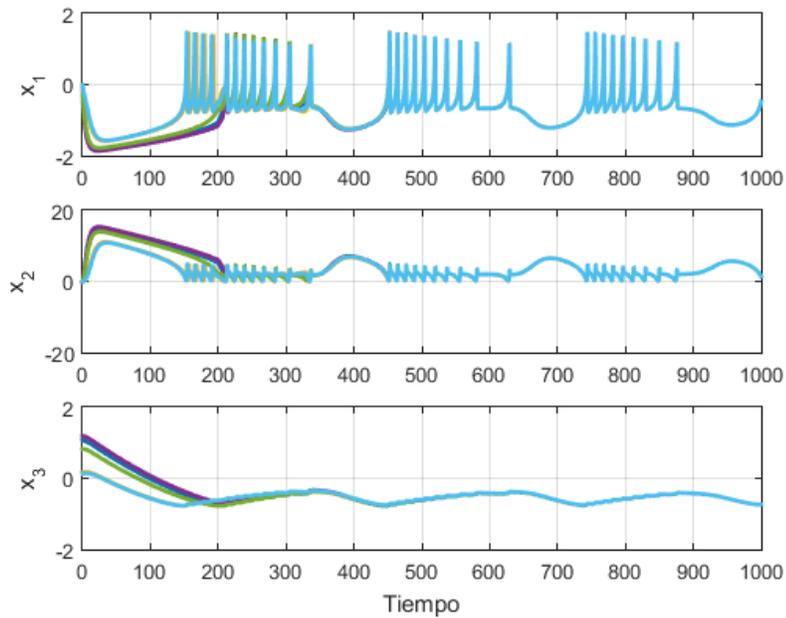


Figura 5.3: Simulación numérica para una hiperred (5.2.1) formada por seis nodos.

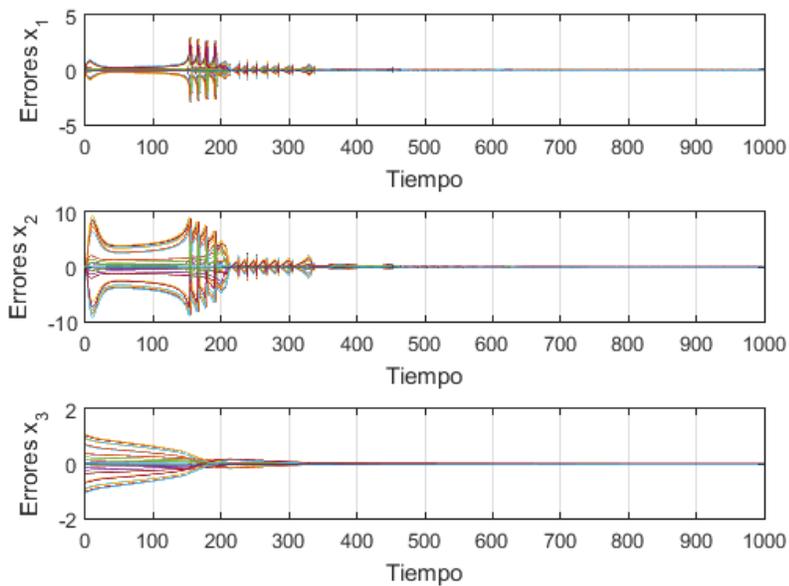


Figura 5.4: Error de sincronización de los estados de la hiperred dinámica (5.2.1)

En el siguiente capítulo presentamos las conclusiones de este trabajo, al igual que el trabajo a futuro de este tema de investigación.

CAPÍTULO 6

Conclusiones y trabajo a futuro

En este trabajo de tesis analizamos el surgimiento de comportamiento colectivos sincronizados para modelos de sistemas complejos bioinspirados. Una forma de investigar estos comportamientos es modelar el sistema complejo como un conjunto de N nodos, donde cada nodo es un sistema dinámico n -dimensional y las interacciones son representadas por un grafo. Naturalmente, en esta descripción del sistema muchos detalles pueden omitirse; sin embargo, aún en esta simplificación podemos capturar características esenciales de interés para el análisis del sistema complejo y sus comportamientos colectivos. Particularmente, en esta investigación nos enfocamos en el surgimiento del fenómeno de sincronización para distintas extensiones del modelo de red dinámica, donde consideramos incluir en el modelo diferentes fuentes de complejidad como: diversidad de nodos, interacciones entre distintos grupos de nodos y diversidad de enlaces. Por lo que se propusieron diferentes escenarios de estudio con la finalidad de establecer cómo las propiedades dinámicas y estructurales del sistema complejo tienen influencia en el comportamiento colectivo emergente.

Como punto de partida en este tema de investigación, consideramos un modelo de red dinámica simplificado, formado por nodos idénticos con acoplamiento uniforme, lineal, simétrico y difusivo. Para este modelo analizamos la estabilidad del estado sincronizado mediante funciones de Lyapunov, obteniendo así condiciones suficientes para garantizar la sincronización idéntica entre sus nodos.

Después de garantizar la sincronización idéntica en esta red dinámica, abordamos el problema de sincronización generalizada para dicho modelo de red. Con respecto a este proble-

ma se estudiaron las diferentes metodologías que detectan la sincronización generalizada en redes, tales como el método del sistema auxiliar y la sincronización controlada; optando por este último para resolver nuestro problema. Para el desarrollo de este problema consideramos que existe una transformación de coordenadas para cada nodo de la red. Al tomar en cuenta dichas transformaciones, es posible modificar el planteamiento del problema original, donde se buscamos la sincronización completa en una red de variables transformadas imponiendo con esto un mapeo de sincronización estático e independiente del tiempo que garantiza el surgimiento de la sincronización generalizada en las variables originales.

Por otra parte, en este trabajo de tesis también abordamos el problema de sincronización por clúster en una red de redes. Al respecto de este problema, por una parte se propone un modelo de red con nodos distintos y diferentes niveles de conexión. El modelo propuesto está inspirado en la biología y se basa en la organización de grupos de células, donde la estructura se determina por la descripción dinámica de los componentes como es el caso en el islote pancreático y, potencialmente, en la disposición de las células neuronales, modelando el sistema como una red de redes. En este sistema complejo, el estudio de formas alternativas de coordinación en el tiempo es importante, por lo tanto, la segunda parte de este problema consiste en abordar el problema de sincronización por clúster en el modelo propuesto, para esto realizamos un análisis de sincronización basado en funciones de Lyapunov, donde se determinan las condiciones bajo las cuales ocurre este comportamiento colectivo. Los resultados presentados muestran condiciones relativamente simples en la estructura de acoplamiento entre diferentes grupos, como condiciones de difusividad y simetría.

Finalmente, el tercer problema abordado fue el surgimiento de la sincronización idéntica en un modelo de red con enlaces de diferente naturaleza, es decir, se considera que la estructura de interconexión es presentada como un hipergrafo. Esta forma de presentar el modelo, resulta en una descripción elegante para sistemas dinámicos interconectados por dos o más tipos de enlaces. Para este modelo realizamos un análisis de sincronización basado en funciones de Lyapunov, donde obtenemos condiciones sencillas como cotas de las funciones de acoplamiento y acoplamiento difusivos en las diferentes estructuras de los grafos. De modo que, siempre y cuando estos supuestos se mantengan es posible garantizar la sincronización completa en una hiperred dinámica.

Con respecto al trabajo futuro en este tema de investigación se tienen algunas propuestas. Por un lado, nos podemos enfocar en modelos de redes ya planteados en los capítulos anteriores tales como una red dinámica controlada, una red de redes y una hiperred, y estudiar el surgimiento de otros fenómenos e sincronización en dichos modelos. Particularmente, para el modelo de red dinámica controlada es posible considerar el mismo fenómeno de sincronización generalizada controlada, sin embargo se busca establecer una estrategia de control llamada pinning, donde se reducen el número de controladores necesarios para lograr el objetivo de control. Otro problema que podríamos abordar es el surgimiento de la sincronización por fase o incluso la sincronización clúster en los modelos de red dinámica controlada o hiperred dinámica. Con respecto al modelo de red de redes se podría estudiar bajo que condiciones surge el fenómeno de sincronización externa.

Por otro lado, nos podemos enfocar en considerar otras fuentes de complejidad en los modelos de red propuestos, donde la pregunta de interés es determinar si el comportamiento colectivo establecido se mantiene, aún con las complejidades añadidas en los modelos. Por ejemplo, para el caso de red de redes se puede considerar que existen enlaces de diferente naturaleza, y con estas consideraciones se busca establecer las condiciones bajo las cuales surge la sincronización por clúster, o que otro tipo de comportamiento sincronizado puede ser establecido en este modelo.

En general, para los problemas planteados en este trabajo de tesis como las propuestas de trabajo a futuro, buscamos determinar como la dinámica individual de los nodos y la estructura de interacción entre elementos influyen en el surgimiento de un comportamiento colectivo estable del sistema complejo.

Productividad

Publicaciones en revistas

- A. Ruiz-Silva; J.G. Barajas-Ramírez. (2018). Cluster synchronization in networks of structured communities. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 113, pp: 169-177.

Congresos Internacionales

- 2015 Workshop on chaotic and nonlinear dynamics in circuits and systems sponsored by IEEE-CAS. Póster titulado: *Synchronization of pancreatic beta-cell models*.

Congresos Nacionales

- 51 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana 2018. Ponencia: *Sincronización en lazo abierto para redes no acopladas*. Octubre, 2018.
- Segundo Encuentro de Mujeres Matemáticas Mexicanas. Póster titulado: *Comportamiento síncrono en hiperredes de modelos de células excitables*. Abril, 2018
- XLVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Ponencia: *Sincronización en sistemas interconectados mediante enlaces de diferentes naturaleza*. Octubre, 2015

Divulgación

- Conferencia *Sincronización por clústeres en una red de redes*, impartida en el Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A.C., División de Matemáticas Aplicadas. Octubre, 2017.

Bibliografía

- [1] D. R. Chialvo. (2004). Critical Brain Networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 340(4): 756–765.
- [2] G. Chen; X. Wang; X. Li. (2015). *Fundamentals of complex networks: models, structures and dynamics*. Singapore: Wiley.
- [3] S. C. Manrubia; A. S. Mikhailov; D. H. Zanette. (2004). *Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems*. Singapore: World Scientific.
- [4] M. E. J. Newman. (2010). *Networks: An Introduction*. Nueva York: Oxford University Press.
- [5] S. Boccaletti; V. Latora; Y. Moreno; M. Chavez; D. U. Hwang. (2006). Complex Networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4–5): 175–308.
- [6] S. H. Strogatz. (2001). Exploring complex networks. *Nature*, 410(6825): 268–276.
- [7] D. J. Watts; S. H. Strogatz. (1998). Collective dynamics of ‘small–world’ networks. *Nature*, 393(6684): 440–442.
- [8] A. L. Barabási; R. Albert. (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439): 509–512.
- [9] M. Girvan; M. E. J. Newman. (2002). Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(12): 7821–7826.

- [10] J. Bang–Jensen; G. Z. Gutin. (2008). *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. London: Springer Science & Business Media.
- [11] M. E. J. Newman. (2004). Analysis of weighted networks. *Physical Review E*, 70(5): 056131.
- [12] M. E. J. Newman. (2003). The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45(2): 167–256.
- [13] J. Jeffrey. (2013). *Hypernetworks in the science of complex systems (Vol. 3)*. Singapore: World Scientific.
- [14] A. L. Hodgkin; A. F. Huxley. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117(4): 500–544.
- [15] N. F. Rulkov. (2002). Modeling of spiking–bursting neural behavior using two–dimensional map, *Physical Review E*, 65(4): 041922.
- [16] S. Fortunato. (2010). Community detection in graphs. *Physics Reports*, 486(3-5): 75–174.
- [17] J. G. Barajas–Ramírez. (2006). *Complex Networks: Topology, Dynamics and Synchronization* (Reporte Posdoctoral), FernUniversität in Hagen, pp. 72.
- [18] F. Sorrentino. (2012). Synchronization of hypernetworks of coupled dynamical systems. *New Journal of Physics*, 14(3): 033035.
- [19] N. Abaid; M. Porfiri. (2010). Fish in a ring: spatio–temporal pattern formation in one–dimensional animal groups. *Journal of The Royal Society Interface*, rsif20100175.
- [20] J. P. Mucha; T. Richardson; K. Macon; M. A. Porter; J. P. Onnela. (2010). Community structure in time–dependent, multiscale, and multiplex networks. *Science*, 328(5980): 876–878.
- [21] M. Kivela; A. Arenas; M. Barthelemy; J. P. Gleeson; Y. Moreno; M. A. Porter. (2014). Multilayer networks. *Journal of complex networks*, 2(3): 203–271.

-
- [22] S. N. Dorogovtsev; J. F. F. Mendes. (2003) *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Nueva York: Oxford University Press.
- [23] A. Barrat; M. Bathelemy; A. Vespignani. (2008). *Dynamical Processes on Complex Networks*. Nueva York: Cambridge University Press.
- [24] P. Erdős; A. Rényi. (1976). On the evolution of random graphs, *Selected Papers of Alfréd Rényi, vol. 2*, pp. 482—525.
- [25] B. Bollobás; W. Fulton; A. Katok. (2001). Cambridge studies in advanced mathematics. In *Random graphs*. New York: Cambridge University Press.
- [26] B. Hayes. (2000). Computing Science: Graph Theory in Practice: Part II. *American Scientist*, 88(2): 104–109.
- [27] C. W. Wu (2007). *Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems*. Singapore: World Scientific.
- [28] A. Pikovsky; M. Rosenblum; J. Kurths. (2003). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, Vol. 12*. New York: Cambridge University Press.
- [29] A. Arenas; A. Díaz–Guilera; J. Kurths; Y. Moreno; C. Zhou. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3): 93–153.
- [30] G. Abramson. (2013). La matemática de los sistemas biológicos. *Centro Atómico Barelloche, Instituto Balseiro y CONICET*.
- [31] X. F. Wang. (2002). Complex networks: topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(05): 885–916.
- [32] L. M. Pecora; T. L. Carroll. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters*, 80(10): 2109–2111.
- [33] Z. Li; G. Chen. (2006). Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 53(1): 28–33.

- [34] X. Y. Wang; J. M. Song. (2009). Synchronization of the fractional order hyperchaos Lorenz systems with activation feedback control, *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(8): 3351–3357.
- [35] X. Wang; Y. He. (2008). Projective synchronization of fractional order chaotic system based on linear separation, *Physics Letters A*, 372:435–441.
- [36] D. Lin; X. Y. Wang. (2010). Observer–based decentralized fuzzy neural sliding mode control for interconnected unknown chaotic systems via network structure adaptation, *Fuzzy Sets and Systems*, 161(15): 2066–2080.
- [37] Y. Xu; J. Zhang; W. Zhou; D. Tong. (2017). Adaptive synchronization of complex dynamical networks with bounded delay feedback controller. *Optik–International Journal for Light and Electron Optics*, 131: 467–474.
- [38] E. Steur. (2011). *Synchronous Behavior in networks of coupled systems*. (Tesis doctoral). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, pp. 188.
- [39] C. W. Wu; L. O. Chua. (1995). Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 42(8):430–447.
- [40] X. F. Wang; G. Chen. (2002). Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(1): 54–62.
- [41] W. Lu; T. Chen. (2009). Synchronisation in complex networks of coupled systems with directed topologies. *International Journal of Systems Science*, 40(9): 909–921.
- [42] M. Yang; Y. Liu; Z. You; P. Sheng. (2010). Global synchronization for directed complex networks. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11(3): 2127–2135.
- [43] C. Li; G. Chen. (2004). Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 343: 263–278.

-
- [44] H. Gao; J. Lam; G. Chen. (2006). New criteria for synchronization stability of general complex dynamical networks with coupling delays. *Physics Letters A*, 360(2): 263–273.
- [45] J. Cao; G. Chen; P. Li. (2008). Global synchronization in an array of delayed neural networks with hybrid coupling. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 38(2): 488–498.
- [46] N. Corson; M. A. Aziz–Alaoui. (2009). Complex emergent properties in synchronized neuronal oscillations. In *From System Complexity to Emergent Properties* (pp. 243–259). Berlin: Springer.
- [47] N. F. Rulkov; M. M. Sushchik; L. S. Tsimring; H. D. Abarbanel. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51(2): 980.
- [48] Q. Song; J. Cao; F. Liu. (2010). Synchronization of complex dynamical networks with nonidentical nodes. *Physics Letters A*, 374(4): 544–551.
- [49] W. Sun; Y. Wu; J. Zhang; S. Qin. (2015). Inner and outer synchronization between two coupled networks with interactions. *Journal of the Franklin Institute*, 352(8): 3166–3177.
- [50] E. Steur; J. G. Barajas-Ramírez; H. Nijmeijer. (2011). Synchronization and activation in model of a network of β cells. *Automatica*, 47(6): 1243–1248.
- [51] L. Chen. (2008). Cluster synchronization in a complex dynamical network with two nonidentical clusters, *Journal of Systems Science and Complexity*, 21(1): 20–33.
- [52] K. Wang; X. Fu; K. Li. (2009). Cluster synchronization in community networks with nonidentical nodes, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(2): 023106.
- [53] L. Zhou; C. Wang; S. Du; L. Zhou. (2017). Cluster synchronization on multiple nonlinearly coupled dynamical subnetworks of complex networks with nonidentical nodes, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 28(3): 570–583.

- [54] A. Anzo–Hernández. (2015). *Modelado y Análisis de Redes Evolutivas* (Tesis doctoral). Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, pp. 154.
- [55] S. Boccaletti; G. Ginestra; R. Criado; C.I. Del Genio; J. Gómez-Gardenes; M. Romance; I. Sendina–Nadal; Z. Wang; M. Zanin. (2014). The structure and dynamics of multilayer networks. *Physics Reports*, 544(1): 1–122.
- [56] E. Estrada, J. A. Rodríguez–Velázquez. (2006). Subgraph centrality and clustering in complex hyper-networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 364: 581-594.
- [57] C. Berge. (1984). *Hypergraphs: combinatorics of finite sets* (Vol. 45). Netherlands: Elsevier.
- [58] R. Criado; J. Flores; A. García del Amo; J. Gómez–Gardenes; M. Romance. (2012). A mathematical model for networks with structures in the mesoscale. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(3): 291–309.
- [59] J. Lü; X. Yu; G. Chen; D. Cheng. (2004). Characterizing the synchronizability of small-world dynamical networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part 1: Regular Papers*, 51(4): 787–796.
- [60] J. Lü; X. Yu; G. Chen. (2004) Chaos synchronization of general complex dynamical networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 334(1-2): 281–302.
- [61] G. Chen. (2014). Pinning control and synchronization on complex dynamical networks. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12(2): 221–230.
- [62] M. Pernarowski. (1998). Fast and slow subsystems for a continuum model of bursting activity in the pancreatic islet, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(5): 1667–1687.
- [63] E. Izhikevich. (2007). *Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting*. London: MIT press.

-
- [64] A. Sherman. (1997). 10. Calcium and membrane potential oscillations in pancreatic β -cells. In *Case Studies in Mathematical Modeling Ecology, Physiology, and Cell Biology*, pp. 203–223.
- [65] A. Sherman; J. Rinzel. (1991). Model for synchronization of pancreatic beta-cells by gap junction coupling. *Biophysical Journal* 59(3): 547–559.
- [66] M. Perez-Armendariz; C. Roy; D. C. Spray; M. V. L Bennett. (1991). Biophysical properties of gap junctions between freshly dispersed pairs of mouse pancreatic beta cells. *Biophysical Journal*, 59(1): 76–92.
- [67] M. G. Pedersen; R. Bertram; A. Sherman. (2005). Intra–and inter–islet synchronization of metabolically driven insulin secretion. *Biophysical Journal*, 89(1): 107–119.
- [68] J. G. Barajas–Ramírez; E. Steur;; R. Femat; H. Nijmeijer. (2011). Synchronization and activation in a model of a network of β -cells, *Automatica* 47(6): 1243–1248.
- [69] J. M. W. van de Weem. (2009). *Conditions for synchronization and chaos in networks of β -cells*. (Tesis maestría). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, pp. 84.
- [70] M. G. Rosenblum; A. S. Pikovsky; J. Kurth. (1996). Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical review letters*, 76(11): 1804–1807.
- [71] H. D. I. Abarbanel; N.F. Rulkov; M. M. Sushchik. (1996). Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Physical Review E*, 53(5): 4528–4535.
- [72] S. Boccaletti; J. Kurths; G. Osipov; D. L. Valladares; C. S. Zhou. (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1-2): 1–101.
- [73] C. Li; W. Sun; J. Kurths. (2007). Synchronization between two coupled complex networks. *Physical Review E*, 76(4): 046204.
- [74] A. Hu; Z. Xu; L. Guo. (2010). The existence of generalized synchronization of chaotic systems in complex networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 20(1): 013112.

- [75] X. Xu; Z. Chen; G. Si; X. Hu; P. Luo. (2008). A novel definition of generalized synchronization on networks and a numerical simulation example. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(11): 2789–2794.
- [76] S. G. Guan; X. G. Wang; X. F. Gong; K. Li; C. H. Lai. (2009). The development of generalized synchronization on complex networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(1): 013130.
- [77] D. Ning; X. Wu; J. A. Lu; J. Lü. (2015). Driving-based generalized synchronization in two-layer networks via pinning control. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(11):113104.
- [78] M. Sun; C. Zeng; L. Tian. (2010). Linear generalized synchronization between two complex networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(8): 2162–2167.
- [79] X. Wu; W. X. Zheng; J. Zhou. (2009). Generalized outer synchronization between complex dynamical networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(1): 013109.
- [80] Z. Zheng; X. Wang; M. C. Cross. (2002). Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators. *Physical Review E*, 65(5): 056211.
- [81] O. I. Moskalenko; A. A. Koronovskii; A. E. Hramov; S. Boccaletti. (2012). Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks. *Physical Review E*, 86(3): 036216.
- [82] S. Guan; X. Gong; K. Li; Z. Liu; C. H. Lai. (2010). Characterizing generalized synchronization in complex networks. *New Journal of Physics*, 12(7): 073045.
- [83] Y. C. Hung; Y. T. Huang; M. C. Ho; C. K. Hu. (2008). Paths to globally generalized synchronization in scale-free networks, *Physics Review E*, 77: 016202.

-
- [84] H. Liu; J. Chen; J.-A. Lua; M. Cao. (2010). Generalized synchronization in complex dynamical networks via adaptive couplings. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389: 1759–1770.
- [85] J. G. Barajas–Ramírez; K. Cuellar–Galarza; R. Femat. (2012). Generalized synchronization of strictly different systems: partial-state synchrony. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(3): 193–204.
- [86] J. G. Barajas–Ramírez. (2013). On the Generalized Synchronization of Complex Networks. En: AMCA 2013 Congreso Nacional, Ensenada Baja California, México. Octubre 2013. *Asociación de México de Control Automático*. pp:471–476.
- [87] J. Zhou; J. Chen; J. Lu; J. Lü. (2017). On applicability of auxiliary system approach to detect generalized synchronization in complex network. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(7): 3468–3473.
- [88] O. I. Moskalenko; A. A. Koronovskii; A. E. Hramov. (2013). Inapplicability of an auxiliary-system approach to chaotic oscillators with mutual-type coupling and complex networks. *Physical Review E*, 87(6):064901.
- [89] Y. Wu; C. Li; Y. Wu; J. Kurths. (2012). Generalized synchronization between two different complex networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(1): 349–355.
- [90] P. DeLellis; M. Di Bernardo; G. Russo. (2011). On QUAD, Lipschitz, and contracting vector fields for consensus and synchronization of networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 58(3): 576–583.
- [91] R. A. Horn; C. R. Johnson. (1990). *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press. Segunda Edición.
- [92] A. Ruiz-Silva; J.G. Barajas-Ramírez. (2018). Cluster synchronization in networks of structured communities. *Chaos, Solitons & Fractals*, 113: 169–177.

- [93] R. Milo; S. Shen-Orr; S. Itzkovitz; N. Kashtan; D. Chklovskii; U. Alon. (2002). Network motifs: simple building blocks of complex networks. *Science*, 298(5594): 824–827.
- [94] S. Gómez; A. Díaz-Guilera; J. Gómez-Gardeñes; C. J. Pérez-Vicente; Y. Moreno; A. Arenas. (2014). Diffusion dynamics on multiplex networks. *Physical Review Letters*, 110(2): 028701.
- [95] A. Solé-Ribalta; M. De Domenico; N. E. Kouvaris; A. Díaz-Guilera; S. Gómez; A. Arenas. (2013). Spectral properties of the Laplacian of multiplex networks. *Physical Review E* 88(3): 032807.
- [96] M. Liu; Y. Shao; X. Fu. (2009). Complete synchronization on multi-layer center dynamical networks, *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(5): 2584–2591.
- [97] R. Lu; W. Yu; J. Lü; A. Xue. (2014). Synchronization on complex networks of networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25(11): 2110–2118.
- [98] F. Sorrentino; L. M. Pecora; A. M. Haderstrom; T. E. Murphy; R. Rajarshi. (2016). Complete characterization of the stability of cluster synchronization in complex dynamical networks. *Science Advances*, 2(4): e1501737.
- [99] L. Huang; Y.-C. Lai.; R. Gatenby. (2008). Alternating synchronizability of complex clustered networks with regular local structure. *Physical Review E*, 77(1): 016103.
- [100] V.N. Belykh; I.V. Belykh; M. Hasler; K. V. Nevidin. (2003). Cluster synchronization in three-dimensional lattices of diffusively coupled oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(4): 755–779.
- [101] J. Zhang; Z. Ma; G. Zhang. (2013). Cluster synchronization induced by one-node clusters in networks with asymmetric negative couplings, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(4): 043128.

- [102] N. V. Belykh; I. V. Belykh ; M. Hasler. (2004). Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. *Physica D: nonlinear phenomena*, 195(1-2): 159-187.
- [103] F. Sorrentino; E. Ott. (2007). Network synchronization of groups. *Physical Review E*, 76(5): 056114.
- [104] D. Irving; F. Sorrentino. (2012). Synchronization of dynamical hypernetworks: dimensionality reduction through simultaneous block–diagonalization of matrices, *Physical Review E*, 86(5): 056102.
- [105] J.R. Carter; M. Douglas. (2016). *Synchronization in Dynamical Networks with Mixed Coupling*. (Tesis doctoral) Georgia State University. pp.180.
- [106] Z. Li; J. J. Lee. (2007). New eigenvalue based approach to synchronization in asymmetrically coupled networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 17(4): 043117.