



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

**Supersimetría y  
Propagación de Solitones en Guías de Onda**

Tesis que presenta

**Maximino Pérez Maldonado**

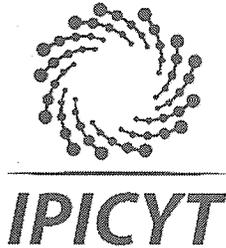
Para obtener el grado de

**Doctor en Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

Dr. Haret Codratian Rosu Barbus

San Luis Potosí, S.L.P., Febrero 2019



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “*Supersimetría y Propagación de Solitones en Guías de Onda*” presentada para obtener el Grado de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Maximino Pérez Maldonado** y aprobada el **primero de febrero del dos mil diecinueve** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus**  
Director de la tesis

**Dr. Luis Armando Gallegos Infante**  
Jurado en el Examen

**Dr. Eric Campos Cantón**  
Jurado en el Examen

**Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada**  
Jurado en el Examen

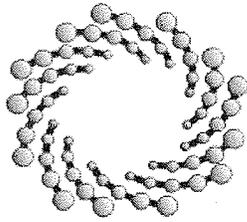
**Dr. José Salome Murguía Ibarra**  
Jurado en el Examen



## **Créditos Institucionales**

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Haret Codratian Rosu Barbus.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología No. 254818 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 009 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 1 días del mes de febrero del año 2019, se reunió a las 17:10 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Luis Armando Gallegos Infante</b>	<b>Presidente</b>	<b>U de G</b>
<b>Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Eric Campos Cantón</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. José Salome Murguía Ibarra</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**DOCTOR EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Maximino Pérez Maldonado**

sobre la Tesis intitulada:

*Supersimetría y Propagación de Solitones en Guías de Onda*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus**

El Jurado, después de deliberar, determinó

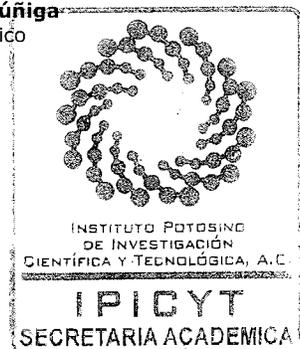
**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 19:07 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 1 días del mes de febrero de 2019.

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

  
**Dr. Horacio Flores Zúñiga**  
Secretario Académico



# Agradecimientos

La gratitud es un valor que no tiene comparación, valor que en conjunto con lazos de confianza y compromiso forman en mi memoria excelentes recuerdos, por ello manifiesto mi agradecimiento a todos los que me apoyaron con sus experiencias y conocimientos para concluir este ciclo, que con empeño y dedicación he superado.

De manera particular agradezco en gran medida al Dr. Haret Codratian Rosu Barbus por su guía y asesoramiento en las cuestiones de enseñanza de los diferentes temas de investigación desarrollados en el proceso doctoral. También agradezco la confianza y la amistad que me ha brindado, lo cual me dio la oportunidad de crecer y desarrollarme científica y académicamente.

Extiendo un agradecimiento especial a este centro de investigación, a sus Profesores y a su personal, por darme la oportunidad de desarrollar mis capacidades y habilidades en el ámbito Científico. También a los profesores que me ayudaron en el asesoramiento de corrección de esta tesis, sus consejos han sido de gran ayuda. De igual forma agradezco a CONACYT, por la beca otorgada.

Sin dejar de lado a una parte muy importante de mi persona, agradezco a mi familia (Padres y Hermanos) por el apoyo incondicional, que es por ellos que puedo valorar el esfuerzo y la dedicación que he llevado.

Por último y sobre todo un agradecimiento especial a Elizabeth, por estar y compartir conmigo las experiencias tanto profesionales como de compañía.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Hipótesis . . . . .	8
1.2. Objetivo principal . . . . .	9
1.2.1. Objetivos específicos . . . . .	9
<b>2. Ecuación no lineal de Schrödinger para pulsos ópticos</b>	<b>11</b>
2.1. Efectos de Polarización . . . . .	12
2.2. Ondas electromagnéticas en medios dieléctricos . . . . .	13
2.3. Efecto Kerr y coeficiente Kerr . . . . .	14
2.3.1. Respuesta lineal . . . . .	15
2.3.2. Respuesta no lineal . . . . .	17
2.4. Ecuación no lineal de Schrödinger . . . . .	19
2.4.1. Ecuación envolvente para la onda electromagnética . . . . .	21
<b>3. Solitones no autónomos en fibras ópticas</b>	<b>26</b>
3.1. Modelo no autónomo en la ecuación no lineal de Schrödinger . . . . .	27
3.1.1. Solitón no autónomo . . . . .	28
3.2. Mapeo de He y Li para solitones no autónomos en fibras ópticas . . . . .	29
3.2.1. Solitones no autónomos en fibras con ganancia variable y tasa constante de pérdida . . . . .	29
3.2.2. Solitones en fibras con amplificadores . . . . .	32
3.2.3. Solitones brillantes en fibras ópticas con ganancia y no linealidad variables . . . . .	35

3.3.	Solitones no autónomos en la ecuación Compleja de Ginzburg-Landau . . . .	37
3.3.1.	Mapeo He-Li, tratamiento matemático . . . . .	39
3.3.2.	Solución exacta para la ecuación compleja de GL estándar . . . . .	41
3.3.3.	Solución para la ecuación compleja de GL con coeficientes variables	44
<b>4.</b>	<b>Supersimetría óptica</b>	<b>47</b>
4.1.	Analogía entre fibras ópticas y mecánica cuántica . . . . .	47
4.2.	Ecuación escalar de onda independiente de la longitud y ecuación de Schrödinger independiente del tiempo . . . . .	50
4.3.	Estructuras supersimétricas . . . . .	52
4.3.1.	Potenciales isoespectrales . . . . .	53
4.3.2.	Descripción supersimétrica de la ecuación de onda . . . . .	56
<b>5.</b>	<b>Supersimetría paramétrica en bloques de guías de onda</b>	<b>61</b>
5.1.	Análisis modal de bloques de guía de ondas . . . . .	62
5.2.	Estructura supersimétrica o modos de factorización . . . . .	66
5.3.	Aplicación de perfiles de índice de refracción para $f(\chi)$ como ley de potencias	69
5.3.1.	Modo TE . . . . .	70
5.3.2.	Modo TM . . . . .	73
5.4.	Guías de onda multicapa . . . . .	79
<b>6.</b>	<b>Factorización no lineal</b>	<b>83</b>
6.1.	Factorización de ecuaciones no lineales con un grado monomial de primer orden en la primera derivada . . . . .	84
6.2.	Factorización de ecuaciones no lineales con función polinomial de segundo orden en la primera derivada . . . . .	86
6.3.	Factorización de la ecuación no lineal de Korteweg-de Vries . . . . .	88
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>95</b>
	<b>Referencias</b>	<b>101</b>

<b>A. Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)</b>	<b>111</b>
A.1. Solución de la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) . . . . .	111
<b>B. Ecuación no-lineal de Schrödinger (NLS)</b>	<b>115</b>
B.1. Solución de la ecuación no lineal de Schrödinger . . . . .	115
<b>C. Solitones no-autónomos para distintas soluciones de la ecuación de Schrödinger</b>	<b>122</b>
C.1. Solitones no autónomos . . . . .	122
C.2. Ejemplos de solitones no autónomos . . . . .	122
<b>D. Artículos de Investigación</b>	<b>126</b>

# Índice de figuras

1.1. Solución de tipo solitónico de la ecuación no lineal KdV. (a) Para $v = 10$ m/s y $t = 0.1$ s y con variación de longitud entre 0 – 10 m donde el solitón está localizado a 1 m. (b) Para $v = 10$ m/s y $x = 1$ m, variando el tiempo desde 0 s hasta 1 s, donde el solitón se observa en un tiempo de 0.1 s. (c) Solitón tri-dimensional de KdV que muestra su evolución espacio-temporal de manera simultánea, variando el tiempo desde 0 s hasta 1 s y la longitud de 0m a 10 m, con velocidad 10 m/s, donde se observa que la propagación del pulso se presenta sin pérdidas de amplitud y que es proporcional a la velocidad. (d) Gráfica de contorno que muestra la propagación espacio-temporal del solitón KdV . . . . .	3
2.1. Solución solitónica de la ecuación no lineal de Schödinger para un solitón brillante ec. (2.43) y para un solitón oscuro ec. (2.44), con las constantes $\eta = 1$ , $a = 0.5$ , $T_0 = 0.5$ , $\kappa = 0.2$ , y $\sigma = 0.1$ . . . . .	25
3.1. Solitones no autónomos obtenidos de (3.24), con los parámetros: $\beta_2 = 10$ (GDV), $T_2 = 0.2$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación con $v = v_g = 1$ y una pérdida/ganancia = 0.6, (b) Gráfica de contorno de la propagación de (a). (c) Propagación con $v = 2$ , $v_g = 1$ y una pérdida/ganancia = 0.6 y (d) Gráfica de contorno de la propagación de (c). (e) Propagación con $v = v_g = 1$ y una pérdida/ganancia = 0.8, (f), gráfica de contorno del pulso. (g) y (h) Propagación del pulso para pérdida/ganancia= 0.8 con $v = 2$ y gráfica de contorno del pulso, respectivamente. . . . .	34

3.2.	Solitones no autónomos obtenidos de la ec (3.29), con los parámetros: $\beta_2 = 10$ (GDV), $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación con $v = v_g = 1$ y $G_1 = 0$ , (b) Gráfica de contorno de la propagación de (a). (c) Propagación con $v = 2$ , $v_g = 1$ y $G_1 = 0$ (d) Gráfica de contorno de la propagación de (c). (e) Propagación con $v = v_g = 1$ , y $G_1 = 1$ (f), gráfica de contorno del pulso. (g) y (h) Propagación del pulso para $G_1 = 1$ con $v = 2$ y gráfica de contorno del pulso, respectivamente. . . . .	36
3.3.	Línea $S$ (3.56) en el plano $(\epsilon, \beta)$ donde las soluciones con amplitudes fijas (3.53) se vuelven singulares, y donde las clases de soluciones especiales con amplitud arbitraria (3.57) existen. Este diagrama se aplica para casos cúbicos y quínticos. La línea correspondiente para el caso de dispersión anómala es dada por línea azul para la comparación. Por encima de la línea $S$ , $\delta$ debe ser positiva para que exista la solución (3.53), y negativa debajo de ella. La línea roja es para $S$ dada por $D = +1$ que muestra la dispersión normal. . . . .	43
3.4.	a) Solitón de la solución con amplitud fija. b) Gráfica de contorno de propagación correspondiente . . . . .	45
3.5.	a) Solitón brillante de la solución con amplitud arbitraria. b) Gráfica de contorno de propagación correspondiente . . . . .	46
4.1.	(a) Ejemplo de una fibra óptica cilíndrica, con el núcleo de la fibra revestido por un recubrimiento de bajo índice de refracción; teóricamente, se puede considerar que $r$ se expande al infinito. (b) Trayectoria de un rayo que pasa a través de una fibra de perfil escalón. (c) Trayectoria de un rayo que pasa a través de una fibra de perfil gradual. El pulso óptico o rayo es confinado si $\theta_z < \theta_c$ donde $\theta_c \cong [1 - n_{rev}^2/n_0^2]^{1/2}$ . . . . .	49
4.2.	Correspondencia entre el índice de refracción normalizado y un pozo de potencial. . . . .	51

5.1. Guía de onda donde el índice de refracción tiene una discontinuidad de paso en $x = \pm a$ y las regiones $ x  < a$ y $a <  x  < a + b$ son conocidas como el núcleo y el revestimiento, respectivamente. El índice de refracción del núcleo $n_1$ es mayor que el índice de refracción del revestimiento $n_2$ . Se asume que el medio de propagación es infinito en dirección $y$ . . . . .	62
5.2. Guías de onda original y supersimétrica para $\alpha = 0$ , del modo TE; con $n_0 = 2.5$ , $n_2 = 1.5$ , $2a$ y $a = 2.48$ embebida en un sustrato de un material con índice de refracción $n_1^2 = n_0^2 - s_2$ , y el parámetro $C_1 = 0.5, 0.7$ . . . . .	71
5.3. Guías de onda original y supersimétrica para $\alpha = 1$ , del modo TE; con $n_0 = 2$ , $n_2 = 1.5$ , y $a = 11.25$ embebida en un sustrato de un material con índice de refracción $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi$ , y el parámetro $C_1 = 0.5, 0.7$ . . . . .	72
5.4. Guías de onda original y supersimétrica para $\alpha = 2$ , del modo TE; con $n_0 = 2$ , $n_2 = 1.5$ , $2a$ y $a = 3.31$ embebida en un sustrato de un material con índice de refracción $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi^2$ , y el parámetro $C_1 = 0.1, 0.3$ . . . . .	73
5.5. Guías de onda original y supersimétrica para $\alpha = 0$ , del modo TM; con $n_0 = 2.5$ , $n_2 = 1.5$ , y $a = 2.48$ embebida en un sustrato de un material con índice de refracción $n_1^2 = n_0^2 - s_2$ , y el parámetro $C_1 = 0.5, 0.7$ . . . . .	75
5.6. Guías de onda original y supersimétrica para $\alpha = 1$ , del modo TM; con $n_0 = 2$ , $n_2 = 1.5$ , y $a = 11.25$ embebida en un sustrato de un material con índice de refracción $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi$ , y el parámetro $C_1 = 0.5, 0.7$ . . . . .	76
5.7. Guías de onda original y supersimétrica para $\alpha = 2$ , del modo TM; con $n_0 = 2$ , $n_2 = 1.5$ , y $a = 3.31$ embebida en un sustrato de un material con índice de refracción $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi^2$ , y el parámetro $C_1 = 0.2, 0.4$ . . . . .	77
5.8. Construcción Jerárquica para los modos TE y TM en el caso $\alpha = 0$ . . . . .	78
5.9. Construcción Jerárquica para los modos TE y TM en el caso $\alpha = 1$ . . . . .	78
5.10. Construcción Jerárquica para los modos TE y TM en el caso $\alpha = 2$ . . . . .	79
5.11. a) Guía “M” con perfil de índice de refracción constante, b) Guía de onda “M” supersimétrica con perfil de onda compañero . . . . .	81
5.12. a) Guía “W” con perfil de índice de refracción constante, b) Guía de onda “W” supersimétrica con perfil de onda compañero . . . . .	82

6.1. Solución solitónica de la ecuación no lineal de KdV (6.45) y para un solitón superisimétrico ec. (6.48), con las constantes $c_0 = 1.3$ , $c = 0.1$ , y la velocidad $v=2$ . . . . .	94
C.1. Solitones no autónomos obtenidos de (C.1), con la solución autónoma de Katyshev (C.2), con los parámetros: $\beta_2 = 0.001$ (GDV), $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación del solitón de Katyshev con dispersión igual a $\beta(z) = b_0 \exp(-\sigma * z) \cos(\delta * z)$ , con $b_0 = 0.2$ , $\sigma = 2$ y $\delta = 2$ , con no linealidad igual a 1, b) Gráfica de contorno de la propagación del solitón de Katyshev. . . . .	124
C.2. Solitones no autónomos obtenidos de (C.1), con la solución autónoma de Katyshev (C.2), con los parámetros: $\beta_2 = 0.001$ (GDV), $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación del solitón de Katyshev con dispersión igual a $\beta(z) = \cos(3 * z)$ , con no linealidad igual a 1, b) Gráfica de contorno de la propagación del solitón de Katyshev. . . . .	124
C.3. Solitones no autónomos obtenidos de (C.1), con la solución autónoma de Peregrine (C.3), con los parámetros: $\beta_2 = 0.001$ (GDV), $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación del solitón de Peregrine con dispersión igual a $\beta(z) = b_0 \exp(-\sigma * z) \cos(\delta * z)$ , con $b_0 = 0.2$ , $\sigma = 2$ y $\delta = 2$ , además de no linealidad igual con 1. b) Gráfica de contorno de la propagación del solitón de Peregrine. . . . .	125
C.4. Solitones no autónomos obtenidos de (C.1), con la solución autónoma de Peregrine (C.3), con los parámetros: $\beta_2 = 0.001$ (GDV), $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación del solitón de Peregrine con dispersión igual a $\beta(z) = \cos(3 * z)$ , además de no linealidad igual con 1. b) Gráfica de contorno de la propagación del solitón de Peregrine. . . . .	125

# Índice de tablas

4.1. Parámetros importantes en una fibra óptica. . . . .	50
4.2. Diccionario Cuántico-óptico propuesto por Black y Ankiewicz (ver referen- cia <sup>25</sup> ) . . . . .	53



# Resumen

## **Supersimetría y Propagación de Solitones en Guías de Onda**

PALABRAS CLAVE: Supersimetría, Guías de Onda, Solitones, Modos Transversales Electromagnéticos, Factorización.

La propagación de una onda electromagnética o pulso óptico depende principalmente del medio donde se propaga; por ejemplo, un pulso que se propaga en el vacío usualmente puede hacerlo sin cambios. Pero, sin embargo, cuando se propaga en un medio, el campo electromagnético interactúa con los átomos del medio, este fenómeno hace que el pulso experimente pérdida y dispersión.

Inicialmente, para hacer el estudio teórico de la propagación de pulsos a través de un medio, se requiere trabajar mediante el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell, contemplando las características materiales del medio, de donde se deriva la ecuación diferencial de segundo orden denominada “ecuación de onda”; ecuación que, al ser resuelta, nos proporciona información de la forma explícita de la propagación del pulso en el medio. En esta tesis se desarrolló un procedimiento para la obtención de una solución analítica de la ecuación de onda mediante el uso de métodos supersimétricos, tal como se hace en mecánica cuántica para el caso de la ecuación de Schrödinger, ya que esta última ecuación y la ecuación de onda electromagnética son similares en una aproximación paraxial; el tratamiento supersimétrico se desarrolla partiendo de la factorización propia del método. Donde se obtiene una familia de soluciones parametrizadas por constantes de propagación análogas a la energía en mecánica cuántica, que generan en óptica la iso-modoespectralidad (es decir, se obtiene la misma constante de propagación para las guías de onda obtenidas por supersimetría a excepción del modo fundamental o primer modo), que corresponden a los valores propios reales y discretos del problema espectral de Schrödinger lineal en su tratamiento óptico paraxial, a su vez, mediante este método se obtiene una guía de onda compañera, representada por un índice

de refracción menor que el índice de refracción de la guía original y esta guía es denominada guía de onda supersimétrica, esta estructura soportará todos los modos de propagación compañeros excepto el modo fundamental, también, este método supersimétrico se puede aplicar de manera jerárquica, teniendo como resultado, estructuras de filtrado de modos de propagación, los cuales, por otra parte, pueden tener una aplicación en el área tecnológica, donde se analizan las condiciones de propagación para una posible aplicación real.

Por otra parte, en este mismo contexto óptico, se trabajó con sistemas dinámicos de óptica no lineal, tomando como sistemas de referencial las guías de onda y fibras ópticas, como se menciono anteriormente. Tal que, en estos sistemas ópticos generalmente se presentan soluciones que se pueden ver como soluciones de tipo onda solitaria y de tipo switcheo (kinks). Para este estudio, se analizó una de las principales aplicaciones de estos sistemas, que resulta de resolver las ecuaciones que llevan por solución los denominados solitones ópticos mismas que, presentan características específicas y bien definidas del pulso. Para ser exactos principalmente estas soluciones se observan en ecuaciones no lineales, como lo son las ecuaciones de Schrödinger (NLSE por sus siglas en Inglés) y de Ginzburg-Landau (NLGLE). Nuestra principal contribución en este ámbito no lineal, se realizó en la obtención de soluciones solitónicas de las ecuaciones no lineales de Schrödinger y Ginzburg-Landau en casos generalizados de ecuaciones de coeficientes variables, en las cuales se desarrolló el tratamiento con solitones no autónomos, mismos que están descritos bajo el manejo de dispersión y no linealidad, relacionados en ejemplos concretos con aplicaciones tecnológicas presentadas en la literatura.

Por último, se hace una descripción de un modelo no lineal comúnmente trabajado en óptica, pero bajo un esquema supersimétrico de factorización con ayuda del método propuesto por Rosu y Cornejo-Pérez para la factorización de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, en donde en esta tesis este problema es propuesto como una extensión del método, obteniendo soluciones solitónicas supersimétricas.

# Abstract

## **Supersymmetry and Solitonic Propagation in Waveguides**

KEY WORDS. Supersymmetry, Waveguides, Solitons, Electromagnetic Traversal Modes, Factorization.

Propagation of an electromagnetic wave or optical pulse depends mainly on the medium where it propagates; for example, a pulse that propagates in a vacuum can usually spread without change. But nevertheless, when it propagates in a medium, the electromagnetic field interacts with the atoms of the medium, this phenomenon causes the pulse to experience loss and dispersion.

Initially, to make the theoretical study of the propagation of pulses through a medium, it is necessary to work through the development of Maxwell's equations, contemplating the material characteristics of the medium, from which the differential equation of the second order called "wave equation", this equation that when is solved, gives us information of the explicit form of the pulse propagation in the medium. In this thesis a procedure was implemented to obtain an analytical solution of the wave equation under the use of supersymmetric methods, as is done in quantum mechanics for the case of the Schrödinger equation. Classical Schrödinger equation and the wave equation are similar in a paraxial approximation, the supersymmetric treatment is used to obtain a solution starting from the own factorization of the method. Where you get a parametric family solution by propagation constants analogous to energy in quantum mechanics, which generate in optics "isomodespectrality" (i.e, is obtains the same propagation constants for the waveguides by supersymmetry method except for the fundamental mode or first mode), which correspond to the real and discrete eigenvalues of the linear Schrödinger spectral problem in its optic paraxial treatment, at the same time, by this method a partner waveguide is obtained, represented by the index of refraction and this is called "supersymmetric waveguide", it means we are able to generate the type of structure that will support the modes of propagation partners, also, this supersymmetric method can

be applied in a hierarchical manner, with which we realize that, it is guaranteed a filtering structures of propagation modes.

On the other hand, in this same optical context, we work with dynamic systems of non-linear optics, taking the model in waveguides and optical fibers as the main system. As is well known, in these optical systems solutions are usually presented that can be seen as solutions of solitary wave type and switching type (kinks). Taking as reference that one of the main applications of these systems is that in their equations the solution is presented in the environment of optical solitons whose solutions have specific and well defined characteristics of the pulse. To be exact, these solutions are mainly observed in non-linear equations, such as the Schrödinger (NLSE) and Ginzburg-Landau (NLGLE) equations. Then, taking into account the aforementioned, to make a contribution in obtaining solutions for this type of problems, in this work we propose a method to find solitonic solutions of the non-linear equations of Schrödinger and Ginzburg-Landau in generalized cases of variable coefficients equation, in which the treatment is done with non-autonomous solitons, which are described under the dispersion and non-linearity management, related to concrete examples in technological applications presented in the literature.

Finally, a description is made of a nonlinear model commonly worked in optics, but under a supersymmetric scheme of factorization with the help of the method proposed by Rosu and Cornejo-Pérez for the factorization of nonlinear second order differential equations, where in this thesis this problem is proposed as an extension of the method, obtaining solitonic supersymmetric solutions.

# Capítulo 1

## Introducción

Los fenómenos no lineales aunque observados de manera experimental en forma de onda solitaria de traslación se conocen desde hace 185 años (1834 Scott Russell) y han sido investigados de manera matemática como soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales solamente desde la parte final del siglo XIX (Bousinesq (1877), Korteweg y de Vries (KdV) (1895)).<sup>1</sup> Es muy probable que la onda solitaria de Scott Russell fue un solitón de tipo Korteweg de Vries, es decir, una solución  $\psi(z, t)$  de la ecuación propuesta por Korteweg-de Vries, para las ondas producidas en agua

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + 6\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} = 0 . \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) generalmente se resuelve considerando una solución de tipo onda viajera, donde la solución tiene la forma  $\psi(z, t) = A(z - vt) \equiv A(\xi)$ , tal que  $v$  es la velocidad de la onda, que al sustituirla en la ecuación (1.1), y posteriormente se integra con respecto a  $\xi$ , se llega a una ecuación diferencial de segundo orden que es representada como

$$-vA + 3A^2 + \frac{d^2 A}{d\xi^2} = C_1 , \quad (1.2)$$

donde  $C_1$  es la constante de integración. De tal manera que al resolver la ecuación (1.2)<sup>1</sup>, se obtiene un solitón que se considera una onda localizada que se aproxima a cero cuando  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , y presenta la forma

---

<sup>1</sup>El método de solución de la ecuación de Korteweg-de Vries se presenta en el apéndice A

$$\psi(z, t) = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{v}}{2} (z - vt) \right), \quad (1.3)$$

teniendo en cuenta que  $\frac{v}{2}$  es la amplitud de la onda y  $v$  es la velocidad como ya habíamos mencionado, lo cual nos da una característica esencial en solitones que relaciona la amplitud con el ancho del solitón. En la ec. (1.3) notamos que para una amplitud grande la onda se mueve más rápido que una onda de amplitud más pequeña, siendo también una de las características importantes en los solitones.

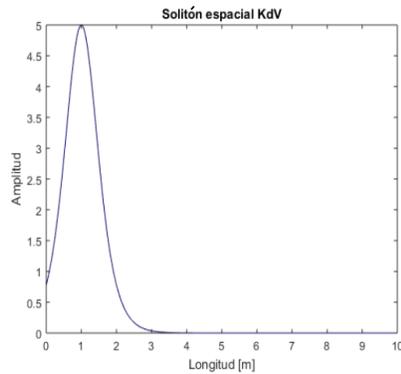
En la actualidad podemos encontrar este tipo de fenómenos en varias ramas de la ciencia y tecnología, por ejemplo en sistemas electromagnéticos, químicos, biológicos, cosmológicos, etc. De manera general, las aplicaciones van creciendo dado que este tipo de fenómenos son descritos en muchas ocasiones por soluciones exactas, lo que favorece la comparación entre teoría y experimento, ayudando a la innovación tecnológica.

Una de las observaciones más comunes en este tipo de fenómenos se presenta en sistemas que tienen un movimiento ondulatorio, en donde inicialmente se encuentran paquetes de onda bien definidos temporalmente, que presentan dispersión espacial de sus componentes.<sup>2</sup> Sistemas que, ya tienen una solución definida, que se introduce con una aproximación lineal de una ecuación no lineal, semejante a aquellas que son propuestas de soluciones de tipo ondas planas de alta frecuencia como en el caso de la ecuación no lineal de Schrödinger, que se resuelve bajo condiciones de valor inicial aplicando una transformada de dispersión inversa.<sup>3</sup>

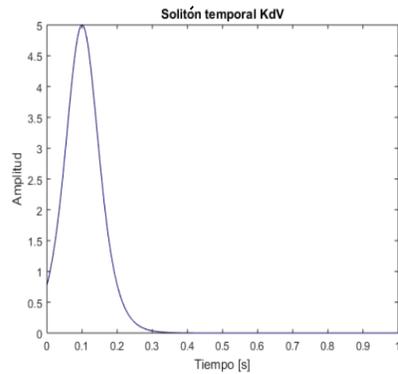
En la literatura, se ha encontrado que la gran mayoría de las ondas solitarias son estables a la dispersión presentando un mínimo deterioro de su configuración durante la propagación. Esto se debe a la tendencia que tienen sus componentes a juntarse por el fenómeno de autofocalización<sup>2</sup>, representativo en medios no lineales.<sup>5</sup>

---

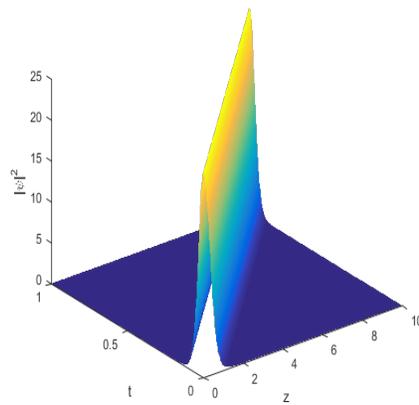
<sup>2</sup>La autofocalización es un proceso que óptica no lineal induce un cambio de índice de refracción de los materiales expuestos a una intensa radiación electromagnética.<sup>4</sup> El medio en el que se incrementa el índice de refracción con la intensidad del campo eléctrico actúa como un lente que enfoca la onda electromagnética caracterizada por el gradiente transversal de intensidad inicial.



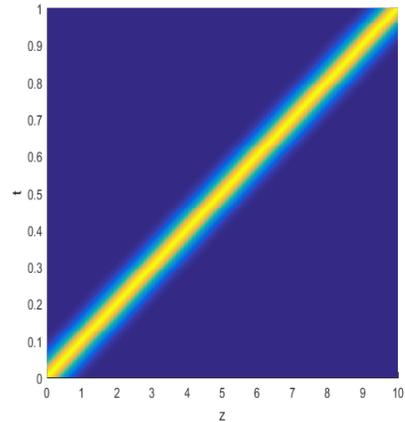
(a) Solitón espacial KdV



(b) Solitón temporal KdV



(c) Solitón KdV



(d) Vista superior de propagación

FIGURA 1.1: Solución de tipo solitónico de la ecuación no lineal KdV. (a) Para  $v = 10$  m/s y  $t = 0.1$  s y con variación de longitud entre 0 – 10 m donde el solitón está localizado a 1 m. (b) Para  $v = 10$  m/s y  $x = 1$  m, variando el tiempo desde 0 s hasta 1 s, donde el solitón se observa en un tiempo de 0.1 s. (c) Solitón tridimensional de KdV que muestra su evolución espacio-temporal de manera simultánea, variando el tiempo desde 0 s hasta 1 s y la longitud de 0m a 10 m, con velocidad 10 m/s, donde se observa que la propagación del pulso se presenta sin pérdidas de amplitud y que es proporcional a la velocidad. (d) Gráfica de contorno que muestra la propagación espacio-temporal del solitón KdV

Aunque Scott Russell bautizó como onda solitaria a la onda que observó en el canal “Union”, en la actualidad se ha vuelto común el término de “solitón” introducido por Zabusky y Kruskal en 1965,<sup>6</sup> para describir este fenómeno producido por ondas solitarias que no cambian de forma y velocidad cuando chocan entre sí.

De esta forma, en el ámbito de las matemáticas, la comunidad científica ha podido avanzar de manera más consistente en el entendimiento de los aspectos dinámicos de los solitones. Uno de los métodos matemáticos más reconocidos en esta área de sistemas dinámicos no lineales en específico en solitones, es el que fue desarrollado por el grupo de matemáticos Gardner, Greene, Kruskal y Miura en 1967 quienes resolvieron la ecuación KdV por el método de transformación de dispersión inversa.<sup>3</sup> En este método la solución solitónica de la ecuación KdV se da como una función potencial de un problema de dispersión y se representa como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + [\lambda + A(z, t)] \psi = 0 , \quad (1.4)$$

tal que  $A(z, t)$  es una solución de la ecuación KdV,  $\psi(z, t)$  es la función propia de la onda y  $\lambda$  es un parámetro temporal.<sup>7</sup>

Posteriormente, en 1968, Lax dió una formulación más general de este método, el cual en 1971 Zakharov y Shabat en la unión Soviética, usaron para encontrar las soluciones solitónicas de la ecuación cúbica no-lineal de Schrödinger(NLSE).<sup>8-10</sup> Las soluciones solitónicas de esta ecuación son aún más usadas que las soluciones solitónicas de la ecuación KdV, las cuales describen fenómenos no lineales como, olas en aguas profundas, láseres auto-enfocados en dieléctricos, propagación de pulsos en fibras ópticas, imanes en 1D de Heisenberg, y vórtices de flujo en fluidos, etc.<sup>5</sup> De esta manera, sin perder generalidad con el método de dispersión inversa se pueden resolver otro tipo de problemas no lineales de dispersión como en el caso de Ablowitz en 1973 el cual usó para resolver la ecuación seno-Gordon (sG), o la ecuación de dispersión de Ginzburg-Landau.<sup>11</sup>

Una de las áreas más favorecida por este tipo de fenómenos es la óptica, y en particular la rama de telecomunicaciones ópticas (por fibra óptica), donde el término solitón se utiliza para referirse a cualquier pulso electromagnético que se propaga sin deformación alguna a largas distancias como resultado del equilibrio entre los efectos no lineales del medio de propagación y los efectos de dispersión del pulso solitónico.

Existen dos tipos principales de solitones ópticos:

- Solitones espaciales: son aquellos pulsos donde el efecto no lineal puede equilibrar la difracción. En este caso, el índice de refracción del medio depende del campo electromagnético del pulso, y la propagación, se produce de manera similar a una fibra de índice gradual, ver Fig.(1.1).

Si el campo del pulso coincide con un modo de propagación de la guía, entonces este permanecerá confinado y se propagará sin cambiar de forma.<sup>1,12</sup>

- Solitones temporales: son aquellos donde el campo electromagnético del pulso ya está confinado en el espacio, y de esta manera es posible evitar que los pulsos cambien su forma debido a los efectos no lineales, los cuales mantendrán el pulso confinado equilibrando la dispersión. Estos solitones a menudo se refieren simplemente como solitones ópticos.<sup>13,14</sup>

En consecuencia, dado lo anterior podemos hacer referencia principalmente al trabajo realizado por Hasegawa y Tappert,<sup>15</sup> quienes en 1973 fueron los pioneros en aplicar el estudio de los solitones, para los pulsos ópticos en guías de onda en fibras dieléctricas en presencia de dispersión anómala.<sup>5,15,16</sup> La propagación de los solitones en este caso depende del índice de refracción del medio o bien de la intensidad con la que se introduce el pulso, lo que en óptica física ya se conocía como efecto Kerr.<sup>5</sup>

El análisis de la propagación de los pulsos solitónicos en fibras ópticas y medios ópticos no lineales, ha llevado a un crecimiento muy notable de la óptica no lineal enfocada a la

transmisión de datos de muy alto contenido informacional sin pérdidas en las comunicaciones.<sup>17,18</sup> En esta situación los solitones se propagan a lo largo de las fibras sin cambiar de forma, siendo las cantidades naturales de información.

En el trabajo fundamental de Hasegawa y Tappert obtuvieron el primer solitón óptico donde se representa la intensidad del pulso por una función radial propia de la guía de onda, la ecuación de su descripción fue la denominada ecuación cúbica no lineal de Schrödinger.

Los estudios de Hasegawa y Tappert fueron confirmados de manera experimental por Mollenauer, Stolen y Gordon<sup>19</sup> en 1980. En donde reportan el uso pulsos de 7 ps de un laser de centro de color en modo bloqueado para una longitud de 700 nm, y al ser propagados a través de fibras ópticas mono-modo de silica de longitud de onda 1.55  $\mu$  m consiguen el primer solitón experimental. También se reporta que su régimen de trabajo es el régimen de dispersión anómala, donde la velocidad de dispersión de grupo es negativa, la cual es originada porque el pulso presenta una compresión, lo que significa que tengan bajas pérdidas de amplitud del pulso;<sup>5</sup> con esto ellos controlaron los niveles críticos de potencia a los cuales los pulsos tenían propagación solitónica.

Por otra parte, conociendo la influencia que tienen los solitones en la óptica, es importante tomar en cuenta las características y materiales del medio de propagación. En la actualidad, las aplicaciones tecnológicas usadas para la creación de diversos medios de propagación de información va en aumento, ya que se requiere que exista la mayor transferencia de información con la menor pérdida. Con esto en mente, las transformaciones ópticas en el campo de los medios de propagación, tienen como objetivo identificar los materiales, estructuras artificiales y sus propiedades electromagnéticas, para la creación de tecnologías deseadas. En general, tales sistemas están destinados a adaptar adecuadamente los parámetros constitutivos de los materiales y meta-materiales con el fin de controlar la trayectoria de la luz.

Una aplicación reciente a la creación de estos materiales es dada en la representación de sistemas ópticos en el regimen paraxial a través de otros tipos de métodos, como es el

caso de métodos supersimétricos;<sup>20–22</sup> que de manera paralela con el estudio en la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY-QM por sus siglas en inglés) se pueden crear estructuras ópticas deseadas. SUSY fue presentada por primera vez por Witten en 1984<sup>23</sup> (como una parte importante en el tratamiento de valores propios de energía en física de partículas). Por lo que, regresando a la aplicación óptica se pretende obtener un tratamiento supersimétrico para encontrar estructuras con específicos perfiles de índice de refracción que contengan propiedades interesantes para la propagación de los pulsos ópticos,<sup>24</sup> tanto en el régimen solitónico como en otros regímenes.

Es posible conectar la mecánica cuántica con la óptica, debido a la similitud de las ecuaciones y su conexión análoga entre el potencial independiente del tiempo en mecánica cuántica descrito por la ecuación de Schrödinger, y el índice de refracción independiente de la longitud de propagación descrito por la ecuación de Helmholtz.<sup>25</sup> Tal que en una guía de onda óptica, la luz es guiada debido a que el núcleo tiene un alto índice de refracción que confina a los rayos, y análogamente en comparación con la mecánica cuántica actúa como un pozo de potencial para una partícula.

Por lo que la propuesta usada generalmente en SUSY-QM, y que es de gran interés, es donde se obtienen potenciales isoespectrales, siendo uno de los caminos para resolver de manera exacta problemas de Schrödinger para diferentes pozos de potencial. Esta forma de resolver los problemas isoespectrales ha sido aplicada por varias décadas, y anteriormente era la actividad principal de esta área, donde se usaba el método de factorización<sup>26–28</sup> como método de solución. Fue a partir de los 80s,<sup>23</sup> cuando las conexiones con las transformaciones de Darboux fueron usadas por físicos matemáticos en SUSY-QM, para la implementación en los problemas de factorización.<sup>29</sup>

De manera general, en SUSY-QM, se usan dos Hamiltonianos isoespectrales para la representación de los estados bosónicos y fermiónicos, excepto para el estado base,<sup>30</sup> descripción ya bien conocida. Por lo que, siguiendo este desarrollo, entonces se pretende obtener la conexión directa de una estructura supersimétrica pero con aplicación concreta en óptica,

bajo la ecuación de Helmholtz que en óptica describe la propagación de pulsos en guías de onda.<sup>29,31,32</sup>

Tal que, para este tipo de fenómenos ópticos, se puede usar una descripción matemática de manera análoga, haciendo uso de supersimetría, dado que la descripción de esta área, tiene como fin el hecho de encontrar superpotenciales que describan tal interacción. Por lo que, en óptica se pueden obtener índices de refracción compañeros que producen isomodoespectralidad. Lo que nos lleva a obtener soluciones exactas de problemas de ecuaciones no lineales, por ejemplo de nuevos tipos de soluciones solitónicas, siendo estas muy representativas en la óptica no lineal.

## 1.1. Hipótesis

La idea de supersimetría inicialmente en física se define para el problema de unificación entre las partículas fermiónicas y bosónicas del modelo estándar en física de partículas. En principio, la supersimetría dice que a cada partícula, le corresponde una partícula compañera supersimétrica que difiere solamente por medio spin. Sin embargo, ninguna de estas partículas han sido determinadas sino, por aceleradores de partículas, por supersimetría, o más precisamente, las matemáticas que se encuentran tras esto; de forma que para tener una utilidad feasible se han planteado analogías en otras ramas de la física; lo que ha llevado a incursionar con la idea de la supersimetría al campo de la óptica donde podría tener mayor éxito, esto se da al proponer pulsos compañeros supersimétricos o características materiales definidas a través de la supersimetría.

Una forma de introducir la supersimetría en la óptica es a través de la factorización de las ecuaciones no lineales y lineales de la óptica lineal y no lineal, donde se pueden obtener nuevas soluciones solitónicas de estas ecuaciones mediante el método supersimétrico, estas soluciones tendrán características similares de las soluciones ya conocidas, pero con esencia supersimétrica.

La factorización supersimétrica se aplica a ecuaciones comúnmente usadas en el caso de propagación óptica paraxial. Lo que también puede llevar a obtener nuevas soluciones solitónicas, o propuestas de materiales con propiedades ópticas apropiadas para la propagación sin pérdidas de los pulsos ópticos.

De esta manera, podemos analizar cómo la supersimetría puede dar una manera más versátil en la síntesis de una clase nueva de estructuras ópticas, con propiedades y funcionalidades deseadas. Dado que utilizando la fuerte relación entre los supercompañeros, se puede describir una forma sistemática de construcción de potenciales que relacionen los índices de refracción capaces de mostrar la misma dispersión y otras características de las guías de onda.<sup>24</sup>

## **1.2. Objetivo principal**

Hacer uso del desarrollo de las técnicas matemáticas supersimétricas que nos permitirán calcular explícitamente las soluciones de tipo onda solitaria de las principales ecuaciones no lineales que se usan en los sistemas dinámicos de la óptica no lineal (guías de onda y redes de fibras ópticas). Siendo que en el contexto de solitones ópticos descritos por la ecuación de Schrödinger, se pueden utilizar los potenciales isoespectrales, para estudiar bajo qué condiciones, las familias de solitones parametrizados por sus constantes de propagación, pueden ser modos lineales guiados, que corresponden a los valores propios reales discretos del correspondiente problema espectral de Schrödinger. Esto se puede aplicar también a las otras ecuaciones tanto lineales como no lineales de la óptica.

### **1.2.1. Objetivos específicos**

1. Usar supersimetría cuántica para proponer potenciales isoespectrales obtenidos a través de soluciones particulares y generales de la ecuación de Riccati correspondiente a los

problemas que se investigarán, para relacionarlos con los perfiles del índice de refracción de las guías de onda.

2. Encontrar las soluciones solitónicas de las ecuaciones de Schrödinger, Helmholtz, Ginzburg-Landau, con potenciales que sean obtenidos a través del método supersimétrico.
3. Analizar las soluciones encontradas para proponer aplicarlas a arreglos ópticos, y describir el comportamiento dinámico de los pulsos en relación con los perfiles de índices de refracción obtenidos de esta manera.
4. Analizar en qué otro parámetro óptico, sea tal vez el número de onda  $k$  o la constante de propagación  $\beta$ , donde se puede incluir la supersimetría y obtener soluciones de los sistemas ópticos modificados por supersimetría.

## Capítulo 2

# Ecuación no lineal de Schrödinger para pulsos ópticos

Existen diversos modelos dinámicos bien descritos para explicar las propiedades de los solitones. En particular, en este capítulo abordaremos una de las ecuaciones más significativas en el estudio de la propagación de pulsos ópticos en fibras y medios ópticos no lineales, tal ecuación es la denominada ecuación no lineal de Schrödinger (NLS). Es bien sabido que la ecuación NLS aparece en varios campos de la física, pero generalmente esta ecuación diferencial tiene mayor ocupación en fenómenos no lineales que describe la propagación de ondas en medios no lineales dispersivos,<sup>11</sup> a su vez, este tipo de fenómenos pueden ser aplicados en áreas como son: física ferromagnética, hidrodinámica, física del plasma o bien física de partículas elementales.

Básicamente, para hacer un análisis de este tipo de fenómenos, se requieren conocer los medios en donde se propagan las ondas analizadas, como se había mencionado anteriormente algunos de los medios no lineales pueden ser fibras ópticas o cristales no lineales, los cuales debido al material de construcción y de los campos electromagnéticos externos presentan una respuesta no lineal. A este tipo de medios, generalmente se les conoce como “medios Kerr”,<sup>33</sup> nombre dado en honor de su descubridor John Kerr, los medios Kerr describen los aspectos detallados de la óptica de solitones y se rigen por la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger.<sup>18</sup>

## 2.1. Efectos de Polarización

Uno de los principales puntos de vista, sobre el tratamiento de la propagación de pulsos en medios ópticos, es formulado bajo la descripción matemática de la envolvente de la onda en un medio no lineal dispersivo. Este tratamiento es usado para describir los fenómenos producidos cuando el campo eléctrico es aplicado al material dieléctrico, donde este campo produce una separación de cargas, la cual se podrá ver como una colección de momentos dipolares inducidos, que oscilarán rápidamente. Esta red de momentos dipolares es conocida como polarización  $\mathbf{P}$ , por lo que la polarización es dada en función del campo eléctrico, de donde, si el campo  $\mathbf{E}$  es no lineal por causalidad la polarización también es no lineal. <sup>12,34</sup>

También se puede ver a la polarización como una reorientación de las cargas ligadas que existen dentro del material. Matemáticamente este fenómeno es representado en el vector desplazamiento eléctrico que esta dado como

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.1)$$

con  $\epsilon_0 (= 8.854 \times 10^{12} \text{F/m})$  que es la constante dieléctrica en el vacío y  $\mathbf{P}$  es la polarización, y es definida como

$$\mathbf{P} = -en_e \mathbf{E}(\mathbf{E}) \quad (2.2)$$

considerando que  $e$  es la carga del electrón,  $n_e$  es la densidad de los electrones que participan en la polarización, y  $\mathbf{E}$  representa el desplazamiento del electrón en una molécula dieléctrica inducida por el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . En un contexto clásico el desplazamiento del electrón  $\mathbf{E}$  es dado por la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dt^2} + \nu \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{e}{m} \nabla V - \frac{e}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{E}}{dt} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.3)$$

con  $m$  siendo la masa del electrón,  $\nu$  es el coeficiente de fricción fenomenológico del electrón,  $\mathbf{B}$  es el vector de densidad de flujo magnético, y  $V$  representa el potencial de un ion molecular, que puede ser aproximado en una forma unidimensional como

$$V = V_0 - \frac{aE^2}{2} + \frac{bE^4}{4}, \quad a, b > 0. \quad (2.4)$$

Ordinariamente, el potencial  $V$  puede ser aproximado por una forma parabólica. Sin embargo, si se incluyen los efectos del campo en los iones vecinos, se debe de incluir el término de tercer orden que es proporcional a  $b$ . Se sabe que los efectos de los iones vecinos reducen el potencial parabólico,<sup>13</sup> esto es que el signo de  $b$  es positivo. El tercer término de la ec. (2.3) representa la respuesta no lineal de la fuerza de Lorentz y es responsable de los efectos Raman.

## 2.2. Ondas electromagnéticas en medios dieléctricos

La óptica no lineal tiene una naturaleza altamente direccional. Por lo tanto, es común suponer que el campo eléctrico es una onda que se propaga principalmente en una dirección en el espacio, y que tendrá una cantidad finita en la dispersión del haz, o la difracción. En medios dieléctricos la interacción del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el campo magnético  $\mathbf{H}$  varían rápidamente en el tiempo, por lo que los campos son cantidades reales. Estos campos dan la descripción de la onda electromagnética bajo las relaciones de las leyes de Maxwell y están dadas como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.8)$$

con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  vectores de campo eléctrico y magnético respectivamente;  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  son el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética respectivamente;  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente y  $\rho$  es la densidad de carga. Las características principales de este problema provienen fundamentalmente del medio y no del campo. Generalmente, los medios dieléctricos como lo son las fibra ópticas tienen una densidad de corriente  $\mathbf{J} = 0$  y una densidad de carga  $\rho = 0$ , ya

que no existen cargas libres. A su vez las fibras ópticas son medios no magnéticos, entonces  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

Entonces para estudiar la propagación de una onda electromagnética en un medio dieléctrico, consideramos la ecuación (2.5) y usando las relaciones constitutivas del medio para las densidades de flujo eléctrico y magnético, obteniendo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

donde podemos utilizar la identidad  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ , teniendo en cuenta que en estos medios existe una pequeña no linealidad y que no hay cargas libres, lo que significa que  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$ , por otro lado sabiendo que la onda se propaga en dirección  $z$ , entonces la componente  $z$  del campo eléctrico  $E_z = 0$  es decir la onda solo tienen componente transversal  $E_y$ , por lo que

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

de esta manera obtenemos la relación que existe entre el vector de polarización eléctrica  $\mathbf{P}$  y el vector campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , teniendo en cuenta que la polarización inducida es constituida de la suma de la polarización lineal y la polarización no lineal como  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}$ , donde la parte lineal  $\mathbf{P}_L (= \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E})$  y la parte no lineal es  $\mathbf{P}_{NL}$ . En la mayoría de los casos, una fibra óptica se convierte en un medio no lineal, cuando por ella se propagan haces de alta potencia; tal que  $|\mathbf{P}_{NL}| \ll |\mathbf{P}_L|$ , por lo que para resolver la ecuación (2.10), en muchas ocasiones la  $\mathbf{P}_{NL}$  se trata como una perturbación del caso lineal. De manera que, cuando las potencias que atraviesan la fibra son moderadas o bajas, la  $\mathbf{P}_{NL}$  puede ser despreciada.

### 2.3. Efecto Kerr y coeficiente Kerr

La ley de no linealidad de Kerr se origina cuando una onda de luz se propaga en una fibra óptica y esta onda enfrenta una respuesta al movimiento no armónico de los electrones que rodean las moléculas que componen la fibra, fenómeno que a su vez es causado por un campo electromagnético externo.<sup>18</sup> A pesar de que la respuesta no lineal es débil, sus efectos

aparecen en diversas formas durante la propagación en largas distancias, y esta respuesta se mide en términos de la longitud de onda de la luz.

### 2.3.1. Respuesta lineal

Si consideramos una onda lineal e introducimos una expresión de amplitud de Fourier para el vector de desplazamiento  $\mathbf{E}$  como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{E}}(\omega)e^{i\omega t} + c.c.) , \quad (2.11)$$

siendo  $c.c.$  el complejo conjugado y  $\bar{\mathbf{E}}$  es la amplitud de Fourier de  $\mathbf{E}$ . Sustituyendo la ec. (2.11) dentro de la forma linealizada de la ec. (2.3) podemos obtener la respuesta lineal de  $\mathbf{E}$  que es

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{-e\bar{\mathbf{E}}/m}{\omega_0^2 - i\nu\omega - \omega^2} ; \quad (2.12)$$

tal que  $\omega_0$  representa la frecuencia angular de oscilación de un electrón atrapado en un potencial parabólico que es dado por  $\omega_0 = \frac{ae}{m}$ . Entonces al sustituir la ec. (2.12) en las ecs. (2.1) y (2.2) se obtiene

$$\bar{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon^* \bar{\mathbf{E}} \quad (2.13)$$

representando así la respuesta lineal,

$$\epsilon^* = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\nu\omega - \omega^2} \quad (2.14)$$

donde  $\epsilon^*$  es el parámetro comúnmente conocido como permitividad relativa propia del material. Como se puede ver en la ec. (2.13), la transformada de Fourier de la constante dieléctrica del material  $\epsilon_0 \epsilon^*$  es compleja y tiene una resonancia cerca de  $\omega_0$ . Con la frecuencia  $\omega_p$  que es la frecuencia de plasma del electrón en el vacío y tiene la forma  $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m}}$ , tal que, la permitividad relativa es una constante, y es dada por la aproximación  $1 + \omega_p^2/\omega_0^2$ , para bajas frecuencias  $\omega \ll \omega_0$ . De otro modo, se puede usar esta permitividad relativa en función de la

susceptibilidad del material de propagación como  $\epsilon^*(= 1 + \chi)$ .

Ahora si tomamos el vector de desplazamiento ec. (2.13) y lo sustituimos en la ecuación (2.10) y a su vez usamos la expresión de la amplitud de Fourier para el campo eléctrico  $E$  tenemos

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c_D^2} \bar{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.15)$$

donde  $c_D = \frac{c}{\sqrt{\epsilon^*}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^* \epsilon_0 \mu_0}}$ , recordando que la componente  $z$  del campo eléctrico  $E_z = 0$  llegamos a

$$\frac{d^2 \bar{E}_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_D^2} \bar{E}_y = 0. \quad (2.16)$$

por lo que esta ecuación tiene solución que puede ser expresada en combinación lineal de ondas que tienen amplitudes  $E_{y1}$  y  $E_{y2}$ , de la forma

$$E_y = E_{y1} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c_D} z + \theta_1\right) + E_{y2} \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c_D} z + \theta_2\right). \quad (2.17)$$

Esta expresión muestra una onda que se propaga con una velocidad de fase dada por  $c_D$ ; de donde se define el número de onda  $k$  y es

$$k = \frac{\omega}{c_D} \equiv k(\omega). \quad (2.18)$$

donde el índice de refracción  $n_0$  es definido como

$$n_0 = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{c_D} = \sqrt{\epsilon^*} \quad (2.19)$$

tomando  $\epsilon^*$  como función de  $\omega$ , la velocidad de fase de la onda plana generalmente llega a ser también una función de la frecuencia. Esta propiedad de la onda es llamada “dispersión”. En otras palabras, debido a la dispersión, la velocidad de propagación de la onda electromagnética en un material dieléctrico varía como función de la frecuencia.<sup>13</sup> Tal que, el número de onda  $k$  es una derivación de la ec. (2.19), y si se toma en términos de la susceptibilidad del material, se puede ver que cuando  $\chi > 0$ ,  $\epsilon^*$  es mayor que la unidad entonces la permitividad es el índice de refracción. Aunado a esto, es claro observar que la velocidad de grupo

$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{k'}$  y la dispersión de grupo  $\frac{\partial v_g}{\partial \omega} = -k'' v_g^2$  son en general funciones de la frecuencia. Por lo que estos parámetros de dispersión en el material dieléctrico son dados por

$$k' \approx \frac{n_0(\omega)}{c}, \quad (2.20)$$

$$k'' \approx \frac{2}{c} \frac{\partial n_0}{\partial \omega}. \quad (2.21)$$

### 2.3.2. Respuesta no lineal

Generalmente una respuesta no lineal, en estos medios dispersivos, se relaciona con los ya antes mencionados solitones. Tal que la evolución de los solitones en fibras ópticas y/o dispositivos ópticos no lineales, es formada por el balance entre la dispersión de la velocidad de grupo (GDV por sus siglas en inglés) y la no linealidad cúbica en la fibra.<sup>35</sup> Donde el solitón óptico es idealmente descrito como una solución característica de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) que describe la evolución de la envolvente de la onda electromagnética en una fibra ideal (sin pérdidas) con un bajo orden de dispersión y no linealidad. En términos específicos la no linealidad de Kerr se origina de un potencial no parabólico de iones moleculares que se refleja en un incremento del índice de refracción en proporción a la potencia de la onda electromagnética.<sup>13,15,35</sup>

Entonces, los efectos no lineales que contribuyen a la formación de un solitón vienen de la no linealidad cúbica que surge del desplazamiento eléctrico  $\mathbf{E}^3$  de la ecuación de movimiento (2.3). Teniendo en cuenta este término y reescribiendo la ecuación de movimiento obtenemos

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dt^2} + v \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{E} - \frac{eb}{m} E^2 \mathbf{E} = -\frac{e}{m} \mathbf{E} \quad (2.22)$$

donde ordinariamente, el término de tercer orden es proporcional al coeficiente  $b$ , siendo este término el que nos da la respuesta no lineal. Donde podemos evaluar los efectos no lineales mediante técnicas perturbativas.

Uno puede obtener  $E$  de la ec. (2.22) de manera fenomenológica en términos de  $\bar{E}$ , debido a que la ecuación de movimiento expresa a los electrones atrapados al potencial iónico del dieléctrico,<sup>12</sup> conociendo las características adecuadas donde se producen los efectos de la respuesta no lineal. Sin embargo, si asumimos en la ec. (2.22) que  $\omega$  es mucho más pequeño que  $\omega_0$ , la respuesta lineal de  $E$  puede estar dada por

$$\bar{E} \approx -\frac{e\bar{E}/m}{\omega_0^2}. \quad (2.23)$$

En condiciones adecuadas como las mostradas por Hasegawa y Matsumoto<sup>13</sup> se justifica que  $E$  es mucho más pequeña que la típica distancia molecular, lo cual justifica la aproximación de perturbaciones. Tomando en cuenta que  $E^3$  reduce efectivamente la frecuencia característica proporcional a  $\langle E^2 \rangle = |\bar{E}|^2/2$  para

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{eb}{m} \frac{|e\bar{E}/m|}{2\omega_0^2}} \quad (2.24)$$

La reducción de la frecuencia debido a los efectos no lineales es llamada “Softening”<sup>131</sup> Si tomamos en cuenta el softening de la frecuencia de resonancia, entonces el índice de refracción  $n$  ahora dependerá del cuadrado del campo eléctrico y puede ser expresado por

$$n = n_0 + n_2 |\bar{E}|^2/2, \quad (2.25)$$

donde  $n_2$  es el coeficiente Kerr definido como un incremento en el cambio de índice de refracción con respecto a la intensidad del campo eléctrico  $|\bar{E}|^2/2$ ,<sup>1,5,36</sup>

$$n_2 = \frac{1}{2n_0} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^8} \frac{e^3 b}{m^3}. \quad (2.26)$$

De esta manera, cuando el índice de refracción incrementa ligeramente, dependiendo de la magnitud del campo eléctrico, se origina efecto denominado “Efecto **Kerr**”. Para vidrios, el coeficiente no lineal  $n_2$  es extremadamente pequeño y tiene un valor del orden de  $10^{-22}(m/V)^2$ . Sin embargo, a pesar de que la no linealidad en las fibras es pequeña, la

---

<sup>1</sup>El Softening es la consecuencia de la reducción de oscilación de los electrones debido a la deformación del potencial parabólico a un potencial mayormente gradual.

acumulación de efectos no lineales a través de largas distancias puede tener un impacto significativo, debido a la alta intensidad de las ondas electromagnéticas sobre la pequeña sección transversal de la fibra. Tal que, el efecto Kerr, satisface la respuesta instantánea ec. (2.25), y produce una intensidad dependiente del cambio de fase que es resultado del ensanchamiento o ampliación del espectro en la propagación.

## 2.4. Ecuación no lineal de Schrödinger

Las pérdidas durante la propagación se originan de una deformación de la modulación  $\bar{E}(z,t)$ , es decir, si  $\bar{E}(z,t)$  no cambian en  $z$ , entonces no existen pérdidas. O bien, para una onda electromagnética en  $z = 0$  con una forma específica del campo eléctrico  $\bar{E} = (0,t)$ . Entonces la propagación depende de que tan rápido varia  $\bar{E}(t)$ , lo cual puede ser designado por el ancho del espectro de Fourier,  $\bar{E}(\Omega)$

$$\bar{E}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(t) e^{i\Omega t} dt . \quad (2.27)$$

La cantidad de propagación del pulso que una onda electromagnética puede llevar es aproximadamente dada por el ancho espectral  $\Delta\Omega$ . Sin embargo, una de las principales limitaciones viene de los efectos causados por la velocidad de grupo (GVD) y la no linealidad. Siendo que la dispersión de la velocidad de grupo se origina de la combinación de las propiedades de la guía de onda y/o de las propiedades del material de la fibra. En presencia de la dispersión del grupo, la propagación de pulsos es transmitida por componentes diferentes de frecuencia de  $\bar{E}(0,t)$  que se propagan a diferentes velocidades y llegan a diferentes tiempos. El retraso relativo  $\Delta t$  del tiempo de llegada de los pulsos para las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  es llamado decaimiento de grupo, y para una distancia  $z$  está dada por

$$\Delta t = \frac{z}{v_g(\omega_1)} - \frac{z}{v_g(\omega_2)} = \frac{\frac{\partial v_g}{\partial \omega}(\omega_2 - \omega_1)z}{v_g^2} . \quad (2.28)$$

Usando las ecuaciones (2.20) y (2.21) tenemos

$$\Delta t = k''(\omega_2 - \omega_1)z . \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) muestra que la diferencia de tiempo de llegada de los pulsos es proporcional a la dispersión de grupo  $k''$ , la diferencia de los componentes de frecuencia  $\omega_2 - \omega_1$ , y la distancia condicional  $z$ . Es bien sabido que si  $k'' < 0$  (nos encontramos en el llamado régimen de dispersión anómala), el componente de frecuencia mayor indica que los pulsos llegan antes y para dispersión normal,  $k'' > 0$ , es al contrario. Si los pulsos para diferentes componentes de frecuencia llega a tiempos diferentes, entonces existen pérdidas.

Para un propósito práctico, la dispersión de grupo se designa por un parámetro de retardo de grupo  $D$ , se define por el retraso del tiempo de llegada en unidades de pico-segundos [ps] para dos componentes de longitud de onda separados por 1 nm en una distancia de 1 km. De la ecuación (2.29), se puede describir el retraso del grupo por

$$D = k'' c \left( \frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2} \right) z = -k'' c \frac{2\pi}{\lambda^2 \Delta\lambda z}. \quad (2.30)$$

Por lo tanto, tomando  $\lambda = 1 \text{ nm}$  y  $z = 1 \text{ km}$ ,  $D$  en la unidad de ps/nm/km se relaciona con  $k''$  como  $D = -\frac{2\pi c k''}{\lambda^2}$ . Una cantidad importante que designa el efecto de dispersión de la fibra es la distancia de dispersión  $z_0$  y es definida por la distancia sobre la que se duplica el ancho de un pulso debido a la retraso de grupo. Dado que el ancho de pulso  $\Delta\tau$  está dado por el inverso del ancho espectral  $\Delta\omega$ , la distancia de dispersión se obtiene de la ecuación (2.29) como

$$z_0 = \frac{\Delta\tau^2}{|k''|}. \quad (2.31)$$

Por otro lado, el efecto de no linealidad de orden más bajo se origina del efecto Kerr. Entonces en presencia del efecto Kerr el índice de refracción  $n$  viene dado por la ec. (2.25). Tal que, el número de onda se convierte en

$$k = \frac{\omega}{c} \left( n_0(\omega) + n_2(\omega) |\bar{E}|^2 \right), \quad (2.32)$$

esta expresión indica que el efecto Kerr induce un desplazamiento de fase no lineal  $\Delta\Phi_N$  a través de la parte no lineal del número de onda  $k_N$  que es la parte referente de la polarización no lineal  $\mathbf{P}_{NL} (= \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E})$ , y es dada por

$$\Delta\Phi_N = k_N z = \frac{2\pi n_2 |\bar{E}|^2 z}{\lambda}. \quad (2.33)$$

la cual es llamada automodulación de fase (SPM)<sup>2</sup>. Efecto que crea una mezcla de pulsos en amplitud y fase.

### 2.4.1. Ecuación envolvente para la onda electromagnética

La existencia de un solitón en fibras ópticas se obtiene derivando la ecuación de evolución para la envolvente compleja de la onda electromagnética  $\bar{E}(z, t)$  (donde la amplitud de Fourier varía lentamente) por retención, el orden más bajo de la dispersión de grupo y la no linealidad cúbica originando el efecto Kerr, donde la forma más conveniente de derivar la ecuación de envolvente es con la expansión en series de Taylor del número de onda  $k(\omega, |\bar{E}|^2)$  alrededor de la frecuencia portadora  $\omega_0$ , y la intensidad del campo eléctrico  $|\bar{E}|^2$

$$k - k_0 = k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{k''(\omega_0)}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\partial k}{\partial |\bar{E}|^2} |\bar{E}|^2, \quad (2.34)$$

reemplazando  $k - k_0$  por el operador  $i\partial/\partial z$  y  $\omega - \omega_0$  por  $-i\partial/\partial t$  para operar sobre el campo eléctrico. De manera que la ecuación resultante es

$$i \left( \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} + k' \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} k'' \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial k}{\partial |\bar{E}|^2} |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0. \quad (2.35)$$

Donde el índice de refracción  $n(k, \omega, |\bar{E}|^2)$  dado por el medio Kerr para la ecuación (2.25), y tomando las relaciones (2.20) y (2.21) además de  $\partial k / \partial |\bar{E}|^2 \approx \frac{\omega_0 n_2}{c}$ . A menudo es conveniente estudiar la evolución de  $\bar{E}$  en la coordenada de movimiento con la velocidad del grupo  $\tau = t - k'z$ . Entonces la ecuación (2.35) se convierte en

$$i \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} - \frac{k''}{2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \tau^2} + \frac{\omega_0 n_2}{2c} |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0. \quad (2.36)$$

---

<sup>2</sup> El efecto de automodulación de fase o SPM (por sus siglas en inglés) se generará a partir de que el índice de refracción de la fibra tiene una componente dependiente de la intensidad. De modo que, este índice de refracción no lineal induce un desplazamiento de fase que es proporcional a la intensidad del pulso. Teniendo como resultado que, las diferentes partes del pulso tengan diferentes desplazamientos de fase provocándole al pulso un chirp, que a su vez cambiará los efectos de la dispersión sobre el pulso.

Para una guía de onda de una fibra óptica  $k''$  es modificada por la dispersión de la guía de onda que depende de la estructura modal de la fibra.<sup>37</sup> Para ondas débilmente guiadas, el número de onda lineal se describe aproximadamente por la función modal  $\phi(x_{\perp}, \omega)$

$$k^2 = \frac{(\omega/c)^2 \int |\nabla_{\perp} \phi|^2 n_0^2 d\mathbf{S} - \int |\nabla_{\perp} \phi|^2 d\mathbf{S}}{\int |\nabla_{\perp} \phi|^2 d\mathbf{S}}. \quad (2.37)$$

La integración  $\int d\mathbf{S}$  es evaluada a través de la sección transversal de la fibra y  $\phi$  es normalizada tal que

$$\int |\nabla_{\perp} \phi|^2 d\mathbf{S} = A_{eff} E_0^2, \quad (2.38)$$

donde  $E_0$  es la amplitud máxima del campo eléctrico de la luz, y  $A_{eff}$  es la sección transversal (efectiva) de la fibra. Además, dado que la intensidad de la luz varía a través de la fibra,  $n_2$  en la ec. (2.36) se reduce por el factor  $g$  que es descrito como

$$g = \frac{\omega}{kc A_{eff} n_2 E_0^4} \int n_0 n_2 |\nabla \phi|^4 d\mathbf{S} \approx \frac{1}{2}. \quad (2.39)$$

Aquí,  $n_2$  es el coeficiente de Kerr promediado sobre la sección transversal de la fibra, para un pulso de ancho  $\Delta\tau$ . Por lo tanto, es conveniente introducir la distancia  $Z$  normalizada por la ec. (2.31) y  $\Delta\tau$  por el tiempo  $T$  normalizado. Para una fibra que tiene una dispersión anómala la ec. (2.31) se reduce a

$$\frac{\partial q}{\partial Z} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + i|q|^2 q, \quad (2.40)$$

y para una fibra que tiene una dispersión normal, el coeficiente del primer término en el lado derecho se vuelve negativo. En esta expresión,  $q$  es la amplitud normalizada dada por

$$q = \left( \frac{\omega_0 n_2 g z_0}{c} \right)^{1/2} \bar{E}. \quad (2.41)$$

Aquí,  $g$  es el factor de reducción ( $\approx 1/2$ ) de la intensidad del campo eléctrico debido al efecto de la guía de onda. Si comparamos esta expresión con el desplazamiento de fase no lineal, ec. (2.33), podemos identificar que  $q$  no es más que el desplazamiento de fase no lineal a la distancia de dispersión. En otras palabras, el término no lineal y término de dispersión

en la ec. (2.40) se vuelven comparables con la amplitud.

De esta manera, la ecuación (2.40) es la ecuación que describe la evolución de la propagación de los pulsos en fibras con dispersión y no linealidad para un campo eléctrico que tiene una intensidad tal que el desplazamiento de fase no lineal a la distancia de dispersión es de orden uno. En un sistema práctico, la dispersión  $k''$  de la fibra a menudo varía en  $Z$ . Además, la fibra puede tener amplificadores de ganancia  $G(Z)$  y una tasa de pérdida  $\Gamma$  por distancia de dispersión. Entonces la ecuación (2.40) debe ser modificada como

$$\frac{\partial q}{\partial Z} = \frac{i}{2}d(z)\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + i|q|^2q + (G(Z) - \Gamma)q . \quad (2.42)$$

Aquí  $d(z)$  es la dispersión del grupo normalizada por su valor promedio.

Por otra parte, podemos obtener la propagación de los pulsos, si consideramos a la ecuación de Schrödinger no lineal en una dimensión como sistema dinámico de evolución, que como es bien sabido, este sistema puede ser visto como un sistema hamiltoniano completamente integrable. En este caso, la ecuación NLS puede ser resuelta con el método de la transformada inversa (IST por el inglés, inverse scattering transform), método por el cual se obtienen soluciones de tipo solitón.<sup>10</sup> Tal que el método es descrito por la reducción del problema de valor inicial a un problema de transformada inversa para la ecuación de autovalores lineales asociada (tópico que no esta dentro del enfoque de esta tesis). Para una fibra con dispersión anómala, la solución estacionaria localizada (solución solitónica), que es caracterizada por la amplitud  $\eta$  y con el cambio de frecuencia  $\kappa$  en una posición central  $T_0$  y fase  $\sigma$  tiene la forma<sup>15</sup>

$$q(T, Z) = \eta \text{Sech}(\eta(T - kZ - T_0)) \exp\left(-i\kappa T + \frac{i}{2}(\eta^2 - \kappa^2)Z + i\sigma\right) \quad (2.43)$$

para una fibra con dispersión normal, la solución estacionaria localizada es dada por un solitón oscuro que aparece en proporción de ausencia continua de luz<sup>15</sup>

$$q(T, Z) = \eta (1 - a^2 \text{Sech}^2(\eta(T - kZ)))^{1/2} \exp\left(-i\kappa - \frac{i}{2}\kappa^2 Z + i\sigma_0 + i\sigma\right) \quad (2.44)$$

donde

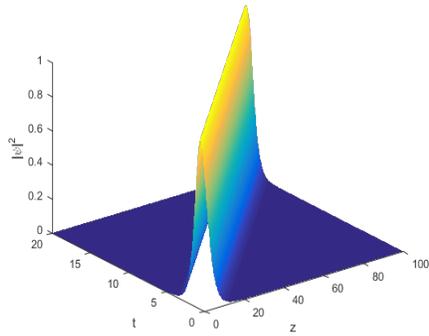
$$\sigma_0 = \eta T \sqrt{1 - a^2} + \tan^{-1} \left[ \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \tanh(\eta a T) \right] - \frac{\eta^2(3 - a^2)}{2} Z. \quad (2.45)$$

Observamos que el solitón oscuro tiene un parámetro adicional al que se le designa la profundidad del solitón. Si  $a$  es igual a uno, la solución para solitones oscuros viene dada por  $\tanh T$ .

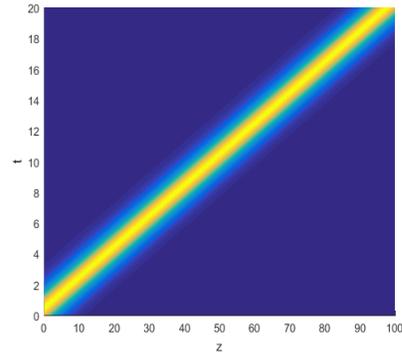
De igual forma notamos que la velocidad del solitón  $\kappa$  es un parámetro independiente de la amplitud a diferencia de muchas otras soluciones solitónicas.<sup>3</sup>

---

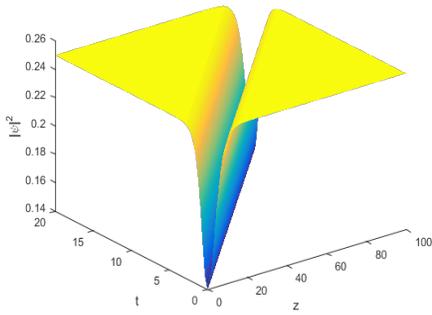
<sup>3</sup> En el apéndice B se desarrolla una solución de la ecuación no lineal de Schrödinger



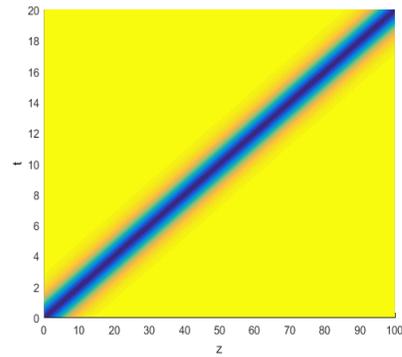
(a) Solitón brillante de la ec. NLS



(b) Propagación del solitón brillante de la ec. NLS



(c) Solitón oscuro de la ec. NLS



(d) Propagación del solitón oscuro de la ec. NLS

FIGURA 2.1: Solución solitónica de la ecuación no lineal de Schrödinger para un solitón brillante ec. (2.43) y para un solitón oscuro ec. (2.44), con las constantes  $\eta = 1$ ,  $a = 0.5$ ,  $T_0 = 0.5$ ,  $\kappa = 0.2$ , y  $\sigma = 0.1$

## Capítulo 3

# Solitones no autónomos en fibras ópticas

Retomando el concepto de solitones, como ya mencionamos en capítulos anteriores la propagación de estos pulsos en fibras ópticas o guías de onda presentan una dependencia muy significativa de la dispersión y disipación de los pulsos, aunada a la no linealidad de las mismas. Este tipo de fenómenos crean una distorsión y pérdida de señal,<sup>5,13,38</sup> fenómenos que han sido estudiados desde finales de los años 60s, aunque fué hasta los años 80s que se utilizaron amplificadores para compensar estas pérdidas.<sup>13</sup> Este proceso de amplificación es usualmente obtenido en fibras ópticas dopadas con sílice<sup>38</sup> o algunas tierras raras.

Teóricamente, la propagación de pulsos en fibras ópticas esta descrita por la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS), que tiene soluciones solitónicas y que se pueden asociar con los pulsos.<sup>5,13,38</sup>

Un avance significativo en la descripción de estos pulsos en fibras ópticas y que ha tenido gran auge en estudios recientes, es aquel que se da con la descripción de la ecuación NLS de coeficientes variables, la cual describe un sistema dinámico no lineal no autónomo,<sup>39</sup> y que se describe por la variación de la dispersión, la no linealidad y la pérdida o ganancia del sistema, este tratamiento usualmente es llamado “manejo de solitones” (Soliton management) o también por un uso específico de la dispersión denominado “dispersion management”. Comúnmente, en dispositivos ópticos se usa el manejo de dispersión y no linealidad para el control dinámico,<sup>39-41</sup> sin embargo, por ejemplo para sistemas atómicos<sup>42</sup> y física de mate-

ria condensada se utiliza manejo de dispersión y manejo de resonancia de Feshback.<sup>43</sup>

El tratamiento para manejo de solitones en un modelo no autónomo define al solitón por cuatro parámetros:<sup>44</sup> i) Amplitud (o ancho), ii) Frecuencia (o velocidad), iii) fase y iv) posición de tiempo. Con estos parámetros es posible controlar la dinámica de solitones por definición de las funciones de los mismos.

### 3.1. Modelo no autónomo en la ecuación no lineal de Schrödinger

Iniciamos el tratamiento con la ecuación no lineal de Schrödinger de coeficientes variables que está descrita como

$$i \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} + f(z,t) \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} + g(z,t) |\psi(z,t)|^2 \psi(z,t) + V_{ext}(z,t) \psi(z,t) + i\gamma(z,t) \psi(z,t) = 0 . \quad (3.1)$$

donde  $f(z,t)$ , y  $g(z,t)$ , son las funciones que representan los parámetros de dispersión y no linealidad, respectivamente;  $V_{ext}(z,t)$  y  $\gamma(z,t)$  denotan el potencial externo y la disipación (que puede ser pérdida o ganancia). Generalmente,  $V_{ext}(z,t) = V_0 z^2$  o  $V(z,t) = V_0 \sin^2 z$ . Cuando  $f(z,t) = \text{constante}$  y  $g(z,t) = \text{constante}$ , tenemos el caso clásico de la ecuación de Gross-Pitaevskii,<sup>45,46</sup> y  $\gamma(z,t)$  es la disipación (pérdida ( $\gamma > 0$ ) ó ganancia ( $\gamma < 0$ )). Estos coeficientes generalmente se asumen reales.

De igual forma, podemos también hacer uso de una extensión de la ecuación NLS para solitones disipativos, esta ecuación es la ecuación de Ginzburg-Landau (GLE) la cual en comparación con la ecuación NLS dicta que los términos de amortiguamiento para esta ecuación son pequeños, además que en la ecuación de GL, el término no lineal es de mayor consideración siendo un término de bombeo.<sup>47</sup> Esta ecuación rige la evolución de la amplitud de las ondas disipativas de una manera finita sobre la inestabilidad cerca de puntos críticos.<sup>48</sup>

Por otro lado, la transmisión de solitones ópticos en medios ópticos bajo manejo de dispersión y no linealidad tiene una representación dada como

$$i \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} + f(z) \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} + g(z) |\psi(z,t)|^2 \psi(z,t) + i\gamma(z) \psi = 0 . \quad (3.2)$$

donde  $f(z)$  y  $g(z)$  denotan el manejo de dispersión y el manejo de no linealidad, respectivamente, y  $\gamma(z) = \gamma_{loss} + \gamma_R$ , con  $\gamma_{loss}$  significa pérdidas en la fibra ( $\gamma_{loss} > 0$ ) y  $\gamma_R$  significa ganancia de Ramman ( $\gamma_R < 0$ ), cuando las funciones  $f(z)$ ,  $g(z)$  y  $\gamma(z)$  son funciones complejas la ecuación es denominada ecuación no lineal de Ginzburg-Landau compleja y esta presenta inhomogeneidades.<sup>49</sup>

### 3.1.1. Solitón no autónomo

Recientemente, la interacción de solitones entre sistemas no autónomos ha sido estudiada de manera sistemática y la cual fue una propuesta hecha por Serkin y colaboradores,<sup>50–53</sup> quienes fueron los primeros en introducir el término solitón no autónomo en 2007,<sup>54</sup> ellos dicen que un solitón no autónomo es aquel que se mueve en un sistema que generalmente se puede controlar a través del control de su amplitud y velocidad,<sup>54</sup> este concepto significa que dentro de la ecuación no lineal de Schrödinger se puede controlar tanto el parámetro no lineal y el parámetro dispersivo.

Siendo que la ecuación que modela este sistema es la ecuación propuesta por Serkin y colaboradores<sup>50</sup> descrita como

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \pm D(Z) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} + R(Z) |\Psi|^2 \Psi = i\Gamma(Z) \Psi . \quad (3.3)$$

Que presenta una solución solitónica dada por

$$\Psi = \frac{D}{R} PQ(S) \exp \left( \frac{T^2}{2} + i \int_0^Z K(\Xi) d\Xi \right) . \quad (3.4)$$

donde  $Q(S)$  es una función real que describe una forma canónica de solitones brillantes y/u oscuros (descripción que se toma sólo para poner el tema en contexto). De esta manera, to-

mando como base lo dicho por Serkin y colaboradores podemos desarrollar una construcción de una solución para solitones no autónomos.

## 3.2. Mapeo de He y Li para solitones no autónomos en fibras ópticas

Haciendo uso del conocimiento previamente descrito, en esta sección realizaremos un tratamiento matemático que consiste en transformar la ecuación no lineal de Schrödinger de coeficientes variables (ENLS-CV) en una ENLS estandar de coeficientes constantes, donde la ENLS-CV describe un pulso propagándose dentro de una fibra óptica que presenta una pérdida y a su vez esta perdida es compensada por una ganancia, esta ecuación puede ser resuelta por distintos métodos ya bien conocidos.<sup>55,56</sup> Usando el mapeo que fue introducido por He y Li en 2010, trataremos un caso específico con aplicación directa en fibras ópticas lo cual nos da una simplificación del método propuesto por ellos.

### 3.2.1. Solitones no autónomos en fibras con ganancia variable y tasa constante de pérdida

Este tipo de fibras actualmente tienen un uso regular en el desarrollo tecnológico, por lo que, es de gran interés hacer un análisis de propagación de solitones no autónomos en estas fibras, tal que la ecuación que los representa esta descrita por

$$i \frac{\partial \psi(t, z)}{\partial z} + \frac{\beta(z)}{2} \frac{\partial^2 \psi(t, z)}{\partial t^2} - i [g(z) - \Gamma] \psi(t, z) + \hat{\gamma}(z) |\psi(t, z)|^2 \psi(t, z) = 0, \quad (3.5)$$

donde  $\psi$  es la envolvente del campo eléctrico del pulso,  $\beta(z)$  es la dispersión de la velocidad de grupo,  $\hat{\gamma}(z)$  es el coeficiente de no linealidad, como podemos ver los parámetros son dependientes de  $z$ , que es la coordenada longitudinal de la fibra y es una variable natural de evolución de los pulsos mientras que  $t$  es la coordenada generalmente relacionada con el tiempo. La propagación de la onda se ve afectada por una tasa constante de pérdida  $\Gamma$  y una ganancia distribuida  $g(z)$ . Una manera de garantizar la integrabilidad de la ec. (3.5), es bajo

la relación directa con la ENLS estándar de coeficientes constantes

$$i \frac{\partial q}{\partial \mathcal{Z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \mathcal{T}^2} + \gamma |q|^2 q = 0, \quad (3.6)$$

donde  $\gamma = \pm 1$ ,  $q = q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$ , y los coeficientes  $\beta(z)$  y  $\hat{\gamma}(z)$  se obtienen analíticamente bajo el mapeo. De manera que, si proponemos un ansatz de la forma

$$\Psi(t, z) = q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) p(z) e^{-i\phi(t, z)}, \quad (3.7)$$

tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(z, t)$  y  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(z)$ , se encontrará la forma específica para  $\beta$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{Z}$ ,  $p$ ,  $\phi$ , siendo que  $q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$  es solución de la ec. (3.6). He y Li consideran el caso más general con  $p(z, t)$ , sin embargo para la propagación de solitones en fibras ópticas es suficiente tomar a  $p$  solamente como función de  $z$ .<sup>55</sup>

Sustituyendo la ec. (3.7) en la ec. (3.5), y sin pérdida de generalidad, hacemos que tenga la forma  $\beta(z) = \frac{Z_z}{\mathcal{T}_t^2}$  y  $\hat{\gamma}(z) = \frac{\gamma Z_z}{p^2}$ , obteniendo la siguiente ecuación para  $q$

$$iq_z + \frac{1}{2} q_{\mathcal{T}\mathcal{T}} + \gamma |q|^2 q + (k_1 + ik_2) q_{\mathcal{T}} + (k_3 + ik_4) q = 0, \quad (3.8)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \frac{\mathcal{T}_{tt}}{\mathcal{T}_t^2}, \\ k_2 &= \frac{\mathcal{T}_z}{Z_z} - \frac{\phi_t}{\mathcal{T}_t}, \\ k_3 &= \frac{\phi_z}{Z_z} - \frac{1}{2} \frac{\phi_t^2}{\mathcal{T}_t^2}, \\ k_4 &= \frac{p_z}{p Z_z} - \frac{1}{2} \frac{\phi_{tt}}{\mathcal{T}_t^2} - \frac{1}{Z_z} [g(z) - \Gamma]. \end{aligned}$$

De esta manera, garantizamos que  $q$  también satisfaga a la ecuación (3.6), sólo se debe de imponer que  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ , de modo que podamos hacer un mapeo de la ec. (3.8)

en la ec. (3.6). Lo cual se cumple cuando

$$\mathcal{T}(z, t) = F(z)t + F_1(z), \quad (3.9)$$

$$\mathcal{Z}(z) = f_0 F(z) + f_1, \quad (3.10)$$

$$\phi(z, t) = a(z)t^2/2 + b(z)t + c(z), \quad (3.11)$$

$$p(z) = \sqrt{f_3 F} e^{\int [g(z) - \Gamma] dz}, \quad (3.12)$$

$$\beta(z) = \frac{f_0 F_z(z)}{F^2}, \quad (3.13)$$

$$\hat{\gamma}(z) = \frac{\gamma f_0 F_z(z)}{f_3 F} e^{-\int 2[g(z) - \Gamma] dz}, \quad (3.14)$$

donde  $F_1(z) = f_2 F(z) + f_4$  y los parámetros de la fase son

$$a(z) = \frac{F(z)}{f_0}, \quad b(z) = f_2 \frac{F(z)}{f_0}, \quad c(z) = \frac{f_2^2}{2} \frac{F(z)}{f_0} + f_5. \quad (3.15)$$

La forma analítica de la función  $F(z)$  depende de cada caso particular, mientras que  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  y  $f_5$  son constantes de integración, de las cuales  $f_1, f_4$  y  $f_5$  pueden ser nulas. De tal manera que la solución (3.7) tiene la forma

$$\Psi(t, z) = q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) \sqrt{f_3 F} e^{\int [g(z) - \Gamma] dz} e^{-i(a(z)t^2/2 + b(z)t + c(z))}. \quad (3.16)$$

Notamos que  $f_5$  contribuye a la solución solamente con una rotación de ángulo constante  $\exp(-if_5)$ . Por lo tanto, tomaremos  $f_5 = 0$  sin pérdida de generalidad.

Por lo que, podemos escoger cualquier solución analítica para  $q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$  la cual cumple que es solución de la ENLS estándar (3.6). Aquí usamos la solución  $q$  de Katyshev y colaboradores<sup>57</sup> que se presenta como

$$q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) = A_0 \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} (\mathcal{T} - v\mathcal{Z}) \right) e^{i \left[ \left( \frac{v^2}{4} + \frac{\gamma A_0^2}{2} \right) \mathcal{Z} + \frac{v}{2} (\mathcal{T} - v\mathcal{Z}) \right]} \quad (3.17)$$

donde  $A_0$  es la amplitud y  $v$  es la “velocidad” del pulso solitónico, y  $\theta = -\arctan(4v)$  nos proporciona la oblicuidad del solitón con respecto al eje  $\mathcal{Z}$ .<sup>10</sup> Teniendo que

$$\mathcal{F}(z) = f_0 F(z) + f_1, \quad \text{y} \quad \tilde{\mathcal{F}}(z, t) = F(z)t + F_1(z),$$

la solución completa es

$$\Psi(t, z) = A(z) \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} [\tilde{\mathcal{F}}(z, t) - v \mathcal{F}(z)] \right) e^{i \left[ \left( \frac{\gamma A_0^2}{2} - \frac{v^2}{4} \right) \mathcal{F}(z) + \frac{v}{2} \tilde{\mathcal{F}}(z, t) - \frac{F(z)}{2\beta_0} (t + f_2)^2 \right]}, \quad (3.18)$$

donde

$$A(z) = A_0 \sqrt{f_3 F(z)} e^{\int [g(z) - \Gamma] dz}. \quad (3.19)$$

Se puede observar que la solución y el comportamiento del pulso propagándose en una fibra óptica se obtienen si conocemos los parámetros de dispersión de la velocidad de grupo, de no linealidad, de pérdida y ganancia. De las ecs. (3.13) y (3.14) se obtiene que  $F(z)$  tiene la siguiente forma funcional

$$F(z) = \frac{f_3}{\beta(z)} \frac{\hat{\gamma}(z)}{\gamma} \exp \left[ 2 \int (g(z) - \Gamma) dz \right]. \quad (3.20)$$

Siendo que la función  $F(z)$  y también  $F_1(z)$ ,  $\mathcal{F}(z)$  y  $\tilde{\mathcal{F}}(z, t)$  están relacionadas con el inverso del ancho del solitón no autónomo.<sup>58,59</sup> La relación (3.20) se puede escribir también en forma de la condición

$$\frac{\gamma \beta(z) F(z)}{\hat{\gamma}(z)} \exp \left[ -2 \int (g(z) - \Gamma) dz \right] = f_3. \quad (3.21)$$

Este tipo de condición fue también obtenido en<sup>58</sup> por el método de separar la ecuación no autónoma en un sistema de dos ecuaciones para la fase y la amplitud.

### 3.2.2. Solitones en fibras con amplificadores

La propagación de solitones en fibras amplificadas está descrita por la ecuación no lineal de Schrödinger de coeficientes constantes pero no en forma estándar<sup>60</sup>

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2} (s + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u - \frac{i}{2} \mu u = 0 \quad (3.22)$$

con  $\xi = z/L_D$ ,  $L_D = \frac{T_2^2}{\beta_2}$  es longitud de dispersión,  $T_2$  es el tiempo de relajación,  $\beta_2$  es el coeficiente de dispersión de la velocidad de grupo,  $\tau = \frac{(t-z/v_g)}{T_2}$  el tiempo normalizado,

$s = \text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$ ,  $\delta = g_0 L_D$  es la curvatura del perfil de ganancia,  $\mu = (g_0 - \alpha) L_D$  ganancia neta y  $\alpha$  el coeficiente de pérdida.

En este caso la función  $F$  es compleja

$$F(\xi) = -\frac{f_3(s - i\delta)}{\gamma(s^2 + \delta^2)} e^{\mu\xi}. \quad (3.23)$$

La solución no autónoma de (3.22) obtenida por el mapeo He-Li, es decir aplicando (3.18) a este caso, es

$$u(\tau, \xi) = A(\xi) \text{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} \frac{e^{\mu\xi}(s - i\delta)}{s^2 + \delta^2} (\tau - v + 1) \right) e^{\left[ i \frac{s e^{\mu\xi}}{2(s^2 + \delta^2)} (\gamma A_0^2 - v^2 + v(\tau + 1) - (\tau + 1)^2) \right]}, \quad (3.24)$$

donde

$$A(\xi) = A_0 \sqrt{\frac{-s + i\delta}{s^2 + \delta^2}} e^{\mu\xi + \frac{\delta e^{\mu\xi}}{2(s^2 + \delta^2)} (\gamma A_0^2 - v^2 + v(\tau + 1) - (\tau + 1)^2)}. \quad (3.25)$$

En estas fórmulas,  $\gamma = \pm 1$  es el parámetro de no linealidad autónomo.

Gráficas tridimensionales de esta solución solitónica se presentan en Fig. (3.1) para una fibra óptica con perfil de ganancia parabólico, donde el cociente de pérdida/ganancia tiene el valor  $\alpha/g_0 = 0.6$  para las imágenes (a)-(d) y el valor 0.8 para las imágenes (e)-(h). Se consideró el regimen de dispersión anomala  $s = -1$  y  $\delta = 0.24$  para  $\alpha/g_0 = 0.6$  y  $\delta = 0.32$  para  $\alpha/g_0 = 0.8$ . Las imágenes (a) y (e) se presentan con velocidad  $v = 1$  y las imágenes (c) y (g) con  $v = 2$ . En las imágenes (b),(d),(f) y (h) se muestra la perspectiva superior del pulso en cada caso.

La disminución de la amplitud de los solitones en el caso de la velocidad más alta se puede entender de la expresión (3.25) donde el término en  $v^2$  es negativo teniendo la contribución principal a este efecto. Por otro lado, en el caso de la pérdida/ganancia=0.8, este efecto es menos pronunciado debido a que el cociente  $\delta/(s^2 + \delta^2) \sim 0.17$  lo que es menos de 0.20 para el caso de pérdida/ganancia=0.6. Además, estas gráficas muestran que el ancho de los solitones es proporcional al parámetro  $v$  de la oblicuidad.

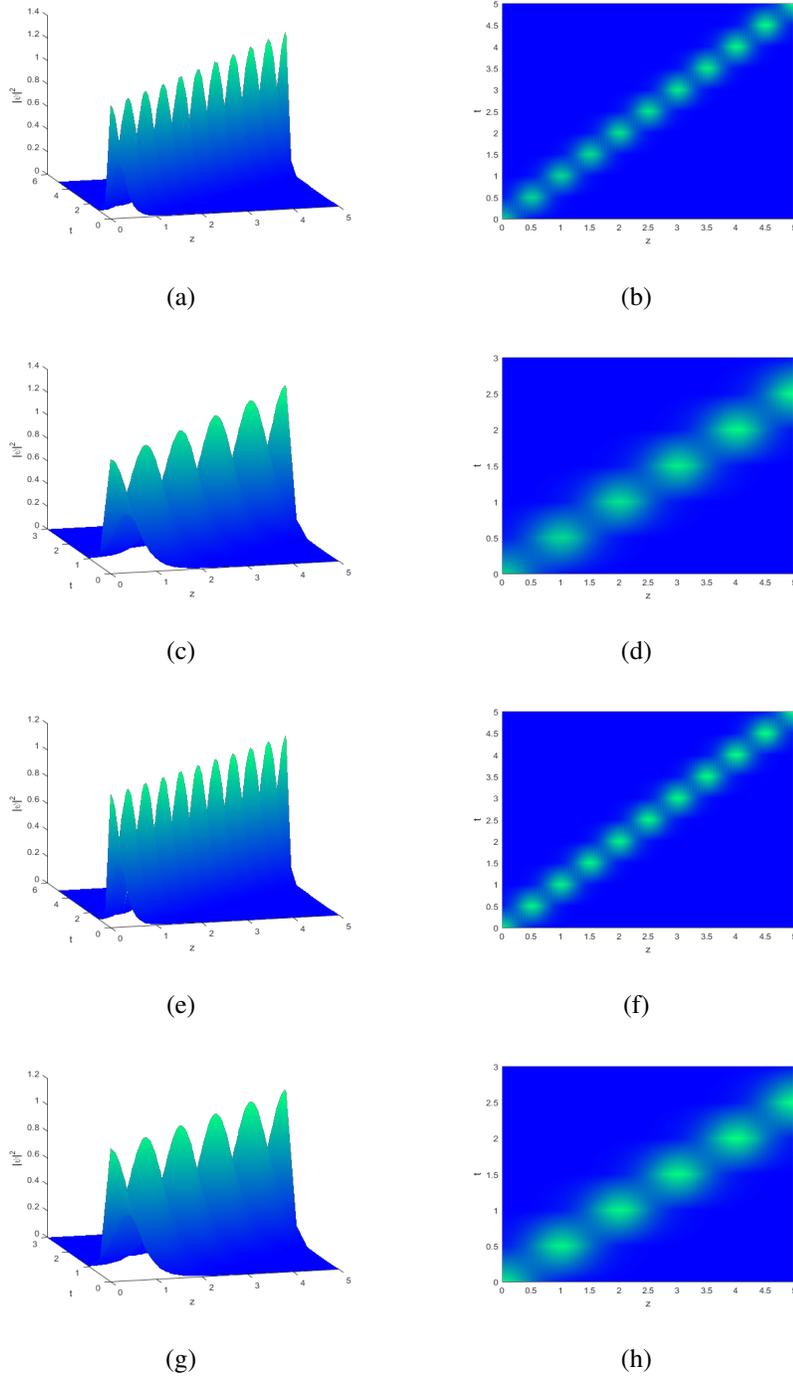


FIGURA 3.1: Solitones no autónomos obtenidos de (3.24), con los parámetros:  $\beta_2 = 10$  (GDV),  $T_2 = 0.2$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación con  $v = v_g = 1$  y una pérdida/ganancia = 0.6, (b) Gráfica de contorno de la propagación de (a). (c) Propagación con  $v = 2$ ,  $v_g = 1$  y una pérdida/ganancia = 0.6 y (d) Gráfica de contorno de la propagación de (c). (e) Propagación con  $v = v_g = 1$  y una pérdida/ganancia = 0.8, (f), gráfica de contorno del pulso. (g) y (h) Propagación del pulso para pérdida/ganancia= 0.8 con  $v = 2$  y gráfica de contorno del pulso, respectivamente.

### 3.2.3. Solitones brillantes en fibras ópticas con ganancia y no linealidad variables

En este caso, la dinámica de propagación de la envolvente eléctrica del pulso es representada por la siguiente ecuación de coeficientes variables<sup>61,62</sup>

$$i\frac{\partial U(Z,T)}{\partial Z} + \Omega(Z)\frac{\partial^2 U(Z,T)}{\partial T^2} + \frac{i}{2}G_1(Z)U(Z,T) + R(Z)|U(Z,T)|^2U(Z,T) = 0, \quad (3.26)$$

donde  $\Omega(Z)$  es el coeficiente de dispersión,  $R(Z)$  es el parámetro de no linealidad de Kerr, y  $G_1(Z)$  es el coeficiente de ganancia. Después de identificar los coeficientes  $\beta(z)$  y  $\hat{\gamma}(z)$  con  $\Omega(Z)$  y  $R(Z)$  tal que  $z = Z$  y  $t = T$  y al combinar (3.13) y (3.14) se obtiene

$$R(Z) = 2\gamma_c\Omega(Z) \exp \left[ - \int G_1(Z)dZ \right]. \quad (3.27)$$

La dispersión diseñada la escogemos decayente de manera exponencial,  $\Omega(Z) = e^{-Z}$ , porque este tipo de dispersión fue realizada experimentalmente.<sup>63</sup>

Para este caso  $F$  es la constante

$$F = 2f_3 \frac{\gamma_c}{\gamma}. \quad (3.28)$$

La solución no autónoma tiene la siguiente forma

$$U(T,Z) = A(Z) \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \gamma_c f_3 A_0 ((T+2) - v) \right) e^{i\frac{\gamma_c f_3}{\gamma} \left( (\gamma A_0^2 - \frac{v^2}{2}) + v(T+2) - (T+2)^2 \right)}, \quad (3.29)$$

donde

$$A(Z) = \sqrt{\frac{2\gamma_c}{\gamma}} f_3 A_0 e^{\frac{1}{2} \int G_1(Z)dZ}. \quad (3.30)$$

La evolución de este solitón no autónomo se presenta en las gráficas tridimensionales de la Fig. (3.2) para las velocidades  $v = 1$  y  $v = 2$  en los casos  $G_1 = 0$  y  $G_1 = 1$  mostrando el crecimiento exponencial de la amplitud y la dependencia de oblicuidad del ancho.

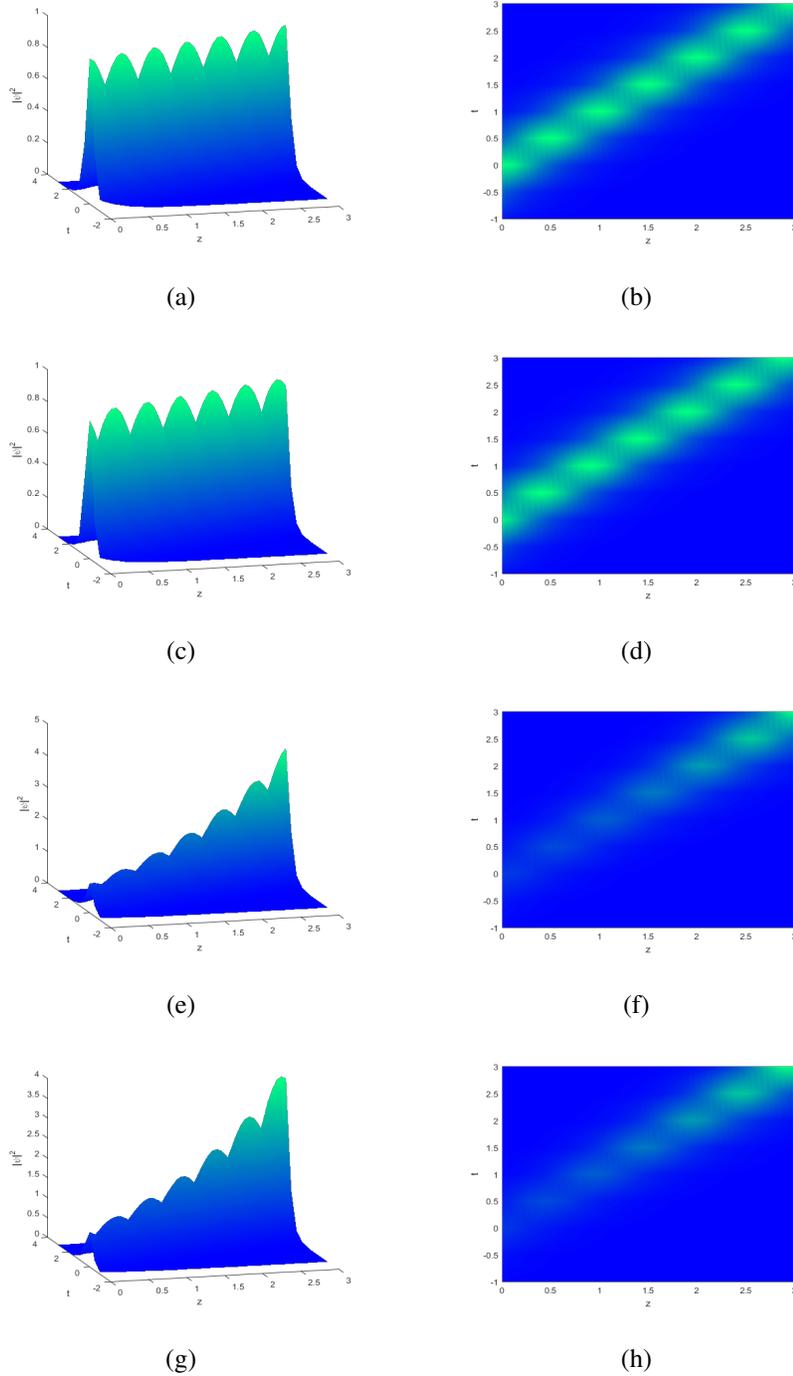


FIGURA 3.2: Solitones no autónomos obtenidos de la ec (3.29), con los parámetros:  $\beta_2 = 10$  (GDV),  $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación con  $v = v_g = 1$  y  $G_1 = 0$ , (b) Gráfica de contorno de la propagación de (a). (c) Propagación con  $v = 2$ ,  $v_g = 1$  y  $G_1 = 0$  (d) Gráfica de contorno de la propagación de (c). (e) Propagación con  $v = v_g = 1$ , y  $G_1 = 1$  (f), gráfica de contorno del pulso. (g) y (h) Propagación del pulso para  $G_1 = 1$  con  $v = 2$  y gráfica de contorno del pulso, respectivamente.

De este modo se obtienen las condiciones apropiadas para el manejo de solitones no autónomos dentro de fibras ópticas, tal que bajo el mapeo que convierte la ecuación NLS-CV en una ecuación NLS estándar, se obtiene la condición  $F(z) = \frac{f_3}{\beta(z)} \frac{\gamma(z)}{\gamma} \exp[\int 2(g(z) - \Gamma)dz]$  siendo  $F(z)$  una función que parametriza el mapeo. Esta condición garantiza la integrabilidad del sistema y muestra que los solitones no autónomos son posibles solo si los parámetros de la fibra óptica cumplen dicha condición. En general, los solitones no autónomos difieren del solitón estándar con base al cual se construyen en el método de He y Li por tener una amplitud y un ancho que dependen de los parámetros materiales de la fibra óptica en la cual se propagan.

Por otra parte se dan otros dos ejemplos, en el Apéndice C tomando al modelo con dos tipos de dispersión y no linealidad diferente.

### 3.3. Solitones no autónomos en la ecuación Compleja de Ginzburg-Landau

Al igual como se propuso en la sección anterior, una alternativa para contrarrestar la pérdida y dispersión, fenómenos propios de la propagación, se propone compensarlos con amplificadores ópticos<sup>34,60,64</sup> o bien con el uso de amplificadores periódicos de fase.<sup>65,66</sup>

Teóricamente, el tratamiento se realiza a través de la ecuación NLS o bien por la ecuación de Ginzburg-Landau, la cual como sabemos es una clase de ecuación NLS con un valor considerable en el término no lineal,<sup>67</sup> tal que, tomando la ecuación de GL en función de la evolución de la amplitud de manera finita sobre las ondas inestables,<sup>48</sup> podemos usarla para describir pulsos en fibras amplificadas al igual que en la sección anterior pero con una descripción un poco más general, donde se toma la forma compleja que es representada como

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \gamma(z)\psi - ip(z)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - g(z)|\psi|^2\psi, \quad (3.31)$$

donde  $\psi(z,t)$  es la función de la evolución del campo,  $t$  es el tiempo retardado y  $z$  es la

distancia de propagación, al igual que en la ENLS en este caso  $p$  proporciona la dispersión de la onda, es común que en la ecuación de GL, tanto  $p(z)$  como  $g(z)$  sean funciones complejas, tal que, la parte compleja de  $p(z)$  genera un filtrado espectral (de modo que  $p_i < 0$ , donde el subíndice  $i$  denota la parte imaginaria) del amplificador, término que es importante porque suprime la fluctuación de Gordon-Haus<sup>68</sup> de la frecuencia central del solitón<sup>1</sup>; de igual manera para la componente no lineal  $g(z)$  (con la parte imaginaria  $g_i > 0$  la cual representa los procesos de absorción/ganancia no lineales). Se conoce que la ganancia no lineal ayuda a compensar el crecimiento radiativo inicial (modo lineal), el cual siempre sigue a la propagación de pulsos no lineales estacionarios en fibras reales,  $\gamma(z)$  es la ganancia lineal y en caso de tener coeficiente imaginario este será el cambio de frecuencia.<sup>69</sup> En la mayoría de los casos este tipo de modelo es usado para manejo de dispersión (DM por sus siglas en inglés)<sup>2</sup> al igual que para la ENLS,<sup>70,71</sup> pero con la diferencia que este modelo se puede presentar como un mapa periódico en una línea de transmisión, tal que cada periodo es construido sobre dos tipos de fibras que generalmente tienen diferentes longitudes y van en sentido opuesto a la dispersión de la velocidad de grupo.<sup>72-74</sup> La dispersión causada por la interacción de solitones y pulsos vecinos se induce por un pulso grande que bombea un periodo de dispersión que pueden ser representados por un manejo de dispersión de solitones.<sup>75</sup>

Para este tipo de problemas, se conocen algunos métodos para encontrar una solución exacta del tratamiento teórico. Recientemente, un modelo propuesto es el que da un camino para obtener condiciones de estabilidad en soluciones tipo solitón brillante y oscuro, en la ecuación compleja cúbica de GL pero de coeficientes variables (CV).<sup>49</sup> En esta sección abordaremos, este modelo, pero como un mapeo de la ECGL-CV dentro de la ecuación compleja estándar GL de coeficientes constantes,<sup>56,76</sup> de manera análoga a la sección anterior.

---

<sup>1</sup>El efecto Gordon-Haus, dice que las fluctuaciones de la frecuencia central de los pulsos ópticos se acoplan al tiempo a través de la dispersión de velocidad del grupo: un cambio en la frecuencia central se presenta como un cambio en la velocidad de grupo, que posteriormente afectará el tiempo del pulso.

<sup>2</sup>Manejo de dispersión y no linealidad en óptica es un concepto que describe los sistemas dinámicos no lineales que consiste en la variación de la dispersión, la no linealidad y la ganancia/pérdida que afecta al solitón.

### 3.3.1. Mapeo He-Li, tratamiento matemático

Garantizando la integrabilidad de la (3.31) por la relación directa de la ECGL-CV con la ecuación estándar de GL, la cual es representada por la ecuación<sup>77,78</sup>

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \left(\frac{D}{2} - i\beta\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + (s - i\varepsilon)|\psi|^2\psi = i\delta\psi, \quad (3.32)$$

con  $\psi$  que es la envolvente del campo óptico,  $z$  y  $t$  son la distancia de propagación y el tiempo de retardo, respectivamente. Los parámetros de la ecuación (3.32) son todo parámetros reales, tal que,  $\delta$  se considera la parte de ganancia lineal o pérdida,  $\beta$  es el filtrado espectral, y  $\varepsilon$  es la ganancia no lineal. Los parámetros  $D$  y  $s$  solo pueden tomar los valores  $\pm 1$ , lo que significa que, cuando  $D = 1$  la dispersión es anómala y con  $D = -1$  la dispersión es normal,  $s = 1$  o  $s = -1$  denomina el efecto Kerr positivo o negativo,<sup>79</sup> respectivamente. Para comenzar el tratamiento se propone el ansatz

$$\psi(t, z) = u(T, Z)e^{-i\phi(t, z)}, \quad (3.33)$$

donde la función de fase  $\phi$  describe la inestabilidad.<sup>13</sup> Con  $T = T(z, t)$  y  $Z = Z(z)$ , son determinados por la forma específica de  $p(z)$ ,  $g(z)$ , y  $\gamma_r$ , donde  $T$  y  $Z$  son necesarios para que  $u(Z, T)$  satisfaga la ecuación estándar de GL ec. (3.32) conteniendo a la fase  $\phi$ . Usualmente, la función  $T$  es tomada como un tiempo reducido, que va a depender del tiempo y de la distancia de propagación como  $T = t - \beta_1^{eff}z$ ,<sup>80</sup> y es generalmente usada en fibras ópticas amplificadas por dopaje de tierras raras, donde  $\beta_1^{eff}$  es relacionada con la velocidad de grupo efectiva, tal que,  $T$  va a tener una dependencia directa con  $Z$ . De esta manera, sabiendo que la  $\frac{\partial\psi}{\partial t} = \psi_t$ ,  $\frac{\partial\psi}{\partial z} = \psi_z$  y aplicando el ansatz (3.33) obtenemos

$$iu_z + p(z)u_{tt} - 2ip(z)\phi_t u_t + \phi_z u - ip(z)\phi_{tt} u - p(z)\phi_t^2 u - i\gamma(z)u + q(z)|u|^2 u = 0, \quad (3.34)$$

recordando que  $u = u(T, Z)$  con  $T = T(t, z)$ ,  $Z = Z(z)$ ;

$$iu_z Z_z + iu_T T_z + \phi_z u + p(z)u_T T_{tt} + p(z)u_{TT} T_t^2 - 2ip(z)\phi_t T_t u_T - ip(z)\phi_{tt} u - p(z)\phi_t^2 u + q(z)|u|^2 u = i\gamma(z)u \quad (3.35)$$

si dividimos por  $Z_z$  y hacemos  $p(z) = \left(\frac{D}{2} - i\beta\right) \frac{Z_z}{T_t^2}$ , y  $g(z) = (s - i\varepsilon) Z_z$  obtenemos

$$iu_z + \left(\frac{D}{2} - i\beta\right) u_{TT} + (s - i\varepsilon) |u|^2 u + (k_1 + ik_2) u_T + (k_3) u = i\delta u \quad (3.36)$$

con

$$k_1 = \frac{D T_{tt}}{2 T_t^2} - 2\beta \frac{\phi_t}{T_t}, \quad (3.37)$$

$$k_2 = \frac{T_z}{Z_z} - \beta \frac{T_{tt}}{T_t^2} - D \frac{\phi_t}{T_t}, \quad (3.38)$$

$$k_3 = \frac{\phi_z}{Z_z} - \beta \frac{\phi_{tt}}{T_t^2} - \frac{D \phi_t^2}{2 T_t^2}, \quad (3.39)$$

$$\delta = \beta \frac{\phi_t^2}{T_t^2} - \frac{D \phi_{tt}}{2 T_t^2}, \quad (3.40)$$

cuando  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$  estamos en el regimen de la ecuación cúbica de Ginzburg-Landau ec. (3.32). De esta manera solo queda el resolver cada una de estas funciones para obtener la dependencia directa de las funciones propuestas con los parámetros de dispersión, la no linealidad y los parámetros de pérdida/ganancia, bajo el manejo de dispersión.

Con esto en mente, ahora si tomamos  $T = t - \beta_1^{eff} z$  tenemos

$$T_t = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = T_\xi$$

$$T_z = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dz} = -\beta_1^{eff} T_\xi$$

sustituyendo en (3.40)

$$k_1 = \frac{D T_{\xi\xi\xi}}{2 T_\xi^2} - 2\beta \frac{\phi_t}{T_\xi}, \quad (3.41)$$

$$k_2 = \frac{-\beta_1^{eff} T_\xi}{Z_z} - \beta \frac{T_{\xi\xi\xi}}{T_\xi^2} - D \frac{\phi_t}{T_\xi}, \quad (3.42)$$

$$k_3 = \frac{\phi_z}{Z_z} - \beta \frac{\phi_{tt}}{T_\xi^2} - \frac{D \phi_t^2}{2 T_\xi^2}, \quad (3.43)$$

$$\delta = \frac{\gamma_r(z)}{Z_z} - \beta \frac{\phi_t^2}{T_\xi^2} + \frac{D \phi_{tt}}{2 T_\xi^2}, \quad (3.44)$$

de tal manera que al resolver cada una estas ecuaciones obtenemos las variables que representan la solución y son

$$T(z, t) = F_1(z) + \frac{\sqrt{s.c}}{k} \sqrt{g(z)} \sqrt{2k(t - \omega z) + f_1}, \quad (3.45)$$

$$Z(z) = (s.c) \int g(z) dz + f_2, \quad (3.46)$$

$$\phi(z, t) = -\frac{D}{8\beta} \ln(2k(t - \omega z) + f_1), \quad (3.47)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son constantes de integración,  $s.c$  y  $D.c$  son valores complejos del mapeo que tienen la forma  $s.c = \frac{s+i\varepsilon}{s^2+\varepsilon^2}$  y  $D.c = \frac{\frac{D}{2}+i\beta}{(\frac{D}{2})^2+\beta^2}$  y como se observa son los números complejos relacionados con los coeficientes no lineales y de dispersión de la ecuación de GL, respectivamente, también  $\omega = \frac{k}{8\beta} (16\beta^2 + D^2)$  y  $\kappa = \beta_1^{eff} \left( \frac{4\beta}{D^2+\beta^2} \right)$ , lo cual nos lleva a obtener función de transformación

$$F_1(z) = \left( \frac{1}{k} + \frac{4\beta_1^{eff}}{\omega} \right) \sqrt{\frac{s.c}{D.c}} \sqrt{g(z)p(z)} \quad (3.48)$$

además de la expresión para la pérdida/ganancia dependiente de la dispersión y la no linealidad

$$\gamma(z) = s.c g(z) - \frac{3D^2k^2}{16\beta p(z)} \quad (3.49)$$

de esta manera tenemos un mapeo completo de la ecuación de GL, y además se tienen las condiciones de integrabilidad del sistema.

### 3.3.2. Solución exacta para la ecuación compleja de GL estándar

Existen varias soluciones exactas de la ecuación de GL ec. (3.32),<sup>77-79,81</sup> pero en esta sección utilizaremos la solución obtenida por Soto-Crespo y colaboradores,<sup>78</sup> la cual es usada para solitones brillantes con dispersión anómala  $D = s = 1$ , debido a que en el régimen de dispersión anómala es posible encontrar propiedades que cumplen con soluciones solitónicas.<sup>5</sup> En el trabajo de Soto-Crespo se proponen dos tipos de soluciones una de ellas es para una amplitud fija, y la otra es para una amplitud arbitraria, en ambos casos la solución solitónica tiene la forma

$$u(T, Z) = a(T) \exp [i (d \ln [a(T)] - \omega Z)] , \quad (3.50)$$

donde  $a(T)$  es una función real  $d$  y  $\omega$  son constantes reales con valores

$$d_{\pm} = \frac{3(1 + 2\varepsilon\beta D) \pm \sqrt{9(1 + 2\varepsilon\beta D)^2 + 8(\varepsilon - 2\beta D)^2}}{2(\varepsilon - 2\beta D)} \quad (3.51)$$

$$\omega = \frac{\delta(1 - d^2 - 4\beta d D)}{2(d - \beta D + \beta d^2 D)} \quad (3.52)$$

Tal que, en este contexto de búsqueda de soluciones, sólo se toman las condiciones de estabilidad propuesta por Soto-Crespo y colaboradores, y no se hace un análisis de estas condiciones.

### Soliton con amplitud fija

La solución  $a(T)$  es

$$a(T) = CB \operatorname{sech}(BT) \quad (3.53)$$

con

$$B = \sqrt{\frac{\delta}{\beta d^2 + Dd - \beta}} \quad (3.54)$$

$$C = \sqrt{\frac{3d(1 + 4\beta^2)}{2(2\beta - \varepsilon D)}} \quad (3.55)$$

y  $d$  es dada por la ecuación (3.51), después de escoger el signo mas (menos) en frente de la raíz cuadrada,  $D$  es negativa (positiva). El segundo valor de  $d$  genera una solución no física,<sup>77,82</sup> ya que la expresión bajo la raíz cuadrada de  $C$  llega a ser negativa.

De tal manera, que existe un rango de solución para (3.53) dado por

$$\varepsilon_s = \beta \frac{3\sqrt{1 + 4\beta^2} - D}{4 + 18\beta^2} \quad (3.56)$$

Como esta solución existe casi en todas partes en el plano  $(\beta, \epsilon)$ , Soto-Crespo la denominan como una solución general (ver Fig. (5.1)). La curva  $S$  en sí es la línea donde esta solución se convierte en singular, es decir, su amplitud BC tiende a infinito, mientras que el ancho  $1/B$  desaparece.

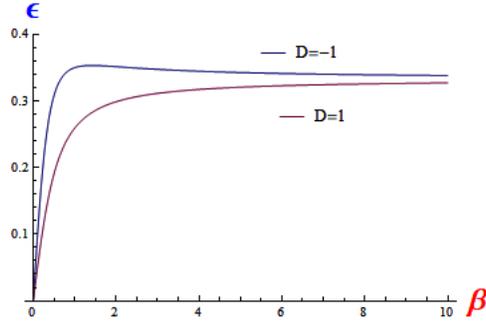


FIGURA 3.3: Línea  $S$  (3.56) en el plano  $(\epsilon, \beta)$  donde las soluciones con amplitudes fijas (3.53) se vuelven singulares, y donde las clases de soluciones especiales con amplitud arbitraria (3.57) existen. Este diagrama se aplica para casos cúbicos y quinticos. La línea correspondiente para el caso de dispersión anómala es dada por línea azul para la comparación. Por encima de la línea  $S$ ,  $\delta$  debe ser positiva para que exista la solución (3.53), y negativa debajo de ella. La línea roja es para  $S$  dada por

$$D = +1 \text{ que muestra la dispersión normal.}$$

### Soliton con amplitud arbitraria

Esta solución es obtenida cuando se impone la condición de que  $\delta = 0$ , tal que

$$a(T) = GF \operatorname{sech}(GT) , \tag{3.57}$$

donde  $G$  es un parámetro positivo arbitrario, y  $d$ ,  $\omega$ , y  $F$  son dados como

$$d = \frac{\sqrt{1+\beta^2}-D}{2\beta} \quad (3.58)$$

$$\omega = -\frac{(1+4\beta^2)(\sqrt{1+4\beta^2}-D)}{4\beta^2}G^2 = -d\frac{\sqrt{1+\beta^2}-D}{2\beta}G^2 \quad (3.59)$$

$$F = \left(\frac{d\sqrt{1+\beta^2}-D}{2\varepsilon}\right)^{1/2} = \left[\frac{(2+9\beta^2)\sqrt{1+\beta^2}(\sqrt{1+\beta^2}-D)}{2\beta^2(3\sqrt{1+\beta^2}-D)}\right]^{1/2}. \quad (3.60)$$

La razón de existencia de una solución de amplitud arbitraria es que, cuando  $\delta = 0$ , la ecuación cúbica de GL compleja es invariante a transformaciones de escala  $u \rightarrow Gu$ ,  $T \rightarrow GT$ ,  $Z \rightarrow G^2Z$ .<sup>78</sup> De esta forma, si conocemos la solución particular de esta ecuación, se puede obtener una generación de una familia de soluciones usando esta transformación.

### 3.3.3. Solución para la ecuación compleja de GL con coeficientes variables

Usando un caso específico de dispersión y no linealidad propuesto en el trabajo de F. Fang y Y. Xiao<sup>49</sup> (donde desarrollan la ecuación de GL de coeficientes variables para describir una fibra con inhomogeneidades, encontrando solitones brillantes con chirp), mediante el uso del mapeo propuesto, encontramos soluciones solitónicas correspondientes para las amplitudes propuestas por Soto-Crespo y colaboradores, .

Entonces, la solución consta de tomar los parámetros propuestos de dispersión y no linealidad y desarrollarlos por el método con el fin de encontrar la forma funcional de la solución, estos parámetros son

$$p(z) = -\frac{1}{2}p_0[1 + \alpha_1 \sin(\sigma z)] \exp(-\mu_1 z), \quad (3.61)$$

$$g(z) = g_0[1 + \alpha_2 \sin(\sigma z)] \exp(-\mu_2 z), \quad (3.62)$$

donde  $p_0$  y  $g_0$  son parámetros ideales de la fibra;  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son cantidades pequeñas que caracteriza las fluctuaciones en la amplitud;  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son constantes también pequeñas;  $\sigma$  es

relacionada con la variación del periodo de los parámetros de la fibra.

Entonces tenemos que

$$F_1(z) = \left( \frac{1}{k} + \frac{4v}{\omega} \right) \sqrt{\frac{s.c}{D.c}} \sqrt{-\frac{1}{2} p_0 g_0 [1 + \alpha_2 \sin(\sigma z)] \exp(-\mu_2 z) [1 + \alpha_1 \sin(\sigma z)] \exp(-\mu_1 z)} \quad (3.63)$$

de esta manera usando la ec. (3.63), con  $T$  ec. (3.45),  $Z$  ec. (3.46) y  $\phi$  ec. (3.47) obtenemos los funciones que nos darán el comportamiento para la solución ec. (3.50) con amplitud fija y con amplitud variable, respectivamente.

### Solución para un solitón con amplitud fija

De acuerdo con la solución propuesta por Soto-Crespo y colaboradores añadida a nuestra solución tenemos la representación gráfica de la solución solitónica representada en la figura (3.4).

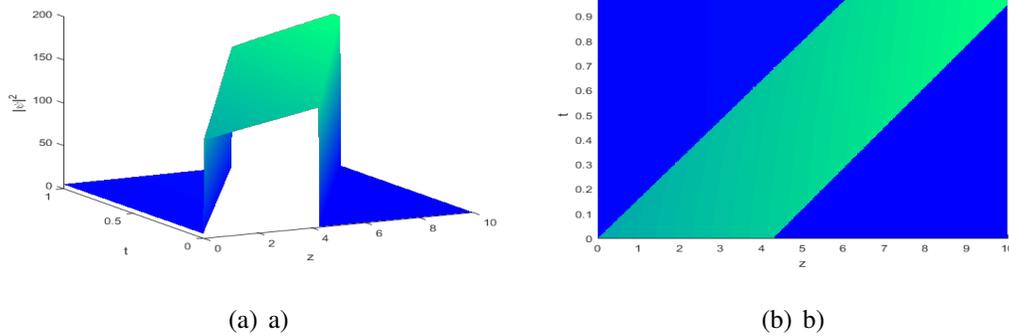


FIGURA 3.4: a) Solitón de la solución con amplitud fija. b) Gráfica de contorno de propagación correspondiente

La gráfica (3.4) muestra la representación de la solución para la ecuación NLGL de coeficientes variables para dispersión anómala, es decir, el coeficiente  $D = 1$ , podemos observar que presenta soluciones similares a las reportadas en la literatura,<sup>78</sup> con los parámetros  $\beta = 0.25$ ,  $\delta = -0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.05$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.01$ ,  $p_0 = -0.5$ ,  $g_0 = 0.3$ , y  $s = 1$  al igual que en el trabajo de Soto-Crespo et al. y en el trabajo de Fang et. al.

### Solución para un solitón con amplitud arbitraria

De igual manera que en el caso anterior presentamos la solución para un solitón con amplitud variable es representada gráficamente en las figuras (3.5), donde se toman los valores propuestos en las referencias donde el  $G = 1$ , con  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.05$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.01$ ,  $p_0 = -0.5$ ,  $g_0 = 0.3$ , y  $s = 1$

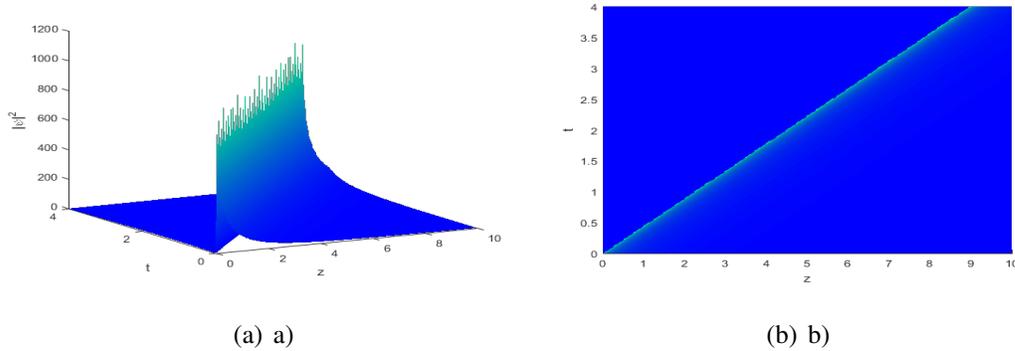


FIGURA 3.5: a) Solitón brillante de la solución con amplitud arbitraria. b) Gráfica de contorno de propagación correspondiente

# Capítulo 4

## Supersimetría óptica

En este capítulo el principal objetivo es describir matemáticamente el perfil de índice de refracción de guías de onda, haciendo uso de supersimetría cuántica y su directa aplicación a la óptica. De la literatura se sabe que la óptica supersimétrica puede describir dos haces de luz de diferentes longitudes de onda, que forman una interferencia periódica constante a lo largo del eje de la guía de onda;<sup>31</sup> donde la supersimetría es exacta en un régimen paraxial <sup>1</sup>.

De esta manera, los sistemas ópticos se pueden estudiar por métodos supersimétricos de forma análoga con la mecánica cuántica supersimétrica. Específicamente se pretenden encontrar los perfiles de índice de refracción, los cuales poseen propiedades muy interesantes para la propagación de pulsos ópticos, tanto en el régimen solitónico como en otros regímenes.

### 4.1. Analogía entre fibras ópticas y mecánica cuántica

Uno de los principales medios de propagación óptica en la actualidad son las guías de onda, las cuales generalmente son medios ópticos que en su forma más sencilla constan de dos materiales de diferente índice de refracción, estos medios están estructurados de manera

---

<sup>1</sup>El régimen paraxial en óptica se utiliza en el cálculo de sistemas ópticos, donde se supone que las trayectorias de los rayos de luz forma un ángulo pequeño con el eje óptico. En esta aproximación paraxial de primer orden, el seno y la tangente de un ángulo se aproximan por el mismo ángulo (en radianes), y el coseno por 1.

que el material de mayor índice de refracción se encuentre en el centro del medio y el otro material de menor índice rodeando el núcleo, con lo que se consigue que exista propagación del pulso óptico que entra en este medio. Existe otro tipo de guía de pulsos, esta es la denominada fibra óptica, la cual funciona de manera similar a las guías de onda, con la variante que estas fibras son cilíndricas y de menor tamaño radial, en comparación con el núcleo de las guías de onda convencionales, además de que actualmente, las fibras ópticas han tenido un gran crecimiento en el área de telecomunicaciones, donde el avance tecnológico es cada vez mayor.

Para iniciar con nuestro estudio, vamos a hacer uso de una analogía que relaciona los potenciales independientes del tiempo en mecánica cuántica, con los perfiles de índice de refracción independiente de la longitud de propagación en guías de onda y fibras ópticas en un régimen paraxial tal como lo describe Black y Ankiewicz.<sup>25</sup>

En una guía de onda óptica, como se mencionó anteriormente, la luz o pulso óptico es guiado en el interior de la guía debido al alto índice de refracción del núcleo que confina los rayos, el cual en comparación con mecánica cuántica actúa como un pozo de potencial para una partícula.<sup>25</sup> Cuando el ángulo de propagación es menor que el ángulo crítico es decir  $\theta_z < \theta_c$ , ver figura (4.1), los rayos se encuentran en reflexión total interna, de modo que estos se confinan hacia el núcleo; para  $\theta_z > \theta_c$ , esto corresponde a rayos refractados no confinados o tuneados fuera del núcleo.<sup>83</sup>

Cuando el parámetro  $V$  (frecuencia de corte) de la guía de onda es pequeño, el espectro continuo clásico de las direcciones de los rayos confinados se vuelve discreto,<sup>25</sup> es decir se transforma en modos electromagnéticos confinados de la fibra, en esta situación a cada rayo confinado le corresponde un modo electromagnético confinado mientras que a los rayos no confinados les corresponde el continuo de los modos radiativos.

Dos aspectos fundamentales de la analogía es que la distancia  $z$  a lo largo del eje de la fibra es equivalente al parámetro del tiempo en mecánica cuántica; y que la dependencia

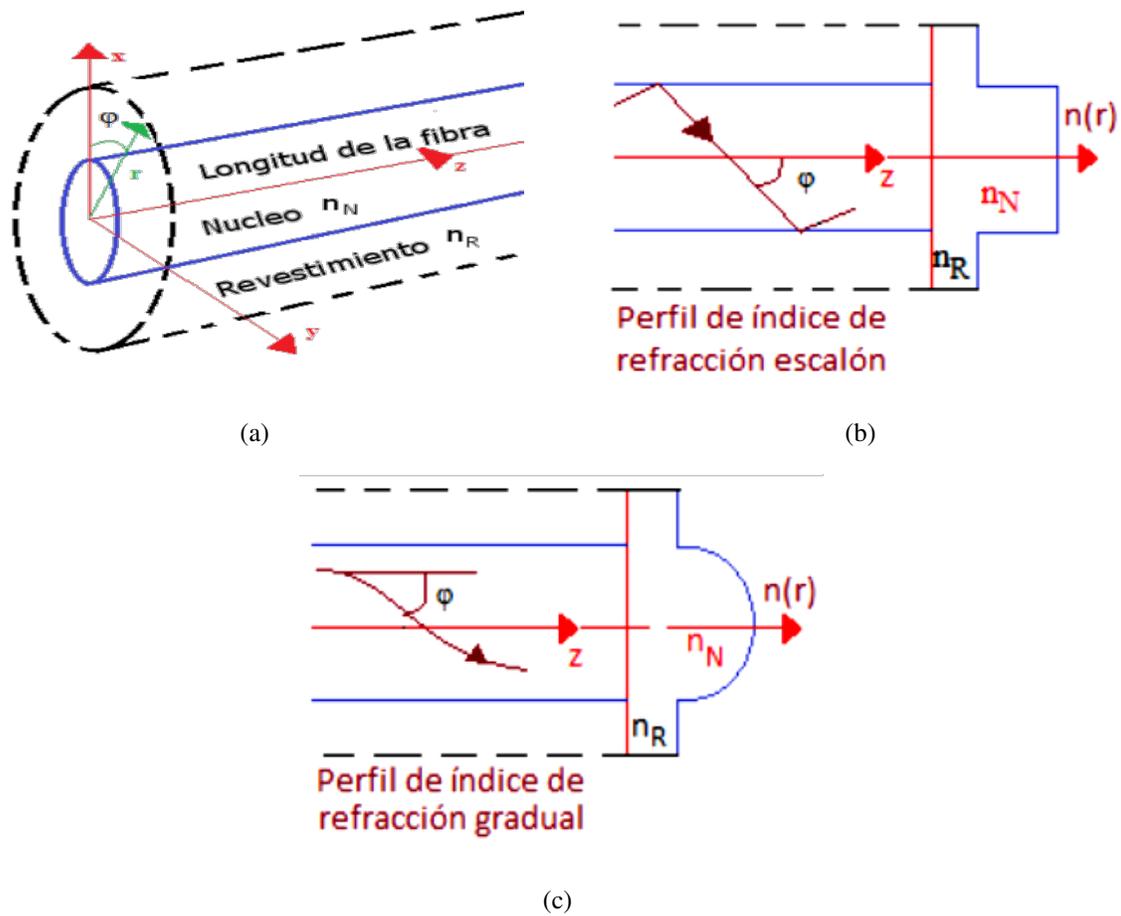


FIGURA 4.1: (a) Ejemplo de una fibra óptica cilíndrica, con el núcleo de la fibra revestido por un recubrimiento de bajo índice de refracción; teóricamente, se puede considerar que  $r$  se expande al infinito. (b) Trayectoria de un rayo que pasa a través de una fibra de perfil escalón. (c) Trayectoria de un rayo que pasa a través de una fibra de perfil gradual. El pulso óptico o rayo es confinado si  $\theta_c < \theta_c$

$$\text{donde } \theta_c \cong [1 - n_{rev}^2/n_0^2]^{1/2}.$$

transversal del campo eléctrico (o la proyección del rayo en la sección transversal de la fibra) es equivalente a un sistema cuántico esférico, es decir un problema cuántico de campo central.<sup>25</sup>

Los principales parámetros de una fibra óptica están dados en la tabla (4.1), para su fácil visualización.

Parámetros	Descripción
$r = (x, y)$	Posición en la sección transversal
$\Delta = \frac{1}{2} (1 - n_{rev}^2/n_0^2)$	Parámetro de la altitud del perfil de refracción
$n^2(r) = n_0^2 [1 - 2\Delta f(r)]$	Índice de refracción cuadrático
$n_0$	Máximo del índice de refracción del núcleo
$n_{rev}$	Máximo del índice de refracción del revestimiento
$\rho$	Radio de la fibra
$\lambda = 2\pi\bar{\lambda} = 2\pi/k$	Longitud de onda
$\Psi(x, y)e^{i\beta z}$	Dependencia funcional del campo eléctrico
$\beta$	Constante de propagación
$V = \rho k (n_0^2 - n_{rev}^2)^{1/2} = \rho k n_0 \sqrt{2\Delta}$	Parámetro de la guía de onda
$U = \rho (k^2 n_0^2 - \beta^2)^{1/2}$	Constante de propagación normalizada

TABLA 4.1: Parámetros importantes en una fibra óptica.

## 4.2. Ecuación escalar de onda independiente de la longitud y ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

Para una fibra óptica de índice de refracción independiente de la longitud, la dependencia del campo electromagnético es  $e^{i\beta z}$  a lo largo de la fibra. Por otro lado la dependencia del campo electromagnético en la sección transversal de la fibra en un regimen paraxial esta dado por la siguiente ecuación de onda escalar

$$\left[ \nabla^2 + \frac{2\Delta n_0^2}{\lambda^2} \left( \frac{U^2}{V^2} - f(r) \right) \right] \psi(r) = 0, \quad (4.1)$$

donde  $f(r)$  es el perfil del índice de refracción.

Esta ecuación puede ser comparada con la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa unitaria y energía  $E$  en un potencial independiente de tiempo  $\mathcal{V}(r)$

$$\left( \nabla^2 + \frac{2}{\hbar^2} [E - \mathcal{V}(r)] \right) \psi(r) = 0. \quad (4.2)$$

La constante de Planck,  $h = 2\pi\hbar$ , juega el papel correspondiente a  $\lambda$ ; la energía mecánica es la relacionada con el cuadrado de la constante normalizada  $U$ :

$$E \leftrightarrow \Delta n_0^2 U^2 / V^2 = \frac{1}{2} (n_0^2 - \bar{\beta}^2), \quad (4.3)$$

donde  $\bar{\beta} \leftrightarrow \beta/k$  y en la aproximación semiclásica de WKB es un invariante axial.<sup>84,85</sup> Resulta también que el potencial de Schrödinger corresponde al perfil normalizado del índice de refracción

$$\mathcal{V}(r) \leftrightarrow \Delta n_0^2 f(r) = \frac{1}{2} (n_0^2 - n^2(r)). \quad (4.4)$$

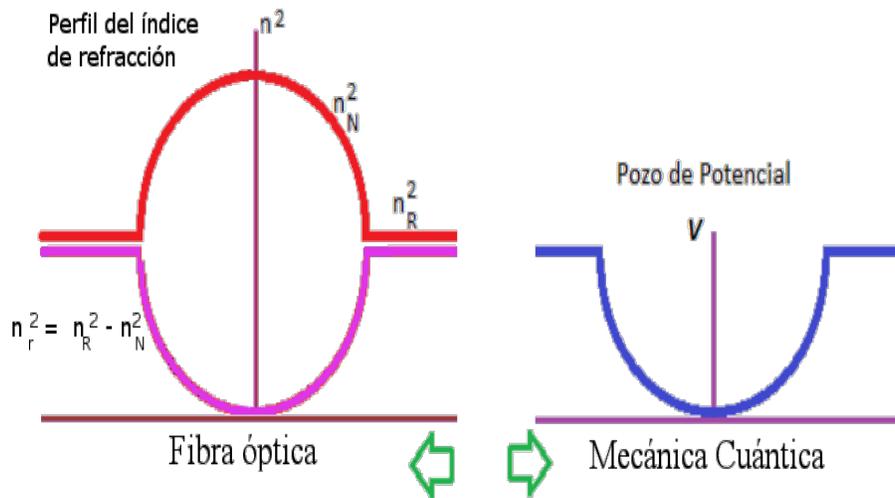


FIGURA 4.2: Correspondencia entre el índice de refracción normalizado y un pozo de potencial.

De manera que la ecuación de la proyección del rayo está dada por las coordenadas  $x(z)$  y  $y(z)$ ; tal que, es escrita de la forma

$$\frac{1}{2}\bar{\beta}^2 \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 \right] + \Delta n_0^2 f(x,y) = \frac{1}{2} (n_0^2 - \bar{\beta}^2) , \quad (4.5)$$

comparando esta ecuación con la ecuación de conservación de la energía tenemos

$$\frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \mathcal{V}(x,y) = E . \quad (4.6)$$

Así, usando la correspondencia asintótica de (4.3), vemos que para una partícula de masa unitaria tendríamos

$$p_x \equiv \frac{dx}{dz} \leftrightarrow \bar{\beta} \frac{dx}{dz}, \quad p_y \equiv \frac{dy}{dz} \leftrightarrow \bar{\beta} \frac{dy}{dz} . \quad (4.7)$$

Por lo que, la analogía temporal se da con la distancia longitudinal dividida por el invariante axial

$$t \leftrightarrow \frac{z}{\bar{\beta}} . \quad (4.8)$$

Usando la relación anterior se puede escribir de manera natural la ecuación del pulso óptico en términos de la ecuación de movimiento de Newton  $dp/dt = -\nabla \mathcal{V}(x,y)$ .<sup>85</sup>

De esta manera, podemos escribir la analogía completa con la tabla (4.2) que es como un diccionario entre mecánica cuántica y fibras ópticas .

### 4.3. Estructuras supersimétricas

Una propuesta de gran interés dentro de la mecánica cuántica, es aquella donde se tienen potenciales isoenergéticos como uno de los caminos para resolver de manera exacta problemas de valor inicial de la ecuación de Schrödinger. Por varias décadas, la actividad principal de esta área tomando como base principal la propuesta anterior, fue hecha por métodos de

Fibra óptica	Mecánica cuántica
Perfil normalizado del índice de refracción	Potencial
Óptica electromagnética	Mecánica cuántica
Ecuación de onda escalar independiente de la longitud	Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo
Constante de propagación normalizada cuadrada	Energía
Modelo número azimutal	Número cuántico de momento angular
Modos confinados (discretos)	Estados ligados (discretos)
Modos de radiación (continuo)	Estados no ligados (continuo)
Modo ligeramente tuneado	Estado metaestable
Modo local	Estado cuasiestacionario
Pulso óptico	Mecánica clásica
Invariante axial normalizado	Energía
Invariante azimutal	Momento angular

TABLA 4.2: Diccionario Cuántico-óptico propuesto por Black y Ankiewicz (ver referencia<sup>25</sup>)

factorización,<sup>26–28</sup> pero fue a partir de los 80s, cuando las conexiones con las transformaciones de Darboux fueron usadas por físicos matemáticos en mecánica cuántica supersimétrica (SUSY QM), para su implementación en los problemas de factorización.<sup>29</sup>

### 4.3.1. Potenciales isoespectrales

En SUSY-QM, se usan dos Hamiltonianos isoespectrales, excepto para el estado base como método de solución de la ecuación de Schrödinger.<sup>30</sup> Una representación de la supersimetría es aquella que se ve en la ecuación de Dirac en un campo externo,<sup>86</sup> que se representa como una raíz cuadrada de la ecuación de Klein-Gordon; este tipo de supersimetría es análoga a encontrar la raíz cuadrada de la ecuación de Helmholtz<sup>31</sup> en el régimen paraxial. La estructura supersimétrica de Helmholtz en óptica también puede describir la propagación de la luz en guías de onda.<sup>29,31,32</sup>

La descripción en física de partículas propuesta por Witten<sup>23</sup> es aquella donde usa SUSY para partículas de spin un medio, con algebra supersimétrica de operadores bosónicos y fermiónicos que obedecen las relaciones de conmutación y anticonmutación. Witten notó que la diagonal de la matriz Hamiltoniana de  $2 \times 2$  tiene componentes Hamiltonianos de spin hacia arriba y spin hacia abajo, teniendo que los operadores de factorización también son matrices  $2 \times 2$  de los Hamiltonianos, y estas matrices son llamadas supercargas las cuales son:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}, \quad Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

Estas matrices satisfacen una super algebra cerrada

$$[H, Q^-] = [H, Q^+] = 0, \quad \{Q^-, Q^+\} = H, \quad \{Q^-, Q^-\} = \{Q^+, Q^+\} = 0. \quad (4.10)$$

El hecho que las supercargas conmuten con  $H$  significa que,  $H_1$  y  $H_2$  son isoenergéticas. En teoría cuántica de campos, los operadores de supercargas, son responsables del cambio de los grados de libertad bosónicos dentro de los fermiónicos y viceversa, tal que, en mecánica cuántica estos son conocidos como operadores entrelazados que factorizan la pareja de hamiltonianos,  $H_1 = A^+A$  y  $H_2 = AA^+$ , respectivamente.<sup>29</sup> Si uno olvida la representación matricial, se puede ver fácilmente que a través de SUSY QM, se puede reformular esta representación, usando el método de factorización e introduciendo los ejemplos de Dirac y Schrödinger con los que se empieza la mecánica cuántica. De hecho, para el caso de spin un medio, Witten escribió una expresión de supercargas como una matriz de operadores de primer orden, envueltos por una función desconocida  $W(x)$  y de igual forma escribió la matriz Hamiltoniana en términos de  $W^2$  y  $W'$ , pero su atención se centró en la cuestión de romper la supersimetría dinámica y no en problemas de valores propios de la mecánica cuántica.

Más tarde, los autores de SUSY QM señalaron que el superpotencial de Witten  $W$  fue la solución de las ecuaciones de Riccati que involucran dos potenciales isoenergéticos,<sup>29</sup> siendo un nuevo resultado básico para el método de factorización y, convirtieron esto en el objetivo de búsqueda de potenciales isoenergéticos que solucionan exactamente potenciales conocidos.

Para SUSY QM, este es esencialmente un esquema algebraico, lo cual es conveniente para cambiar la energía del estado fundamental de  $H_1$  tal que se elimina la contribución a la energía de las fluctuaciones del punto cero. De esta manera, los espectros de energía de los dos Hamiltonianos asociadas son definidos semipositivos. Para  $n > 0$ , donde la ecuación de Schrödinger para  $H_1$  es

$$H_1\phi_n = A^+A\phi_n = \varepsilon_n\phi_n . \quad (4.11)$$

Y puede ser escrita como una ecuación de Schrödinger de su pareja Hamiltoniana de SUSY como

$$H_2(A\phi_n) = AA^+A\phi_n = \varepsilon_n(A\phi_n) , \quad (4.12)$$

aplicando el operador  $A$  a la izquierda de (4.11). De tal forma, que usando la función de onda  $\varphi_n = A\phi_n$  en el problema de valores propios  $H_2\varphi_n = \varepsilon\varphi_n$ , entonces esto es un problema isoespectral de valores propios para  $H_1$ , es decir,  $\varepsilon_n = \varepsilon_n$ . De igual forma, aplicando un operador  $A^+$  a la izquierda en el problema de valores propios  $H_2$ , tenemos,

$$A^+H_2\varphi_n = A^+\varepsilon\varphi_n , \quad (4.13)$$

Uno inmediatamente da por entendido que

$$H_1(A^+\varphi_n) = \varepsilon(A^+\varphi_n) , \quad (4.14)$$

y de esta misma forma por comparación con (4.11) se muestra que, escogiendo las funciones propias de  $H_1$  con  $\phi_n = A^+\varphi_n$  da la isoespectralidad  $\varepsilon_n = \varepsilon$ . Ahora, por el operador  $A$  ( $A^+$ ) que es un operador diferencial de primer orden se destruye (crea) un nodo en el que la función propia actúa. Para el estado base  $H_1$  no tiene nodo, esto significa que la función propia de  $H_2$  no es normalizable, esta se obtiene aplicando un operador  $A$  a  $\phi_0$ . Físicamente significa que la ecuación  $A\phi_0 = 0$ , es también definición del estado base  $H_1$ , y es considerada no degenerada, un caso conocido como no ruptura de supersimetría como lo buscaba Witten. Como una consecuencia, los valores propios y la función propia normalizada de un par de Hamiltonianos de SUSY QM son relacionados por

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= \epsilon_{n+1}, \quad \epsilon_0 = 0, \\ \varphi_n &= \frac{A\phi_{n+1}}{\sqrt{\epsilon_{n+1}}}, \\ \phi_{n+1} &= \frac{A^+\varphi_n}{\sqrt{\epsilon_n}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, desde el punto de vista de aplicación estrictamente físico, es justo decir que no hay aplicaciones del todo reales que surjan de SUSY QM y sólo unas pocas consecuencias son reclamadas, pero en la actualidad se ha tomado a gran detalle el uso de supersimetría con aplicación en óptica bajo la ecuación de Helmholtz,<sup>24,31,32</sup> donde se buscan construir dispositivos que cumplan con estas características supersimétricas, y en la física nuclear donde se demostró la supersimetría, que establece ciertos vínculos entre las propiedades espectroscópicas de los diferentes núcleos.<sup>87</sup> Esto es similar a lo que ocurre con los modelos de campo cuánticos supersimétricos para los que la evidencia experimental de partículas compañeras supersimétricas es deficiente a pesar del considerable esfuerzo de búsqueda a lo largo de las últimas cuatro décadas lo que explica por qué el enfoque principal es la rotura de supersimetría.

### 4.3.2. Descripción supersimétrica de la ecuación de onda

Para entrar en detalle del tratamiento que se usa, en la descripción supersimétrica en óptica, se hace una descripción en términos de la ecuación de Helmholtz, tal que como se mencionó anteriormente, es semejante a la ecuación de Schrödinger en el régimen paraxial; siendo de esta manera una de las formas para analizar los potenciales descritos supersimetricamente, y relacionarlos con los perfiles de índice de refracción de las fibras ópticas y guías de onda como lo hicieron principalmente Chumakov y Wolf.<sup>31,32</sup>

Haciendo una recapitulación, para hacer esta descripción supersimétrica partimos de la ecuación de Schrödinger que como es ya bien sabido es la ecuación base de SUSY, y bajo las transformaciones mencionadas en secciones anteriores podemos hacer la analogía, con la que llegamos a la estructura supersimétrica en la ecuación óptica de Helmholtz para describir la propagación de luz en guías de onda, donde consideramos que una guía de onda es el

dispositivo que propaga un haz a lo largo del eje  $z$  como en la ec. 4.1 tal que podemos describir esta ecuación como

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = 0 ; \quad (4.15)$$

de manera que la propagación de la guía óptica se realiza a lo largo del eje “ $z$ ”. Donde la ecuación de onda se obtiene en 2+1 dimensiones, tal que  $\psi(\vec{r}) = \psi(x, z)$ , para soluciones en el espacio de frecuencias  $\nu$ , las cuales están relacionadas con el número de onda en el vacío  $k_0 = \nu/c$ , si la guía de onda se propaga en un medio dieléctrico, se puede considerar dependencia del índice de refracción  $n(x)$ , donde la constante de propagación está relacionada con este índice de refracción en la forma  $k^2 = \beta^2 - k_0^2 n(x)^2$ , por lo que la ecuación de Helmholtz es

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\beta^2 - k_0^2 n(x)^2) \right) \psi(x, z) = 0 , \quad (4.16)$$

Para hacer el análisis supersimétrico se puede representar al sistema como un sistema de dos ecuaciones de primer orden, para una función de onda de dos componentes de  $x$  y  $z$  coordenadas, como

$$\partial_z \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\beta & A^+ \\ A & -i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} , \quad (4.17)$$

tal que la ecuación (4.16) es descrita por los operadores de factorización  $A$  y  $A^+$ , como se hizo anteriormente, siendo  $k$  la constante de propagación, donde se pueden describir a los operadores de factorización como

$$A \equiv \partial_x - \Gamma(x) \quad (4.18)$$

$$A^+ \equiv \partial_x + \Gamma(x) \quad (4.19)$$

donde  $\Gamma(x)$  es la función que describe superpotenciales, siendo estas funciones, soluciones de la ecuación de Ricatti. Así desarrollando algebraicamente el sistema de ecuaciones (4.17), tenemos

$$\partial_z \psi_1 = i\beta \psi_1 + A^+ \psi_2 = i\beta \psi_1 + \partial_x \psi_2 + \Gamma(x) \psi_2 \quad (4.20)$$

$$\partial_z \psi_2 = A \psi_1 - i\beta \psi_2 = -\partial_x \psi_1 + \Gamma(x) \psi_1 - i\beta \psi_2 \quad (4.21)$$

Aplicando la segunda derivada en  $z$ , para obtener la forma funcional de la ecuación de Helmholtz, en términos de los superpotenciales llegamos a

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \psi_1 &= i\beta \partial_z \psi_1 + \partial_z (\partial_x \psi_2) + \partial_z \Gamma(x) \psi_2 \\ &= -\beta^2 \psi_1 - \partial_x^2 \psi_1 + \Gamma_x(x) \psi_1 + \Gamma(x)^2 \psi_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

y

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \psi_2 &= \partial_z (-\partial_x \psi_1) + \Gamma(x) \partial_z \psi_1 - i\beta \partial_z \psi_2 \\ &= -\beta^2 \psi_2 - \partial_x^2 \psi_2 - \Gamma_x(x) \psi_2 + \Gamma(x)^2 \psi_2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $\Gamma_x \equiv d\Gamma/dx$ . De forma que la segunda derivada de “ $z$ ” se puede describir como una matriz  $2 \times 2$  que es

$$\partial_z^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^2 + A^+ A & 0 \\ 0 & \beta^2 + A A^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Por lo que se tienen dos diferentes ecuaciones de Helmholtz para las componentes

$$\begin{aligned} (\partial_z^2 + \partial_x^2 + \beta^2 - \Gamma_x - \Gamma^2) \psi_1 &= 0 \\ (\partial_z^2 + \partial_x^2 + \beta^2 + \Gamma_x - \Gamma^2) \psi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

Si consideramos como solución, un par de funciones de onda comunes entre si con número de onda  $\kappa$  en la dirección  $z$ , se tiene que

$$\psi_{1,2}(x, z) = \phi_{1,2}(x) e^{-i\kappa z}, \quad (4.26)$$

sustituyendo estas funciones de onda en el sistema de ecuaciones (4.25) obtenemos

$$e^{-i\kappa z} [(\beta^2 - \kappa^2) \phi_1(x) + \partial_x^2 \phi_1(x) - \Gamma_x \phi_1(x) - \Gamma^2 \phi_1(x)] = 0 ,$$

y

$$e^{-i\kappa z} [(\beta^2 - \kappa^2) \phi_2(x) + \partial_x^2 \phi_2(x) + \Gamma_x \phi_2(x) - \Gamma^2 \phi_2(x)] = 0 .$$

Analizando ambos términos, observamos que, como se sabe  $e^{-i\kappa z}$  no puede ser cero, a menos que  $z$  se vaya al infinito, entonces

$$(\beta^2 - \kappa^2) \phi_1(x) + \partial_x^2 \phi_1(x) - \Gamma_x \phi_1(x) - \Gamma^2 \phi_1(x) = 0 ,$$

y

$$(\beta^2 - \kappa^2) \phi_2(x) + \partial_x^2 \phi_2(x) + \Gamma_x \phi_2(x) - \Gamma^2 \phi_2(x) = 0$$

Donde obtenemos que las ecuaciones de valores propios para las componentes son

$$\begin{aligned} (-\partial_x^2 + \Gamma_x + \Gamma^2) \phi_1 &= (\beta^2 - \kappa^2) \phi_1 \\ (-\partial_x^2 - \Gamma_x + \Gamma^2) \phi_2 &= (\beta^2 - \kappa^2) \phi_2 . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por lo que, análogamente usando la representación supersimétrica, se puede considerar a la componente  $\phi_1$  como la representación del “bosón” y  $\phi_2$  la representación del “fermión”. Y puede ser expresada por la matriz Hamiltoniana  $2 \times 2$  al igual que en la sección anterior, que cumple con las condiciones de los operadores de supercarga (4.9) y a su vez obedecen las relaciones de conmutación y anticonmutación (4.10), de esta manera se dice que  $H_1$  y  $H_2$  son isoespectrales, y pueden ser considerados operadores entrelazados, relacionados como  $H_1 = A^+A$  y  $H_2 = AA^+$ , por lo que

$$\begin{aligned} A^+A\phi_1 &= (\beta^2 - \kappa^2)\phi_1 \\ AA^+\phi_2 &= (\beta^2 - \kappa^2)\phi_2 . \end{aligned} \quad (4.28)$$

lo cual muestra el mismo espectro excepto en el estado base, recordando que este hecho se considera la ruptura de la supersimetría. Esto tendría que ser una solución normalizable de

una de las dos ecuaciones  $A\phi_1 = 0$  o  $A^+\phi_2 = 0$ . De esta forma, la SUSY conecta la solución de Helmholtz de dos diferentes guías de onda con perfiles de índice de refracción, entonces de (4.25) y la ecuación (4.16) tal que

$$v^2 n^2(x)/c^2 = \beta^2 \mp \Gamma_x - \Gamma^2, \quad (4.29)$$

Una manera sencilla de hacer un reconocimiento físico de la aplicación directa sería el de encontrar que los dos haces diferentes se encuentren en la misma guía de onda como es propuesto por Chumakov y Wolf.<sup>31</sup> Entonces se podría escoger un superpotencial que sea de la forma

$$\Gamma(x) = \gamma x;$$

por lo que

$$\Gamma_x \equiv d\Gamma/dx = \gamma,$$

Tras este cambio podemos ver que el sistema de ecuaciones (4.25), son representaciones para ecuaciones de Schrödinger para un oscilador armónico, problema del que se conocen sus soluciones, con los valores propios representando los niveles de energía desplazados

$$(-\partial_x^2 + \gamma^2 x^2) \phi_{1,2} = (\beta^2 \mp \gamma - \kappa^2) \phi_{1,2} \quad (4.30)$$

Significativamente, vemos que la correspondencia de la ecuación de Helmholtz, es

$$v^2 n^2(x)/c^2 = \beta^2 \mp \gamma - \gamma^2 x^2 \quad (4.31)$$

con el mismo índice de refracción. Los autores en este artículo mencionan que en ausencia de material de dispersión,  $n$  es independiente de la frecuencia  $v$ ; lo que conlleva a tener un índice de refracción elíptico lo que aproxima a tener un índice de refracción en el régimen paraxial.

# Capítulo 5

## Supersimetría paramétrica en bloques de guías de onda

Los métodos algebraicos de SUSY-QM ha sido aplicados en la actualidad en gran medida de manera directa en óptica física en el régimen paraxial de Helmholtz, debido a que la ecuación que lleva el mismo nombre en este régimen presenta grandes similitudes matemáticas, como se presento con anterioridad. Todo este desarrollo supersimétrico comienza a mitades de los 90's con Chumakov y Wolf,<sup>31</sup> posteriormente en 2003 Moayedi y Rostami usaron SUSY para descripción modal de haces de luz en guías de onda inhomogéneas,<sup>88</sup> y un mayor desarrollo en esta área se presenta en 2013 cuando Miri y colaboradores hacen una descripción de dispositivos ópticos bajo estas técnicas supersimétricas.<sup>24</sup>

Recientemente, se han usado aproximaciones supersimétricas para describir propagación de los modos transversal eléctrico y magnético en guías de onda planas como es en caso del trabajo de Laba y Tkachuk.<sup>32,88</sup> Aquí nosotros proponemos una extensión de sus resultados para usar supersimetría estrictamente isoespectral.

## 5.1. Análisis modal de bloques de guía de ondas

La propagación de ondas electromagnéticas en una guías de onda se da cuando un haz es confinado entre dos placas paralelas de esta guía, es decir  $x = \pm a$ ; esta estructura consiste de una capa de alto índice de refracción ( $-a < x < a$ ) insertada entre dos capas de material con índice de refracción ligeramente menor al del centro (Fig. 5.1). El bloque de guía de onda, guía el haz por reflexión total interna entre las interfaces.<sup>89</sup>

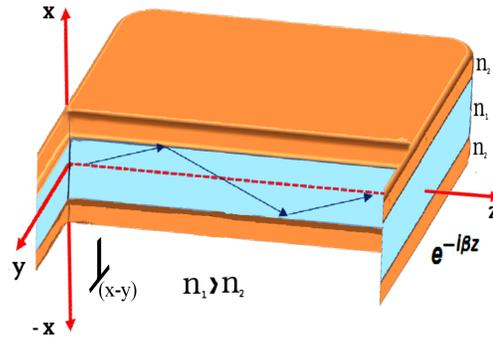


FIGURA 5.1: Guía de onda donde el índice de refracción tiene una discontinuidad de paso en  $x = \pm a$  y las regiones  $|x| < a$  y  $a < |x| < a + b$  son conocidas como el núcleo y el revestimiento, respectivamente. El índice de refracción del núcleo  $n_1$  es mayor que el índice de refracción del revestimiento  $n_2$ . Se asume que el medio de propagación es infinito en dirección  $y$ .

Se considera que la propagación de ondas electromagnéticas en guías de onda es isotrópica y homogénea es decir que esta libre de cargas en la superficie.<sup>90</sup> En tal caso, por simplicidad los campos eléctrico y magnético son armónicos en el tiempo,  $\vec{E} = \vec{E}e^{i\omega t}$  y  $\vec{H} = \vec{H}e^{i\omega t}$ , respectivamente, al igual que en el capítulo 2, tenemos que las ecuaciones de Maxwell están escritas de la forma

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}, \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\epsilon\vec{E}, \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.4)$$

donde  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  y  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , mientras la permitividad y la permeabilidad son funciones dependientes de la coordenada transversal  $x$  representadas como  $\mu = \mu_0 \mu(x)$  y  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon(x)$ , respectivamente. De esta forma los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son obtenidos mediante los rotacionales de las ecuaciones (5.1) y (5.2).

Como hemos trabajado anteriormente, escogemos el eje  $z$  como el eje de propagación de los modos transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM), y la guía de onda se asume uniforme en forma y tamaño a lo largo de la dirección de propagación. A su vez, los campos también se asumen que son armónicos especialmente durante su propagación,

$$\vec{E} = \vec{E}(x)e^{-i\beta z}, \quad (5.5)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x)e^{-i\beta z}, \quad (5.6)$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación longitudinal, la cual en general es función de frecuencias y de la geometría de las guías de onda. Tal que el modo TE (también llamado modo  $H$ ) es caracterizado por  $E_z = 0$  y  $H_z \neq 0$ , y el modo TM (también llamado modo  $E$ ) se caracteriza por  $E_z \neq 0$  y  $H_z = 0$ . Para estas dos clases de modos se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \left( \frac{\mu'}{\mu} \right) \frac{\partial E_y}{\partial x} + (\omega^2 \epsilon \mu - \beta^2) E_y = 0, \quad (5.7)$$

y

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \left( \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right) \frac{\partial H_y}{\partial x} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) H_y = 0, \quad (5.8)$$

respectivamente. Definiendo el siguiente cambio de variable para cada modo

$$E_y(x) = -\sqrt{\mu(x)} \Psi_h(x)$$

y

$$H_y(x) = -\sqrt{\epsilon(x)} \Psi_e(x)$$

a través del mismo, las ecuaciones (5.7) y (5.8) pueden ser reducidas a ecuaciones estacionarias de Helmholtz, de modo que el cuadrado de la constante de propagación para este caso juega el papel de eigenvalores para los modos<sup>91</sup>

$$-\psi_h'' + \left[ -\left(\frac{1}{2\mu}\right)' + \left(\frac{1}{2\mu}\right)^2 - k_0^2 n^2(x) \right] \psi_h = -\beta^2 \psi_h, \quad (5.9)$$

$$-\psi_e'' + \left[ -\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)' + \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 - k_0^2 n^2(x) \right] \psi_e = -\beta^2 \psi_e. \quad (5.10)$$

donde  $\omega^2 \mu(x) \varepsilon(x) \equiv k_0^2 n^2(x)$ , con  $n^2 = \varepsilon \mu$  siendo el índice de refracción y  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  es el vector de onda en espacio libre.

De esta manera, se define el índice de refracción como<sup>88</sup>

$$\mu(x) \varepsilon(x) \equiv n^2(x) \quad (5.11)$$

donde se considera que el bloque de guía de onda es simétrico, tal que

$$n(x) = \begin{cases} n_1(x) & \text{for } |x| \leq a \\ n_2(x) \rightarrow cte. & \text{for } |x| > a \end{cases} \quad (5.12)$$

con  $n_1(x)$  que es el máximo índice de refracción del centro de la guía de onda. Dado que la propagación se realiza en el núcleo del índice de refracción

$$n_1^2(x) = n_0^2 - s_2 f(x);$$

y  $n_0$  es la parte constante del perfil del índice de refracción,  $s_2 = \frac{1}{2} \frac{n_0^2 - n_2^2}{n_0^2}$  es una cantidad adimensional; tal que  $s_2 > 0$  es el decremento cuadrático de la tasa del índice por unidad de longitud; y  $f(x)$  puede ser cualquier función dependiente del perfil del índice de refracción. De acuerdo a la teoría de guías de onda, diferentes  $f(x)$  corresponden a diferentes modos de guía de onda.<sup>92</sup>

Haciendo un cambio de variable a una cantidad adimensional ( $\chi$ ) tenemos

$$\chi = k_0 x \quad (5.13)$$

recordando que  $x$  es la longitud transversal, y  $k_0$  es el vector de onda. Usando esta nueva variable adimensional obtenemos

$$-\psi_h''(\chi) + (-\Gamma_1' + \Gamma_1^2 + s_2 f(\chi)) \psi_h(\chi) = \kappa^2 \psi_h(\chi), \quad (5.14)$$

$$-\psi_e''(\chi) + (-\Gamma_2' + \Gamma_2^2 + s_2 f(\chi)) \psi_e(\chi) = \kappa^2 \psi_e(\chi), \quad (5.15)$$

donde  $\Gamma_1(\chi) = \frac{1}{2} \frac{\mu'}{\mu}$ ,  $\Gamma_2(\chi) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon'}{\epsilon}$  y  $\kappa^2 = \left( n_0^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2} \right)$ , con las primadas indicando derivadas con respecto a  $(\chi)$ .

En este desarrollo también se podría obtener propagación fuera del núcleo, tal que en el revestimiento tendríamos

$$-\psi_h''(\chi) + \rho^2 \psi_h(\chi) = 0, \quad (5.16)$$

$$-\psi_e''(\chi) + \rho^2 \psi_e(\chi) = 0, \quad (5.17)$$

siendo  $\rho^2 = \left( \frac{\beta^2}{k_0^2} - n_0^2 \right)$ , porque las condiciones de frontera corresponden al hecho de que la componente longitudinal de los campos debe de ser continua sobre la frontera. Así,  $E_y$  debe de ser continua para  $x = \pm a$ ; teniendo solución

$$\psi_{h,e,clad} = C_1 \cos(\kappa a) \exp[-\rho(|x| - a)], \quad (5.18)$$

tal que la relación entre  $\kappa$  y  $\rho$  es

$$\tan(\kappa a) = \frac{\rho}{\kappa} \quad (5.19)$$

esta ecuación es denominada la ecuación trascendental y determina la constante de propagación de los modos guiados TE y TM.<sup>89</sup> El coeficiente  $C_1$  puede ser relacionado con la potencia que llevan los modos guiados. Para  $n_1 > n_2$ , pero  $\kappa^2$  y  $\rho^2$  pueden ser positivos. Cuando  $\rho^2 > 0$  el campo eléctrico fuera del bloque guiado decae exponencialmente y uno obtiene modos guiados; por otro lado para  $\rho^2 < 0$  el campo es oscilatorio fuera del bloque y uno puede obtener modos radiados.

## 5.2. Estructura supersimétrica o modos de factorización

siendo que (5.14, 5.15) pueden ser factorizadas como  $A^+A\psi_{h,e} = \kappa^2\psi_{h,e}$  tal que los operadores son definidos similares a los obtenidos en el capítulo anterior como<sup>29,31</sup>

$$A^+ = -\partial_x + \Gamma_j + \phi_j, \quad (5.20)$$

$$A = \partial_x + \Gamma_j + \phi_j, \quad (5.21)$$

con  $j = 1, 2$  para los modos  $H$  y  $E$ , respectivamente; lo que implica que la función  $\phi_j(x)$  es determinada por la siguiente ecuación de Riccati

$$-\phi_j' + 2\Gamma_j\phi_j + \phi_j^2 = s_2f(\chi), \quad (5.22)$$

para perfiles particulares de  $f(\chi)$  del índice de refracción. Por otro lado,  $\psi_{h,e}(\chi)$  nos da una distribución de modos y  $\kappa$  nos genera los valores propios de los modos, donde sabemos que la ecuación de Schrödinger soporta  $M$  estados excitados para un potencial específico, entonces por analogía la estructura  $f(\chi)$  soportará un total de  $M$  modos guiados,  $\psi_{h,e;1}(\chi)$ ,  $\psi_{h,e;2}(\chi)$ ,  $\dots$ ,  $\psi_{h,e;m}(\chi)$  con eigenvalores  $\kappa_1^{(I)} > \kappa_2^{(I)} > \dots > \kappa_m^{(I)}$  con  $m$  positivo y entero. Por lo que la factorización del primer modo es  $A^+A\psi_{h,e;1} = (\kappa_1^{(I)})^2\psi_{h,e}$ .

De manera análoga a SUSY podemos aplicar los operadores de factorización invirtiendo el orden, es decir,  $AA^+\tilde{\psi}_{h,e} = (\kappa_1^{(P)})^2\tilde{\psi}_{h,e}$ , como en el problema de eigenvalores obteniendo así isoenergía donde  $\kappa_1^{(I)} = \kappa_1^{(P)}$  y de esta manera podemos obtener la ecuación compañera supersimétrica, la cual nos proporciona una estructura compañera que soportará un modo menos que la estructura original,<sup>93</sup>  $\tilde{\psi}_{h,e;1}(\chi)$ ,  $\tilde{\psi}_{h,e;2}(\chi)$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{\psi}_{h,e;m-1}(\chi)$  con eigenvalores  $\kappa_1^{(P)} > \kappa_2^{(P)} > \dots > \kappa_{m-1}^{(P)}$ , con  $m \geq 1$ .

$$-\tilde{\psi}_{h,e}'' + \left(\Gamma_j^2 + \Gamma_j' + \phi_j' + 2\Gamma_j\phi_j + \phi_j^2\right)\tilde{\psi}_{h,e} = \left(\kappa_1^{(P)}\right)^2\tilde{\psi}_{h,e}, \quad (5.23)$$

que también puede ser escrita como

$$-\tilde{\psi}_{h,e}'' + \left(\Gamma_j^2 + \Gamma_j' + s_2f(\chi) + 2\phi_j'\right)\tilde{\psi}_{h,e} = \left(\kappa_1^{(P)}\right)^2\tilde{\psi}_{h,e}. \quad (5.24)$$

Esta ecuación compañera solo es válida para propagación de modos  $\tilde{\psi}_{h,e}$  en una guía de onda diferente (compañera SUSY), a diferencia de lo propuesto por Chumakov y Wolf, siendo que aquí obtenemos un índice de refracción dado por

$$\tilde{n}^2(\chi) = s_2 f(\chi) + 2\phi'_j. \quad (5.25)$$

En esta última aproximación, obtenemos una relación de Darbux<sup>94</sup> estrictamente iso-espectral en el índice de refracción.

El tratamiento supersimétrico es idéntico a mecánica cuántica. Donde la forma matricial de los operadores de factorización (las supercargas) son

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

$$Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Con los operadores de Helmholtz para cada modo transversal que pueden ser escritos como

$$\mathcal{H}_1 = A^+A, \quad (5.28)$$

$$\mathcal{H}_2 = AA^+, \quad (5.29)$$

los cuales al igual que en SUSY-QM son componentes diagonales del operador matricial de Helmholtz

$$\mathcal{H}_s = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & AA^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

que satisface la superálgebra cerrada

$$[\mathcal{H}_s, Q^\pm] = 0, \quad \{Q^-, Q^+\} = \mathcal{H},$$

$$\{Q^-, Q^-\} = \{Q^+, Q^+\} = 0,$$

Notando que  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  al igual que SUSY-QM son isoespectrales por que los operadores de supercargas conmutan con  $\mathcal{H}_s$ . Aplicando el esquema supersimétrico, se obtiene el desplazamiento del modo fundamental para  $\mathcal{H}_1$  del cual tenemos que eliminar la contribución de las fluctuaciones de este modo. Por lo que, el espectro supersimétrico del segundo operador de Helmholtz para  $m \geq 1$  es

$$\mathcal{H}_1 \psi_{h,e;m} = A^+ A \psi_{h,e;m} = (\kappa_m^{(I)})^2 \psi_{h,e;m} \quad (5.31)$$

de esta manera podemos escribir el operador compañero SUSY  $\mathcal{H}_2$ , es decir,

$$\mathcal{H}_2(A\psi_{h,e;m}) = AA^+ A\psi_{h,e;m} = (\kappa_m^{(P)})^2 (A\psi_{h,e;m}) \quad (5.32)$$

por aplicación del operador  $A$  del lado izquierdo en (5.31). De tal manera que si uno usa las funciones de onda  $\tilde{\psi}_{h,e;m} = A\psi_{h,e;m}$  en el problema de eigenvalores  $\mathcal{H}_2 \tilde{\psi}_{h,e;m} = (\kappa_m^{(P)})^2 \tilde{\psi}_{h,e;m}$  entonces se dice que es isoespectral al problema de eigenvalores para  $\mathcal{H}_1$ , bajo la consideración  $(\kappa_m^{(P)} = \kappa_m^{(I)})$ . Viceversa, aplicando el operador  $A^+$  del lado izquierdo al problema de eigenvalores para  $\mathcal{H}_2$ , es decir,

$$A^+ \mathcal{H}_2 \tilde{\psi}_{h,e;m} = A^+ (\kappa_m^{(P)})^2 \tilde{\psi}_{h,e;m} , \quad (5.33)$$

uno inmediatamente puede obtener el arreglo

$$\mathcal{H}_1(A^+ \tilde{\psi}_{h,e;m}) = (\kappa_m^{(I)})^2 (A^+ \tilde{\psi}_{h,e;m}) \quad (5.34)$$

por lo tanto, por comparación con (5.31) se muestra que escogiendo las funciones propias de  $\mathcal{H}_1$  como  $\psi_{h,e} = A^+ \tilde{\psi}_{h,e}$  se obtiene isomodoespectralidad en  $\kappa_m^{(I)} = \kappa_m^{(P)}$ . Para esta consideración, el operador  $A$  y/o  $(A^+)$  es un operador diferencial de primer orden que también destruye (crea) un nodo en las funciones propias en las que el operador actúa.<sup>29</sup> Para  $m = 1$  denominado modo fundamental  $\mathcal{H}_1$  es dado por  $A\tilde{\psi}_{h,e;1} = 0$ , este es considerado modo no degenerado, un caso conocido como “sin ruptura de supersimetría”. Sin embargo, para otros valores  $m > 1$ , estos valores igualmente construyen la ecuación de modos de una guía compañera supersimétrica con modos propios

$$\kappa_m^{(P)} = \kappa_{m+1}^{(I)}; \quad (5.35)$$

el modo fundamental corresponde al eigenvalor  $(\kappa_1^{(I)})^2 = 0$ , este ocurre cuando  $\beta^2 = k_0^2 n_0^2$ . La ecuación de eigenvalores para este caso es reducida como

$$A\psi_{h,e;1} = 0, \quad (5.36)$$

de donde obtenemos

$$\phi_j = - \left( \frac{d}{d\chi} \ln(\psi_{h,e;1}) + \Gamma_j \right), \quad (5.37)$$

Con la función de onda compañera relacionada como

$$\tilde{\psi}_{h,e;m} = \frac{A^+ \psi_{h,e;m+1}}{\kappa_{m+1}^{(I)}}, \quad (5.38)$$

### 5.3. Aplicación de perfiles de índice de refracción para $f(\chi)$ como ley de potencias

Los bloques de guías de onda son caracterizados por una distribución del índice de refracción (5.11) que nos proporciona una ecuación de onda que se puede resolver analíticamente para los modos transversal eléctrico TE o modo “H” y transversal magnético TM o modo “E”, si consideramos un caso específico, donde el material de la guía de onda es un dieléctrico, material donde la permeabilidad tiene un valor constante  $\mu = 1$ , tal que el índice de refracción solo depende de la permitividad  $\epsilon$  de la forma

$$n_1^2(\chi) = \mu(\chi)\epsilon(\chi) = \epsilon(\chi)$$

También, si suponemos que  $f(\chi) = \chi^\alpha$  es similar a las fibras ópticas, donde  $\alpha$  denota la clase de perfil de índice de refracción,<sup>95</sup> para  $\alpha = 0$  el perfil de índice de refracción es constante, para  $\alpha = 1$  el perfil es un perfil triangular, y para  $\alpha > 1$  el perfil es gradual, en un caso específico usamos  $\alpha = 2$  donde el perfil de índice de refracción es parabólico, y en otro caso cuando  $\alpha \rightarrow \infty$  el perfil de índice de refracción llega a tener la forma de un perfil

escalón. Cuando  $\chi \rightarrow \infty$  el índice de refracción  $n_1^2$  llega a ser negativo,<sup>89,96</sup> esto ocurre para casos de gas ionizado (plasma).<sup>97</sup> Entonces, mientras el haz es confinado en la región para la cual  $s_2\chi^\alpha \ll n_0$ .

Ahora nosotros trabajamos con los modos de manera separada, primero iniciamos con el modo TE, para los tres diferentes perfiles de índice de refracción  $\alpha = 0, 1, 2$ , para posteriormente continuar con el análisis de el modo TM, para los mismos perfiles, en cada caso se usan las soluciones para cada tipo de ecuación propuesta.<sup>98</sup>

### 5.3.1. Modo TE

Analizamos el modo TE en este caso  $\Gamma_1 = 0$ , entonces la ecuación (5.14) tiene la forma

$$-\psi_h''(\chi) + (s_2\chi^\alpha)\psi_h(\chi) = \kappa^2\psi_h(\chi) , \quad (5.39)$$

**Caso  $\alpha = 0$**

$$\psi_{h,\alpha=0}''(\chi) + (\kappa^2 - s_2)\psi_{h,\alpha=0}(\chi) = 0 , \quad (5.40)$$

con solución

$$\psi_{h,\alpha=0}(\chi) = C_1 \sin\left(\chi\sqrt{\kappa^2 - s_2}\right) + C_2 \cos\left(\chi\sqrt{\kappa^2 - s_2}\right) , \quad (5.41)$$

Las condiciones sobre la constante de propagación pueden ser permitidas para los valores de  $\beta$  para encontrar la solución de acuerdo con senos y cosenos según la clase, coseno para los enteros impares y seno para los enteros pares, y sus valores propios se caracterizan en las constantes de propagación  $\eta_m = \frac{\beta_m^2}{k_0^2}$

$$\eta_m = n_0^2 - s_2 - \left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2}\right) ; \quad (5.42)$$

en adición al valor del tamaño del núcleo ( $2a$ ) es dado en términos de los índices de refracción del revestimiento donde el tamaño de  $a$  es

$$a < \frac{m\pi}{2\sqrt{n_0^2 - s_2}}, \quad (5.43)$$

este depende de los valores de  $m$ , tal que  $m$  nos dará el número de eigenmodos que soporta la guía .

### Modo TE, caso $\alpha = 0$

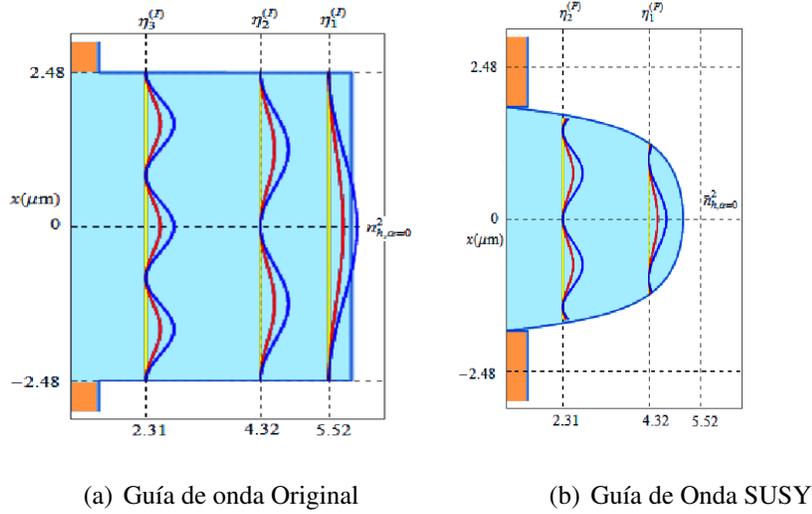


FIGURA 5.2: Guías de onda original y supersimétrica para  $\alpha = 0$ , del modo TE; con  $n_0 = 2.5$ ,  $n_2 = 1.5$ ,  $2a$  y  $a = 2.48$  embebida en un sustrato de un material con índice de refracción  $n_1^2 = n_0^2 - s_2$ , y el parámetro  $C_1 = 0.5, 0.7$ .

### Caso $\alpha = 1$

$$\Psi''_{h,\alpha=1}(\chi) - (s_2\chi - \kappa^2)\Psi_{h,\alpha=1}(\chi) = 0, \quad (5.44)$$

con solución

$$\Psi_{h,\alpha=1}(\chi) = C_1 \text{Ai}(\xi) + C_2 \text{Bi}(\xi), \quad (5.45)$$

donde  $\xi = s_2^{-2/3}(s_2\chi - \kappa^2)$ , la segunda clase de solución  $\text{Bi}(\xi)$  es físicamente imposible, por esto sólo se usa la solución  $C_1 \text{Ai}(\xi)$ ,

con eigenvalores

$$\eta_m = n_0^2 - \left( \frac{3\pi s_2}{8} (4m-1) \right)^{2/3}; \quad (5.46)$$

el valor del tamaño del núcleo es

$$a < \frac{1}{s_2^{1/3}} \left( \frac{3}{8} (4m-1) \pi \right)^{2/3}. \quad (5.47)$$

### Modo TE, caso $\alpha = 1$

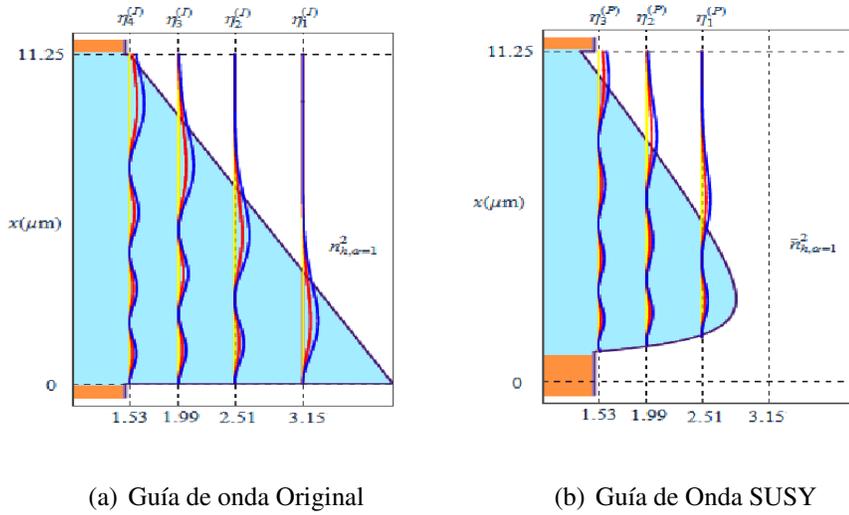


FIGURA 5.3: Guías de onda original y supersimétrica para  $\alpha = 1$ , del modo TE; con  $n_0 = 2$ ,  $n_2 = 1.5$ , y  $a = 11.25$  embebida en un sustrato de un material con índice de refracción  $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi$ , y el parámetro  $C_1 = 0.5, 0.7$ .

### Caso $\alpha = 2$

$$\Psi''_{h,\alpha=2}(\chi) + (\lambda - \xi^2) \Psi_{h,\alpha=2}(\chi) = 0, \quad (5.48)$$

donde  $\xi = s_2^{1/4} \chi$  y  $\lambda = \frac{\kappa^2}{\sqrt{s_2}}$  con solución

$$\Psi_{h,\alpha=2}(\chi) = C_1 H_m(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right), \quad (5.49)$$

donde  $H_m(z) = (-1)^m \exp(z^2) \frac{d^m}{dx^m} \exp(-z^2)$  son los polinomios de Hermite de orden  $m$ ; con eigenvalores

$$\eta_m = n_0^2 - \sqrt{s_2}(2m+1), \quad (5.50)$$

el valor del tamaño del núcleo

$$a < \frac{\sqrt{2m+1}}{s_2^{1/4}}. \quad (5.51)$$

### Modo TE, caso $\alpha = 2$

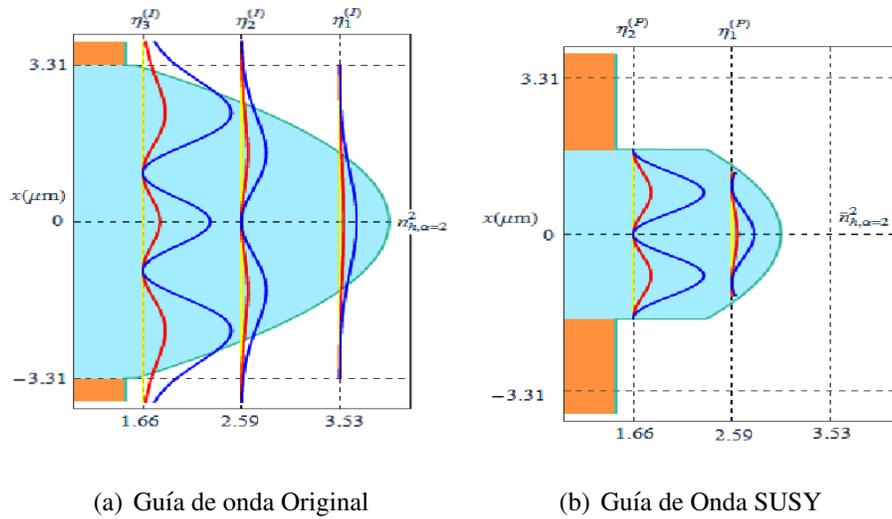


FIGURA 5.4: Guías de onda original y supersimétrica para  $\alpha = 2$ , del modo TE; con  $n_0 = 2$ ,  $n_2 = 1.5$ ,  $2a$  y  $a = 3.31$  embebida en un sustrato de un material con índice de refracción  $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi^2$ , y el parámetro  $C_1 = 0.1, 0.3$ .

### 5.3.2. Modo TM

Nosotros analizamos el modo TM de la misma forma para los modos TE en este caso  $\Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon'}{\epsilon}$ , entonces la ecuación (5.15) toma la forma

$$\begin{aligned}
-\Psi_e''(\chi) + \left( -\frac{1}{2} \frac{s_2}{n_0^2} \left( \frac{-\alpha \chi^{\alpha-1}}{1 - \frac{s_2}{n_0^2} \chi^\alpha} \right)' + \left( \frac{1}{2} \frac{s_2}{n_0^2} \right)^2 \left( \frac{-\alpha \chi^{\alpha-1}}{1 - \frac{s_2}{n_0^2} \chi^\alpha} \right)^2 \right. \\
\left. + s_2 \chi^\alpha \right) \Psi_e(\chi) = \kappa^2 \Psi_e(\chi) ,
\end{aligned} \tag{5.52}$$

**Caso  $\alpha = 0$**

$$\Psi_{e,\alpha=0}''(\chi) + (\kappa^2 - s_2) \Psi_{e,\alpha=0}(\chi) = 0 , \tag{5.53}$$

con solución

$$\Psi_{e,\alpha=0}(\chi) = C_1 \sin \left( \chi \sqrt{\kappa^2 - s_2} \right) + C_2 \cos \left( \chi \sqrt{\kappa^2 - s_2} \right) , \tag{5.54}$$

y sus eigenvalores son

$$\eta_m = n_0^2 - s_2 - \left( \frac{m^2 \pi^2}{4a^2} \right) ; \tag{5.55}$$

la cual es similar en este caso al modo TE; y su valor  $a$  es

$$a < \frac{m\pi}{2\sqrt{n_0^2 - s_2}} . \tag{5.56}$$

**Modo TM, caso  $\alpha = 0$**

**Caso  $\alpha = 1$**

$$\Psi_{e,\alpha=1}''(\chi) - \left( s_2 \chi - \kappa^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{s_2}{n_0^2} \right)^2 \right) \Psi_{e,\alpha=1}(\chi) = 0 , \tag{5.57}$$

en esta parte hemos aplicado una expansión en series para el segundo y tercer término en (5.52), tal que al hacer este desarrollo los términos de  $\left( \frac{s_2}{n_0^2} \right)^3 \ll 1$  llegan a ser despreciables, por lo que la solución es

$$\Psi_{e,\alpha=1}(\chi) = C_1 \text{Ai}(\xi) , \tag{5.58}$$

con  $\xi = s_2^{-2/3} (s_2 x - \lambda)$  y  $\lambda = \kappa^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{s_2}{n_0^2} \right)^2$ ; con eigenvalores

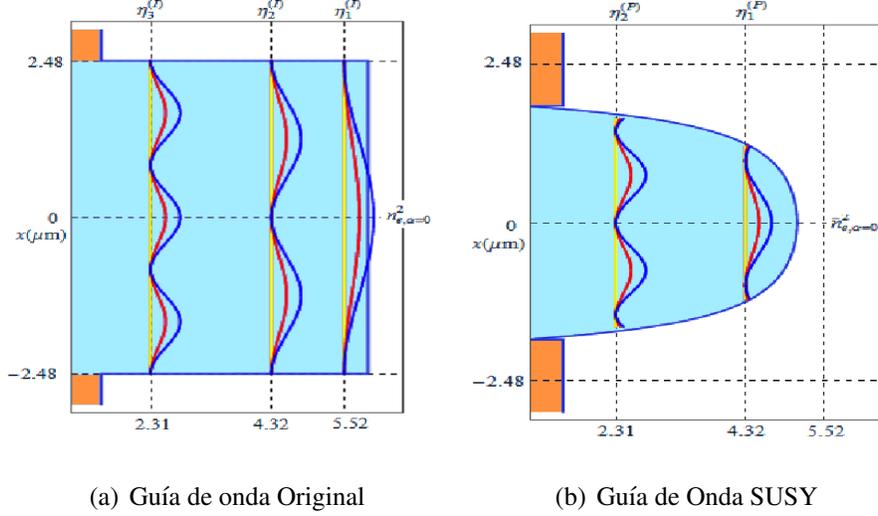


FIGURA 5.5: Guías de onda original y supersimétrica para  $\alpha = 0$ , del modo TM; con  $n_0 = 2.5$ ,  $n_2 = 1.5$ , y  $a = 2.48$  embebida en un sustrato de un material con índice de refracción  $n_1^2 = n_0^2 - s_2$ , y el parámetro  $C_1 = 0.5, 0.7$ .

$$\eta_m = n_0^2 - \left( \frac{3\pi s_2}{8} (4m - 1) \right)^{2/3} - \frac{3}{4} \left( \frac{s_2}{n_0^2} \right)^2 ; \quad (5.59)$$

el tamaño del núcleo es

$$a < \frac{1}{s_2^{1/3}} \left( \frac{3}{8} (4m - 1) \pi \right)^{2/3} . \quad (5.60)$$

**Modo TM, caso  $\alpha = 1$**

**Caso  $\alpha = 2$**

$$\Psi''_{e,\alpha=2}(\chi) + (\lambda - \xi^2) \Psi_{e,\alpha=2}(\chi) = 0 , \quad (5.61)$$

donde  $\xi = b^{1/4} \chi$ ,  $\lambda = \frac{\kappa^2 - \left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)}{\sqrt{b}}$  y  $b = 3 \left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2 + s_2$  con la solución

$$\Psi_{e,\alpha=2}(\chi) = C_1 H_m(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^2\right) , \quad (5.62)$$

de igual manera que para los modos TE en el caso de  $\alpha = 2$ ,  $H_m(z) = (-1)^m \exp(z^2) \frac{d^m}{dz^m} \exp(-z^2)$  son los polinómios de Hermite de orden  $m$ , donde también hemos aplicado expansión en se-

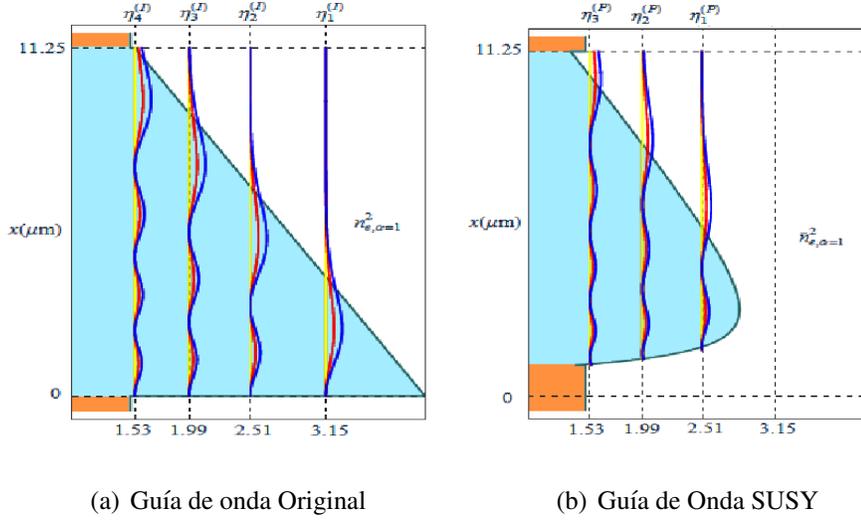


FIGURA 5.6: Guías de onda original y supersimétrica para  $\alpha = 1$ , del modo TM; con  $n_0 = 2$ ,  $n_2 = 1.5$ , y  $a = 11.25$  embebida en un sustrato de un material con índice de refracción  $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi$ , y el parámetro  $C_1 = 0.5, 0.7$ .

ries, y los términos  $\left(\frac{s_2}{n_0}\right)^3 \ll 1$  son despreciables.

Los eigenvalores son

$$\eta_m = n_0^2 - \sqrt{b}(2m+1) - \left(\frac{s_2}{n_0^2}\right), \quad (5.63)$$

y el tamaño del núcleo por el valor de  $a$  es

$$a < \frac{\sqrt{2m+1}}{b^{1/4}}. \quad (5.64)$$

Ambas soluciones de los modos transversal magnético y transversal eléctrico, nos dan para cada caso representado su compañero supersimétrico y su correspondiente índice de refracción.

### Modo TM, caso $\alpha = 2$

Como se muestra en las figuras (5.2,5.3,5.4) y (5.5,5.6, 5.7) para el modo transversal eléctrico o modo  $H$  y para el modo transversal magnético o modo  $E$ , notamos que el comportamiento de ambos modos es similar para cada caso con respecto al índice de refracción

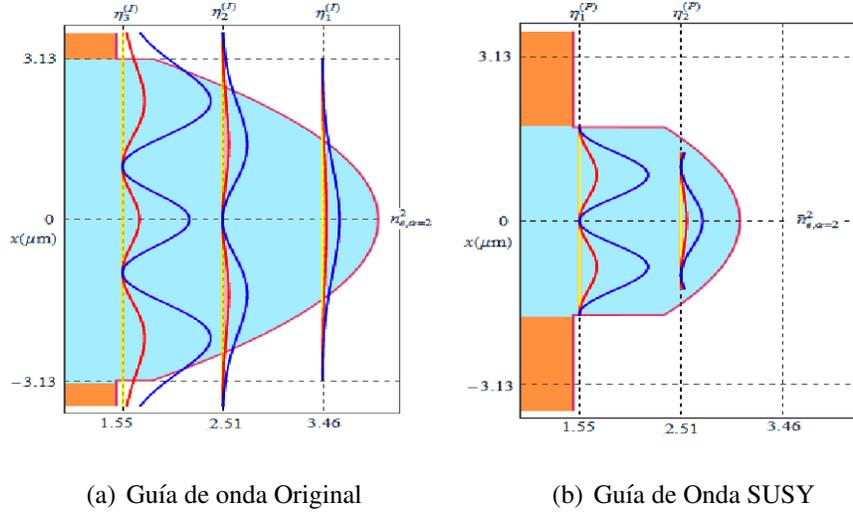
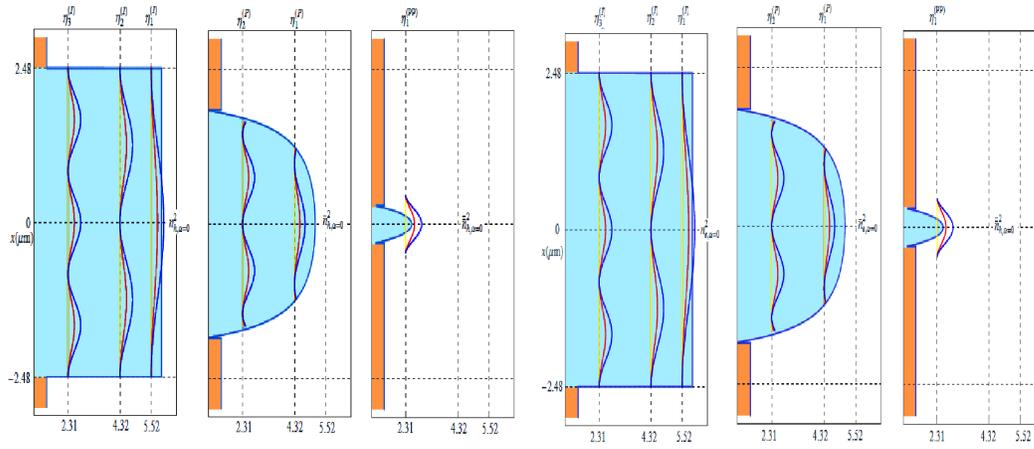


FIGURA 5.7: Guías de onda original y supersimétrica para  $\alpha = 2$ , del modo TM; con  $n_0 = 2$ ,  $n_2 = 1.5$ , y  $a = 3.31$  embebida en un sustrato de un material con índice de refracción  $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi^2$ , y el parámetro  $C_1 = 0.2, 0.4$ .

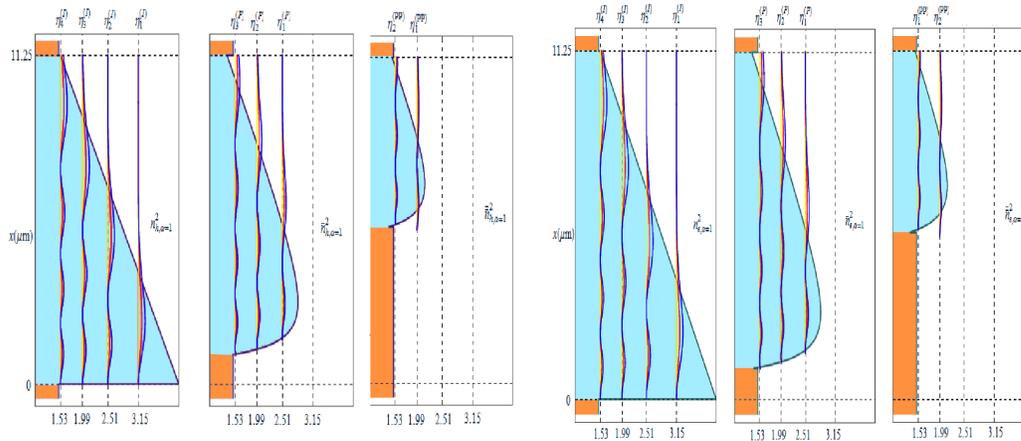
gradual donde se ve que sólo para el modo transversal magnético se nota una pequeña disminución en el tamaño del núcleo, esto es debido a la aproximación utilizada en la expansión en series en la solución, y también se observa que los perfiles supersimétricos de índice de refracción son todos parabólicos para todos los casos con este comportamiento peculiar en la frontera, se puede notar también que las guías de onda compañeras muestran una reducción del tamaño del núcleo, lo que nos lleva a pensar que las guías de onda obtenidas bajo el tratamiento supersimétrico un modo menos que las guías originales debido a que no contienen el modo fundamental, y a su vez tienden a serán más delgadas. El parámetro  $C$  en todos los caso es un parámetro de escala que nos indica la amplitud de los modos introducidos en las guías de onda tanto originales como supersimétricas. Bajo este método podemos hacer un subtratamiento supersimétrico a las guías supersimétricas lo cual nos lleva a obtener un tratamiento jerárquico supersimétrico, esto tecnológicamente significa un filtrado de modos propios, mediante las estructuras supersimétricas. Esta relación es representada en las siguientes figuras, para cada caso, tanto en los modos TE como en los modos TM.



(a) Modo TE,  $\alpha = 0$

(b) Modo TM,  $\alpha = 0$

FIGURA 5.8: Construcción Jerárquica para los modos TE y TM en el caso  $\alpha = 0$



(a) Modo TE,  $\alpha = 1$

(b) Modo TM,  $\alpha = 1$

FIGURA 5.9: Construcción Jerárquica para los modos TE y TM en el caso  $\alpha = 1$

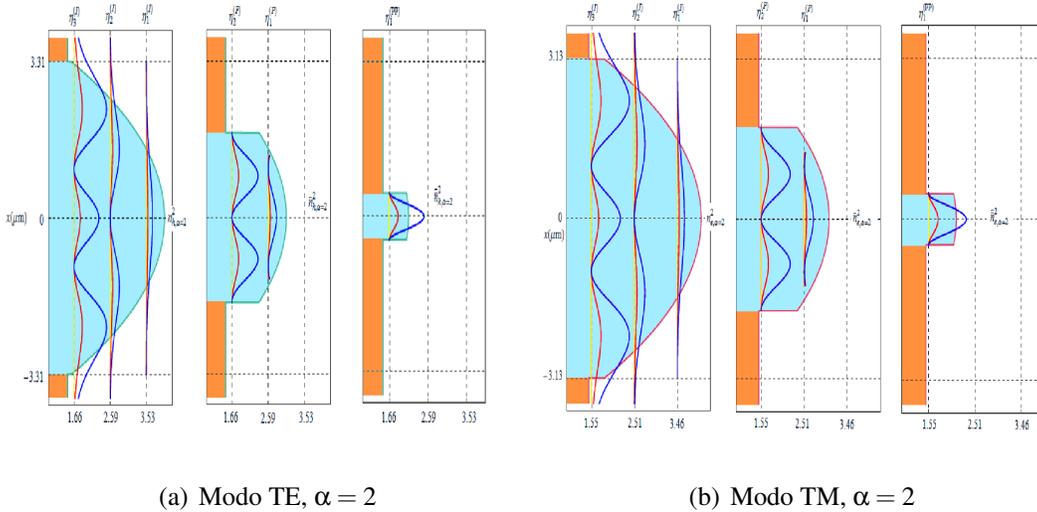


FIGURA 5.10: Construcción Jerárquica para los modos TE y TM en el caso  $\alpha = 2$

## 5.4. Guías de onda multicapa

Como se ha mencionado anteriormente, las guías de onda, en su mayoría son conocidas como guías de onda dieléctricas, y son estructuras que se usan para confinar y guiar la luz en estos dispositivos ópticos. Principalmente las guías de onda son estructuras planas creadas de películas delgadas o franjas de algún material.

Por otra parte, como se ha mencionado en este capítulo se trabaja con estructuras en forma de bloque de guías de onda, tal que, se tenga una propagación controlada por los materiales usados, se considera una guía de onda multicapa a un bloque de al menos tres capas, y estas son separadas por algún material;<sup>99</sup> en específico nosotros utilizaremos un arreglo en bloque de guías de onda, pero con características superimétricas, en donde se observa que, el perfil de índice de refracción compañero tiene la capacidad de filtrar un modo menos en la nueva guía en comparación con la guía de onda original. Aquí aplicaremos dos tipos característicos de guías las cuales son análogas a las fibras ópticas, con la diferencia que en lugar de guía cilíndrica se hará una estructura en bloque de placas paralelas, las cuales son: i) las guías de onda “M”<sup>100</sup> y ii) las guías de onda “W”<sup>101</sup> que son así definidas por la forma en que se usan los materiales con sus respectivos índices de refracción.<sup>1</sup>

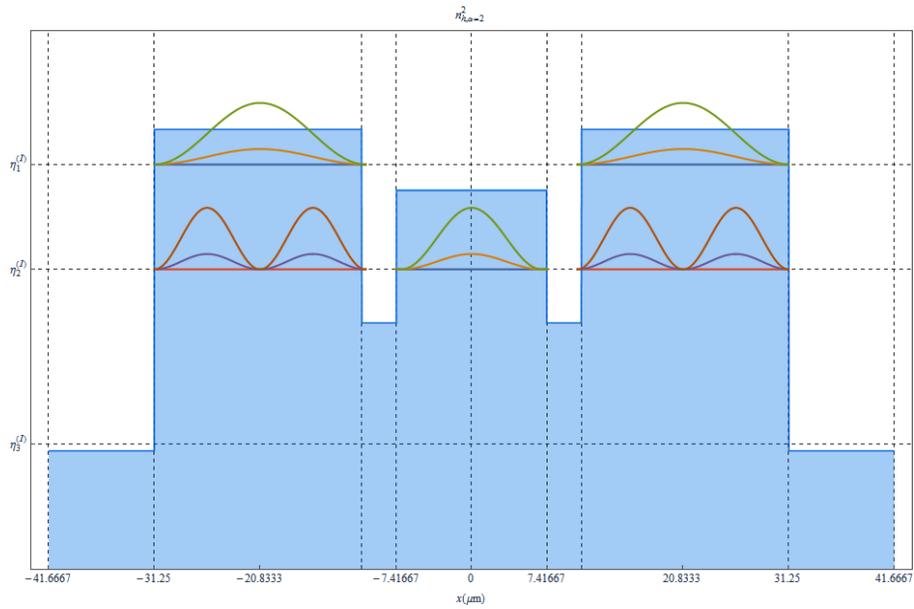
<sup>1</sup>Guías “M” y guías “W” generalmente son estructuras usadas para reducir los efectos de dispersión en

El análisis de guías de onda multicapa, se hace mediante la aplicación de las condiciones de frontera para cada capa en las interfaces. Y se desarrolla como una adaptación de la teoría de matriz de transferencia donde se obtienen las propiedades de reflexión y transmisión del bloque multicapa.<sup>99,102</sup>

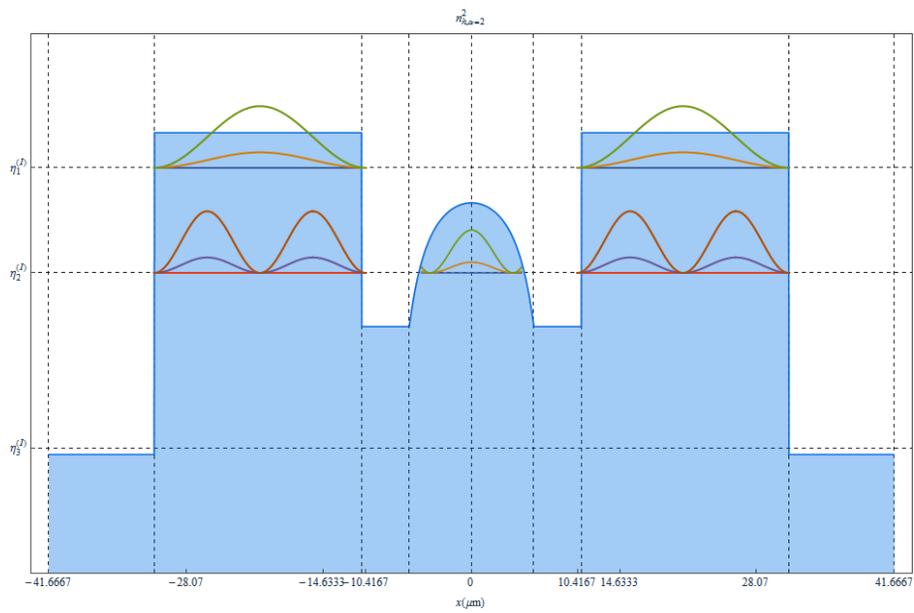
La construcción de las guías de onda tanto “M” como “W” son representadas de manera gráfica en las figuras (5.11 a)) y (5.12 a)), y la propuesta de guías “M” y “W” supersimétricas, en las cuales se pueden filtrar modos ya sea en el revestimiento por el perfil compañero en las guías “M” supersimétricas o bien se pueden filtrar los modos hacia el núcleo como son en las guías de onda “W” supersimétricas, hecho que se muestra en las figuras (5.11 b)) y (5.12 b)), respectivamente. Lo que queda por hacer, como propuesta de trabajo futuro, hacer el análisis teórico de la matriz de transferencia en este tipo de estructuras, para así calcular sus coeficientes de reflexión y transmisión.

---

la propagación de pulsos, donde estas estructuras pueden ser creadas dado un ajuste del índice de refracción. Usualmente estas estructuras son más comunes en fibras ópticas.

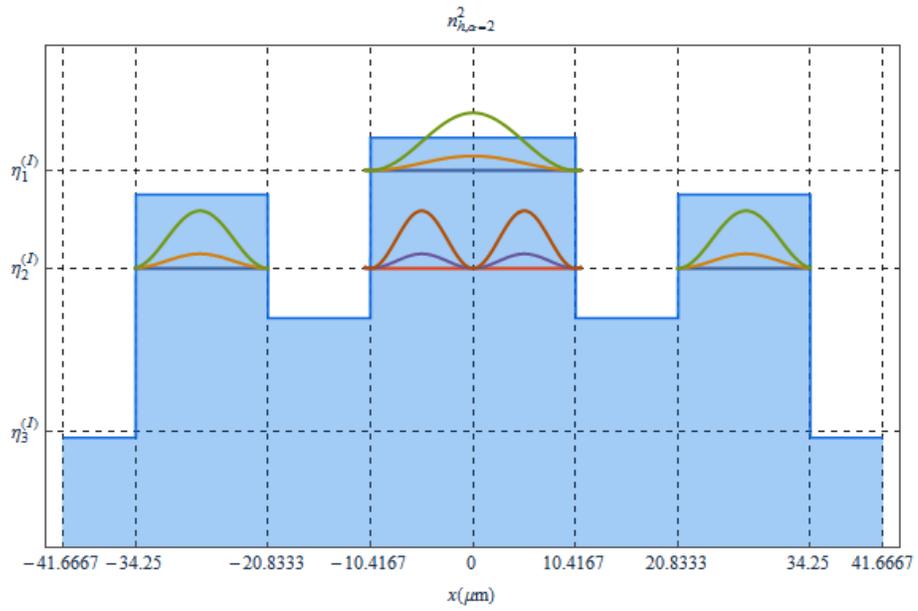


(a) Guía M

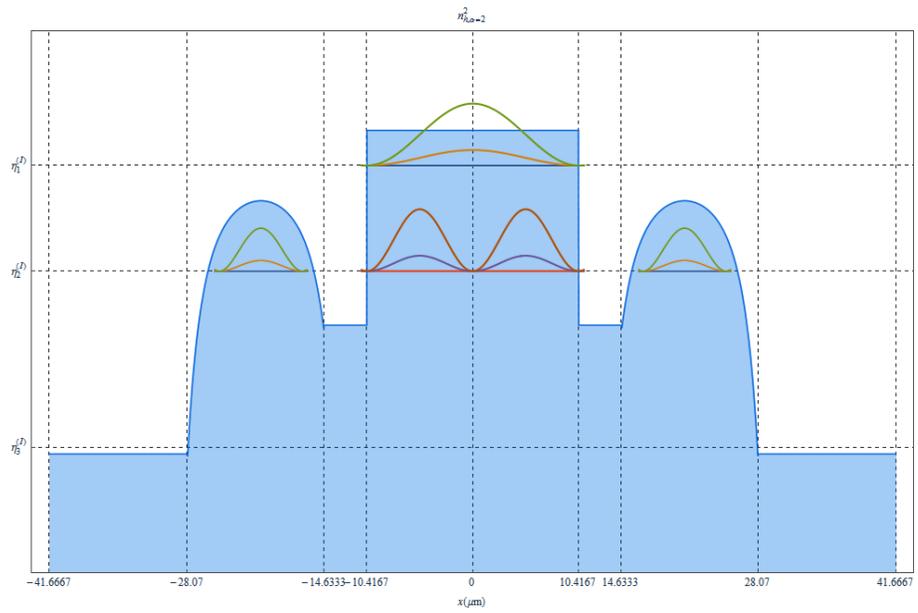


(b) Guía M SUSY

FIGURA 5.11: a) Guía “M” con perfil de índice de refracción constante, b) Guía de onda “M” super-simétrica con perfil de onda compañero



(a) Guía W



(b) Guía W SUSY

FIGURA 5.12: a) Guía “W” con perfil de índice de refracción constante, b) Guía de onda “W” supersimétrica con perfil de onda compañero

# Capítulo 6

## Factorización no lineal

Los métodos de factorización de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, tal como se observó para la ecuación de Schrödinger, son métodos que en matemáticas están bien establecidos.

En el área de física, estos tratamientos han causado gran interés como una forma elegante de resolver problemas fundamentales de autovalores en la mecánica cuántica, y con ello más tarde en mecánica cuántica supersimétrica debido principalmente a su asociación natural. Este último enfoque se ha extendido a algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, y también a más dimensiones. En recientes años, la técnica de factorización se ha aplicado para encontrar soluciones exactas de muchas ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, y para ecuaciones diferenciales parciales no lineales, principalmente en el contexto de ondas viajeras.

En este capítulo, generalizamos la técnica de factorización que introdujeron anteriormente Rosu y Cornejo-Pérez<sup>103,104</sup> para ecuaciones no lineales con una función monomial en la primera derivada, es decir, con un término de amortiguamiento que también puede ser no lineal, a ecuaciones no lineales con funciones polinómicas de segundo y tercer grado en la primera derivada.

## 6.1. Factorización de ecuaciones no lineales con un grado monomial de primer orden en la primera derivada

Como es bien sabido, la ecuación diferencial parcial de segundo orden tiene la forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + f(y, s) \frac{\partial y}{\partial s} + F(y, s) = 0, \quad (6.1)$$

la cual podemos reescribir como

$$y_{ss} + f(y, s)y_s + F(y, s) = 0, \quad (6.2)$$

donde  $\frac{\partial y}{\partial s} = y_s$  y  $\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = y_{ss}$  son la primera y segunda derivada parcial,  $F(y, s)$  y  $f(y, s)$  son funciones arbitrarias de  $y(s)$  y  $s$ , las cuales pueden ser factorizadas como:

$$[D_s - \phi_2(y, s)][D_s - \phi_1(y, s)]y(s) = 0, \quad (6.3)$$

tal que  $D_s = d/ds$ . Expandiendo (6.3), uno puede hacer uso de la siguiente agrupación de términos:<sup>103, 104</sup>

$$D_s^2 y - \left( \phi_1 + \phi_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} y \right) D_s y + (\phi_1 \phi_2 - \partial \phi_1 / \partial s) y = 0, \quad (6.4)$$

comparando la ecuación (6.2) con la ecuación (6.4), obtenemos las condiciones

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} y = -f, \quad (6.5)$$

$$\phi_1 \phi_2 - \frac{\partial \phi_1}{\partial s} = \frac{F(y, s)}{y} \quad (6.6)$$

cualquier factorización como (6.3) de una ecuación escalar de la forma dada en la ecuación (6.2) nos permite encontrar una ecuación diferencial de primer orden compatible,

$$[D_s - \phi_1(y, s)]y \equiv D_s y - \phi_1(y, s)y = 0, \quad (6.7)$$

cuya solución proviene de una solución particular de la ecuación (6.2). En otras palabras, si somos capaces de encontrar una pareja de funciones  $\phi_1(y, s)$  y  $\phi_2(y, s)$  tal que estas pueden

factorizar la ecuación (6.2) en la forma (6.3). Entonces, resolviendo la ecuación (6.7) nos permite encontrar una solución particular de la ecuación (6.2). La ventaja de esta factorización, se ha demostrado para el caso particular cuando no hay una dependencia explícita de  $s$ , es decir, para ecuaciones

$$y_{ss} + f(y)y_s + F(y) = 0, \quad (6.8)$$

en las cuales las condiciones de factorización son

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{d\phi_1}{dy}y = -f, \quad (6.9)$$

$$\phi_1\phi_2 = \frac{F(y)}{y}, \quad (6.10)$$

cuando las dos funciones desconocidas  $\phi_1(y)$  y  $\phi_2(y)$  se pueden encontrar fácilmente al factorizar  $F(y)$ , es cuando esta función es un polinomio o está escrita como un producto de dos funciones. Una ilustración de esta técnica se obtuvo en el caso de la ecuación cúbica de Ginzburg-Landau que se puede encontrar en el trabajo de Rosu et al.<sup>105</sup> Notando que el intercambio de las funciones de factorización convierte (6.9) y (6.10) a

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{d\phi_2}{dy}y = -\tilde{f}, \quad (6.11)$$

$$\phi_1\phi_2 = \frac{F(y)}{y} \quad (6.12)$$

que corresponde a la ecuación

$$y_{ss} + \tilde{f}(y)y_s + F(y) = 0. \quad (6.13)$$

Si  $s$  es una variable viajera, esto sugiere una relación cinemática entre las soluciones tipo Kink (6.8) y (6.13) envueltas bajo los diferentes amortiguamientos no lineales  $f(y)$  y  $\tilde{f}(y)$ .

Finalmente, en el caso que  $f = 0$  y  $F(y, s) = V(s)y$ , las funciones de factorización  $\phi$  sólo dependen de  $s$  y la ecuación (6.2) es una ecuación lineal de la forma

$$y_{ss} + V(s)y = 0 . \quad (6.14)$$

Las condiciones de factorización son simplificadas como

$$\phi_1 + \phi_2 = 0 , \quad (6.15)$$

$$\phi_1\phi_2 - \frac{d\phi_1}{ds} = V(s) . \quad (6.16)$$

De (6.15), uno tiene  $\phi_1 = -\phi_2 = \phi$  las cuales al ser sustituidas en (6.16) nos proporciona la ya bien conocida ecuación de Riccati  $-d\phi/ds - \phi^2 = V(s)$  definiendo el potencial de Schrödinger en mecánica cuántica en términos de la función de factorización. El intercambio de  $\phi_1$  con  $\phi_2$  produce un compañero de la ecuación de Riccati  $d\phi/ds - \phi^2 = \tilde{V}(s)$  de gran uso en mecánica cuántica supersimétrica.

## 6.2. Factorización de ecuaciones no lineales con función polinomial de segundo orden en la primera derivada

Dada nuestra consideración de la ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden con coeficientes variables

$$y_{ss} + f(y,s)y_s^2 + g(y,s)y_s + F(y,s) = 0 . \quad (6.17)$$

Una factorización de la forma

$$[D_s + f(y,s)y_s - \phi_2(y,s)][D_s - \phi_1(y,s)]y = 0 , \quad (6.18)$$

es posible si seguimos las siguientes ecuaciones de restricción que son satisfechas por

$$\phi_1 + \phi_2 + \left( \frac{\partial\phi_1}{\partial y} + f(y,s)\phi_1 \right) y = -g(y,s) , \quad (6.19)$$

$$\phi_1\phi_2 - \frac{\partial\phi_1}{\partial s} = \frac{F(y,s)}{y} . \quad (6.20)$$

Por otro lado, existen también casos cuando uno puede trabajar con  $\phi_2 = 0$ . En tales casos, las restricciones toman la forma

$$\phi_1 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + f(y, s) \phi_1 \right) y = -g(y, s), \quad (6.21)$$

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial s} = \frac{F(y, s)}{y}. \quad (6.22)$$

Finalmente, el caso degenerado que corresponde a  $\phi_1 = 0$ , también implica que  $F = 0$ , teniendo este caso una simple restricción

$$\phi_2 = -g(y, s). \quad (6.23)$$

Como un ejemplo de un caso degenerado, se da en la ecuación para la función radial de una métrica isotrópica en relatividad general que está descrita como

$$y_{ss} - \frac{3}{y} y_s^2 - \frac{1}{s} y_s = 0, \quad (6.24)$$

con la ecuación (6.23) de la forma

$$\phi_2 = \frac{1}{s} \quad (6.25)$$

La solución es

$$y = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{1 + bs^2}}, \quad (6.26)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes de integración, y pueden ser encontradas por principios elementales.

Una de las aplicaciones más importantes es aquella en la cual no existe una dependencia explícita de  $s$  en la ecuación, por lo que ni  $F$  ni la  $\phi$  dependen de  $s$ , cuando las restricciones son similares a (6.9) y (6.10). Si, además, uno supone que  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ , entonces la segunda ecuación de restricción proporciona la función de factorización como

$$\phi(y) = \sqrt{\frac{F(y)}{y}}. \quad (6.27)$$

Sustituyendo (6.27) en la primera ecuación de restricción obtenemos la siguiente expresión para el coeficiente  $g$

$$g(y) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{F(y)}{y}} \left[ 3 + \left( \frac{F_y}{F} + 2f(y) \right) y \right] \quad (6.28)$$

para dados  $f(y)$  y  $F(y)$ , la última ecuación nos da un coeficiente  $g(y)$  para el cual la ecuación no lineal puede ser factorizada de la forma

$$\left[ D_s + f(y)y_s - \sqrt{F(y)/y} \right] \left[ D_s - \sqrt{F(y)/y} \right] y = 0 . \quad (6.29)$$

Existen ecuaciones de tipo similar a la última, las cuales no presentan un término lineal en la primera derivada. Esto implica que  $g(y) = 0$ , es decir

$$3 + \left( \frac{F_y}{F} + 2f(y) \right) y = 0 , \quad (6.30)$$

la cual es separable. Con la solución

$$F(y) = Cy^{-3} e^{-2 \int^y f(u) du} , \quad (6.31)$$

con  $C$  que es una constante de integración, que proporciona la forma de  $F$  para un  $f$  dado que permite la factorización de la ecuación. Sin embargo, por simple que parezca, la condición (6.31) es bastante restrictiva. En aplicaciones físicas, las ecuaciones diferenciales con cuadrados de la primera derivada se encuentran en áreas altamente no lineales. Se dan algunos ejemplos de este método en el trabajo de Rosu y colaboradores.<sup>106</sup>

### 6.3. Factorización de la ecuación no lineal de Korteweg-de Vries

Como se mencionó en el primer capítulo de esta tesis, una de las principales ecuaciones que describen la propagación de solitones es la ecuación no lineal de Korteweg-de Vries, la cual en su forma fundamental describe la competencia entre ligeras no linealidades y ligera dispersión,<sup>107</sup> que se escribe como

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon P(u) , \quad (6.32)$$

donde  $P(u)$  es una perturbación y  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño, clásicamente en la ecuación Korteweg-de Vries  $\varepsilon = 0$ .

Entonces, podemos empezar considerando la solución de la ec. (6.32) como una onda viajera, tal que  $u(z, t) = y(z - vt) \equiv y(s)$ , con  $s = z - vt$  por lo que

$$y_{sss} - vy_s + 6yy_s = 0 \quad (6.33)$$

recordando que  $y_s = \frac{dy}{ds}$  y de igual forma para las derivadas de orden superior. Así, integrando sobre las derivadas totales, tenemos

$$y_{ss} + (3y^2 - vy - C) = 0 , \quad (6.34)$$

si hacemos  $F(y) = (3y^2 - vy - C)$  obtenemos

$$y_{ss} + F(y) = 0 . \quad (6.35)$$

ahora podemos aplicar el método característico de factorización no lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden.<sup>103-106</sup> Descrito por las ecuaciones (6.1-6.13), de donde para este caso específico  $f = 0$  en la ec. (6.35), obteniendo las siguientes condiciones de factorización

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{d\phi_1}{dy}y = 0 , \quad (6.36)$$

$$\phi_1\phi_2 = \frac{F(y)}{y} . \quad (6.37)$$

Partiendo de la ec. (6.37) buscamos las expresiones explícitas de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , tal que

$$\phi_2 = \frac{F(y)}{\phi_1 y} , \quad (6.38)$$

sustituyendo en (6.36) llegamos a

$$\begin{aligned}\phi_1 + \frac{F(y)}{\phi_1 y} + \frac{d\phi_1}{dy} y &= 0, \\ \phi_1 \frac{d\phi_1}{dy} + \frac{1}{y} \phi_1^2 &= -\frac{F(y)}{y^2},\end{aligned}\quad (6.39)$$

haciendo el cambio de variable  $\phi_1 = \frac{w}{y}$ , tal que  $\frac{d\phi_1}{dy} = \frac{yw' - w}{y^2}$  y  $\phi_1^2 = \frac{w^2}{y^2}$  sustituyendo en (6.39) y resolviendo,

$$\begin{aligned}wdw &= -F(y)dy \\ w &= \sqrt{2 \left( -\int^y F(y') dy' + C_0 \right)},\end{aligned}\quad (6.40)$$

de esta manera  $\phi_1$  es igual a

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{2(-\int^y F(y') dy' + C_0)}}{y}\quad (6.41)$$

y  $\phi_2$  por la ec. (6.38) es

$$\phi_2 = \frac{F(y)}{\sqrt{2(-\int^y F(y') dy' + C_0)}}.\quad (6.42)$$

por lo que la factorización ec. (6.3) toma la forma

$$\left[ D_s - \frac{F(y)}{\sqrt{2(-\int^y F(y') dy' + C_0)}} \right] \left[ D_s - \frac{\sqrt{2(-\int^y F(y') dy' + C_0)}}{y} \right] y(s) = 0,\quad (6.43)$$

Para encontrar la solución de la ecuación de Korteweg-de Vries también se puede obtener mediante la factorización, si resolvemos para la solución particular partiendo de la ec. (6.7), así utilizando la expresión para  $\phi_1$  de la ec. (6.41) tenemos

$$\begin{aligned}D_s y &= \phi_1(y, s) y \\ \frac{dy}{ds} &= \sqrt{-2y^3 + vy^2 + 2cy + 2C_0}\end{aligned}$$

factorizando el polinomio cúbico como  $(y - a)^2(b - y)$  con  $\frac{v}{2} = 2a + b$ ,  $-c = a(a + 2b)$  y  $C_0 = a^2b$ , tal que  $a < y < b$ , de esta manera, sustituyendo en la ecuación anterior

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{-2y^3 + vy^2 + 2cy + 2C_0}}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{(y-a)\sqrt{b-y}}$$

haciendo  $y = a + (b-a)\text{sech}^2\theta$ , encontramos la relación de dependencia de  $s$  en  $y$  al obtener a  $\theta$

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2(b-a)\text{sech}^2\theta \tanh\theta d\theta}{(b-a)\text{sech}^2\theta \sqrt{b-a} \sqrt{1-\text{sech}^2\theta}}$$

$$s = \frac{\sqrt{2}\theta}{\sqrt{b-a}} \quad (6.44)$$

por lo que la solución es similar a la ecuación obtenida en el apéndice (A) ec. (A.12) entonces

$$y(z,t) = a + (b-a) \text{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{2}} (z-vt) \right). \quad (6.45)$$

Una vez, habiendo encontrado la solución, podemos también obtener la ecuación compañera, la cual se encuentra, como se ha mencionado en secciones anteriores, al intercambiar en el orden de operación las funciones de factorización quedando como

$$[D_s - \phi_1][D_s - \phi_2]y(s) = 0,$$

de esta manera, la ecuación compañera será

$$\frac{d^2y(s)}{ds^2} - \left( \frac{F(y)}{\sqrt{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}} + \frac{\sqrt{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}}{y} + \frac{y}{\sqrt{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}} \frac{dF(y)}{dy} \right. \\ \left. + \frac{y}{\sqrt{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}} \left( \frac{F(y)}{\sqrt{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}} \right)^2 \right) \frac{dy}{ds} + F(y) = 0.$$

Tomando en cuenta que la ecuación reducida de KdV ec. (6.35) no tiene primera derivada y que la solución particular se obtiene de  $\frac{dy}{ds} \equiv \phi_1 * y = \sqrt{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}$ , entonces podemos intercambiar esta derivada de primer orden, y obtenemos

$$\frac{d^2y(s)}{ds^2} - \left( F(y) + \frac{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}{y} + y \frac{dF(y)}{dy} + y \left( \frac{F(y)}{\sqrt{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}} \right)^2 \right) + F(y) = 0$$

$$\frac{d^2y(s)}{ds^2} - \mathcal{F}(y) = 0. \quad (6.46)$$

con  $\mathcal{F}(y) = \frac{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}{y} + y \frac{dF(y)}{dy} + y \left( \frac{F(y)}{\sqrt{2(-\int^y F(y')dy' + C_0)}} \right)^2$ . Teniendo solución que se obtiene al igual que para  $\phi_1$  tomando la ecuación de primer orden

$$[D_s - \phi_2]y(s) = 0$$

$$\frac{dy(s)}{ds} = \frac{(3y^2 - vy - C)y}{\sqrt{2}\sqrt{-y^3 + \frac{v}{2}y^2 + cy + C_0}}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{-y^3 + \frac{v}{2}y^2 + cy + C_0}}{(3y^2 - vy - C)y} dy(s)$$

de donde

$$\frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{-y^3 + \frac{v}{2}y^2 + cy + C_0}}{(3y^2 - vy - C)} - \frac{1}{2} \int \frac{dy(s)}{\sqrt{-y^3 + \frac{v}{2}y^2 + cy + C_0}}$$

sabiendo que  $s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{-y^3 + \frac{v}{2}y^2 + cy + C_0}}$  entonces

$$\sqrt{2}s = \frac{\sqrt{-y^3 + \frac{v}{2}y^2 + cy + C_0}}{(3y^2 - vy - C)} \quad (6.47)$$

si factorizamos  $\sqrt{-y^3 + \frac{v}{2}y^2 + cy + C_0} = (y - a)\sqrt{b - y}$  como se hizo anteriormente y resolvemos para los coeficientes obtenemos que  $a_{\pm} = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 12c}}{6}$  y  $b = \frac{36C_0}{(v \pm \sqrt{v^2 + 12c})^2}$ , siendo que  $v < a < b$ . Por otro lado, si factorizamos el denominador de la ec. (6.47) la factorización de  $3y^2 - vy - c$  es  $(y - a)^2$  por lo tanto

$$\sqrt{2}s = \frac{(y - a)\sqrt{b - y}}{(y - a)^2} = \frac{\sqrt{b - y}}{y - a}$$

haciendo  $y = a + (b - a)\operatorname{sech}^2\theta$ , entonces se llega a

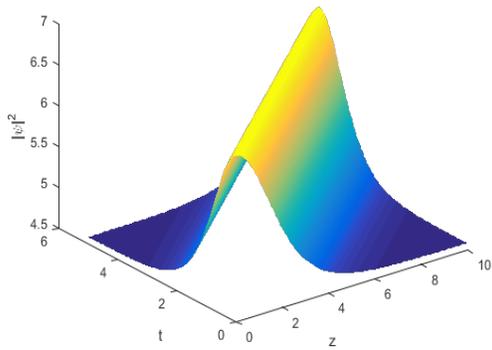
$$\sqrt{2}s = \frac{1}{2\sqrt{b-a}} \sinh(2\theta)$$

donde finalmente la solución queda como

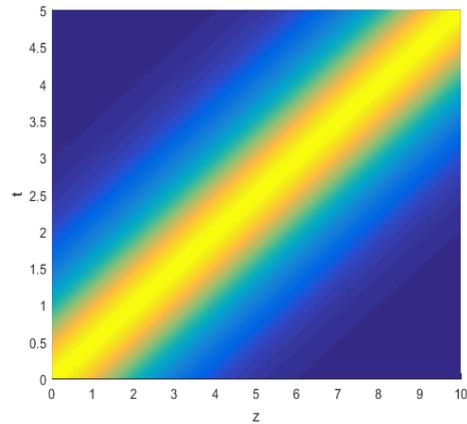
$$y = a + (b - a) \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sinh \left( 2\sqrt{2}\sqrt{b-a}(z - vt) \right) \right] \quad (6.48)$$

De esta manera, encontramos los solitones supersimétricos obtenidos mediante el tratamiento matemático de factorización para la ecuación no lineal de Korteweg- de Vries que están representados por las ecuaciones (6.45) y (6.48), y gráficamente se observan en la figura (6.1).

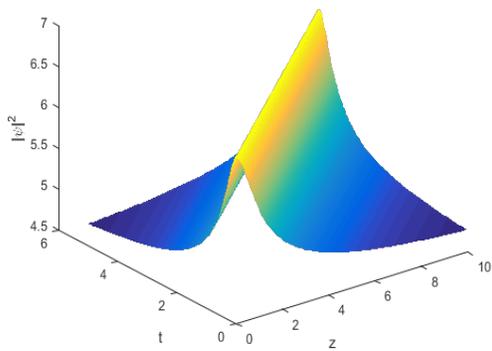
Los solitones tanto el KdV como el KdV supersimétrico, presentan las características propias de los solitones, con la única diferencia que el solitón supersimétrico es de un ancho menor al solitón KdV, una característica que se observa de manera regular al aplicar un tratamiento supersimétrico, como ya lo vimos en los perfiles de índice de refracción supersimétricos en las estructuras obtenidas en el capítulo 5 y a sus perfiles de propagación, y ahora se observa un comportamiento similar en estos solitones.



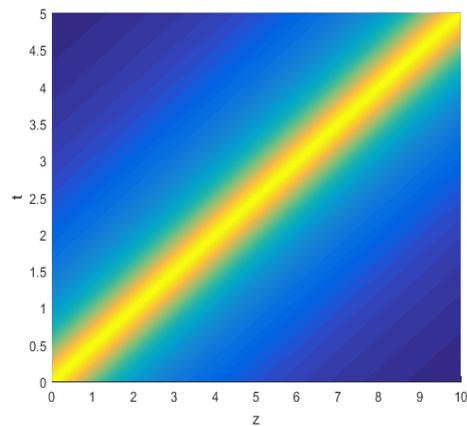
(a) Solitón KdV



(b) Propagación del Solitón KdV



(c) Solitón supersimétrico de KdV



(d) Propagación del Solitón supersimétrico

FIGURA 6.1: Solución solitónica de la ecuación no lineal de KdV (6.45) y para un solitón supersimétrico ec. (6.48), con las constantes  $c_0 = 1.3$ ,  $c = 0.1$ , y la velocidad  $v=2$

# Capítulo 7

## Conclusiones

Como se hizo mención anteriormente la idea de supersimetría inicialmente en física se define para el problema de unificación entre las partículas fermiónicas y bosónicas del modelo estándar en física de partículas. Definición que en un principio, dice que a cada partícula, le corresponde una partícula compañera supersimétrica que difiere solamente por medio spin. Matemáticamente en la literatura utilizada en el documento de tesis, se desarrollan los métodos supersimétricos implementados para plantear una analogía directa entre SUSY-QM y Óptica que nos hizo incursionar al tratamiento de factorización en el campo de la óptica, tal como se observa en recientes estudios en esta rama de la física, donde bajo este desarrollo se proponen pulsos que se propagan en medios ópticos y obtenemos medios ópticos compañeros supersimétricos con características materiales definidas a través de la supersimetría.

Por otro lado, en este documento inicialmente en los capítulos 1 y 2 se hace una descripción general del tratamiento de propagación de pulsos a través de un medio, donde se describe principalmente los tipos de solitones y su obtención matemática como soluciones en las principales ecuaciones de óptica tanto lineal como no lineal, las cuales generalmente son las ecuaciones de Schrödinger, Ginzburg-Landau, Helmholtz y Kdv. Especialmente se hace mayor énfasis en la ecuación de Schrödinger, ya que se deja en claro que esta ecuación presenta una relación directa con la ecuación de Helmholtz en su régimen paraxial, y se define que esta ecuación nos presenta la relación directa con la mecánica cuántica y por ende con la supersimetría cuántica.

En el capítulo 3 desarrollamos un método de solución de ecuaciones no lineales de coeficientes variables tanto de la ecuación no lineal de Schrödinger y de la ecuación no lineal de Ginzburg-Landau; las cuales resolvimos bajo el método propuesto de He-Li, que consiste en un mapeo de una ecuación de coeficientes variables a una ecuación de coeficientes constantes, con lo cual obtuvimos las formas explícitas de los solitones no autónomos propagándose en una fibra óptica en un par de casos de importancia experimental, para la ecuación de Schrödinger y para un par de casos de amplitud fija y amplitud arbitraria para solitones brillantes en la ecuación de Ginzburg-Landau. En las condiciones apropiadas para el manejo de solitones no autónomos, se puede realizar un mapeo que convierte dichas ecuaciones en una función que parametriza el mapeo, tal como es el caso de la función  $F_1$  para ambas ecuaciones. Esta condición garantiza la integrabilidad del sistema y muestra que los solitones no autónomos son posibles solo si los parámetros de la fibra óptica cumplen esta condición. En general, los solitones no autónomos difieren del solitón estándar con respecto al cual se construyen en el método de He y Li por tener una amplitud y un ancho que dependen de los parámetros materiales de la fibra óptica en la cual se propagan.

Posteriormente en el capítulo 4 hacemos una descripción de la conexión de la mecánica cuántica con la óptica en donde se hace uso de las descripciones encontradas en la literatura, específicamente del trabajo propuesto por Black y Ankiewicz, el cual nos sirvió como conexión directa de la óptica paraxial con la supersimetría cuántica como lo dice Chumakov y Wolf, y de esta manera en el trabajo de tesis poder hacer un tratamiento donde analizo y describo como la supersimetría ofrece una manera más versátil en la síntesis de una clase nueva de estructuras ópticas, con propiedades y funcionalidades deseadas. También nos dimos cuenta que el tratamiento propuesto por nosotros difiere un poco en principio de la propuesta inicial de Chumakov y Wolf, donde ellos proponen haces supersimétricos que se propagan en una misma guía óptica y nosotros proponemos diferentes guías. Bajo este desarrollo encontramos una fuerte relación entre los supercompañeros tal y como la teoría supersimétrica lo dice, y se pudo describir una forma sistemática de construcción de potenciales que relacionan los índices de refracción capaces de soportar modos guados supersimétricos,

descripción que se desarrolla en el capítulo 5 con gran detalle.

En el entorno de la descripción supersimétrica en el capítulo 5 pudimos conectar los modos transversales eléctricos y los modos transversales magnéticos con sus compañeros supersimétricos los cuales se propagan en bloques de guías de onda específicos, con características estructurales dieléctricas que se obtienen directamente del tratamiento supersimétrico, es importante notar que a diferencia de los tratamientos encontrados en la literatura existen novedades interesantes que son:

- 1 Se obtiene la ecuación de Helmholtz tanto para el modo TE (Transversal Eléctrico o modo H) como para el TM (Transversal Magnético o modo E) que contienen una dependencia de la variable transversal de permeabilidad eléctrica  $\epsilon(x)$  y la variable de permitividad magnética  $\mu(x)$  respectivamente. (En artículos sobre supersimetría óptica solo hacen el análisis para el modo TE), lo que nos lleva a poder obtener alguna solución no solo para el caso de materiales dieléctricos si no también para otro tipo de materiales, en los cuales podemos asociarle una forma funcional a la permitividad magnética y así poder tal vez trabajar con materiales magnéticos, materiales que contengan plasma, o bien metamateriales, bajo el tratamiento supersimétrico.
- 2 Se obtiene una forma general para la ecuación de autovalores para ambos modos, de la ecuación para el modo TE, y de la ecuación para el modo TM.
- 3 Se encuentra la estructura supersimétrica general para ambos modos, tanto para el perfil de índice de refracción como para el índice de refracción compañero, la solución de la ecuación de Riccati que contiene la dependencia de la permitividad y la permeabilidad de ambos modos, y también se consigue la función de propagación de los modos compañeros.
- 4 Se dan los casos particulares para ambos modos de propagación para una función  $f(x) = x^\alpha$  en el perfil de índice de refracción, donde se hace la consideración que es

una guía de onda dieléctrica como se ve en la literatura recalando que se obtiene para ambos modos de propagación, el parámetro  $\alpha$  se tomó igual a 0, 1 y 2, en la literatura solo se toman 0 y 2, en este artículo se hace el caso de  $\alpha = 1$  que no hay reportado un tratamiento supersimétrico para este caso específico.

estas novedades encontradas nos hacen pensar en aplicaciones ópticas de nuevas estructuras materiales. Estas estructuras tienen aplicación directa mediante la obtención de los modos propios de alto orden tanto de los modos TEs como los modos TMs, que se obtienen mediante una construcción de tipo escalera jerárquica de guías de onda supersimétricas. Con lo que se concluye que es posible crear nuevas guías de onda que puedan soportar los modos TE y TM con perfiles de índice de refracción bien definidos como es el caso de guías de onda tipo M o W que serían una representación de modos supersimétricos jerárquicos que a su vez funcionan como un proceso de filtrado de modos, ya sea en el núcleo de la guía o en el revestimiento, sólo con uso de perfiles compañeros.

Por último, se hace un desarrollo como parte del uso del método de factorización de ecuaciones diferenciales no lineales también visto desde un punto de vista óptico supersimétrico, se trabajó con el método propuesto por Rosu y Cornejo-Pérez donde se propone una extensión para ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden que contienen formas cuadráticas y cúbicas polinomiales en la primer derivada. Al hacer esto, uno puede buscar soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden más simples, correspondientes al primer bracket de factorización de la derecha aplicada a dichas funciones. Esto funciona bien cuando solo hay un término lineal en la primera derivada. Cuando las potencias de las primeras derivadas son mayores de uno, las condiciones de restricción en las funciones de factorización se vuelven más complicadas, y el método de factorización es menos apropiado. En general, el método de factorización todavía puede funcionar cuando los coeficientes de la ecuación no lineal no dependen explícitamente de la variable independiente, porque las ecuaciones de restricción son menos restrictivas en estos casos. Este método de factorización de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales, es usado para encontrar soluciones supersimétricas en una ecuación de uso común en óptica no lineal, la cual es la ecuación de KdV, donde como solución obtuvimos la solución solitónica y su solu-

ción solitónica supersimétrica, donde también nos dimos cuenta que mediante el tratamiento superimétrico en ecuaciones diferenciales no lineales, las soluciones conservan las características propias de los solitones, con la única diferencia que el solitón compañero presenta un ancho menor al solitón original, estableciendo esta característica, como una característica común de la aplicación del método supersimétrico.

En general, podemos concluir que usando métodos supersimétricos en una descripción de estructuras ópticas se pueden generar estructuras con nuevas características específicas de filtrado de modos, ya que por construcción de bloques de guías de onda podríamos formar estructuras con modos específicos. Por otra parte, también, podemos hacer uso de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que tengan alguna descripción óptica y factorizarlas mediante el método supersimétrico, y así encontrar la estructura supersimétrica adecuada para cada caso y sus solitones propios para cada estructura.



# Bibliografía

- [1] R. J. Black and A. Ankiewicz. Fiber-optics analogies with mechanics. *Am J. Phys.*, 6:554–563, 1985.
- [2] A. Hasegawa. A historical review of application of optical for high speed communication. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10:475–485, 2000.
- [3] A. Pérez and A. Rugeles. Soluciones multisolitónicas de la ecuación NLS. *Revista Colombiana de Física*, 38:585–588, 2006.
- [4] J. Ablowitz and H. Segur. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM, Philadelphia, 1981.
- [5] E. Cumberbatch. Self-focusing in non-linear optics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6:250–262, 1970.
- [6] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fibers Optics*. Elsevier Science, North Holland, 2001.
- [7] M. Kruskal and N. Zabusky. Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15:240–243, 1965.
- [8] C. S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, and R. M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1095–1097, 1967.
- [9] Bonnie and B. Kath. Making waves: Solitons and their optical applications. *SIAM News*, 31:1–5, 1998.
- [10] L. Lam. *Introduction to Nonlinear Physics*. Springer, 1997.

- [11] V.E. Zakharov and A.B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Zh Eksp. Teor. Fiz.,(Trans. Sov. Phys. JETP Lett., 34,62 (1972))*, 34:62–69, 1971.
- [12] R. Hirota. *The Direct Method in Soliton Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [13] A. Hasegawa. Theory of information transfer in optical fibers: A tutorial review. *Optical Fiber Technology*, 10:150–170, 2004.
- [14] A. Hasegawa and M. Matsumoto. *Optical Solitons in Fibers*. Springer, 2003.
- [15] R-K. Lee, Y. Lai, and B. A. Malomed. Quantum fluctuations around bistable solitons in the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation. *J. Opt. B.*, 6:367–372, 2004.
- [16] A. Hasegawa and F. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23:142–144, 1973.
- [17] Y. Xianglin and Z. Yang. On the perfect binary arrays. *Journal of Electronics*, 7:175–181, 1990.
- [18] N. N. Akhmediev and A. Ankiewicz. *Solitons, Nonlinear pulses and beams*. Chapman and Hall, 1997.
- [19] A. Biswas and S. Konar. *Introduction to Non-Kerr Law Optical Solitons*. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [20] L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, and J.P. Gordon. Extreme picosecond pulse narrowing by means of soliton effect in single-mode optical fibers. *Optics Letters*, 8:289–291, 1983.
- [21] M-A. Miri, M. Heinrich, and D. N. Christodoulides. SUSY-inspired one-dimensional transformation optics. *Optica*, 1:89–95, 2014.
- [22] S. Longhi. Supersymmetric transparent optical intersections. *Op. Lett.*, 40:463–466, 2015.

- [23] S. Yu, X. Piao, J. Hong, and N. Park. Bloch-like waves in random-walk potentials based on supersymmetry. *Nat. Commun.*, 6:6–8269, 2015.
- [24] E. Witten. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nucl. Phys. B*, 185:513–554, 1981.
- [25] M-A. Miri, M. Heinrich, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides. Supersymmetric optical structures. *Phys. Rev. Lett.*, 110:233902–1–233902–5, 2013.
- [26] L. Infeld and T.D. Hull. The factorization method. *Rev. Mod. Phys.*, 23:21–68, 1951.
- [27] B. Mielnik and O. Rosas-Ortiz. Factorization: little or great algorithm. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:10007–10035, 2004.
- [28] S.-H. Dong. *Factorization Method in Quantum Mechanics*. Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2007.
- [29] H.C. Rosu, S. C. Mancas, and P. Chen. One-parameter families of supersymmetric isospectral potentials from Riccati solutions in function composition from. *Ann. Phys.*, 343:87–102, 2014.
- [30] V. A. Kostelecky and D. K. Campbell. *Supersymmetric in physics*. North Holland, Amsterdam, 1985.
- [31] S. M. Chumakov and K. B. Wolf. Supersymmetry in Helmholtz optics. *Phys. Rev. A*, 193:51–53, 1994.
- [32] H. P. Laba and V. M. Tkachuk. Quantum-mechanical analogy and supersymmetry of electromagnetic wave modes in planar waveguides. *Phys. Rev. A*, 89:033826–1–033826–4, 2014.
- [33] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 2008.
- [34] A. Hasegawa and Y. Kodama. *Solitons in Optical Communications*. Oxford University Press, Oxford, 1995.

- [35] A. Hasegawa. Soliton effects in optical waveguides. *Reports on Progress in Physics*, 65:999–1024, 2002.
- [36] A.C. Newell and J.V. Moloney. *Nonlinear Optics*. Addison-Wesley-Redum, City, C.A., 1989.
- [37] Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. *Quantum Electronics*, 23:510–524, 1987.
- [38] M. J. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch. *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*. Cambridge University Press, 2004.
- [39] B.A. Malomed. *Soliton Management in Periodic Systems*. Springer, 2006.
- [40] K. Porsezian, A. Hasegawa, V.N. Serkin, T.L. Belyaeva, and R. Ganapathy. Dispersion and nonlinear management for femtosecond optical solitons. *Phys. Lett. A*, 361:504–508, 2007.
- [41] M. Centurion, M. A. Porter, P. G. Kevrekidis, and D. Psaltis. Nonlinearity management in optics: Experiment, theory, and simulation. *Phys. Rev. Lett.*, 97:033903–1–033903–4, 2006.
- [42] B. Eiermann, P. Treutlein, Th. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, K.P. Marzlin, and M. K. Oberthaler. Dispersion management for atomic matter waves. *Phys. Rev. Lett.*, 91:060402–1–060402–4, 2003.
- [43] P.G. Kevrekidis, G. Theocharis, D. J. Frantzeskakis, and Boris A. Malomed. Feshbach resonance management for Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 90:230401–1–200401–4, 2003.
- [44] D. Zhao, H.-G. Luo, and X.-G. He. On the nonautonomous nonlinear Schrödinger equations and soliton management. *AIP Conf.Proc.*, 1212:213–218, 2010.
- [45] E. P. Gross. Structure of a quantised vortex in Boson systems. *Nuovo Cimento*, 20:454, 1961.

- [46] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in a imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP.*, 13:451–454, 1961.
- [47] B. A. Malomed. *Bound solitons in the Nonlinear Schrödinger/Ginzburg-Landau equation*, In: Fournier JD., Sulem PL. (eds) *Large Scale Structures in Nonlinear Physics. Lecture Notes in Physics, vol 392.* Springer, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag, 1991.
- [48] N. Akhmediev and A. Ankiewicz. *Dissipative Solitons, Lecture Notes in Physics*, volume 661. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [49] F. Fang and Y. Xiao. Stability of chirped bright and dark soliton-like solution of cubic complex Ginzburg-Landau equation with variable coefficients. *Optics Communications*, 268:305–310, 2006.
- [50] V. N. Serkin and A. Hasegawa. Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4502–4505, 2000.
- [51] V. N. Serkin and T. Belyaeva. High-energy optical Schrödinger solitons. *JETP Letters*, 74:573–576, 2001.
- [52] V. N. Serkin and A. Hasegawa. Exactly integrable nonlinear Schrödinger equation models with varying dispersion, nonlinearity and gain: application for soliton dispersion. *IEEE J. Sel. Top Quantum Electron*, 8:418 – 431, 2002.
- [53] V. N. Serkin, A. Hasegawa, and T. Belyaeva. Comment on exact self-similar solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients. *Phys. Rev. Lett.*, 92:199401–1, 2004.
- [54] V. N. Serkin, A. Hasegawa, and T. Belyaeva. Nonautonomous solitons in external potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 98:074102–1–074102–4, 2007.
- [55] V.I. Talanov. Focusing of light in cubic media. *JETP Lett.*, 11:199–201, 1970.
- [56] J. He and Y. Li. Designable integrability of the variable coefficient nonlinear Schrödinger equations. *Stud. Appl. Math.*, 126:1–15, 2011.

- [57] Yu.V. Katyshev, N.V.Makhaldiani, and V.G.Makhankov. On the stability of soliton solutions to the Schrödinger equation with nonlinear term of the form  $\psi|\psi|^\nu$ . *Phys. Lett. A*, 66:456–458, 1978.
- [58] V. I. Kruglov, A.C. Peacock, and J.D. Harvey. Exact solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients. *Phys. Lett. E*, 71:056619–1–056619–11, 2005.
- [59] C. Pask. Exact expressions for scalar modal eigenvalues and group delays in power-law optical fibers. *J. Opt. Soc. Am.*, 69:1599–1603, 1979.
- [60] L.W. Liou and G.P. Agrawal. Solitons in fiber amplifiers beyond the parabolic-gain and rate-equation approximations. *Opt. Commun.*, 124:500–504, 1996.
- [61] V. N. Serkin, A. Hasegawa, and T. Belyaeva. Solitary waves in nonautonomous nonlinear and dispersive systems: nonautonomous solitons. *Journal Modern Optics*, 57:1456–1472, 2010.
- [62] Z.Y. Yang, L.C. Zhao, T. Zhang, and R.H. Yue. Bright chirp-free and chirped nonautonomous solitons under dispersion and nonlinearity management. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 28:236–240, 2011.
- [63] D.J. Richardson, R.P. Chamberlin, L. Dong, and D.N. Payne. High quality soliton loss-compensation in 38 km dispersion-decreasing fibre. *Electron. Lett.*, 31:1681–1982, 1995.
- [64] M. J. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch. *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*. Cambridge University Press, 2004.
- [65] J.N. Kutz and W.L. Kath. Stability of pulses in nonlinear optical fibers using phase-sensitive amplifiers. *SIAM J. Appl. Math.*, 56:611–626, 1996.
- [66] B. Sandstede, C.K.R.T. Jones, and J.C. Alexander. Existence and stability of n-pulses on optical fibers with phase-sensitive amplifiers. *Physica D.*, 106:167–206, 1997.

- [67] R. Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, 2001.
- [68] J. P. Gordon and H. A. Haus. Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission. *Optics Lett.*, 11:665–667, 1986.
- [69] S.I. Fewo, J. Atangana, A. Kenfack-Jiotsa, and T.C. Kofane. Dispersion-managed solitons in the cubic complex Ginzburg-Landau equation as perturbations of nonlinear Schrödinger equation. *Opt. Comm.*, 252:138–149, 2005.
- [70] A. Biswas. Dispersion-managed solitons in optical fibers. *J. Optics A.*, 4 (1):84–97, 2002.
- [71] A. Hasegawa. *Massive WDM and TDM Soliton Transmission Systems*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [72] S. K. Turitsyn, E. G. Shapiro, S. B. Medvedev, M. P. Fedoruk, and V. K. Mezentsev. Physics and mathematics of dispersion-managed optical solitons. *Comptes Rendus Physique, Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales*, 4:145–161, 2003.
- [73] S.K. Turitsyn. Theory of guiding-center breathing soliton propagation in optical communication systems with strong dispersion management, in new trends in optical soliton transmission systems edited by a. hasegawa. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands*, pages 225–243, 1998.
- [74] S. K. Turitsyn, N. J. Doran, J. H. B. Nijhof, V. K. Mezentsev, T. Shaefer, and W. Forysiak. *Dispersion-Managed Solitons, in Theoretical Challenges and Industrial Perspectives*, Ed. by V. E. Zakharov and S. Wabnitz, Kluwer. Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1999.
- [75] T. Hirooka, T. Nakada, and A. Hasegawa. Feasibility of densely dispersion managed soliton transmission at 160 Gb/s. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 12 (6):633–635, 2000.
- [76] M. Perez-Maldonado and H.C. Rosu. Solitones no autónomos en fibras ópticas. *Rev. Mex. Fís.*, 61:351–355, 2015.

- [77] N. Akhmediev and V.V. Afanasjev. Novel arbitrary-amplitude soliton solutions of the cubic-quintic complex Ginzburg-Landau equation. *Phys. Rev. Lett.*, 75 (12):2320–2324, 1995.
- [78] J. M. Soto-Crespo, N. N. Akhmediev, V. V. Afanasjev, and S. Wabnitz. Pulse solutions of the cubic-quintic complex Ginzburg-Landau equation in the case of normal dispersion. *Phys. Rev. E.*, 55 (4):4783–4796, 1997.
- [79] M. Facao and M. I. Carvalho. Existence and stability of solutions of the cubic complex Ginzburg-Landau equation with delayed raman scattering. *Phys. Rev. E.*, 92:022922–1–022922–5, 2015.
- [80] G. P. Agrawal. Optical pulse propagation in doped fiber amplifiers. *Physical Rev. A.*, 44 (11):7493–7501, 1991.
- [81] R. Conte and M. Musette. Exact solutions to the complex Ginzburg-Landau equation of nonlinear optics. *Pure Appl. Opt.*, 4:315–320, 1995.
- [82] N. N. Akhmediev, V. V. Afanasjev, and J. M. Soto-Crespo. Singularities and special soliton solutions of the cubic-quintic complex Ginzburg-Landau equation. *Phys. Rev. E.*, 53 (1):1190–1201, 1996.
- [83] M. Pérez. Estudio de correlaciones espectrales de fotones generados por mezcla de cuatro ondas con automodulación de fase en cascada, pre-inicio de generación de supercontinuo. Master’s thesis, División de Ciencias e Ingenierías, Campus León, Universidad de Guanajuato, 2013.
- [84] A. Ankiewicz and C. Pask. Geometric optics approach to light acceptance and propagation in graded index fiber. *Opt. Quant. Electron.*, 9:87–109, 1977.
- [85] A. Ankiewicz and C. Pask. Regular and irregular motion: new mechanical results and fibre optics analogies. *J. Phys. A*, 16:3657–3673, 1983.
- [86] M. Moshinsky and A. Szczepaniak. The Dirac oscillator. *J. Phys. A*, 22:L817–L819, 1989.

- [87] R. Bijker. Supersymmetry in nuclear physics. *J. Phys. Conf.*, 237:1–16, 2010.
- [88] S. K. Moayedi and A. Rostami. Exact treatments of light propagation in inhomogeneous slab waveguides using supersymmetric quantum mechanics. *Il Nuovo Cimento B*, 118:729–734, 2003.
- [89] M. S. Sodha and A. K. Ghatak. *Inhomogeneous Optical Waveguides*. Plenum Press, 1977.
- [90] D. M. Pozar. *Microwave Engineering*. Wiley, 2005.
- [91] J. D. Love and A. K. Ghatak. Exact solution for tm modes in graded index slab waveguides. *IEEE J. Quantum Electronics*, QE-15:14–16, 1979.
- [92] S. K. Moayedi and A. Rostami. Pt-invariant helmholtz optics and its applications to slab waveguides. *Eur. Phys. J. B.*, 36:359–363, 2003.
- [93] M.-A. Miri, M. Heinrich, and D. N. Christodoulides. Supersymmetric optical waveguides. *Proc. of SPIE*, 8980:89801F–1–8901F–8, 2014.
- [94] H. C. Rosu. *Short survey of Darboux transformations, Proceedings “Symmetries in Quantum Mechanics and Quantum Optics” edited by A. Ballesteros, F. J. Herranz, L. M. Nieto, J. Negro and C. M. Perena. Arxiv*, (Serv. de Publ. Univ. Burgos, Burgos, Spain, 1999), (quant-ph/9809056):301–3015, 1998.
- [95] J. M. Senior. *Optical Fiber Communications*. Prentice Hall, 2009.
- [96] J. Granier. Light propagation in square law media with random imperfections. *Wave Motion*, 31:1–19, 2000.
- [97] Gurnett, D.A., and A. Bhattacharjee. *Introduction to Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2005.
- [98] A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall, 2003.
- [99] T. Tamir. *Guided- Wave Optoelectronics*. Springer-Verlag, 1988.

- [100] A. Rostami and M. S. Oskouei. Investigation of dispersion characteristic in MI- and MII-type single mode optical fibers. *Optics Comm.*, 271:413–420, 2006.
- [101] X. Zhang and X. Tian. Analysis of waveguide dispersion characteristics of WI- and WII-type triple-clad single-mode fibers. *Optics & Laser Technology*, 35:237–244, 2003.
- [102] P. Markos and C. M. Soukoulis. *Wave Propagation from electrons to photonics crystals and left-handed materials*. Princeton University Press, 2008.
- [103] H. C. Rosu and O. Cornejo-Pérez. Supersymmetric pairing of kinks for polynomial nonlinearities. *Phys. Rev. E*, 71:046607–1–046607–7, 2005.
- [104] O. Cornejo-Pérez and H. C. Rosu. Nonlinear second order ODE's, factorizations and particular solutions. *Progress of Theoretical Physics*, 114, (3):533–538, 2005.
- [105] H. C. Rosu, O. Cornejo-Pérez, and P. Ojeda-May. Traveling kinks in cubic nonlinear Ginzburg-Landau equations. *Phys. Rev. E*, 85:037102–1–037102–5, 2012.
- [106] H. C. Rosu, O. Cornejo-Pérez, M. Pérez Maldonado, and J. A. Belinchón. Extension of a factorization method of nonlinear second order ODE's with variable coefficients. *Rev. Mex. Fís.*, 63 (3):218–222, 2017.
- [107] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Rev. Mod. Phys.*, 61:763–915, 1989.
- [108] D.H. Peregrine. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions. *J. Australian Math. Soc. B*, 25:16–43, 1983.

# Apéndice A

## Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

### A.1. Solución de la ecuación Korteweg-de Vries (KdV)

El fenómeno descrito por Rusell puede ser expresado por una ecuación diferencial parcial no lineal de tercer orden. Recordando que una ecuación diferencial parcial es matemáticamente una ecuación que contiene una función desconocida de más de una variable, así como algunas derivadas de la función con respecto a las diferentes variables independientes. En una aplicación practica las ecuaciones diferenciales parciales describen procesos dinámicos que tiene dependencia temporal (por lo tanto, denotada por  $t$ ) y (normalmente sólo hasta 3 variables) espaciales (por lo tanto, se denotan por  $x$ ,  $y$ , y  $z$ ), la ecuación Korteweg de Vries (KdV), es no lineal ya que en el segundo término muestra un producto que depende de la función y es de tercer orden.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + 6\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0, \quad (\text{A.1})$$

Tiene soluciones exactas ya que no existe ninguna condición inicial o de frontera. Su solución es llamada Solitónica. Iniciamos considerando la función de onda tal que

$$\psi(x, t) = A(x - vt) \equiv A(\xi), \quad (\text{A.2})$$

donde  $c$  representa la velocidad de la onda. Si derivamos la ecuación (A.2) y la sustituimos en (A.1) tenemos una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$-v \frac{dA}{d\xi} + 6A \frac{dA}{d\xi} + \frac{d^3 A}{d\xi^3} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Integrando esta ecuación directamente por las derivadas totales, tenemos

$$-vA + 3A^2 + \frac{d^2 A}{d\xi^2} = c_1, \quad (\text{A.4})$$

donde  $c_1$  es la constante de integración. Con el fin de obtener una función de primer orden para  $A$  se multiplica por  $\frac{dA}{d\xi}$  es decir

$$\begin{aligned} -vA \frac{dA}{d\xi} + 3A^2 \frac{dA}{d\xi} + \frac{d^2 A}{d\xi^2} \frac{dA}{d\xi} &= c_1 \frac{dA}{d\xi} \\ -vAdA + 3A^2 dA + \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dA}{d\xi} \right)^2 &= c_1 dA. \end{aligned}$$

Integrando nuevamente tenemos

$$-\frac{v}{2}A^2 + A^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{dA}{d\xi} \right)^2 = c_1 A + c_2, \quad (\text{A.5})$$

tal que  $c_2$  es una constante de integración. Ahora resolvemos para  $\frac{dA}{d\xi}$

$$\frac{dA}{d\xi} = \sqrt{P(A)}, \quad (\text{A.6})$$

donde  $P(A)$  es el polinomio cúbico

$$P(A) = -A^3 + \frac{v}{2}A^2 + c_1 A + c_2.$$

Si tomamos las raíces positivas de (A.6) y suponemos que tiene raíces distintas de cero: teniendo que  $\alpha$  tiene multiplicidad uno y  $\beta$  de multiplicidad 2, con  $\beta < \alpha$ .  $P$  será

$$P(A) = (A - \beta)^2 (\alpha - A), \quad (\text{A.7})$$

Para  $\beta < A < \alpha$ , la ecuación (A.6) puede escribirse

$$d\xi = \frac{dA}{(A - \beta)\sqrt{\alpha - A}}, \quad (\text{A.8})$$

haciendo el cambio de variable

$$A = \beta + (\alpha - \beta) \operatorname{sech}^2 \theta, \quad (\text{A.9})$$

tal que la derivada de  $A$  con respecto de  $\theta$  es

$$\frac{dA}{d\theta} = 2(\alpha - \beta) \operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta$$

por lo que la ecuación (A.8) toma la forma

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{2(\alpha - \beta) \operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta d\theta}{(\alpha - \beta) \operatorname{sech}^2 \theta \sqrt{\alpha - (\beta + (\alpha - \beta) \operatorname{sech}^2 \theta)}} \\ d\xi &= \frac{2 \tanh \theta d\theta}{\sqrt{\alpha - \beta} \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 \theta}} \\ d\xi &= \frac{\tanh \theta d\theta}{\sqrt{\alpha - \beta} \tanh \theta} \\ d\xi &= \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha - \beta}} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

integramos de 0 a  $\theta$  y de 0 a  $\xi$

$$\begin{aligned} \int_0^\xi d\xi &= \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha - \beta}} \\ \xi &= \frac{\theta}{\sqrt{\alpha - \beta}} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

recordando que  $\xi = x - vt$ , por lo tanto

$$\theta = \frac{\sqrt{\alpha - \beta}}{2} (x - vt),$$

tal que regresando a la ecuación (A.9) tenemos

$$A(x, t) = \beta + (\alpha - \beta) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{\alpha - \beta}}{2} (x - vt) \right) \quad (\text{A.12})$$

comparando las expresiones (A.5) y (A.7) para  $P(A)$ , podemos ver que la velocidad de la onda es

$$v = 2\alpha - 4\beta \quad (\text{A.13})$$

De modo que, usando (A.12) y (A.13) en (A.2) obtenemos

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= A(x,t) \\ &= \beta + (\alpha - \beta) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{\alpha - \beta}}{2} (x - (2\alpha - 4\beta)t) \right),\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

siendo (A.14) el denominado “Solitón de KdV”.

# Apéndice B

## Ecuación no-lineal de Schrödinger (NLS)

### B.1. Solución de la ecuación no lineal de Schrödinger

Otra de las principales ecuaciones en la representación solitónica dentro de medios dispersivos es la ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS) la cual tiene dependencia de un potencial espacio-temporal, descrita como

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \gamma|\psi|^2\psi + V(x,t)\psi = 0 \quad (\text{B.1})$$

generalmente cuando el potencial  $V(x,t) = V(x)$  se le conoce como Ecuación de Gross-Pitaevski (GP) cuando el potencial es una función de la posición solamente, teniendo que la dependencia del tiempo aparece sólo como un término de fase en la función de onda. La ecuación NLS puede ser encontrada en diferentes problemas de física, óptica y mecánica cuántica, mientras que la ecuación de GP es utilizada para describir los condensados de Bose-Einstein.

Aquí se desarrollará la solución del caso trivial donde el potencial es  $V(x,t) = 0$  de modo que la ecuación (B.1) es

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \gamma|\psi|^2\psi = 0 \quad (\text{B.2})$$

Se considera el ansatz de la forma

$$\Psi(x, t) = A(x, t)e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} \quad (\text{B.3})$$

con  $A(x, t)$  y  $\eta(x, t)$  funciones reales. Ahora derivando (B.3) con respecto a  $x$  y  $t$ , donde se usará la notación  $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi_x$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi_t$  y  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi_{xx}$

$$\begin{aligned} \Psi_t &= iAe^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} (\eta_t + \alpha) + e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_t \\ \Psi_x &= iAe^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} (\eta_x) + e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_x \\ \Psi_{xx} &= i \left( Ae^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} \eta_{xx} \right. \\ &\quad \left. + \eta_x \left( iAe^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} \eta_x + e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_x \right) \right) \\ &\quad + e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_{xx} + ie^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_x \eta_x \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo (B.3) y (B.4) en (B.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \Rightarrow & i \left( iAe^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} (\eta_t + \alpha) + e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_t \right) \\ & + \frac{1}{2} i \left( Ae^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} \eta_{xx} + \eta_x \left( iAe^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} \eta_x + e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_x \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_{xx} + ie^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} A_x \eta_x \\ & + \gamma \left| Ae^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} \right|^2 Ae^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} = 0 \\ \Rightarrow & e^{i[\eta(x, t) + \alpha t]} \left[ -A (\eta_t + \alpha) + iA_t + \frac{i}{2} A \eta_{xx} - \frac{1}{2} A (\eta_x)^2 \right. \\ & \left. + i\eta_x A_x + \frac{1}{2} A_{xx} + \gamma A^3 \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Como podemos observar en (B.5), el único término que puede ser cero es el segundo término, ya que la exponencial es cero cuando la función exponencial tiende a infinito, por lo tanto

$$\begin{aligned} - & A (\eta_t + \alpha) + iA_t + \frac{i}{2} A \eta_{xx} - \frac{1}{2} A (\eta_x)^2 \\ + & i\eta_x A_x + \frac{1}{2} A_{xx} + \gamma A^3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Separando la parte real y la parte imaginaria de (B.6)

$$-A(\eta_t + \alpha) - \frac{1}{2}A(\eta_x)^2 + \frac{1}{2}A_{xx} + \gamma A^3 = 0 \quad (\text{B.7})$$

y

$$A_t + \frac{1}{2}A\eta_{xx} + \eta_x A_x = 0 \quad (\text{B.8})$$

Sean  $A(x, t) = A(x - vt)$  y  $\eta(x, t) = \eta(x - vt)$ , tal que sea  $\xi = x - vt$  de modo que  $A_x = A_\xi$ ,  $A_t = -vA_\xi$ ,  $\eta_x = \eta_\xi$  y  $\eta_t = -v\eta_\xi$ , entonces haciendo este cambio de variable en (B.7) y (B.8) tenemos

$$vA\eta_\xi - A\alpha - \frac{1}{2}A(\eta_\xi)^2 + \frac{1}{2}A_{\xi\xi} + \gamma A^3 = 0 \quad (\text{B.9})$$

y

$$-vA_\xi + \frac{1}{2}A\eta_{\xi\xi} + \eta_\xi A_\xi = 0 \quad (\text{B.10})$$

Tomando (B.10) y multiplicándola por  $A$  obtenemos

$$-vAA_\xi + \frac{1}{2}A^2\eta_{\xi\xi} + A\eta_\xi A_\xi = 0$$

de donde podemos notar que

$$\frac{d}{d\xi} (A^2 (\eta_\xi - v)) = 0$$

de modo que al integrarla obtenemos

$$A^2 (\eta_\xi - v) = c_1 \quad (\text{B.11})$$

donde  $c_1$  es una constante de integración. Así de (B.11) obtenemos

$$\eta_\xi = \left( \frac{c_1}{A^2} + v \right) \quad (\text{B.12})$$

introduciendo (B.12) en (B.9) tenemos

$$\begin{aligned}
vA \left( \left( \frac{c_1}{A^2} + v \right) \right) - A\alpha - A \left( \left( \frac{c_1}{A^2} + v \right) \right)^2 + \frac{1}{2}A_{\xi\xi} + \gamma A^3 &= 0 \\
\frac{1}{2}A_{\xi\xi} - \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{A^3} + \frac{1}{2}Av^2 - A\alpha + \gamma A^3 &= 0
\end{aligned} \tag{B.13}$$

por lo que de (B.13) tenemos

$$A_{\xi\xi} = \frac{c_1^2}{A^3} + 2 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A - 2\gamma A^3 \tag{B.14}$$

Multiplicando (B.14) por  $2A_\xi$  tenemos

$$2A_\xi A_{\xi\xi} = \left( \frac{c_1^2}{A^3} + 2 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A - 2\gamma A^3 \right) 2A_\xi \tag{B.15}$$

Vemos que del lado izquierdo de (B.15)

$$2A_\xi A_{\xi\xi} = \frac{d}{d\xi} (A_\xi)^2$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi} (A_\xi)^2 &= 2 \left( \frac{c_1^2}{A^3} + 2 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A - 2\gamma A^3 \right) A_\xi \\
d(A_\xi)^2 &= \left( \frac{2c_1^2}{A^3} + 4 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A - 4\gamma A^3 \right) \frac{dA}{d\xi} d\xi \\
d(A_\xi)^2 &= \frac{2c_1^2}{A^3} dA + 4 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) AdA - 4\gamma A^3 dA
\end{aligned} \tag{B.16}$$

integrando (B.16) tenemos

$$\begin{aligned}
\int d(A_\xi)^2 &= 2c_1^2 \int \frac{dA}{A^3} + 4 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) \int AdA - 4\gamma \int A^3 dA \\
(A_\xi)^2 &= -\frac{c_1^2}{A^2} + 2 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A^2 - \gamma A^4 + c_2
\end{aligned} \tag{B.17}$$

donde  $c_2$  es una constante de integración. Operando matemáticamente tenemos

$$\begin{aligned}
\left( \frac{dA}{d\xi} \right)^2 &= -\frac{c_1^2}{A^2} + 2 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A^2 - \gamma A^4 + c_2 \\
\frac{dA}{d\xi} &= \sqrt{-\frac{c_1^2}{A^2} + 2 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A^2 - \gamma A^4 + c_2}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Ahora si analizamos cuando  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , entonces  $A \rightarrow 0$ ,  $A_\xi \rightarrow 0$ ,  $A_{\xi\xi} \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\eta_\xi \rightarrow 0$  y  $\eta_{\xi\xi} \rightarrow 0$  por lo que  $c_1 = c_2 = 0$  por lo tanto tenemos que

$$\frac{dA}{d\xi} = \sqrt{2 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A^2 - \gamma A^4} \quad (\text{B.19})$$

Aplicando separación de variables

$$\frac{dA}{\sqrt{2 \left( \alpha - \frac{1}{2}v^2 \right) A^2 - \gamma A^4}} = d\xi \quad (\text{B.20})$$

operando y haciendo  $\zeta = 2\alpha - v^2$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{A\sqrt{(2\alpha - v^2) - \gamma A^2}} &= d\xi \\ \frac{dA}{A\sqrt{\zeta - \gamma A^2}} &= d\xi \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

haciendo el cambio de variable

$$A = \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech}\theta$$

por lo que la derivada de  $A$  con respecto de  $\theta$  queda

$$\frac{dA}{d\theta} = \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech}\theta \tanh\theta$$

de forma que la ecuación (B.21) queda

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech} \theta \tanh \theta d\theta}{\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech} \theta \sqrt{\zeta - \gamma \left( \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech} \theta \right)^2}} &= d\xi \\
\frac{\tanh \theta d\theta}{\sqrt{\zeta - \zeta \operatorname{sech}^2 \theta}} &= d\xi \\
\frac{\tanh \theta d\theta}{\sqrt{\zeta (1 - \operatorname{sech}^2 \theta)}} &= d\xi \\
\frac{d\theta}{\sqrt{\zeta}} &= d\xi
\end{aligned} \tag{B.22}$$

integramos de 0 a  $\theta$  y de 0 a  $\xi$

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\zeta}} &= \int_0^\xi d\xi \\
\frac{\theta}{\sqrt{\zeta}} &= \xi
\end{aligned} \tag{B.23}$$

recordando que  $\xi = x - vt$ ,  $\zeta = 2\alpha - v^2$  y que  $\theta = \operatorname{sech}^{-1} \left( A \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}} \right)$  tenemos

$$A(x, t) = \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\zeta} (x - vt) \right) \tag{B.24}$$

Multiplicando el argumento de la sech por  $\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\zeta}}$ , de tal forma que podemos compensar el cambio de variable, tenemos que

$$\begin{aligned}
A(x, t) &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\zeta}} \sqrt{\zeta} (x - vt) \right) \\
A(x, t) &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} (x - vt) \right)
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Como vemos la amplitud del pulso es  $A_0 = \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}$  entonces tenemos

$$A(x, t) = A_0 \operatorname{sech} (\sqrt{\gamma} A_0 (x - vt))$$

Ahora resolviendo (B.11) con  $c_1 = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned}
A^2(\xi) (\eta_\xi - v) &= 0 \\
2\eta_{xi} - v &= 0 \\
\frac{d}{d\xi}\eta &= v \\
d\eta &= v d(\xi) \\
\int_0^\eta d\eta &= v \int_0^\xi d(\xi) \\
\eta &= v\xi \\
\eta(x-vt) &= v(x-vt)
\end{aligned} \tag{B.26}$$

De modo que, usando (B.25) y (B.26) en (B.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= A(x,t)e^{i[\eta(x,t)+\alpha]} \\
&= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}} (x-vt) \right) e^{i[v(x-vt)+\alpha]}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

# Apéndice C

## Solitones no-autónomos para distintas soluciones de la ecuación de Schrödinger

### C.1. Solitones no autónomos

Como se mencionó en el capítulo 3 de esta tesis existen diversas soluciones que pueden ser aplicadas en la ecuación no lineal de Schrödinger, como soluciones de la ecuación de Schrödinger de coeficientes variables, en este apéndice se muestran algunas soluciones con sus respectivos solitones no autónomos.

### C.2. Ejemplos de solitones no autónomos

Partiendo de la solución obtenida mediante el mapeo propuesto en el capítulo 3 tenemos que el solitón no autónomo tiene la estructura

$$\Psi(t, z) = q(T, Z) \sqrt{f_3 F(z)} e^{\int [g(z) - \Gamma] dz} e^{-i(a(z)t^2/2 + b(z)t + c(z))}. \quad (\text{C.1})$$

con  $q(T, Z)$  puede ser de cualquier solución de la ENLS estándar (3.6). De esta manera podemos utilizar cualquier solución de solitones autónomos como son:

El solitón de Katyshev<sup>57</sup> que tiene la forma

$$q(T, Z) = A_0 \operatorname{sech} \left( A_0 \sqrt{\frac{\gamma}{2}} (T - vZ) \right) e^{i \left[ \left( \frac{v^2}{4} + \frac{\gamma}{2} A_0^2 \right) Z + \frac{\gamma}{2} (T - vZ) \right]} \quad (\text{C.2})$$

donde  $A_0$  es la amplitud y  $v$  es la velocidad del pulso solitónico.

O bien el solitón de Peregrine<sup>108</sup>

$$q(T, Z) = \sqrt{P_0} \frac{(1 - 4a) \cosh(b_z/L_{NL}) + i \sinh(b_z/L_{NL})}{\sqrt{2a} \cos(\omega_{mod} T) - \cosh(b_z/L_{NL})} + \frac{\sqrt{2a} \cos(\omega_{mod} T)}{\sqrt{2a} \cos(\omega_{mod} T) - \cosh(b_z/L_{NL})} \quad (\text{C.3})$$

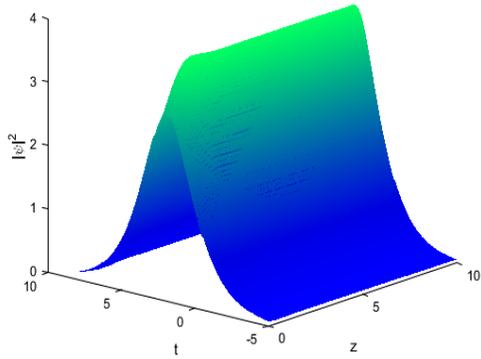
con  $a$  es constante real,  $L_{NL} = (\gamma P_0)^{-1}$ .

O para el caso asintótico el solitón de Akhmediev-Peregrine<sup>108</sup>

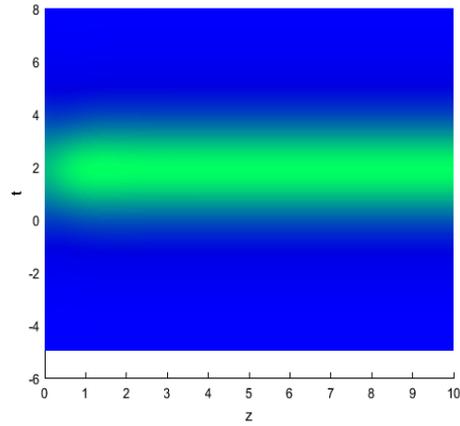
$$q(T, Z) = \sqrt{P_0} \exp(iz/L_{NL}) \frac{1 - 4(1 + 2iz/L_{NL})}{1 + 4(T/T_0)^2 + 4(z/L_{NL})^2} \quad (\text{C.4})$$

con  $T_0 = (\beta_2 L_{NL})^{1/2}$ .

Se dan solo dos ejemplos en este apéndice, se pueden obtener las otras soluciones propuestas, siendo que estas a su vez se toman para ondas extremas.

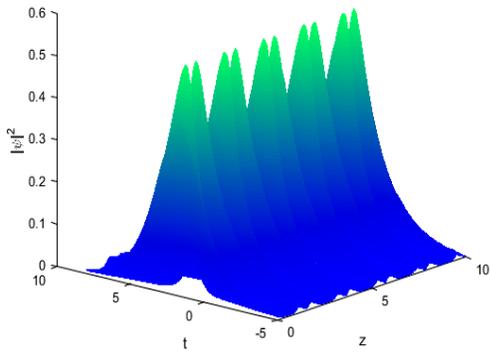


(a)

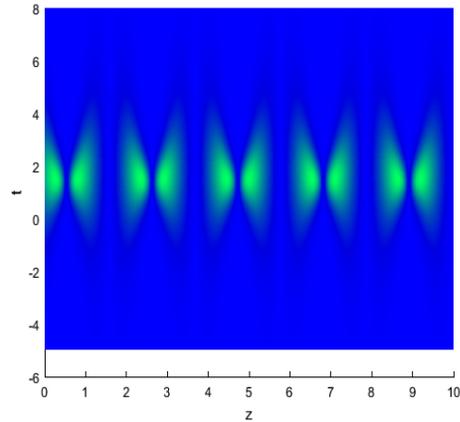


(b)

FIGURA C.1: Solitones no autónomos obtenidos de (C.1), con la solución autónoma de Katyshev (C.2), con los parámetros:  $\beta_2 = 0.001$  (GDV),  $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación del solitón de Katyshev con dispersión igual a  $\beta(z) = b_0 \exp(-\sigma * z) \cos(\delta * z)$ , con  $b_0 = 0.2$ ,  $\sigma = 2$  y  $\delta = 2$ , con no linealidad igual a 1, b) Gráfica de contorno de la propagación del solitón de Katyshev.



(a)



(b)

FIGURA C.2: Solitones no autónomos obtenidos de (C.1), con la solución autónoma de Katyshev (C.2), con los parámetros:  $\beta_2 = 0.001$  (GDV),  $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación del solitón de Katyshev con dispersión igual a  $\beta(z) = \cos(3 * z)$ , con no linealidad igual a 1, b) Gráfica de contorno de la propagación del solitón de Katyshev.

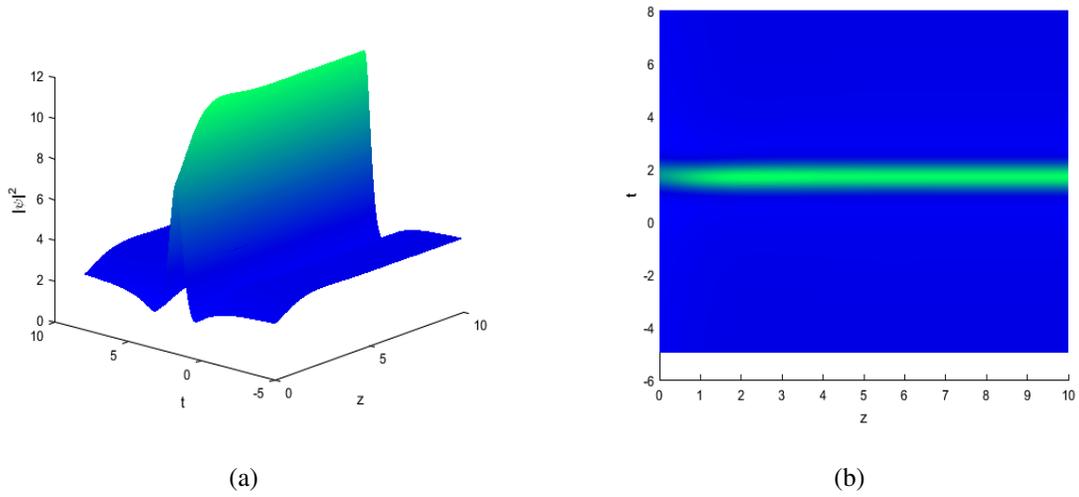


FIGURA C.3: Solitones no autónomos obtenidos de (C.1), con la solución autónoma de Peregrine (C.3), con los parámetros:  $\beta_2 = 0.001$  (GDV),  $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación del solitón de Peregrine con dispersión igual a  $\beta(z) = b_0 \exp(-\sigma * z) \cos(\delta * z)$ , con  $b_0 = 0.2$ ,  $\sigma = 2$  y  $\delta = 2$ , además de no linealidad igual con 1. b) Gráfica de contorno de la propagación del solitón de Peregrine.

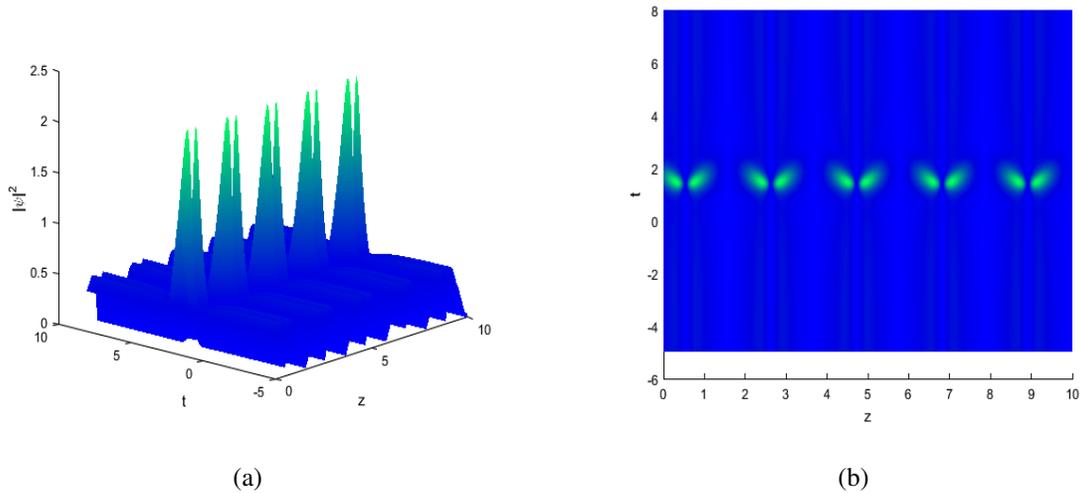


FIGURA C.4: Solitones no autónomos obtenidos de (C.1), con la solución autónoma de Peregrine (C.3), con los parámetros:  $\beta_2 = 0.001$  (GDV),  $T_2 = 0.1$ , bajo dispersión anómala; donde (a) Propagación del solitón de Peregrine con dispersión igual a  $\beta(z) = \cos(3 * z)$ , además de no linealidad igual con 1. b) Gráfica de contorno de la propagación del solitón de Peregrine.

# **Apéndice D**

## **Artículos de Investigación**

## Solitones no autónomos en fibras ópticas

M. Pérez Maldonado y H.C. Rosu

*IPICYT, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica,  
Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico  
e-mail: maximino.perez@ipicyt.edu.mx; hcr@ipicyt.edu.mx*

Received 28 May 2015; accepted 17 June 2015

Soluciones solitónicas de las ecuaciones de Schrödinger no lineales de coeficientes variables que describen muchas situaciones reales de propagación solitónica se pueden obtener usando el mapeo de ‘integrabilidad diseñada’ a la ecuación estandar de Schrödinger no lineal de coeficientes constantes propuesto por He y Li. En este trabajo se presenta este método para el caso de fibras con ganancia/pérdida y se aplica a los casos de los solitones en fibras ópticas con amplificadores y los solitones brillantes en fibras no amplificadas.

*Descriptores:* Solitón; ecuación de Schrödinger no lineal; no autónomo; fibra óptica.

Soliton solutions of the non-linear Schrödinger equation of variable coefficients which describe many real cases of solitonic propagation can be obtained by means of the ‘designable integrability’ mapping to the standard non-linear Schrödinger equation of constant coefficients proposed by He and Li. In this paper, this method of obtaining the non-autonomous soliton solutions is presented for the general case of optical fibers with gain/loss, and applied to fibers with amplifiers, and those allowing the propagation of bright solitons.

*Keywords:* Soliton; non-linear Schrödinger equation; non-autonomous; optical fiber.

PACS: 05.45.Yv; 42.65.Tg; 42.81.Dp

### 1. Introducción

Es bien conocido que para la propagación de pulsos en fibras ópticas una influencia muy significativa tienen la dispersión y disipación de los pulsos y la no linealidad de las fibras. Estas crean una distorsión y pérdida de señal [1–3], fenómenos que han sido estudiados desde finales de los años 60s, aunque fue hasta los años 80s que se utilizaron amplificadores para compensar estas pérdidas [2]. Este proceso de amplificación es usualmente obtenido en fibras ópticas dopadas con sílice [3].

Teóricamente, la propagación de pulsos en fibras ópticas se puede describir por ecuaciones no lineales de la siguiente forma

$$i\psi_z + A(z)\psi_{tt} + B(z)|\psi|^2\psi + iC(z)\psi = 0 \quad (1)$$

las cuales son muy parecidas cuando  $C(z) \sim 0$  a la conocida ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS) de coeficientes constantes, que tiene soluciones solitónicas. Por lo tanto, hay la posibilidad de regímenes de propagación, en especial el régimen de dispersión anómala, en los cuales los pulsos ópticos ordinarios se pueden transformar en pulsos solitónicos [1–3].

En este trabajo, realizamos un tratamiento matemático que consiste en transformar la ecuación no lineal de Schrödinger de coeficientes variables (ENLS-CV), describiendo un pulso dentro de una fibra óptica que presenta pérdida compensada por una ganancia en una ENLS estandar de coeficientes constantes, ecuación que puede ser resuelta por distintos métodos ya bien conocidos [4,5]. Este mapeo fue introducido por He y Li en 2010 pero para las aplicaciones a las fibras ópticas trabajaremos con una simplificación del método propuesto por ellos. Cabe mencionar que el mapeo de He y Li para la obtención de solitones no autónomos requiere el cumplimiento de una condición (ver las Ecs. (17) y/o (18))

entre los tres coeficientes de una ecuación de tipo (1). Solamente las fibras ópticas para las cuales se cumple esta condición permiten la propagación de los pulsos solitónicos.

### 2. Mapeo de He y Li para solitones en fibras ópticas

#### 2.1. Fibras con ganancia variable y tasa de pérdida constante

Este tipo de fibras son productos regulares de la tecnología actual y por esto presentamos el mapeo de He y Li directamente para este ejemplo aplicando los resultados obtenidos a dos casos que aunque sencillos son relevantes en las otras subsecciones. En general, las fibras ópticas modernas tienen no linealidad conocida y la dispersión es un parámetro controlado de manera tecnológica, lo que implica que la ganancia debe cumplir con una condición de compatibilidad así como mencionamos al final de la introducción, la cual se obtiene de manera natural por el mapeo de He y Li. La ecuación no autónoma ENLS-CV que describe la propagación de un pulso solitónico en estas fibras es

$$i\frac{\partial\psi(t,z)}{\partial z} + \frac{\beta(z)}{2}\frac{\partial^2\psi(t,z)}{\partial t^2} - i[g(z) - \Gamma]\psi(t,z) + \hat{\gamma}(z)|\psi(t,z)|^2\psi(t,z) = 0, \quad (2)$$

donde  $\psi$  es la envolvente del campo eléctrico del pulso,  $\beta(z)$  es la dispersión de la velocidad de grupo,  $\hat{\gamma}(z)$  es el coeficiente de no linealidad, parámetros que son dependientes de  $z$ , la coordenada en la longitud de la fibra y variable natural de evolución de los pulsos mientras que  $t$  es la coordenada transversal. La propagación de la onda se ve afectada por una tasa de pérdida constante  $\Gamma$  y una ganancia distribuida  $g(z)$ .

Una manera de garantizar la integrabilidad de (2), es por relacionarla con la ENLS estandar de coeficientes constantes

$$i \frac{\partial q}{\partial \mathcal{Z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \mathcal{T}^2} + \gamma |q|^2 q = 0, \tag{3}$$

donde  $\gamma = \pm 1$ ,  $q = q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$ , y los coeficientes  $\beta(z)$  y  $\hat{\gamma}(z)$  se obtienen analíticamente bajo el mapeo. Proponiendo el ansatz

$$\psi(t, z) = q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) p(z) e^{-i\phi(t, z)}, \tag{4}$$

tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(z, t)$  y  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(z)$ , se encontrará la forma específica para  $\beta, \hat{\gamma}, T, Z, p, \phi$ , donde  $q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$  es solución de (3). He y Li consideran el caso más general con  $p(z, t)$ , sin embargo para la propagación de solitones en fibras ópticas es suficiente tomar  $p$  solamente como función de  $z$  [4].

Sustituyendo (4) en (2), sin pérdida de generalidad, hacemos que  $\beta(z) = (\mathcal{Z}_z / \mathcal{T}_t^2)$  y  $\hat{\gamma}(z) = (\gamma \mathcal{Z}_z / p^2)$ , de donde se obtiene la siguiente ecuación para  $q$

$$i q_{\mathcal{Z}} + \frac{1}{2} q_{\mathcal{T}\mathcal{T}} + \gamma |q|^2 q + (k_1 + i k_2) q_{\mathcal{T}} + (k_3 + i k_4) q = 0, \tag{5}$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \frac{\mathcal{T}_{tt}}{\mathcal{T}_t^2}, \\ k_2 &= \frac{\mathcal{T}_z}{\mathcal{Z}_z} - \frac{\phi_t}{\mathcal{T}_t}, \\ k_3 &= \frac{\phi_z}{\mathcal{Z}_z} - \frac{1}{2} \frac{\phi_t^2}{\mathcal{T}_t^2}, \\ k_4 &= \frac{p_z}{p \mathcal{Z}_z} - \frac{1}{2} \frac{\phi_{tt}}{\mathcal{T}_t^2} - \frac{1}{\mathcal{Z}_z} [g(z) - \Gamma]. \end{aligned}$$

Dado que  $q$  también satisface (3), debemos imponer  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ , para que (5) se vuelva (3). Esto se satisface cuando

$$\mathcal{T}(z, t) = F(z)t + F_1(z), \tag{6}$$

$$\mathcal{Z}(z) = f_0 F(z) + f_1, \tag{7}$$

$$\phi(z, t) = a(z)t^2/2 + b(z)t + c(z), \tag{8}$$

$$p(z) = \sqrt{f_3 F} e^{\int [g(z) - \Gamma] dz}, \tag{9}$$

$$\beta(z) = \frac{f_0 F_z(z)}{F^2}, \tag{10}$$

$$\hat{\gamma}(z) = \frac{\gamma f_0 F_z(z)}{f_3 F} e^{-\int 2[g(z) - \Gamma] dz}, \tag{11}$$

donde  $F_1(z) = f_2 F(z) + f_4$  y los parámetros de la fase son

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{F(z)}{f_0}, \quad b(z) = f_2 \frac{F(z)}{f_0}, \\ c(z) &= \frac{f_2^2 F(z)}{2 f_0} + f_5. \end{aligned} \tag{12}$$

La forma analítica de la función  $F(z)$  depende de cada caso particular, mientras que  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  y  $f_5$  son constantes de integración, de las cuales  $f_1, f_4$  y  $f_5$  pueden ser nulas. De tal manera que la solución (4) tiene la forma

$$\begin{aligned} \psi(t, z) &= q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) \sqrt{f_3 F} \\ &\times e^{\int [g(z) - \Gamma] dz} e^{-i(a(z)t^2/2 + b(z)t + c(z))}. \end{aligned} \tag{13}$$

Notamos que  $f_5$  contribuye a la solución solamente con una rotación de ángulo constante  $\exp(-if_5)$ . Por lo tanto, tomaremos  $f_5 = 0$  sin pérdida de generalidad. Para  $q(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$  se puede escoger cualquier solución de la ENLS estandar (3). Aquí usamos la solución  $q$  de Katyshev y colaboradores [6]

$$\begin{aligned} q(\mathcal{T}, \mathcal{Z}) &= A_0 \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} (\mathcal{T} - v \mathcal{Z}) \right) \\ &\times e^{i \left[ \left( \frac{v^2}{4} + \frac{\gamma A_0^2}{2} \right) \mathcal{Z} + \frac{v}{2} (\mathcal{T} - v \mathcal{Z}) \right]} \end{aligned} \tag{14}$$

donde  $A_0$  es la amplitud y  $v$  es la ‘velocidad’ del pulso solitónico, la cual da la oblicuidad  $\theta = -\arctan(4v)$  del solitón con respecto al eje  $\mathcal{Z}$  [7]. Denotando

$$\mathcal{F}(z) = f_0 F(z) + f_1, \quad \tilde{\mathcal{F}}(z, t) = F(z)t + F_1(z),$$

la solución completa es

$$\begin{aligned} \psi(t, z) &= A(z) \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} [\tilde{\mathcal{F}}(z, t) - v \mathcal{F}(z)] \right) \\ &\times e^{i \left[ \left( \frac{\gamma A_0^2}{2} - \frac{v^2}{4} \right) \mathcal{F}(z) + \frac{v}{2} \tilde{\mathcal{F}}(z, t) - \frac{F(z)}{2f_0} (t + f_2)^2 \right]}, \end{aligned} \tag{15}$$

donde

$$A(z) = A_0 \sqrt{f_3 F(z)} e^{\int [g(z) - \Gamma] dz}. \tag{16}$$

Se puede observar que la solución y el comportamiento del pulso propagandose en una fibra óptica se obtienen si conocemos los parámetros de dispersión de la velocidad de grupo, de no linealidad y de pérdida y ganancia. De (10) y (11) se obtiene que  $F(z)$  tiene la siguiente forma funcional

$$F(z) = \frac{f_3}{\beta(z)} \frac{\hat{\gamma}(z)}{\gamma} \exp \left[ 2 \int (g(z) - \Gamma) dz \right]. \tag{17}$$

La función  $F(z)$  y también  $F_1(z), \mathcal{F}(z)$  y  $\tilde{\mathcal{F}}(z, t)$  están relacionadas con el inverso del ancho del solitón no autónomo [8,9]. La relación (17) se puede escribir también en forma de la condición

$$\frac{\gamma \beta(z) F(z)}{\hat{\gamma}(z)} \exp \left[ -2 \int (g(z) - \Gamma) dz \right] = f_3. \tag{18}$$

Este tipo de condición fue también obtenido en [8] por el método de separar la ecuación no autónoma en un sistema de dos ecuaciones para la fase y la amplitud.

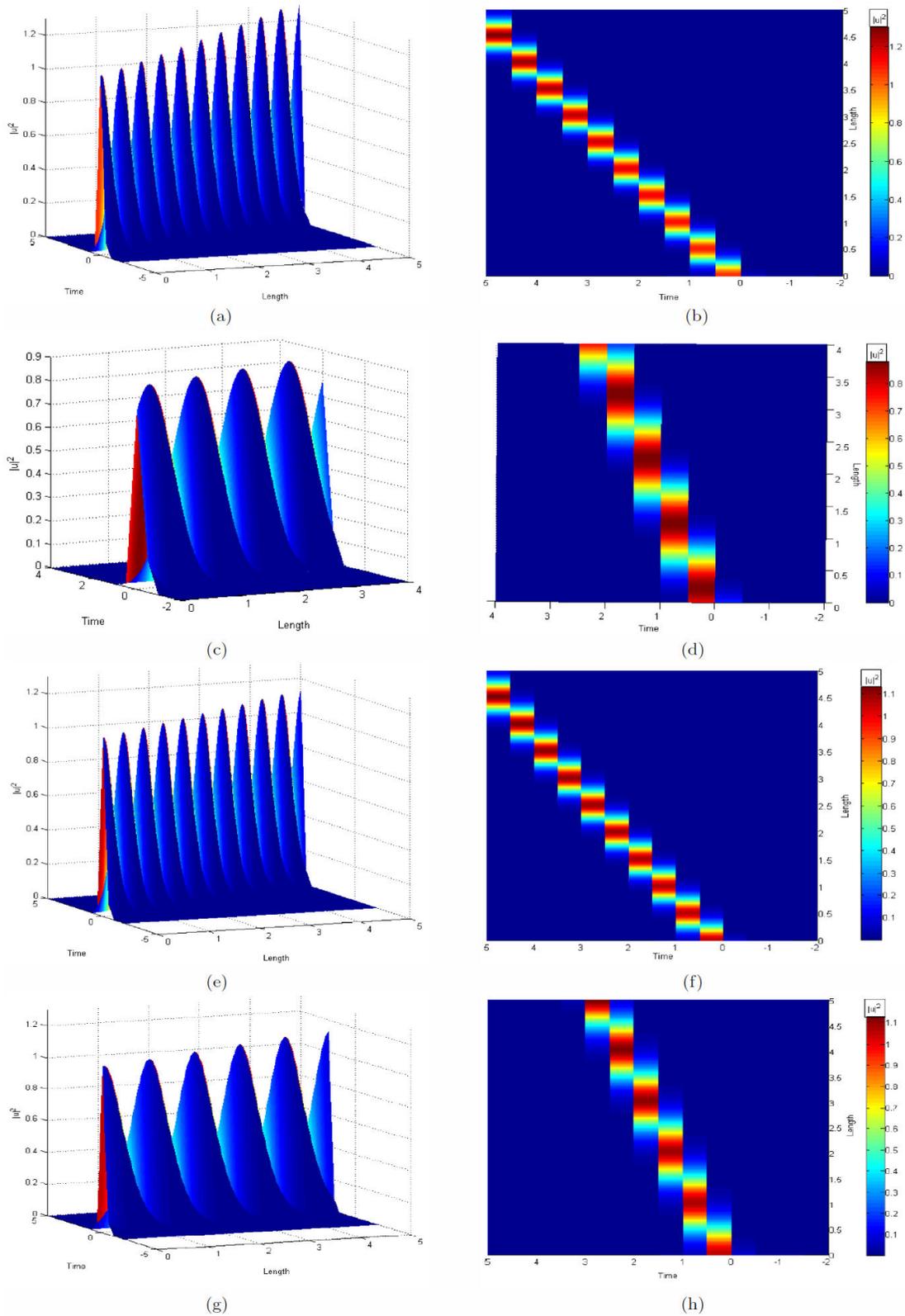


FIGURA 1. Gráficas del solitón no autónomo (21). (a) Propagación del pulso con  $v = 1$  para pérdida/ganancia = 0.6, con  $v_g = 1$ , dispersión de la velocidad de grupo 10, tiempo de relajación 0.2, bajo dispersión anómala; en (b), la gráfica de contorno correspondiente. (c) Propagación del pulso no autónomo con  $v = 2$  para los mismos parámetros de fibra óptica; en (d), la gráfica de contorno del pulso en este caso. (e) Propagación del pulso con  $v = 1$  para pérdida/ganancia = 0.8 con los otros parámetros iguales a los anteriores, (f), gráfica de contorno del pulso. (g) y (h) Propagación del pulso para el mismo cociente pérdida/ganancia de 0.8 y sin cambios en los otros parámetros pero con  $v = 2$  y gráfica de contorno del pulso, respectivamente.

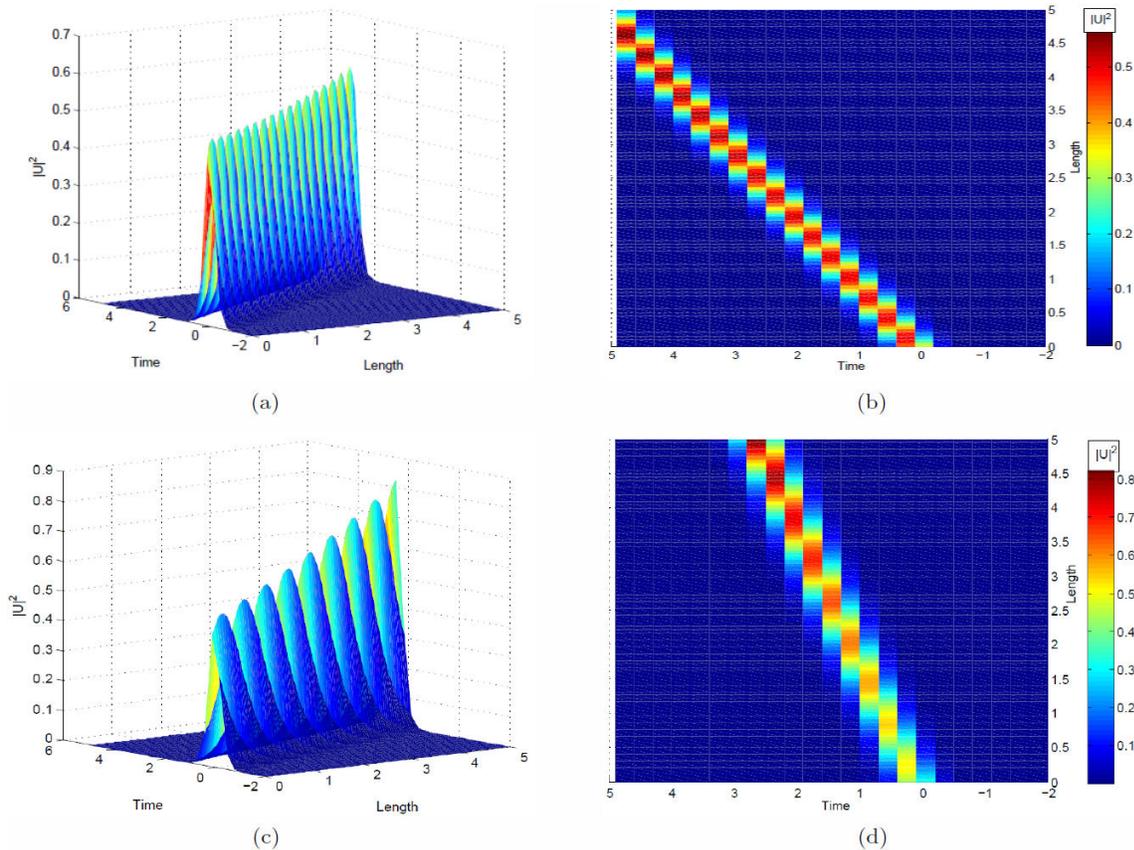


FIGURA 2. Gráficas de la propagación del solitón no autónomo (26) con  $v_g = 1$ , dispersión de la velocidad de grupo 10, tiempo de relajación 0.1, en regimen de dispersión anómala. (a) y (b) Propagación del pulso para  $v = 1$  y coeficiente de ganancia  $G_1(z) = 1$  y la gráfica de contorno del solitón en este caso. (c) y (d) Lo mismo para  $v = 2$ .

**2.2. Solitones en fibras con amplificadores**

La propagación de solitones en fibras amplificadas está descrita por la ecuación no lineal de Schrödinger de coeficientes constantes pero no en forma estandar [10]

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2}(s + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u - \frac{i}{2} \mu u = 0 \quad (19)$$

con  $\xi = z/L_D$ ,  $L_D = T_2^2/\beta_2$  es la longitud de dispersión,  $T_2$  es el tiempo de relajación,  $\beta_2$  es el coeficiente de dispersión de la velocidad de grupo,  $\tau = (t - z/v_g)/T_2$  el tiempo normalizado,  $s = \text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$ ,  $\delta = g_0 L_D$  es la curvatura del perfil de ganancia,  $\mu = (g_0 - \alpha)L_D$  ganancia neta y  $\alpha$  el coeficiente de pérdida.

En este caso la función  $F$  es compleja

$$F(\xi) = -\frac{f_3(s - i\delta)}{\gamma(s^2 + \delta^2)} e^{\mu\xi} \quad (20)$$

La solución no autónoma de (19) obtenida por el mapeo HeLi, es decir aplicando (15) a este caso, es

$$u(\tau, \xi) = A(\xi) \text{sech} \left( \sqrt{\frac{\gamma A_0^2}{2}} \frac{e^{\mu\xi} (s - i\delta)}{s^2 + \delta^2} (\tau - v + 1) \right) \times e^{i \left[ \frac{s e^{\mu\xi}}{2(s^2 + \delta^2)} (\gamma A_0^2 - v^2 + v(\tau + 1) - (\tau + 1)^2) \right]} \quad (21)$$

donde

$$A(\xi) = A_0 \sqrt{\frac{-s + i\delta}{s^2 + \delta^2}} \times e^{\mu\xi + \frac{\delta e^{\mu\xi}}{2(s^2 + \delta^2)} (\gamma A_0^2 - v^2 + v(\tau + 1) - (\tau + 1)^2)} \quad (22)$$

En estas fórmulas,  $\gamma = \pm 1$  es el parámetro de no linealidad en el caso autónomo.

Gráficas tridimensionales de esta solución solitónica se presentan en Fig. (1) para una fibra óptica con perfil de ganancia parabólico, donde el cociente de pérdida/ganancia tiene el valor  $\alpha/g_0 = 0.6$  para las imagenes (a)-(d) y el valor 0.8 para las imagenes (e)-(h). Se consideró el regimen de dispersión anomala  $s = -1$ ,  $\gamma = -1$  y  $\delta = 0.24$  para  $\alpha/g_0 = 0.6$  y  $\delta = 0.32$  para  $\delta = 0.32$  para  $\alpha/g_0 = 0.8$ . Las imagenes (a) y (e) se presentan con velocidad  $v = 1$  y las imagenes (c) y (g) con  $v = 2$ . En las imagenes (b),(d),(f) y (h) se muestra la perspectiva superior del pulso en cada caso. La disminución de la amplitud de los solitones en el caso de la velocidad más alta se puede entender de la expresión (22) donde el término en  $v^2$  es negativo teniendo la contribución principal a este efecto. Por otro lado, en el caso de la pérdida/ganancia=0.8,

este efecto es menos pronunciado debido a que el cociente  $\delta/(s^2 + \delta^2) \sim 0.17$  lo que es menos de 0.20 para el caso de pérdida/ganancia=0.6. Además, estas gráficas muestran que el ancho de los solitones es proporcional al parámetro  $v$  de la oblicuidad.

### 2.3. Solitones brillantes en fibras ópticas con ganancia y no linealidad variables

En este caso, la dinámica de propagación de la envolvente eléctrica del pulso es representada por la siguiente ecuación de coeficientes variables [11, 12]

$$i \frac{\partial U(Z, T)}{\partial Z} + \Omega(Z) \frac{\partial^2 U(Z, T)}{\partial T^2} + \frac{i}{2} G_1(Z) U(Z, T) + R(Z) |U(Z, T)|^2 U(Z, T) = 0, \quad (23)$$

donde  $\Omega(Z)$  es el coeficiente de dispersión,  $R(Z)$  es el parámetro de no linealidad de Kerr, y  $G_1(Z)$  es el coeficiente de ganancia. Después de identificar los coeficientes  $\beta(z)$  y  $\hat{\gamma}(z)$  con  $\Omega(Z)$  y  $R(Z)$  tal que  $z = Z$  y  $t = T$  y al combinar (10) y (11) se obtiene

$$R(Z) = 2\gamma_c \Omega(Z) \exp \left[ - \int G_1(Z) dZ \right]. \quad (24)$$

La dispersión diseñada la escogemos como una función que decae de manera exponencial,  $\Omega(Z) = e^{-Z}$ , porque este tipo de dispersión fue realizada experimentalmente [13].

Para este caso el pulso inicial se puede transformar en un solitón de ancho constante  $1/F$  donde  $F$  está dado por

$$F = 2f_3 \frac{\gamma_c}{\gamma}. \quad (25)$$

Solitones de otro ancho no se pueden propagar en fibras con las características mencionadas en esta subsección. La solución no autónoma tiene la siguiente forma

$$U(T, Z) = A(Z) \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \gamma_c f_3 A_0 ((T+2) - v) \right) \times e^{i \frac{\gamma_c f_3}{\gamma} \left( (\gamma A_0^2 - \frac{v^2}{2}) + v(T+2) - (T+2)^2 \right)}, \quad (26)$$

donde

$$A(Z) = \sqrt{\frac{2\gamma_c}{\gamma}} f_3 A_0 e^{\frac{1}{2} \int G_1(Z) dZ}. \quad (27)$$

La evolución de este solitón no autónomo se presenta en las gráficas tridimensionales de la Fig. (2) para las velocidades  $v = 1$  y  $v = 2$  en el caso  $G_1 = 1$  mostrando el crecimiento exponencial de la amplitud y la dependencia de oblicuidad del ancho.

### 3. Conclusión

Usando el método de He y Li se han obtenido las formas explícitas de los solitones no autónomos propagándose en una fibra óptica en un par de casos de importancia experimental. En las condiciones apropiadas para el manejo de solitones no autónomos, se puede realizar un mapeo que convierte la ecuación NLS-CV en una ecuación NLS estandar, si se cumple la condición  $F(z) = (f_3/\beta(z))(\hat{\gamma}(z)/\gamma) \exp[\int 2(g(z) - \Gamma) dz]$  donde  $F(z)$  es una función que parametriza el mapeo. Esta condición garantiza la integrabilidad del sistema y muestra que los solitones no autónomos son posibles solo si los parámetros de la fibra óptica cumplen esta condición. En general, los solitones no autónomos difieren del solitón estandar en base al cual se construyen en el método de He y Li por tener una amplitud y un ancho que dependen de los parámetros materiales de la fibra óptica en la cual se propagan.

### 4. Agradecimientos

El primer autor desea agradecer al CONACyT por la beca doctoral otorgada. Además los autores agradecen al revisor por sus comentarios que llevaron a mejorar la calidad de este trabajo.

1. G.P. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics" Third Edition, Academic Press, (1995).
2. A. Hasegawa and M. Matsumoto, "Optical Solitons in Fibers" Third Edition, Springer-Verlag, (2003).
3. M.J. Ablowitz, B. Prinari and A.D. Trubatch, "Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems" Cambridge University Press, (2004).
4. V.I. Talanov, *JETP Lett.* **11** (1970) 199.
5. J. He and Y. Li, *Stud. Appl. Math.* **126** (2011) 1.
6. Y.V. Katyshev, N.V. Makhaldiani, and V.G. Makhankov, *Phys. Lett.* **66A** (1978) 456.
7. V.E. Zakharov and A.B. Shabat, *JETP* **34** (1972) 62.
8. V.I. Kruglov, A.C. Peacock, and J.D. Harvey, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 056619.
9. S.A. Ponomarenko and G.P. Agrawal, *Opt. Express* **15** (2007) 2963.
10. L.W. Liou and G.P. Agrawal, *Opt. Commun.* **124** (1996) 500.
11. Z.Y. Yang, L.Y. Zhao, T. Zhang, and R.H. Yue, *J. Opt. Soc. Am. B.* **28** (2011) 236.
12. V.N. Serkin, A. Hasegawa, and T.L. Belyaeva *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 074102.
13. D.J. Richardson, R.P. Chamberlin, L. Dong, and D.N. Payne, *Electron. Lett.* **31** (1995) 1681.

## Extension of a factorization method of nonlinear second order ODE's with variable coefficients

H.C. Rosu

*Instituto Potosino de Investigacion Cientifica y Tecnologica,  
Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico.  
email: hcr@ipicyt.edu.mx*

O. Cornejo-Pérez

*Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro,  
Centro Universitario Cerro de las Campanas, 76010 Santiago de Querétaro, Mexico.  
e-mail: octavio.cornejo@uaq.mx*

M. Pérez-Maldonado

*Instituto Potosino de Investigacion Cientifica y Tecnologica,  
Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico.  
e-mail: maximino.perez@ipicyt.edu.mx*

J.A. Belinchón

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Naturales,  
Universidad de Atacama, Copayapu 485 Copiapó, Chile  
e-mail: abelcal@ciccp.es*

Received 2 December 2016; accepted 16 February 2017

The factorization of nonlinear second-order differential equations proposed by Rosu and Cornejo-Pérez in 2005 is extended to equations containing quadratic and cubic forms in the first derivative. A few illustrative examples encountered in physics are provided.

*Keywords:* Nonlinear second order equation; factorization; powers of first derivative.

La factorización de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales propuesta por Rosu y Cornejo-Pérez en 2005 se extiende a ecuaciones con potencias cuadráticas y cúbicas en la primera derivada. Se proporcionan algunos ejemplos físicos ilustrativos.

*Descriptores:* Ecuación de segundo orden no lineal; factorización; potencias de la primera derivada.

PACS: 02.30.Hq; 11.30.Pb

### 1. Introduction

Finding exact solutions of nonlinear differential equations has long been an active field of research because of the insight they offer in the understanding of many processes in physics, biology, chemistry, and other scientific areas. Among the methods developed to find analytical solutions of nonlinear ordinary differential equations (ODEs) and nonlinear partial differential equations (PDEs) we enumerate the truncation procedure in Painlevé analysis [1], the Hirota bilinear method [2], the tanh function method [3, 4], the Jacobi elliptic function method [5], and the Prellé-Singer method [6, 7].

The factorization method, which in mathematics has roots that go to Euler and Cauchy, is a well-known technique used to find exact solutions of linear second order ODEs in an algebraic manner. In physics, it has attracted much interest as an elegant way of solving fundamental eigenvalue problems in quantum mechanics, and later due primarily to its natural association with supersymmetric quantum mechanics [8–14]. The latter approach has been extended to some types of nonlinear ODEs [15], and to more dimensions [16–19] as well. In recent times, the factorization technique has been ap-

plied to find exact solutions of many nonlinear ODEs [20], and to nonlinear PDEs, mainly in the context of traveling waves [21–29]. The factorization technique was further extended to a class of coupled Liénard equations, which also included a coupled version of the modified Emden equation, by Hazra *et al* [30]. Their algorithm can be generalized to higher order scalar and coupled ODEs, but one has to pay the price of increased algebraic complexity. In addition, Tiwari *et al* [31] factorized even more complicated quadratic and mixed Liénard-type nonlinear systems, among which the coupled Mathews-Lakshmanan nonlinear oscillators.

In this paper, we generalize the factorization technique that we introduced previously [22,23] for nonlinear equations with a monomial function in the first derivative, *i.e.*, with a damping term which can be also nonlinear, to nonlinear equations with polynomial functions of second and third degree in the first derivative. In the following section, we review the factorization in the monomial case. Next, we present the factorization of nonlinear equations with polynomial function of second degree in the first derivative and illustrate it with a couple of examples. The last section is devoted to the factorization of nonlinear equations with polynomial function of

third degree in the first derivative. We end up the paper with the conclusion section.

## 2. Factorization of nonlinear equations with a monomial of first degree in the first derivative

Nonlinear equations of the type

$$y_{ss} + f(y, s)y_s + F(y, s) = 0, \quad (1)$$

where the subscript  $s$  denotes the derivative with respect to  $s$  and  $F(y, s)$  and  $f(y, s)$  are arbitrary functions of  $y(s)$  and  $s$ , can be factorized as follows [32]:

$$[D_s - \phi_2(y, s)][D_s - \phi_1(y, s)]y(s) = 0, \quad (2)$$

where  $D_s = d/ds$ . Expanding (2), one can use the following grouping of terms [22, 23]:

$$D_s^2 y - \left( \phi_1 + \phi_2 + \frac{d\phi_1}{dy} y \right) D_s y + (\phi_1 \phi_2 - \partial\phi_1/\partial s) y = 0, \quad (3)$$

and comparing Eq. (1) with Eq. (3), we get the conditions

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial y} y = -f, \quad (4)$$

$$\phi_1 \phi_2 - \frac{\partial\phi_1}{\partial s} = \frac{F(y, s)}{y}. \quad (5)$$

Any factorization like (2) of a scalar equation of the form given in Eq. (1) allows us to find a compatible first order nonlinear differential equation,

$$[D_s - \phi_1(y, s)]y \equiv D_s y - \phi_1(y, s)y = 0, \quad (6)$$

whose solution provides a particular solution of (1). In other words, if we are able to find a couple of functions  $\phi_1(y, s)$  and  $\phi_2(y, s)$  such that they factorize Eq. (1) in the form (2), solving Eq. (6) allows to get particular solutions of (1). The advantage of this factorization has been shown in the important particular case when there is no explicit dependence on  $s$ , *i.e.*, for equations

$$y_{ss} + f(y)y_s + F(y) = 0, \quad (7)$$

for which the factorization conditions are

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{d\phi_1}{dy} y = -f, \quad (8)$$

$$\phi_1 \phi_2 = \frac{F(y)}{y}, \quad (9)$$

when the two unknown functions  $\phi_1(y)$  and  $\phi_2(y)$  can be found easily by factoring  $F(y)$  when it is a polynomial or written as a product of two functions. This property of the nonlinear factorization has been successfully used when it

has been introduced a decade ago and contributed to its popularity [33]. An illustration of this technique in the case of the cubic Ginzburg-Landau equation can be found in [34]. Notice that interchanging the factoring functions turns (8) and (9) into

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{d\phi_2}{dy} y = -\tilde{f}, \quad (10)$$

$$\phi_1 \phi_2 = \frac{F(y)}{y}, \quad (11)$$

which correspond to equations

$$y_{ss} + \tilde{f}(y)y_s + F(y) = 0. \quad (12)$$

If  $s$  is a traveling variable, this suggests kinematic relationships between the kink solutions of (7) and (12) evolving under the different nonlinear dampings  $f(y)$  and  $\tilde{f}(y)$ .

Finally, in the case  $f = 0$  and  $F(y, s) = V(s)y$ , the factoring functions  $\phi$ 's depend only on  $s$  and the equations (1) are linear ones

$$y_{ss} + V(s)y = 0. \quad (13)$$

The factorization conditions take the simplified form

$$\phi_1 + \phi_2 = 0, \quad (14)$$

$$\phi_1 \phi_2 - \frac{d\phi_1}{ds} = V(s). \quad (15)$$

From (14), one has  $\phi_1 = -\phi_2 = \phi$  which upon substitution in (15) leads to the well known Riccati equation  $-d\phi/ds - \phi^2 = V(s)$  defining the Schrödinger potential in quantum mechanics in terms of the factoring function. The interchange of  $\phi_1$  with  $\phi_2$  produces the partner Riccati equation  $d\phi/ds - \phi^2 = \tilde{V}(s)$  of much use in supersymmetric quantum mechanics [35, 36].

## 3. Factorization of nonlinear equations with polynomial function of second degree in the first derivative

Let us consider the following nonlinear second order ODE with variable coefficients

$$y_{ss} + f(y, s)y_s^2 + g(y, s)y_s + F(y, s) = 0. \quad (16)$$

A factorization of the form

$$[D_s + f(y, s)y_s - \phi_2(y, s)][D_s - \phi_1(y, s)]y = 0, \quad (17)$$

is possible if the following constraint equations are satisfied:

$$\phi_1 + \phi_2 + \left( \frac{\partial\phi_1}{\partial y} + f(y, s)\phi_1 \right) y = -g(y, s), \quad (18)$$

$$\phi_1 \phi_2 - \frac{\partial\phi_1}{\partial s} = \frac{F(y, s)}{y} \quad (19)$$

There are also cases when one can work with  $\phi_2 = 0$ . In such cases, the constraint equations take the form

$$\phi_1 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + f(y, s)\phi_1 \right) y = -g(y, s), \quad (20)$$

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial s} = \frac{F(y, s)}{y}. \quad (21)$$

Finally, the degenerate case corresponding to  $\phi_1 = 0$ , which also implies  $F = 0$ , leads to the simple constraint

$$\phi_2 = -g(y, s). \quad (22)$$

As an example of a degenerate case, we mention the equation for the radial function of the isotropic metric in general relativity [37]

$$y_{ss} - \frac{3}{2}y_s^2 - \frac{1}{s}y_s = 0, \quad (23)$$

for which (22) is written as

$$\phi_2 = \frac{1}{s}. \quad (24)$$

The solution

$$y = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{1 + bs^2}}, \quad (25)$$

where  $a$  and  $b$  are integration constants, can be found by elementary means [37].

The most important application is when no explicit dependence on  $s$  occurs in the equation and so neither  $F$  nor the  $\phi$ 's depend on  $s$  when the constraints are similar to (8) and (9). If moreover one assumes  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$  then the second constraint equation provides the factorization function as

$$\phi(y) = \sqrt{\frac{F(y)}{y}}. \quad (26)$$

Substituting (26) in the first constraint equation leads to the following expression for the  $g$  coefficient

$$g(y) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{F(y)}{y}} \left[ 3 + \left( \frac{F_y}{F} + 2f(y) \right) y \right]. \quad (27)$$

For given  $f(y)$  and  $F(y)$ , the latter equation gives the coefficient  $g(y)$  for which the nonlinear equation can be factorized in the form

$$\begin{aligned} & \left[ D_s + f(y)y_s - \sqrt{F(y)/y} \right] \\ & \times \left[ D_s - \sqrt{F(y)/y} \right] y = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

There are equations of the latter type which do not present a linear term in the first derivative. This implies  $g(y) = 0$ , *i.e.*

$$3 + \left( \frac{F_y}{F} + 2f(y) \right) y = 0, \quad (29)$$

which is separable. The solution

$$F(y) = Cy^{-3}e^{-2 \int^y f(u)du}, \quad (30)$$

with  $C$  an integration constant, provides the form of  $F$  which for given  $f$  allows the factorization of the equation. However, as simple as it may look, the condition (30) is quite restrictive.

In physical applications, differential equations with squares of the first derivative are encountered in highly non-linear areas, such as cosmology [38] and gravitation theories, *e.g.*, Weyl conformal gravity [39] and  $f(R)$  gravity [40], but occasionally they show up in other branches as well. In the following, we will give two examples of factorization of such equations.

### 3.1. An equation in Weyl's conformal cosmology

The following equation

$$y_{ss} - \frac{\alpha}{y}y_s^2 + \frac{y^\sigma}{x^2} = 0, \quad (31)$$

where  $\alpha$  and  $\sigma$  are real constants, arises in intermediate calculations concerning the vacuum solution of the field equations in Weyl's conformal gravity [41, 42]. Let us try the factorization

$$\left( D_s - \frac{\alpha}{y}y_s \right) (D_s - \phi_1(y, s)) y = 0. \quad (32)$$

Therefore, the following constraint equations should be satisfied

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial s} = -\frac{y^{\sigma-1}}{s^2} \quad (33)$$

$$\phi_1 - \frac{\alpha}{y}\phi_1 y + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} y = 0. \quad (34)$$

Equation (34) is separable and generates the function  $\phi_1(y, s) = f(s)y^{\alpha-1}$ , then, from Eq. (33) we obtain

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(y^{\alpha-1}f(s)) = y^{\alpha-1}f'(s) = -\frac{y^{\sigma-1}}{s^2} \quad (35)$$

which implies  $\alpha = \sigma$ , and  $f(s) = \frac{1}{s} + c_1$ , where  $c_1$  is an arbitrary constant.

Assuming the following [27]

$$(D_s - \phi_1(y, s)) y = \Omega, \quad (36)$$

then, we get

$$\Omega' - \alpha \frac{y'}{y} \Omega = 0. \quad (37)$$

with solution  $\Omega = k_0 y^\alpha$ . Therefore, we get the first order equation

$$y' - \left( \frac{1}{s} + c_1 \right) y^\alpha = k_0 y^\alpha, \quad (38)$$

which can be rewritten in the form

$$y' - \left( \frac{1}{s} + k_1 \right) y^\alpha = 0, \quad (39)$$

where  $k_1$  is an integration constant. The general solution of Eq. (39) is given in the form

$$y = ((\alpha - 1)(-k_1 s - k_2 - \ln s))^{1/1-\alpha}. \quad (40)$$

where  $k_2$  is an integration constant. For  $k_1 = 0$  and  $\alpha = 5$ , we obtain the following particular solutions

$$y_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}(-k_2 - \ln(s))^{1/4}}, \quad (41)$$

$$y_{3,4} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}(-k_2 - \ln(s))^{1/4}}. \quad (42)$$

### 3.2. Langmuir-type equations

A particular example of the type (16) is the following equation

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{3y} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \gamma \frac{dy}{ds} + \frac{1}{3} \frac{y^2 - 1}{y} = 0$$

which when  $\gamma = 4/3$  provides Langmuir's radial  $\beta$  function occurring in the formula for the space charge between coaxial cylinders [43]. Using (19), one can choose

$$\phi_1 = -\left(1 - \frac{1}{y}\right), \quad \phi_2 = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{y}\right). \quad (43)$$

Substituting (43) in (18), one obtains  $\gamma = 5/3$ , which shows that the Langmuir case cannot be factored. If  $\gamma = 5/3$ , we can obtain a particular solution from the first-order differential equation

$$\left(D_s + 1 - \frac{1}{y}\right)y = 0 \implies y_s + y - 1 = 0, \quad (44)$$

which is

$$y(s) = Ce^{-s} + 1, \quad (45)$$

where  $C$  is the integration constant.

### 4. Factorization of nonlinear equations with polynomial function of third degree in the first derivative

It is well known that equations of the type

$$y_{ss} + f(y, s)y_s^3 + g(y, s)y_s^2 + h(y, s)y_s + F(y, s) = 0, \quad (46)$$

where the coefficient functions are mappings from two-dimensional disks to the set of real numbers,  $\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , define projective connections [44, 45].

Such equations allow for the factorization

$$[D_s + f(y, s)y^2 - \phi_2(y, s)][D_s - \phi_1(y, s)]y = 0, \quad (47)$$

with the compatible first order equation

$$[D_s - \phi_1(y, s)]y \equiv y_s - \phi_1(y, s)y = 0, \quad (48)$$

under the constraint equations

$$f(y, s)\phi_1 y = -g(y, s) \quad (49)$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} y = -h(y, s) \quad (50)$$

$$\phi_1 \phi_2 - \phi_{1s} y = \frac{F(y, s)}{y}. \quad (51)$$

On the other hand, for any symmetric affine connection  $\Gamma = (\Gamma_{jk}^i(s, y))$ , the so-called projective connection *associated to*  $\Gamma$  [44] which carries all information about unparametrized geodesics of  $\Gamma$  is determined by the equation

$$y_{ss} - \Gamma_{22}^1 y_s^3 + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) y_s^2 - (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) y_s + \Gamma_{11}^2 = 0. \quad (52)$$

Thus, one finds that equations (52) can be factored if

$$\phi_1 y = (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) / \Gamma_{22}^1 \quad (53)$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} y = \Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2 \quad (54)$$

$$\phi_1 \phi_2 - \phi_{1s} y = \frac{\Gamma_{11}^2}{y}. \quad (55)$$

We do not present any particular case. Rather we notice that for given  $\Gamma$ 's, (53) provides  $\phi_1$ . Then, substituting in (54), we get  $\phi_2$ , but in the end (55) should be still satisfied. This looks complicated and makes the success of the method less probable.

### 5. Conclusion

In summary, we have discussed here a simple factorization method of complicated nonlinear second-order differential equations containing quadratic and cubic polynomial forms in the first derivative, and we have presented some examples. Only those equations with the coefficients satisfying certain constraints involving the factoring functions can be factorized. By doing this, one can seek solutions of simpler first order nonlinear differential equations, corresponding to the first factorization bracket from the right. This works fine when there is only a linear term in the first derivative. When the powers of the first derivatives are more than one, the constraint conditions on the factoring functions become more complicated, and the factorization method is less appropriate. In general, the factorization method can still work when the coefficients of the nonlinear equation do not depend explicitly on the independent variable, because the constraint equations are less restrictive in these cases.

### Acknowledgments

The authors wish to thank Dr. J. Poveromo for informing them on the nonlinear equation occurring in Weyl's conformal gravity model. M. Pérez-Maldonado thanks CONACyT for a doctoral fellowship.

1. J. Weiss, *J. Math. Phys.* **24** (1983) 1405.
2. R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971) 1192.
3. E.J. Parkes and B.R. Duffy, *Comput. Phys. Commun.* **98** (1996) 288.
4. E.G. Fan, *Phys. Lett. A* **277** (2000) 212.
5. Z.T. Fu, S.K. Liu, S.D. Liu, and Q. Zhao, *Phys. Lett. A* **290** (2001) 72.
6. M. Prelué and M. Singer, *Trans. Am. Math. Soc.* **279** (1983) 215.
7. V.K. Chandrasekar, S.N. Pandey, M. Senthilvelan, and M. Lakshmanan, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 023508.
8. E. Schrödinger, *Proc. R. Ir. Acad. A* **47** (1941-1942) 53.
9. L. Infeld and T.E. Hull, *Rev. Mod. Phys.* **23** (1951) 21.
10. B. Mielnik, *J. Math. Phys.* **25** (1984) 3387.
11. D.J. Fernández C., *Lett. Math. Phys.* **8** (1984) 337.
12. C.V. Sukumar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** (1985) L57.
13. B. Mielnik and O. Rosas-Ortiz, *J. Phys. A* **37** (2004) 10007.
14. S.-H. Dong, “*Factorization Method in Quantum Mechanics*”, (Springer, 2007).
15. A.A. Andrianov and M.V. Ioffe, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012) 503001.
16. A.A. Andrianov, N.V. Borisov, and M.V. Ioffe, *JETP Lett.* **39** (1984) 93.
17. M.V. Ioffe, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 10363.
18. M.V. Ioffe, J. Negro, L. M. Nieto, and D. N. Nishnianidze, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 9297.
19. F. Cannata, M.V. Ioffe, and D. N. Nishnianidze, *J. Math. Phys.* **50** (2009) 052105.
20. L.M. Berkovich, *Appl. Anal. Discrete Math.* **1** (2007) 122.
21. L.M. Berkovich, “*Factorizations and Transformations of Differential Equations*”, Regular and Chaotic Dynamics Editorial Center, (in Russian), (2002).
22. H.C. Rosu and O. Cornejo-Pérez, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 046607.
23. O. Cornejo-Pérez and H.C. Rosu, *Prog. Theor. Phys.* **114** (2005) 533.
24. O. Cornejo-Pérez, J. Negro, L.M. Nieto, and H.C. Rosu, *Found. Phys.* **36** (2006) 1587.
25. P.G. Estévez, Ş. Kuru, J. Negro, and L.M. Nieto, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 11441.
26. P.G. Estévez, Ş. Kuru, J. Negro, and L.M. Nieto, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007) 9819.
27. D.S. Wang and H. Li, *J. Math. Anal. Appl.* **343** (2008) 273.
28. E.S. Fahmy, *Chaos, Solitons and Fractals* **38** (2008) 1209.
29. S.C. Mancas and H.C. Rosu, *Phys. Lett. A* **377** (2013) 1434.
30. T. Hazra, V. K. Chandrasekar, R. Gladwin Pradeep, and M. Lakshmanan, *J. Math. Phys.* **53** (2011) 023511.
31. A.K. Tiwari, S.N. Pandey, V.K. Chandrasekar, and M. Lakshmanan, *Appl. Math. Comp.* **252** (2015) 457.
32. P.G. Estévez, Ş. Kuru, J. Negro, and L.M. Nieto, *Int. J. Theor. Phys.* **50** (2011) 2046.
33. G.W. Griffiths and W.E. Schiesser, “*Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations, Numerical and Analytical Methods with MATLAB and MAPLE*”, Academic Press, (2012).
34. H.C. Rosu, O. Cornejo-Pérez, P. Ojeda-May, *Phys. Rev. E* **85** (2012) 037102.
35. B. Bagchi, “*Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics*”, Chapman and Hall/CRC, (2001).
36. F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, “*Supersymmetry in Quantum Mechanics*”, World Scientific, (2001).
37. H.A. Buchdahl, *Astrophys. J.* **140**, (1964) 1512.
38. M.K. Mak, T. Harko, and J.A. Belinchón, *Int. J. Mod. Phys. D* **11** (2002) 1265.
39. C. Deliduman, O. Kasikci, and C. Yapiskan, Flat galactic rotation curves from geometry in Weyl gravity, arXiv:1511.07731.
40. C.G. Böhmer, T. Harko, and F. S. N. Lobo, *Astropart. Phys.* **29** (2008) 386.
41. J. Poveromo, private communication.
42. P.D. Mannheim and D. Kazanas, *Astrophys. J.* **342** (1989) 635.
43. I. Langmuir and K.B. Blodgett, *Phys. Rev.* **22** (1923) 347.
44. V.S. Matveev, *Math. Ann.* **352** (2012) 865.
45. Y.Y. Bagderina, *J. Appl. Ind. Math.* **10** (2016) 37.

Stefan C. Mancas, Haret C. Rosu\* and Maximino Pérez-Maldonado

# Travelling-Wave Solutions for Wave Equations with Two Exponential Nonlinearities

<https://doi.org/10.1515/zna-2018-0055>

Received February 1, 2018; accepted June 4, 2018

**Abstract:** We use a simple method that leads to the integrals involved in obtaining the travelling-wave solutions of wave equations with one and two exponential nonlinearities. When the constant term in the integrand is zero, implicit solutions in terms of hypergeometric functions are obtained, while when that term is nonzero, all the basic travelling-wave solutions of Liouville, Tzitzéica, and their variants, as well as sine/sinh-Gordon equations with important applications in the phenomenology of nonlinear physics and dynamical systems are found through a detailed study of the corresponding elliptic equations.

**Keywords:** Dodd-Bullough; Dodd-Bullough-Mikhailov; Liouville Equation; sine-Gordon; sinh-Gordon; Tzitzéica; Weierstrass Function.

**PACS numbers:** 02.30.Hq; 04.20.Jb; 02.30.Ik.

## 1 Introduction

Some of the best known and well-studied hyperbolic nonlinear second-order differential equations are the sine-Gordon equations [1], its variant the sinh-Gordon equation, the Tzitzéica equation [2–4] and its variants such as the Dodd-Bullough equation [5] and the Dodd-Bullough-Mikhailov equation [6, 7], and last but not least, the Liouville equation [8], which is a simpler case in this class. Discovered in the realm of differential geometry of surfaces with particular properties of the curvature, like in

the sine-Gordon (1862) and Tzitzéica (1907) cases, or during the study of such surfaces as stated by Liouville (1853) in his short note, all of them have been revived much later when it became clear that they have important applications in solid-state physics, nonlinear optics, biological physics, and quantum field theory through their soliton-type solutions that can describe a variety of dynamical entities. This is especially true for the sine-Gordon equation whose soliton solutions have been identified with dislocations in crystals, fluxons in long Josephson junctions, waves in magnetic materials and superfluids, nonlinear DNA and microtubule excitations, neural impulses, and muscular contractions, among others [9, 10].

In this article, we will approach all these equations as particular cases of second-order differential equations with two exponential nonlinear terms of the form

$$\psi_{uv} = \alpha e^{a\psi} + \beta e^{b\psi}, \quad (1)$$

where  $a$  and  $b$  are nonzero constants, while  $\alpha$  and  $\beta$  are constants not simultaneously zero. The main advantage of this approach is to have a unifying treatment of these famous equations, which in general are considered separately by the majority of authors, as illustrative examples of their solution methods. In the 1970s, during the remarkable advance in the solution method for nonlinear evolution equations brought by the inverse scattering method, Dodd and Bullough [11] posed and solved the problem whose equations of the form  $y_{xt} = f(y)$  admit infinitely many integrals of motion, a property of soliton evolution equations discovered by Zakharov and Shabat in their breakthrough paper of 1972 [12]. Dodd and Bullough showed that, beyond the linear case, the only allowed hyperbolic nonlinear equations with this property are precisely of the Liouville, sine/sinh-Gordon, and Tzitzéica forms and the variants of the latter. This was a confirmation of the fact that these types of equations have soliton solutions, some of which were already known at that time.

On the other hand, this kind of equations can be turned into polynomial nonlinear equations

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log h = \alpha h^a + \beta h^b \quad (2)$$

by using the change of variables  $\psi = \log h$ .

\*Corresponding author: Haret C. Rosu, IPICYT, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potos, S.L.P., Mexico, E-mail: hcr@ipicyt.edu.mx. <https://orcid.org/0000-0001-5909-1945>

Stefan C. Mancas: Department of Mathematics, Embry-Riddle Aeronautical University, Daytona Beach, FL 32114-3900, USA, E-mail: mancass@erau.edu. <https://orcid.org/0000-0003-1175-6869>

Maximino Pérez-Maldonado: IPICYT, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potos, S.L.P., Mexico, E-mail: maximino.perez@ipicyt.edu.mx