



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Estudio de una clase de sistemas con dinámica inestable
para la generación de multiestabilidad**

Tesis que presenta

Erika Elizabeth Colón Hernández

Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Eric Campos Cantón

San Luis Potosí, S.L.P., Febrero de 2019



IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "***Estudio de una clase de sistemas con dinámica inestable para la generación de multiestabilidad***" presentada para obtener el Grado de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Erika Elizabeth Colón Hernández** y aprobada el **cinco de febrero del dos mil diecinueve** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Eric Campos Cantón

Director de la tesis

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

Jurado en el Examen

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada

Jurado en el Examen

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus

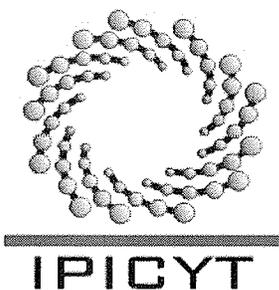
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Eric Campos Cantón.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (611203) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 037 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 5 días del mes de febrero del año 2019, se reunió a las 16:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus	Presidente	IPICYT
Dr. Eric Campos Cantón	Secretario	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Sinodal	IPICYT
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó la C.

Erika Elizabeth Colón Hernández

sobre la Tesis intitulada:

Estudio de una clase de sistemas con dinámica inestable para la generación de multiestabilidad

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Eric Campos Cantón

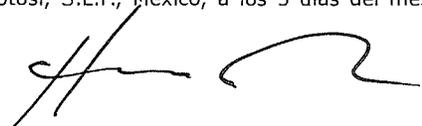
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 17:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 5 días del mes de febrero de 2019.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Hóracio Flores Zúñiga
Secretario Académico



Esta tesis la dedico primeramente a mis padres, que gracias a ellos y sus esfuerzos he podido cumplir una meta mas.

Gracias a toda mi familia, en especial a mi abuelita que desde el cielo junto con Dios me cuida y me protege.

Agradecimientos

A mi familia, mi papá Jose Luis, mi mamá Martina, mis hermanos Toño y Fany, y mi sobrina Malanie. Porque gracias a su apoyo y consejo he llegado a realizar la más grande de mis metas. La cual constituye la herencia más valiosa que pudiera recibir

Al Dr. Eric Campos por su paciencia y constante asesoría, por su constante motivación. Solo le puedo decir que el camino no ha sido fácil, pero la experiencia que gané es invaluable. Gracias por todo este tiempo trabajando juntos.

A mis amigos Carlos, Francisco, Nazul y Ricardo. Tal vez tengamos algunas diferencias y no compartamos algunos gustos, pero nos une una grandiosa amistad con la cual podemos contar en todo momento y lugar.

Al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por las facilidades otorgadas para la realización de esta tesis. A los investigadores, técnicos y compañeros por compartir sus conocimientos conmigo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado mediante la beca 611203 para realizar mis estudios de maestría

Índice general

Constancia de aprobación de la tesis	II
Créditos Institucionales	III
Acta de examen	IV
Dedicatorias	V
Agradecimientos	VI
Resumen	X
Abstract	XI
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Introducción a multiestabilidad	4
1.3. Motivación	6
1.4. Hipótesis	7
1.5. Objetivos	7
1.6. Contenido de la tesis	7
2. Definiciones y conceptos básicos sobre sistemas dinámicos	11
2.1. Teoría de los sistemas dinámicos	11
2.1.1. Clasificación de los sistemas dinámicos	12
2.1.2. El análisis dinámico en el plano de fase	13
2.2. Teoría de estabilidad	14
2.3. Caracterización de los puntos de equilibrio	17
2.4. Disipatividad de los sistemas	20
2.5. UDS tipo I y UDS tipo II	21
2.6. Multiestabilidad	24
2.6.1. Un ejemplo de multiestabilidad en la dinámica del clima	24
3. De sistemas inestables a multienroscados	27
3.1. Transformar el sistema inestable a un sistema UDS-I	30
3.2. Máximo intervalo de inestabilidad <i>UDS</i>	31

3.3.	Generar multienroscados a través de sistemas PWL	35
3.3.1.	De inestabilidad a multienroscados	37
3.4.	Conclusiones	42
4.	Multiestabilidad	43
4.1.	Introducción a multiestabilidad	43
4.2.	Descripción del modelo	44
4.3.	Generar atractores multiestables	45
4.4.	Conclusiones	48
5.	Conclusiones y trabajo a futuro	49
5.1.	Conclusiones	49
5.2.	Trabajo a futuro	50
	Bibliografía	53
	Apéndice	57
A.		57

Índice de figuras

1.1. Biestabilidad en percepción visual	5
1.2. Simulación del sistema de Chua con los parámetros de $\alpha = 10.0$, $\beta = 14.87$, $m_0 = -0.68$ y $m_1 = -1.27$ y condición inicial $x_0 = (-0.1, -0.1, -0.1)^T$	6
1.3. Objetivo de manera gráfica	8
2.1. Una bola lanzada hacia arriba en un tubo vertical (izquierda) y una ilustración esquemática de su espacio de fase (derecha). El comportamiento dinámico de la pelota se puede visualizar como una trayectoria estática en el espacio de fase (flechas rojas). [1]	14
2.2. Retrato de fase para el péndulo amortiguado y no amortiguado [2]	16
2.3. Ejemplo de solución estable y estable asintóticamente	16
2.4. Clasificación de algunos puntos de equilibrio.	18
2.5. El subespacio estable E^s es el plano yz , y el subespacio inestable es el eje x	20
2.6. Representación del sistema de Lorenz con los parámetros de $a = 10$; $b = 28$; $c = 8/3$; y condición inicial $x_0 = (0.5, 1, 1)^T$	25
3.1. Representación de la trayectoria de un sistema inestable descrito por (3.11).	33
3.2. a) Atractor multienroscado generado a partir del UDS tipo I con condición inicial $x_0 = (0.2, 0, 0)^T$, b) proyección del atractor en el plano (x, y) , c) proyección del atractor en el plano (x, z)	40
3.3. Generación de cinco enroscados partiendo de cinco condiciones iniciales diferentes indicadas en diferente color.	41
4.1. Generación de cinco atractores coexistiendo partiendo de cinco condiciones iniciales diferentes marcadas con color diferente.	47

Resumen

Existen diferentes fenómenos tanto naturales como en procesos hechos por el hombre, los cuales pueden ser modelados a través de ecuaciones diferenciales, las cuales resultan ser de gran utilidad en el estudio de estos fenómenos para poder determinar sus estados pasados y futuros.

Ya que podemos encontrar reportados en la literatura, la generación de sistemas multi-enroscados, a partir de sistemas estables a través de desestabilizar el sistema y mediante una función lineal por partes poder generar los multienroscados, adicionalmente se encuentra la generación de multiestabilidad partiendo de sistemas *UDS* tipo *I* y *II*, aunque los sistemas *UDS* son inestables, no se ha encontrado hasta el momento la generación de sistemas multienroscados partiendo de sistemas inestables (con todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo).

Nuestro objetivo es poder caracterizar que tipo de sistemas inestables del tipo propuesto son útiles para transformarlos a sistemas *UDS* para generar los multienroscados y finalmente obtener multiestabilidad, pero sin olvidar que la multiestabilidad está en dependencia del sistema inestable propuesto originalmente.

Para esta tesis trabajamos en \mathbb{R}^3 y sólo con sistemas *UDS-I*, usamos la matriz de un sistema en su forma canónica controlable, esto por ser la forma más simple de poder analizar y controlar el sistema, nuestro primer paso es encontrar ciertas condiciones que deben cumplir los parámetros de una matriz en su forma canónica controlable para poder obtener sistemas inestables con todos sus eigenvalores del lado derecho del plano complejo, para después definir la abscisa de inestabilidad, este valor nos dará un margen donde podemos variar un parámetro para poder diseñar un control u , donde al aplicarle el control a nuestro sistema inestable obtendremos un sistema *UDS-I* útil para generar multienroscados.

Podemos encontrar en la literatura la generación de sistemas multiestables a partir de sistemas disipativos inestables de tipo I y de tipo II, pero en este trabajo nos enfocamos en la creación de sistemas multiestables a partir de un sistema inestable del tipo propuesto, para transformarlo a un sistema *UDS-I*, que a su vez será útil para la generación de los multienroscados mediante la función lineal por partes (*PWL*), y así mediante un parámetro de bifurcación obtener la multiestabilidad.

Abstract

There are different phenomena both natural and man-made processes, which can be modeled through differential equations, which are very useful in the study of these phenomena to determine their past and future states.

As we can find reported in the literature, the generation of multi-scroll systems, from stable systems through destabilizing the system and through a linear function by parts to generate multi-scroll, additionally is the generation of multistability starting from systems *UDS* type *I* and *II*, although *UDS* systems are unstable, it has not been found so far the generation of multi-scroll systems based on unstable systems (with all their eigenvalues in the right half of the complex plane).

Our objective is to characterize what type of unstable systems of the type proposed are used to transform them into *UDS* systems to generate the multi-scroll and finally obtain multistability, but without forgetting that the multistability is dependent on the unstable system originally proposed.

For this thesis, we work in \mathbb{R}^3 and only with *UDS-I* systems, we use the matrix of a system in its controllable canonical form, this is the simplest way to analyze and control the system, our first step is to find certain conditions that must meet the parameters of a matrix in its controllable canonical form in order to obtain unstable systems with all their eigenvalues on the right side of the complex plane, to later define the abscissa of instability, this value will give us a margin where we can vary a parameter to be able to design a u control, where when applying the control to our unstable system we will obtain a *UDS-I* us system to generate multi-scroll

We can find in the literature the generation of multistable systems from unstable dissipative systems of type *I* and type *II*, but in this work we focus on the creation of multistable systems from an unstable system of the type proposed, to be transformed into a system *UDS-I*, which in turn will be useful for the generation of multi-threads through the linear function by parts (*PWL*), and thus through a bifurcation parameter obtain the multistability.

Capítulo 1

Introducción

“Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber”.
-Albert Einstein (1879-1955)-

Los sistemas biológicos, meteorológicos, dispositivos tecnológicos, etc, generan oscilaciones y muchas de ellas han sido modeladas matemáticamente por ecuaciones diferenciales ordinarias con parámetros adecuados para asegurar comportamientos oscilatorios.

Muchos de estos fenómenos no lineales observados en la naturaleza y en los dispositivos hechos por el hombre han sido descritos por sistemas lineales por partes, por sus siglas en inglés mejor conocidos como (*PWL*), debido a su simpleza y a la riqueza de sus comportamientos dinámicos: ciclos límite, órbitas homoclínicas y heteroclínicas, atractores caóticos, etc.

Los sistemas lineales por partes se basan en sistemas de conmutación que consisten en un conjunto de subsistemas y una señal de conmutación. [3]

Algunas de las leyes y fenómenos de la naturaleza pueden ser modelados y descritos mediante ecuaciones diferenciales, lo cual es una aproximación de la realidad que nos permite conocer a partir de los estados del sistema en un instante dado los estados pasados y futuros del mismo.

En la literatura [4], [5], [6], podemos encontrar reportada la generación de atractores multienrosados, partiendo de sistemas estables, a grandes rasgos, lo que se reporta es la generación de un familia monoparamétrica de sistemas disipativos con dinámica inestable y la forma de diseñar el control u , para llevar el sistema estable a una clase de sistema disipativo inestable tipo I , (Un eigenvalor real negativo y un par de eigenvalores complejos con parte

real positiva).

En [7] se presentan algunas de las condiciones que debe cumplir el sistema *UDS* para poder generar los sistemas multienroscados, en [6] podemos encontrar la definición de la abscisa para generar la inestabilidad de los sistemas estables y de esta manera poder generar los multienroscados.

Nuestro objetivo es poder generar multiestabilidad partiendo de un sistema inestable (todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo), ya que hasta la fecha no se ha encontrado la generación de multiestabilidad partiendo de sistemas inestables del tipo que estaremos trabajando.

Podemos encontrar reportada la generación de sistemas multienroscados a partir de un sistema estable transformarlo a *UDS* y mediante una función lineal por partes (*PWL*) obtener los atractores multienroscados, adicionalmente se genera multiestabilidad partiendo de sistemas *UDS* tipo *I* y tipo *II*. Los *UDS* tipo *I* (tipo *II*) en \mathbb{R}^3 son dados por un subespacio estable de dimensión 1 (dimensión 2) y un subespacio inestable de dimensión 2 (dimensión 1).

La importancia de este trabajo está en que partimos de un sistema inestable (con sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo), primeramente caracterizaremos los sistemas inestables que nos serán útiles para generar los atractores multienroscados.

Mediante la abscisa de inestabilidad podemos generar una familia de sistemas inestables para luego mediante la definición de disipatividad poder encontrar el intervalo de inestabilidad *UDS* donde es posible obtener los atractores multienroscados los cuales son generados a partir de una función lineal por partes, y por último poder generar la multiestabilidad a través de un parámetro de bifurcación.

1.1. Estado del arte

En la actualidad, la generación de atractores caóticos multienroscados ha sido ampliamente estudiada y ya no es una tarea muy difícil encontrar un conjunto de valores de parámetros fijos para generar atractores multienroscados.

Desde los trabajos de Suykens [8], Suykens y Vandewalle [9], varios mecanismos de generación de caos se investigan mediante el análisis de sus trayectorias y la implementación electrónica ([10], [11]).

Por ejemplo, Lü et al. (2004) introdujeron un enfoque de conmutación de series de histeresis utilizadas en una función de control discontinua. Otros métodos sistemáticos para generar atractores caóticos multienroscados que utiliza la función de control discontinuo son los sistemas lineales disipativos con dinámica inestable (*UDS*) los cuales los podemos ver

en [12], [13], [14], [15].

Por otro lado, existen métodos para crear atractores caóticos multienroscados utilizando funciones de control continuo, por ejemplo, mediante funciones de saturación [3] y así encontraremos en la literatura una gran cantidad de trabajos dedicados a la generación de atractores multienroscados [5], [6], [16] por mencionar algunas referencias.

En la evolución de un sistema complejo, existen varias cuencas de atracción posibles con un sumidero que atrapa la trayectoria del sistema en función de su estado inicial. Este fenómeno generalmente se llama multiestabilidad y aparece en una amplia variedad de sistemas complejos [4].

La interpretación correcta de un sumidero depende del sistema que se estudia. Por ejemplo, en el contexto de la biología, hay muchos ejemplos de sistemas que manifiestan fenómenos de multiestabilidad. Un ejemplo que vale la pena mencionar es la diferenciación celular para comprender el desarrollo humano y las distintas formas de enfermedades. Aquí, la multiestabilidad se entiende como un proceso en el que una red de regulación genética se alterna a lo largo de varios tipos posibles de células.

Otro ejemplo proviene de la dinámica química no lineal, donde la multiestabilidad se entiende como diferentes estados químicos finales posibles. Se pueden citar varios ejemplos que van desde medicina, electrónicos, percepción visual, etc. [17]

Referente a los trabajos reportados que fueron la base y la motivación para desarrollar este trabajo podemos señalar a manera de resumen la contribución que se presentó, y así poder entender un poco más que fue lo que nos motivó a la realización de la presente tesis.

En [6] se presenta un enfoque para generar atractores multienroscados a través de la desestabilización de sistemas lineales basados en la matriz de Hurwitz. Se presentan algunos resultados sobre la abscisa de estabilidad de polinomios característicos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Luego se aplica la abscisa como una medida para desestabilizar el polinomio de Hurwitz para la generación de una familia de atractores multienroscados basada en una clase de sistemas disipativos inestable (UDS) de tipo lineal afín.

El artículo [6] se considera la base de nuestro trabajo, pues nosotros realizamos de una manera similar teniendo en cuenta que estamos partiendo de un sistema inestable. Por ello no podemos aplicar de igual forma la técnica presentada en [6], ya que para nuestros sistemas inestables, es necesario hacer algunas modificaciones en cuanto a las definiciones y las técnicas de control.

Por ejemplo en [6] se maneja la desestabilización del polinomio Hurwitz por medio de la abscisa. En nuestro caso para el polinomio característico asociado a la matriz inestable, es necesario definir la abscisa de inestabilidad, estos nombres fueron asignados en referencia al trabajo base, el motivo es como ya mencionamos, por que utilizamos una técnica muy similar a la presentada en [6].

Para lograr el resultado de multiestabilidad, fue un poco mas sencillo el proceso, puesto que ya existe teoría relacionada a la generación de sistemas multiestables, partiendo de sistemas *UDS* de tipo *I* y tipo *II*, fue más sencillo poder encontrar el parámetro de bifurcación para nuestro sistema, pero claro hay que remarcar que nuestro sistema multiestable se basa en el sistema inestable del modo propuesto, y en la literatura se genera la multiestabilidad a partir de un sistema *UDS*. Otra cosa que hay que notar es que sólo trabajamos con sistemas *UDS-I*.

1.2. Introducción a multiestabilidad

Multiestabilidad en los sistemas biológicos

La existencia de múltiples regímenes de funcionamiento es esencial para los sistemas biológicos ya que presentan flexibilidad funcional en respuesta a diversos estímulos. Fue en el contexto de una investigación del sistema metabólico [18], que la multiestabilidad fue discutida por primera vez en términos de la teoría de sistemas dinámicos. La presencia de múltiples atractores tiene significado biológico fundamental, en particular en la diferenciación celular.

Biestabilidad en percepción visual

La multiestabilidad ocurre cuando un solo estímulo físico produce alternancias entre diferentes percepciones subjetivas. La capacidad múltiple se describió por primera vez para la visión, donde ocurre, por ejemplo, cuando se presentan estímulos diferentes a los dos ojos o para ciertas figuras ambiguas (figura 1.1). Desde entonces ha sido descrito para otras modalidades sensoriales, incluyendo audición, tacto y olfato.

Las características clave de la multiestabilidad son:

- (i) los estímulos tienen más de una organización perceptiva plausible.
- (ii) estas organizaciones no son compatibles entre sí.

La mayoría si no es que todos los casos de multiestabilidad se basan en la competencia al seleccionar y vincular la información del estímulo. Vinculación se refiere al proceso por el cual los diferentes atributos de los objetos en el entorno, tal como se representan en la matriz sensorial, están unidos dentro de nuestros sistemas perceptivos, para proporcionar una coherente interpretación del mundo que nos rodea. [19]

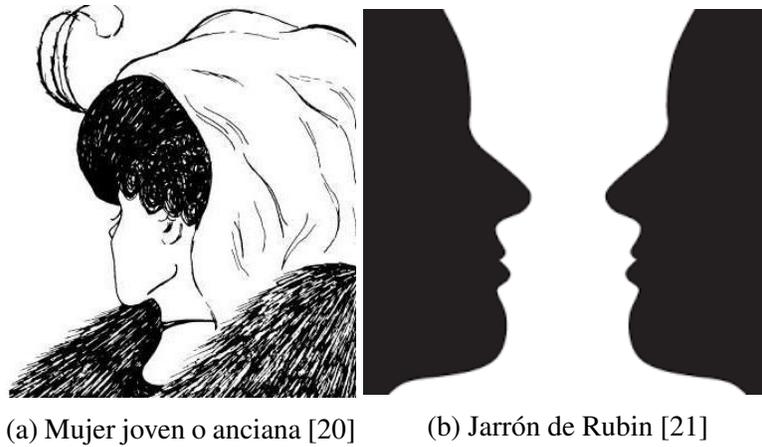


Figura 1.1: Biestabilidad en percepción visual

Generación de sistemas dinámicos multiestables a través del circuito de Chua [22]

El circuito de Chua es tal vez una de las contribuciones más importantes a la teoría de sistemas caóticos construidos a partir de cuatro elementos lineales (un resistor, un inductor y dos capacitores) y un resistor no lineal de dos terminales caracterizado por una curva voltaje-corriente de 5 segmentos (se toma en cuenta sólo tres de los cinco segmentos ya que los dos restantes no juegan un papel importante).

El circuito de Chua es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(-x + y - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|), \tag{1.2}$$

es la función *PWL* de tres segmentos. El sistema contiene tres puntos de equilibrio hiperbólicos tipo silla, para los valores $\alpha = 10.0$, $\beta = 14.87$, $m_0 = -0.68$ y $m_1 = -1.27$, se tiene el siguiente multienroscado, el cual lo podemos ver en la figura (1.2)

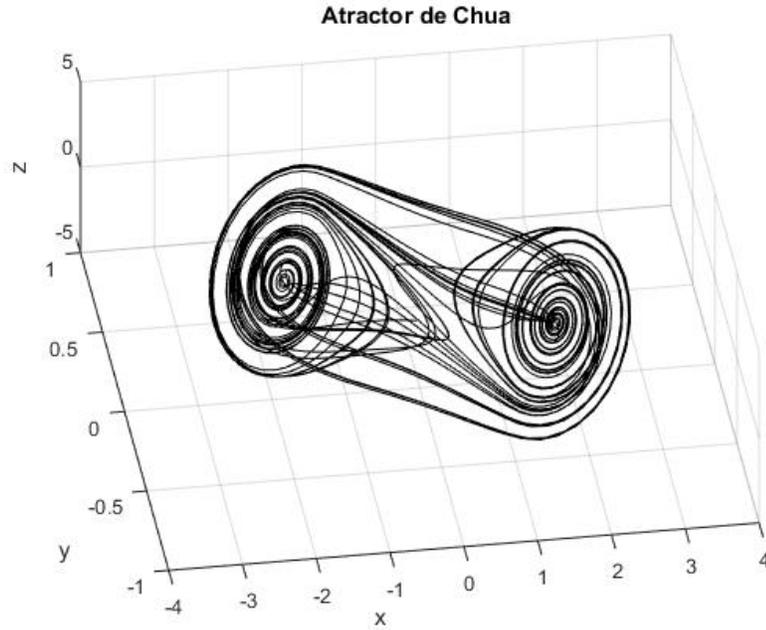


Figura 1.2: Simulación del sistema de Chua con los parámetros de $\alpha = 10.0$, $\beta = 14.87$, $m_0 = -0.68$ y $m_1 = -1.27$ y condición inicial $x_0 = (-0.1, -0.1, -0.1)^T$.

1.3. Motivación

En la actualidad, modelar y describir los procesos existentes tanto en la naturaleza como en los procesos hechos por el hombre son una tarea muy importante, pues resulta útil e importante poder reproducir por medio de modelos matemáticos la dinámica de los fenómenos naturales, biológicos, sociales, entre otros.

Para una mayor comprensión de los procesos que no son tan sencillos de predecir, ya que la multiestabilidad se encuentra en forma natural en muchos de estos fenómenos de investigación, es por ello que modelar estos fenómenos a través de ecuaciones matemáticas es un proceso importante para analizar y describir el comportamiento de dicho fenómeno, lo cual derivó en la generación de sistemas dinámicos multiestables.

En la actualidad es de suma importancia generar sistemas multiestables debido a la amplia variedad de aplicaciones que se tienen, por mencionar algunas, en sincronización [23], [24], redes complejas [25], [26], comunicación [27], procesos del clima [28], entre otras aplicaciones.

Ya que la mayoría de estos sistemas presenta una alta sensibilidad ante cualquier perturbación, es de alta importancia la generación de los sistemas multiestables, ya que pueden contribuir al estudio sobre las técnicas de control para compensar esta sensibilidad a dichas perturbaciones [29].

1.4. Hipótesis

En la literatura se encuentra reportada la generación de atractores multienroscados partiendo de sistemas estables, en esta tesis nos interesa desarrollar la generación de sistemas multienroscados a partir de sistemas inestables de tal forma que los eigenvalores estén todos en el semiplano derecho del plano complejo, para esto consideramos un sistema lineal autónomo de la forma

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.3)$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es un operador lineal.

Partiendo de un sistema que presenta puntos de equilibrio inestables (es decir, todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo), hay que encontrar una familia de estos puntos de equilibrio tal que se pueda transformar a sistemas disipativos inestables (UDS) útiles para generar multienroscados.

1.5. Objetivos

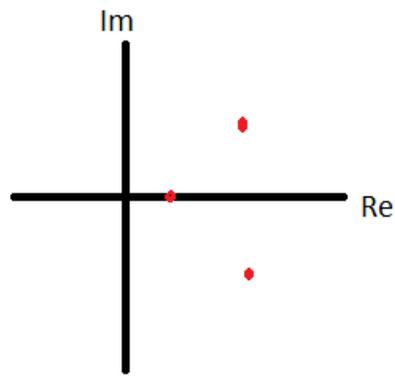
Como objetivo en esta tesis nos propusimos generar un sistema dinámico multiestable basado en sistemas lineales por partes con dinámica inestable, para lograr este objetivo nos planteamos los siguientes objetivos particulares:

- Caracterizar los sistemas inestables que pueden ser transformados a sistemas disipativos inestables útiles para generar atractores.
- Construir una familia monoparamétrica tal que los sistemas presenten puntos de equilibrio inestables.
- Generar atractores multienroscados basados en sistemas PWL.
- Generar multiestabilidad basada en sistemas PWL por medio de controlar sus variedades estable e inestable respectivamente.

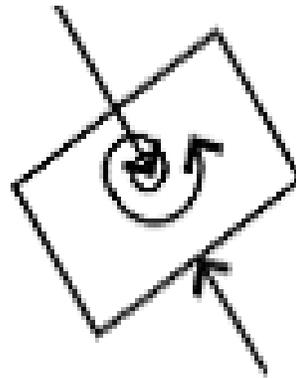
A continuación en la figura (1.3) podemos ver una representación gráfica del objetivo de esta tesis, podemos observar que partiendo de un sistema inestable, pasando por un sistema *UDS-I* generar multienroscados y finalmente obtener multiestabilidad.

1.6. Contenido de la tesis

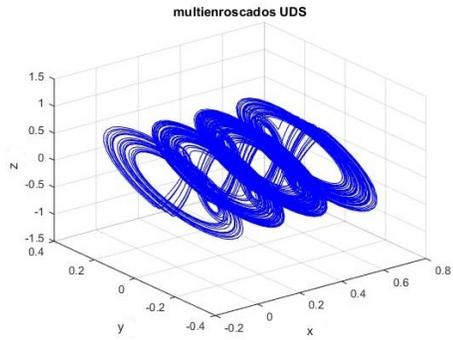
Esta tesis está dividida en 5 capítulos, en el capítulo 1 se presentan brevemente los antecedentes de trabajos encontrados en la literatura, con base a ellos presentamos nuestra motivación donde planteamos la generación de multienroscados a partir de sistemas inestables, es decir que los eigenvalores del sistema se encuentren en el semiplano derecho del plano complejo, además presentamos cual es la hipótesis que nos lleva a la realización de este trabajo, formulándonos un objetivo general, donde para poder cumplir dicho objetivo



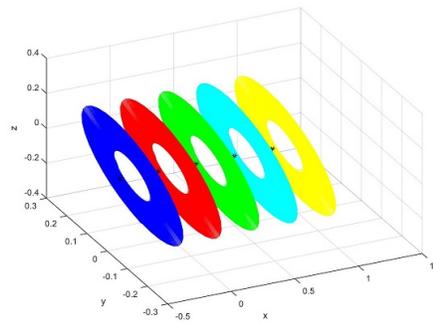
(a) Sistema inestable



(b) Sistema *UDS*



(c) Multienroscados



(d) Multiestabilidad

Figura 1.3: Objetivo de manera gráfica

nos propusimos cuatro puntos específicos.

En el capítulo 2 se presentan algunas definiciones necesarias para la realización de esta tesis, por ejemplo la definición de sistemas dinámicos, definiciones y clasificaciones de los diferentes puntos de equilibrio a través del concepto de estabilidad, así como la clasificación de los sistemas disipativos inestables (*UDS* por su sigla en inglés de Unstable dissipative system).

En el capítulos 3 se presenta la realización de este trabajo, se clasifican los sistemas inestables (con todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo), y presentamos la manera de como transformar estos sistemas a sistemas con punto de equilibrio tipo foco silla.

En el capítulo 4 se presenta la generación de multiestabilidad, que es generada a partir de un sistema inestable con todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo, luego transformar el sistema a un sistema *UDS-I* y a partir de este generar la multiestabilidad a través de un parámetro de bifurcación.

Por último en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y algunas propuestas de trabajo a futuro.

Capítulo 2

Definiciones y conceptos básicos sobre sistemas dinámicos

Ya que nuestro objetivo es generar un sistema multiestable, partiendo de un sistema inestable (todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo), cabe resaltar que sólo se trabajará en \mathbb{R}^3 , para posteriormente como trabajo a futuro tratar de extender este método a sistemas de orden mayor.

Primeramente se darán algunos conceptos y definiciones básicas sobre sistemas dinámicos para poder entrar a describir los sistemas inestables del tipo que se requieren para transformarlos a sistemas útiles para generar los multienroscados.

2.1. Teoría de los sistemas dinámicos

El sistema dinámico, se usa como sinónimo de sistema matemático o físico, en el que el comportamiento de salida evoluciona con el tiempo (y, a veces, con otros parámetros del sistema variables también). Las respuestas del sistema o comportamientos de un sistema dinámico se conocen como dinámica de sistema.

Definición 2.1. Sistema Dinámico [30]

Un sistema dinámico sobre E es un mapa $C^1 \Phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y si $\phi_t(x) = \Phi(t, x)$, entonces ϕ_t satisface

- *i) $\phi_0(x) = x$, para toda $x \in E$*
- *ii) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}(x)$, para toda $s, t \in \mathbb{R}$ y $x \in E$.*

Casi todos los fenómenos observados en nuestra vida diaria o en investigación científica tienen importantes aspectos dinámicos. Ejemplos específicos pueden surgir en sistemas físicos, sistemas sociales, ecología, crecimiento poblacional, sólo por mencionar algunos. Éstos son sólo ejemplos interesantes de sistemas dinámicos los cuales pueden ser representados

matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales.

Cuando se estudia matemáticamente una situación de la realidad, el modelo que se obtiene suele tener un carácter no lineal, siendo ésto lo que le proporciona, en la mayoría de los casos, una gran dificultad.

Uno de los procedimientos más utilizados dentro de las matemáticas, y de la ciencia en general, cuando se aborda un problema difícil, es considerar un problema más sencillo que sea, en algún sentido, una buena aproximación al anterior. Al estudiar este segundo problema se intenta obtener, de las conclusiones, algún tipo de resultados para el problema primitivo.

Una de las formas más usuales de simplificar el problema es linealizarlo. Si se quiere estudiar un problema no lineal, el primer paso obligado es estudiar el problema lineal asociado de la manera más completa posible para poder analizar así que ocurrirá en el caso no lineal [31].

2.1.1. Clasificación de los sistemas dinámicos

Discretos y continuos

Los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grandes clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente y en los que el tiempo transcurre discretamente.

Una clase de los sistemas dinámicos de tiempo continuo se expresan con ecuaciones diferenciales; éstas pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs), ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDEs) y ecuaciones diferenciales con retardos (DDEs).

Por otro lado si el tiempo es discreto los sistemas se describen por medio de ecuaciones en diferencias (DEs), también conocidas como mapas iterados. En lo referente a las ODEs sólo hay una variable independiente que es generalmente el tiempo.

Definición 2.2. *Sistemas dinámicos discretos y continuos [32]*

Sistema dinámico en tiempo discreto

$$x_t = F(x_{t-1}, t) \quad (2.1)$$

Este tipo de modelo es llamado ecuación en diferencia, ecuación de recurrencia, o mapa iterativo (si no hay dependencia de t en F)

Sistema dinámico en tiempo continuo

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (2.2)$$

este tipo de modelos es llamado ecuación diferencial.

Definición 2.3. *Un sistema dinámico continuo n -dimensional se puede representar por la ecuación*

$$\dot{x} = F(x) \quad (2.3)$$

donde $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\dot{x} = \frac{dx}{dt} \in \mathbb{R}^n$ y $F = [f_1(x) \dots f_n(x)]^T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

Sistemas dinámicos autónomos y no autónomos

Las leyes de la naturaleza son, desde la experiencia, independientes del tiempo. Por lo tanto, es posible encontrar sistemas autónomos por su descripción. Éstos son sistemas, para los cuales la velocidad de fase depende solo del estado del sistema (punto de fase) y no del tiempo: $\dot{x} = F(x)$.

Un sistema dinámico es autónomo si está representado por una **ecuación diferencial ordinaria autónoma** o no forzada de la forma

$$\dot{x} = F(x). \quad (2.4)$$

Mientras que si el sistema dinámico lo modela la ODE no autónoma o forzada

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (2.5)$$

el sistema dinámico es **no autónomo** [33]. La diferencia entre (2.4) y (2.5) radica en que la primera no contiene ningún estímulo externo al sistema dependiente que force el comportamiento natural de la dinámica del mismo, mientras que (2.5) sí.

La función que fuerza el comportamiento del sistema (2.5) puede ser constante, periódica, aleatoria, etc.

2.1.2. El análisis dinámico en el plano de fase

Los comportamientos de un sistema dinámico se pueden estudiar utilizando el concepto de un espacio de fase, que se define informalmente de la siguiente manera:

Definición 2.4. *Un espacio de fase de un sistema dinámico es un espacio teórico donde cada estado del sistema está asignado a una ubicación espacial única.*

La cantidad de variables de estado necesarias para especificar de forma exclusiva el estado del sistema se denomina grados de libertad en el sistema. Puede construir un espacio de fase de un sistema teniendo un eje para cada grado de libertad, es decir, tomando cada variable de estado como uno de los ejes ortogonales. Por lo tanto, los grados de libertad de un sistema son iguales a las dimensiones de su espacio de fase.

Por ejemplo, describir el comportamiento de una pelota lanzada hacia arriba en un tubo vertical sin fricción se puede especificar con dos variables escalares, la posición de la bola y

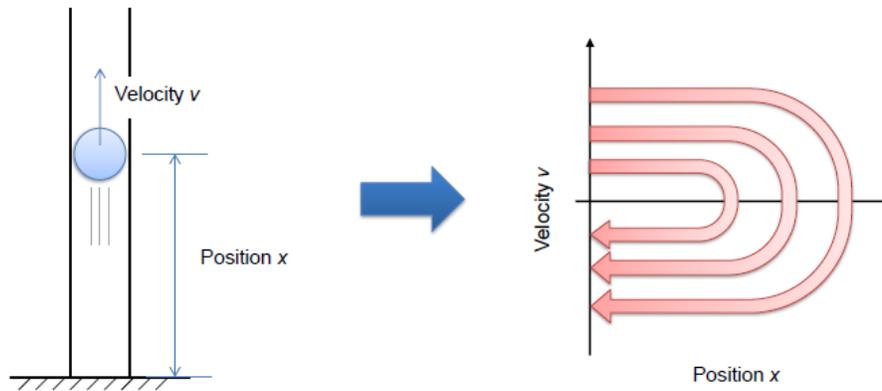


Figura 2.1: Una bola lanzada hacia arriba en un tubo vertical (izquierda) y una ilustración esquemática de su espacio de fase (derecha). El comportamiento dinámico de la pelota se puede visualizar como una trayectoria estática en el espacio de fase (flechas rojas). [1]

velocidad, al menos hasta que toque el fondo nuevamente. Podemos crear el espacio de dos dimensiones como se muestra en la figura 2.1 [32]

Al analizar un sistema autónomo no lineal bidimensional que tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Las dos funciones f y g juntas describen el campo vectorial del sistema.

A continuación, para sistemas de dimensión dos o tres, las variables de estado se denotarán como x , y y z . El camino recorrido por una solución del sistema planar (2.6), comenzando desde el estado inicial (x_0, y_0) , es una trayectoria de solución, o una órbita del sistema, y a veces se denota por $\varphi_t(x_0, y_0)$.

Para sistemas autónomos, el plano de coordenadas $x-\dot{x}$ se denomina plano de fase del sistema. En general, incluso si $y \neq \dot{x}$, el plano de coordenadas $x-y$ se denomina plano de fase (generalizado). En el caso de dimensión superior, se denomina espacio de fase del sistema dinámico subyacente. Además, la familia de órbita de un sistema autónomo, que corresponde a todas las condiciones iniciales posibles, se denomina flujo de solución en el espacio de fase.

La disposición gráfica del flujo de solución proporciona un retrato de fase de la dinámica del sistema en el espacio de fase, como se muestra en la figura (2.2). El retrato de fase de los sistemas del péndulo amortiguado y no amortiguado [34].

2.2. Teoría de estabilidad

Existen diferentes tipos de problemas de estabilidad que surgen en el estudio de sistemas dinámicos. La estabilidad de los puntos de equilibrio se suele caracterizar en el sentido de

Lyapunov, un matemático e ingeniero ruso que sentó las bases de la teoría que ahora lleva su nombre. Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones comenzando en puntos cercanos, se quedan cerca; de lo contrario, es inestable. Es asintóticamente estable si todas las soluciones que comienzan en puntos cercanos no solo permanecen cerca, sino que también tienden al punto de equilibrio a medida que el tiempo se acerca al infinito.

Para un sistema lineal invariante en el tiempo $\dot{x}(t) = Ax(t)$, la estabilidad del un punto de equilibrio $x = 0$ se puede caracterizar por completo por la ubicación de los valores propios de A .

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.7)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ dentro de \mathbb{R}^n . Suponemos $\bar{x} \in D$ es un punto de equilibrio de 2.7, que es

$$f(\bar{x}) = 0$$

Nuestro objetivo es caracterizar y estudiar la estabilidad de \bar{x} . Para mayor comodidad analizamos el caso donde el punto de equilibrio está en el origen de \mathbb{R}^n , esto es, $\bar{x} = 0$. No hay pérdida de generalidad porque cualquier punto de equilibrio puede ser trasladado al origen mediante un cambio de variables. Suponga $\bar{x} \neq 0$, y considere el cambio de variables $y = x - \bar{x}$. La derivada de y es dada por

$$\dot{y} = f(x) = f(y + \bar{x}) \cong g(y),$$

donde $g(0) = 0$.

En la nueva variable y , el sistema tiene el equilibrio en el origen, sin embargo, sin pérdida de generalidad, siempre asumiremos que $f(x)$ satisface $f(0) = 0$, y estudiaremos la estabilidad en el origen $x = 0$.

Definición 2.5. *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.7) es*

- **Estable** si, para cada $\epsilon > 0$ hay un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$$

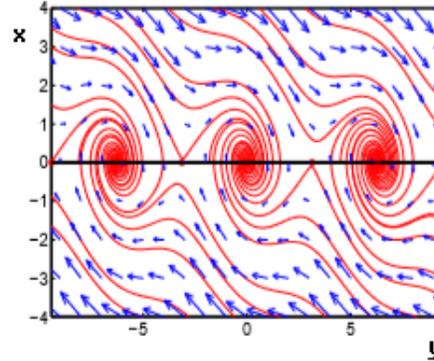
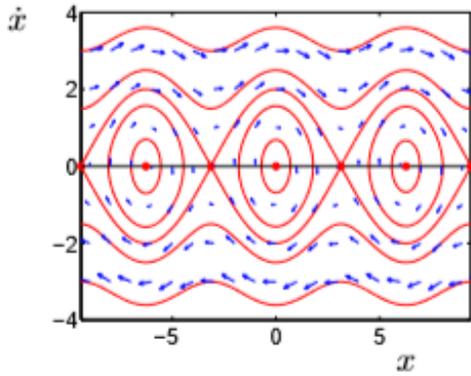
(ver figura 2.3 a)

- **Inestable** si no es estable
- **Asintóticamente estable** si es estable y δ se elige de tal manera que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

(ver figura 2.3 b)

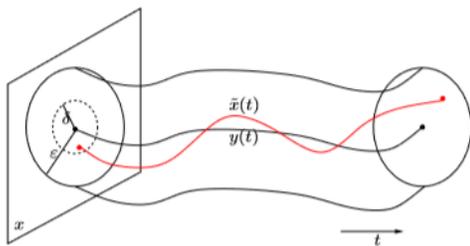
La elección de los valores de ϵ , δ para demostrar que el origen es estable, es un reto, entonces, para cualquier valor de ϵ , debemos producir un δ dependiente de ϵ tal que la trayectoria que empieza en una vecindad δ en el origen, nunca saldrá de la ϵ vecindad [35]



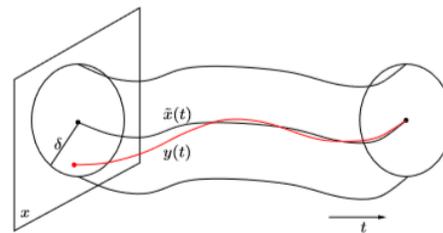
(a) Retrato de fase del péndulo no amortiguado con el origen como punto fijo y estabilidad de Lyapunov, y puntos inestables en $(\pm\pi, 0)$

(b) Retratos de fase del péndulo amortiguado con origen asintóticamente estable

Figura 2.2: Retrato de fase para el péndulo amortiguado y no amortiguado [2]



(a) Ejemplo de una solución estable en sentido de Lyapunov en una vecindad cercana



(b) Ejemplo de una solución asintóticamente estable en sentido de Lyapunov, la solución en una vecindad converge hacia la solución asintóticamente estable

Figura 2.3: Ejemplo de solución estable y estable asintóticamente

2.3. Caracterización de los puntos de equilibrio

A partir del sistema (2.7), considere el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.8)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n} = \mathcal{D}f(x^*)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados.

Los eigenvalores λ del sistema guardan una estrecha relación con los puntos de equilibrio ya que determinan la forma en que las trayectorias interactúan con el punto de equilibrio.

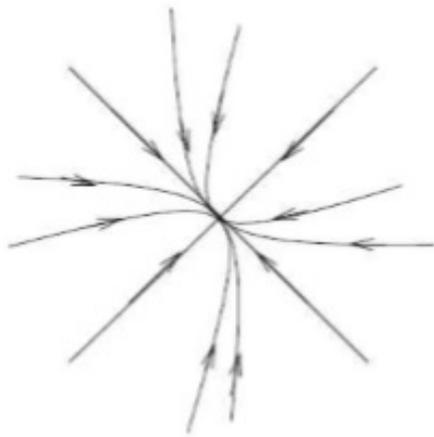
Definición 2.6. *Un punto de equilibrio es llamado **sumidero** si todos los eigenvalores de la matriz $\mathcal{D}f(x^*)$ tienen parte real negativa.*

*Se llama **fuelle** si todos los eigenvalores de $\mathcal{D}f(x^*)$ tienen parte real positiva.*

El caso más sencillo de analizar es cuando estamos en \mathbb{R}^2 ,

Con base en el comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos de equilibrio, éstos pueden ser [35]:

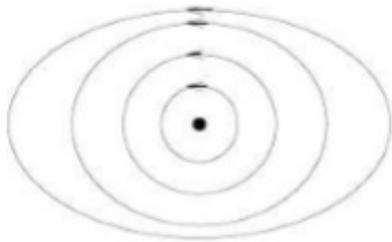
- **Nodo:** Cuando todas las trayectorias de la variable asociadas al equilibrio se acercan hacia él de forma no cíclica, tenemos un nodo estable (figura 2.4a); por el contrario, si las trayectorias se alejan del equilibrio de forma no cíclica estamos frente a un nodo inestable.
- **Foco:** Este punto es asintóticamente estable cuando todas las órbitas en sus proximidades tienden a él pero no entran en él. Los focos inestables (figura 2.4b) se producen cuando las trayectorias salen de él.
- **Centro:** Es tal que en sus proximidades todas sus órbitas son cerradas, ninguna órbita entra y ninguna sale. Este punto es neutralmente estable (figura 2.4c).
- **Punto silla:** Las trayectorias del sistema inicialmente tienden al punto pero después divergen de él. Este tipo de punto es inestable (figura 2.4d), nos encontramos con dos trayectorias rectas que se acercan al origen y otras dos trayectorias rectas que se separan del origen. Esto nos permite concluir, que todo punto de silla es inestable.



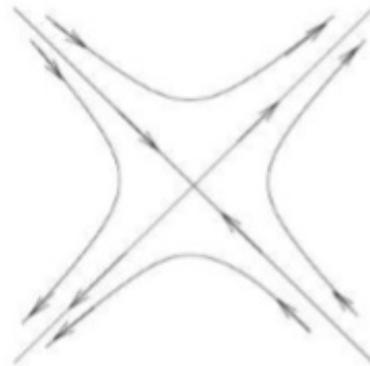
(a) Nodo estable



(b) Foco inestable



(c) Centro



(d) Punto silla

Figura 2.4: Clasificación de algunos puntos de equilibrio.

A continuación se presentan las características de los eigenvalores de $\dot{x} = Ax$ y su clasificación para los puntos de equilibrio [36].

Eigenvalores	Tipo de punto crítico	Estabilidad
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	nodo impropio	inestable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	nodo impropio	asintóticamente estable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	punto silla	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	nodo propio o impropio	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	nodo propio o impropio	asintóticamente estable
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta_i$	punto espiral	
$\alpha > 0$		inestable
$\alpha < 0$		asintóticamente estable
$\lambda_1 = \beta_i, \lambda_2 = -\beta_i$	centro	estable

Para el caso de \mathbb{R}^3 tenemos una combinación de los casos presentados en \mathbb{R}^2 , ya que estamos interesados el caso de \mathbb{R}^3 , y los sistemas con los que se han trabajado en la literatura reportada, son los definidos como sistemas disipativos inestables, los cuales se caracterizan por tener una raíz real y un par de complejos conjugados.

Estamos interesados en un tipo especial de puntos de equilibrio, que son los puntos tipo **foco silla**.

Antes de definir que es un punto de equilibrio foco silla, primeramente definimos la variedad estable W^s que en este caso por ser un sistema lineal es representada por el subespacio generado por los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores con parte real negativa, y la variedad inestable W^u es representada por el subespacio generado por los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores con parte real positiva.

El equilibrio tipo foco silla conecta las variedades estables e inestables W^s y W^u , respectivamente, que son responsables de expandir y contraer el atractor, sin embargo, el foco silla juega un papel importante en la generación de los atractores multienroscados. El equilibrio tipo foco silla de un sistema multienroscados en \mathbb{R}^3 puede ser caracterizado en dos tipos de acuerdo a su conjunto de eigenvalores $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subset \mathbb{C}$ [5].

(i) El equilibrio foco silla que es estable en una de sus componentes pero inestable y oscilatorio en las otras dos. Es decir el componente estable corresponde al eigenvalor real negativo, ($Re\{\lambda_i\} < 0$ y $im\{\lambda_i\} = 0$) mientras los componentes inestables son relacionados con los dos eigenvalores complejos conjugados ($Re\{\lambda_k\} > 0$ y $im\{\lambda_k\} \neq 0$).

(ii) El equilibrio foco silla, que es estable en dos de sus componentes pero inestable en la otra (figura 2.5). Esto es, los componentes disipativos son oscilatorios. ($im\{\lambda_k\} \neq 0$ y $Re\{\lambda_k\} < 0$) mientras el componente inestable corresponde al eigenvalor con parte real

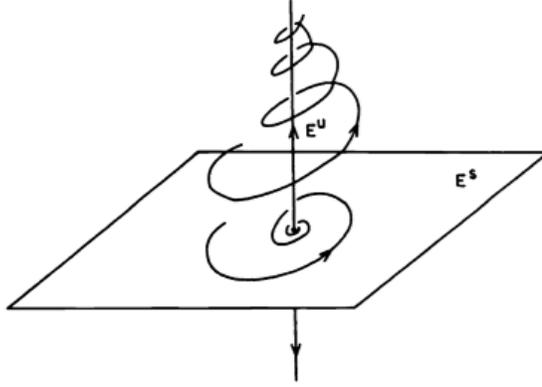


Figura 2.5: El subespacio estable E^s es el plano yz , y el subespacio inestable es el eje x

positiva ($Re\{\lambda_k\} > 0$ y $im\{\lambda_k\} = 0$).

2.4. Disipatividad de los sistemas

Considere el sistema no lineal descrito por la siguiente representación de espacio de estados.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ denota la variable de estados, $u \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ son entradas y salidas del sistema, respectivamente. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, y $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables. suponemos $f(0) = 0$, es decir el origen $x = 0$ es un equilibrio del sistema (con $u = 0$).

Definición 2.7. Para una función dada $s(u, y)$, si existe una función C^0 definida no negativa $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$V(x) \leq V(x_0) + \int_0^t s(u(\tau), y(\tau)) d\tau, \forall t \geq 0\tag{2.10}$$

se mantiene para cualquier entrada u y cualquier estado inicial $x_0 = x(0)$, entonces el sistema se dice disipativo. La función s es llamada tasa de suministro, y $V(x)$ es llamada función de almacenamiento.

Mas aún, si existe una función definida positiva $Q(x) > 0$ ($Q(0) = 0$) tal que la siguiente desigualdad se mantiene

$$V(x) - V(x_0) \leq \int_0^t s(u(\tau), y(\tau)) d\tau - \int_0^t Q(x(\tau)) d\tau \forall t \geq 0\tag{2.11}$$

Entonces el sistema se dice que es estrictamente disipativo [37].

La desigualdad (2.10) tiene su significado físico. Si consideramos la función de almacenamiento $V(x(t))$ como el valor actual de la energía total del sistema, y (u, y) denota la

energía suministrada por la señal externa u , entonces la disipación significa que el sistema es siempre con pérdida de energía durante el transitorio dinámico desde cualquier estado inicial x_0 a el estado actual $x(t)$, es decir, no hay energía generada desde el sistema interno.

La definición (2.7), presenta la definición de disipatividad a grandes rasgos para un sistema físico, a continuación se presenta el concepto de disipatividad [38].

El modelo matemático del sistema Jerk de tres ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden acopladas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= a_1x + a_2y + a_3z + b\end{aligned}\tag{2.12}$$

Equivalentemente el sistema 2.12 se puede reescribir en la forma general de Jerk como sigue

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x + a_3x + b = 0\tag{2.13}$$

con a_1, a_2, a_3 y $b \in \mathbb{R}$

En nuestro modelo podría obtenerse la tasa de contracción del volumen del oscilador definido en 2.12. Recordemos rápidamente que la tasa de contracción de volumen de un sistema dinámico de tiempo continuo descrito por $\dot{x} = \varphi(x)$, donde $x = (x, y, z)^T$ y $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))^T$ es dado por:

$$\Lambda = \nabla \cdot \varphi(x) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\tag{2.14}$$

Donde notamos que si Λ es constante, entonces la evolución del tiempo en el espacio fase es determinado por $V(t) = V_0 e^{\Lambda t}$, donde $V_0 = V(t = 0)$. Por lo tanto, un valor negativo de λ conduce a una contracción exponencial rápida del volumen en el espacio de estados, y el sistema dinámico es **disipativo** y puede desarrollar atractores.

Para $\Lambda = 0$, el volumen del espacio fase se conserva y la dinámica el sistema es conservativa. si Λ es positiva, el volumen en el espacio fase, se expande y por lo tanto solo existe inestabilidad, puntos fijos, ciclos o posiblemente repelentes caóticos, en otras palabras, la dinámica diverge al evolucionar (es decir para $t \rightarrow \infty$) si la condición inicia no coincide exactamente con uno de los puntos fijos o estados estacionarios [38].

2.5. UDS tipo I y UDS tipo II

Después de definir algunos tipos de puntos de equilibrio, y definir los tipos de variedades que podemos tener en un punto de equilibrio tipo foco silla, podemos definir dos tipos de sistemas disipativos inestables (*UDS*) [12].

Ya que estamos interesados en generar atractores extraños, primero se presenta una definición formal de lo que es un atractor extraño.

Definición 2.8. *Un sistema dinámico F es caótico en el sentido de Devaney [39] si:*

- *Los puntos periodicos de F son densos*
- *F es transitiva*
- *F presenta sencivilidad a las condiciones iniciales*

Para nuestro trabajo requerimos una definición menos formal, para esto tenemos la siguiente definición

Definición 2.9. *Un atractor extraño es aquel que tiene un movimiento aperiódico y es muy sensible a condiciones iniciales. En ocasiones surge cuando diferentes ciclos límite y puntos fijos tipo silla se encuentran en el sistema. Bajo ciertas condiciones dichos repulsores enviarán la trayectoria al infinito; sin embargo puede haber situaciones que la trayectoria se quede viajando de repulsor en repulsor, sin tender al infinito, haciendo una órbita aperiódica.*

Considere el sistema lineal dado por

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.15}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina la dinámica del sistema, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados. Una gran cantidad de información sobre el comportamiento de las soluciones es determinado por el operador lineal A de (2.15), y específicamente por sus eigenvalores $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, determinados por el polinomio característico asociado a la matriz A .

Un método conocido para saber la forma de las raíces de un polinomio de tercer grado, es a través del método de Tartaglia-Cardano, el cual lo podemos ver en el apéndice (A), donde podemos observar tres casos posibles para las raíces del polinomio, estos son:

- $\Delta < 0$, la ecuación tiene una raíz real y dos complejas conjugadas
- $\Delta = 0$, la ecuación tiene raíces múltiples y todas sus raíces son reales (puede ser una raíz triple ó una doble y una sencilla).
- $\Delta > 0$, la ecuación tiene tres raíces reales distintas

De tal manera que estamos interesados únicamente en los polinomios que tienen discriminante (Δ) menor que cero, ya que los sistemas UDS tienen un eigenvalor real y un par de complejos conjugados, elegimos el caso $\Delta < 0$ por simplicidad, por ser el caso mas parecido a la forma de las raíces que se estarán trabajando.

En el trabajo de Díaz González [6], se trabajan con sistemas estables, (las raíces del polinomio son una raíz real negativa y dos complejas conjugadas con parte real negativa). La idea de nuestra tesis es generar un sistema multiestable, partiendo de un sistema inestable

(con todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo), generar los multienroscados a través de la función *PWL*, y por último obtener multiestabilidad.

Los polinomios que nos interesan y que son útiles para generar los multienroscados son los que cumplen que el discriminante sea menor que cero, y para nuestro caso donde trabajaremos en \mathbb{R}^3 tenga un eigenvalor real positivo y dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva.

A continuación se presenta la definición de un sistema *UDS* tipo *I* y tipo *II*.

Definición 2.10. *El sistema se dice que es un sistema disipativo inestable tipo I (UDS-I) si $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ y un eigenvalor λ_i es real negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva.*

Definición 2.11. *El sistema se dice que es un sistema disipativo inestable tipo II (UDS-II) si $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ y un eigenvalor λ_i es real positivo y los otros dos son complejos conjugados con parte real negativa.*

En un *UDS-I* existen dos tipos de variedades: la variedad estable de una dimensión que es equivalente al eigenspacio estable $E^s = span\{v_1\}$, donde v_1 es el eigenvector asociado al eigenvalor λ_1 con $Re(\lambda_1) < 0$ y la variedad inestable de dos dimensiones que es equivalente al eigenspacio inestable $E^u = span\{v_2, v_3\}$ donde v_2, v_3 son los eigenvectores asociados a los eigenvalores λ_2, λ_3 con $Re(\lambda_2, \lambda_3) > 0$.

Este trabajo de tesis se trata de generar multienroscados a partir de sistemas inestables del tipo que sus eigenvalores se encuentran en la parte derecha del plano complejo conjugado, entonces se busca caracterizar los sistemas inestables que se pueden transformar a sistemas disipativos inestables (*UDS-I*) para generar multienroscados a través de una función lineal por partes (*PWL*).

Primeramente definimos que es una función lineal por partes (*PWL*)

Definición 2.12. *Una función lineal por partes *PWL* es dada de la siguiente manera*

$$S = \begin{cases} s_1, & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ \vdots & \vdots \\ s_k, & \text{si } x \in \mathcal{D}_k, \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $s_i \in \mathbb{R}$, \mathcal{D}_i representa los dominios que contendrán al punto $x^* = -A^{-1}B$, y además $\cup_{i=1}^k \mathcal{D}_i = \mathbb{R}^n$.

La misión de la función *PWL* es la de gobernar la dinámica del sistema por medio del cambio de ubicación de un equilibrio x_i^* hasta la posición x_j^* , $i \neq j$, cuando el flujo $\phi_t : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ cruza del dominio i al dominio j .

En la siguiente sección se da una breve introducción a multiestabilidad.

2.6. Multiestabilidad

En la literatura podemos encontrar multiestabilidad basada en sistemas de tipo *UDS*, este fenómeno se da por la forma en que están ubicadas las variedades estables e inestables que son las responsables de guiar la dinámica del sistema de un punto de equilibrio tipo foco silla a otro.

Definición 2.13. *En sistemas dinámicos, **Multiestabilidad** significa la coexistencia de diferentes estados estables finales posibles para un conjunto de parámetros dados. El estado final al cual el sistema convergerá, depende de las condiciones iniciales del sistema, es decir la dinámica del sistema correspondiente a uno de los atractores es definida por la condición inicial [15].*

La multiestabilidad es un fenómeno que se presenta de manera natural en muchos de los sistemas biológicos, naturales y en ocasiones en sistemas electrónicos hechos por el hombre, a continuación presentamos algunos de los muchos ejemplos que podemos encontrar donde se presenta la multiestabilidad.

2.6.1. Un ejemplo de multiestabilidad en la dinámica del clima

Dado que el clima está regulado por numerosos parámetros naturales y se caracteriza por diversas variables de estado, muchos estudios apoyan la idea de que la dinámica del clima es un carácter multiestable [40].

La coexistencia de atractores, se ha obtenido en la variabilidad atmosférica, la dinámica de la capa de hielo y la desertificación del Sahara. En cada uno de estos fenómenos el tamaño de las cuencas de atracción de los posibles estados pueden variar drásticamente; un estado en particular se determina por las condiciones iniciales y puede sufrir un cambio importante debido al ambiente ruidoso, por ejemplo, fluctuaciones aleatorias en la dirección del viento, la presión atmosférica y la temperatura.

Analizando la dependencia continua de las variables climáticas respecto de los datos iniciales, fue como el meteorólogo E.N. Lorenz popularizó, a partir de sus trabajos de 1960, la Teoría del Caos Determinista de los sistemas dinámicos no lineales, que se presenta también en diferentes ciencias como la Economía, Biología, etc.

Esta interacción entre las matemáticas y el clima se refiere al estudio del comportamiento de las soluciones de un sistema dinámico no lineal cuando el tiempo tiende a infinito.

A continuación se describen las ecuaciones del sistema de Lorenz y se muestra una representación gráfica del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(b - z) - y,\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - cz.$$

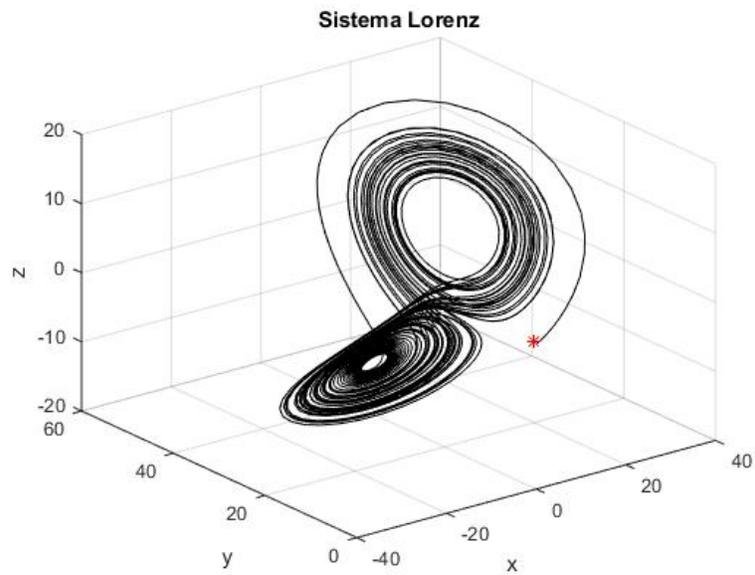


Figura 2.6: Representación del sistema de Lorenz con los parámetros de $a = 10$; $b = 28$; $c = 8/3$; y condición inicial $x_0 = (0.5, 1, 1)^T$.

Capítulo 3

De sistemas inestables a multienroscados

Antes de comenzar este capítulo, trataremos de dar una breve introducción a los sistemas multienroscados, recientemente la generación de atractores multienroscados ha sido ampliamente estudiada, y ya no es una tarea muy difícil encontrar un conjunto de parámetros que logren la generación de atractores multienroscados.

En general, un atractor multienroscado puede ser construido a partir de sistemas disipativos no lineales o por medio de sistemas disipativos lineales afín que involucran el uso de funciones *PWL*.

Para el caso que se maneja en esta tesis, se considera únicamente el uso de sistemas disipativos lineales afín de la forma siguiente:

$$\dot{x} = Ax + BS,$$

$$S = \begin{cases} s_1, & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ \vdots & \vdots \\ s_n, & \text{si } x \in \mathcal{D}_n, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $x = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado, $B = (0, 0, 1)^T$, $s_i = 1, \dots, n$, son números reales, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es un operador lineal y $\mathcal{D}_i \in \mathbb{R}^3$ es el dominio o región que contendrá el punto de equilibrio $x_i^* = -A^{-1}Bs_i$, tal que $\cup_{i=1}^n \mathcal{D}_i = \mathbb{R}^3$.

Para generar los sistemas multienroscados, se parte de un sistema inestable de tal manera que todos sus eigenvalores se localicen del lado derecho del plano complejo conjugado. Es importante poder caracterizar los sistemas inestables que son útiles para generar los multienroscados mediante una transformación adecuada.

Una aproximación conveniente para construir la matriz A y el vector B es con base en la ecuación diferencial ordinaria (ODE) escrita en la forma de Jerky [38]: $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x + \beta = 0$, donde el sistema conmutado puede ser representado por el sistema $\dot{x} = Ax + B$, donde

x es el vector de estados, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es un operador lineal, $B \in \mathbb{R}^3$ es un vector constante

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

y $B = (b_1, b_2, b_3)^T = (0, 0, -\beta)^T$, el polinomio característico de la matriz A esta dado por la forma

$$P_A(t) = t^3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3, \quad (3.3)$$

para que la matriz A sea inestable de la manera que la requerimos es necesario que se cumplan las siguientes condiciones.

Proposición 3.1. Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax$ donde $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, x es el vector de estados, sean a_3, a_2, a_1 números reales definidos por: $a_3 = \det(A) > 0$, $a_1 = \text{traza}(A) > 0$ y $a_2 < 0$, $\Delta = a_2^2 a_1^2 - 27a_3^2 + 18a_3 a_2 a_1 - 4a_3 a_1^3 - 4a_2^3 < 0$, el discriminante de la ecuación cúbica. donde la matriz A es de la forma canónica controlable,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

con el polinomio característico asociado a la matriz A dado por

$$P_A(t) = t^3 - a_1 t^2 + a_2 t - a_3$$

entonces el sistema A es un sistema inestable con un eigenvalor real positivo y dos eigenvalores complejos conjugados.

Demostración. Tenemos que $a_1, a_3 > 0$, $a_2 < 0$ y $\Delta < 0$. De acuerdo a la ley de los signos de Descartes, el polinomio de la forma $P_A(t) = t^3 - a_1 t^2 + a_2 t - a_3$ presenta los siguientes cambios de signo (+ - + -), por lo que tenemos tres cambios de signo, entonces tenemos una o tres raíces reales positivas, tenemos que $\Delta < 0$ entonces existe solo una raíz real y un par de complejos conjugados, por lo tanto se garantiza la existencia de una raíz real positiva.

Las raíces para un polinomio de tercer grado estan dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v - \frac{a_1}{3} \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{\sqrt{3}i}{2}(u - v) - \frac{a_1}{3} \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{\sqrt{3}i}{2}(u - v) - \frac{a_1}{3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}} \quad v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad p = \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right) \quad q = \frac{1}{27}(27a_3 - 9a_1a_2 + 2a_1^3)$$

La forma de las raíces complejas es dada por medio del método de Cardano el cual se puede consultar en el apéndice A.

Por lo tanto, se tiene una raíz real positiva y un par de complejos conjugados. \square

La forma de las raíces del polinomio pueden presentar varios casos, los cuales dependen del valor de $D = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ (ver apéndice A)

Los sistemas en los que estamos interesados son los sistemas inestables los cuales cumplen con tener un eigenvalor real positivo y un par de complejos con parte real positiva.

Los eigenvalores están dados de la forma

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1, \\ \lambda_{2,3} &= \alpha_2 \pm \alpha_3 i, \end{aligned}$$

Con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^+$, nos interesan solo los sistemas que cumplen con $0 < \alpha_1 < \alpha_2$.

Para ver el comportamiento de un sistema inestable del tipo propuesto, veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.24 & -2.65 & 0.86 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

donde se cumplen las condiciones de la proposición (3.1), cuyos eigenvalores son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0931, \\ \lambda_{2,3} &= 0.3835 \pm 1.5594i, \end{aligned}$$

donde tenemos que $\alpha_1 = 0.0931$, $\alpha_2 = 0.3835$ y $\alpha_3 = 1.5594$, y se cumple que $\alpha_1 < \alpha_2$.

Con base en la caracterización de los sistemas inestables del tipo que los necesitamos para nuestro trabajo, a continuación procedemos a transformar el sistema inestable en un sistema de tipo *UDS*. En nuestro caso cabe mencionar que se estará trabajando únicamente con sistemas del tipo *UDS-I*.

¿Que se pretende obtener o cual es el objetivo a lograr al transformar el sistema inestable a un *UDS-I*? Como lo mencionamos en capítulos anteriores un *UDS-I* es un sistema el cual tiene un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, ya que en nuestro sistema inestable los eigenvalores del sistema se manejan los tres con parte real positiva, la finalidad de la transformación es que el eigenvalor real positivo del sistema inestable lo podamos transformar en un eigenvalor real negativo y de esta manera

poder obtener un punto de equilibrio tipo foco silla que será el responsable de generar el sistema multienroscado.

En este capítulo abordaremos más a detalle el desarrollo de este método para transformar el sistema inestable a un sistema de tipo *UDS*.

3.1. Transformar el sistema inestable a un sistema UDS-I

Para poder transformar el sistema inestable a un sistema *UDS* tipo *I*, se procede de la siguiente manera:

Dado un polinomio característico asociado a la matriz inestable de la forma presentada en la proposición (3.1), (con todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo). Definamos algunos conceptos necesarios para llevar a cabo esta transformación.

Definición 3.1. Abscisa de Inestabilidad Dado un sistema inestable, cuyo polinomio característico está dado por $p(t) = t^3 - a_1t^2 + a_2t - a_3$, con sus eigenvalores todos del lado derecho del plano complejo dados de la siguiente manera: $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_{2,3} = \alpha_2 \pm \alpha_3i$, tal que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^+$, además $\alpha_1 < \alpha_2$ la abscisa de inestabilidad se define como $\sigma_u = \min\{Re\lambda_i | Re\lambda_i \in \mathbb{R}^+\}$.

Al cumplir el sistema con los eigenvalores de la forma mencionada, podemos observar que σ_u se refiere al valor a partir del cual podemos comenzar a mover el eigenvalor real positivo al lado izquierdo del plano, es decir, tenemos un margen donde podemos variar un parámetro r para transformar el sistema inestable a un sistema donde tenemos al menos un eigenvalor con parte real negativa y al menos un eigenvalor con parte real positiva.

Mencionando esto se procede al diseño de u para poder mover los eigenvalores. Recordemos que en [5] se propone una manera de diseñar u de tal manera que el polinomio estable sea transformado a un sistema de tipo *UDS*, en este caso seguiremos de manera similar para poder transformar el sistema inestable.

Lo que se busca es encontrar un intervalo para garantizar que el sistema transformado tendrá un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, esto se logra, aplicando una acción de control adecuada al sistema (1.3), de la siguiente manera

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (3.6)$$

donde A es una matriz inestable del tipo definido en la proposición (3.1). Necesitamos definir la forma de u , para esto tomamos el polinomio característico asociado al sistema inestable y la primera y segunda derivada, $P_A(t)$, $P'_A(t)$ y $P''_A(t)$, tomamos un valor de r definido como $r < -\sigma_u$, ya que lo que queremos es mover el eigenvalor real positivo al semiplano izquierdo del plano complejo, por lo tanto, sustituimos en las derivadas t por $-r$, de donde se obtienen $P_A(-r)$, $P'_A(-r)$ y $P''_A(-r)$

Definimos u de la siguiente manera

$$u = \left(-a_3 - \frac{p_A(-r)}{0!}, -a_2 - \frac{p'_A(-r)}{1!}, -a_1 - \frac{p''_A(-r)}{2!} \right) x, \quad (3.7)$$

donde al aplicar u a $\dot{x} = Ax + bu$, obtenemos la nueva matriz \bar{A} de la siguiente manera:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{p_A(-r)}{0!} & -\frac{p'_A(-r)}{1!} & -\frac{p''_A(-r)}{2!} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

en donde el nuevo polinomio característico asociado a la matriz \bar{A} esta dado por

$$\mathbb{P}_r = t^3 + \frac{p''_A(-r)}{2!}t^2 + \frac{p'_A(-r)}{1!}t + \frac{p_A(-r)}{0!}. \quad (3.9)$$

Esta nueva familia de polinomios (3.9) tiene un punto de equilibrio tipo foco silla, es decir al modificar el sistema inestable por medio de u , la nueva matriz \bar{A} tiene un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva.

Recordando la definición (2.10) para sistemas disipativos inestables, tenemos por condición que la suma de los eigenvalores sea negativa, para verificar que nuestro sistema modificado cumpla con la condición de disipatividad, se tiene que encontrar el máximo intervalo de inestabilidad para sistemas UDS tipo I , esto se logra de la siguiente manera.

3.2. Máximo intervalo de inestabilidad UDS

La idea de encontrar un intervalo máximo de inestabilidad UDS es que queremos que el sistema ya modificado nos garantice que se obtendrán siempre un polinomio de tipo $UDS-I$, en este caso, que nos garantice que tendremos siempre para cualquier valor r dentro del intervalo de inestabilidad UDS , un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva.

Además una condición para que los sistemas de tipo UDS puedan generar los atractores multienroscados es que la suma de los eigenvalores sea menor que cero, en este caso se conoce como condición de disipatividad.

A continuación se presenta la manera para encontrar el máximo intervalo de inestabilidad.

A partir del sistema (3.8) para los valores de $r < -\sigma_u$ se tiene la familia de polinomios inestables de la siguiente manera

$$\mathbb{P}_r = t^3 + \frac{p''_A(-r)}{2!}t^2 + \frac{p'_A(-r)}{1!}t + \frac{p_A(-r)}{0!}, \quad (3.10)$$

donde p_A es el polinomio inestable original.

Para la familia de polinomios \mathbb{P}_r , si $r = 0$ entonces el comportamiento de la solución del sistema es dado por el polinomio característico $P_A(t)$. Entonces podemos perturbar la variable r de tal manera que podamos mantener la misma dinámica inestable del sistema original.

Siguiendo este concepto, nos interesa conocer el máximo rango del valor de r tal que el sistema permanezca en *UDS-I*. El caso para $P_A(r)$ estable es llamado el problema de encontrar el máximo intervalo de estabilidad y fue estudiado por Bialas alrededor de 1985, en [41] podemos observar el desarrollo de este tipo de sistemas.

Un intervalo de inestabilidad *UDS* de la familia de polinomios \mathbb{P}_r es un intervalo $[a, b]$, si \mathbb{P}_r tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo $r \in [a, b]$ [7].

Lema 3.1. *Condición de disipatividad [5]*

La suma de las raíces del polinomio $P_A = a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4$ es negativa si y solo si $\frac{a_2}{a_1} > 0$.

Ya que las raíces de nuestro polinomio están dadas por $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_{2,3} = \alpha_2 \pm \alpha_3i$, y siendo $\alpha_1 < \alpha_2$ quiere decir que podemos comenzar a variar el valor del parámetro r a partir de la abscisa de inestabilidad, definiendo $r < -\sigma_u = -\alpha_1$, para poder obtener una raíz real negativa y un par de complejos conjugados con parte real positiva.

Ya que lo que queremos es mover una raíz al semiplano izquierdo del plano complejo, a partir de α_1 podemos comenzar a dar valores a r , y nuestro siguiente límite será α_2 que será el margen que tenemos para que el sistema no se transforme en estable.

De esta manera, el intervalo de inestabilidad *UDS* está dado por $(-\alpha_1, -\alpha_2)$, los signos menos están dados en relación a la forma de definir la abscisa de inestabilidad.

Con base en el lema (3.1), y a la descripción del intervalo de inestabilidad, se tiene la siguiente definición:

Definición 3.2. *Máximo intervalo de inestabilidad UDS*

Este intervalo se caracteriza por ser un intervalo donde podemos variar el valor de r para obtener un sistema inestable UDS, este intervalo está definido por la intersección del intervalo de inestabilidad y la condición de disipatividad, $(-\alpha_1, -\alpha_2) \cap (\frac{a_2}{a_1} > 0)$.

A continuación veremos un ejemplo donde transformaremos un sistema inestable a un sistema *UDS-I*. En este ejemplo lo que se busca es dar una ilustración del método presentado anteriormente, para transformar el sistema inestable a un sistema de tipo *UDS* y poder bosquejar el desarrollo seguido para encontrar una familia de polinomios útiles para generar los multienroscados.

Ejemplo 2. *Ejemplo de sistema inestable a UDS-I* Considera la matriz que cumple las

condiciones de la proposición (3.1) dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.15 & -2.36 & 0.687 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

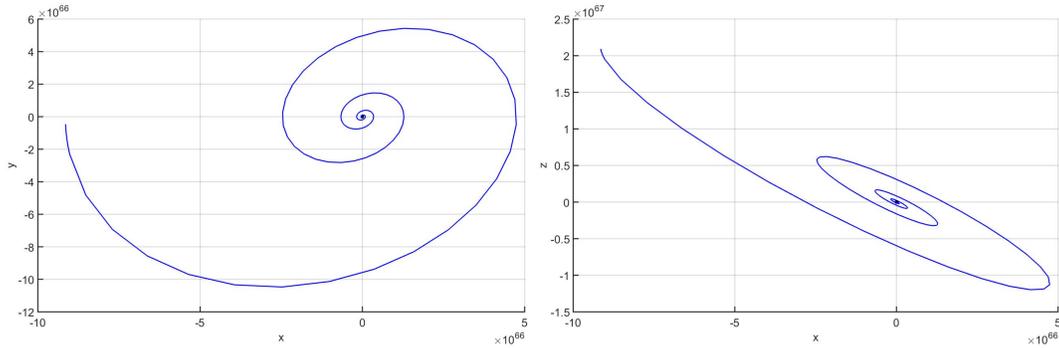
donde los eigenvalores son

$$\lambda_1 = 0.0647,$$

$$\lambda_{2,3} = 0.3112 \pm 1.4910i,$$

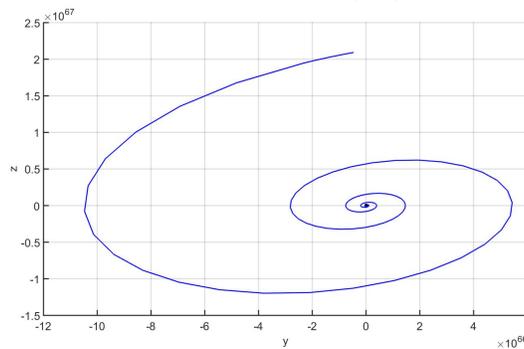
la abscisa de inestabilidad está dada por $\sigma_u = 0.0647$.

En las gráficas de la figura (3.1) podemos ver en la figura (a) la representación de la trayectoria del sistema inestable en el plano (x, y) , en la figura (b) y (c) la proyección sobre los planos (x, z) y (y, z) respectivamente.



(a) Proyección de la trayectoria inestable sobre el plano (x, y) .

(b) Trayectoria inestable proyectada sobre el plano (x, z) .



(c) Proyección de la trayectoria inestable sobre el plano (y, z) .

Figura 3.1: Representación de la trayectoria de un sistema inestable descrito por (3.11).

Ya que tenemos un sistema inestable del tipo que lo requerimos, el siguiente paso es transformar el sistema inestable a un sistema de tipo *UDS*, para esto, tomando el valor de la abscisa de inestabilidad $\sigma_u = 0.0647$ y dando un valor arbitrario $r < -\sigma_u$, adicionalmente necesitamos la primer y segunda derivada del polinomio $P(A)$ que es el polinomio característico asociado a la matriz A inestable, para este ejemplo tenemos

$$\begin{aligned} p_A(t) &= t^3 - 0.687t^2 + 2.36t - 0.15, \\ p'_A(t) &= 3t^2 - 1.374t + 2.36, \\ p''_A(t) &= 6t - 1.374, \end{aligned} \quad (3.12)$$

al sustituir en las derivadas t por $-r$, este cambio se debe a la forma en que está definida la abscisa de inestabilidad σ_u , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} p_A(-r) &= (-r)^3 - 0.687(-r)^2 + 2.36(-r) - 0.15, \\ p'_A(-r) &= 3(-r)^2 - 1.374(-r) + 2.36, \\ p''_A(-r) &= 6(-r) - 1.374, \end{aligned} \quad (3.13)$$

para algún valor de $r < -\sigma_u$, para este caso tomamos el valor de $r = -0.15$, u está dado de la siguiente manera:

$$u = \left(-a_3 - \frac{p_A(-r)}{0!}, -a_2 - \frac{p'_A(-r)}{1!}, -a_1 - \frac{p''_A(-r)}{2!} \right)_x, \quad (3.14)$$

al hacer la sustitución y aplicando u al sistema $\dot{x} = Ax + bu$, la matriz \bar{A} esta dada por:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1919 & -2.2214 & 0.2370 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

cuyos eigenvalores de la matriz \bar{A} son un eigenvalor real negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva dados por:

$$\lambda_1 = -0.0853,$$

$$\lambda_{2,3} = 0.1612 \pm 1.4909i,$$

ya que tenemos un sistema convertido a un sistema cuyos eigenvalores son de la forma necesaria para generar los multienroscados, necesitamos ahora garantizar que los eigenvalores de la familia de polinomios sea disipativo, es decir, hasta aquí hemos encontrado una familia de polinomios que nos generan un punto de equilibrio tipo foco silla, pero lo que necesitamos es garantizar que la suma de los eigenvalores del polinomio resultante es negativa, para garantizar esto, es necesario encontrar el máximo intervalo de inestabilidad *UDS*.

Buscamos encontrar el máximo intervalo de inestabilidad *UDS*, donde el sistema cumple con que su punto de equilibrio sea un tipo foco silla, y ademas se cumpla la condición de disipatividad, esto para poder garantizar que el sistema ya transformado a un sistema *UDS*

sea un buen candidato para poder generar los atractores multienroscados.

Con base en la descripción del intervalo de inestabilidad UDS , lo que buscamos es el máximo intervalo donde el sistema modificado es candidato a generar los atractores multienroscados, siguiendo este método, necesitamos la familia de polinomios transformados a UDS , la cual está dada por:

$$\mathbb{P}_r = t^3 + \frac{p_A''(-r)}{2!}t^2 + \frac{p_A'(-r)}{1!}t + \frac{p_A(-r)}{0!}, \quad (3.16)$$

El máximo intervalo de inestabilidad UDS , el cual lo encontramos verificando la condición de disipatividad, para el ejemplo (2), la familia de sistemas inestables con punto de equilibrio tipo foco silla está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_r = t^3 + \frac{6(-r) - 1.374}{2!}t^2 + \frac{3(-r)^2 - 1.374(-r) + 2.36}{1!}t \\ + \frac{(-r)^3 - 0.687(-r)^2 + 2.36(-r) - 0.15}{0!}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

con base en la proposición (3.1), lo primero que buscamos es que esta familia cumpla la condición de disipatividad, para este ejemplo tenemos lo siguiente sustituyendo los valores correspondientes

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &> 0, \\ \frac{p_A''(-r)}{2!} &> 0, \\ \frac{6(-r) - 0.687(2)}{2!} &> 0, \\ r &< -0.229, \end{aligned} \quad (3.18)$$

con base en la definición del máximo intervalo de inestabilidad UDS (3.2), tenemos $(-\alpha_1, -\alpha_2) \cap (\frac{a_2}{a_1} > 0)$, para nuestro caso $r \in (-0.3112, -0.229)$.

Ya que tenemos el máximo intervalo UDS donde se garantiza que obtendremos un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos conjugados y además la suma de los eigenvalores es negativa, lo que sigue es diseñar la función PWL para generar los multienroscados.

3.3. Generar multienroscados a través de sistemas PWL

Ya que se tiene un sistema de tipo $UDS-I$ nuestro siguiente objetivo es poder generar los multienroscados a través de una función lineal por partes por su sigla en inglés (PWL).

La misión de la función *PWL* es la de gobernar la dinámica del sistema por medio del cambio de ubicación de un equilibrio x_i^* hasta la posición x_j^* , $i \neq j$, cuando el flujo $\phi_t : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ cruza del dominio i al dominio j .

Dado el sistema

$$\dot{x} = Ax + BS + Bu, \quad (3.19)$$

donde $x = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados, $B \in \mathbb{R}^3$ es un vector real afín, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ denota una matriz lineal no singular, y S es una función constante por partes.

Anteriormente se vió como diseñar u para transformar el sistema inestable a un sistema *UDS-I*, ahora veremos como seguir construyendo nuestra señal de control para poder obtener los multienrosados. Entonces al aplicar u al sistema (3.19) obtenemos el nuevo sistema de la forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{p_A(-r)}{0!} & -\frac{p'_A(-r)}{1!} & -\frac{p''_A(-r)}{2!} \end{bmatrix} x + BS = \bar{A}x + BS, \quad (3.20)$$

Cuando r cumple las condiciones del máximo intervalo de inestabilidad *UDS*, podemos obtener un sistema disipativo inestable con la posibilidad de generar atractores multienrosados.

Las siguientes consideraciones son indispensables para poder tener un sistema *UDS* tipo *I* dado por la ecuación (3.19), que es útil para generar un atractor [6].

a) La parte lineal del sistema debe satisfacer la condición de disipatividad $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$, donde $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ son los eigenvalores de \bar{A} . considere que $n-2$ de los λ_i son eigenvalores reales negativos, y dos λ_i son eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, resultando x^* un punto de equilibrio tipo foco silla.

Este tipo de equilibrios presentan una variedad estable $M^s = span\{V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_{n-2}}\} \in \mathbb{R}^n$ con una eigendirección rápida y una variedad inestable $M^u = span\{V_{\lambda_{n-1}}, v_{\lambda_n}\} \in \mathbb{R}^n$ con una eigendirección en espiral lenta. Donde V_{λ_i} corresponde al eigenvector de la matriz A asociado al eigenvalor λ_i .

b) El vector afín BS puede ser considerado una función discreta que cambia dependiendo en cual dominio $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}^n$ se localice la trayectoria. En consecuencia $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{D}_i$. Entonces el sistema conmutado con base en la ecuación (3.19) es dado por:

$$\dot{x} = \bar{A}x + BS, \quad S = \begin{cases} s_1, & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ s_2, & \text{si } x \in \mathcal{D}_2; \\ \vdots & \vdots \\ s_k, & \text{si } x \in \mathcal{D}_k. \end{cases} \quad (3.21)$$

Los equilibrios del sistema (3.21) son $x_i^* = -\bar{A}^{-1}Bs_i$ con $i = 1, \dots, k$, y cada entrada s_i del sistema de conmutación se considera de tal manera que se preserven acotadas las trayectorias del sistema (3.21). De allí que la elección de las s_i para la función S determina la región de conmutación de los dominios \mathcal{D}_i que encierran cada equilibrio x_i^* .

El diseño de las s_i depende de donde queramos colocar el punto de equilibrio, y las superficies de conmutación, las elegimos de manera que el punto de equilibrio quede en el centro de dichas variedades, es decir calculamos la distancia euclidiana para ejemplificar este caso en \mathbb{R}^3

$$d(x_0^*, x_1^*) = \sqrt{(x_{10}^* - x_{11}^*)^2 + (x_{20}^* - x_{21}^*)^2 + (x_{30}^* - x_{31}^*)^2} \quad (3.22)$$

que tiene que ser la misma entre cada punto de equilibrio.

A continuación se presenta un ejemplo donde con base en un sistema inestable transformado a $UDS-I$, y con una función PWL podemos generar los atractores multienroscados.

3.3.1. De inestabilidad a multienroscados

A manera de resumen y para hacer más fácil el entendimiento del proceso para generar un atractor multienroscado partiendo de un sistema inestable de la forma correspondiente a la definición (3.1), se presenta el siguiente ejemplo.

En el ejemplo (2), se presentó el proceso para transformar el sistema inestable a un sistema $UDS-I$, recordemos que partimos de un sistema perteneciente a \mathbb{R}^3 donde los eigenvalores del sistema están todos en el semiplano derecho del plano complejo, donde el eigenvalor real es menor que la parte real del eigenvalor complejo conjugado.

Se define la abscisa de inestabilidad σ_u , esto es el margen que tenemos para poder mover los eigenvalores del sistema para transformarlo a un $UDS-I$ donde se requiere un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, posteriormente se encuentra el máximo intervalo de inestabilidad, donde se garantiza que el sistema tiene un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, y además la suma de sus eigenvalores es negativa, para cumplir con la condición de disipatividad.

Ahora solo nos resta ejemplificar la creación de los atractores multienroscados a través de la función PWL en base al desarrollo presentado.

Ejemplo 3. Generar un atractor multienroscado partiendo de un sistema $UDS-I$

Retomando el ejemplo (2) partiendo del sistema inestable con sus eigenvalores todos en el semiplano derecho del plano complejo dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.15 & -2.36 & 0.687 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

Cuyos eigenvalores son:

$$\lambda_1 = 0.0647,$$

$$\lambda_{2,3} = 0.3112 \pm 1.4910i,$$

para transformar el sistema inestable a un sistema *UDS-I* utilizamos la siguiente u

$$u = \left(-a_3 - \frac{p_A(-r)}{0!}, -a_2 - \frac{p'_A(-r)}{1!}, -a_1 - \frac{p''_A(-r)}{2!} \right)^T, \quad (3.24)$$

para $r < -0.229$ que es donde se cumple la disipatividad, en este caso se toma el valor de $r = -0.3$, al aplicar u a nuestro sistema inestable se obtiene la nueva matriz \bar{A} que genera los sistemas de tipo *UDS-I* dado de la siguiente manera:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.1422 & -1.1342 & -0.663 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

con el polinomio característico asociado a la matriz \bar{A}

$$P_{\bar{A}}(r) = r^3 + 0.663r^2 + 1.1342r + 1.1422, \quad (3.26)$$

cuyos eigenvalores de la matriz \bar{A} son

$$\lambda_1 = -0.8695,$$

$$\lambda_{2,3} = 0.1032 \pm 1.1415i,$$

tenemos un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos con parte real positiva, cuyos eigenvalores cumplen $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -0.6631 < 0$, el cual cumple con la definición (2.10), de sistemas disipativos inestables.

Para este ejemplo definimos S de la siguiente manera:

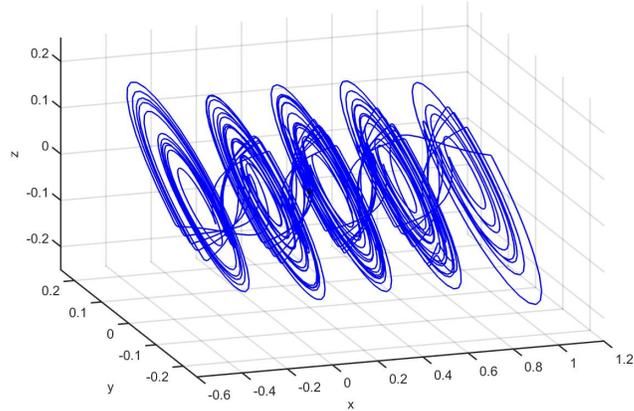
$$S = \begin{cases} 1.0280 & \text{si } x > 0.75; \\ 0.6853 & \text{si } 0.45 < x < 0.75; \\ 0.3427 & \text{si } 0.15 < x < 0.45; \\ 0 & \text{si } -0.15 < x < 0.15; \\ -0.3427 & \text{si } x < -0.15. \end{cases} \quad (3.27)$$

Donde los s_i los elegimos a conveniencia para que los puntos de equilibrio queden centrados en valores de $-0.3, 0, 0.3, 0.6$ y 0.9 .

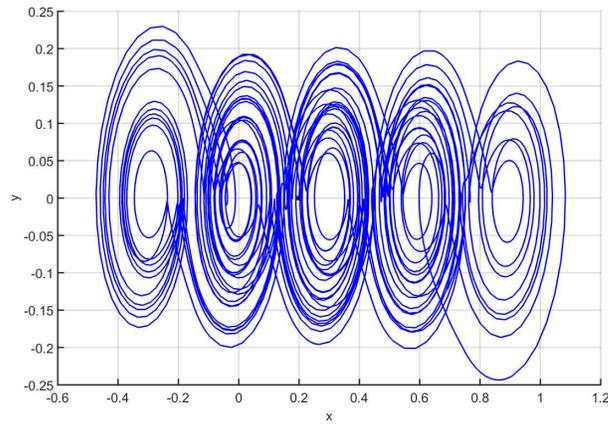
A continuación presentamos en la siguiente gráfica un atractor multienroscado para el sistema generado por el sistema (3.25) y (3.27).

En la figura (3.2) se muestra la trayectoria del sistema para una condición inicial $x_0 = (0.2, 0, 0)^T$.

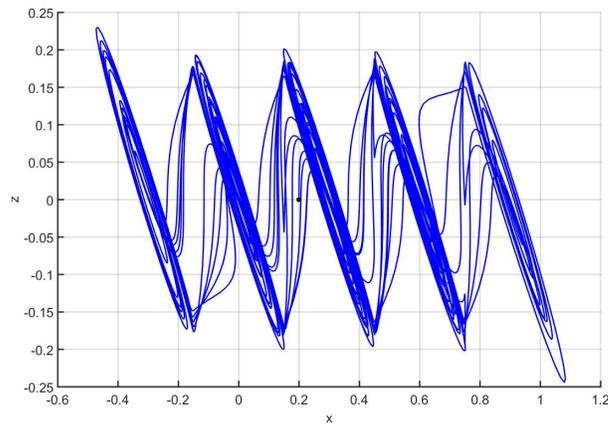
En la figura (3.3) podemos ver que para diferentes condiciones iniciales $x_0 = (-0.4; 0; 0)^T$ la trayectoria de color azul, $x_0 = (-0.1; 0; 0)^T$ la trayectoria de color rojo, $x_0 = (0.2; 0; 0)^T$ la trayectoria de color verde, $x_0 = (0.5; 0; 0)^T$ la trayectoria de color cian, $x_0 = (0.8; 0; 0)^T$ la trayectoria de color amarillo, el multienroscado se sigue formando, es decir sin importar la condición inicial que tomemos, las variedades estables alcanzan a atrapar la trayectoria del sistema que se escapa por la variedad inestable del punto de equilibrio tipo foco silla.



(a) Representación en el espacio fase del atractor multienros-
cado con condición inicial $x_0 = (0.2, 0, 0)^T$

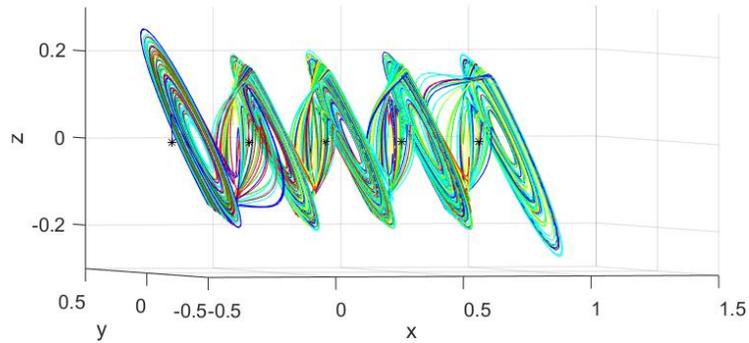


(b) Proyección del atractor en el plano (x, y)

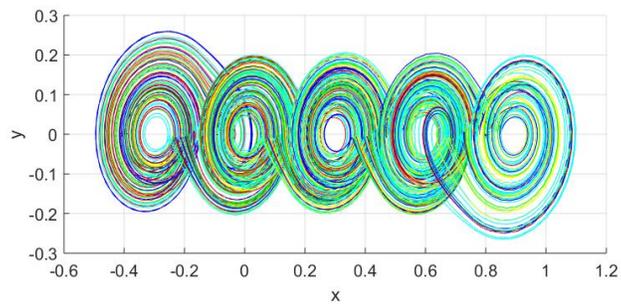


(c) Proyección del atractor en el plano (x, z)

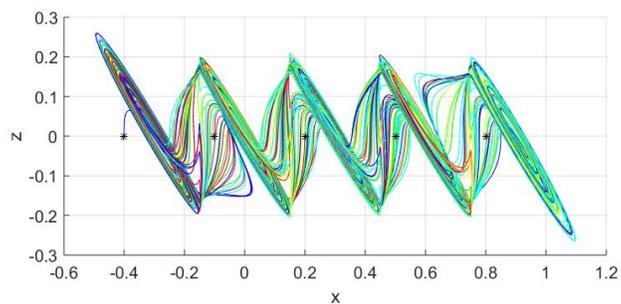
Figura 3.2: a) Atractor multienrosado generado a partir del *UDS* tipo *I* con condición inicial $x_0 = (0.2, 0, 0)^T$, b) proyección del atractor en el plano (x, y) , c) proyección del atractor en el plano (x, z) .



(a) Trayectorias oscilando en el atractor con cinco enroscados con condición inicial diferentes $x_0 = (-0.4; 0; 0)^T$ la trayectoria de color azul, $x_0 = (-0.1; 0; 0)^T$ la trayectoria de color rojo, $x_0 = (0.2; 0; 0)^T$ la trayectoria de color verde, $x_0 = (0.5; 0; 0)^T$ la trayectoria de color cian, $x_0 = (0.8; 0; 0)^T$ la trayectoria de color amarillo.



(b) Proyección del atractor en el plano (x, y)



(c) Proyección del atractor en el plano (x, z)

Figura 3.3: Generación de cinco enroscados partiendo de cinco condiciones iniciales diferentes indicadas en diferente color.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se presentó un método para generar los atractores multienroscados partiendo de un sistema inestable con todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo.

Primeramente se describe el tipo de sistemas inestables tales que al aplicarles una acción de control u , el sistema inestable se convierte a un $UDS-I$.

Se presentó la forma de diseñar el control u , así como algunas definiciones importantes para poder realizar el diseño, tales como son la abscisa de inestabilidad y el máximo intervalo de inestabilidad UDS .

Es importante notar también la forma de diseñar la función PWL , ya que el número de valores s_i depende de cuantos enroscados queremos en nuestro atractor.

Aunque se conocen UDS tipo I y tipo II y en la literatura hay reportada generación de atractores multienroscados para estos dos tipos pero partiendo de sistemas estables o directamente para estos tipos de sistemas, en esta tesis solo se trabaja con sistemas de tipo I , partiendo de sistemas inestables del modo propuesto.

En el siguiente capítulo se presenta la metodología para pasar de un sistema que genera monoestabilidad a multiestabilidad.

Capítulo 4

Multiestabilidad

En este capítulo presentamos la manera de pasar de monoestabilidad a un sistema que genera multiestabilidad, esto es, a través de mover las variedades estables e inestables del sistema podemos atrapar la trayectoria del sistema en diferentes atractores, donde cualquier condición inicial perteneciente a alguna cuenca de atracción siempre convergerá al mismo atractor, esto es, un solo atractor de los diferentes que coexisten.

Dependiendo de la condición inicial que se parta, la trayectoria se queda oscilando alrededor de alguno de los puntos de equilibrio del sistema, y toda la dinámica se mantendrá en el atractor donde se encierre la trayectoria del sistema.

4.1. Introducción a multiestabilidad

El fenómeno de tener dos atractores coexistiendo generados por un sistema no lineal ha sido reportado por Arecchi y colaboradores en [42], quien llamo a este comportamiento multiestabilidad generalizada.

La coexistencia de múltiples atractores es común en una amplia variedad de sistemas, por ejemplo, modelos geofísicos, sistemas mecánicos, sistemas neuronales, etc.

La región de coexistencia de estos atractores es crítica, ya que un pequeño ruido puede conmutar el sistema físico, agregando una nueva característica a escenarios caóticos habituales. En tales casos las propiedades de las cuencas de atracción están determinadas en gran medida por la estructura de los puntos de equilibrio tipo silla.

Los puntos de equilibrio tipo silla, los cuales conectan a una variedad estable W^s y una variedad inestable W^u son responsables de los fenómenos de estiramiento y doblamiento (stretching and folding), por lo tanto, juegan un papel importante en la generación de caos [15], [17].

Acorde a esto, un sistema lineal afín en \mathbb{R}^3 , puede ser caracterizado de acuerdo a los eigenvalores asociados a la parte lineal del sistema. Si la suma de los eigenvalores es nega-

tiva y el punto de equilibrio es tipo silla, entonces el sistema es llamado sistema disipativo inestable (*UDS*) [12].

A continuación damos la definición de multiestabilidad

Definición 4.1. *En sistemas dinámicos, **multiestabilidad** significa la coexistencia de diferentes estados estables finales posibles para un conjunto de parámetros dados. El estado final al cual el sistema convergerá, depende de las condiciones iniciales del sistema, es decir la dinámica del sistema correspondiente a uno de los atractores es definida por la condición inicial [15].*

El objetivo del presente capítulo es mostrar la coexistencia de atractores multiestables obtenida a través de un sistema basado en la teoría de sistemas disipativos inestables partiendo de un sistema inestable de la forma propuesta, particularmente de *UDS-I*, que contiene en sus ecuaciones una función *PWL*.

4.2. Descripción del modelo

Con base en la descripción previa de un *UDS*, en esta sección consideramos el sistema *PWL* dado en (3.27), el objetivo es introducir un parámetro de bifurcación v en este tipo de sistemas para pasar de un sistema que presenta monoestabilidad a la multiestabilidad, la misión del parámetro v tiene la finalidad de controlar las variedades estables W^s e inestable W^u en cada s_i para atrapar las trayectorias en un solo atractor.

Considere el sistema lineal afín descrito por la siguiente ecuación

$$\dot{x} = Ax + Bu + BS, \quad (4.1)$$

donde $x = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con $i, j = 1, 2, 3$ es una matriz no singular, $B = (0, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^3$ es un vector real, S es una función *PWL* y u es el control.

Al aplicar el control a nuestro sistema se obtiene el sistema controlado a *UDS-I* de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \bar{A}x + BS. \quad (4.2)$$

El punto de equilibrio del sistema se encuentra en $x_i^* = -\bar{A}^{-1}Bs_i$, una condición importante para que se generen oscilaciones alrededor de dicho equilibrio es que existan eigenvalores complejos conjugados asociados a la matriz \bar{A} , además que las variedades tangentes a los puntos de equilibrio x^* sean una estable $W^s(x^*)$ y la otra inestable $W^u(x^*)$.

De acuerdo a los trabajos reportados en [4], [12], los sistemas disipativos inestables (*UDS*) poseen las características mencionadas anteriormente para producir las oscilaciones que generan un atractor extraño.

A pesar de que existen dos tipos de sistemas disipativos inestables (*UDS-I*) y (*UDS-II*), en este trabajo solo se abordará la generación de atractores multienroscados y multiestabilidad por medio de *UDS-I*

Ya que la ubicación de los puntos de equilibrio del sistema (4.1) así como las variedades estable e inestable dependen de la matriz \bar{A} y del vector B , considera la forma siguiente para representar la matriz \bar{A} con el parámetro v de bifurcación:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{p_A(-r)}{0!} * v & -\frac{p'_A(-r)}{1!} * v & -\frac{p''_A(-r)}{2!} * v \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * v, \quad (4.3)$$

con $v \in \mathbb{R}$.

$$S = \begin{cases} s_1 & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ s_2 & \text{si } x \in \mathcal{D}_2; \\ \vdots & \\ s_n & \text{si } x \in \mathcal{D}_n, \end{cases} \quad (4.4)$$

El parámetro v puede afectar la disipatividad del sistema ya que la disipatividad esta dada por $-v * \frac{p''_A(-r)}{2!}$, la disipatividad del sistema se mantiene si $-v * \frac{p''_A(-r)}{2!}$, se mantiene en -1 , es por esto que el valor de v esta determinado por $-\frac{p''_A(-r)}{2!} * v = -1$

4.3. Generar atractores multiestables

Ahora veremos un ejemplo en particular para mostrar el método descrito anteriormente para poder generar multiestabilidad basada en sistemas *UDS-I*.

Con base en los resultados anteriores se obtienen los siguiente resultados para la generación de los atractores multiestables. Teniendo en cuenta la forma de la Matriz \bar{A} y el vector B de la forma descrita en la ecuación (4.3) y retomando el ejemplo en particular que venimos trabajando desde el inicio de este trabajo, es decir para poder ejemplificar que partiendo de un sistema inestable, luego transformarlo a un *UDS-I* ahora mediante un parámetro de bifurcación v podemos mostrar que se obtiene la multiestabilidad, partiendo de un sistema inestable.

Ejemplo 4. Generar multiestabilidad

Retomando el ejemplo (3) donde se obtuvo la familia de sistemas *UDS-I*, donde para un valor en específico de $r = -0.3$ se obtiene el siguiente polinomio

$$P_{\bar{A}}(r) = t^3 + 0.663t^2 + 1.1342t + 1.1422, \quad (4.5)$$

descrito este polinomio en forma matricial obtenemos el siguiente sistema

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.1422 * v & -1.1342 * v & -0.663 * v \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * v, \quad (4.6)$$

$$S = \begin{cases} 1.0280 & \text{si } x > 0.75; \\ 0.6853 & \text{si } 0.45 < x < 0.75; \\ 0.3427 & \text{si } 0.15 < x < 0.45; \\ 0 & \text{si } -0.15 < x < 0.15; \\ -0.3427 & \text{si } x < -0.15. \end{cases} \quad (4.7)$$

Como se menciona, nuestro primer desafío es que necesitamos que la suma de los eigenvalores del sistema sea negativo, es decir que la traza de la matriz se mantenga en -1 , en nuestro sistema (4.6) para un valor $v \in \mathbb{R}^+$, $v = 1.5083$ queda de la siguiente manera

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.7228 & -1.7107 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * 1.5083, \quad (4.8)$$

La misión del parámetro v mejor conocido como parámetro de bifurcación, es la de controlar las variedades estables e inestables en cada s_i para atrapar las trayectorias en un solo atractor, ahora sólo nos resta mostrar la generación de multiestabilidad basada en sistemas *UDS-I*.

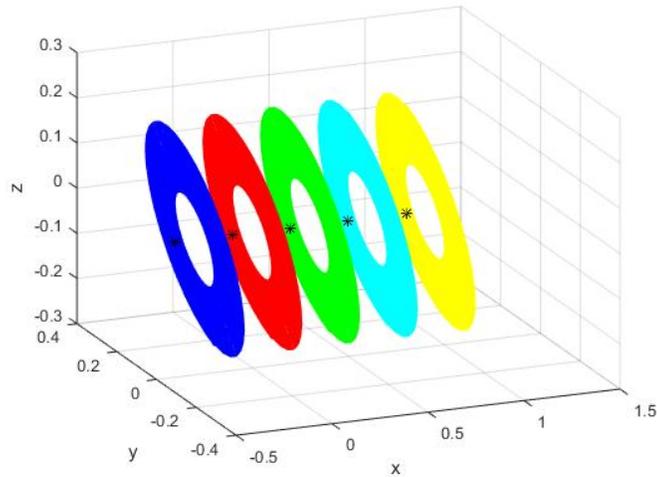
Del sistema (4.8) obtenemos sus eigenvalores, los cuales están dados por

$$\lambda_1 = -1.0044,$$

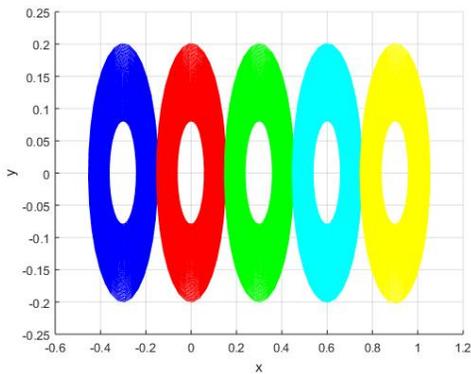
$$\lambda_{2,3} = 0.0022 \pm 1.3096i.$$

Para observar la creación de los sistemas multiestables podemos observar en la figura (4.1) la representación gráfica de la multiestabilidad, en la figura (4.1a) podemos ver que para cinco condiciones iniciales diferentes, la dinámica del sistema se mantiene atrapada en un solo atractor de los cinco atractores coexistiendo, esto depende de que la condición inicial se encuentre dentro de la cuenca de atracción de uno de los cinco atractores que coexisten.

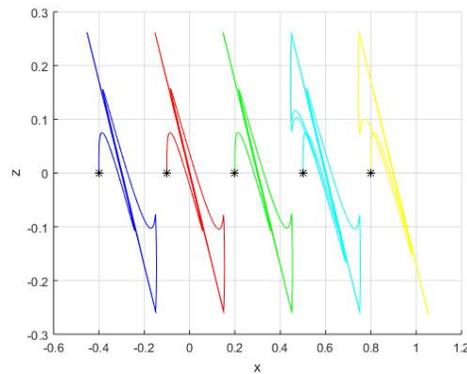
En la gráfica de la figura (4.1c), podemos ver como al mover el parámetro de bifurcación v , se pueden controlar las variedades estables e inestables, es decir al momento que la trayectoria del sistema sale por la variedad inestable W^u , la variedad estable W^s logra atrapar la trayectoria para nuevamente mantenerla dentro del dominio del punto de equilibrio.



(a) Atractores en el espacio de estados para cinco condiciones iniciales diferentes $x_0 = (-0.4; 0; 0)^T$ la trayectoria de color azul, $x_0 = (-0.1; 0; 0)^T$ la trayectoria de color rojo, $x_0 = (0.2; 0; 0)^T$ la trayectoria de color verde, $x_0 = (0.5; 0; 0)^T$ la trayectoria de color cian, $x_0 = (0.8; 0; 0)^T$ la trayectoria de color amarillo.



(b) Proyección de los atractores en el plano (x, y)



(c) Proyección de los atractores en el plano (x, z)

Figura 4.1: Generación de cinco atractores coexistiendo partiendo de cinco condiciones iniciales diferentes marcadas con color diferente.

Las condiciones iniciales para generar la multiestabilidad son las mismas que las utilizadas en la figura (3.3) $x_0 = (-0.4; 0; 0)^T$ la trayectoria de color azul, $x_0 = (-0.1; 0; 0)^T$ la trayectoria de color rojo, $x_0 = (0.2; 0; 0)^T$ la trayectoria de color verde, $x_0 = (0.5; 0; 0)^T$ la trayectoria de color cian, $x_0 = (0.8; 0; 0)^T$ la trayectoria de color amarillo.

Esto con la finalidad de poder ejemplificar que mediante un parámetro de bifurcación v podemos controlar las variedades estables e inestables, para poder generar multiestabilidad, y en el lugar de que la dinámica del sistema siga toda la trayectoria por los cinco puntos, solo se mantendrá atrapada en alguna región dependiendo de la condición inicial que se elija.

4.4. Conclusiones

En este capítulo, retomamos el sistema multienroscado de tipo *UDS-I* el cual se basa en un sistema inestable, luego transformamos el sistema mediante un parámetro de bifurcación v , para obtener un comportamiento multiestable, que involucra el uso de funciones lineales por partes, por su sigla en inglés *PWL*.

En este caso, los puntos de equilibrio del sistema siempre se ubican sobre el eje x , para el uso de la función *PWL* se asigna un valor n para determinar el número de puntos de equilibrio que existirán en el atractor que se diseña.

El número de puntos de equilibrio corresponden al número de atractores multiestables que existirán, los cuales pueden aumentar tanto como queramos siempre y cuando se conserve la misma distancia de uno y otro.

A manera de resumen y para observar el desarrollo de este trabajo notemos lo siguiente:

Ya que se tiene la caracterización de los sistemas inestables los cuales son útiles para transformarlos a *UDS-I*, se dan las definiciones útiles para poder diseñar el control u , entre estas definiciones están la abscisa de inestabilidad, el máximo intervalo de inestabilidad *UDS*.

Posteriormente se diseña la función *PWL* que es la encargada de generar los multienroscados, en la cual se define el número de enroscados que tendrá el atractor.

Finalmente a través del parámetro de bifurcación se puede generar la multiestabilidad.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

5.1. Conclusiones

En esta tesis se presentó la manera de generar multiestabilidad en \mathbb{R}^3 a partir de sistemas con dinámica inestable y con todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo.

En la literatura se puede encontrar la generación de sistemas multienroscados partiendo de sistemas estables, y adicionalmente se encuentra también la generación de multiestabilidad basada en sistemas *UDS-I*, pero hasta la fecha no se ha encontrado multiestabilidad basada en los sistemas inestables del tipo trabajado en esta tesis

Ya que sólo se encuentran trabajos partiendo de sistemas estables, nuestro objetivo principal es partir de un sistema inestable con todos sus eigenvalores del lado derecho del plano, y poder definir que características deben tener estos sistemas para ser útiles en la creación de los multienroscados.

Primeramente definimos los sistemas inestables tales que son útiles para generar los multienroscados, donde estos sistemas presentan algunas características específicas para que puedan ser de la forma de un eigenvalor real positivo y dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva, de tal manera que el eigenvalor real sea menor que la parte real de los complejos conjugados.

Luego se procede a transformar el sistema inestable a un sistema de tipo *UDS-I*, recordemos que en la literatura se reportan dos tipos de sistemas *UDS* tipo *I* y tipo *II*, aunque es posible generar los multienroscados para estos dos tipos de sistemas, sólo nos enfocamos en la generación de los multienroscados partiendo de sistemas de tipo *I*.

Para esto se diseña una función lineal por partes *PWL*, donde podemos fijar un valor n , que determinará el número de enroscados que se obtendrán en el sistema, cabe recordar que el número de enroscados puede aumentar tanto como nosotros queramos.

Ya que transformamos el sistema inestable a un sistema *UDS-I* el siguiente paso fue

mediante un parámetro de bifurcación v , tratar de controlar las variedades estable W^s y la variedad inestable W^u para poder atrapar la trayectoria del sistema en un solo atractor, y manteniendo la condición de disipatividad, el lugar donde se concentre la dinámica del sistema depende de que condición inicial tomemos, y a que dominio pertenezca.

Ya que como se mencionó al inicio de esta tesis, la importancia de este trabajo es que no se ha encontrado reportado en la literatura la generación de multiestabilidad basada en sistemas inestables del tipo que manejamos en este trabajo.

En este trabajo se ha encontrado una manera de poder crear multiestabilidad partiendo de sistemas inestables con todos sus eigenvalores en el semiplano derecho del plano complejo.

De manera final el sistema queda definido de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax + B(u(v) + Sv), \quad (5.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B = [0; 0; 1]^T$, $v \in \mathbb{R}$,

$$S = \begin{cases} s_1, & \text{si } x \in \mathcal{D}_1; \\ \vdots & \vdots \\ s_n, & \text{si } x \in \mathcal{D}_n. \end{cases}$$

$$u = \left(-a_3 - \frac{p_A(-r)}{0!}v, -a_2 - \frac{p'_A(-r)}{1!}v, -a_1 - \frac{p''_A(-r)}{2!}v \right) x,$$

para esto la matriz A debe cumplir con las condiciones dadas en la definición (3.1), para asegurar que se trabaja con una matriz cuyos eigenvalores están en el semiplano derecho del plano complejo.

5.2. Trabajo a futuro

Una manera de determinar si un atractor es caótico es mediante el exponente de Lyapunov, es por eso que sería interesante poder obtener el exponente de Lyapunov para determinar si nuestro atractor multienroscado se puede considerar caótico.

Otro punto importante es que podemos determinar la cuenca de atracción de los atractores multienroscados y los atractores multiestables, aquí lo interesante sería ver si la cuenca de atracción del atractor multienroscado es igual a la suma de las cuencas de atracción de los atractores multiestables, y en caso de que fuera de diferente dimensión, ver por que sucede esto.

Reportados en la literatura podemos encontrar la generación de sistemas multiestables con base a sistemas *UDS* tipo *I* y tipo *II*, ya que aquí solo se trabajó con sistemas inestables transformados a *UDS-I*, sería buena opción poder extender estos resultados para sistemas *UDS-II*, ver si se puede aplicar el mismo modelo o hay que hacer modificaciones.

Otro aspecto importante a considerar es la forma en que se presentan las raíces de un polinomio de tercer grado, es decir, tenemos raíces reales repetidas, raíces reales distintas y nuestro caso una real y un par de complejos. Lo interesante sería ver que pasa cuando tenemos los otros dos casos, y si se puede aplicar el mismo procedimiento o que se tendría que hacer para lograr multienroscados y multiestabilidad basados en estos dos casos.

Poder encontrar una aplicación para este tipo de sistemas sería un trabajo muy interesante, ya que el concepto de multiestabilidad se puede aplicar en diferentes áreas, y en la naturaleza se pueden encontrar procesos con dinámica inestable, pero tenemos que analizar que tipo de sistemas presentan características similares a los sistemas inestables con los que trabajamos.

Bibliografía

- [1] Hiroki Sayama. Espacio de fase (imagen). *Recuperado de: Introduction to the modeling and analysis of complex systems*, 2015.
- [2] Guanrong Chen. *Retrato fase del pendulo Amortiguado y no Amortiguado (imagen)*. 2000.
- [3] Jinhu Lu, Guanrong Chen, Xinghuo Yu, and Henry Leung. Design and analysis of multiscroll chaotic attractors from saturated function series. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol 51, 2476 - 2490, 2004.
- [4] E.Campos Cantón, J.G Barajas Ramírez, G. Solís Perales, and R. Femat. Multiscroll attractors by switching systems. *Chaos, American Institute of Physics*, vol.20, No.013116, 2010.
- [5] B. Aguirre Hernandez, E. Campos Cantón, J.A. López Rentería, and E.C.Díaz González. A polynomial approach for generating a monoperametric family of chaotic attractors via switched linear systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol 71, 100-106, 2015.
- [6] Edgar Cristian Díaz González, Baltazar Aguirre Hernandez, Jorge Antonio López Rentería, Eric Campos Cantón, and Carlos Arturo Loredo Villalobos. Stability and multiscroll attractors of control systems via the abscissa. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol 12, 23-41, 2017.
- [7] Edgar C Díaz Gonzales, Jorge Antonio López Rentería, Eric Campos Cantón, and Baltazar Aguirre Hernandez. Maximal unstable dissipative interval to preserve multi-scroll attractors via multi-saturated functions. *Journal of Nonlinear Science*, vol 26, 1833-1850, 2016.
- [8] J.A.K. Suykens, A. Huang, and L.O. Chua. A family of n-scroll attractors from a generalized chua circuit. *International Journal of Electronics and Communications*, vol.51, No.3, 131-138, 1997.
- [9] Johan A.K. Suykens and Joos Vandewalle. Generation of n-double scrolls (n=1,2,3,4,...). *IEEE Transactions on circuits and systems*, vol 41, 861-867, 1993.
- [10] C. Sánchez López, R. Trejo Guerra and J.M. Muñoz Pacheco, and E. Tlelo Cuautle. N-scroll chaotic attractors from saturated function series employing ccii+s. *Nonlinear Dynamics*, vol. 61, No.1-2 , 331-341, 2010.

- [11] Mustak E. Yalcin, Johan A.K. Suykens, and Joos Vandewalle. Families of scroll grid attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, No. 1, 23-41, 2002.
- [12] Eric Campos Cantón, Ricardo Femat, and Guanrong Chen. Attractors generated from switching unstable dissipative systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol 22, No 033121, 2012.
- [13] L.J Ontañón García, E. Jiménez López, and E.Campos Cantón. Generation of multi-scroll attractors by controlling the equilibria. *The International Federation of Automatic Control*, vol.978, No.3, 2012.
- [14] L.J. Ontañón García, E. Jiménez López, E.Campos Cantón, and M.Basin. A family of hiperchaotic multi-scroll attractors in R^n . *Science Direct Applied Mathematics and Computation*, vol. 233, 522-533, 2014.
- [15] H.E. Gilardi Velázquez, L.J. Ontañón García, D.G. Hurtado Rodriguez, and E. Campos Cantón. Multistability in piecewise linear systems by means of the eigenspectra variation and the round function. *Intrnational Journal of Bifurcation and Chaos*, vol 19, No 9, 2017.
- [16] Jinhu Lu, Tianshou Zhou, Guangrong Chen, and Xiaosong Yang. Generating chaos with a switching piecewiselinear controller. *Chaos*, 2002.
- [17] A. Anzo Hernández, H.E. Gilardi Velázquez, and E. Campos Cantón. On multistability behavior of unstable dissipative systems. *Chaos Solitons and Fractals*, vol. 28, No. 033613, 2018.
- [18] W.A Knorre, F. Bergter, and Z.Simon. Multiestability in metabolic systems. *Studia Biophysica*, vol.49, No.2, 81-89, 1975.
- [19] Jean-Luc Schwartz, Nicolas Grimault, Jean-Michel Hupe, Brian C.J.More, and Daniel Pressnitzer. Ulitstability in perception: Binding sensory modelities, an overview. *Philosophical Transaction of the royal society*, vol. 367, 896-905, 2012.
- [20] Idania Iveth. Multi-estabilidad o multi-usabilidad (imagen). *Los Procesos Psicológicos Fundamentales Desde La Gestalt*, Recuperado de: <https://idaniaiveth.wordpress.com/los-procesos-psicologicos-fundamentales-desde-la-gestalt/>.
- [21] Jairo wordpress.com. Ley de simetría (imagen). *Procesos Psicológicos Fundamentales Desde La Gestalt*, Recuperado de: <https://jairo182plus44.wordpress.com/2009/05/23/procesos-psicologicos-fundamentales-desde-la-gestalt/>.
- [22] Guo-Qun Zhong, Kim-Fung Man, and Guanrong Chen. A systematic approach to generating n-scroll attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos* vol.12, No.12, 2907-2915, 2002.

- [23] A.N. Pisarchik, R.Jaimes Reátegui, J.R. Villalobos Salazar, J.H. Garcia Lopez, and S. Boccaletti. Synchronization of chaotic systems with coexisting attractors. *Physical Review Letters*, vol.96, No.24, 2006.
- [24] S. Guang, C.H. Lai, and G.W Wei. Bistable chaos without symmetry in generalized synchronization. *Physical Review*, vol.71, No.3, 2005.
- [25] H.Riecke, A. Roxin, S. Madruga, and S.A Solla. Multiple attractors, long chaotic transients and failure in small-world networks of excitable neurons. *Chaos: An interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol.17, No.2, 2006.
- [26] T. Gross, C.J.D. D' Lima, and B.Blasius. Epidemic dynamics on an adaptive network. *Physical Review Letters*, vol. 96, No. 20, 2006.
- [27] F.R. Ruiz Oliveras and A.N. Pisarchik. Synchronization of semiconductor lasers with coexisting attractors. *Physical Review*, vol.79, No.1, 2009.
- [28] A.N. Pisarchik, R.Jaimes Reátegui, R. Sevilla Escoboza, and G. Huerta Cuellar. Multistate intermittence and extreme pulse in a fiber laser. *Physical Review*, vol.86, No.5, 2012.
- [29] A.N. Pisarchik and U.Feudel. Control of multistability. *Physics Reports*, vol.540, No.4, 167-218, 2014.
- [30] L Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Science and Business media, 2013.
- [31] David G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems, Theory, Models and Applications*. John Wiley and sons. inc, 1979.
- [32] Hiroki Sayama. *Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems*. Open SUNY Textbooks, Milne Library, 2015.
- [33] Jens Starke, Mads Peter Sorensen, Poul Hjorth, Jan Kloppenborg Moller, Lasse Engbo Christiansen, and Henrik Madsen. *An introduction to Mathematical Modelling, Nonlinear Dynamics, Stochastic and Complex Systems*. MMC summer school, 2010.
- [34] Guanrong Chen. *Nonlinear Dynamical and Control Systems*. John Wiley and Sons, Ltd, 2000.
- [35] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems Third Edition*. Prentice Hall, 1996.
- [36] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Limusa, 2000.
- [37] Daizhan Cheng, Xiaoming Hu, and Tielong Shen. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010.
- [38] J.Kenge, Z.T.Njitacke, and H.B.Fotsin. Dynamical analysis of a simple autonomous jerk system with multiple attractors. *Nonlinear Dynamical*, vol 83, 751-756, 2016.

- [39] Devaney Robert L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems Theory and Experiment*. Perseus Books Publishing L.L.C, 1948.
- [40] D. Paillard. The timing of pleistocene glaciations from a simple multi-state climate model. *Nature*, vol.391, No.6665, 378-381, 1998.
- [41] Jorge Antonio López Renteria, Baltazar Aguirre Hernández, and Fernando Verduzco. The boundary crossing theorem and the maximal stability interval. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011.
- [42] F.T.Arecchi, R. Badii, and A.Politi. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system. *Physical Review*, vol 32, No 1, 1985.

Apéndice A

Sea una ecuación algebraica polinomial de tercer grado escrita en su forma canónica

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad (\text{A.1})$$

con $A \neq 0$.

Normalizando

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{A.2})$$

de donde podemos observar 3 casos posibles para las raíces del polinomio basadas en el discriminante dado por

$$\Delta = 18bcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4c^3 - 27d^2 \quad (\text{A.3})$$

* $\Delta < 0$ la ecuación tiene una raíz real y dos complejas conjugadas

* $\Delta = 0$ la ecuación tiene raíces múltiples y todas sus raíces son reales (puede ser una raíz triple ó una doble y una sencilla).

* $\Delta > 0$ la ecuación tiene tres raíces reales distintas.

Realizando la transformación dada por la forma

$$x = y - \frac{b}{3} \quad (\text{A.4})$$

(La ecuación (A.4) serán las raíces finales del polinomio cubico.)

Esta transformación permite eliminar el termino cuadrático

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0 \quad (\text{A.5})$$

después de realizar los pasos algebraicos se llega a la forma

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \frac{1}{27}(27d - 9bc + 2b^3) = 0 \quad (\text{A.6})$$

haciendo $p = \left(c - \frac{b^2}{3}\right)$ y $q = \frac{1}{27}(27d - 9bc + 2b^3)$ se tiene la ecuación reducida

$$y^3 + py + q = 0 \quad (\text{A.7})$$

al hacer la sustitución nuevamente $y = u + v$, esta vez para encerrar una generalidad en el binomio de un cubo. Por lo tanto $u^3 + 3uv(u + v) + v^3 + p(u + v) = 0$ que puede escribirse como un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -p &= 3uv \\ -q &= u^3 + v^3 \end{aligned}$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones $u^3 + v^3 = -q$ y $u^3v^3 = -(\frac{p}{3})^3$.

Llegado a este punto y utilizando las formulas de Viéte, u^3 y v^3 son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Para las ecuaciones de segundo grado las raíces están dadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \\ y_2 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \end{aligned}$$

donde $D = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$, se tienen tres casos:

* $D > 0$ la ecuación posee una solución real y dos complejas, si se establece que

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}} \\ v &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}} \end{aligned}$$

donde las soluciones están dadas por :

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v - \frac{b}{3} \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{\sqrt{3}i}{2}(u - v) - \frac{b}{3} \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{\sqrt{3}i}{2}(u - v) - \frac{b}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

* $D = 0$ hay dos posibilidades

- 1.- Si $p=q=0$, entonces la ecuación tiene una raíz triple $x = -\frac{b}{3}$
- 2.- Si $p, q \neq 0$, entonces la ecuación tiene una raíz doble y una raíz simple, dadas respectivamente por

$$x_1 = x_2 = 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = -2\sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{3q}{p}$$

$$x_3 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = \sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{-3q}{2p}$$

* $D < 0$ la ecuación posee entonces tres soluciones reales. Las soluciones son la suma de dos complejos conjugados $j^k u$ y $\overline{j^k u}$ donde $u = \sqrt[3]{\frac{-q+i\sqrt{|D|}}{2}}$ y $k \in 0, 1, 2$.

$$x_0 = u + \bar{u}$$

$$x_1 = ju + \overline{ju}$$

$$x_2 = j^2 u + \overline{j^2 u}$$

La forma real de las soluciones se obtiene escribiendo $j^k u$ en forma trigonométrica, obteniéndose

$$z_k + 1 = \pm 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\Phi}{3} + 120k\right) \quad (\text{A.10})$$

para $k = \{0, 1, 2\}$ donde el signo positivo se usa si $q \leq 0$ y el signo negativo se usa si $q > 0$.

Mientras que Φ está dado por

$$\Phi = \arccos \sqrt{\frac{q^2/4}{-p^3/27}} \quad (\text{A.11})$$

De modo que las tres raíces de la ecuación cúbica están dadas por

$$x_k = z_k - \frac{b}{3a} \quad (\text{A.12})$$

para $k = 1, 2, 3$