

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Generación de atractores ocultos multienroscados y
tipo rejilla en sistemas sin puntos de equilibrio y
en sistemas multiestables con atractores auto-excitados**

Tesis que presenta

Rodolfo de Jesús Escalante González

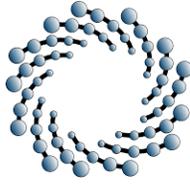
Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Eric Campos Cantón

San Luis Potosí, S.L.P., Agosto de 2020



IPICYT

CONSTANCIA DE APROBACIÓN DE LA TESIS

La tesis **Generación de atractores ocultos multienroscados y tipo rejilla en sistemas sin puntos de equilibrio y en sistemas multiestables con atractores auto-excitados** presentada para obtener el Grado de de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Rodolfo de Jesús Escalante González** y aprobada el **?? de 08 de 2020** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

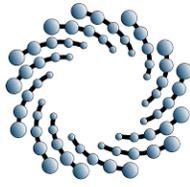
Dr. Eric Campos Cantón
(Director de la tesis)

Dr. Ernesto Zambrano Serrano
(Jurado en el examen)

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
(Jurado en el examen)

Dr. Adrián René Ramírez López
(Jurado en el examen)

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez
(Jurado en el examen)

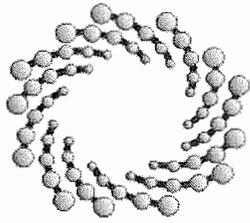


IPICYT

CRÉDITOS INSTITUCIONALES

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Eric Campos Cantón.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro 337188) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 015 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 18 días del mes de agosto del año 2020, se reunió a las 10:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Presidente	IPICYT
Dr. Eric Campos Cantón	Secretario	IPICYT
Dr. Adrián René Ramírez López	Sinodal	IPICYT
Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Rodolfo de Jesús Escalante González

sobre la Tesis intitulada:

Generación de atractores ocultos multienroscados y tipo rejilla en sistemas sin puntos de equilibrio y en sistemas multiestables con atractores auto-excitados

que se desarrolló bajo la dirección de

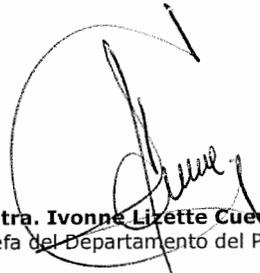
Dr. Eric Campos Cantón

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 13:10 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 18 días del mes de agosto de 2020.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



A mi familia.

AGRADECIMIENTOS

A Dios ya que en Él vivo, me muevo y existo.

A mi familia por su apoyo incondicional en cada aspecto de mi vida.

A mi director de tesis, el Dr. Eric Campos por los conocimientos brindados, así como por sus palabras de aliento, apoyo y motivación.

A mis profesores de doctorado el Dr. Gonzalo Barajas, el Dr. Jesús Leyva y el Dr. Isaac Campos por sus conocimientos y experiencias compartidas.

Al Dr. Salvador González, al Dr. Diego Langarica, al Dr. Ernesto Zambrano, al Dr. Cesar Maldonado, al Dr. Adrián Ramírez y al Dr. Tonámetl Sánchez por sus observaciones y comentarios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada.

Al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C. por permitirme realizar mis estudios de Doctorado y en especial a los miembros del laboratorio de Dinámica no lineal y caótica por su valiosa retroalimentación.

A mis compañeros, amigos y todas aquellas personas que me han ayudado y alentado a continuar.

CONTENIDO

Constancia de aprobación de la tesis	III
Créditos Institucionales	V
Acta de examen	VII
Dedicatoria	IX
Agradecimientos	XI
Lista de tablas	XV
Lista de figuras	XXI
Glosario	XXIII
Resumen	XXV
Abstract	XXVII
1 Introducción	1
1.1 Aportación de la tesis	2
1.1.1 Objetivo	2
1.1.2 Estrategias	2
1.2 Contribución	3
1.2.1 Limitaciones	3
1.2.2 Delimitaciones	4
2 Conceptos y antecedentes	5
2.1 Conceptos	5
2.1.1 Espacio métrico	5
2.1.2 Sistemas dinámicos	6
2.1.3 Sistemas lineales	7
2.1.4 Atractor	9
2.1.5 Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)	10
2.1.6 Prueba de caos 1-0	12

2.1.7	Exponentes de Lyapunov	13
2.1.8	Dimensión Kaplan-Yorke	14
2.1.9	Caos	15
2.2	Antecedentes	17
2.2.1	Multienroscados y rejillas	17
2.2.2	Sistemas sin puntos de equilibrio	20
3	Atractores ocultos con base en sistemas sin puntos de equilibrio	23
3.1	Diseño de sistemas sin puntos de equilibrio con atractores de enroscados no expansivos	23
3.1.1	Comentarios finales	26
3.2	Diseño de sistemas sin puntos de equilibrio con atractores multienroscados	26
3.2.1	Caso con matriz singular	31
3.2.2	Simulaciones numéricas	32
3.2.3	Perturbaciones al eigenvalor	36
3.2.4	Simulaciones numéricas	37
3.2.5	Dinámica de los sistemas	39
3.2.6	Comentarios finales	40
3.3	Diseño de sistemas sin puntos de equilibrio con atractores tipo rejilla	41
3.3.1	Análisis de la solución.	43
3.3.2	Sistema particular	48
3.3.3	Implementación electrónica	48
3.3.4	Comentarios finales	50
3.4	Diseño de sistemas sin puntos de equilibrio con atractores hipercaóticos	50
3.4.1	Sistemas de dimensiones mayores	56
3.4.2	Comentarios finales	60
4	Atractores ocultos con base en sistemas con puntos de equilibrio	61
4.1	Generación de atractores ocultos a partir de atractores auto-excitados	61
4.1.1	Caos heteroclínico	61
4.1.2	Surgimiento de orbitas heteroclínicas	68
4.1.3	Ruta hacia un atractor auto-excitado	78
4.1.4	Surgimiento de atractores ocultos	90
4.1.5	Comentarios finales	98
4.2	Generación de atractores ocultos tipo rejilla	99
4.2.1	Rejillas 2D y 3D	102
4.2.2	Comentarios finales	103
5	Conclusiones y trabajo a futuro	105
5.1	Trabajo a futuro	105

ÍNDICE DE TABLAS

3.1	Parámetros de un caso particular del sistema dado por (3.1), (3.2) y (3.3).	24
3.2	Parámetros de un caso particular del sistema dado por (3.1), (3.4) y (3.5).	25
3.3	Vectores W_i para $i = 1, \dots, 6$.	33
3.4	Secuencias producidas por el sistema del ejemplo 1 a partir de tres condiciones iniciales cercanas a cero para una simulación de 50 s con un RK4 de paso = 0.01.	36
3.5	Secuencias producidas por el sistema del ejemplo 2 a partir de tres condiciones iniciales cercanas a cero para una simulación de 50s con un RK4 de paso = 0.01.	39
3.6	Exponentes de Lyapunov y dimensión Kaplan-Yorke del atractor obtenido para diferente número de sistemas sin puntos de equilibrio acoplados.	60

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Construcción de Filippov [17].	8
2.2	Ilustración de tres casos para el sistema dado por (2.7) con B_1 y B_2 dados en (a)(2.8), (b)(2.9), (c)(2.10) y (d)(2.11).	12
2.3	Atractor del sistema dado por (2.18) y (2.19) proyectado sobre el plano $x - y$.	17
2.4	Atractor del sistema dado por (2.20) con los parámetros $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = -0.6$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y con β_3 dado por (2.24) proyectado sobre el plano (x_1, x_2) .	19
2.5	Atractor del sistema dado por (2.20), (2.25), (2.26) y (2.24) con los parámetros $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = -0.6$, β_1, β_2 y β_3 dados por (2.25), (2.26) y (2.24) proyectado sobre los planos (a) (x_1, x_2) y (b) (x_1, x_3) .	19
2.6	Atractor del sistema dado por (2.27) y (2.28) en el espacio de fase (a) (x_1, x_2, x_3) , y proyectado en los planos (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) .	21
3.1	Atractor del sistema dado por (3.1), (3.2) y (3.3) con los parámetros de la tabla 3.1 utilizando la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$.	24
3.2	Atractor del sistema dado por (3.1), (3.4) y (3.5) con los parámetros de la tabla 3.2 utilizando la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ en el espacio (a) (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) .	27
3.3	Atractor del sistema dado por (3.1), (3.4) y (3.8) con los parámetros de la tabla 3.2 utilizando la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ en el espacio (a) (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) .	28
3.4	Un comportamiento similar a un punto de equilibrio “tipo foco-silla” localizado en el punto $Q = (-k_1, -k_2, \tau)$.	30
3.5	Un mecanismo para generar atractores caóticos de doble enroscado sin puntos de equilibrio.	31
3.6	Un mecanismo para generar atractores caóticos de triple enroscado sin puntos de equilibrio.	31
3.7	Atractor del sistema (3.23) con A y V dados en (3.22) para la condición inicial $(0, 0, 0)^T$ en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones en los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.	34

3.8	Atractor de triple enroscado para la condición inicial $(0, 0, 0)^T$ en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones en los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.	35
3.9	Atractor del sistema (3.30) con A dados en (3.32) para la condición inicial $(0.1, 0.1, 0.1)^T$ en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.	40
3.10	Tasas de crecimiento asintóticas Kc calculadas para los sistemas con atractor triple enroscado que se presentan en secciones (a)3.2.1 y (b)3.2.3.	41
3.11	©2019 IEEE Atractor del sistema (3.36) con la parte afín dada en (3.37) y los parámetros $p = q = r = 2, a = 0.7, b = 10, c = 0, v = 11, w = 0.1, k = 0.25, \Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ y $\Delta x_3 = 2.2$ para la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ en el espacio (a) \mathbb{R}^3 y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) , y (d) (x_2, x_3) .	45
3.12	©2019 IEEE Atractor del sistema (3.36) con la parte afín dada en (3.37) y los parámetros $p = q = r = 2, a = 0.7, b = 10, c = 0, v = 11, w = 0.1, k = 0.25, \Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ y $\Delta x_3 = 2.2$ mas una perturbación en el parámetro c of (a) -0.1 y (b) 0.1 .	46
3.13	©2019 IEEE Sub-circuitos para las señales: (a) x_1 , (b) x_2 , (c) x_3 , (d) f_1 , (e) f_2 , y (f) f_3 .	47
3.14	Atractor obtenido mediante la expresión (3.49) para los valores $p = q = r = 2, a = 0.7, b = 10, c = 0, v = 11, w = 0.1, k = 0.25, \Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ y $\Delta x_3 = 2.2$ para la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ y con un paso en el tiempo de $\Delta t = 0.001$ y $t \in [0, 300]$ u.a. sin el uso de RK4.	47
3.15	©2019 IEEE Sub-circuitos para las señales: (a) f_4 y (b) f_5 .	49
3.16	©2019 IEEE Atractor generado por simulación electrónica en ngspice proyectado en los planos: (a) (x_1, x_2) y (c) (x_1, x_3) .	49
3.17	©2019 IEEE Atractor del circuito implementado físicamente en la Figura 3.13 proyectado en: (a) (x_1, x_2) y (c) (x_1, x_3) .	50
3.18	Gráfica de los funcionales (a)(3.61), (b)(3.63) y (c)(3.65) para los parámetros $p = 2, k = 2$ y $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.	52
3.19	Atractor doble enroscado del sistema (3.60) con los parámetros $a = 1, b = 10, v = 5, k = 10, m = 1, p = 2, d = 0.1$ y el funcional (3.65) para la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ proyectado sobre los planos (a) (x, y) , (b) (x, z) y (c) (y, z) .	52
3.20	(a)Atractor triple enroscado del sistema (3.60) con los parámetros $a = 1, b = 10, v = 5, k = 10, m = 2, p = 2, d = 0.1$ y el funcional (3.65) para la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$. (b)Atractor cuádruple enroscado del sistema (3.60) con los parámetros $a = 1, b = 10, v = 5, k = 10, m = 3, p = 2, d = 0.1$ y el funcional (3.65) para la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$.	53
3.21	En (a) la aproximación numérica de un subconjunto de la cuenca de atracción en el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ con puntos azules. Gráfica de bifurcación que muestra el parámetro v contra los máximos en (b) x y (c) y .	54

3.22	Coexistencia de órbitas periódicas para (a) $v = 1.9$ y (b) $v = 2$. En (c) el atractor exhibido para $v = 2.3$.	54
3.23	Implementación electrónica del sistema (3.60) usando la función (3.63) con $m = 1$.	55
3.24	Resultado de simulación en NGSpice graficados en el plano (a) $(v(x),v(y))$ y (b) $(v(x),v(z))$	55
3.25	Proyección del atractor hipercaótico con la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.3)^T$ sobre (a) (x_1, y_1, z_1) , (b) (x_1, x_2, x_3) . (c)Series de tiempo para $t = [80, 100]$.	59
4.1	En (a) el ciclo heteroclínico del sistema (4.1), (4.2),(4.4) y (4.5) con la superficie de conmutación $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = 0\}$ y los parámetros $a = 0.2, b = 5, c = -3, \alpha = 1$, y en (b) un atractor double-enroscado que emerge de una órbita heteroclínica usando la siguiente condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$.	67
4.2	Proyección de las variedades estables e inestables y los planos de conmutación proyectados en el plano $x_1 - x_3$. El diagrama muestra la ubicación de la variedad inestable con líneas rojas, la variedad estable con líneas azules y los planos de conmutación marcados con líneas verdes.	69
4.3	Órbitas heteroclínicas del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25) para los parámetros $a = 0.2, b = 5, c = -3, \alpha = 1$ y diferentes valores de γ . Hay seis órbitas heteroclínicas para: (a) $\gamma_1 = \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau)) + .00001$, y (b) $\gamma_2 = \frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)} - .00001$. Cuatro órbitas heteroclínicas para: (c) $\gamma_L = \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau))$, y (d) $\gamma_U = \frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)}$.	74
4.4	Órbitas heteroclínicas del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25) para $\alpha = 1$ y diferentes valores de γ . Para $\gamma = 2$, el sistema exhibe en (a) un atractor de cuádruple enroscado, y en (d) seis órbitas heteroclínicas. Para $\gamma = 3$, el sistema exhibe en (b) dos atractores de doble enroscado, y en (e) cuatro órbitas heteroclínicas. Para $\gamma = 1.5$ el sistema exhibe en (c)un atractor de doble enroscado, y en (f) cuatro órbitas heteroclínicas.	75

- 4.5 Trayectoria del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25) para la condición inicial $x = (0,0,0)^T$, $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $\alpha = 1$ y diferentes valores de γ : (a) $\gamma = 5$, la oscilación transitoria de doble enroscado exhibida y después de algún tiempo converge a uno de los atractores auto-excitados de doble enroscado, $t \in [0, 40]$ u.a.; (b) $\gamma = 15$, la oscilación transitoria de doble enroscado exhibida y después de algún tiempo converge a uno de los atractores auto-excitados de doble enroscado, $t \in [0, 60]$ u.a.; (c) $\gamma = 100$, la oscilación transitoria de doble enroscado exhibida por $t \in [0, 300]$ u.a.; (d) $\gamma = 100$, atractor auto-excitado de doble enroscado por $t = [356.6, 400]$ u.a.; (e) $\gamma = 1000$, la oscilación transitoria de doble enroscado exhibida por $t \in [0, 300]$ u.a.; (f) $\gamma = 1000$, el atractor auto-excitado de doble enroscado por $t = [3091, 3200]$ u.a.. 77
- 4.6 Proyección de las variedades sobre (a) el plano $(x_1 - x_3)$ y (b) el plano $(z_1^{(2)} - z_3^{(2)})$. Las variedades estables e inestables están marcadas con líneas continuas azules y rojas, respectivamente, las superficies de conmutación con líneas verdes. 78
- 4.7 Ilustración de las variedades locales del sistema. Las variedades estables están en azul, las variedades inestables en rojo y las superficies de conmutación en verde. Los puntos donde el campo vectorial de P_2 es tangente a SW_{23} están en una línea punteada roja, mientras que los puntos donde el campo vectorial de P_3 es tangentes a SW_{23} se muestra con una línea negra continua. Las regiones simétricas R_1 y R_2 están en blanco. 80
- 4.8 Regiones R_1 y R_2 en el plano $(z_2^{(2)}, z_3^{(2)})$. 82
- 4.9 Simulación del sistema (4.77) para $t \in [0, \frac{3\pi}{2b})$, $d_1 = z_{3eq_1}^{(2)} = \frac{2\alpha}{3}$ y $d_2 = z_{3eq_2}^{(2)} = 0$, la trayectoria de $k = 0$, i.e. girando desde el origen se muestra en azul . La trayectoria en rojo y amarillo se muestra para $k = 1$ y los parámetros (a) $l_1 = l_2 = \frac{2(\gamma-\alpha)}{3}$, (b) $l_1 = \frac{2(\gamma-\alpha)}{3}$, $l_2 = \frac{2\alpha}{3}$, (c) $l_1 = \frac{\gamma}{3}$, $l_2 = \frac{\gamma}{3}$ y (d) $l_1 = \frac{\gamma}{3}$, $l_2 = \frac{2\alpha}{3}$. En (e) la función de histéresis $f(x_2)$. 84
- 4.10 Siete trayectorias del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25) empezando en R_1 con $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $\alpha = 1$ y diferentes valores de γ : (a) $\gamma = 10$ y (b) $\gamma = 100$. 89
- 4.11 Proyección de las variedades en (a) (x_1, x_3) y (b) $(z^{(2)}, 1 - z_3^{(2)})$. Las variedades estables e inestables están marcadas con líneas continuas azules y rojas, respectivamente, las superficies de conmutación con líneas verdes. 91
- 4.12 Regiones R_1 y R_2 en el plano $(z_2^{(2)}, z_3^{(2)})$. 93

- 4.13 En (a) siete trayectorias del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.107) empezando en R_1 con $a = 0.2, b = 5, c = -7, \alpha = 1$ y $\gamma = 10$. En (b) el atractor oculto para los mismos parámetros y la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$ para $t \in [50000, 50100]$. En (c) la proyección de los atractores auto-excitados y el atractor oculto proyectado en el plano (x_1, x_2) . 98
- 4.14 La gráfica de la función $f_1(x_1)$ para (a) $N_{x_1} = 3$ y (b) $N_{x_1} = 6$. 101
- 4.15 Simulación del atractor oculto (en azul) y el atractor auto-excitado (en rojo) exhibidos por el sistema (4.149) con los parámetros $a = 0.2, b = 5, c = -7$. En (a) y (b) $B(\mathbf{x})$ está dado por (4.151) con $N_{x_1} = 1$ y $N_{x_1} = 4$, respectivamente. En (c) $B(\mathbf{x})$ está dado por (4.158) con $E_2 = 0, E_3 = 1, N_{x_1} = 2$ y $N_{x_3} = 2$. En (d) $B(\mathbf{x})$ está dado por (4.158) con $E_2 = 1, E_3 = 1, N_{x_1} = 2, N_{x_2} = 2, N_{x_3} = 2$ y $w = 0.2$. 102
- 4.16 Gráfica para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov del atractor oculto tipo rejilla del sistema dado por (4.149) y (4.158) con los parámetros $a = 0.2, b = 5, c = -7, B(\mathbf{x}), E_2 = 1, E_3 = 1, N_{x_1} = 2, N_{x_2} = 2, N_{x_3} = 2$ y $w = 0.2$ para la condición inicial $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$. 104

GLOSARIO

\mathbb{N} números naturales;

\mathbb{Z} números enteros;

\mathbb{Z}^- , $\mathbb{Z}_{<0}$ números enteros negativos;

\mathbb{Z}^+ , $\mathbb{Z}_{>0}$ números enteros positivos;

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ números enteros no negativos;

$\mathbb{Z}_{\leq 0}$ números enteros no positivos;

\mathbb{R} números reales;

\mathbb{R}^+ números reales positivos;

\mathbb{R}^- números reales negativos;

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ números reales no negativos;

$\mathbb{R}_{\leq 0}$ números reales no positivos;

\mathbb{F} campo de números reales o complejos.

$\text{null}A$ espacio nulo de la matriz A ;

$\text{range}A$ imagen de A ;

$\det(A)$ determinante de una matriz A ;

$\text{rank}(A)$ rango de la matriz A .

$\dim(X)$ dimensión del espacio X ;

$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ punto de equilibrio;

$W_{\mathbf{x}^*}^s$ variedad estable respecto al punto \mathbf{x}^* ;

$W_{\mathbf{x}^*}^u$ variedad inestable respecto al punto \mathbf{x}^* .

$D_{\mathbf{x}}F$ matriz Jacobiana de la función F evaluada en el punto \mathbf{x} .

A^T matriz A transpuesta.

\oplus suma directa.

$\text{span}\{v\}$ espacio generado por el vector v .

RESUMEN

Recientemente se han reportado sistemas sin puntos de equilibrio con atractores caóticos. Los atractores caóticos dados por sistemas sin puntos de equilibrio pertenecen a una clase de atractores conocidos como atractores ocultos.

La mayoría de los sistemas con atractores caóticos ocultos, reportados actualmente, han sido encontrados mediante una búsqueda numérica, o bien, han sido encontrados al modificar otros sistemas ya conocidos con atractores caóticos.

En este trabajo se presentan dos clases de sistemas que generan atractores multienroscados ocultos por medio de considerar campos vectoriales con y sin puntos de equilibrio. Primeramente se presenta un enfoque para la construcción de sistemas sin puntos de equilibrio con atractores multienroscados ocultos considerando que las trayectorias se dirigen hacia el centro de los enroscados y que han sido nombrados enroscados no expansivos. Después, se considera cuando las trayectorias se alejan del centro del enroscado. Este enfoque se ha extendido para generar atractores conocidos como tipo rejilla en donde los enroscados se forman en más de una dirección.

Después se muestra un enfoque para la generación de atractores hipercaóticos ocultos en sistemas sin puntos de equilibrio basado en el acoplamiento de sistemas en \mathbb{R}^3 .

La segunda clase de sistemas que se estudian son definidos cuando el campo vectorial contiene puntos de equilibrio. Esta clase de sistemas presentan multiestabilidad por medio de considerar atractores auto-exitados de doble enroscado. La aparición de atractores ocultos es dada cuando los atractores autoexitados son distanciados. Esta clase de sistemas permite considerar cualquier número de atractores de doble enroscado y ubicarlos arbitrariamente en el espacio \mathbb{R}^3 para generar atractores multienroscados ocultos tipo rejilla unidireccional (1D), bidireccional (2D) o tridireccional (3D).

Palabras clave. -sistemas dinámicos; atractores ocultos, sistemas sin puntos de equilibrio; sistemas lineales.

ABSTRACT

Recently, systems without equilibria with chaotic attractors have been reported. Chaotic attractors given by systems without equilibrium points belong to a class of attractors known as hidden attractors.

Most of the systems with hidden chaotic attractors, currently reported, have been found using a numerical search, or have been found by modifying other already known systems with chaotic attractors.

In this work, two classes of system that generate hidden multi-scroll attractors by considering vector fields with and without equilibrium points are presented. Firstly, an approach for the construction of systems without equilibrium points with hidden multi-scroll attractors considering that the trajectories are directed towards the center of the scrolls and they have been named non-expansive scrolls is presented. Then, it is considered when the trajectories move away from the center of the scroll. This approach has been extended to generate grid-like attractors where scrolls form in more than one direction.

Next, an approach for the generation of hidden hyperchaotic attractors in systems without equilibria based on the coupling of systems in \mathbb{R}^3 is presented.

The second class of systems studied is defined when the vector field contains equilibrium points. This class of systems have multistability by considering self-excited double-scroll attractors. The appearance of hidden attractors is given when self-excited attractors are distanced. This class of systems allows considering any number of double-scroll attractors and arbitrarily locating them in the space \mathbb{R}^3 to generate grid-like unidirectional (1D), bidirectional (2D) or tridirectional (3D) hidden multi-scroll attractors.

Keywords. -dynamic systems; hidden attractors, systems without equilibrium points; linear systems.

INTRODUCCIÓN

En 1994 Sprott reportó un sistema que no tiene puntos de equilibrio y que es caótico en el sentido de tener sensibilidad a las condiciones iniciales y tener una dinámica acotada [1]. El sistema fue encontrado de manera numérica y es conocido como caso Sprott A. Este sistema presenta dos no linealidades cuadráticas en sus ecuaciones y es un caso particular del sistema Nose-Hoover [2].

El caso Sprott A fue el primer sistema reportado que no tiene puntos de equilibrio y que posee dinámica caótica. Este trabajo despertó el interés por encontrar sistemas de este tipo.

La mayoría de los trabajos reportados, cuyo objetivo ha sido el obtener nuevos sistemas sin puntos de equilibrio con flujos caóticos, han abordado una metodología de búsqueda numérica o bien, han partido de sistemas caóticos conocidos para tratar de obtener sistemas sin puntos de equilibrio con esta misma dinámica [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Existen dos clases de atractores de acuerdo con [11], que se definen de la siguiente manera: la primera clase está dada por aquellos atractores clásicos excitados por puntos de equilibrio inestables llamados *atractores auto-excitados* cuya cuenca de atracción se cruza con una vecindad abierta arbitrariamente pequeña de los puntos de equilibrio [12], y no son difíciles de encontrar mediante métodos numéricos, y la segunda clase se llama *atractores ocultos* cuya cuenca de atracción no contiene vecindades de los puntos de equilibrio.

Los atractores caóticos encontrados en sistemas sin puntos de equilibrio son entonces atractores ocultos. Estos atractores también pueden llegar a aparecer en sistemas con puntos de equilibrio y en coexistencia con otros atractores del tipo clásico auto-excitado[13].

Un aspecto interesante de estos atractores ocultos es que, a diferencia de los clásicos atractores auto-excitados, el recurrir a la simulación de condiciones iniciales cercanas a puntos de equilibrio no garantiza poder encontrar un atractor oculto. Algunos sistemas con atractores ocultos están reportados en las referencias [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14].

Cuando las trayectorias de un atractor tienen oscilaciones de manera repetida al rededor de algún punto se suele decir que el atractor tiene enroscamientos o enroscados. De acuerdo a [15], un atractor multienroscado es aquel que presenta tres o más enroscados.

En [16] se presenta un estudio sobre la generación de secuencias pseudo-aleatorias mediante una clase sistemas que presentan atractores con enroscados. En este estudio se demostró que el número de enroscados afecta las propiedades de las secuencias, al

aumentar el número de enroscados mejoran los resultados en la prueba estadística del NIST (National Institute of Standards and Technology). Esto hace que el poder elegir el número de enroscados en un atractor sea especialmente útil en este tipo de aplicaciones.

Una clase de sistemas en los que se ha podido obtener atractores con enroscados son los sistemas lineales por partes en \mathbb{R}^3 . En estos sistemas el espacio de estados está dividido en regiones y cada una tiene asignado un sistema de ecuaciones.

En ocasiones, al tratar de describir un fenómeno por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtienen sistemas por partes en el que las superficies de conmutación entre regiones adyacentes son definidas como una región más pero sin una dinámica definida. Esto trae problemas a la hora de determinar el comportamiento de las trayectorias con condiciones iniciales en estas superficies. En estos casos es posible utilizar la construcción de Filippov para asignarles una dinámica a estas superficies de conmutación[17]. Sin embargo, es común no asignar una región a las superficies de conmutación, sino más bien, establecer que cada uno de los puntos de la superficie de conmutación pertenezcan sólo a una región [3, 16, 18].

No existen actualmente enfoques de construcción de sistemas con atractores caóticos ocultos con enroscados en \mathbb{R}^3 o dimensiones mayores.

1.1 APORTACIÓN DE LA TESIS

En este trabajo de tesis se presentan algunas ideas o enfoques de construcción de sistemas con atractores multienroscados ocultos y tipo rejilla, así como atractores hipercaóticos ocultos. Se dan ejemplos particulares de esta clase de sistemas dinámicos cuando el campo vectorial presenta puntos de equilibrio y sin puntos de equilibrio. El objetivo así como las estrategias para conseguirlo se muestran a continuación.

1.1.1 OBJETIVO

Obtener sistemas dinámicos caóticos que generen atractores ocultos tipo rejilla 1D, 2D y 3D en campos vectoriales con y sin puntos de equilibrio en \mathbb{R}^3 y dimensiones mayores.

1.1.2 ESTRATEGIAS

Para poder lograr el objetivo la estrategia utilizada fue la siguiente:

- Reproducir los sistemas con arreglos multienroscados con puntos de equilibrio de la literatura y estudiar las diferentes técnicas utilizadas para la generación de caos.
- Estudiar la teoría existente sobre sistemas sin puntos de equilibrio para identificar aspectos compartidos con los sistemas con puntos de equilibrio.

- Proponer la construcción de un sistema sin puntos de equilibrio y verificar mediante simulación numérica el funcionamiento de casos particulares acorde a lo predicho.
- Caracterizar mediante técnicas numéricas los casos particulares obtenidos.
- Obtener atractores multienroscados tipo rejilla 1D, 2D y 3D.
- Obtener sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio de dimensiones mayores a 3 con atractores hipercaóticos.

1.2 CONTRIBUCIÓN

La contribución de esta tesis se resume de la siguiente forma:

- Dos enfoques de construcción de sistemas sin puntos de equilibrios para obtener atractores ocultos con multienroscados, y un caso particular de cada clase.
- Un enfoque de construcción de sistemas sin puntos de equilibrios para obtener atractores ocultos tipo rejilla 1D, 2D y 3D, así como un caso particular con un atractor tipo rejilla 3D.
- Un enfoque de construcción de sistemas de dimensión mayor a tres con atractores ocultos hipercaóticos. Se brindan casos particulares de sistemas de dimensión seis, nueve, doce y quince.
- Un estudio sobre una clase de sistemas multiestables con atractores autoexcitados y un atractor oculto.
- Un enfoque de construcción de sistemas multiestables con atractores autoexcitados y un atractor oculto tipo rejilla. Se presentan tres casos particulares con atractores tipo rejilla 1D, 2D y 3D.

1.2.1 LIMITACIONES

Parte del trabajo se apoya en la experimentación y verificación por medio de una simulación de computadora. Esto conlleva las siguientes limitaciones:

- La computadora genera errores al representar algunos números reales.
- Es imposible simular por tiempo infinito.
- Lo simulado no necesariamente coincide con una solución analítica.

1.2.2 DELIMITACIONES

En este trabajo sólo se abordan sistemas de tiempo continuo, además, se aborda un enfoque similar al de Li y Sprott en [3], en el cual se estudian sistemas con campos vectoriales discontinuos y se verifica la existencia del atractor así como su carácter caótico de manera numérica. En este trabajo no se aborda de manera analítica las pruebas sobre la existencia de estos atractores ni se centra en el estudio de existencia de soluciones en sistemas discontinuos.

La estructura de esta tesis es la siguiente: En el Capítulo 2 se brindan algunas definiciones y conceptos básicos que servirán para comprender los próximos capítulos. También se presentan algunos antecedentes tanto de los sistemas sin puntos de equilibrio así como de sistemas con atractores multienroscados. En el Capítulo 3 se presentan algunas propuestas para obtener atractores ocultos con base en sistemas sin puntos de equilibrio. En la sección 3.1 se presenta un enfoque para obtener atractores multienroscados cuyas trayectorias se dirigen al centro de los enroscados. En la sección 3.2 se presenta otro enfoque para la obtención de atractores multienroscados con enroscados más comunes donde las trayectorias se alejan del centro de los enroscados. En la sección 3.3 se extiende este último enfoque para obtener atractores tipo rejilla. En la sección 3.4 se presenta un enfoque para generar atractores hipercaóticos en sistemas sin puntos de equilibrio basado en el acoplamiento de sistemas más simples. En el Capítulo 4 se presentan algunas propuestas para obtener atractores ocultos con base en sistemas con puntos de equilibrio. En la sección 4.1 se hace un estudio de una clase de sistemas con atractores auto-excitados con el fin de generar un atractor oculto. En la sección 4.2 se retoman los resultados del estudio previo para presentar un enfoque que permite la obtención de atractores ocultos tipo rejilla. Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo de tesis.

CONCEPTOS Y ANTECEDENTES

En este capítulo se presentan primeramente algunos conceptos útiles para el desarrollo del trabajo. Posteriormente se presenta de manera breve algunos antecedentes que han inspirado de alguna manera el trabajo de tesis.

2.1 CONCEPTOS

2.1.1 ESPACIO MÉTRICO

Definición 2.1.1 (Puntos adherentes). *Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n , y x un punto en \mathbb{R}^n , x no necesariamente en S . Entonces x se dice ser adherente a S si para toda n -bola $B(x)$ contiene al menos un punto de S*

Sea a un punto en \mathbb{R}^n y sea r un número positivo. El conjunto de todos los puntos x en \mathbb{R}^n tales que:

$$\|x - a\| < r,$$

es llamado una n -bolla abierta de radio r y centrada en a . Denotamos este conjunto como $B(a)$ o bien $B(a; r)$ [19].

Definición 2.1.2 (Conjunto cerrado [19]). *Un conjunto S en \mathbb{R} es cerrado si, y solo si, este contiene todos sus puntos adherentes.*

Definición 2.1.3 (Conjunto acotado [19]). *Un conjunto A en \mathbb{R}^n se dice ser acotado si se encuentra enteramente dentro de una n -bolla $B(a; r)$ para algún $r > 0$ y algún a en \mathbb{R}^n .*

Definición 2.1.4 (Conjunto compacto [19]). *Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n . Entonces los siguientes tres enunciados son equivalentes:*

- a) S es compacto.
- b) S es cerrado y acotado.
- c) Todo subconjunto infinito de S tiene un punto de acumulación en S .

Definición 2.1.5 (Cerradura [19]). *El conjunto de todos los puntos adherentes de un conjunto S es llamado cerradura de S y es denotado por $\text{cl}S$.*

En este trabajo también utilizaremos $\text{cl}(S)$ para denotar la cerradura de S .

Definición 2.1.6 (Conjunto convexo [19]). *Un conjunto S en \mathbb{R}^n se llama convexo si, para cada par de puntos x e y en S y cada θ real que satisface $0 < \theta < 1$, tenemos $\theta x + (1 - \theta)y \in S$*

Un invariante es una cantidad que permanece sin cambios bajo ciertas clases de transformaciones [20]. Por lo tanto podemos definir un conjunto invariante bajo una transformación como sigue:

Definición 2.1.7 (Conjunto invariante en \mathbb{R}^n). *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es invariante bajo una transformación f si $\forall x \in S \implies f(x) \in S$.*

Definición 2.1.8 (Espacio métrico [19]). *Un espacio métrico es un conjunto no vacío M de objetos (llamados puntos) junto con una función d de $M \times M$ a \mathbb{R} (llamada la métrica del espacio) que satisface las siguientes propiedades para todos los puntos x, y, z en M :*

1. $d(x, x) = 0$.
2. $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 2.1.9 ([19]). *Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n . Definimos la norma como:*

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Si por ejemplo $M = \mathbb{R}^n$; $d(x, y) = \|x - y\|$. Esta es llamada la *métrica Euclidiana*.

2.1.2 SISTEMAS DINÁMICOS

Definición 2.1.10 (Sistema dinámico [21]). *Sea X un espacio métrico con métrica d . Además sea I un semigrupo aditivo de números reales, es decir un subconjunto I de \mathbb{R} con*

$$\begin{aligned} 0 &\in I, \\ t, s \in I &\implies t + s = s + t \in I, \\ t, s, r \in I &\implies (t + s) + r = t + (s + r). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Un sistema dinámico en X , algunas veces llamado flujo, es entonces definido por un mapeo continuo $\phi : X \times I \rightarrow X$ con las siguientes propiedades:

- (a) $\phi(x, 0) = x$ para toda $x \in X$ (propiedad de identidad).
- (b) $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s)$ para todo $x \in X$ (propiedad de semigrupo).

El espacio métrico X es el espacio de estados del sistema y el mapeo ϕ describe el cambio temporal del sistema donde el tiempo t transcurre en un semigrupo $I \subset \mathbb{R}$.

Como regla tenemos $I = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ o $I = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. En el último caso el sistema dinámico se dice de tiempo discreto.

A todo sistema dinámico continuo en el tiempo se le puede asociar un campo vectorial dado por ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas escrito como

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2.2)$$

donde $f(t, x) : I \times X \rightarrow X$.

2.1.3 SISTEMAS LINEALES

Los sistemas dinámicos lineales son una clase de sistema cuyo campo vectorial asociado es un mapeo lineal, es decir su campo vectorial cumple con el principio de superposición.

Definición 2.1.11 (Mapeo lineal [22]). *Sea V, W dos espacios vectoriales sobre un campo \mathbb{F} que puede ser \mathbb{R} o bien \mathbb{C} un mapeo lineal de V a W es una función $T : V \rightarrow W$ con las siguientes propiedades:*

Aditividad

$$T(u + v) = Tu + Tv \text{ para todo } u, v \in V$$

Homogeneidad

$$T(\lambda v) = \lambda(Tv) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{F} \text{ y para todo } v \in V$$

Puesto que las transformaciones lineales pueden representarse mediante matrices cuadradas podemos escribir el campo vectorial de un sistema lineal como:

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.3)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz asociada al operador lineal y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado.

Los sistemas lineales se han estudiado por mucho tiempo, sabemos tienen una solución única.

Teorema 2.1.1 (Teorema fundamental de los sistemas lineales [23]). *Sea A una matriz $n \times n$. Entonces para un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, el problema del valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

tiene una solución única dada por

$$x(t) = e^{At} x_0. \quad (2.5)$$

Los sistemas suaves por partes (PSS por su sigla en inglés) son descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f^{(i)}(x), \quad x \in S_i \subset \mathbb{R},$$

donde $S_i, i = 1, 2, \dots, m$, son regiones abiertas separadas por una frontera $(n - 1)$ -dimensional. Las funciones $f^{(i)}$ y sus fronteras son suaves y la unión de todas las fronteras Σ y todas las regiones S_i juntas cubren todo el espacio de estados [17]. Un PSS se dice continuo si $f^{(i)}(x) = f^{(j)}(x)$ en cualquier punto de la frontera Σ_{ij} separando dos regiones adyacentes S_i y S_j .

En PSS discontinuos, dos vectores diferentes \dot{x} dados por $f^{(i)}(x)$ y $f^{(j)}(x)$, pueden ser asociados a un punto $x \in \Sigma_{ij}$ [17].

El movimiento de las trayectorias en las fronteras puede ser definido de diferentes maneras, una de ellas es mediante el método convexo de Filippov que define movimientos deslizantes en Σ_{ij} de la ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = g(x)$, donde $g(x)$ es una combinación convexa de $f^{(i)}(x)$ y $f^{(j)}(x)$ tangente a Σ_{ij} en x [17]. Una ilustración de la idea detras de la construcción de Filippov se muestra en la Figura 2.1.

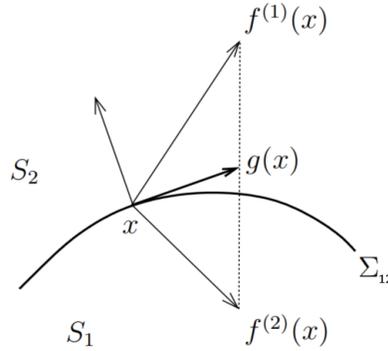


Figura 2.1: Construcción de Filippov [17].

Note que para utilizar la construcción de Filippov las fronteras o superficies de conmutación no pertenecen a las regiones S_i .

En este trabajo de tesis estaremos trabajando con sistemas lineales por partes en un espacio métrico $X \subset \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, los cuales definiremos de la siguiente manera:

Definición 2.1.12 (Sistema Lineal por partes). Sea $P = \{P_1, \dots, P_\eta\}$ con $\eta \in \mathbb{Z}$ y $\eta > 1$ una partición finita del espacio métrico $X \subset \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ dotado de la métrica euclidiana tal que $X = \bigcup_{1 \leq i \leq \eta} P_i$ y $P_j \cap P_k = \emptyset$ para $j, k \in \mathbb{Z}$ y $j \neq k$. Decimos que $T : X \rightarrow X$ es un sistema dinámico lineal por partes si su campo vectorial está dado como:

$$\dot{x} = A_j + B_j, \text{ para } x \in P_j,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ es el vector de estados del sistema y B_j es un vector constante. La superficie de conmutación $SW_{j,k}$ entre los elementos P_j y P_k es el conjunto $cl(P_j) \cap cl(P_k)$.

En estos sistemas lineales por partes, a diferencia de los utilizados con la construcción de Filippov, todo punto de una superficie de conmutación pertenecen a una de las regiones P_j al igual que todo punto $x \in X$ pertenece a un único P_j , de manera que existe una asignación única $A_j + B_j$ para cada punto.

Definición 2.1.13 (Punto de equilibrio). Sea $\phi(x, t)$ un sistema dinámico con campo vectorial asociado

$$\dot{x} = f(x),$$

un punto de equilibrio x^* satisface:

$$0 = f(x^*). \quad (2.6)$$

2.1.4 ATRACTOR

Definición 2.1.14 (Conjunto atractor [24]). Un conjunto cerrado e invariante $A \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un conjunto atractor si existe algún vecindario U de A tal que :

$$\forall t \geq 0, \phi(t, U) \subset U \text{ y } \bigcap_{t>0} \phi(t, U) = A.$$

Definición 2.1.15 (Región de captura [24]). El conjunto abierto U en la definición anterior es usualmente referido como región de captura.

Definición 2.1.16 (Cuenca de atracción [24]). El dominio o cuenca de atracción de un conjunto A está dado por

$$\bigcup_{t \leq 0} \phi(t, U),$$

donde U es un conjunto abierto que satisface la definición de conjunto atractor.

Definición 2.1.17 (Transitividad topológica [24]). Un conjunto invariante A se dice ser topológicamente transitivo si, para cualesquiera dos conjuntos abiertos $U, V \subset A$

$$\exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \phi(t, U) \cap V \neq \emptyset.$$

Definición 2.1.18 (Atractor [24]). Un atractor es un conjunto atractor topológicamente transitivo.

De acuerdo con [25] no existe una definición universalmente aceptada de un atractor en matemáticas, hay quien no pide la transitividad topológica y por lo tanto llaman al conjunto atractor que lo cumple como un atractor transitivo.

Los atractores pueden clasificarse como ocultos o autoexcitados según Gennady Leonov et al. [12].

Definición 2.1.19 (Tipos de atractores [12]). Un atractor se llama atractor auto-excitado si su cuenca de atracción se cruza con cualquier vecindario abierto de un punto fijo inestable. De lo contrario, se llama atractor oculto.

2.1.5 RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN (RK4)

Probablemente uno de los procedimientos numéricos más populares y más precisos utilizados para obtener soluciones aproximadas a un problema de valor inicial de primer orden $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ es el método Runge-Kutta de cuarto orden. Como su nombre lo indica, hay métodos Runge-Kutta de diferentes órdenes [26].

Fundamentalmente, todos los metodos Runge-Kutta son generalizaciones de la fórmula básica de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

en la que se reemplaza la pendiente de la función f por un promedio ponderado de las pendientes sobre un intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Esto es

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2 + \dots + w_mk_m),$$

donde lo que está en azul es el el promedio ponderado.

Aquí los pesos w_i , $i = 1, 2, \dots, m$, son constantes que generalmente satisfacen $w_1 + w_2 + w_m = 1$, y cada k_i , $i = 1, 2, \dots, m$, es la función f evaluada en un punto seleccionado (x, y) para el cual $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. El número m se llama el orden del método. Observe que tomando $m = 1$, $w_1 = 1$ y $k_1 = f(x_n, y_n)$, obtenemos la fórmula de Euler. Por lo tanto, se dice que el método de Euler es un método RungeKutta de primer orden [26].

En este trabajo utilizaremos el siguiente Runge-Kutta de cuarto orden:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1), \\ k_3 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

Toda simulación en computadora genera errores debido a la incapacidad de esta de representar todos los números reales de manera exacta. Además de este error los métodos de integración como son el RK4 generan errores adicionales. En este trabajo estaremos trabajando con sistemas discontinuos. A continuación se discute brevemente sobre algunas situaciones que pueden presentarse al simular estos sistemas.

Considere el sistema PWL de dimensión dos

$$\dot{x} = \begin{cases} B_1, & \text{si } x_2 \in P_1; \\ B_2, & \text{si } x_2 \in P_2; \end{cases} \quad (2.7)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$, $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 \geq 0\}$, $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 < 0\}$ y

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

en este caso, condiciones iniciales en P_1 se dirigen hacia arriba en la gráfica ya que $x_2(t)$ aumenta. Las condiciones iniciales en P_2 se dirigen hacia abajo en la gráfica

pues $x_2(t)$ disminuye. Esto se ilustra en la Figura 2.2a, donde se muestra la evolución de dos trayectorias con condiciones iniciales $x^1(0)$ y $x^2(0)$. Este tipo de campos vectoriales no presentan mayor complicación en cuanto a simulación numérica se refiere ya que no se generan conmutaciones.

Como un segundo ejemplo considere

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

en este caso, condiciones iniciales en P_2 se dirigen hacia P_1 , por lo que existe una conmutación. La condición inicial en P_1 debería estar sobre el eje x_1 ya que el eje pertenece a P_1 sin embargo, por la simulación existe un pequeño error que puede mitigarse al seleccionar un paso de integración más pequeño. Esto se ilustra en la Figura 2.2b, donde se muestra la evolución de una trayectoria con condición inicial $x(0)$.

Como un tercer ejemplo considere ahora

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

en este caso, todas las trayectorias se aproximan al eje x_1 . Al trabajar este sistema en simulación, las trayectorias simuladas se acercaran al eje x_1 y tendrán una oscilación pequeña en una vecindad de un punto del eje x_1 . Esta oscilación puede ser mitigada al reducir el paso de integración en el método numérico. En la Figura 2.2c se ilustra esta situación donde una condición inicial en P_2 se acerca al eje x_1 y permanece oscilando en una vecindad de un punto sobre este eje.

Ahora considere un cuarto ejemplo similar donde

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

en este caso las trayectorias en P_1 se dirigen hacia P_2 cruzando el eje x_1 y las trayectorias en P_2 se dirigen hacia P_1 hacia el eje x_1 pero con una inclinación hacia la derecha de la gráfica, es decir hacia el lado positivo del eje x_1 . Esto hace que las trayectorias del sistema se dirijan al eje x_1 y luego sigan casi pegadas al eje x_1 hacia la derecha. Sin embargo, en simulación ocurre un pequeño zigzag mientras las trayectorias viajan cercanas al eje x_1 , esto se debe al error numérico y nuevamente puede ser mitigado al reducir el paso de integración. En la Figura 2.2d se ilustra esta situación con una trayectoria que comienza en P_2 .

Este es sólo un subconjunto de todas las situaciones que pueden presentar en la simulación de estos sistemas debido a las combinaciones de campos vectoriales, superficies de conmutación y la dimensión del sistema. En este trabajo no se abordara el estudio de estas conmutaciones debido al campo vectorial discontinuo.

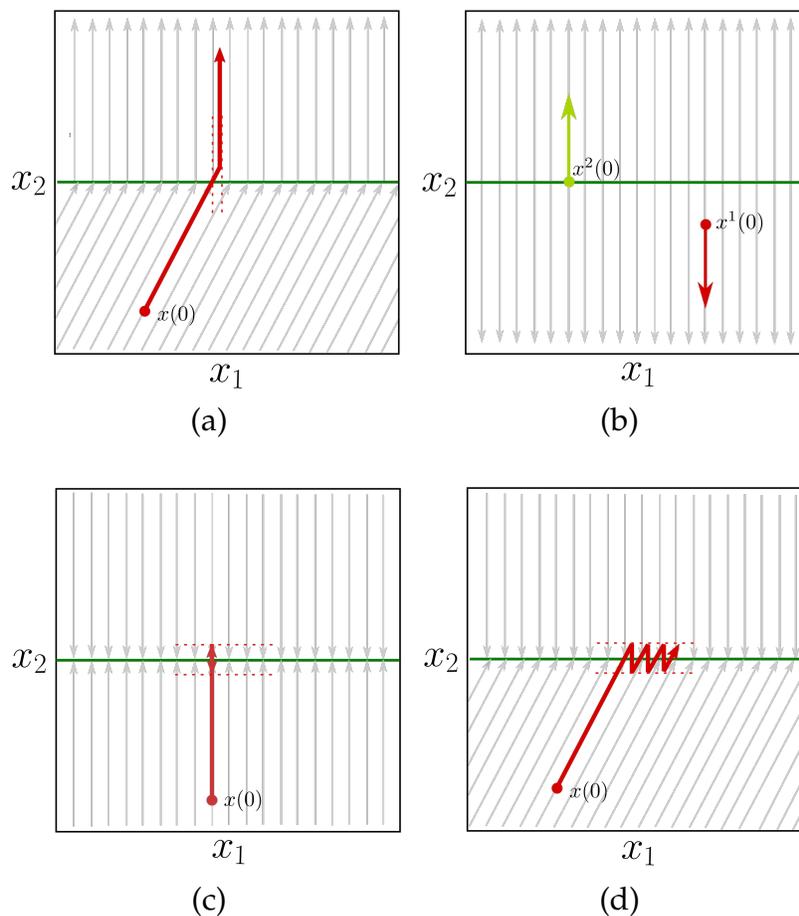


Figura 2.2: Ilustración de tres casos para el sistema dado por (2.7) con B_1 y B_2 dados en (a)(2.8), (b)(2.9), (c)(2.10) y (d)(2.11).

2.1.6 PRUEBA DE CAOS 1-0

La entrada para esta prueba es una serie de tiempo unidimensional $\phi(n)$ para $n = 1, 2, \dots$. Usamos los datos $\phi(n)$ en un sistema de dimensión 2

$$p(n+1) = p(n) + \phi(n)\cos(cn),$$

$$q(n+1) = q(n) + \phi(n)\text{sen}(cn),$$

donde $c \in (0, 2\pi)$ es fijo. Definiendo el desplazamiento cuadrado promedio (promediado en el tiempo)

$$M(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N ([p(j+n) - p(j)]^2 + [q(j+n) - q(j)]^2), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y su tasa de crecimiento

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M(n)}{\log n}.$$

Bajo condiciones generales, se puede mostrar que los límites $M(n)$ y K existen, y K toma ya sea el valor $K = 0$ significando dinámica regular (órbitas periódicas por ejemplo) o el valor $K = 1$ significando dinámica caótica [27].

2.1.7 EXPONENTES DE LYAPUNOV

Definición 2.1.20 (Matriz de estabilidad [28]). *Considere el sistema dinámico de tiempo continuo*

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x), \dots, \frac{dx_n}{dt} = f_n(x),$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. La matriz de estabilidad es definida como sigue

$$\mathbb{L}_{ij}(x^*) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x^*} \text{ para } i, j = 1, \dots, n.$$

Los exponentes de Lyapunov (EL) proveen una medida del grado de inestabilidad. Estos cuantifican la tasa promedio de divergencia de trayectorias que empiezan infinitesimalmente cerca de una de referencia, generalizando el concepto de estabilidad lineal a movimientos periódicos [28].

Para presentar los exponentes de Lyapunov consideraremos un mapeo de d -dimensional

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad (2.12)$$

sin embargo, todos los resultados pueden extenderse directamente a los flujos. La estabilidad de una sola trayectoria $x(t)$ puede estudiarse observando la evolución de sus trayectorias cercanas $x'(t)$, obtenidas de las condiciones iniciales $x'(0)$ desplazadas de $x(0)$ por un vector infinitesimal: $x'(0) + \delta x(0)$ con $\Delta(0) = |\delta x(0)| \ll 1$. En sistemas no caóticos, la distancia $\Delta(t)$ entre la trayectoria de referencia y las perturbadas permanece limitada o aumenta algebraicamente. En los sistemas caóticos crece exponencialmente con el tiempo

$$\Delta(t) \approx \Delta(0)e^{\gamma t},$$

donde γ es la tasa de expansión exponencial local.

Un parámetro no fluctuante que caracteriza la inestabilidad de la trayectoria se puede definir a través del límite doble

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\Delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \right), \quad (2.13)$$

que es la tasa de divergencia exponencial promedio y se llama el exponente máximo de Lyapunov. Cuando el límite λ es positivo, la trayectoria muestra sensibilidad a las condiciones iniciales y, por lo tanto, el sistema es caótico [28].

El máximo exponente de Lyapunov por sí solo no caracteriza completamente la inestabilidad de un sistema dinámico d -dimensional. En realidad, existen d LE que definen el espectro de Lyapunov, que pueden calcularse estudiando el crecimiento temporal de d perturbaciones infinitesimales independientes $\{w^{(i)}\}_{i=1}^d$ con respecto a

una trayectoria de referencia. En lenguaje matemático, los vectores $w^{(i)}$ generan un espacio lineal: el espacio tangente [28].

Definición 2.1.21 (Teorema multiplicativo [28]). *Sea $\{\mathbb{L}(1), \mathbb{L}(2), \dots, \mathbb{L}(k), \dots\}$ una secuencia de matrices de estabilidad $d \times d$ referidas a la regla de evolución (2.12), que se supone que es una aplicación de la variedad compacta A sobre sí mismo, con derivadas continuas. Además, sea μ una medida invariable en A bajo la evolución (2.12). El producto matriz $\mathbb{P}_t[x(0)]$ es tal que el límite*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbb{P}_t^T[x(0)]\mathbb{P}_t[x(0)]]^{\frac{1}{2t}} = \mathbb{V}[x(0)]$$

existe con la excepción de un subconjunto de condiciones iniciales de medida cero. Donde \mathbb{P}^T denota \mathbb{P} transpuesta [28].

La matriz simétrica $V[x(0)]$ tiene d valores propios reales y positivos $v_i[x(0)]$ cuyo logaritmo define los exponentes de Lyapunov

$$\lambda_i(x(0)) = \ln(v_i[x(0)]).$$

Habitualmente, se enumeran en orden descendente [28].

En este trabajo de tesis estaremos utilizando los algoritmos propuestos por Wolf [29] (Para el máximo exponente de Lyapunov y para el espectro de Lyapunov) y Rosenstein (Para el máximo exponente de Lyapunov) [30]. Estos algoritmos nos permiten estimar estos exponentes de manera numérica.

2.1.8 DIMENSIÓN KAPLAN-YORKE

En la geometría fractal, la dimensión fractal, D , es una cantidad estadística que da una indicación de cómo un fractal parece llenar el espacio, cuando se enfoca a escalas cada vez más finas. Hay muchas definiciones específicas de la dimensión fractal y ninguna de ellas debe ser tratada como la universal.

Ha sido establecido por Ruelle and Takens en 1971 que un sistema dinámico disipativo de tiempo continuo puede convertirse en caótico comenzando de una dimensión de espacio de fase mayor o igual a tres [31].

J. Kaplan y J. A. Yorke han hecho la conjetura de que la dimensión fractal de un atractor extraño puede ser aproximado a partir del espectro de los exponentes de Lyapunov. Tal dimensión a sido llamada dimensión Kaplan-Yorke o dimensión de Lyapunov [31].

Al ordenar los exponentes de Lyapunov del mayor al menor $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, y considerar la suma S_j de los primeros j exponentes de Lyapunov, donde $j < n$, entonces, para un atractor extraño existe un entero $j + 1$ tal que la suma S_{j+1} de los primeros $j + 1$ exponentes de Lyapunov es negativa. Esto es:

$$S_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0 \text{ y } S_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0. \quad (2.14)$$

La dimensión Kaplan-Yorke está definida como:

$$d_{KY} = j - \frac{S_j}{\lambda_{j+1}} = j - \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}. \quad (2.15)$$

Puesto que S_j es positivo y λ_{j+1} es negativo se sigue que $d_{KY} > j$ [31].

Como ejemplo considere los exponentes de Lyapunov $\lambda_1 = 0.21$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -1.21$.

$$\begin{aligned} j &= 2, & S_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 = 0.21, \\ d_{KY} &= 2 - \frac{S_2}{\lambda_3} = 2 - \frac{0.21}{-1.21} = 2.1735537. \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.1.9 CAOS

Sea $\phi(t, x)$ un flujo y $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto e invariante bajo este flujo para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1.22 (Sensibilidad a las condiciones iniciales [24]). *El flujo $\phi(t, x)$ se dice que es sensible a las condiciones iniciales en Λ si existe un $\epsilon > 0$ tal que, para cualquier $x \in \Lambda$ y cualquier vecindad U de x , existe $y \in U$ y $t > 0$ tal que $|\phi(t, x) - \phi(t, y)| > \epsilon$.*

Definición 2.1.23 (Conjunto caótico invariante [24]). *Λ se dice ser caótico si*

- $\phi(t, x)$ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en Λ .
- $\phi(t, x)$ es topológicamente transitivo en Λ .

En este trabajo se usará el término sistema caótico o flujo caótico para referirse a un sistema con al menos un conjunto cerrado e invariante ante el flujo y en el cual se presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para sistemas con puntos de equilibrio con atractores con enroscado por ejemplo es posible usar el método de Shilnikov para confirmar la dinámica caótica.

Considere el sistema dinámico de tercer orden

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \zeta(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (2.17)$$

donde el campo vectorial $\zeta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es p veces diferenciable ($p \geq 1$) con una derivada continua (llamado clase C^p). Denote $\phi(t, x)$ al flujo de (2.17) y a x_{e_1} y x_{e_2} puntos de equilibrio tipo foco silla diferentes del sistema (2.17) tal que los eigenvalores del Jacobiano evaluado en x_{e_i} son de la forma

$$\gamma_i, \sigma_i \pm j\omega_i, \sigma_i \gamma_i < 0, \omega_i \neq 0, \quad \text{para } i = 1, 2,$$

donde $\gamma_1 \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1.24 (Órbita heteroclínica [32]). *Una órbita heteroclinica es una trayectoria de (2.17) que conecta dos puntos de equilibrio tipo foco silla.*

Definición 2.1.25 (Ciclo heteroclínico [32]). *Un ciclo heteroclínico está formado por la unión de dos o más órbitas heteroclínicas.*

Teorema 2.1.2. (Método heteroclínico de Shilnikov [32]) *Dado el sistema (2.17) donde ξ es un campo vectorial C^2 en \mathbb{R}^3 . Suponga lo siguiente:*

- *Ambos puntos de equilibrio satisfacen*

$$|\gamma_i| > |\sigma_i| > 0 \quad (i = 1, 2)$$

con la restricción de que

$$\sigma_1\sigma_2 > 0 \text{ o } \gamma_1\gamma_2 > 0.$$

- *Existe un ciclo heteroclínico uniendo x_{e_1} y x_{e_2} el cual está hecho de dos órbitas heteroclínicas.*

Entonces el sistema (2.17) exhibe caos.

Sin embargo para atractores ocultos este método no es aplicable.

Este trabajo ha sido delimitado a la verificación numérica de los atractores caóticos, de manera que para considerar la existencia de un atractor caótico tomaremos como suficiente las siguientes situaciones.

- Se ha simulado al menos una condición inicial con un RK4 para $t > 1000u.a.$ (unidades adimensionales) y las gráficas muestran que converge a un conjunto que no incluye estas condiciones iniciales y en el cual las trayectorias oscilan (existe una región de captura).
- Una de estas condiciones iniciales se ha simulado con un RK4 por un tiempo mayor a $t = 1000000u.a.$ y $x(t)$ permanece en una n-bola $B(1000; 0)$ del espacio de estados (Trayectorias acotadas).
- Se ha obtenido un exponente de Lyapunov positivo con algún algoritmo numérico. (Sensibilidad a las condiciones iniciales).

Si bien no existe una definición formal de hipercaos, tomando en cuenta el artículo de Wolf [29] y el libro “Elegant Chaos” de Sprott [33], consideraremos las condiciones anteriores y dos exponentes de Lyapunov positivos como indicador de que el atractor es hipercaótico.

Cabe mencionar que este trabajo de tesis aborda un enfoque similar al de Li y Sprott en [3], en el cual se estudian sistemas con campos vectoriales discontinuos y se verifica el atractor de manera numérica mediante el uso de un RK4 y los exponentes de Lyapunov.

2.2 ANTECEDENTES

2.2.1 MULTIENTROSCADOS Y REJILLAS

Cuando las trayectorias de un atractor extraño tienen oscilaciones de manera repetida al rededor de algún punto se suele decir que el atractor tiene enroscamientos o enroscados.

El circuito de Chua es un sistema lineal por partes autónomo relativamente simple el cual exhibe un atractor con dos enroscados para ciertos valores de parámetros. Este sistema ha sido ampliamente estudiado por la comunidad científica. Sus ecuaciones son las siguientes [34]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(+y - h(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y, \end{cases} \quad (2.18)$$

donde

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|). \quad (2.19)$$

Con $\alpha = 9$, $\beta = 14.28$, $m_0 = -1/7$, $m_1 = -2/7$, el sistema dado por (2.18) y (2.19) exhibe un atractor caótico con doble enroscado mostrado en la Figura 2.3.

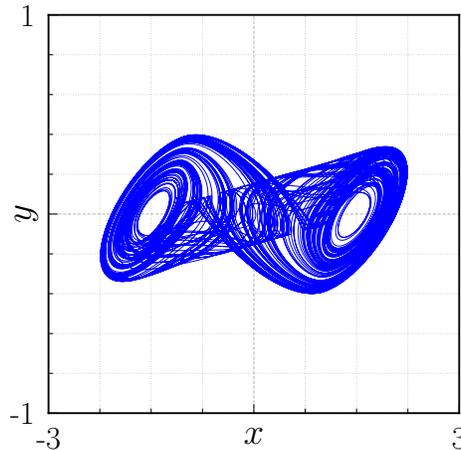


Figura 2.3: Atractor del sistema dado por (2.18) y (2.19) proyectado sobre el plano $x - y$.

De acuerdo a [15], un atractor multienroscado es aquel que presenta tres o más enroscados. Estos atractores multienroscados suelen presentar los enroscados en una sola dirección formando una fila de enroscados. Este acomodo se le conoce como atractor multienroscado tipo rejilla unidireccional (1D). Cuando los enroscados se presentan en dos direcciones se conoce como atractor multienroscado tipo rejilla 2D y cuando se presentan en tres direcciones se les suele llamar atractor multienroscado tipo rejilla 3D.

Actualmente existen varios métodos reportados en la literatura para diseñar sistemas con atractores multienroscados [35, 36, 37, 38, 39, 18]. Uno de los trabajos que han servido de inspiración para el desarrollo de los sistemas presentados es el de E.Campos-Cantón [18]. En este trabajo se presenta un enfoque para generar rejillas en \mathbb{R}^3 basado en Sistemas Disipativos Inestables (UDS por su sigla en inglés).

Definición 2.2.1. [18] *Un sistema de la forma $\dot{x} = Ax + B$ y eigenvalores λ_i con $i = 1, \dots, n$. Decimos que el sistema es un UDS si $\sum_{i=1}^n \text{Re}\{\lambda_i\} < 0$, y al menos dos λ_i son complejos conjugados con parte real positiva $\text{Re}\{\lambda_i\} > 0$.*

El sistema considerado para la construcción de las rejillas es un sistema lineal por partes donde cada subsistema es un sistema UDS. El sistema está descrito como sigue:

$$\dot{x} = Ax + B(x), \quad (2.20)$$

con

$$B(x) = \begin{cases} B_1, & \text{si } x \in D_1; \\ \vdots & \vdots \\ B_k, & \text{si } x \in D_k; \end{cases} \quad (2.21)$$

donde $\mathbb{R}^3 = \cup_{i=1}^k D_i$. El vector $\dot{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados y $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es el operador lineal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

donde $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33} \in \mathbb{R}$.

Así, los puntos de equilibrio del sistema (si existen) (2.20) son $x_i^* = (x_{1i}^*, x_{2i}^*, x_{3i}^*)^T = -A^{-1}B$, con $i = 1, \dots, k$. Note que A es invertible ya que los subsistemas son UDS. Se considera B_i como sigue:

$$B_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ \alpha_{31}\beta_3 + \alpha_{32}\beta_1 + \alpha_{33}\beta_2 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

de manera que se cumple $\beta_1 = x_{2i}^*$, $\beta_2 = x_{3i}^*$ y $\beta_3 = x_{1i}^*$.

La Figura 2.4 muestra la proyección sobre el plano (x, y) del atractor tipo rejilla con tres enroscados del sistema dado por (2.20) con los parámetros $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = -0.6$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y con β_3 como sigue:

$$\beta_3 = \begin{cases} 8, & \text{si } x_1 \geq 3.8; \\ 0, & \text{si } -3.8 < x_1 < 3.8; \\ -8, & \text{si } x_1 \leq -3.8. \end{cases} \quad (2.24)$$

En la Figura 2.5 se muestra una rejilla 3D con una distribución de enroscados $3 \times 3 \times 3$ usando los parámetros $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = -0.6$, β_3 como en (2.24) y β_2 y β_1 como sigue:

$$\beta_1 = \begin{cases} 8, & \text{si } x_2 \geq 4; \\ 0, & \text{si } -4 < x_2 < 4; \\ -8, & \text{si } x_2 \leq -4. \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\beta_2 = \begin{cases} 24, & \text{si } x_3 \geq 18; \\ 12, & \text{si } 6 < x_3 < 18; \\ 0, & \text{si } x_3 \leq 6. \end{cases} \quad (2.26)$$

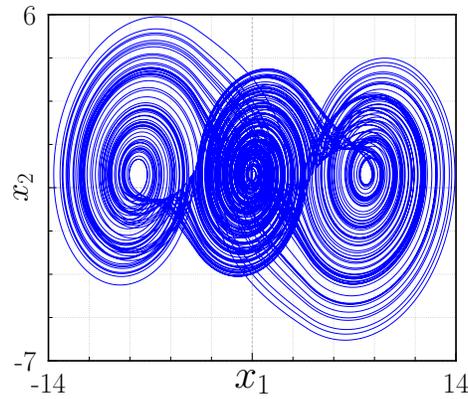


Figura 2.4: Atractor del sistema dado por (2.20) con los parámetros $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = -0.6$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y con β_3 dado por (2.24) proyectado sobre el plano (x_1, x_2) .

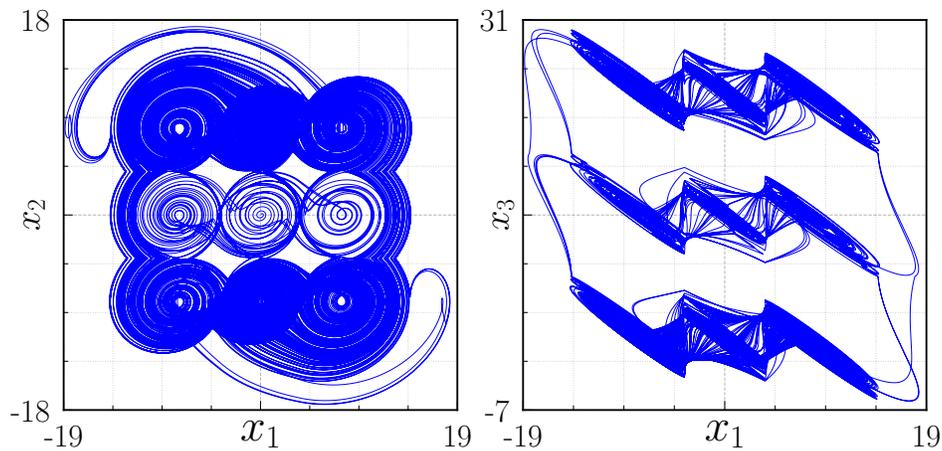


Figura 2.5: Atractor del sistema dado por (2.20), (2.25), (2.26) y (2.24) con los parámetros $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = -0.6$, β_1 , β_2 y β_3 dados por (2.25), (2.26) y (2.24) proyectado sobre los planos (a) (x_1, x_2) y (b) (x_1, x_3) .

2.2.2 SISTEMAS SIN PUNTOS DE EQUILIBRIO

En 1994 Sprott se preguntó si existían sistemas tridimensionales descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas con una o dos no linealidades cuadráticas y menos de siete términos cuya solución fuera caótica. A partir de una búsqueda numérica se obtuvieron 19 sistemas que se denominaron casos que van de la A a la S. Uno de estos sistemas resultó ser particularmente interesante, el caso A debido a que es un sistema conservativo con comportamiento caótico para la condición inicial $x = (0, 5, 0)^T$ [1].

Siguiendo esta tendencia por encontrar sistemas sin puntos de equilibrio en [7] realizaron una búsqueda numérica para encontrar sistemas caóticos tridimensionales adicionales con no linealidades cuadráticas que no tuvieran puntos de equilibrio. Su objetivo era encontrar los casos en los cuales no pueden reducirse más las ecuaciones removiendo términos sin destruir el caos. La investigación fue inspirada por la observación de que cada ejemplo conocido contenía un término constante y que si la constante es puesta a cero, el sistema resultante es no hiperbólico (el jacobiano evaluado en los puntos de equilibrio tiene eigenvalores con parte real igual a cero)[7]. De esta manera ellos obtuvieron 17 sistemas denominados sistemas NE.

Se han reportado trabajos donde se plantea la posibilidad de utilizar cálculo fraccionario para obtener un sistema sin puntos de equilibrio fraccionario a partir de un sistema sin puntos de equilibrio entero [10].

Si bien existen muchos sistemas sin puntos de equilibrio reportados, la gran mayoría han sido resultado de una búsqueda numérica o parten de sistemas caóticos conocidos, lo que no brinda mucha información sobre los mecanismos que pudieran estar generando la dinámica compleja [5, 6, 8, 9, 3].

En [14] se aborda un enfoque diferente, se parte de sistemas lineales simples para lograr una construcción de un campo vectorial lineal por partes (PWL) que pueda dar lugar a un atractor caótico. Este enfoque constructivo tiene la ventaja de dar una mayor intuición geométrica del funcionamiento del sistema y facilitar la modificación de su geometría.

Un ejemplo de campo vectorial de la clase de sistemas propuesto en [14] es como sigue:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + B_1, & \text{si } x_1 < \sigma; \\ Ax + B_2, & \text{si } x_1 \geq \sigma. \end{cases} \quad (2.27)$$

Donde $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -0.5 & 3 \\ 0 & -3 & -0.5 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

La superficie de conmutación se encuentra en $x_1 = \sigma$, para diferentes valores de σ el atractor simplemente se desplazará a lo largo del eje x_1 . En la Figura 2.6 se muestra el atractor del sistema dado por (2.27) y (2.28) para $\sigma = 0$.

En esta referencia también se menciona el siguiente Teorema:

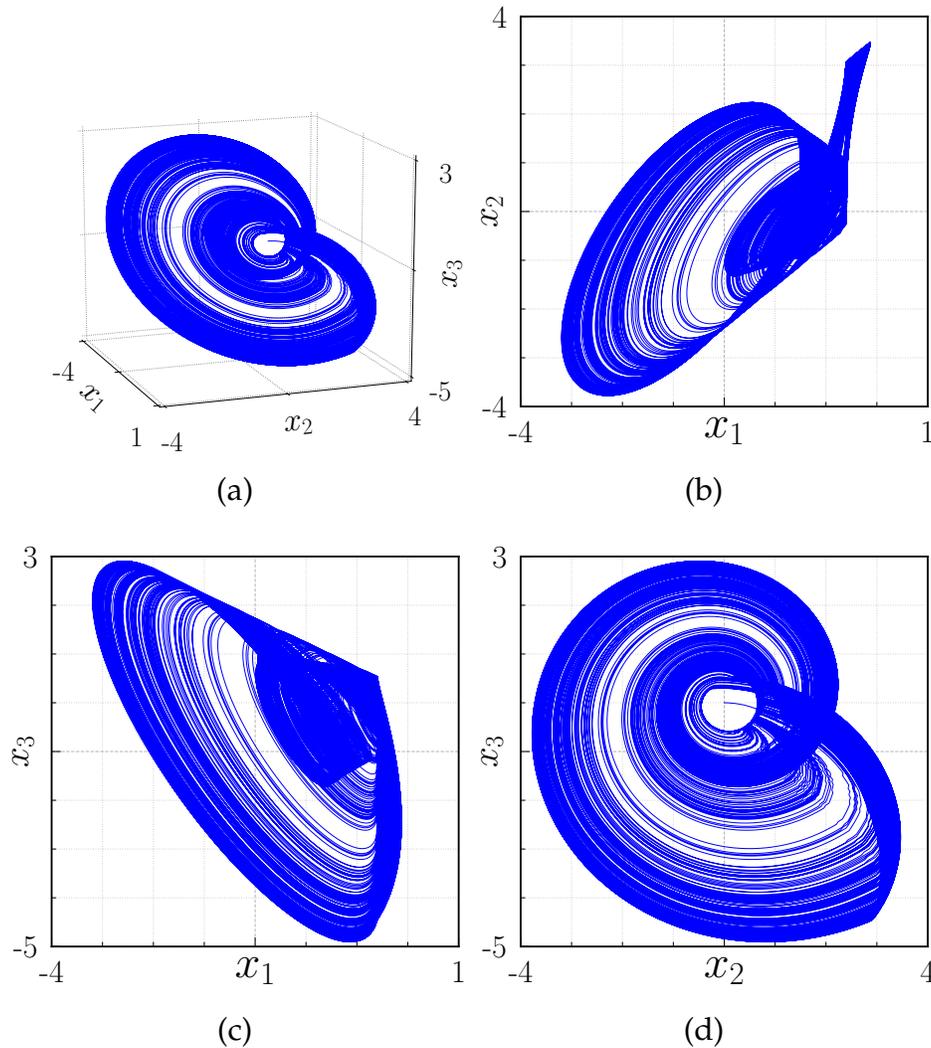


Figura 2.6: Atractor del sistema dado por (2.27) y (2.28) en el espacio de fase (a) (x_1, x_2, x_3) , y proyectado en los planos (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) .

Teorema 2.2.1. [14] Dado un sistema dinámico basado en una transformación afín de la forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $B \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante diferente de cero y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador lineal, el sistema no posee puntos de equilibrio si y sólo si:

- A es no invertible.
- $B \neq 0$ es linealmente independiente del conjunto de vectores columna del operador A .

Este Teorema da una noción geométrica que puede ser usada para el diseño de sistemas sin puntos de equilibrio.

ATRACTORES OCULTOS CON BASE EN SISTEMAS SIN PUNTOS DE EQUILIBRIO

3.1 DISEÑO DE SISTEMAS SIN PUNTOS DE EQUILIBRIO CON ATRACTORES DE ENROSCADOS NO EXPANSIVOS

En esta sección se presenta una construcción para sistemas sin puntos de equilibrio con atractores multienroscados basada en la clase de sistemas reportada en [14]. Esta clase de sistemas exhibe un atractor en el cual las soluciones constantemente se enroscan hacia el centro. Debido a este comportamiento el atractor del sistema propuesto en [14] puede ser considerado un atractor enroscado.

Basados en esta observación generamos la siguiente hipótesis:

Hipotesis 3.1.1. *Es posible diseñar sistemas lineales por partes sin puntos de equilibrio que exhiban un atractor con múltiples enroscamientos en los cuales las trayectorias se dirigen al centro del enroscado.*

Para verificar esta hipótesis lo que se busca es obtener al menos tres enroscados en el atractor, ya que esto nos permitiría llamar al atractor un atractor multienroscado.

El primer paso es obtener un atractor similar al propuesto en [14]. Considere el sistema en \mathbb{R}^3 con un campo vectorial de la forma:

$$\dot{x} = Ax + B(x), \quad (3.1)$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados y A es un operador lineal cuya matriz asociada $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & b \\ 0 & -b & -a \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3). \quad (3.2)$$

con $a, b \in \mathbb{R}^+$, i.e. los eigenvalores de A son $\lambda_{1,2} = -a \pm ib$ y $\lambda_3 = 0$. $B(x)$ es como sigue:

$$B(x) = \begin{cases} B_1, & \text{si } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)x < 0; \\ B_2, & \text{si } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)x > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$.

Este sistema difiere al reportado en [14] en que A es una matriz por bloques más sencilla, sin embargo, esto obliga a que la conmutación no sea mediante un plano paralelo al plano (x_2, x_3) . Mediante una búsqueda numérica se encontró un caso particular, los valores de parámetros están dados en la Tabla 3.1. El atractor del sistema se muestra en la Figura 3.1.

Parámetro	Valor
a	0.5
b	3
γ_1	0.9027
γ_2	0.2441
γ_3	-0.3543
B_1	$(0.5, 0, 0)^T$
B_2	$(-3.5128, 9.4093, 0.3543)^T$

Tabla 3.1: Parámetros de un caso particular del sistema dado por (3.1), (3.2) y (3.3).

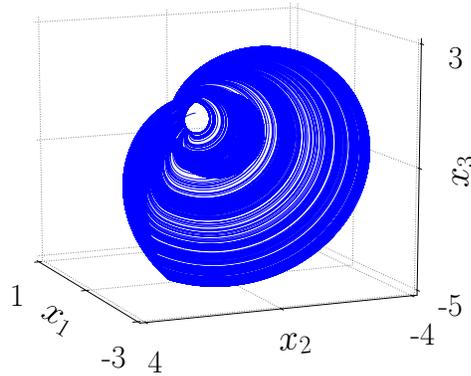


Figura 3.1: Atractor del sistema dado por (3.1), (3.2) y (3.3) con los parámetros de la tabla 3.1 utilizando la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$.

Se desea que los enroscados del atractor se formen a lo largo del eje x_3 , por lo tanto definimos una función que nos permita generar superficies de conmutación paralelas al plano (x_1, x_2) . La función utilizada es la siguiente:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1, & \text{si } x_3 \leq -\epsilon_2; \\ 0, & \text{si } -\epsilon_2 < x_3 \leq \epsilon_1; \\ 1, & \text{si } x_3 > \epsilon_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

La función $B(\mathbf{x})$ está dada de la siguiente forma:

$$B(\mathbf{x}) = \begin{cases} B_1 - \sigma(\mathbf{x})(\epsilon_1 + \epsilon_2)A_3, & \text{si } S(\mathbf{x} - u) \leq 0; \\ B_2 - \sigma(\mathbf{x})(\epsilon_1 + \epsilon_2)A_3, & \text{si } S(\mathbf{x} - u) > 0; \end{cases} \quad (3.5)$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma(\mathbf{x})(\epsilon_1 + \epsilon_2) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

y

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}, S = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad (3.7)$$

tal que $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^3$ con $b_{11} > 0, b_{21} < 0$.

Los enroscados del atractor multienroscado se forman a lo largo del eje x_3 y están determinados por la función $\sigma(\mathbf{x})$, entre más partes conformen a la función sigma más enroscados se formarán. Si hacemos $\sigma = 0$ constante obtenemos el caso de un enroscado como lo propuesto en [14]. De A sabemos que todo vector de la forma $(\alpha, 0, 0)^T$ con $\alpha \neq 0$ es un vector asociado al eigenvalor λ_2 que pertenece al espacio nulo de A , de modo que la condición sobre b_{11} y b_{22} aseguran la ausencia de puntos de equilibrio sin importar el valor que toma $B(\mathbf{x})$ de acuerdo al Teorema 2.2.1. Además, la elección de signos para b_{11} y b_{12} aseguran que las trayectorias se dirigen constantemente al plano $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : S = 0\}$.

Vale la pena mencionar que el número de enroscados puede ser fácilmente incrementado al extender las partes que componen a $\sigma(\mathbf{x})$ de -1 y 1 a $-n$ a m para tener $m + n + 1$ enroscados. Para ilustrar esta construcción considere el siguiente caso particular con tres enroscados dado por (3.1), (3.4) y (3.5) con los valores de la Tabla 3.2 y cuyo atractor se muestra en la Figura 3.2.

Parámetro	Valor
a	0.5
b	3
γ_1	0.9027
γ_2	0.2441
γ_3	-0.3543
ϵ_1	2.6
ϵ_2	4.5
B_1	$(0.5, 0, 0)^T$
B_2	$(-3.5128, 9.4093, 0.3543)^T$

Tabla 3.2: Parámetros de un caso particular del sistema dado por (3.1), (3.4) y (3.5).

Considere ahora un $\sigma(\mathbf{x})$ extendido definido como sigue:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } \epsilon_1 + 3(\epsilon_1 + \epsilon_2) < x_3; \\ 3, & \text{si } \epsilon_1 + 2(\epsilon_1 + \epsilon_2) < x_3 \leq \epsilon_1 + 3(\epsilon_1 + \epsilon_2); \\ 2, & \text{si } \epsilon_1 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) < x_3 \leq \epsilon_1 + 2(\epsilon_1 + \epsilon_2); \\ 1, & \text{si } \epsilon_1 < x_3 \leq \epsilon_1 + (\epsilon_1 + \epsilon_2); \\ 0, & \text{si } -\epsilon_2 < x_3 \leq \epsilon_1; \\ -1, & \text{si } -\epsilon_2 - (\epsilon_1 + \epsilon_2) < x_3 \leq -\epsilon_2; \\ -2, & \text{si } -\epsilon_2 - 2(\epsilon_1 + \epsilon_2) < x_3 \leq -\epsilon_2 - (\epsilon_1 + \epsilon_2); \\ -3, & \text{si } -\epsilon_2 - 3(\epsilon_1 + \epsilon_2) < x_3 \leq -\epsilon_2 - 2(\epsilon_1 + \epsilon_2); \\ -4, & \text{si } -\epsilon_2 - 4(\epsilon_1 + \epsilon_2) < x_3. \end{cases} \quad (3.8)$$

Como un segundo ejemplo de esta construcción considere el siguiente caso particular con nueve enroscados dado por (3.1), (3.5) y (3.8) con los valores de la Tabla 3.2 y cuyo atractor se muestra en la Figura 3.3.

Para verificar si el comportamiento exhibido por estos atractores multientroscados es caótico, se utilizó el algoritmo propuesto por Rosenstein en [30]. Para verificar que el flujo estuviera acotado se simuló por un tiempo de $t = 500000$ u.a. (unidades dimensionales). El máximo exponente de Lyapunov calculado para el atractor de tres enroscados es de $MLE = 0.233514$ y para el de nueve enroscados de $MLE = 1.23384$ utilizando la condición inicial $x = (0, 0, 0)^T$, lo que nos confirma que el comportamiento de estos atractores es caótico.

3.1.1 COMENTARIOS FINALES

La hipótesis de una posible construcción sin puntos de equilibrio mediante sistemas lineales por partes que exhiben atractores multientroscados en el cual las trayectorias se enroscan constantemente al centro de los enroscados ha sido verificada. La construcción propuesta nos permitió llegar a casos particulares con tres y nueve enroscados. Sin embargo, el inconveniente de esta construcción es la necesidad de recurrir a una búsqueda numérica para la selección de la ubicación para las superficies de conmutación al extender de un enroscado a múltiples enroscados en el atractor.

3.2 DISEÑO DE SISTEMAS SIN PUNTOS DE EQUILIBRIO CON ATRACTORES MULTIENTROSCADOS

Reproducido de R. J. Escalante-González, E. Campos-Cantón, and Matthew Nicol. Generation of multi-scroll attractors without equilibria via piecewise linear systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(5):053109, 2017, with the permission of AIP Publishing

En esta sección se presenta una construcción para sistemas sin puntos de equilibrio con atractores caóticos multientroscados basada en la idea de colocación de puntos de equilibrio de sistemas UDS.

Considere un sistema dinámico cuyo campo vectorial asociado es el siguiente:

$$\dot{x} = Ax, \quad (3.9)$$

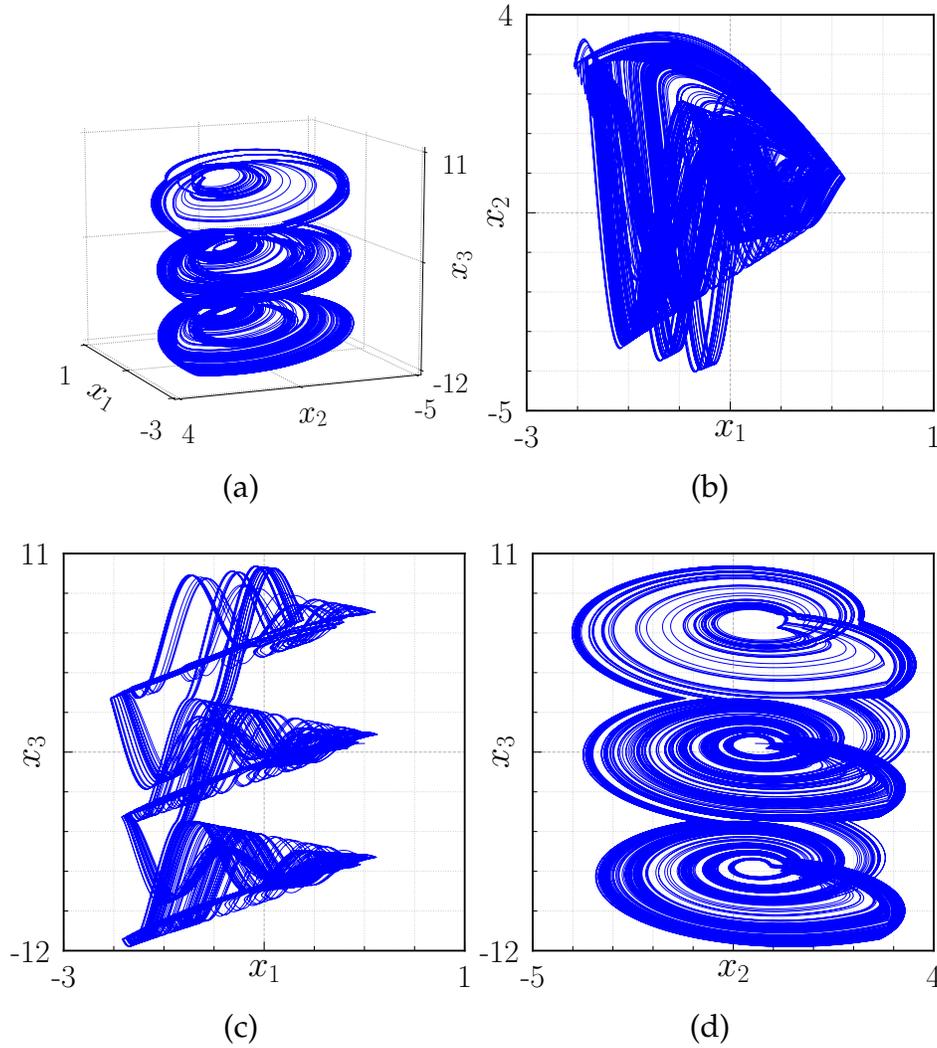


Figura 3.2: Atractor del sistema dado por (3.1), (3.4) y (3.5) con los parámetros de la tabla 3.2 utilizando la condición inicial $x_0 = (0,0,0)^T$ en el espacio (a) (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) .

donde $x \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado, y $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es un operador lineal. La matriz A tiene eigenvalores $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ donde λ_1, λ_2 son eigenvalores complejos conjugados con una parte real positiva mientras que $\lambda_3 = 0$.

Para ilustrar esta clase de sistemas dinámicos con atractores multitenroscados, considere el sistema modelo con un campo vectorial de la forma (3.9) en \mathbb{R}^3 cuya matriz A es de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = (a_1, a_2, a_3), \quad (3.10)$$

donde a_1, a_2 y a_3 son los vectores de columna de la matriz A y suponemos que

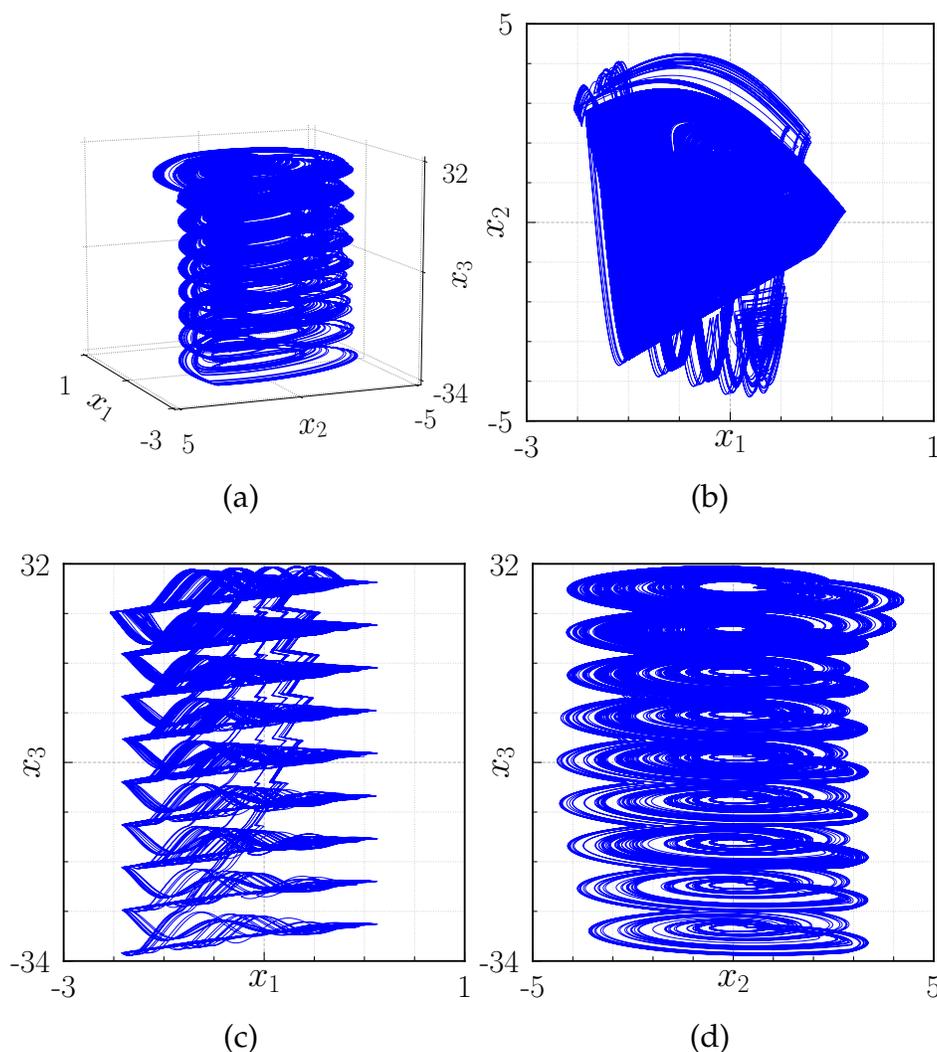


Figura 3.3: Atractor del sistema dado por (3.1), (3.4) y (3.8) con los parámetros de la tabla 3.2 utilizando la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ en el espacio (a) (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) .

$m > 0$ y $n \neq 0$. Los eigenvectores V asociados al eigenvalor $\lambda = 0$ son de la siguiente forma:

$$V = (0, 0, v)^T, \quad (3.11)$$

con $v \neq 0$.

Note que A es de rango dos y su espacio columna es igual al subespacio inestable bidimensional $\langle a_1, a_2 \rangle$. Ahora consideraremos el campo vectorial formado al agregar un vector $k_1 a_1 + k_2 a_2$ en el espacio generado por los vectores columna del operador lineal A .

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2. \quad (3.12)$$

Usando la matriz A dada por (3.10), tenemos el siguiente sistema afín:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + k_1 \\ x_2 + k_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Teniendo en cuenta el siguiente cambio de las variables $y_1 = x_1 + k_1$, $y_2 = x_2 + k_2$ y $y_3 = x_3$, el sistema (3.13) es de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{y}, \quad (3.14)$$

de modo que la rotación en el subespacio inestable esté alrededor del eje dado por la línea

$$\begin{pmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si se agrega un vector no cero V en la dirección neutral, entonces el punto

$$\begin{pmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ya no es un punto de equilibrio y el campo vectorial en este punto es igual a

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix},$$

así que

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + V. \quad (3.15)$$

La solución del problema del valor inicial \mathbf{y}_0 para (3.15) está dada por

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{mt}\cos(nt) & -e^{mt}\sin(nt) & 0 \\ e^{mt}\sin(nt) & e^{mt}\cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v * t \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{mt} \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) & 0 \\ \sin(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) + k_1 \\ x_2(0) + k_2 \\ x_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ v * t \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Deseamos generar un comportamiento similar a un punto de equilibrio “tipo foco-silla” en el sistema y de esta forma poder usarlo como subsistema para construir sistemas mas complicados, de una forma similar a lo que se hace con puntos de

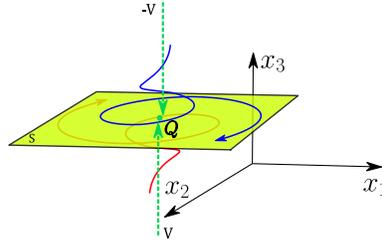


Figura 3.4: Un comportamiento similar a un punto de equilibrio “tipo foco-silla” localizado en el punto $Q = (-k_1, -k_2, \tau)$.

equilibrio foco-silla. Por lo que un sistema lineal por partes se construye de la siguiente manera. Una superficie de conmutación S será un hiperplano orientado por su normal positiva. S divide \mathbb{R}^3 en dos componentes conexos, si un punto x se encuentra en el componente señalado por la normal positiva de S , escribiremos $x > S$.

Para ilustrar, tomamos nuestra superficie de conmutación como $x_3 = 0$ y definimos un flujo en S por

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + W, & \text{si } x_1 < 0; \\ Ax - W, & \text{si } x_1 \geq 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

El vector W se elige en el plano S_1 (por lo tanto, en el subespacio inestable de A), con un signo tal que el componente x_1 de $p_1 := -A|_S^{-1}W$ es positivo. Esto asegura que el flujo en $S \cap \{x_1 < 0\}$ tiene un foco inestable en p_1 , mientras que el flujo en $S \cap \{x_1 \geq 0\}$ tiene un foco inestable en $-p_1$. Por lo tanto, no hay puntos de equilibrio para el flujo PWL en S . A continuación, definimos el flujo en $x > S$ y $x < S$.

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + V + W, & \text{si } x < S, x_1 < 0; \\ Ax + V - W, & \text{si } x < S, x_1 \geq 0; \\ Ax - V + W, & \text{si } x > S, x_1 < 0; \\ Ax - V - W, & \text{si } x > S; x_1 \geq 0; \end{cases} \quad (3.19)$$

donde elegimos la dirección de V para que el sistema dinámico definido por (3.19) $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de el movimiento de los puntos hacia el plano de conmutación S .

Vea la Figura 3.4 donde $W = k_1 a_1 + k_2 a_2$ y el plano S está dado por $x_3 = \tau$. Con un par de sistemas $F_1(x)$, $F_3(x)$ definidos respectivamente por superficies de conmutación paralelas S_1 , S_3 similares a los descritos por (3.18) y (3.19) junto con otra superficie de conmutación S_2 transversal a las otras dos es posible generar atractores multientroscados. Por ejemplo, se puede generar un atractor de doble-entrosado con el siguiente sistema lineal por partes, siempre que $F_3(x)$ se desplace correctamente:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{si } x < S_2; \\ F_3(x), & \text{si } x \geq S_2. \end{cases} \quad (3.20)$$

Note que las superficies de conmutación S_1 y S_3 se utilizan para generar dos comportamientos “tipo foco-silla” y la superficie de conmutación S_2 se utiliza para conmutar entre estos dos “tipo foco-silla”, vea la Figura 3.5. La superficie S_2 es

responsable del comportamiento de estiramiento y plegado en el sistema para generar caos. Esta superficie de conmutación está restringida a ser transversal a la variedad inestable y a la variedad neutral. Note que los planos S_1 , S_2 y S_3 no son invariantes en el flujo definido por (3.20).

Es posible definir un sistema con atractor triple-enroscado, por ejemplo como sigue (ver Figura 3.6):

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{si } x < S_2; \\ F_2(x), & \text{si } S_2 \leq x < S_4; \\ F_3(x), & \text{si } x \geq S_4. \end{cases} \quad (3.21)$$

Si tomamos pequeñas ϵ -vecindades de las superficies S_1 , S_3 y S_5 y registramos 1, 3 o 5 cada vez que una trayectoria bajo el flujo cruce hacia esa vecindad desde fuera, generamos un cambio en el espacio $\{1, 3, 5\}^N$. Ambas secuencias de símbolos 135, 131 y, en consecuencia, 535 y 531 pueden ocurrir, y las secuencias de símbolos generadas son complejas, no periódicas y las llamamos “caóticas”.

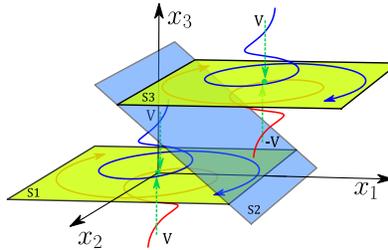


Figura 3.5: Un mecanismo para generar atractores caóticos de doble enroscado sin puntos de equilibrio.

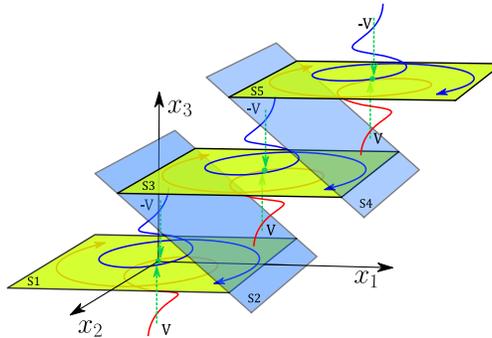


Figura 3.6: Un mecanismo para generar atractores caóticos de triple enroscado sin puntos de equilibrio.

3.2.1 SISTEMA DINÁMICO PWL CON ATRACTOR MULTITENROSCADO: CASO DE MATRIZ SINGULAR

Primero presentaremos la construcción donde A tiene dos eigenvalores complejos conjugados con una parte real positiva y el tercer eigenvalor es cero. En la siguiente

sección estudiaremos el efecto de permitir que el eigenvalor cero se vuelva ligeramente negativo $-\epsilon$ o ligeramente positivo ϵ para un parámetro $\epsilon > 0$. Para introducir la nueva clase de sistema dinámico PWL, primero revisamos algunos teoremas útiles utilizados en la construcción. El Teorema 2.2.1 da las condiciones necesarias y suficientes para la ausencia de puntos de equilibrio en un sistema basado en una transformación lineal afín. Estos sistemas se utilizarán como subsistemas para la construcción PWL.

El siguiente teorema nos dice, para un tipo específico de operador lineal, qué vectores son linealmente independientes de los vectores columna distintos de cero de la matriz asociada al operador que nos ayudarán a cumplir las condiciones en el Teorema 2.2.1.

Teorema 3.2.1. *Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es un operador lineal cuyo polinomio característico tiene cero como una raíz con multiplicidad algebraica uno. Entonces, cualquier eigenvector asociado a cero es linealmente independiente de los vectores columna de la matriz A .*

Demostración. Al considerar la Forma Canónica de Jordan, hay un subespacio invariante U de dimensión dos correspondiente a los otros eigenvalores distintos de cero (ya sea dos eigenvalores reales o un par de eigenvalores complejos conjugados $a + ib$, $a - ib$ con $b \neq 0$) y un subespacio invariante unidimensional V correspondiente al eigenvalor $\lambda = 0$. Así $U \oplus V = \mathbb{R}^3$ y A restringida a U es invertible, por lo tanto $AU \subset U$. Si $x \in \mathbb{R}^3$ entonces podemos escribir (de manera única) $x = x_u \oplus x_v$ donde $x_u \in U$ y $x_v \in V$. Entonces $Ax = Ax_u + Ax_v = Ax_u$ como $Ax_v = 0$. Ya que $Ax_u \subset U$ no podemos resolver $Ax = w$ donde $w \in V$ es un vector diferente de cero. \square

Ilustraremos nuestro mecanismo para producir atractores caóticos multientroscados a través de un ejemplo detallado.

3.2.2 SIMULACIONES NUMÉRICAS

Ejemplo 1. La Figura 3.7 muestra un atractor de doble entrocado que se obtuvo mediante el uso de Runge Kutta de cuarto orden (paso de integración de 0.01) y considerando la siguiente matriz A y vector V .

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -10 & 0 \\ 10 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

con el sistema PWL:

$$\dot{x} = F_i(x), i = 1, \dots, 12, \quad (3.23)$$

Tabla 3.3: Vectores W_i para $i = 1, \dots, 6$.

W_i	k_1	k_2
W_1	-0.1	0
W_2	0.1	0
W_3	-1.1	0
W_4	-0.9	0
W_5	-2.1	0
W_6	-1.9	0

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + V + W_1, & \text{si } x < S_1, x_1 < 0; \\ Ax + V + W_2, & \text{si } x < S_1, x < S_2, x_1 \geq 0; \\ Ax + W_1, & \text{si } x \in S_1, x_1 < 0; \\ Ax + W_2, & \text{si } x \in S_1, x < S_2, x_1 \geq 0; \\ Ax - V + W_1, & \text{si } x > S_1, x < S_2, x_1 < 0; \\ Ax - V + W_2, & \text{si } x > S_1, x < S_2, x_1 \geq 0; \\ Ax + V + W_3, & \text{si } x < S_3, x \geq S_2, x_1 < 1; \\ Ax + V + W_4, & \text{si } x < S_3, x \geq S_2, x_1 \geq 1; \\ Ax + W_3, & \text{si } x \in S_3, x \geq S_2, x_1 < 1; \\ Ax + W_4, & \text{si } x \in S_3, x_1 \geq 1; \\ Ax - V + W_3, & \text{si } x > S_3, x \geq S_2, x_1 < 1; \\ Ax - V + W_4, & \text{si } x > S_3, x_1 \geq 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

La superficie de conmutación está dada por los planos $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3/2 = 1\}$ y $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2\}$. Cada S_i divide \mathbb{R}^n en dos conjuntos, la notación $x \geq S_i$ se utiliza cuando x está en el conjunto apuntado por el vector $(1, 0, 1/2)^T$ o en S_i y $x < S_i$ si se encuentra en el conjunto contrario. Los vectores W_i , con $i = 1, \dots, 4$ se muestran en la Tabla 3.3.

El atractor resultante con un doble enroscado se muestra en la Figura 3.7a y sus proyecciones en los planos (x_1, x_2) , (x_1, x_3) y (x_2, x_3) en las Figuras 3.7b, 3.7c y 3.7d, respectivamente. Su máximo exponente de Lyapunov calculado con el método de Rosenstein [30] es $\lambda = 0.962$. En la Figura 3.7e se muestra la gráfica utilizada para el algoritmo de Rosenstein. Para poder calcular todos los exponentes con el algoritmo de Wolf se ha utilizado una aproximación del efecto de las superficies de conmutación mediante la función $\tanh(\cdot)$ como se hizo en [3], usando la condición inicial $(0.1, 0.1, 0.1)^T$ el resultado es $\{0.89, -0.04, -81.85\}$, mientras que la dimensión Kaplan-Yorke es $D_{KY} = 2.01$.

Puede extenderse a un atractor de triple enroscado considerando el sistema dado por (3.21) con las superficies adicionales $S_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3/2 = 3\}$ y $S_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 4\}$ y W_i , con $i = 1, \dots, 6$ dados en la Tabla 3.3.

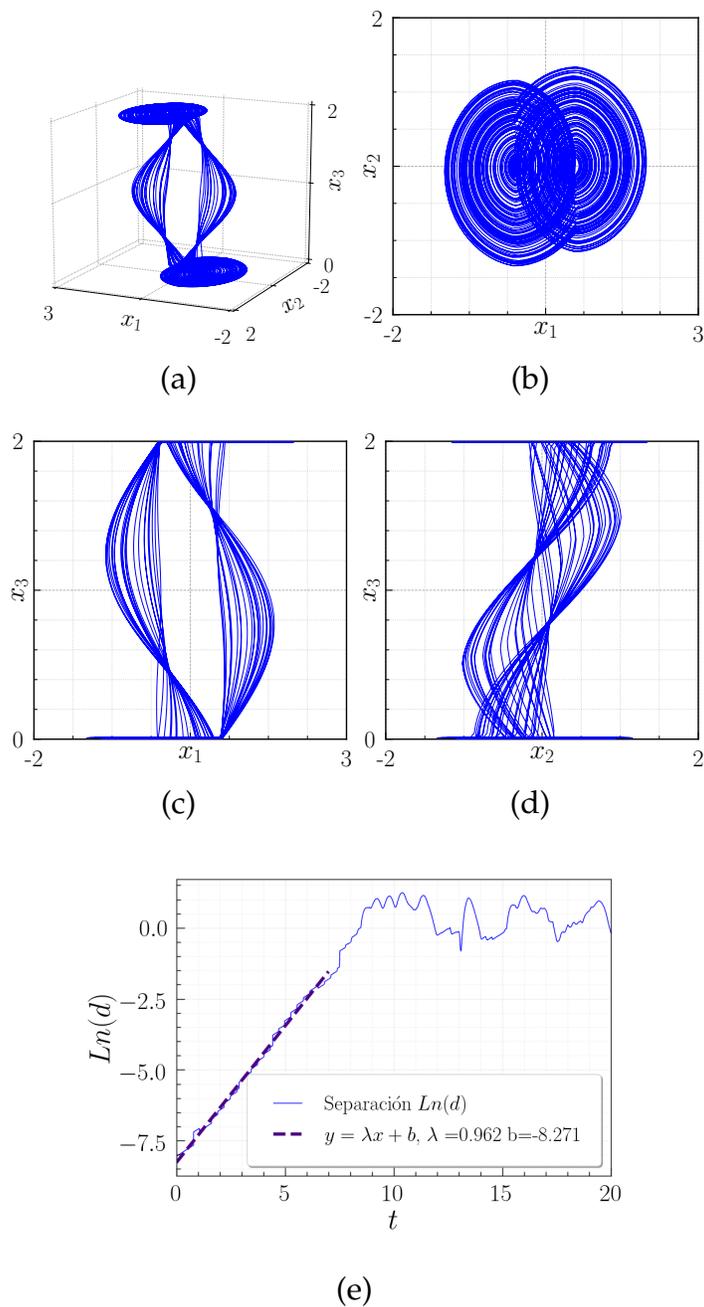


Figura 3.7: Atractor del sistema (3.23) con A y V dados en (3.22) para la condición inicial $(0,0,0)^T$ en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones en los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.

El atractor resultante con un triple entrosado se muestra en la Figura 3.8a y sus proyecciones en los planos (x_1, x_2) , (x_1, x_3) y (x_2, x_3) en las Figuras 3.8 (b), 3.8b y 3.8c, respectivamente. Su máximo exponente de Lyapunov calculado con el método de Rosenstein [30] es $\lambda = 1.191$. En la Figura 3.8e se muestra la gráfica utilizada para el algoritmo de Rosenstein. Para poder calcular todos los exponentes con el

algoritmo de Wolf se ha utilizado una aproximación del efecto de las superficies de conmutación mediante la función $\tanh(\cdot)$ como se hizo en [3], usando la condición inicial $(0.1, 0.1, 0.1)^T$ el resultado es $\{0.83, 0.04, -84.92\}$, mientras que la dimensión Kaplan-Yorke es $D_{KY} = 2.01$.

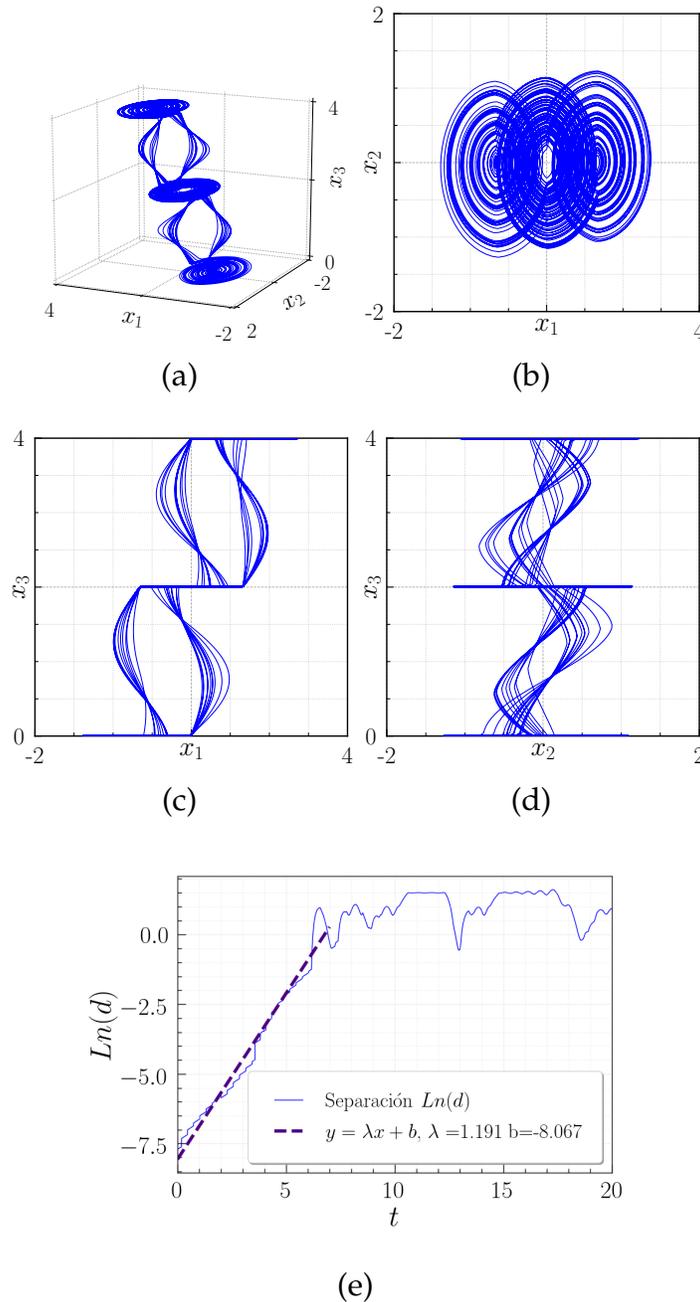


Figura 3.8: Atractor de triple enroscado para la condición inicial $(0, 0, 0)^T$ en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones en los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.

Asignando los números 1, 3 y 5 a las regiones donde $x < S_2$, $S_2 \leq x < S_4$, y $x \geq S_4$,

respectivamente, Pueden producirse secuencias de símbolos 135, 131, 535 y 531. La Tabla 3.4 muestra tres secuencias para diferentes condiciones iniciales cercanas.

Tabla 3.4: Secuencias producidas por el sistema del ejemplo 1 a partir de tres condiciones iniciales cercanas a cero para una simulación de 50 s con un RK4 de paso = 0.01.

$x(0)$	Secuencia
(0.0,0.0,0.0)	13135313135353531313535
(0.0,0.1,0.0)	131313535313135313135
(-0.1,0,-0.1)	13135353135313531353531

Más adelante, mostramos que este sistema pasa la Prueba 0-1 para el Caos de la Ref. [27], justificando nuestra descripción del movimiento caótico.

3.2.3 PERTURBACIONES PEQUEÑAS AL EIGENVALOR CERO: SISTEMAS DINÁMICOS PWL $\dot{x} = Ax + B$ CON ATRACTOR MULTITENROSCADO Y MATRIZ INVERTIBLE A

Ahora consideramos perturbar el eigenvalor real. Considere la matriz A_η , donde

$$A = \begin{pmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad A = (a_1, a_2, a_3), \quad (3.25)$$

donde a_1, a_2 y a_3 son vectores columna de la matriz A y suponga que $m > 0$ y $n \neq 0$. Los eigenvectores V asociados al eigenvalor $\lambda = \eta$ se dan de la siguiente manera:

$$V = (0, 0, v)^T, \quad (3.26)$$

con $v \neq 0$.

El espacio de columna de A es igual al subespacio inestable bidimensional $\langle a_1, a_2 \rangle$. Como antes consideramos el campo vectorial formado al agregar un vector $k_1 a_1 + k_2 a_2$ en el espacio generado por los vectores columna.

$$\dot{x} = Ax + k_1 a_1 + k_2 a_2. \quad (3.27)$$

Usando la matriz A dada por (3.25), tenemos el siguiente sistema lineal:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + k_1 \\ x_2 + k_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Como antes, la solución del problema del valor inicial está dada por

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{mt} \cos(nt) & -e^{mt} \sin(nt) & 0 \\ e^{mt} \sin(nt) & e^{mt} \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\eta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) + k_1 \\ x_2(0) + k_2 \\ x_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 \\ -k_2 \\ \frac{v}{\eta}(e^{\eta t} - 1) \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Consideramos la ecuación $\dot{x} = \eta x + w$ que tiene solución $x(t) = e^{\eta t} [x(0) + \frac{w}{\eta}] - \frac{w}{\eta}$. Supongamos que el signo de v es tal que el flujo se dirige hacia S_1 en la Figura 3.5. Así que $\dot{x}_3 = \eta x_3 - |v|$ si $x_3(0) > 0$ y $\dot{x}_3 = \eta x_3 + |v|$ si $x_3(0) < 0$. Si $\eta < 0$ y $x_3(0) > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = \frac{|v|}{\eta}$, de modo que el flujo en la Figura 3.5 todavía intersecta S_1 de una condición inicial $x_3(0) > 0$. De manera similar, si $x_3(0) < 0$, entonces el flujo intersecta con S_1 . Por lo tanto, la estructura topológica del flujo no se modifica para pequeños $|\eta|$, $\eta < 0$.

Sin embargo, si $\eta > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) \rightarrow \infty$ si $x_3(0) > \frac{|v|}{\eta}$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) \rightarrow -\infty$ para $x_3(0) < -\frac{|v|}{\eta}$. Así que en este caso hay un vecindario de S_1 de puntos más cercanos que $|\frac{|v|}{\eta}|$ a S_1 que consisten en puntos atraídos por S_1 . De lo contrario, los puntos se repelen desde S_1 .

Considere ahora la solución donde el signo de v es tal que el flujo se aleja de S_1 en la Figura 3.5. De este modo $\dot{x}_3 = \eta x_3 + |v|$ si $x_3(0) > 0$ y $\dot{x}_3 = \eta x_3 - |v|$ si $x_3(0) < 0$.

Claramente si $\eta > 0$ y $x_3(0) > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = \infty$ y si $\eta > 0$ y $x_3(0) < 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = -\infty$. Sin embargo si $\eta < 0$ y $x_3(0) > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = \frac{-|v|}{\eta}$ y si $\eta < 0$ y $x_3(0) < 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = \frac{|v|}{\eta}$. Por lo tanto, para pequeños $|\eta|$ persisten los atractores multitenroscados.

3.2.4 SIMULACIONES NUMÉRICAS

Ejemplo 2. Como ejemplo de esta construcción con una matriz invertible, considere el sistema descrito por:

$$\dot{x} = F_i(x), i = 1, \dots, 18. \quad (3.30)$$

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + V + W_1, & \text{si } x < S_1, x_1 < 0; \\ Ax + V + W_2, & \text{si } x < S_1, x < S_2, x_1 \geq 0; \\ Ax + W_1, & \text{si } x \in S_1, x_1 < 0; \\ Ax + W_2, & \text{si } x \in S_1, x < S_2, x_1 \geq 0; \\ Ax - V + W_1, & \text{si } x > S_1, x < S_2, x_1 < 0; \\ Ax - V + W_2, & \text{si } x > S_1, x < S_2, x_1 \geq 0; \\ Ax + V + W_3, & \text{si } x < S_3, x \geq S_2, x_1 < 1; \\ Ax + V + W_4, & \text{si } x < S_3, x \geq S_2, x < S_4, x_1 \geq 1; \\ Ax + W_3, & \text{si } x \in S_3, x \geq S_2, x_1 < 1; \\ Ax + W_4, & \text{si } x \in S_3, x < S_4, x_1 \geq 1; \\ Ax - V + W_3, & \text{si } x > S_3, x \geq S_2, x < S_4, x_1 < 1; \\ Ax - V + W_4, & \text{si } x > S_3, x < S_4, x_1 \geq 1; \\ Ax + V + W_5, & \text{si } x < S_5, x \geq S_4, x_1 < 2; \\ Ax + V + W_6, & \text{si } x < S_5, x \geq S_4, x_1 \geq 2; \\ Ax + W_5, & \text{si } x \in S_5, x \geq S_4, x_1 < 2; \\ Ax + W_6, & \text{si } x \in S_5, x_1 \geq 2; \\ Ax - V + W_5, & \text{si } x > S_5, x \geq S_4, x_1 < 2; \\ Ax - V + W_6, & \text{si } x > S_5, x_1 \geq 2 \end{cases} \quad (3.31)$$

El operador lineal y el vector V se dan como sigue

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -10 & 0 \\ 10 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Las superficies de conmutación están dadas por los planos. $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3/2 = 1\}$, $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2\}$, $S_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3/2 = 3\}$, $S_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 4\}$. Cada S_i divide \mathbb{R}^n en dos conjuntos, la notación $x \geq S_i$ se utiliza cuando x está en el conjunto apuntado por el vector $(1, 0, 1/2)^T$ o en S_i y $x < S_i$ si se encuentra en el conjunto contrario. Los vectores W_i , con $i = 1, \dots, 6$ están dados en la Tabla 3.3.

El atractor resultante obtenido mediante el uso de un Runge Kutta de cuarto orden (paso de integración de 0.01) se muestra en la Figura 3.9. Su máximo exponente de Lyapunov calculado con el método de Rosenstein [30] es $\lambda = 1.49$. En la Figura 3.9e se muestra la gráfica utilizada para el algoritmo de Rosenstein. Para poder calcular todos los exponentes con el algoritmo de Wolf se ha utilizado una aproximación del efecto de las superficies de conmutación mediante la función $\tanh(\cdot)$ como se hizo en [3], usando la condición inicial $(0.1, 0.1, 0.1)^T$ el resultado es $\{0.83, 0.03, -84.58\}$, mientras que la dimensión Kaplan-Yorke es $D_{KY} = 2.01$.

Asignando los números 1, 3 y 5 a las regiones donde $x < S_2$, $S_2 \leq x < S_4$, y $x \geq S_4$, respectivamente, pueden producirse secuencias de símbolos 135, 131, 535 y 531. La

Tabla 3.5 muestra tres secuencias generadas a partir de diferentes condiciones iniciales cercanas a cero.

Tabla 3.5: Secuencias producidas por el sistema del ejemplo 2 a partir de tres condiciones iniciales cercanas a cero para una simulación de 50s con un RK4 de paso = 0.01.

$x(0)$	Secuencia
(0.1,0.1,0.1)	135353131353131353535
(0.0,0.1,0.0)	13135313531313135
(-0.1,0,-0.1)	135313131313531353531

En cuanto al sistema anterior, mostramos en la siguiente sección que este sistema pasa la prueba de caos 0-1 de la Ref. [27], justificando nuestra descripción de movimiento caótico.

3.2.5 DINÁMICA DE LOS SISTEMAS PROPUESTOS.

Para probar la dinámica caótica en los sistemas que hemos propuesto, utilizamos el algoritmo de prueba propuesto en la Ref. [27]. La entrada para la prueba es una serie temporal unidimensional $\phi(n)$ que es usada en un sistema bidimensional $PQ(\phi(n), c)$ como se describe en la Ref. [27], a saber

$$p_c(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \cos(jc),$$

$$q_c(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \sin(jc),$$

donde $c \in (0, 2\pi)$ es un parámetro real. La tasa de crecimiento de la varianza de este sistema distingue entre caótico ($K = 1$) y movimiento regular ($K = 0$) según lo determinado por una cantidad derivada de K .

Para ambos sistemas con un atractor de triple entrecruzamiento previamente introducidos, se generaron series de tiempo tridimensionales por medio de un integrador RK4 con un paso de tiempo igual a 0.01, que luego fue muestreado T tiempo $\tau = 0.25$ para obtener una serie de tiempo 3-dimensional de longitud $N = 2000$. La serie temporal 1-dimensional fue dada por $\phi \circ T^n(p_0)$ para una condición inicial $p_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ y $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_3$.

Las tasas de crecimiento calculadas fueron $K = 0.9930$ y $K = 0.9962$ para el primer y segundo ejemplo, respectivamente. Como se describe en la Ref. [27] K se calcula como el valor medio de las tasas de crecimiento asintótico de una tasa de crecimiento K_c para diferentes valores del parámetro c que pertenecen al sistema bidimensional. En las Figuras 3.10a y 3.10b se muestran los valores de K_c . Así nuestro sistema, según la prueba 0-1, es caótico.

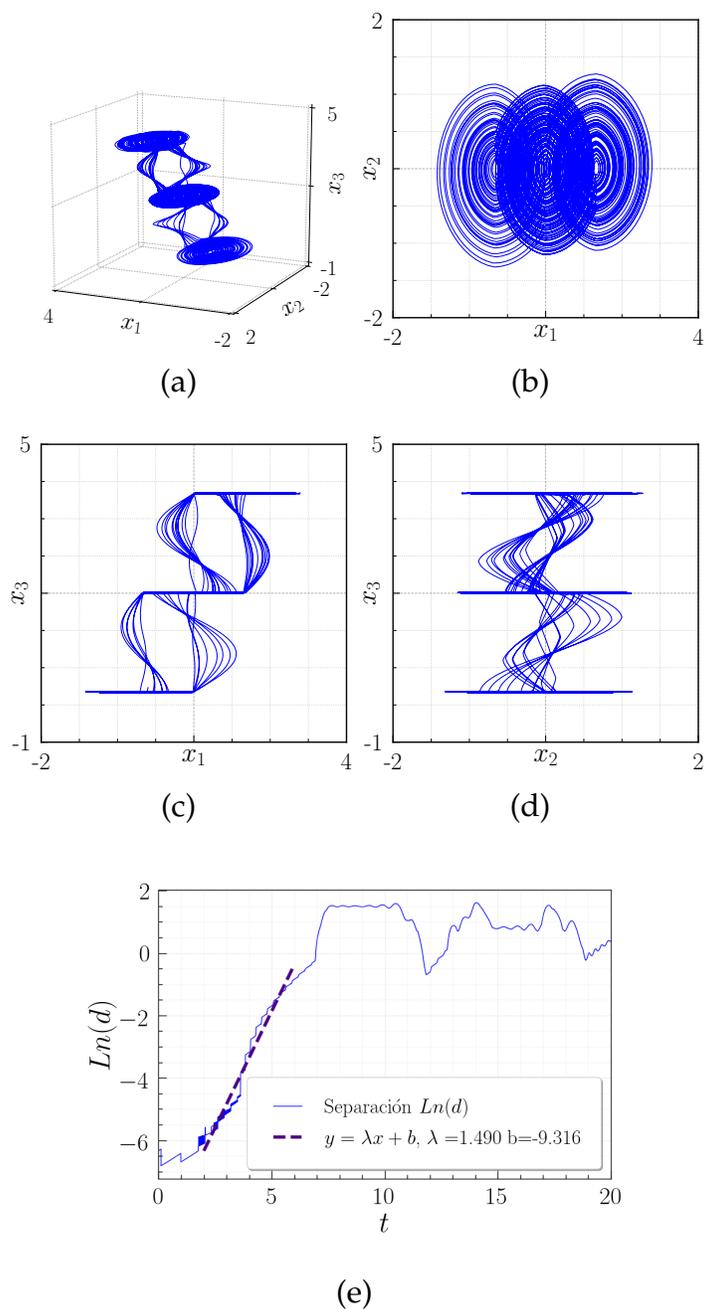


Figura 3.9: Atractor del sistema (3.30) con A dados en (3.32) para la condición inicial $(0.1, 0.1, 0.1)^T$ en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.

3.2.6 COMENTARIOS FINALES

En esta sección se introdujeron nuevas clases de sistemas dinámicos lineales por partes (sin puntos de equilibrio) que presentan atractores multitenroscados. Los sistemas son muy simples geoméricamente y estables ante perturbación. Los atractores

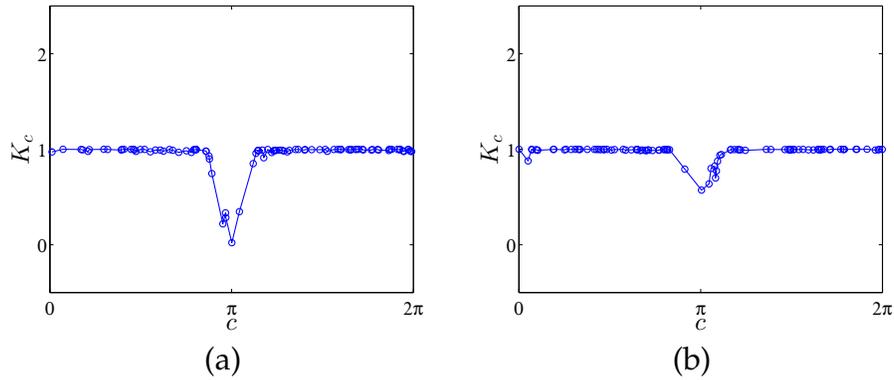


Figura 3.10: Tasas de crecimiento asintóticas K_c calculadas para los sistemas con atractor triple enroscado que se presentan en secciones (a)3.2.1 y (b)3.2.3.

generados por estas clases tienen un comportamiento caótico similar. Se necesita más investigación, quizás mediante dinámicas simbólicas, para cuantificar el desorden del sistema.

3.3 DISEÑO DE SISTEMAS SIN PUNTOS DE EQUILIBRIO CON ATRACTORES TIPO REJILLA[40]

Una gran porción de la sección ha sido tomada de: R. J. Escalante-González and E. Campos-Cantón. A class of piecewise linear systems without equilibria with 3-d grid multiscroll chaotic attractors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 66(8):1456–1460, Aug 2019. ©2019 IEEE

En esta sección se retoman ideas de la construcción de la Sección 3.2 para proponer una nueva construcción de sistemas PWL sin puntos de equilibrio que exhiban atractores rejilla tipo 1D, 2D y 3D.

Un sistema lineal por partes (PWL) está definido mediante una partición $\{D_1, \dots, D_m\}$ del espacio de fase \mathbb{R}^n y tiene un campo vectorial asociado de la siguiente forma:

$$\dot{x} = A_j x + B_j, \text{ si } x \in D_j, \quad (3.33)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ es el vector de estados del sistema, B_j son vectores constantes donde algunos de ellos pueden ser cero, los dominios D_j , con $j = 1, 2, \dots, m$, de la partición satisfacen $\bigcup_{j=1}^m D_j = \mathbb{R}^n$ y $\bigcap_{j=1}^m D_j = \emptyset$.

Considere un sistema dinámico dado por (3.33) en \mathbb{R}^3 con operadores lineales $A_j = A$ dado lo siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & -b & \frac{c-a}{2} \\ \frac{b}{2} & a & \frac{-b}{2} \\ \frac{c-a}{2} & b & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

donde $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$. Los eigenvalores son $\lambda_1 = c, \lambda_{2,3} = a \pm ib$. De acuerdo con el teorema de la forma canónica de Jordan, que establece que una matriz real A puede ser reducida a su forma canónica de Jordan J , i.e., $J = P^{-1}AP$, P está dado por una base de eigenvectores generalizados $\{p_1, p_2, p_3\}$. A continuación, las matrices J y P se dan de la siguiente manera:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (p_1 \ p_2 \ p_3), \quad J = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Entonces, el sistema dinámico tiene un campo vectorial asociado de la forma:

$$\dot{x} = PJP^{-1}x + B(x). \quad (3.36)$$

Definimos $PJP^{-1} = A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$ y $B(x)$ es definido como sigue:

$$B(x) = \begin{pmatrix} -f_1(x)a_1 - f_2(x, f_1)a_2 - f_3(x)a_3 + \\ f_4(x, f_1, f_3)p_1 - f_5(x, f_1, f_3)(a_1 - a_3), \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

donde f_1, \dots, f_5 son funciones constantes por partes dadas por

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq S_{11}; \\ \Delta_{x_1}, & \text{si } S_{11} < x \leq S_{12}; \\ \vdots & \\ p\Delta_{x_1}, & \text{si } S_{1p} < x; \end{cases} \quad (3.38)$$

donde $\Delta_{x_1} \in \mathbb{R}_{>0}$, S_{1i} para $i = 1, \dots, p$ con $p \in \mathbb{R}$ son las superficies de conmutación dadas por $S_{1i} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = \frac{(2i-1)\Delta_{x_1}}{2}\right\}$. Usamos la notación $x > S_{1i}$ si x está en el conjunto apuntado por el vector $(1, 0, 0)^T$, $x \leq S_{ix}$ si x está en el conjunto opuesto o en el plano.

$$f_2(x, f_1) = \begin{cases} -kf_1(x), & \text{si } x \leq S_{21}; \\ \Delta_{x_2} - kf_1(x), & \text{si } S_{22} < x \leq S_{22}; \\ \vdots & \\ q\Delta_{x_2} - kf_1(x), & \text{si } x > S_{2q}. \end{cases} \quad (3.39)$$

donde $\Delta_{x_2} \in \mathbb{R}_{>0}$, S_{2i} para $i = 1, \dots, q$ con $q \in \mathbb{R}$ son las superficies de conmutación dadas por $S_{2i} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = \frac{(2i-1)\Delta_{x_2}}{2} - kf_1(x)\right\}$ donde $k \in \mathbb{R}$. Utilizamos la notación $x > S_{2i}$ si x está en el conjunto apuntado por el vector $(0, 1, 0)^T$, $x \leq S_{ix}$ si x está en el conjunto opuesto o en el plano.

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq S_{31}; \\ \Delta_{x_3}, & \text{si } S_{31} < x \leq S_{32}; \\ \vdots & \\ r\Delta_{x_3}, & \text{si } x > S_{3r}; \end{cases} \quad (3.40)$$

donde $\Delta_{x_3} \in \mathbb{R}_{>0}$, S_{3i} para $i = 1, \dots, r$ con $r \in \mathbb{R}$ son las superficies de conmutación dadas por $S_{3i} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \frac{(2i-1)\Delta_{x_3}}{2} \right\}$. Usamos la notación $x > S_{3i}$ si x está en el conjunto señalado por el vector $(0, 0, 1)^T$, $x \leq S_{ix}$ si x está en el conjunto opuesto o en el plano. Estas tres funciones constantes por partes f_1, f_2, f_3 generan una partición del espacio de fase \mathbb{R}^3 donde el sistema PWL (3.36) bajo una selección apropiada de parámetros puede exhibir atractores rejilla tipo 1D, 2D o 3D de $p + 1 \times q + 1 \times r + 1$. Ahora necesitamos definir una función que asegure la ubicación de los enroscados sin importar el valor de λ_1 , de la siguiente manera:

$$f_4(x, f_1, f_3) = \begin{cases} v, & \text{si } x < S_4; \\ 0, & \text{si } x = S_4; \\ -v, & \text{si } x > S_4. \end{cases} \quad (3.41)$$

donde $v \in \mathbb{R}_{>0}$ y el plano de conmutación $S_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = f_1(x) + f_3(x)\}$, usamos la notación $x > S_4$ si x está en el conjunto señalado por el vector $(1, 0, 1)^T$, $x < S_4$ si x está en el conjunto opuesto y $x = S_4$ si x está en el plano. Observe que una trayectoria podría quedar atrapada en un punto en S_4 ubicado en el centro del enroscado, incluso para el caso $\lambda_1 = 0$ ($c = 0$), que podría llamarse un punto de equilibrio virtual, para evitar esta situación una nueva función se define de la siguiente manera:

$$f_5(x, f_1, f_3) = \begin{cases} -w, & \text{si } x \leq S_5; \\ w, & \text{si } x > S_5; \end{cases} \quad (3.42)$$

donde $w \in \mathbb{R}_{>0}$ y el plano de conmutación $S_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + x_3 = f_3(x) - f_1(x)\}$, usamos la notación $x > S_5$ si x está en el conjunto señalado por el vector $(-1, 0, 1)^T$, $x \leq S_{ix}$ si x está en el conjunto opuesto o en el plano.

3.3.1 ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN.

Una implementación electrónica del sistema (3.36) para $c = 0$ da como resultado un sistema sin puntos de equilibrio. Pero es imposible garantizar experimentalmente el valor de $c = 0$ debido a la tolerancia y el ruido en todos los circuitos electrónicos. Entonces, el interés es trabajar con un sistema sin puntos de equilibrio $c = 0$, pero considerando las perturbaciones δ , *i. e.*, $c = \delta \in \mathbb{R}$ de manera que $|\delta| \ll 1$.

El sistema (3.36) puede ser reescrito considerando (3.37) como:

$$\dot{x} = PJP^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - f_1(x) - f_5(x, f_1, f_3) \\ x_2 - f_2(x, f_1) \\ x_3 - f_3(x) + f_5(x, f_1, f_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_4(x, f_1(x), f_3(x)) \\ 0 \\ f_4(x, f_1(x), f_3(x)) \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Considerando un cambio de variables $y_1 = x_1 - f_1(x) - f_5(x, f_1, f_3)$, $y_2 = x_2 - f_2(x, f_1)$ y $y_3 = x_3 - f_3(x) + f_5(x, f_1, f_3)$ Con la transformación apropiada de la función f_4 obtenemos:

$$\dot{y} = PJP^{-1}y + (f_4(y), 0, f_4(y))^T, \quad (3.44)$$

con el plano de conmutación $S_4 = \{y \in \mathbb{R}^3 | y_1 + y_3 = 0\}$. Puede observarse que:

$$f_4(y)P^{-1}p_1 = (f_4(y) \ 0 \ 0)^T. \quad (3.45)$$

de este modo considerando un cambio de variable $z = P^{-1}y$:

$$\dot{z} = Jz + (f_4(z), 0, 0)^T, \quad (3.46)$$

con el plano de conmutación $S_4 = \{z \in \mathbb{R}^3 | z_1 = 0\}$. Los flujos de los sistemas (3.43), (3.44) y (3.46) son equivalentes topológicos en cada D_j , la transformación de coordenadas x a coordenadas y es una traslación que se realiza para cada D_j . La transformación de coordenadas y a coordenadas z es tal que $z = P^{-1}y$ e $y = Pz$. Por lo tanto, definiendo $h(\gamma) = P\gamma$ tenemos que $h(\phi_z(t, z_0)) = \phi_y(t, h(z_0))$ donde ϕ_z y ϕ_y son los flujos en coordenadas z y y , respectivamente.

Podemos encontrar una expresión de la solución por partes para todo t ya que podemos obtener la solución en cada D_j . La expresión que se obtiene no depende de x_0 y de t solamente, sino que depende continuamente de x . Cuando la trayectoria pasa de un D_j a un D_k con $j \neq k$ se toma una nueva condición inicial $x_0 \in D_k$ y $t = 0$.

Cuando $c = 0$ la solución red en un D_j de los sistemas (3.46), (3.44) y (3.43) se dan de la siguiente manera:

$$z = \exp(Jt)z_0 + (f_4(z)t, 0, 0)^T, \quad (3.47)$$

$$y = \exp(At)y_0 + (f_4(y)t, 0, f_4(y)t)^T, \quad (3.48)$$

$$x = \exp(At) \begin{pmatrix} x_1(0) - f_1(x) - f_5(x, f_1, f_3) \\ x_2(0) - f_2(x, f_1) \\ x_3(0) - f_3(x) + f_5(x, f_1, f_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_4(x, f_1, f_3)t \\ 0 \\ f_4(x, f_1, f_3)t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -f_1(x) - f_5(x, f_1, f_3) \\ -f_2(x) \\ -f_3(x) + f_5(x, f_1, f_3) \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Cuando $c \neq 0$ la solución en un D_j de los sistemas (3.43), (3.44) y (3.46) se dan como:

$$z = \exp(Jt)z_0 + \begin{pmatrix} \frac{f_4(z)}{c}(\exp(ct) - 1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$y = \exp(At)y_0 + \begin{pmatrix} \frac{f_4(y)}{c}(\exp(ct) - 1) \\ 0 \\ \frac{f_4(y)}{c}(\exp(ct) - 1) \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

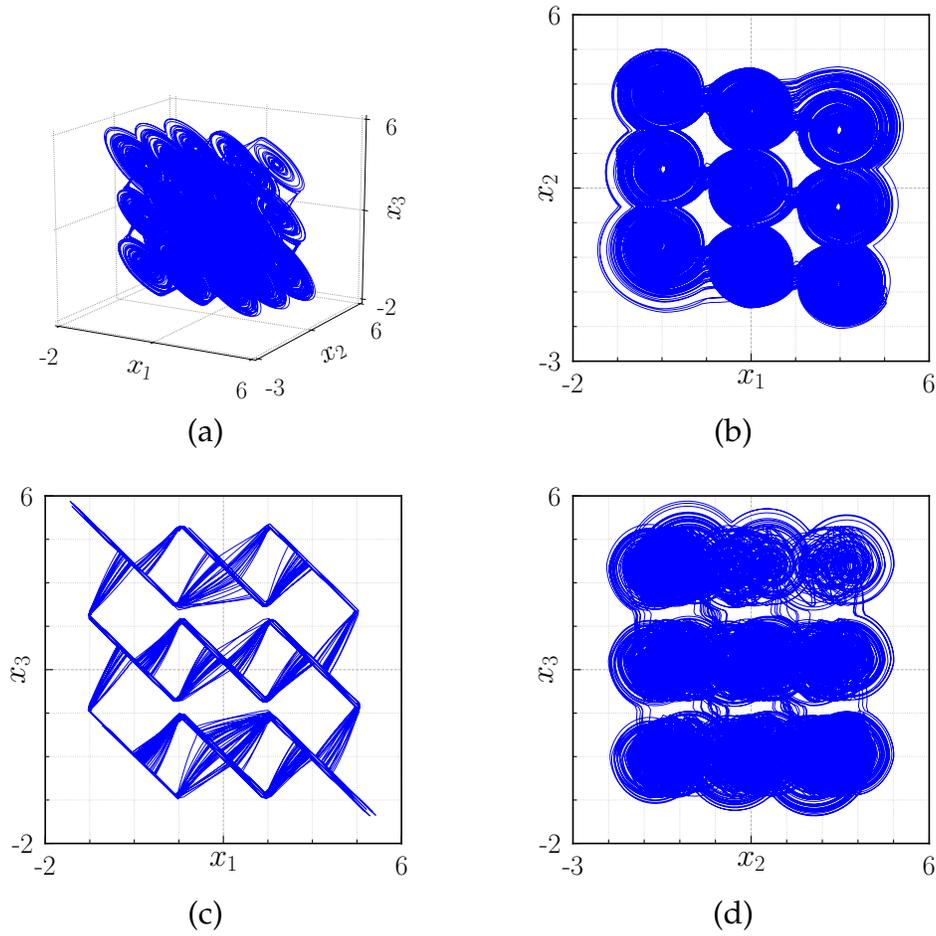


Figura 3.11: ©2019 IEEE Atractor del sistema (3.36) con la parte afín dada en (3.37) y los parámetros $p = q = r = 2$, $a = 0.7$, $b = 10$, $c = 0$, $v = 11$, $w = 0.1$, $k = 0.25$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ y $\Delta x_3 = 2.2$ para la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ en el espacio (a) \mathbb{R}^3 y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) , y (d) (x_2, x_3) .

$$\begin{aligned}
 x = \exp(At) & \begin{pmatrix} x_1(0) - f_1(x) - f_5(x, f_1, f_3) \\ x_2(0) - f_2(x, f_1) \\ x_3(0) - f_3(x) + f_5(x, f_1, f_3) \end{pmatrix} + \\
 & \begin{pmatrix} \frac{f_4(x, f_1, f_3)}{c} (\exp(ct) - 1) \\ 0 \\ \frac{f_4(x, f_1, f_3)}{c} (\exp(ct) - 1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -f_1(x) - f_5(x, f_1, f_3) \\ -f_2(x, f_1) \\ -f_3(x) + f_5(x, f_1, f_3) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

La función $f_4(z)$ se puede escribir en coordenadas z como:

$$f_4(z) = \begin{cases} v, & \text{si } z_1 < 0; \\ 0, & \text{si } z_1 = 0; \\ -v, & \text{si } z_1 > 0. \end{cases} \tag{3.53}$$

Mirando la solución en (3.47) cuando $z_1(0) \neq 0$ y $c = 0$, $z_1(t) = z_1(0) + f_4(z)t$,

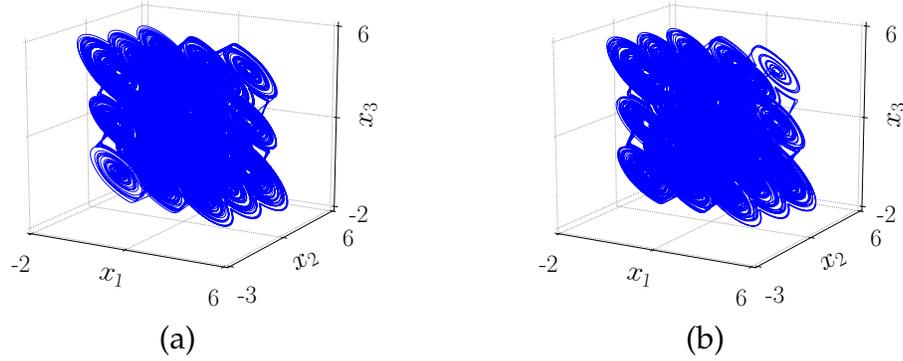


Figura 3.12: ©2019 IEEE Atractor del sistema (3.36) con la parte afín dada en (3.37) y los parámetros $p = q = r = 2$, $a = 0.7$, $b = 10$, $c = 0$, $v = 11$, $w = 0.1$, $k = 0.25$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ y $\Delta x_3 = 2.2$ mas una perturbación en el parámetro c of (a) -0.1 y (b) 0.1 .

por lo que las trayectorias van al plano S_4 .

Cuando $c \neq 0$, *i.e.*, cuando hay una perturbación en el eigenvalor $\lambda_1 = 0$, hay dos casos, cuando $c > 0$ y $c < 0$. La solución para z_1 es $z_1(t) = \exp(ct)z_1(0) + \frac{f_4(z)}{c} (\exp(ct) - 1)$ y desde la ecuación (3.46) el punto de equilibrio está dado por:

$$z^* = \left(-\frac{f_4(z)}{c}, 0, 0 \right)^T. \quad (3.54)$$

Para el caso $z_1(0) \neq 0$ y $c < 0$, $\text{sgn}(z_1^*) \neq \text{sgn}(z_1(0))$, por lo tanto, las trayectorias van hacia al plano $\{z \in \mathbb{R}^3 | z_1 = z_1^*\}$ lo que garantiza que lleguen al plano $S_4 = \{z \in \mathbb{R}^3 | z_1 = 0\}$.

Para el caso cuando $z_1(0) \neq 0$ y $c > 0$ $\text{sgn}(z_1^*) = \text{sgn}(z_1(0))$, sin embargo, se supone que la perturbación en λ_1 es pequeña y $|z_1^*| \gg 1$. Luego, las trayectorias se alejan del plano $\{z \in \mathbb{R}^3 | z_1 = z_1^*\}$ y alcanzan S_4 .

Se ha probado en computadora la expresión dada en (3.49) para los valores $p = q = r = 2$, $a = 0.7$, $b = 10$, $c = 0$, $v = 11$, $w = 0.1$, $k = 0.25$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ y $\Delta x_3 = 2.2$ para la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ y con un paso en el tiempo de $\Delta t = 0.001$, sin el uso de RK4 se obtiene el atractor que se muestra en la Figura 3.14.

La ausencia de puntos de equilibrio en todos \mathbb{R}^3 , incluso cuando se perturba λ_1 se establece con el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Sea el sistema (3.36) con (3.37), (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), y (3.42) un sistema PWL, entonces el sistema (3.36) no tiene ningún equilibrio para $c = 0$ o $0 < |c| \ll 1$.*

Prueba: Reescribamos el sistema como

$$\dot{x} = PJP^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - f_1(x) \\ x_2 - f_2(x, f_1(x)) \\ x_3 - f_3(x) \end{pmatrix} + PJP^{-1} \begin{pmatrix} -f_5(x) \\ 0 \\ f_5(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_4(x, f_1, f_3) \\ 0 \\ f_4(x, f_1, f_3) \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

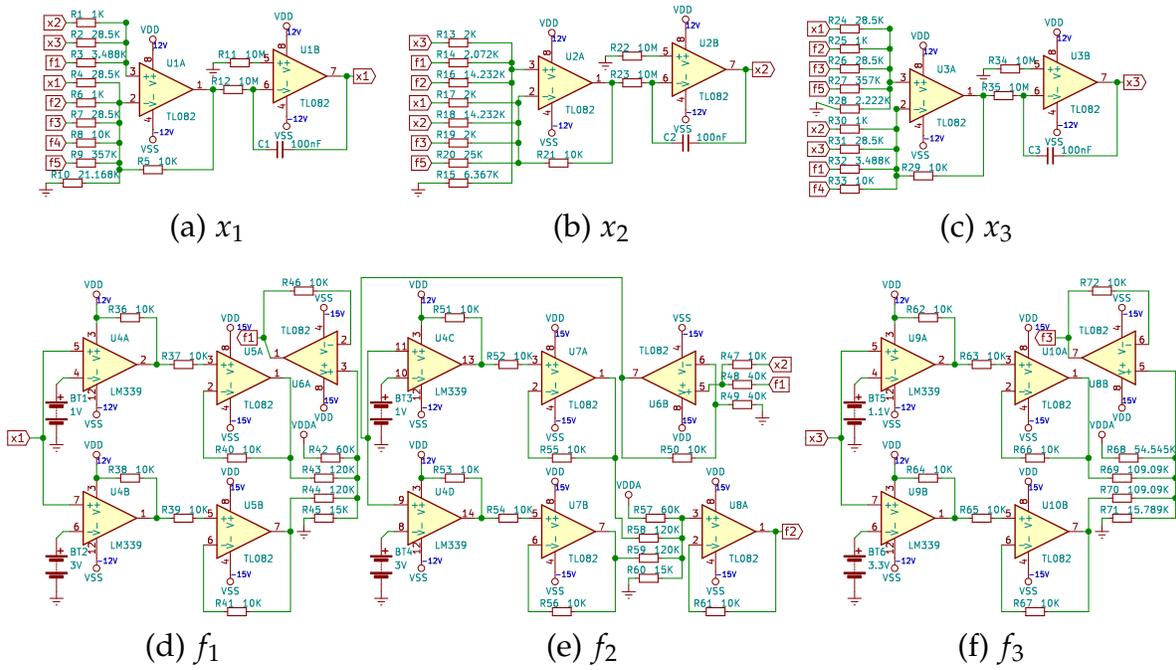


Figura 3.13: ©2019 IEEE Sub-circuitos para las señales: (a) x_1 , (b) x_2 , (c) x_3 , (d) f_1 , (e) f_2 , y (f) f_3 .

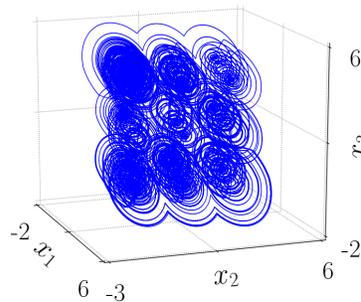


Figura 3.14: Atractor obtenido mediante la expresión (3.49) para los valores $p = q = r = 2$, $a = 0.7$, $b = 10$, $c = 0$, $v = 11$, $w = 0.1$, $k = 0.25$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ y $\Delta x_3 = 2.2$ para la condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$ y con un paso en el tiempo de $\Delta t = 0.001$ y $t \in [0, 300]$ u.a. sin el uso de RK4.

Considerando un cambio de variables $y_1 = x_1 - f_1(x)$, $y_2 = x_2 - f_2(x, f_1(x))$ y $y_3 = x_3 - f_3(x)$ (el cambio de variables genera una traslación del sistema):

$$\dot{y} = PJP^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_5(y)a \\ -f_5(y)b \\ f_4(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_4(y) \\ 0 \\ f_4(y) \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

ahora considerando un cambio de variables $z = P^{-1}y$

$$\dot{z} = J \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f_5(z)b \\ -f_5(z)a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_4(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\dot{z} = J \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 - f_5(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_4(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Entonces $f_5(z)$ puede ser reescrito como:

$$f_5(z) = \begin{cases} -w, & \text{si } z_1 > 0; \\ w, & \text{si } z_1 \leq 0; \end{cases} \quad (3.59)$$

Cuando $c = 0$ y $f_4(z) \neq 0$ no hay puntos de equilibrio porque $(f_4(z), 0, 0)^T$ pertenece al espacio propio asociado a λ_1 [41]. Cuando $f_4(z) = 0$, *i.e.*, el punto de equilibrio se ubica virtualmente en $(0, 0, f_5(z))^T$, entonces no hay puntos de equilibrio en todos \mathbb{R}^3 . Cuando $c \neq 0$ el punto de equilibrio se ubica en $(-f_4(z)/c, 0, f_5(z))^T$ entonces no hay puntos de equilibrio en todos \mathbb{R}^3 . Esto completa la prueba. □

3.3.2 SISTEMA PARTICULAR

Considere el sistema (3.36) con la parte afín dada por (3.37) $p = q = r = 2$, $a = 0.7$, $b = 10$, $c = 0$, $v = 11$, $w = 0.1$, $k = 0.25$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2$ y $\Delta x_3 = 2.2$. Éste presenta un atractor caótico tipo rejilla de $3 \times 3 \times 3$ enroscados.

El atractor resultante para el caso ideal cuando $c = 0$ se muestra en la Figura 3.11. En la Figura 3.12, se muestra el atractor caótico tipo rejilla en un arreglo de enroscados de $3 \times 3 \times 3$ generado por $\lambda_1 = -0.1$ y $\lambda_2 = 0.1$. Como puede verse, el atractor se conserva incluso cuando existe una perturbación en el eigenvalor λ_1 .

El máximo exponente de Lyapunov (MLE) se calculó utilizando un método de Runge-Kutta de cuarto orden con un paso fijo de 0.0001s como 1.02 al aproximar la separación promedio de diez trayectorias. El algoritmo de Wolf también se realizó con un paso de tiempo de 0.001, los exponentes calculados son $\{1.16, 0, -20.42\}$, lo que da una dimensión de Kaplan-Yorke de 2.056. Las funciones aproximadas f_1, \dots, f_5 a través de $\tanh(\cdot)$ se usaron para el algoritmo de Wolf.

3.3.3 IMPLEMENTACIÓN ELECTRÓNICA

En esta sección se propone una implementación electrónica para el sistema (3.36) con la parte afín dada en (3.37) es propuesta. El diagrama electrónico se ha dividido en ocho sub-circuitos. Los sub-circuitos responsables de las señales de salida x_1 , x_2 y x_3 se muestran en las Figuras 3.13a, 3.13b y 3.13c, y están compuestos básicamente de un sumador-restador y un integrador.

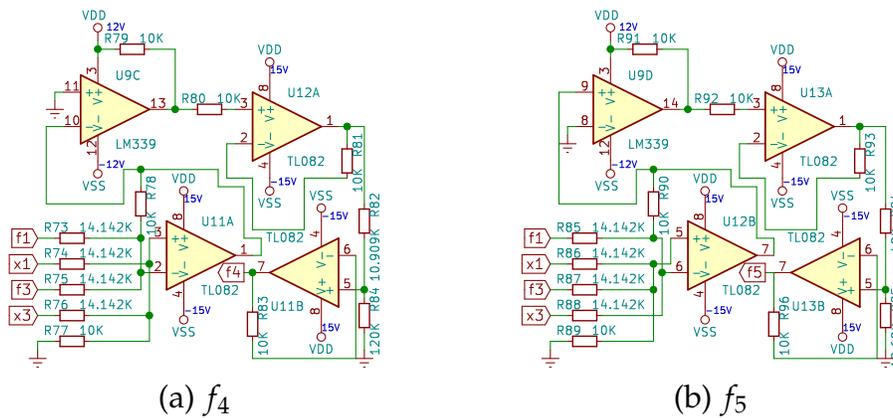


Figura 3.15: ©2019 IEEE Sub-circuitos para las señales: (a) f_4 y (b) f_5 .

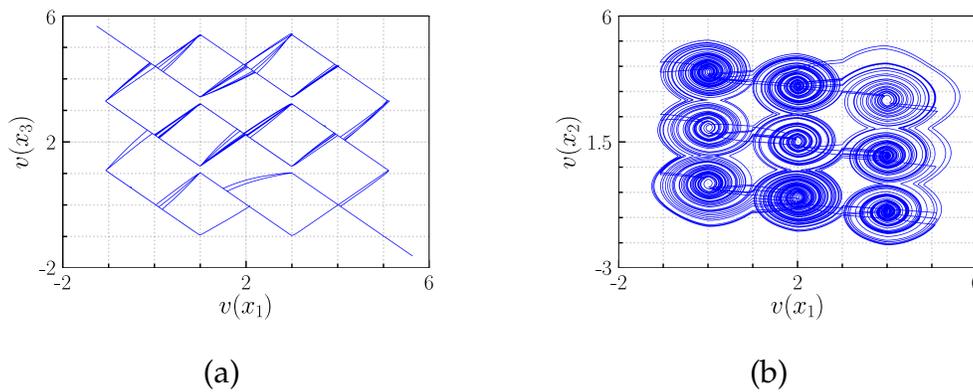


Figura 3.16: ©2019 IEEE Atractor generado por simulación electrónica en ngspice proyectado en los planos: (a) (x_1, x_2) y (c) (x_1, x_3) .

Los sub-circuitos en las Figuras 3.13d y 3.13f están compuestos por dos comparadores seguidos por seguidores que van a un sumador y son responsables de las señales f_1 y f_3 , respectivamente. El subcircuito en el diagrama de la Figura 3.13e tiene la misma estructura pero con un sumador adicional antes de los comparadores y es responsable de la señal f_2 . Los sub-circuitos en las Figuras 3.15a y 3.15b están compuestos por un sumador-sumador seguido por un comparador, un seguidor y finalmente un atenuador, y son responsables de las señales f_4 y f_5 , respectivamente.

La realización electrónica propuesta hace uso del amplificador operacional dual de entrada JFET de propósito general TL082CP y el comparador diferencial cuádruple LM339AN. Los valores de resistencia calculados se aproximaron a los valores alcanzables mediante uno o dos resistores de la serie E12 configurados en paralelo o en serie.

Se ejecutó una simulación electrónica del circuito y las proyecciones resultantes en los planos (x_1, x_2) y (x_1, x_3) se muestran en la Figura 3.16.

El circuito también se implementó físicamente y el resultado se presenta en la Figura 3.17. La medición se realizó con el osciloscopio digital Tektronix DPO 5054B

con una frecuencia de muestreo de $20.0kS/s$ y una resolución de $50\mu s$.

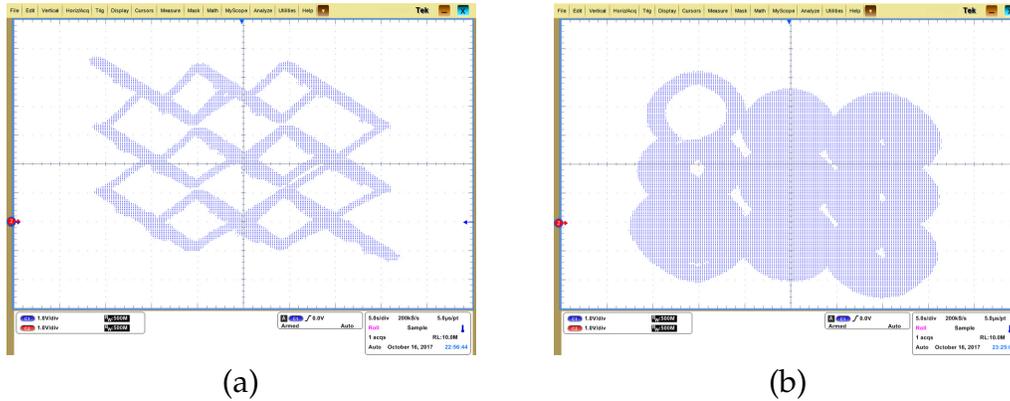


Figura 3.17: ©2019 IEEE Atractor del circuito implementado físicamente en la Figura 3.13 proyectado en: (a) (x_1, x_2) y (c) (x_1, x_3) .

3.3.4 COMENTARIOS FINALES

Se ha realizado un análisis matemático detallado de la solución del sistema para mostrar la ausencia de puntos de equilibrio y la persistencia del comportamiento bajo la perturbación del eigenvalor $\lambda_1 = 0$. El número de enroscados y su distribución en el atractor tipo rejilla se pueden modificar fácilmente con las funciones f_1 , f_2 y f_3 . Se ha estudiado un caso particular con una disposición de enroscados de $3 \times 3 \times 3$ y su realización electrónica se ha probado mediante simulación numérica y experimental.

Sin embargo, no se ha abordado la extensión del enfoque para un sistema de cuatro dimensiones con el fin de obtener atractores de rejilla hipercaóticos, ya que se han reportado atractores de múltiples enroscados hipercaóticos en sistemas con puntos de equilibrio, es razonable pensar en un atractor tipo rejilla hipercaótico y se considera como trabajo futuro.

3.4 DISEÑO DE SISTEMAS SIN PUNTOS DE EQUILIBRIO CON ATRACTORES HIPERCAÓTICOS

En esta sección se presenta un método para construir sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio con atractores hipercaóticos basado en el acoplamiento de subsistemas tridimensionales sin puntos de equilibrio con atractores enroscados. Considere la clase de sistemas tridimensionales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + b(y - f(X)), \\ \dot{y} &= -bx, \\ \dot{z} &= -x^2v(z - f(X)) + d, \end{aligned} \tag{3.60}$$

donde $X = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado, $a, b, v, d \in \mathbb{R}$ son parámetros del sistema tal que $a, b, v > 0$ y $b > a$. $f(X)$ es un funcional cuya gráfica se asemeja a una escalera y se da de la siguiente manera:

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \frac{p}{2} \tanh(k(y + z + 2p(i - 1) - p(m - 1))), \quad (3.61)$$

donde $m \in \mathbb{Z}^+$ determina el número de enroscados en el atractor que es igual a $m + 1$, esto se debe a que en la gráfica que asemeja a una escalera hay $m + 1$ niveles y por tanto $m + 1$ traslaciones del comportamiento oscilatorio, los parámetros $k, p \in \mathbb{R}^+$ determinan la forma de las mesetas en la escalera como el diagrama de $f(X)$, es decir, k y p determinan la pendiente y la altura entre escalones consecutivos, respectivamente. La altura está dada por p .

Sin embargo, el funcional (3.61) puede ser modificado reemplazando $\tanh(\cdot)$ con la función escalón Heaviside $H(\cdot)$ dada como sigue:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ -1, & \text{si } x < 0; \end{cases} \quad (3.62)$$

para obtener el funcional discontinuo:

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \frac{p}{2} H(y + z + 2p(i - 1) - p(m - 1)). \quad (3.63)$$

El funcional $f(X)$ también podría ser reemplazado por un funcional lineal continuo por partes. Definamos la saturación funcional $\text{sat}(x, c)$ de la siguiente manera:

$$\text{sat}(x, c) = \begin{cases} -\frac{p}{2}, & \text{si } x < c - \frac{p}{2k}, \\ k(x - c), & \text{si } c - \frac{p}{2k} \leq x \leq c + \frac{p}{2k}, \\ \frac{p}{2}, & \text{si } x > c + \frac{p}{2k}. \end{cases} \quad (3.64)$$

Luego podemos definir un funcional continuo por partes como:

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \text{sat}(y + z, 2p(i - 1) - p(m - 1)). \quad (3.65)$$

En la Figura 3.18 se muestra la gráfica de los funcionales (3.61), (3.63), (3.65) para los valores de los parámetros $p = 2, k = 2$ y $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Para encontrar los puntos de equilibrio, equiparamos el campo vectorial en (3.60) a cero, a partir de la ecuación de \dot{y} obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -bx, \\ x &= 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

y de la ecuación de \dot{z} obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2v(z - f(X)) + d, \\ 0 &= d. \end{aligned} \quad (3.67)$$

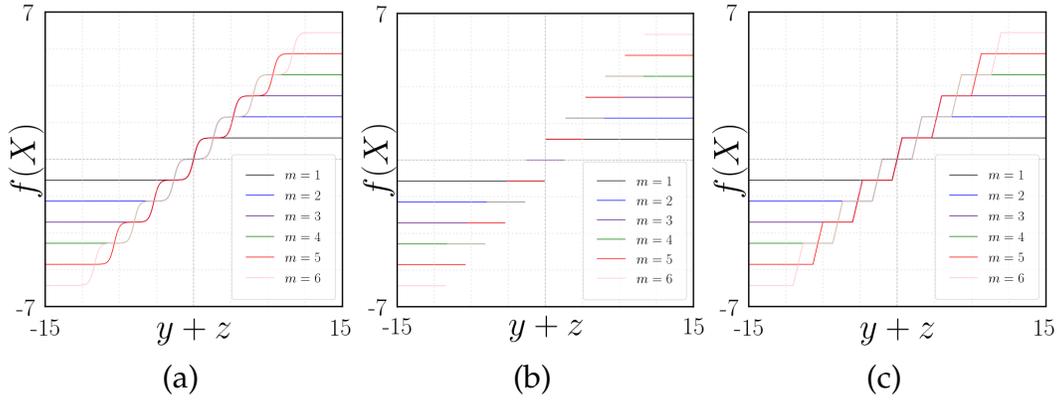


Figura 3.18: Gráfica de los funcionales (a)(3.61), (b)(3.63) y (c)(3.65) para los parámetros $p = 2$, $k = 2$ y $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

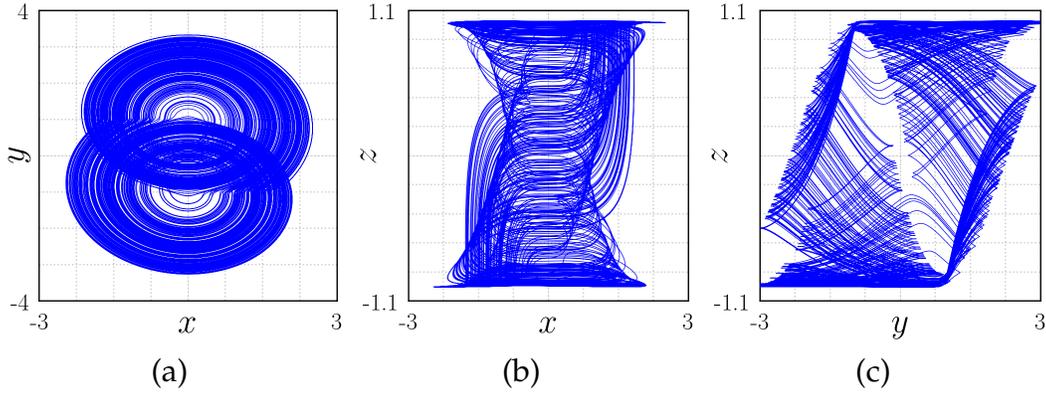


Figura 3.19: Atractor doble enroscado del sistema (3.60) con los parámetros $a = 1$, $b = 10$, $v = 5$, $k = 10$, $m = 1$, $p = 2$, $d = 0.1$ y el funcional (3.65) para la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ proyectado sobre los planos (a) (x, y) , (b) (x, z) y (c) (y, z) .

Entonces, un sistema dado por (3.60) no tiene puntos de equilibrio para todo $d \neq 0$, sin importar si $f(X)$ es diferenciable, continuo o discontinuo.

Como ejemplo, considere el sistema con los parámetros $a = 1$, $b = 10$, $v = 5$, $k = 10$, $m = 1$, $p = 2$, $d = 0.1$, luego, el funcional (3.61) está dado por $f(X) = \tanh(10(y + z))$ y el número de enroscados es $m + 1 = 2$. El atractor de doble enroscado se muestra en la Figura 3.19.

Si consideramos $m = 2$, la función (3.61) está dado por $f(X) = \tanh(10(y + z + 2)) + \tanh(10(y + z - 2))$ y el sistema exhibe un atractor de triple enroscados.

Con $m = 3$, el funcional (3.61) toma la forma $f(X) = \tanh(10(y + z + 4)) + \tanh(10(y + z)) + \tanh(10(y + z - 4))$ y se genera un atractor de quádruple enroscado. El atractor de triple enroscado y el atractor de quádruple enroscado se muestran en la Figura 3.20.

La suma de exponentes de Lyapunov mide la tasa de crecimiento de elementos de

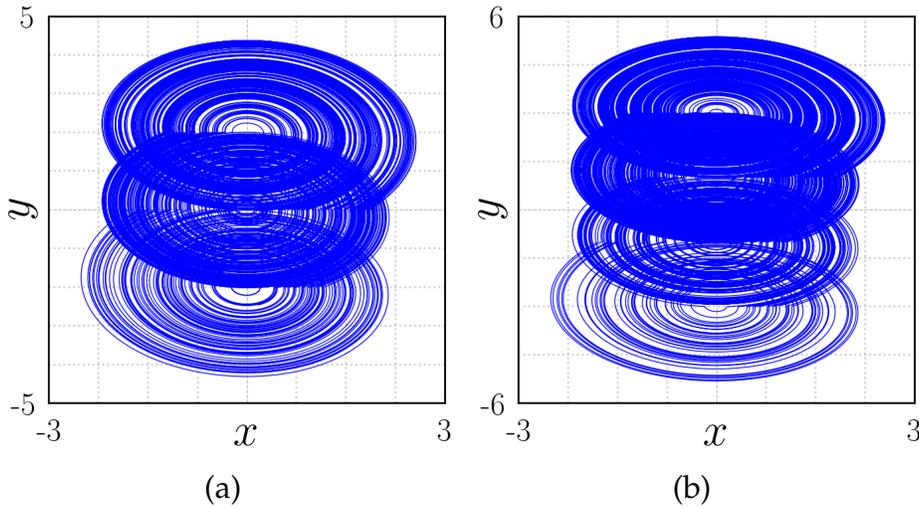


Figura 3.20: (a) Atractor triple enroscado del sistema (3.60) con los parámetros $a = 1, b = 10, v = 5, k = 10, m = 2, p = 2, d = 0.1$ y el funcional (3.65) para la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$. (b) Atractor cuádruple enroscado del sistema (3.60) con los parámetros $a = 1, b = 10, v = 5, k = 10, m = 3, p = 2, d = 0.1$ y el funcional (3.65) para la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$.

volumen infinitesimales n -dimensionales [31].

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \quad (3.68)$$

Para un sistema disipativo, esta cantidad es negativa y existe un atractor hacia el cual todas las trayectorias con condición inicial en la cuenca de atracción convergen [31]. Para un atractor caótico, el mayor exponente siempre es positivo. Los exponentes de Lyapunov se calcularon para el atractores dos enroscados mediante el algoritmo de Wolf [29] y los valores calculados son $\lambda_1 = 1.134, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -6.316$ que indica la presencia de un comportamiento caótico. Y $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -5.182$, que indica que el sistema es disipativo y existe un atractor.

La dimensión Kaplan-Yorke también se calcula de la siguiente manera:

$$D_{KY} = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|} = 2.179, \quad (3.69)$$

así, el atractor caótico de doble enroscado tiene dimensión fractal.

Un subconjunto de la cuenca de atracción en el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ se aproxima numéricamente y se muestra en la Figura 3.21a, se calculó probando las condiciones iniciales en una cuadrícula con pasos de separación de 0.05 a lo largo de los ejes x y y a partir de 0. Los puntos en azul son condiciones iniciales tal que las trayectorias convergen al atractor. Los puntos en amarillos son condiciones iniciales que no pertenecen a la cuenca de atracción.

Para ver el efecto del parámetro v en este sistema en particular, se realizó un análisis numérico de bifurcaciones para $v \in [0, 10]$. En la Figura 3.21 se muestran

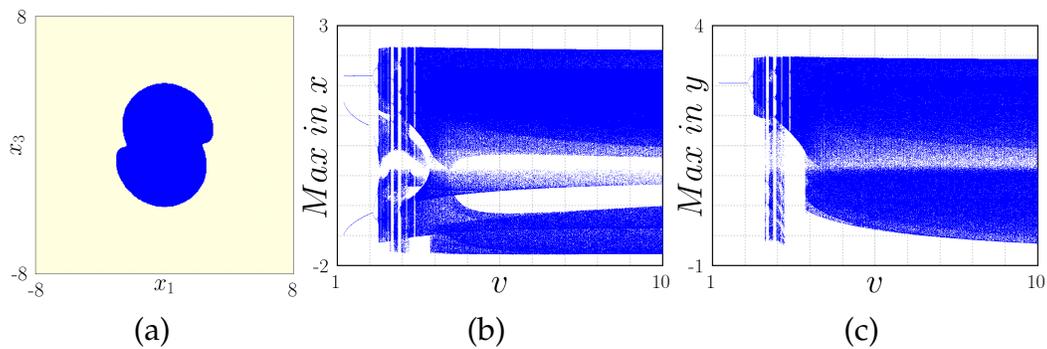


Figura 3.21: En (a) la aproximación numérica de un subconjunto de la cuenca de atracción en el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ con puntos azules. Gráfica de bifurcación que muestra el parámetro v contra los máximos en (b) x y (c) y .

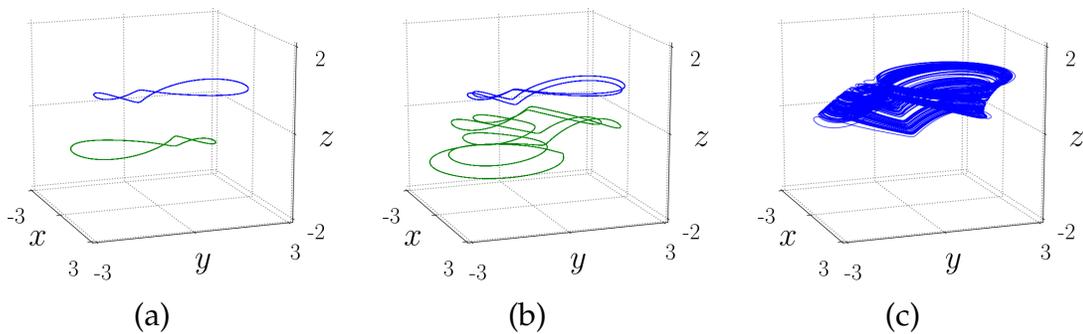


Figura 3.22: Coexistencia de órbitas periódicas para (a) $v = 1.9$ y (b) $v = 2$. En (c) el atractor exhibido para $v = 2.3$.

dos diagramas de bifurcación que se obtienen utilizando la condición inicial $X = (0.1, 0.1, 0.1)^T$.

Para algunos valores de v , el sistema presenta órbitas periódicas estables, por ejemplo, se encuentran dos órbitas periódicas estables para $v = 1.9$ y $v = 2$ y se muestran en las Figuras 3.22a y 3.22b, respectivamente. En la Figura 3.22c se muestra el atractor exhibido por el sistema por $v = 2.3$.

Una posible implementación electrónica del sistema (3.60) usando la función (3.63) con $m = 1$ se muestra en la Figura 3.23. Se realiza una implementación con el amplificador operacional de entrada JFET dual TL082, el comparador diferencial cuádruple LM339 y el multiplicador analógico AD633. Los resultados de la simulación se muestran en la Figura 3.24. Para la implementación electrónica se utilizó el método para diseños con un solo operacional propuesto en [42].

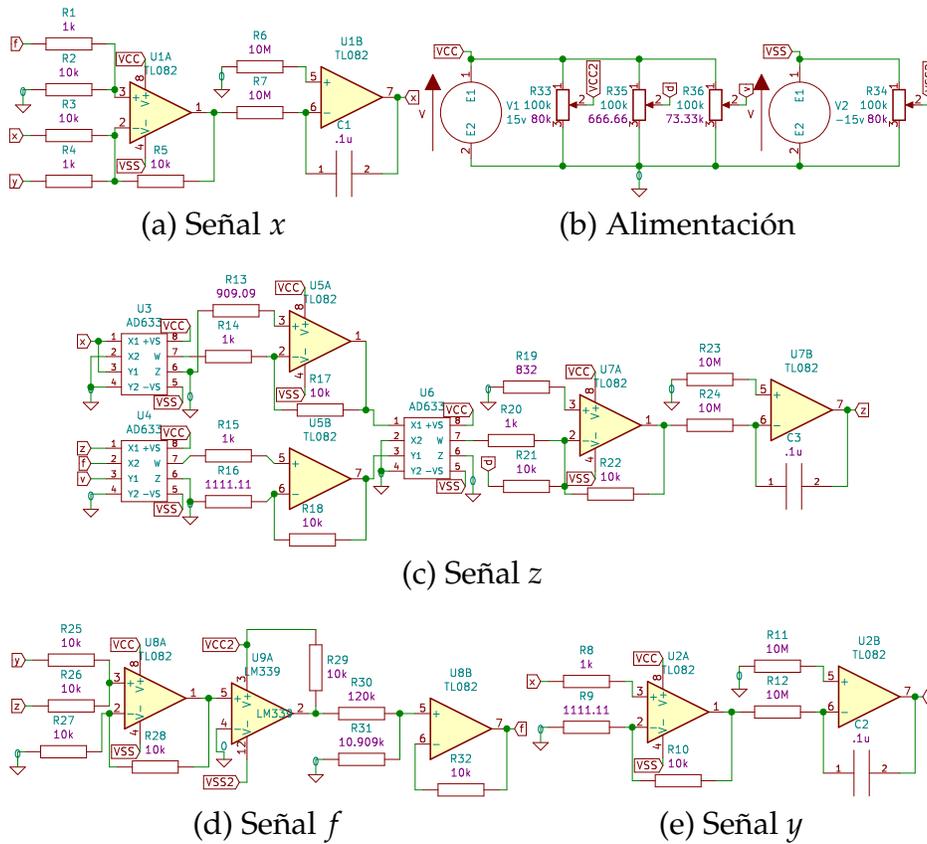


Figura 3.23: Implementación electrónica del sistema (3.60) usando la función (3.63) con $m = 1$.

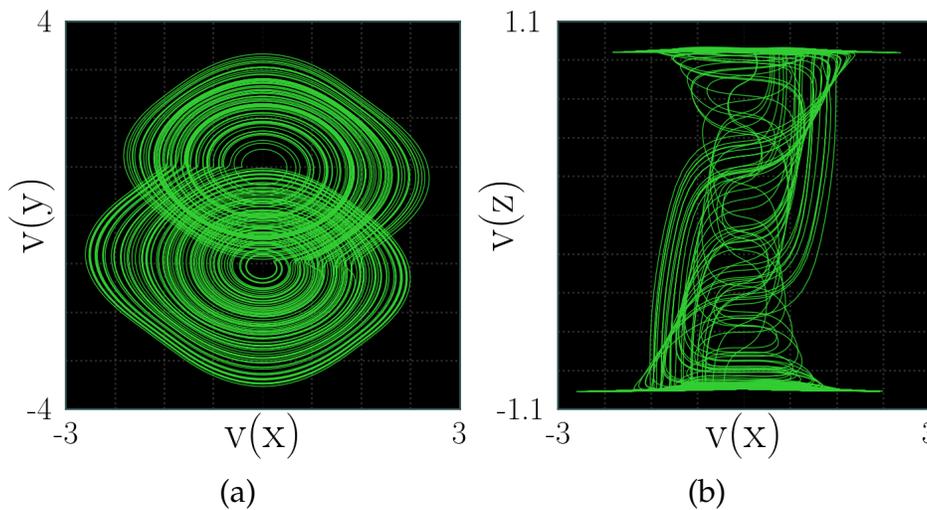


Figura 3.24: Resultado de simulación en NGS Spice graficados en el plano (a) $(v(x), v(y))$ y (b) $(v(x), v(z))$

3.4.1 SISTEMAS NO LINEALES DE DIMENSIONES SUPERIORES SIN PUNTOS DE EQUILIBRIO

En esta sección, proponemos un enfoque para generar sistemas no lineales hipercaóticos de dimensiones superiores, que se basan en el entrelazado de dos o más sistemas dados por (3.60). Entonces, las dimensiones de los sistemas dinámicos de dimensiones superiores son 6 y 9. Comenzamos considerando dos subsistemas de la forma (3.60) $\dot{X}_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)^T$ y $\dot{X}_2 = (\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)^T$ donde $X_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ y $X_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ son los vectores de estados del primer y segundo subsistema, respectivamente, que generan el sistema dinámico hipercaótico de dimensión seis, donde $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)^T$ es el vector de estado de este nuevo sistema.

Entonces, el interés es unir este par de subsistemas sin introducir un punto de equilibrio en un sistema dinámico de dimensión seis, es decir, el objetivo se logra al acoplar las terceras ecuaciones de ambos subsistemas dadas por (3.60) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -x_1^2 v(z_1 - f(X_1) - k_1 g(X_2)) + d, \\ \dot{z}_2 &= -x_2^2 v(z_2 - f(X_2) - k_2 g(X_1)) + d,\end{aligned}\quad (3.70)$$

donde $k_1, k_2 \neq 0$ y g es una función que une los subsistemas sin introducir puntos de equilibrio en el nuevo sistema de dimensión seis $\dot{\mathbf{X}}$.

Para ver por que se preserva la ausencia de puntos de equilibrio es suficiente mirar las ecuaciones cuando $\mathbf{X} = 0$, ya que la ecuación de \dot{y}_1 y \dot{y}_2 no son modificadas por el acoplamiento se deduce de estas ecuaciones que $x_1 = x_2 = 0$, ya que el funcional g multiplica x_1 y x_2 en \dot{z}_1 y \dot{z}_2 , respectivamente, se preserva la contradicción $d = 0$.

El acoplamiento también se puede incluir en la ecuación \dot{x} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + b(y_1 - f(X_1) - k_1 g(X_2)), \\ \dot{x}_2 &= ax_2 + b(y_2 - f(X_2) - k_2 g(X_1)),\end{aligned}\quad (3.71)$$

dado que la contradicción proviene de la ecuación de \dot{y} y \dot{z} y estos no se modifican, el equilibrio no se altera.

Ahora, para un ejemplo de dimensión nueve, considere los funcionales $g = f(X)$ y tres subsistemas idénticos de la forma (3.60) \dot{X}_1, \dot{X}_2 y \dot{X}_3 con vectores de estado $X_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ y $X_3 = (x_3, y_3, z_3)^T$ para el primer, segundo y tercer subsistemas, respectivamente, y los mismos parámetros del primer ejemplo para todos los sistemas con un atractor de doble enroscado:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -x_1^2 v(z_1 - f(X_1) - k_1 f(X_3)) + d, \\ \dot{z}_2 &= -x_2^2 v(z_2 - f(X_2) - k_2 f(X_1)) + d, \\ \dot{z}_3 &= -x_3^2 v(z_3 - f(X_3) - k_3 f(X_2)) + d.\end{aligned}\quad (3.72)$$

El atractor generado al elegir $k_1 = k_2 = k_3 = 0.1$ se muestra en la Figura 3.25. En el caso de que todos k_i tengan el mismo valor, los sistemas acoplados evolucionan igualmente para algunas condiciones iniciales tales como $X_i(0) = X_j(0)$, $\forall i \neq j$.

La función propuesta g podría ser reemplazada por diferentes funciones y el acoplamiento aún conserva la ausencia de puntos de equilibrio.

Los exponentes de Lyapunov y la dimensión de Kaplan-Yorke de los atractores obtenidos para diferentes números de sistemas acoplados se muestran en la Tabla (3.6). Se puede ver que para cada sistema acoplado adicional se incrementa el número de exponentes positivos.

Para verificar la existencia de la solución del sistema (3.60) considere lo siguiente.

Teorema 3.4.1 (Existencia y unicidad local [43]). *Sea $f(t, x)$ continua por partes en t y satisface la condición Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

$\forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces, existe algún $\delta > 0$ tal que la ecuación; on de estados $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución sobre $[t_0, t_0 + \delta]$.

Lema 3.4.1. [43] *Sea $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua para un dominio $D \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $[\partial f / \partial x]$ existe y es continua en $[a, b] \times D$. Si, para un subconjunto convexo $W \subset D$, existe una constante $L \geq 0$ tal que*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L$$

en $[a, b] \times W$, entonces

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todo $t \in [a, b], x \in W$ e $y \in W$.

El sistema (3.60) puede ser reescrito como

$$\dot{X} = G(x) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -bf(X) \\ 0 \\ -x^2v(z - f(X)) + d \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

donde

$$G_1(X) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } G_2(X) = \begin{pmatrix} -bf(X) \\ 0 \\ -x^2v(z - f(X)) + d \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Queremos verificar que el sistema dado por (3.60) con los parámetros $a = 1, b = 10, v = 5, k = 10, m = 1, p = 2, d = 0.1$ satisface las condiciones del Teorema 3.4.1. La suma de funciones Lipschitz es a su vez una función Lipschitz, de manera que podemos verificar que $G_1(X)$ y $G_2(X)$ cumplen con ser al menos Lipschitz en alguna región B .

Comenzaremos con $G_1(x)$, para esto definimos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ como

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificamos la condición de Lipschitz para $X, Y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\|AX - AY\| &\leq L\|X - Y\|, \\ \|A(X - Y)\| &\leq \|A\|\|X - Y\| \leq L\|X - Y\|, \\ \|A\| &\leq L,\end{aligned}$$

usando la norma ∞

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = a + b.$$

Para $G_2(X)$ consideraremos el Lema 3.4.1

$$\begin{aligned}\|D(G_2(x))\| &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial(-bf(X))}{\partial x} & \frac{\partial(-bf(X))}{\partial y} & \frac{\partial(-bf(X))}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial(-x^2v(z-f(X))+d)}{\partial(x)} & \frac{\partial(-x^2v(z-f(X))+d)}{\partial(y)} & \frac{\partial(-x^2v(z-f(X))+d)}{\partial(z)} \end{array} \right\| = \\ & \left\| \begin{array}{ccc} -b\frac{\partial f(X)}{\partial x} & -b\frac{\partial f(X)}{\partial y} & -b\frac{\partial f(X)}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2xvz + \frac{\partial(x^2vf(X))}{\partial x} & \frac{\partial(x^2vf(X))}{\partial y} & -x^2v + \frac{\partial(x^2vf(X))}{\partial z} \end{array} \right\|.\end{aligned}$$

Puesto que

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x} = 0, \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial y} = \frac{\partial f(X)}{\partial z}, \quad (3.76)$$

tenemos

$$\|D(G_2(x))\|_{\infty} = \max \left\{ 2 \left| -b\frac{\partial f(X)}{\partial y} \right|, \left| -2xvz + \frac{\partial(x^2vf(X))}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial(x^2vf(X))}{\partial y} \right| + \left| x^2v \left(\frac{\partial f(X)}{\partial z} - 1 \right) \right| \right\}$$

Si $f(X)$ esta dado por (3.61) o por (3.63)

$$\frac{\partial f(X)}{\partial y} = \frac{\partial f(X)}{\partial z} = \sum_{i=1}^m \frac{pk}{2} \operatorname{sech}^2(k(y+z+2p(i-1-p(m-1)))) \leq \frac{mpk}{2}, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x} = 0. \quad (3.78)$$

Para el funcional discontinuo dado por (3.65) las derivadas parciales son cero en cada parte. Si restringimos que $|x| \leq 10$, $|y| \leq 10$, $|z| \leq 10$ y $\|X_0\| \leq 0.5$ tenemos que:

$$\begin{aligned}2 \left| -b\frac{\partial f(X)}{\partial y} \right| &< 500 \\ \left| -2xvz + \frac{\partial(x^2vf(X))}{\partial x} \right| &< 10000\end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial(x^2 v f(X))}{\partial y} \right| < 10000$$

$$\left| x^2 v \left(\frac{\partial f(X)}{\partial z} - 1 \right) \right| < 10000$$

Por lo que podemos elegir $L = 30000$ para $B = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X - X_0\| \leq 10\}$.

De manera que la solución existe para el sistema (3.60) (por partes para los funcionales (3.63) y (3.63)). En los sistemas acoplados el procedimiento para verificar la existencia y unicidad es similar pero cambia la dimensión de acuerdo al número de sistemas acoplados. Sin embargo la existencia para todo tiempo sólo es investigada de manera numérica.

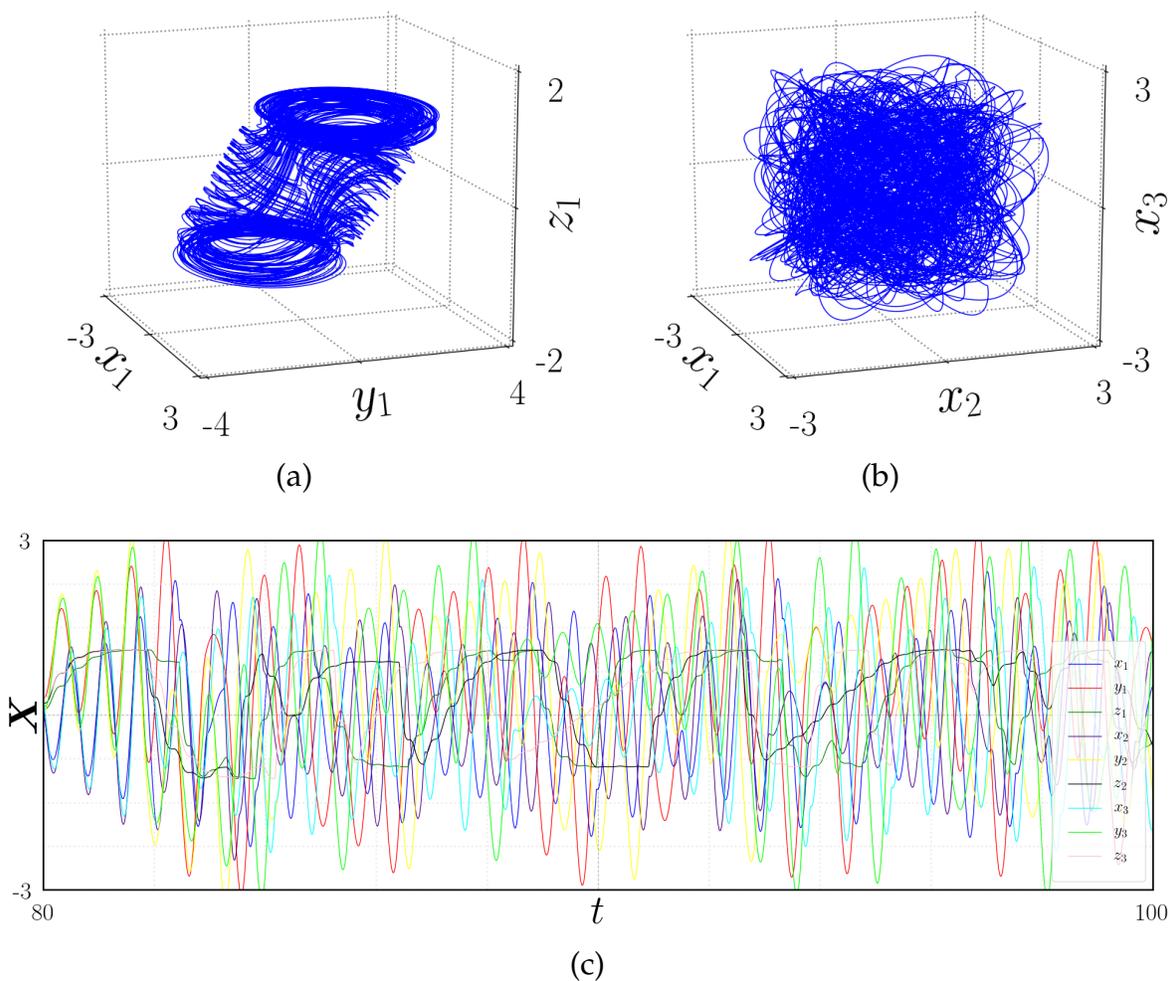


Figura 3.25: Proyección del atractor hipercaótico con la condición inicial $x(0) = (0.1, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.3)^T$ sobre (a) (x_1, y_1, z_1) , (b) (x_1, x_2, x_3) . (c) Series de tiempo para $t = [80, 100]$.

Dimensión	Exponentes de Lyapunov	D_{KY}	Paso	t (u.a.)
6	1.208, 1.077, 0.002, -0.011, -5.611, -7.222	4.406	0.000001	5400
9	1.229, 1.124, 1.029, 0.045, 0, -0.044, -5.323, -6.362, -7.517	6.636	0.00001	36900
12	1.247, 1.156, 1.087, 1.017, 0.066, 0.004, 0, -0.056, -5.222, -5.959, -6.769, -7.69	8.866	0.00001	24800
15	1.248, 1.178, 1.122, 1.069, 1.01, 0.067, 0.02, 0, -0.019, -0.067, -5.152, -5.738, -6.353, -7.032, -7.756	11.083	0.00001	14150

Tabla 3.6: Exponentes de Lyapunov y dimensión Kaplan-Yorke del atractor obtenido para diferente número de sistemas sin puntos de equilibrio acoplados.

3.4.2 COMENTARIOS FINALES

En esta sección se introdujo una clase de sistema sin puntos de equilibrio que presenta atractores enroscados con un campo vectorial diferenciable al usar el funcional basado en la tangente hiperbólica, la construcción de esta clase de sistemas permite la modificación del campo vectorial para que pueda ser descrito por un campo vectorial continuo o incluso PWL sin afectar la ausencia de puntos de equilibrio. Además, es posible aumentar el número de enroscados preservando la ausencia de puntos de equilibrio, lo que conduce a una alta flexibilidad de diseño. También se presentó un acoplamiento relativamente simple que genera sistemas de orden superior al tiempo que preserva la ausencia de puntos de equilibrio. Los experimentos de acoplamiento dieron como resultado la generación de atractores hipercaóticos. Por lo tanto, se podrían estudiar nuevas funciones de acoplamiento para aumentar la divergencia de las trayectorias para aplicaciones futuras en la generación de números pseudoaleatorios y sistemas de comunicación seguros.

ATRACTORES OCULTOS CON BASE EN SISTEMAS CON PUNTOS DE EQUILIBRIO

4.1 GENERACIÓN DE ATRACTORES OCULTOS A PARTIR DE ATRACTORES AUTO-EXCITADOS

En esta sección se estudia un enfoque para generar atractores ocultos a través de sistemas lineales por partes (PWL) con atractores auto-excitados de doble enroscado. El estudio revela una relación entre la aparición de un atractor oculto y la existencia de trayectorias que se parecen a las órbitas heteroclínicas a mayor escala que unen a los atractores auto-excitados.

4.1.1 CAOS HETEROCLÍNICO

Para presentar el enfoque, consideremos primero una partición P del espacio métrico $X \subset \mathbb{R}^3$, dotado de la métrica euclidiana d . Sea $P = \{P_1, \dots, P_\eta\}$ ($\eta > 1$) una partición finita de X , es decir, $X = \bigcup_{1 \leq i \leq \eta} P_i$ y $P_i \cap P_j = \emptyset$ por $i \neq j$. Cada elemento del conjunto P se llama átomo y cada átomo contiene un punto de equilibrio tipo silla. Debido a que estos átomos P_i tienen un punto de equilibrio tipo silla, entonces hay una variedad estable y otra variedad inestable dentro de cada átomo. Estas variables estables W^s y las variables inestables W^u son necesarias para el mecanismo de expansión y contracción presente en la dinámica caótica.

Supongamos que $T : X \rightarrow X$, con $X \subset \mathbb{R}^3$ es un sistema dinámico lineal por partes cuya dinámica está dada por una familia de subsistemas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + f(\mathbf{x})B, \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado, y $A = \{\alpha_{ij}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es un operador lineal, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ es un vector constante y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional. El vector $f(\mathbf{x})B$ es un vector constante en cada átomo P_i de modo que los puntos de equilibrio están dados por $\mathbf{x}_{eq_i}^* = (x_{1eq_i}^*, x_{2eq_i}^*, x_{3eq_i}^*)^T = -f(\mathbf{x})A^{-1}B \in P_i$, con $i = 1, \dots, \eta$.

Para inducir oscilaciones del flujo alrededor de los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_i}^*$ es necesario asignar un eigenvalor real negativo $\lambda_1 = c$ a la matriz A con el eigenvector correspondiente v_1 y un par de eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva $\lambda_2 = a + ib$ y $\lambda_3 = a - ib$ con los eigenvectores correspondientes v_2 y v_3 .

Por lo tanto, las variedades estables e inestables están dadas por $W_{\mathbf{x}_{eq_i}^*}^s = \{\mathbf{x} + \mathbf{x}_{eq_i}^* : \mathbf{x} \in \text{span}\{v_1\}\}$ y $W_{\mathbf{x}_{eq_i}^*}^u = \{\mathbf{x} + \mathbf{x}_{eq_i}^* : \mathbf{x} \in \text{span}\{v_2, v_3\}\}$. Estos conjuntos generan la contracción y expansión de las trayectorias.

La matriz del operador lineal A se define de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} + \frac{2c}{3} & b & \frac{2c}{3} - \frac{2a}{3} \\ -\frac{b}{3} & a & \frac{2b}{3} \\ \frac{c}{3} - \frac{a}{3} & -b & \frac{2a}{3} + \frac{c}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

cuyos eigenvectores son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

En este trabajo denotamos las variedades locales estables e inestables de un punto de equilibrio \mathbf{x}_{eq}^* como $W_{\mathbf{x}_{eq}^*}^s$ y $W_{\mathbf{x}_{eq}^*}^u$, respectivamente, y son responsables de conectar los puntos de equilibrio de un sistema dinámico. Recuerde que una ruta en el espacio de fase que une dos puntos de equilibrio diferentes se llama *órbita heteroclínica*. Y una ruta que comienza y termina en el mismo punto de equilibrio se llama *órbita homoclínica*.

También denotamos la cerradura de un conjunto P_i como $cl(P_i)$. Por lo tanto, para cada par de átomos P_i y P_j , $i \neq j$, si $cl(P_i) \cap cl(P_j) \neq \emptyset$ estos átomos son adyacentes y la superficie de conmutación entre ellos está dada por la intersección, i.e., $SW_{ij} = cl(P_i) \cap cl(P_j)$.

Suposición 4.1.1. *La divergencia del sistema PWL (4.1) considerando el operador lineal A dado por (4.2) es $\nabla = 2a + c$, por lo que el sistema es disipativo en cada átomo de la partición P si $2a < |c|$.*

Con los átomos de una partición P que contienen un punto de equilibrio tipo silla en cada uno de ellos como se definió anteriormente, es posible generar órbitas heteroclínicas. Se necesitan al menos dos puntos de equilibrio para generar una órbita heteroclínica, por lo que comenzamos considerando una partición con dos átomos $P = \{P_1, P_2\}$, el vector constante $B \in \mathbb{R}^3$ se define de la siguiente manera:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3} - \frac{2c}{3} \\ \frac{b}{3} \\ \frac{a}{3} - \frac{c}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

y el funcional f está dado por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\alpha, & \mathbf{x} \in P_1; \\ \alpha, & \mathbf{x} \in P_2; \end{cases} \quad (4.5)$$

con $\alpha > 0$. Entonces los puntos de equilibrio están en $\mathbf{x}_{eq_1}^* = (-\alpha, 0, 0)^T \in P_1$ y $\mathbf{x}_{eq_2}^* = (\alpha, 0, 0)^T \in P_2$, y las variedades estables e inestables están dadas por

$$\begin{aligned}
 W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^s &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + \alpha = 2x_3, x_2 = 0 \right\}, \\
 W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^u &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = -\alpha \right\}, \\
 W_{\mathbf{x}_{eq_2}^*}^s &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - \alpha = 2x_3, x_2 = 0 \right\}, \\
 W_{\mathbf{x}_{eq_2}^*}^u &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = \alpha \right\}.
 \end{aligned}$$

La proposición siguiente proporciona las condiciones necesarias y suficientes para generar conexiones heteroclínicas entre puntos de equilibrio de un sistema dinámico lineal por partes. Por lo tanto, es posible la aparición de un atractor caótico en este tipo de sistemas.

Proposición 4.1.1. *El sistema hiperbólico dado por (4.1), (4.2), (4.4) y (4.5) genera un par de órbitas heteroclínicas si la superficie de conmutación entre los átomos P_1 y P_2 está dada por el plano $SW = cl(P_1) \cap cl(P_2)$ con $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\} \cap SW \in P_1$ y $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\} \cap SW \in P_2$ y también pasa por los puntos de intersección $cl(W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^s) \cap cl(W_{\mathbf{x}_{eq_2}^*}^u) \neq \emptyset$, y $cl(W_{\mathbf{x}_{eq_2}^*}^s) \cap cl(W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^u) \neq \emptyset$ y la línea: $x_1 = (x_{1eq_1}^* + x_{1eq_2}^*)/2, x_3 = 0$.*

Prueba: Queremos mostrar que existen condiciones iniciales $\mathbf{x}_{01}, \mathbf{x}_{02} \in SW$, tal que dos curvas soluciones $\varphi(\mathbf{x}_{01}, t)$ y $\varphi(\mathbf{x}_{02}, t)$ del sistema hiperbólico dado por (4.1), (4.2), (4.4) y (4.5) satisfacen que $\varphi(\mathbf{x}_{01}, t) \rightarrow \mathbf{x}_{eq_1}^*$ y $\varphi(\mathbf{x}_{02}, t) \rightarrow \mathbf{x}_{eq_2}^*$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $\varphi(\mathbf{x}_{01}, t) \rightarrow \mathbf{x}_{eq_2}^*$ y $\varphi(\mathbf{x}_{02}, t) \rightarrow \mathbf{x}_{eq_1}^*$ cuando $t \rightarrow -\infty$, en particular, estas condiciones iniciales corresponden a los puntos de intersección $cl(W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^s) \cap cl(W_{\mathbf{x}_{eq_2}^*}^u)$, y $cl(W_{\mathbf{x}_{eq_2}^*}^s) \cap cl(W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^u)$.

De (4.2) el operador lineal A puede ser expresado como

$$A = QEQ^{-1}, \quad (4.6)$$

donde $Q = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ y

$$E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Según las variedades estables e inestables, los puntos de intersección están dados por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{in_1} &= cl(W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^s) \cap cl(W_{\mathbf{x}_{eq_2}^*}^u) = \left(\frac{\alpha}{3}, 0, \frac{2\alpha}{3} \right)^T, \\
 \mathbf{x}_{in_2} &= cl(W_{\mathbf{x}_{eq_2}^*}^s) \cap cl(W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^u) = \left(-\frac{\alpha}{3}, 0, -\frac{2\alpha}{3} \right)^T,
 \end{aligned}$$

Estos puntos \mathbf{x}_{in_1} y \mathbf{x}_{in_2} pertenecen a SW y $\mathbf{x}_{in_1} \in P_1$ y $\mathbf{x}_{in_2} \in P_2$. Debido a que estos puntos \mathbf{x}_{in_1} y \mathbf{x}_{in_2} pertenecen a la variedad estable $W_{\mathbf{x}_{eq_1}}^s$ y $W_{\mathbf{x}_{eq_2}}^s$, respectivamente, son puntos cuyas trayectorias permanecen en los átomos P_1 y P_2 , respectivamente.

Por definición $\mathbf{x}_{1eq_1}^* = -\mathbf{x}_{1eq_2}^*$, entonces el eje x_2 pertenece al plano SW . Los conjuntos $cl(W_{\mathbf{x}_{eq_i}^*}^u) \cap SW$, para $i = 1, 2$, pueden ser escritos como:

$$\{(0, \epsilon, 0)^T + \mathbf{x}_{in_i} : \epsilon \in \mathbb{R}\}, \text{ para } i = 1, 2. \quad (4.8)$$

Considere los siguientes cambios de coordenadas $\mathbf{z}^{(i)} = Q^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq_i}^*)$, para $i = 1, 2$. Entonces el campo vectorial en coordenadas $\mathbf{z}^{(i)}$ para el espacio dado por el átomo P_i está dado por $\dot{\mathbf{z}}^{(i)} = E\mathbf{z}^{(i)}$, con $i = 1, 2$.

Desde $Q^{-1}(0, \epsilon, 0)^T = (0, -\epsilon, 0)^T$, los conjuntos dados por (4.8) en coordenadas $\mathbf{z}^{(i)}$ se dan de la siguiente manera

$$\{(0, \epsilon, 0)^T + Q^{-1}(\mathbf{x}_{in_i} - \mathbf{x}_{eq_i}^*) : \epsilon \in \mathbb{R}\}, \text{ para } i = 1, 2, \quad (4.9)$$

donde $\mathbf{z}_{in_i}^{(i)} = Q^{-1}(\mathbf{x}_{in_i} - \mathbf{x}_{eq_i}^*) = ((-1)^{i+1}4\alpha/3, 0, 0)^T$ es un punto en el eje $z_1^{(i)}$ que corresponde a la transformación de los puntos de intersección $\mathbf{x}_{in_i} \in P_i$ a $\mathbf{z}_{in_i}^{(i)} \in \{Q^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq_i}^*) : \mathbf{x} \in P_i\}$, para $i = 1, 2$.

Cuando $t > 0$, $\varphi(\mathbf{x}_{in_1}, t)$ permanece en el átomo P_1 , la transformación de \mathbf{x}_{in_1} bajo $Q^{-1}(\mathbf{x}_{in_1} - \mathbf{x}_{eq_1}^*)$ es $\mathbf{z}_{in_1}^{(1)} = (4\alpha/3, 0, 0)^T$. En una forma similar, cuando $t > 0$, $\varphi(\mathbf{x}_{in_2}, t)$, permanece en el átomo P_2 , la transformación de \mathbf{x}_{in_2} bajo $Q^{-1}(\mathbf{x}_{in_2} - \mathbf{x}_{eq_2}^*)$ es $\mathbf{z}_{in_2}^{(2)} = (-4\alpha/3, 0, 0)^T$. Entonces $\mathbf{z}_{in_i}^{(i)}$ pertenece a la variedad estable $W_{\mathbf{z}_{eq_i}^*}^s$, para $i = 1, 2$, entonces las trayectorias $\mathbf{z}^{(i)}(t) = e^{Et}\mathbf{z}_{in_i}^{(i)} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}_{in_1}, t) = \mathbf{x}_{eq_1}^*, \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}_{in_2}, t) = \mathbf{x}_{eq_2}^*.$$

Cuando $t < 0$, $\varphi(\mathbf{x}_{in_1}, t)$ sale del átomo P_1 y entra al átomo P_2 , la transformación de \mathbf{x}_{in_1} bajo $Q^{-1}(\mathbf{x}_{in_1} - \mathbf{x}_{eq_2}^*)$ a $\mathbf{z}_{in_1}^{(2)} \in \{Q^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq_2}^*) : \mathbf{x} \in cl(P_2)\}$ es $\mathbf{z}_{in_1}^{(2)} = (0, 0, 2\alpha/3)^T$. En una forma similar, cuando $t < 0$, $\varphi(\mathbf{x}_{in_2}, t)$ sale del átomo P_2 y entra al átomo P_1 , la transformación de \mathbf{x}_{in_2} bajo $Q^{-1}(\mathbf{x}_{in_2} - \mathbf{x}_{eq_1}^*)$ a $\mathbf{z}_{in_2}^{(1)} \in \{Q^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq_1}^*) : \mathbf{x} \in cl(P_1)\}$ es $\mathbf{z}_{in_2}^{(1)} = (0, 0, -2\alpha/3)^T$. Así, $\mathbf{z}_{in_i}^{(j)} = (0, 0, (-1)^j 2\alpha/3)^T$ es un punto en el eje $z_3^{(j)}$ y pertenece a $cl(W_{\mathbf{z}_{eq_j}^*}^u)$ para $i, j \in \{1, 2\}$ y $i \neq j$.

Con el sistema desacoplado en las coordenadas $\mathbf{z}^{(i)}$, podemos analizar el flujo en el plano $z_2^{(i)} - z_3^{(i)}$ y ver cómo el flujo converge al punto de equilibrio $\mathbf{z}_{eq_j}^{*(i)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2^{(i)} &= az_2^{(i)} - bz_3^{(i)}, \\ \dot{z}_3^{(i)} &= bz_2^{(i)} + az_3^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$z_2^{(i)}\dot{z}_2^{(i)} + z_3^{(i)}\dot{z}_3^{(i)} = a \left(\left(z_2^{(i)} \right)^2 + \left(z_3^{(i)} \right)^2 \right), \quad (4.11)$$

si $r^2 = \left(z_2^{(i)}\right)^2 + \left(z_3^{(i)}\right)^2$ entonces $r\dot{r} = ar^2$,

$$\dot{r} = ar, \quad (4.12)$$

$$r = r_0 e^{at}. \quad (4.13)$$

Como $0 < a \in \mathbb{R}$, entonces $r \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Entonces las trayectorias $\mathbf{z}^{(i)}(t) = e^{Et} \mathbf{z}_{in_i}^{(i)} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(\mathbf{x}_{in_1}, t) = \mathbf{x}_{eq_2}^*, \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(\mathbf{x}_{in_2}, t) = \mathbf{x}_{eq_1}^*,$$

Así, las órbitas heteroclínicas se definen como

$$HO_1 = \{\mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{x}_{in_1}, t) : t \in (-\infty, \infty)\},$$

$$HO_2 = \{\mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{x}_{in_2}, t) : t \in (-\infty, \infty)\}.$$

□

Para el sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4) y (4.5) es posible encontrar varios puntos $\mathbf{x}_0 \in HO_i$ tal que $|\mathbf{x}_{eq_i} - \mathbf{x}_0| < \epsilon$, con ϵ arbitrariamente pequeña e $i = 1, 2$.

Por ejemplo, si una condición inicial arbitraria $\mathbf{z}_0^{(i)} = (z_{10}^{(i)}, z_{20}^{(i)}, z_{30}^{(i)})^T$ pertenece al eje $z_3^{(i)}$ y la órbita heteroclínica HO_i , entonces el punto de intersección z_{in_i} es alcanzado en un tiempo $t_f = \frac{2k\pi}{b}$, con $k \in \mathbb{Z}^+$. Para ver esto, consideramos la transformación presentada anteriormente $\mathbf{z}^{(i)} = Q^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq_i}^*)$. Entonces de la solución en coordenadas $\mathbf{z}^{(i)}$ en $cl(P_i)$:

$$\begin{aligned} z_1(t)^{(i)} &= z_{10}^{(i)} e^{ct}, \\ z_2(t)^{(i)} &= z_{20}^{(i)} e^{at} \cos(bt) - z_{30}^{(i)} e^{at} \sin(bt), \\ z_3(t)^{(i)} &= z_{20}^{(i)} e^{at} \sin(bt) + z_{30}^{(i)} e^{at} \cos(bt). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Asumamos una condición inicial de la forma $\mathbf{z}_0^{(i)} = (0, 0, z_{30}^{(i)})^T$ debido a esto está en el eje $z_3^{(i)}$, entonces

$$\begin{aligned} z_1(t)^{(i)} &= 0, \\ z_2(t)^{(i)} &= -z_{30}^{(i)} e^{at} \sin(bt), \\ z_3(t)^{(i)} &= z_{30}^{(i)} e^{at} \cos(bt). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Debido a que la condición inicial pertenece a la órbita heteroclínica HO_i , entonces, de la segunda ecuación de (4.15), la trayectoria $\varphi(\mathbf{z}_0^{(i)}, t)$ alcanza la superficie de conmutación en el punto de intersección $\mathbf{z}_{in_j}^{(i)} = (z_{1in_j}^{(i)}, z_{2in_j}^{(i)}, z_{3in_j}^{(i)}) = (0, 0, (-1)^i 2\alpha/3)^T$ en el tiempo $t_f = \frac{2k\pi}{b}$, con $k \in \mathbb{Z}^+$.

Así

$$z_{3in_j}^{(i)} = z_{30}^{(i)} e^{\frac{2ka\pi}{b}}, \quad (4.16)$$

$$z_{30}^{(i)} = z_{3in_j}^{(i)} e^{-\frac{2ka\pi}{b}}. \quad (4.17)$$

Entonces la condición inicial $\mathbf{x}_0^i = Q\mathbf{z}_0^{(i)} + \mathbf{x}_{eq_i}^*$, para P_1

$$\mathbf{x}_0^1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\alpha e^{-\frac{2ka\pi}{b}} - \alpha \\ 0 \\ -\frac{2}{3}\alpha e^{-\frac{2ka\pi}{b}} \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

y P_2

$$\mathbf{x}_0^2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha e^{-\frac{2ka\pi}{b}} + \alpha \\ 0 \\ \frac{2}{3}\alpha e^{-\frac{2ka\pi}{b}} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Entonces también podríamos expresar las órbitas heteroclínicas como

$$HO_1 = \{\mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{x}_0^1, t) : t \in (-\infty, 0]\} \cup \{\mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{x}_0^1, t) : t \in [0, (2k\pi)/b), k \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{x}_{in_1}, t) : t \in [0, \infty)\},$$

$$HO_2 = \{\mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{x}_0^2, t) : t \in (-\infty, 0]\} \cup \{\mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{x}_0^2, t) : t \in [0, (2k\pi)/b), k \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\mathbf{x} \in \varphi(\mathbf{x}_{in_2}, t) : t \in [0, \infty)\}.$$

La trayectoria $\mathbf{x}(t)$ del sistema PWL se puede calcular por $\mathbf{x}^i(t) = e^{At}\mathbf{x}_0^i$ en cada átomo P_i , donde $\mathbf{x}^i = \mathbf{x} + \mathbf{x}_{eq_i}^*$ y \mathbf{x}_0^i es la condición inicial cuando la trayectoria ingresa al átomo P_i , $i = 1, 2$. Entonces

$$\mathbf{x}^i(t) = QE(t)Q^{-1}\mathbf{x}^i(0),$$

donde Q es la matriz invertible definida por los eigenvectores de A y

$$E(t) = \begin{pmatrix} e^{ct} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at} \cos(bt) & -e^{at} \sin(bt) \\ 0 & e^{at} \sin(bt) & e^{at} \cos(bt) \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Entonces la solución exacta se da de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1^i(t) &= x_{10}^i(e^{at} \cos(bt) + 2e^{ct})/3 - x_{20}^i e^{at} \sin(bt) + x_{30}^i(2e^{ct} - 2e^{at} \cos(bt))/3, \\ x_2^i(t) &= x_{10}^i(e^{at} \sin(bt))/3 + x_{20}^i e^{at} \cos(bt) - x_{30}^i(2e^{at} \sin(bt))/3, \\ x_3^i(t) &= x_{10}^i(e^{ct} - e^{at} \cos(bt))/3 + e^{at} x_{20}^i \sin(bt) + x_{30}^i(2e^{at} \cos(bt) + e^{ct})/3. \end{aligned} \quad (4.21)$$

El flujo del sistema $\varphi(\mathbf{x}_0)$ es disipativo en cada átomo para todas las condiciones iniciales $\mathbf{x}_0 \in P_i - W_{\mathbf{x}_{eq_i}}^u \subset X$. Si la condición inicial $\mathbf{x}_0 \in W_{\mathbf{x}_{eq_i}}^u$ entonces \mathbf{x}_0 es una combinación lineal de v_2 y v_3 , e.g. $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, -x_{10})^T$.

$$\begin{aligned} x_1^i(t) &= e^{at}(x_{10}^i \cos(bt) - x_{20}^i \sin(bt)), \\ x_2^i(t) &= e^{at}(x_{20}^i \cos(bt) + x_{10}^i \sin(bt)), \\ x_3^i(t) &= -e^{at}(x_{10}^i \cos(bt) - x_{20}^i \sin(bt)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Suposición 4.1.2. Las oscilaciones alrededor del punto de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_i}^*$ dependen de los parámetros a y b , consideramos $b/a \geq 10$.

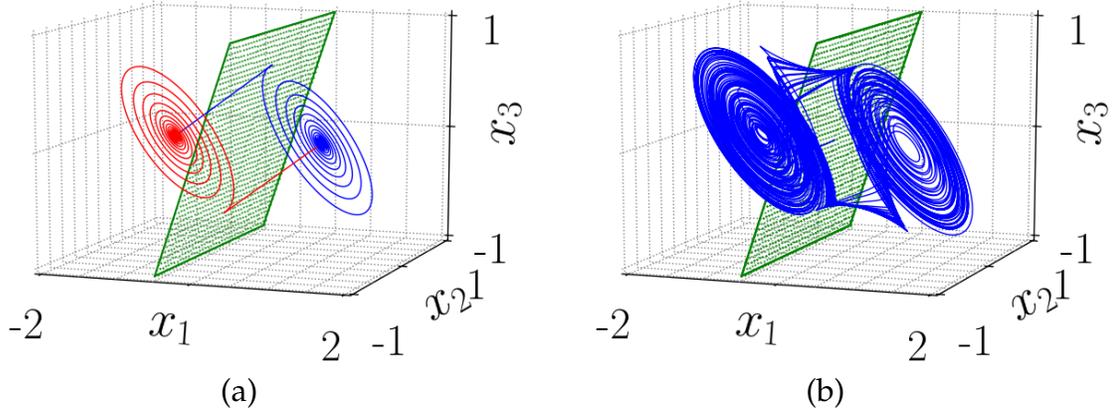


Figura 4.1: En (a) el ciclo heteroclínico del sistema (4.1), (4.2),(4.4) y (4.5) con la superficie de conmutación $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = 0\}$ y los parámetros $a = 0.2, b = 5, c = -3, \alpha = 1$, y en (b) un atractor double-enroscado que emerge de una órbita heteroclínica usando la siguiente condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$.

Como ejemplo, consideramos el sistema (4.1), (4.2),(4.4) y (4.5) con la superficie de conmutación y parámetros a, b, c, α como sigue.

Ejemplo 4.1.1. $SW = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = 0\}$, con $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\} \cap SW \in P_1$, y $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\} \cap SW \in P_2$ y los parámetros $a = 0.2, b = 5, c = -3, \alpha = 1$.

El sistema definido anteriormente cumple con la proposición 4.1.1, por lo que presenta una órbita heteroclínica. De (4.18) y (4.19) dos condiciones iniciales $\mathbf{x}_{01} = (-0.9999976751050959, 0, -2.3248949041393315e - 6)^T$ y $\mathbf{x}_{02} = (0.9999976751050959, 0, 2.3248949041393315e - 6)^T$ se eligen con $k = 50$ para simular las dos órbitas heteroclínicas que se muestran en la Figura 4.1a. Entonces el caos heteroclínico emerge de este sistema, en particular, se genera un atractor de doble enroscado como se muestra en la Figura 4.1b, para la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$.

Las variedades inestables $W_{\mathbf{x}_{eq1}^*}^u = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 + 1 = 0\}$ y $W_{\mathbf{x}_{eq2}^*}^u = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 - 1 = 0\}$ y las variedades estables $W_{\mathbf{x}_{eq1}^*}^s = \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1+1}{2} = x_3; x_2 = 0\}$ y $W_{\mathbf{x}_{eq2}^*}^s = \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1-1}{2} = x_3; x_2 = 0\}$. Los puntos de intersección están dados por $cl(W_{\mathbf{x}_{eq2}^*}^s) \cap cl(W_{\mathbf{x}_{eq1}^*}^u) = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3})^T$, $cl(W_{\mathbf{x}_{eq1}^*}^s) \cap cl(W_{\mathbf{x}_{eq2}^*}^u) = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$.

Proposición 4.1.2. Si la partición P contiene más de dos átomos $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$, con $2 < k \in \mathbb{Z}^+$, y cada átomo es un conjunto hiperbólico como se definió previamente. Además, los átomos por pares P_i y P_{i+1} cumplen la proposición 4.1.1. Entonces el sistema genera $2(k - 1)$ órbitas heteroclínicas.

Prueba: Una consecuencia directa de la proposición. 4.1.1

□

4.1.2 SURGIMIENTO DE ATRACTORES MULTITIENROSCADOS A TRAVÉS DE MÚLTIPLES ÓRBITAS HETEROCLÍNICAS

De acuerdo con la proposición 4.1.2, es posible generar atractores multitenroscados basados en múltiples órbitas heteroclínicas. Entonces, en esta Sección 4.1.2 consideramos más de dos conjuntos hiperbólicos de una partición, sin pérdida de generalidad, la siguiente partición se considera $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, para generar un atractor multitenroscado.

Considere el sistema dinámico lineal por partes (4.1), con A y B dados por (4.2) y (4.4), respectivamente, por lo tanto, el funcional $f(\mathbf{x})$ se define en los cuatro átomos de la siguiente manera:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\alpha - \gamma, & \mathbf{x} \in P_1; \\ \alpha - \gamma, & \mathbf{x} \in P_2; \\ -\alpha + \gamma, & \mathbf{x} \in P_3; \\ \alpha + \gamma, & \mathbf{x} \in P_4; \end{cases} \quad (4.23)$$

donde $\alpha, \gamma > 0$. Los puntos de equilibrio están en:

$$\mathbf{x}_{eq1}^* = \begin{pmatrix} -(\gamma + \alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq2}^* = \begin{pmatrix} -(\gamma - \alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq3}^* = \begin{pmatrix} (\gamma - \alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq4}^* = \begin{pmatrix} (\gamma + \alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

entonces $\mathbf{x}_{eq1}^* \in P_1, \mathbf{x}_{eq2}^* \in P_2, \mathbf{x}_{eq3}^* \in P_3$ y $\mathbf{x}_{eq4}^* \in P_4$. La ubicación de los puntos de equilibrio según los parámetros $0 < \alpha$ y $0 < \gamma$ es la siguiente:

- Los puntos de equilibrio están en el eje x_1 y para $\alpha = \gamma$ el sistema sólo tiene tres puntos de equilibrio, de lo contrario tiene cuatro puntos de equilibrio.
- Para $\alpha < \gamma$ la distancia de los puntos de equilibrio \mathbf{x}_{eq1}^* y \mathbf{x}_{eq4}^* al origen $O = (0, 0, 0)^T$ son los mismos $d(\mathbf{x}_{eq1}^*, O) = d(\mathbf{x}_{eq4}^*, O)$ y también para $d(\mathbf{x}_{eq2}^*, O) = d(\mathbf{x}_{eq3}^*, O)$.
- Para $\gamma = 2\alpha$, todos los puntos de equilibrio están a la misma distancia $d(\mathbf{x}_{eq1}^*, \mathbf{x}_{eq2}^*) = d(\mathbf{x}_{eq2}^*, \mathbf{x}_{eq3}^*) = d(\mathbf{x}_{eq3}^*, \mathbf{x}_{eq4}^*) = 2\alpha$.
- El otro caso es cuando $\gamma \neq 2\alpha$, y $d(\mathbf{x}_{eq1}^*, \mathbf{x}_{eq2}^*) = d(\mathbf{x}_{eq3}^*, \mathbf{x}_{eq4}^*) = 2\alpha$, pero $d(\mathbf{x}_{eq2}^*, \mathbf{x}_{eq3}^*) \neq 2\alpha$.

En esta sección 4.1.2, estamos también interesados en el caso de $\gamma \neq 2\alpha$ tal que $\gamma > \alpha$. Las superficies de conmutación están dadas por:

$$\begin{aligned} SW_{12} &= cl(P_1) \cap cl(P_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = -2\gamma\}, \\ SW_{23} &= cl(P_2) \cap cl(P_3) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = 0\}, \\ SW_{34} &= cl(P_3) \cap cl(P_4) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = 2\gamma\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

las cuales satisfacen que

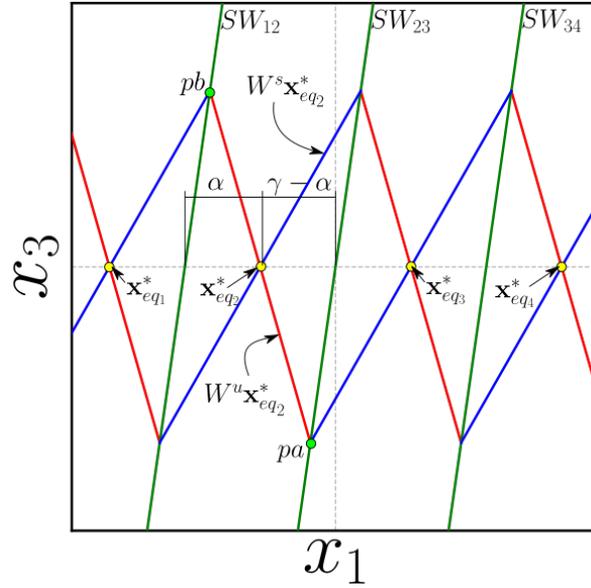


Figura 4.2: Proyección de las variedades estables e inestables y los planos de conmutación proyectados en el plano $x_1 - x_3$. El diagrama muestra la ubicación de la variedad inestable con líneas rojas, la variedad estable con líneas azules y los planos de conmutación marcados con líneas verdes.

$$\begin{aligned} SW_{i(i+1)} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\} &\in P_i, \\ SW_{i(i+1)} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 \leq 0\} &\in P_{i+1}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Esta forma de definir las superficies de conmutación provoca que las intersecciones entre ellas y las variedades estables contengan un punto, y las intersecciones entre ellas y las variedades inestables sean el conjunto vacío *i.e.*, $W_{x_{eq1}^*}^u \cap SW_{12} = \emptyset$ y $W_{x_{eq1}^*}^s \cap SW_{12} \neq \emptyset$.

Consideremos dos puntos, $pb = W_{x_{eq1}^*}^s \cap SW_{12}$ y $pa = W_{x_{eq3}^*}^s \cap SW_{23}$ como se muestra en la Figura 4.2. Entonces pa y pb son dados como sigue

$$pa = \begin{pmatrix} -\frac{(\gamma-\alpha)}{3} \\ 0 \\ -\frac{2(\gamma-\alpha)}{3} \end{pmatrix}, \quad pb = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{3} - \gamma \\ 0 \\ \frac{2\alpha}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

El conjunto $cl(W_{x_{eq2}^*}^u) \cap SW_{12}$ puede ser escrito como:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (0, \epsilon, 0)^T + pb, \epsilon \in \mathbb{R}\}, \quad (4.28)$$

y el conjunto $cl(W_{x_{eq2}^*}^u) \cap SW_{23}$ puede ser escrito como:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (0, \epsilon, 0)^T + pa, \epsilon \in \mathbb{R}\}. \quad (4.29)$$

Considere la transformación $\mathbf{z}^{(2)} = Q^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq2}^*)$, puesto que $Q^{-1}(0, \epsilon, 0)^T = (0, -\epsilon, 0)^T$, entonces $\mathbf{z}^{(2)} = (0, \epsilon, 0)^T + Q^{-1}(pb - \mathbf{x}_{eq2}^*)$, donde $Q^{-1}(pb - \mathbf{x}_{eq2}^*)$ es un

punto en el plano $z_2^{(2)} - z_3^{(2)}$. Y $\mathbf{z}^{(2)} = (0, \epsilon, 0)^T + Q^{-1}(pa - \mathbf{x}_{eq_2}^*)$, donde $Q^{-1}(pa - \mathbf{x}_{eq_2}^*)$ es un punto en el plano $z_2^{(2)} - z_3^{(2)}$.

Entonces el conjunto (4.28) en coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$ está dado por

$$\{\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{z}^{(2)} = (0, \epsilon, 2\alpha/3)^T, \epsilon \in \mathbb{R}\}, \quad (4.30)$$

y el conjunto (4.29) en coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$ está dado por

$$\{\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{z}^{(2)} = (0, \epsilon, 2(\alpha - \gamma)/3)^T, \epsilon \in \mathbb{R}\}. \quad (4.31)$$

Entonces los conjuntos (4.30) y (4.31) son líneas ortogonales al eje $z_3^{(2)}$. Los puntos pa y pb en coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$ serán denotados como

$$pa_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2(\alpha - \gamma)}{3} \end{pmatrix}, \quad pb_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\alpha}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Con el sistema desacoplado en coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$ podemos analizar el flujo en el plano $z_2^{(2)} - z_3^{(2)}$ cerca de $\mathbf{z}_{eq_2}^{*(2)}$.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2^{(2)} &= az_2^{(2)} - bz_3^{(2)}, \\ \dot{z}_3^{(2)} &= bz_2^{(2)} + az_3^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$r\dot{r} = z_2^{(2)}\dot{z}_2^{(2)} + z_3^{(2)}\dot{z}_3^{(2)} = ar^2, \quad (4.34)$$

$$\dot{r} = ar, \quad (4.35)$$

$$r = r_0 e^{at}. \quad (4.36)$$

De (4.32) se deduce que si $\alpha = \gamma - \alpha$ los puntos pa_z y pb_z están a la misma distancia de $\mathbf{z}_{eq_2}^{*(2)} = (0, 0, 0)^T$. Por lo tanto, de (4.36), se deduce que las trayectorias con condiciones iniciales pa_z y pb_z permanecen en P_2 para todo $t < 0$.

Nuestro caso de estudio es $\gamma - \alpha \neq \alpha$, de modo que $\gamma > \alpha$. Consideremos el caso $\gamma - \alpha > \alpha$, se puede ver en (4.32) que pb_z está más cerca de $\mathbf{z}_{eq_2}^{(2)}$ que pa_z , esto es, $d(pb_z, \mathbf{z}_{eq_2}^{(2)}) < d(pa_z, \mathbf{z}_{eq_2}^{(2)})$. Entonces, si γ es suficientemente grande con respecto a α , la trayectoria con la condición inicial pa_z eventualmente alcanzará el conjunto dado por (4.30) para $t < 0$, *i.e.*, la trayectoria de la condición inicial $pa \in SW_{23}$ alcanza el plano de conmutación SW_{12} y no el punto de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_2}^*$. Esto significa que en las coordenadas \mathbf{x} , la órbita heteroclínica de $\mathbf{x}_{eq_2}^*$ a $\mathbf{x}_{eq_3}^*$ no existe. De manera similar, cuando pb_z está más allá de pa_z de $\mathbf{z}_{eq_2}^{(2)}$, esto es, $d(pa_z, \mathbf{z}_{eq_2}^{(2)}) < d(pb_z, \mathbf{z}_{eq_2}^{(2)})$, para γ suficientemente pequeño, la trayectoria con la condición inicial pb_z eventualmente alcanzará el conjunto dado por (4.31) para $t < 0$, *i.e.*, la trayectoria de la condición inicial $pb \in SW_{12}$ alcanza el plano de conmutación SW_{23} y no el punto de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_2}^*$. Esto significa que en las coordenadas \mathbf{x} , la órbita heteroclínica de $\mathbf{x}_{eq_2}^*$ a $\mathbf{x}_{eq_1}^*$ no existe.

La proposición siguiente garantiza la existencia de órbitas heteroclínicas cuando γ pertenece a un intervalo de números reales donde se considera el caso $\gamma - \alpha \neq \alpha$, de modo que $\gamma > \alpha$.

Proposición 4.1.3. *El sistema hiperbólico dado por (4.1), (4.2),(4.4) y (4.23) con las superficies de conmutación dadas en (4.25) genera seis órbitas heteroclínicas si*

$$\frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)} > \gamma > \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau)),$$

donde

$$\tau = \frac{\arctan(b/a) + \pi/2}{b}.$$

Prueba: Para encontrar los valores de γ para los que existen estas órbitas heteroclínicas, supongamos que pa es un punto de unión de la órbita heteroclínica $\mathbf{x}_{eq_2}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_3}^*$, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(pa, t) = \mathbf{x}_{eq_2}^*, \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(pa, t) = \mathbf{x}_{eq_3}^*.$$

Debido a que $pa \in W_{\mathbf{x}_{eq_3}^*}^s$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(pa, t) = \mathbf{x}_{eq_3}^*$. Para la otra parte de la órbita heteroclínica, analizamos el sistema en coordenadas $bfz^{(2)}$, tenemos $pa_z, pb_z, \mathbf{z}_{eq_2}^{*(2)}$, y la órbita está dada por $\mathbf{z}^{(2)}(t)$.

Suponemos que $\mathbf{z}^{(2)}(0) = pa_z$, por lo que queremos que $\mathbf{z}^{(2)}(t)$ permanezca en P_2 para todo $t < 0$. Por lo tanto, necesitamos encontrar el primer máximo en la componente $z_3^{(2)}$ de la trayectoria cuya condición inicial es pa_z para $t < 0$. Según (4.32), la tercera componente de pa_z y pb_z son $\frac{2(\alpha-\gamma)}{3} < 0$ y $0 < \frac{2\alpha}{3}$, respectivamente. Este máximo nos da el punto de intersección entre la trayectoria $\mathbf{z}^{(2)}(t)$ y el eje $z_3^{(2)}$, luego podemos comparar las terceras componentes de la trayectoria $\mathbf{z}^{(2)}(t)$ y el punto pb_z , en términos de α y γ para garantizar que $\mathbf{z}^{(2)}(t)$ permanece en P_2 para todo $t < 0$.

La trayectoria $\mathbf{z}^{(2)}(t)$ para la condición inicial $\mathbf{z}_0^{(2)} = (z_{10}^{(2)}, z_{20}^{(2)}, z_{30}^{(2)})^T$ es

$$z_1^{(2)}(t) = z_{10}^{(2)} e^{-ct}, \quad (4.37)$$

$$z_2^{(2)}(t) = z_{20}^{(2)} e^{at} \cos(bt) - z_{30}^{(2)} e^{at} \sin(bt), \quad (4.38)$$

$$z_3^{(2)}(t) = z_{20}^{(2)} e^{at} \sin(bt) + z_{30}^{(2)} e^{at} \cos(bt), \quad (4.39)$$

Este conjunto de ecuaciones se analiza para $t < 0$. Se puede hacer el mismo análisis para $0 < t$ usando el siguiente conjunto de ecuaciones

$$z_1^{(2)}(t) = z_{10}^{(2)} e^{ct}, \quad (4.40)$$

$$z_2^{(2)}(t) = z_{20}^{(2)} e^{-at} \cos(bt) + z_{30}^{(2)} e^{-at} \sin(bt), \quad (4.41)$$

$$z_3^{(2)}(t) = -z_{20}^{(2)} e^{-at} \sin(bt) + z_{30}^{(2)} e^{-at} \cos(bt). \quad (4.42)$$

Como estamos buscando el primer máximo en $z_3^{(2)}(t)$ por $0 < t$.
Luego, de (4.42) con la condición inicial pa_z dada en (4.32)

$$z_3^{(2)}(t) = \frac{2(\alpha - \gamma)}{3} e^{-at} \cos(bt), \quad (4.43)$$

$$\dot{z}_3^{(2)}(t) = -\frac{2(\alpha - \gamma)}{3} e^{-at} (b \sin(bt) + a \cos(bt)), \quad (4.44)$$

$$\dot{z}_3^{(2)}(t) = -\frac{2(\alpha - \gamma)}{3} e^{-at} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \cos(bt - \arctan(b/a)) \right), \quad (4.45)$$

para encontrar el máximo igualamos a cero

$$0 = -\frac{2(\alpha - \gamma)}{3} e^{-at} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \cos(bt - \arctan(b/a)) \right), \quad (4.46)$$

por lo tanto, resulta que

$$bt - \arctan(b/a) = \pi/2 + n\pi, \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \quad (4.47)$$

$$t = \frac{\arctan(b/a)}{b} + \frac{\pi}{2b} + \frac{n\pi}{b}, \text{ con } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.48)$$

Llamaremos a t_{max} el tiempo para el primer máximo. Por lo tanto, se deduce que

$$t_{max} = \frac{\arctan(b/a) + \pi/2}{b}, \quad (4.49)$$

entonces de (4.43)

$$z_3^{(2)}(t_{max}) = \frac{2(\alpha - \gamma)}{3} e^{-at_{max}} \cos(bt_{max}), \quad (4.50)$$

este máximo $z_3^{(2)}$ debe ser parte de P_2 , puesto que pb_z pertenece a P_1 se sigue de (4.32) que

$$\frac{2\alpha}{3} > \frac{2(\alpha - \gamma)}{3} e^{-at_{max}} \cos(bt_{max}), \quad (4.51)$$

$$\frac{\alpha(e^{-at_{max}} \cos(bt_{max}) - 1)}{e^{-at_{max}} \cos(bt_{max})} > \gamma. \quad (4.52)$$

Ahora, asumamos que pb es un punto de la órbita heteroclínica que une $\mathbf{x}_{eq_2}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_1}^*$,
i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(pb, t) = \mathbf{x}_{eq_2}^*, \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(pb, t) = \mathbf{x}_{eq_1}^*.$$

Debido a que $pb \in W_{\mathbf{x}_{eq_1}^*}^s$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(pb, t) = \mathbf{x}_{eq_1}^*$.

Siguiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente pero buscando un mínimo, debido a la tercera componente de pb_z es $0 < \frac{2\alpha}{3}$ se ha encontrado que

$$t_{min} = \frac{\arctan(b/a) + \pi/2}{b}, \quad (4.53)$$

entonces de (4.42) y el punto pb_z dado en (4.32)

$$z_3^{(2)}(t_{min}) = \frac{2\alpha}{3}e^{-at_{min}} \cos(bt_{min}), \quad (4.54)$$

este mínimo $z_3^{(2)}$ debe ser parte de P_2 , puesto que pa_z pertenece a P_3 se sigue de (4.32) que

$$\frac{2(\alpha - \gamma)}{3} < \frac{2\alpha}{3}e^{-at_{min}} \cos(bt_{min}), \quad (4.55)$$

$$\gamma > \alpha(1 - e^{-at_{min}} \cos(bt_{min})). \quad (4.56)$$

Entonces definiendo $\tau = t_{max} = t_{min}$

$$\frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)} > \gamma > \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau)). \quad (4.57)$$

La misma conclusión se aplica al punto $x_{eq_3}^*$ debido a la simetría del sistema. Finalmente, la órbita heteroclínica de $x_{eq_1}^*$ a $x_{eq_2}^*$ y la de $x_{eq_4}^*$ a $x_{eq_3}^*$ siempre están presentes en el sistema ya que no hay más superficies de conmutación.

Para ilustrar el efecto de los parámetros γ , α , a y b en la existencia de órbitas heteroclínicas del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25), utilizamos la proposición (4.1.3) para determinar el intervalo abierto de valores reales para γ dado por

$$\Gamma = \left(\alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau)), \frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)} \right),$$

con $\tau = \frac{\arctan(b/a) + \pi/2}{b}$. Entonces, se calcularon seis condiciones iniciales como en (4.18) y (4.19) con $k = 50$ para los parámetros $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -3$ y $\alpha = 1$. Se analizan cuatro casos de diferentes valores de γ . Los dos primeros corresponden a $\gamma_{1,2} \in \Gamma$ y los dos últimos corresponden a $\gamma_{L,U} \notin \Gamma$:

- 1.- Para este caso $\gamma_1 \in \Gamma$, con $\gamma_1 = \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau)) + .00001$, entonces existen *seis órbitas heteroclínicas* como se muestra en la Figura 4.3a.
- 2.- Para $\gamma_2 = \left(\frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)} - .00001 \right) \in \Gamma$, En este caso existen también *seis órbitas heteroclínicas* como se muestra en la Figura 4.3b.
- 3.- En este caso $\gamma_L = \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau)) \notin \Gamma$, entonces existen *cuatro órbitas heteroclínicas* como se muestra en la Figura 4.3c. La órbita verde que comienza cerca de $x_{eq_2}^*$ no puede alcanzar $x_{eq_1}^*$ y va a P_3 . De la misma manera, la órbita amarilla que comienza cerca de $x_{eq_3}^*$ no puede alcanzar $x_{eq_4}^*$ y va a P_2 . Entonces no hay órbitas heteroclínicas de $x_{eq_2}^*$ a $x_{eq_1}^*$ y de $x_{eq_3}^*$ a $x_{eq_4}^*$.
- 4.- Para $\gamma_U = \frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)} \notin \Gamma$, existen *cuatro órbitas heteroclínicas* como se muestra en la Figura 4.3d. La órbita roja que comienza cerca de $x_{eq_2}^*$ no puede alcanzar $x_{eq_3}^*$ y va a P_1 . De la misma manera, la órbita azul que comienza cerca de $x_{eq_3}^*$ no puede alcanzar $x_{eq_2}^*$ y va a P_4 . Entonces no hay órbitas heteroclínicas de $x_{eq_2}^*$ a $x_{eq_3}^*$, ni viceversa.

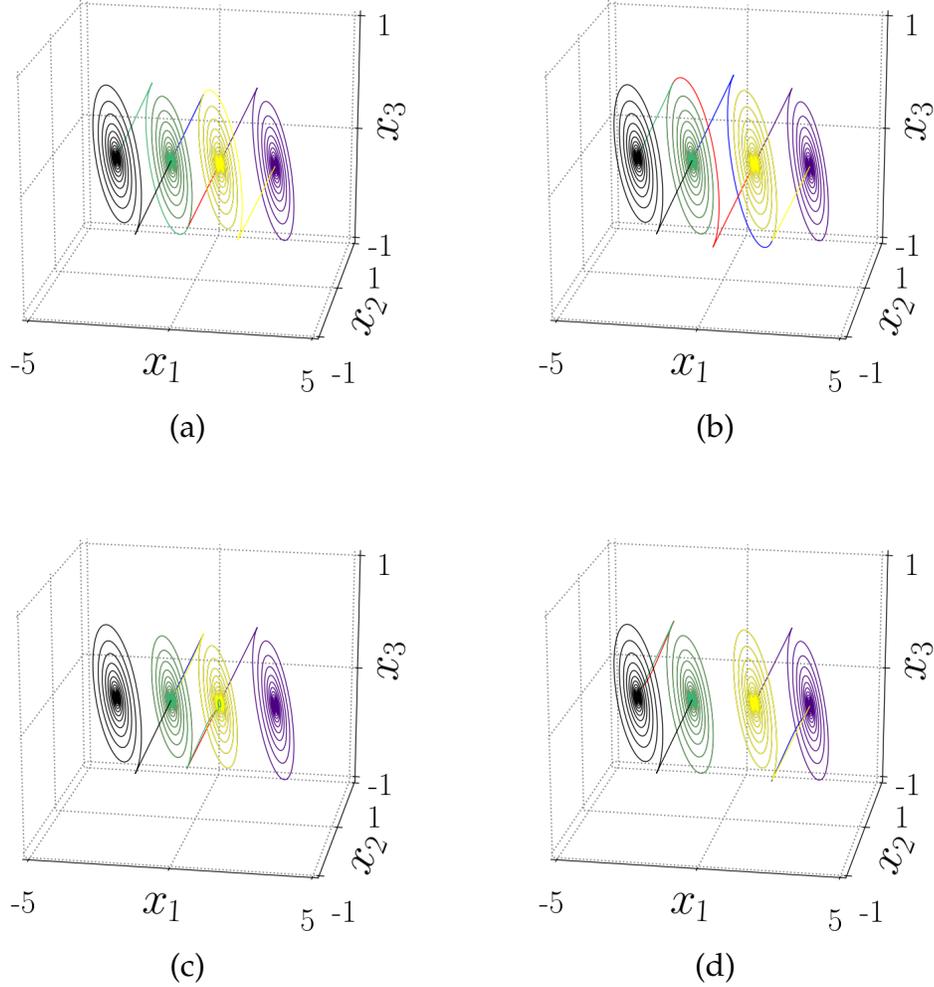


Figura 4.3: Órbitas heteroclínicas del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25) para los parámetros $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -3$, $\alpha = 1$ y diferentes valores de γ . Hay seis órbitas heteroclínicas para: (a) $\gamma_1 = \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau)) + .00001$, y (b) $\gamma_2 = \frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)} - .00001$. Cuatro órbitas heteroclínicas para: (c) $\gamma_L = \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau))$, y (d) $\gamma_U = \frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)}$.

El intervalo abierto Γ es dado como $\Gamma = (\gamma_L, \gamma_U)$, donde

$$\gamma_L = \alpha(1 - e^{-a\tau} \cos(b\tau)) \approx 1.8826170015164836, \quad (4.58)$$

$$\gamma_U = \frac{\alpha(e^{-a\tau} \cos(b\tau) - 1)}{e^{-a\tau} \cos(b\tau)} \approx 2.1329942639693464. \quad (4.59)$$

Los cuatro casos mencionados generan tres tipos de sistemas determinados por γ y Γ . Por ejemplo, para $\gamma = 2 \in \Gamma$ y $\alpha = 1$ corresponde a los casos primero y segundo. Luego, el sistema presenta seis órbitas heteroclínicas que comprenden tres

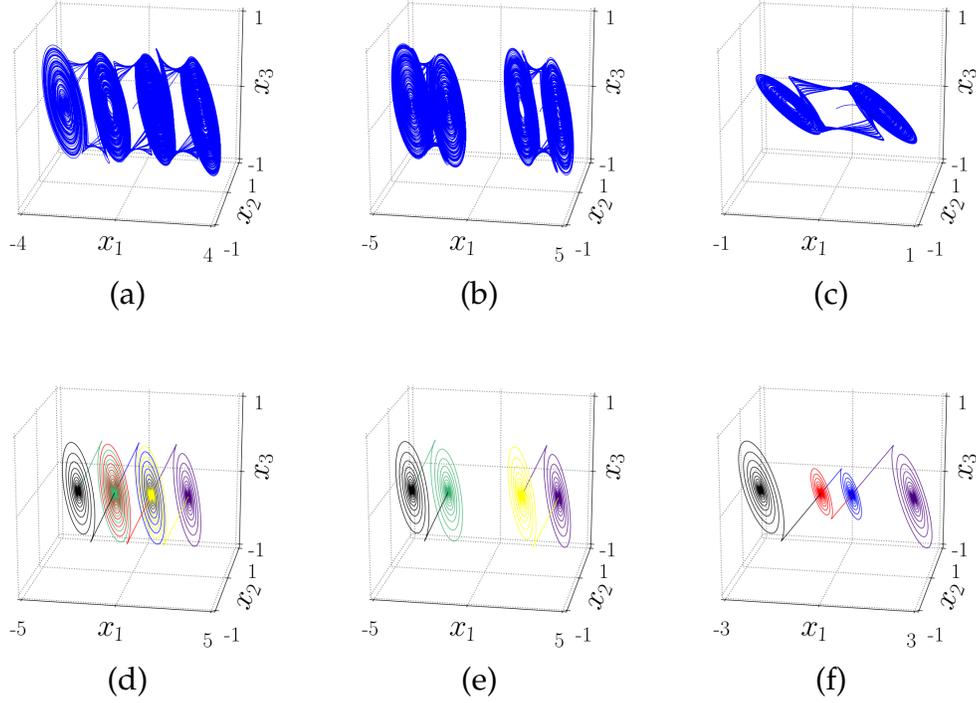


Figura 4.4: Órbitas heteroclínicas del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25) para $\alpha = 1$ y diferentes valores de γ . Para $\gamma = 2$, el sistema exhibe en (a) un atractor de cuádruple enroscado, y en (d) seis órbitas heteroclínicas. Para $\gamma = 3$, el sistema exhibe en (b) dos atractores de doble enroscado, y en (e) cuatro órbitas heteroclínicas. Para $\gamma = 1.5$ el sistema exhibe en (c) un atractor de doble enroscado, y en (f) cuatro órbitas heteroclínicas.

ciclos heteroclínicos entre los puntos de equilibrio: $\mathbf{x}_{eq_1}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_2}^*$; $\mathbf{x}_{eq_2}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_3}^*$; $\mathbf{x}_{eq_3}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_4}^*$. Para $\gamma = 1.5 < \gamma_L$, entonces $\gamma \notin \Gamma$, y este caso corresponde al tercer caso anterior. Entonces, hay cuatro órbitas heteroclínicas y dos de ellas forman un ciclo heteroclínico entre los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_2}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_3}^*$. Para $\gamma_U < \gamma = 3$, entonces $\gamma \notin \Gamma$, y este caso corresponde al cuarto caso anterior. Entonces, hay cuatro órbitas heteroclínicas que comprenden dos ciclos heteroclínicos, pero ahora entre los puntos de equilibrio: $\mathbf{x}_{eq_1}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_2}^*$; $\mathbf{x}_{eq_3}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_4}^*$. Los tres casos anteriores generan atractores auto-excitados como se muestra a continuación:

- 1.- Para $\gamma = 2 \in \Gamma$, el sistema presenta un atractor auto-excitado con cuatro enroscados que se muestra en la Figura 4.4a y sus tres ciclos heteroclínicos correspondientes se muestran en la Figura 4.4d. De acuerdo con [15], un atractor con tres o más enroscados se considera un atractor multienroscado, por lo tanto, el atractor que se muestra en la Figura 4.4a es un atractor multienroscado. Los enroscados se generan alrededor de cada punto de equilibrio del sistema $\mathbf{x}_{eq_i}^*$, con $i = 1, 2, 3, 4$.
- 2.- Para $\gamma = 3, \gamma > \gamma_U$, entonces $\gamma \notin \Gamma$. El sistema presenta biestabilidad, los dos

atractores auto-excitados de doble enroscado se muestran en la Figura 4.4b. En este caso se pierden dos órbitas heteroclínicas, el sistema exhibe cuatro órbitas heteroclínicas, *i.e.*, dos ciclos heteroclínicos, como se muestra en la Figura 4.4e. Un atractor auto-excitado de doble enroscado oscila alrededor de los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_1}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_2}^*$, mientras que el otro atractor auto-excitado oscila alrededor de los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_3}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_4}^*$. La cuenca de atracción de cada atractor auto-excitado está rodeada por ambos atractores.

- 3.- Para $\gamma = 1.5$, $\gamma < \gamma_L$, entonces $\gamma \notin \Gamma$. El sistema presenta sólo un atractor auto-excitado de doble desplazamiento que se muestra en la Figura 4.4c. En este caso, también se pierden dos órbitas heteroclínicas, pero sólo se exhibe un ciclo heteroclínico. Las órbitas heteroclínicas se muestran en la Figura 4.4f. El atractor auto-excitado de doble enroscado oscila alrededor de los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_2}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_3}^*$,

Basado en los resultados del ensanchamiento de las cuencas de atracción de un sistema dinámico de conmutación multiestable con la ubicación de puntos de equilibrio simétricos reportado en [13], podríamos reflexionar sobre la posible existencia de un atractor oculto para el caso $\gamma > \gamma_U$, porque hay oscilaciones alrededor de los dos atractores auto-excitados ya que existe un atractor oculto. Sin embargo, las simulaciones de estos sistemas nos permiten saber que los atractores ocultos no están presentes. Por ejemplo, si el valor γ aumenta, también aumenta la distancia entre los dos atractores auto-excitados. Esto provoca que algunas condiciones iniciales en las cuencas de atracción de ambos atractores generen oscilaciones transitorias que se asemejan a un atractor de doble enroscado, sin embargo, después de algún tiempo estas oscilaciones transitorias convergen en uno de los atractores auto-excitados de doble enroscado.

Analizamos la trayectoria de la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$ y diferentes valores de γ cumpliendo $\gamma_U < \gamma$. El primer caso es $\gamma = 5$ y $t \in [0, 40]$ en unidades arbitrarias (*u.a.*). Los puntos de equilibrio están en:

$$\mathbf{x}_{eq_1}^* = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_2}^* = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_3}^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_4}^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

La Figura 4.5a muestra la trayectoria que consiste en el comportamiento transitorio que se asemeja a un atractor de doble enroscado y después de un corto tiempo alcanza un atractor auto-excitado de doble enroscado alrededor de los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_1}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_2}^*$.

Al aumentar el valor de γ a 15, los puntos de equilibrio se ubican en:

$$\mathbf{x}_{eq_1}^* = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_2}^* = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_3}^* = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_4}^* = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Y el tiempo transitorio para llegar al atractor auto-excitado aumenta. En la Figura 4.5b se muestra la trayectoria de $t \in [0, 60]$ *u.a.*. Ahora, para $\gamma = 100$ los puntos de

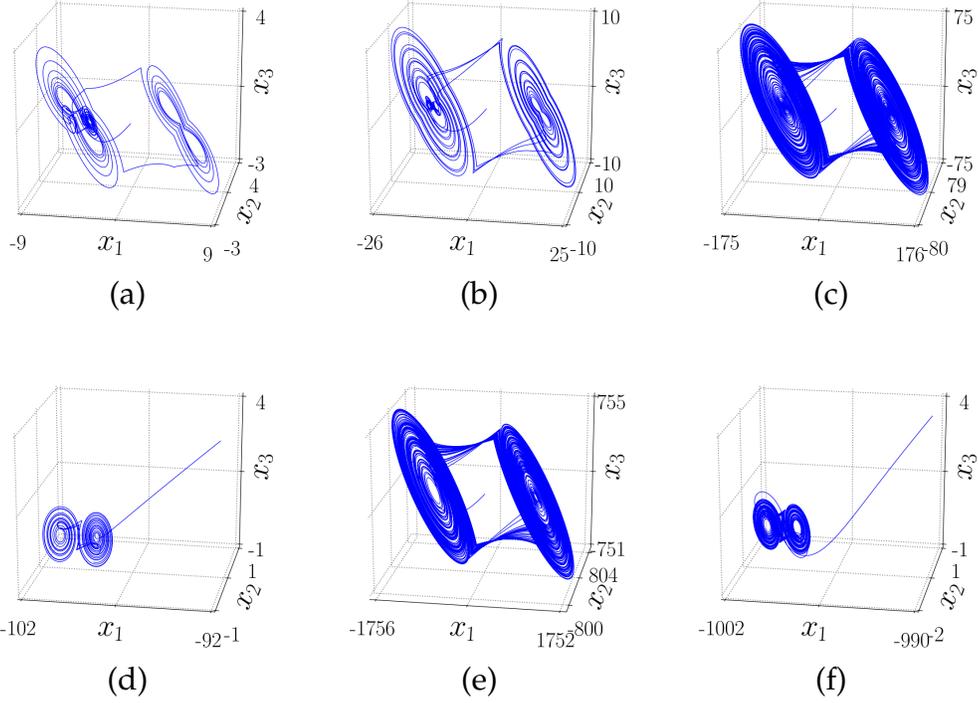


Figura 4.5: Trayectoria del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25) para la condición inicial $x = (0, 0, 0)^T$, $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $\alpha = 1$ y diferentes valores de γ : (a) $\gamma = 5$, la oscilación transitoria de doble enroscado exhibida y después de algún tiempo converge a uno de los atractores auto-excitados de doble enroscado, $t \in [0, 40]$ u.a.; (b) $\gamma = 15$, la oscilación transitoria de doble enroscado exhibida y después de algún tiempo converge a uno de los atractores auto-excitados de doble enroscado, $t \in [0, 60]$ u.a.; (c) $\gamma = 100$, la oscilación transitoria de doble enroscado exhibida por $t \in [0, 300]$ u.a.; (d) $\gamma = 100$, atractor auto-excitado de doble enroscado por $t = [356.6, 400]$ u.a.; (e) $\gamma = 1000$, la oscilación transitoria de doble enroscado exhibida por $t \in [0, 300]$ u.a.; (f) $\gamma = 1000$, el atractor auto-excitado de doble enroscado por $t = [3091, 3200]$ u.a..

equilibrio se encuentran en:

$$\mathbf{x}_{eq_1}^* = \begin{pmatrix} -101 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_2}^* = \begin{pmatrix} -99 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_3}^* = \begin{pmatrix} 99 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_4}^* = \begin{pmatrix} 101 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

El tiempo transitorio dura más para la misma condición inicial. La Figura 4.5c muestra las oscilaciones transitorias de la trayectoria de $t \in [0, 300]$ u.a.. Después de mucho tiempo, la trayectoria alcanza un atractor auto-excitado de doble enroscado alrededor de los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_1}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_2}^*$, vea la Figura 4.5d para $t \in [356.6, 400]$ u.a..

Continuando el aumento del valor a $\gamma = 1000$, establece los puntos de equilibrio en:

$$\mathbf{x}_{eq_1}^* = \begin{pmatrix} -1001 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_2}^* = \begin{pmatrix} -999 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_3}^* = \begin{pmatrix} 999 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{eq_4}^* = \begin{pmatrix} 1001 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

La Figura 4.5e muestra la oscilación transitoria de la trayectoria cuando $t \in [0, 300]$ u.a., nuevamente aumenta el tiempo transitorio y después de este largo tiempo, la trayectoria nuevamente alcanza un atractor auto-excitado de doble enroscado alrededor de los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_1}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_2}^*$, vea Figura 4.5f para $t \in [3091, 3200]$ u.a..

En resumen, para $\gamma = 5$, le toma a la trayectoria alrededor de 35 u.a. converger a un atractor auto-excitado, para $\gamma = 15$ alrededor de 50 u.a. para converger, para $\gamma = 100$ alrededor de 350 u.a. y para $\gamma = 1000$ alrededor de 3090 u.a.. Por lo tanto, el tiempo transitorio parece aumentar cuando γ aumenta. En todos los casos, las trayectorias alcanzan un atractor auto-excitado.

Hay dos intereses, el primero es comprender cómo la oscilación transitoria de la trayectoria que se asemeja a un atractor de doble enroscado se dirige a un atractor auto-excitado. El último es idear un mecanismo para bloquear el flujo hacia un atractor auto-excitado para generar un atractor oculto.

4.1.3 RUTA HACIA UN ATRACTOR AUTO-EXCITADO

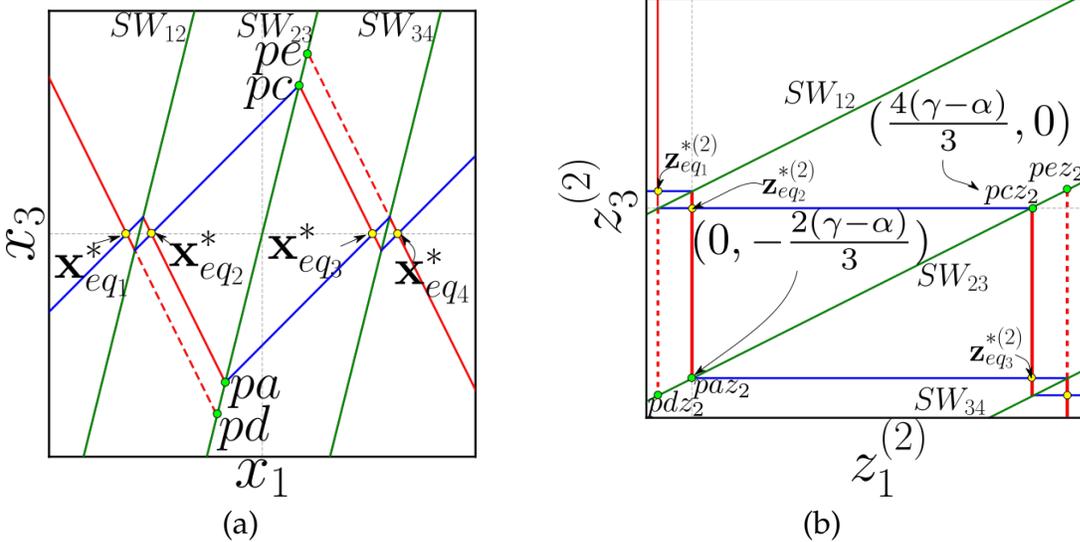


Figura 4.6: Proyección de las variedades sobre (a) el plano $(x_1 - x_3)$ y (b) el plano $(z_1^{(2)} - z_3^{(2)})$. Las variedades estables e inestables están marcadas con líneas continuas azules y rojas, respectivamente, las superficies de conmutación con líneas verdes.

Las trayectorias con condiciones iniciales en los puntos $pa, pc \in SW_{23}$ convergen a los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_{eq_3}^*$ y $\mathbf{x}_{eq_2}^*$, respectivamente. Entonces, hay conjuntos $Cpa \subset$

SW_{23} y $Cpc \subset SW_{23}$ alrededor de pa o pc , respectivamente, de modo que la oscilación transitoria de la trayectoria que se asemeja a un atractor de doble enroscado al pasar por estas regiones Cpa o Cpc se dirige a uno de los atractores auto-excitados A_{aut1} o A_{aut2} , respectivamente. Por lo tanto, deberíamos poder encontrar dos regiones $R_1, R_2 \subset SW_{23}$ por donde pasa la oscilación transitoria tal que $Cpa \subset R_1$ y $Cpc \subset R_2$. Estas regiones deben contener los puntos $pa \in R_1$ y $pc \in R_2$. Por lo tanto, el objetivo de esta Sección 4.1.3 es proponer regiones $R_1, R_2 \subset SW_{23}$ y visualizar la ruta a un atractor auto-excitado cuando $Cpa \cap R_1 \neq \emptyset$ y $Cpc \cap R_2 \neq \emptyset$.

Para comprender el comportamiento transitorio, se analiza el campo vectorial de P_2 y P_3 en SW_{23} . Luego, se propone una región $R_1 \subset SW_{23}$, de modo que cualquier trayectoria $\varphi(x_0)$, con $x_0 \in R_1$, eventualmente vaya al atractor auto-excitado A_{aut2} . Las regiones R_1 y R_2 se elegirán de manera que sean simétricas con respecto al origen, por ejemplo, el punto pa y su punto simétrico $pc = -pa$:

$$pa = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma - \alpha}{3} \\ 0 \\ -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} \end{pmatrix}, \quad pc = \begin{pmatrix} \frac{\gamma - \alpha}{3} \\ 0 \\ \frac{2(\gamma - \alpha)}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Para comenzar el análisis, busquemos los puntos en SW_{23} donde el campo vectorial de P_2 y P_3 son tangentes al plano SW_{23} . Estos puntos se denominarán puntos tangentes y se pueden encontrar en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (2, 0, -1) \begin{pmatrix} \frac{a}{3} + \frac{2c}{3} & b & \frac{2c}{3} - \frac{2a}{3} \\ -\frac{b}{3} & a & \frac{2b}{3} \\ \frac{c}{3} - \frac{a}{3} & -b & \frac{2a}{3} + \frac{c}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_3}{2} - x_{1eq_i} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ = -(a+c)x_{1eq_i} + \frac{3(c-a)}{2}x_3 + 3bx_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.65)$$

se sigue que:

$$x_2 = \frac{(a+c)}{3b}x_{1eq_i} - \frac{(c-a)}{2b}x_3, \quad \text{with } i = 1, 2. \quad (4.66)$$

Para el campo vectorial de P_2 , $x_{1eq_2} = -\gamma + \alpha$ entonces:

$$x_2 = \frac{(a+c)}{3b}(-\gamma + \alpha) - \frac{(c-a)}{2b}x_3, \quad (4.67)$$

mientras que para el campo vectorial de P_3 , $x_{1eq_3} = \gamma - \alpha$:

$$x_2 = \frac{(a+c)}{3b}(\gamma - \alpha) - \frac{(c-a)}{2b}x_3. \quad (4.68)$$

De acuerdo con (4.26), si $x_3 > 0$ entonces SW_{23} pertenece a P_2 , y los puntos tangentes a considerar en SW_{23} para $x_3 > 0$ están dados por (4.67). Y si $x_3 \leq 0$, entonces SW_{23} pertenece a P_3 y los puntos tangentes están dados por (4.68). En la Figura 4.7 se muestra una ilustración de los puntos tangentes en SW_{23} , donde los puntos para P_2 se indican mediante una línea de puntos, mientras que para P_3 se dibujan como una

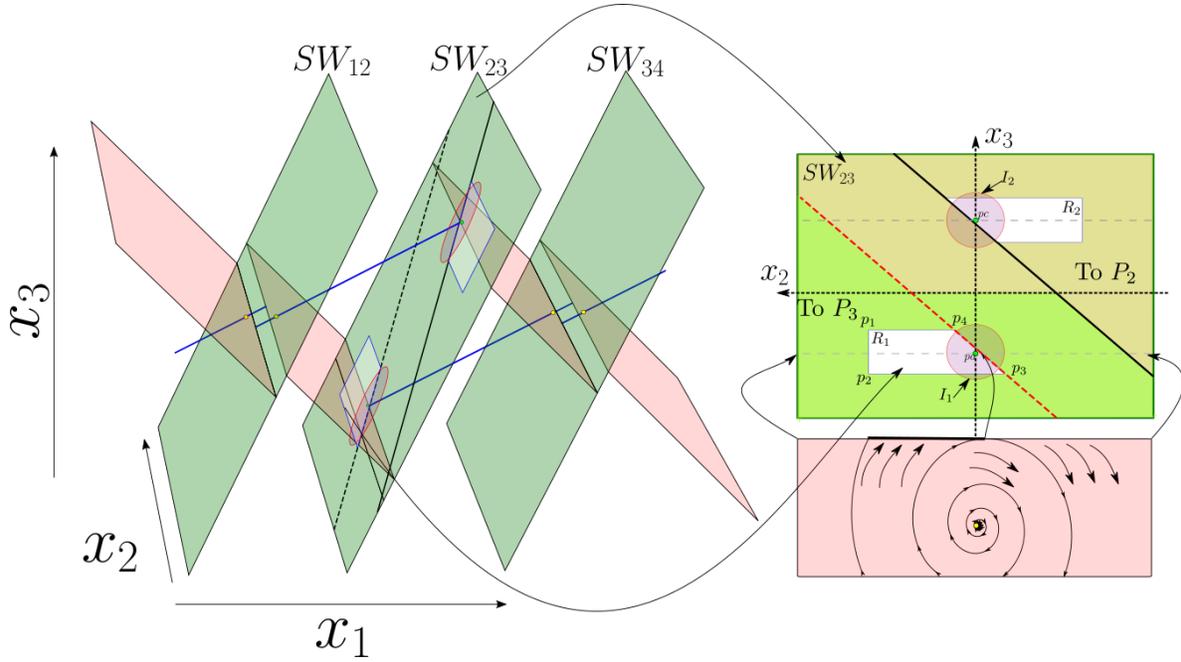


Figura 4.7: Ilustración de las variedades locales del sistema. Las variedades estables están en azul, las variedades inestables en rojo y las superficies de conmutación en verde. Los puntos donde el campo vectorial de P_2 es tangente a SW_{23} están en una línea punteada roja, mientras que los puntos donde el campo vectorial de P_3 es tangentes a SW_{23} se muestra con una línea negra continua. Las regiones simétricas R_1 y R_2 están en blanco.

línea continua.

Como punto de partida para proponer la región R_1 definida por cuatro puntos p_1, \dots, p_4 , considere el punto en $cl(W_{x_{eq2}}^u) \cap SW_{23}$ dado por (4.29) que cumple con (4.67):

$$pt_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma - \alpha}{3} \\ -\frac{2a(\gamma - \alpha)}{3b} \\ -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

y en coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$

$$pt_{1z_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2a(\gamma - \alpha)}{3b} \\ -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Si evaluamos la trayectoria con la condición inicial en $x_0 = pt_{1z_2}$, bajo el campo vectorial de P_2 e ignorando el efecto del campo vectorial de P_1 y P_3 , llega al punto

$pt_2z_2 \in SW_{23}$. El flujo φ puede escapar de P_2 a P_3 a través del segmento $\overline{pt_1z_2 pt_2z_2}$. Por lo tanto, las trayectorias con una condición inicial cercana a z_{eq2} y no en la variedad estable probablemente crucen SW_{23} cerca del segmento $\overline{pt_1z_2 pt_2z_2}$ entonces R_1 debe incluir este segmento. Sin embargo, cuando se considera el campo vectorial de todos los átomos, las trayectorias con condiciones iniciales cercanas a pt_1z_2 podrían alcanzar SW_{23} en puntos cuya segunda componente en las coordenadas $z^{(2)}$ están más lejos de 0 que la segunda componente en coordenadas $z^{(2)}$ de pt_2z_2 . Esto nos permite proponer la región R_1 basada en un segmento más grande $\overline{pa_1z_2 pa_2z_2}$ de modo que $\overline{pt_1z_2 pt_2z_2} \subset \overline{pa_1z_2 pa_2z_2}$. Considere la condición inicial pa_2z_2 dada en coordenadas $z^{(2)}$ por:

$$pa_2z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

entonces, el radio con respecto a z_{eq2}^* sería $\frac{2(\gamma - \alpha)}{3}$. Recuerde que sólo se considera el campo vectorial de P_2 y la trayectoria gira alrededor del eje $z_1^{(2)}$. Analizando un caso imposible cuando la trayectoria con la condición inicial en pa_2z_2 alcanza SW_{23} con un incremento de radio que corresponde a $t = 2\pi/b$ (lo equivalente a 360°) entonces la componente $z_2^{(2)}$ de este punto está mas lejos de 0 que la componente $z_2^{(2)}$ de pt_2z_2 . Entonces, podríamos tomar $pa_2z_2 = pt_1z_2$ y encontrar el componente $z_2^{(2)}$ de pa_1z_2 de:

$$\sqrt{\left(\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} e^{a\frac{2\pi}{b}}\right)^2 - \left(\frac{2(\gamma - \alpha)}{3}\right)^2}. \quad (4.72)$$

Con el fin de obtener la región R_1 en función de α y γ y simplificar el estudio se harán algunas restricciones en los parámetros a, b y c mediante la siguiente suposición:

Suposición 4.1.3. Los valores de los parámetros cumplen las siguientes relaciones $\frac{b}{a} \geq 25$,

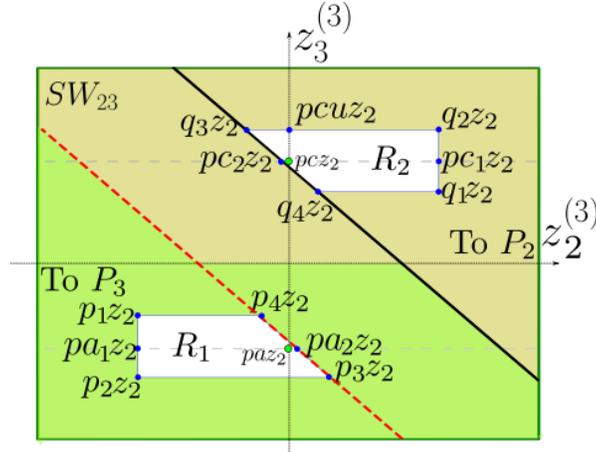
$$2 \geq \left|\frac{c}{b}\right| \geq \frac{7}{5} \text{ y } \frac{\gamma}{\alpha} \geq 10.$$

entonces:

$$\sqrt{\left(\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} e^{a\frac{2\pi}{b}}\right)^2 - \left(\frac{2(\gamma - \alpha)}{3}\right)^2} \leq \gamma \sqrt{\left(\frac{2}{3} e^{a\frac{2\pi}{b}}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \leq 0.5388\gamma < \frac{3\gamma}{5}. \quad (4.73)$$

Recuerde que $z_2^{(2)} = -x_2$, entonces, los puntos pa_1 y pa_2 por elección estarán dados por

$$pa_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma - \alpha}{3} \\ \frac{3\gamma}{5} \\ -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} \end{pmatrix}, \quad pa_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma - \alpha}{3} \\ -\frac{2a(\gamma - \alpha)}{3b} \\ -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$


 Figura 4.8: Regiones R_1 y R_2 en el plano $(z_2^{(2)}, z_3^{(3)})$.

donde $-\frac{2a(\gamma - \alpha)}{3b}$ es la coordenada tangente dada por (4.67) para $x_3 = -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3}$.

Entonces, propongamos que la región R_1 esté delimitada por los siguientes cuatro puntos:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= pa_1 + \left(\frac{\gamma}{10}, 0, \frac{\gamma}{5} \right)^T, \\
 p_2 &= pa_1 - \left(\frac{\gamma}{10}, 0, \frac{\gamma}{5} \right)^T, \\
 p_3 &= pa_2 + \left(-\frac{\gamma}{10}, -\frac{(c-a)(-\frac{\gamma}{5})}{2b}, -\frac{\gamma}{5} \right)^T, \\
 p_4 &= pa_2 + \left(\frac{\gamma}{10}, -\frac{(c-a)(\frac{\gamma}{5})}{2b}, \frac{\gamma}{5} \right)^T.
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Como R_2 es simétrica a R_1 con respecto al origen, la región simétrica R_2 está delimitada por los puntos:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= -p_1, \\
 q_2 &= -p_2, \\
 q_3 &= -p_3, \\
 q_4 &= -p_4.
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Estas regiones R_1 y R_2 se han propuesto teniendo en cuenta que los puntos p_d y p_e que se muestran en la Figura 4.6b son parte de las regiones. En la Figura 4.8, R_1 y R_2 se muestran en las coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$. Los puntos en el sistema de coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$ tienen el sufijo z_2 , por ejemplo p_2 en $\mathbf{z}^{(2)}$ coordenadas es p_2z_2 .

Lo siguiente es verificar si las condiciones iniciales en R_1 terminan nuevamente en R_1 , van a R_2 o el atractor auto-excitado en $P_3 \cup P_4$. Debido a que seguir la evolución de las trayectorias a través de los átomos P_1 y P_2 es sumamente complicado se hará uso de una aproximación utilizando únicamente P_2 , se hará la siguiente Suposición:

Suposición 4.1.4. *Las trayectorias en $P_1 \cup P_2$ giran alrededor de las variedades estables de \mathbf{x}_{eq_1} y \mathbf{x}_{eq_2} . El incremento en el radio (dado por una condición inicial en R_1 respecto a \mathbf{x}_{eq_2}) para una rotación de $3\pi/2$ es aproximadamente el mismo si la rotación se realiza sólo alrededor de la variedad estable de \mathbf{x}_{eq_2} , i.e., si sólo el campo vectorial de P_2 es considerado.*

Para ilustrar por que se ha considerado esta aproximación de la Suposición 4.1.4 considere el siguiente sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_2) \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

donde los parámetros $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $\gamma = 10$ y $\alpha = 1$, y $f(x_2)$ es una función de histéresis como se muestra en Figura 4.9e.

Note que el sistema (4.77) es similar al sistema original cuando se proyecta en el plano $z_2^{(2)} - z_3^{(2)}$, la conmutación en los puntos $(0, l_1)^T$ y $(0, l_2)^T$ se asemejan a la ubicación de la superficie SW_{23} y, por lo tanto, la proyección de cualquier trayectoria en $P_1 \cup P_2$ puede representarse para un período de tiempo corto mediante el sistema (4.77).

Considere la duración $t \in [0, \frac{3\pi}{2b}]$ y los parámetros $d_1 = z_{3eq_1}^{(2)} = \frac{2\alpha}{3}$, $d_2 = z_{3eq_2}^{(2)} = 0$. En las Figuras 4.9a - 4.9d, se muestra la trayectoria en azul para $k = 0$, i.e., rotando desde el origen.

La trayectoria en rojo y amarillo se muestra para $k = 1$ y los parámetros (a) $l_1 = l_2 = \frac{2(\gamma-\alpha)}{3}$, (b) $l_1 = \frac{2(\gamma-\alpha)}{3}$, $l_2 = \frac{2\alpha}{3}$, (c) $l_1 = \frac{\gamma}{3}$, $l_2 = \frac{\gamma}{3}$ y (d) $l_1 = \frac{\gamma}{3}$, $l_2 = \frac{2\alpha}{3}$.

De las simulaciones del sistema (4.77) para diferentes configuraciones de conmutación es posible observar que la aproximación considerada en la suposición 4.1.4 se acerca al valor real y en algunos casos incluso da un valor final de radio mayor. Además, a medida que $\frac{\gamma}{\alpha}$ aumenta, se espera una mejor aproximación.

El siguiente paso es verificar la validez de las regiones R_1 y r_2 , para este propósito definamos el conjunto R_1b de la siguiente manera:

$$R_1b = \left\{ \mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{R}^3 : z_1^{(2)} \in \left[-\frac{\gamma}{5}, \frac{\gamma}{5} \right] \right\}. \quad (4.78)$$

Primero, verifiquemos que los puntos en R_2 vayan a R_1b .

La evaluación del campo vectorial en pc_1z_2 nos dice que el giro es en sentido antihorario en las coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$. No es difícil ver que los puntos debajo del segmento $\overline{pcz_2} \overline{pc_1z_2}$ producen trayectorias que pueden realizar un giro de π alrededor del eje $z_1^{(2)}$ sin alcanzar SW_{23} nuevamente. El tiempo que corresponde a 2π bajo la Suposición 4.1.4 es $T = 2\pi/b$. El punto pc_1z_2 está dado por

$$pc_1z_2 = \begin{pmatrix} \frac{4(\gamma - \alpha)}{3} \\ \frac{3\gamma}{5} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

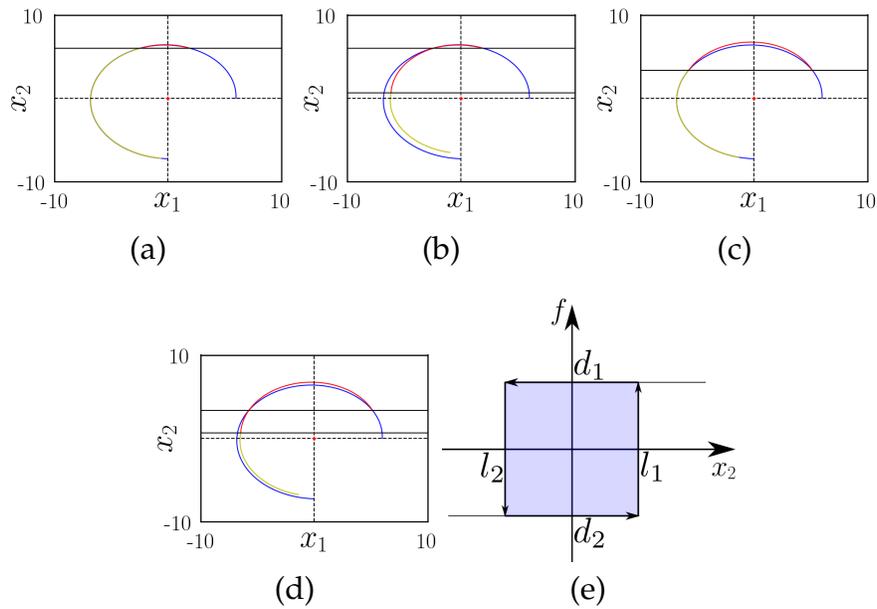


Figura 4.9: Simulación del sistema (4.77) para $t \in [0, \frac{3\pi}{2b})$, $d_1 = z_{3eq_1}^{(2)} = \frac{2\alpha}{3}$ y $d_2 = z_{3eq_2}^{(2)} = 0$, la trayectoria de $k = 0$, *i.e.* girando desde el origen se muestra en azul. La trayectoria en rojo y amarillo se muestra para $k = 1$ y los parámetros (a) $l_1 = l_2 = \frac{2(\gamma-\alpha)}{3}$, (b) $l_1 = \frac{2(\gamma-\alpha)}{3}$, $l_2 = \frac{2\alpha}{3}$, (c) $l_1 = \frac{\gamma}{3}$, $l_2 = \frac{\gamma}{3}$ y (d) $l_1 = \frac{\gamma}{3}$, $l_2 = \frac{2\alpha}{3}$. En (e) la función de histéresis $f(x_2)$.

Considere la trayectoria con condición inicial en pc_1z_2 , y un tiempo de evolución que corresponde a un giro de 180° alrededor del eje $z_1^{(2)}$. Después de este tiempo, el primer componente del vector de estado se puede encontrar de:

$$z_1^{(2)} = \left(\frac{4(\gamma - \alpha)}{3} \right) e^{c\frac{\pi}{b}}. \quad (4.80)$$

Si $z_1^{(2)} \leq \gamma/5$ significa que la trayectoria con la condición inicial en pc_1z_2 alcanza R_1b . Considere ahora el caso donde γ es muy grande y por lo tanto hay una distancia mayor a lo largo del eje la $z_1^{(2)}$ para poder llegar a R_1b :

$$\left(\frac{4(\gamma - \alpha)}{3} \right) e^{c\frac{\pi}{b}} \leq \frac{4\gamma}{3} e^{c\frac{\pi}{b}} \leq 0.0164\gamma < \frac{\gamma}{5}. \quad (4.81)$$

Así el conjunto $\{z^{(2)} \in R_2 : z_2^{(2)} \geq 0, z_3^{(2)} \leq 0\}$ alcanza el conjunto R_1b .

Ahora considere el punto q_2z_2 dado por:

$$q_2z_2 = \begin{pmatrix} \frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \\ \frac{3\gamma}{5} \\ \frac{\gamma}{10} \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

El ángulo producido por el radio desde el punto q_2z_2 hasta el eje $z_1^{(2)}$ y el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ está dado por:

$$\left(\frac{360}{2\pi} \right) \arctan \left(\frac{\frac{\gamma}{10}}{\frac{3\gamma}{5}} \right) = \left(\frac{360}{2\pi} \right) \arctan \left(\frac{1}{6} \right) = 0.16515. \quad (4.83)$$

Consideremos que la trayectoria con condición inicial en q_2z_2 evoluciona durante un tiempo que corresponde a $\pi - 0.16515 = 2.97644$. La primera componente del vector de estado después de esta duración está dado por:

$$z_1^{(2)} = \left(\frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \right) e^{c\left(\frac{2.97644}{b}\right)}. \quad (4.84)$$

Como antes, si $z_1^{(2)} \leq \gamma/5$ significa que la trayectoria con la condición inicial en q_2z_2 alcanza R_1b . Considere nuevamente que γ es grande con respecto a α y hay una gran distancia a lo largo del eje $z_1^{(2)}$:

$$\left(\frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \right) e^{c\left(\frac{2.97644}{b}\right)} \leq \left(\frac{23\gamma}{15} \right) e^{c\left(\frac{2.97644}{b}\right)} \leq 0.0238\gamma < \frac{\gamma}{5}. \quad (4.85)$$

Por lo tanto, q_2z_2 alcanza la región R_1b . Además, puesto que los puntos en el segmento $\overline{q_2z_2 pc_1z_2}$ produce radio cuyo ángulo con el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ está entre 0 y 0.16515

las trayectorias que comienzan en este segmento también alcanzan el conjunto R_1b .

Ahora considere el punto $pcuz_2$ dado por

$$pcuz_2 = \begin{pmatrix} \frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \\ 0 \\ \frac{\gamma}{10} \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Las trayectorias con condición inicial en el segmento $\overline{pcz_2 pcuz_2}$ pueden girar $\pi/2$ sin llegar a SW_{23} . Por lo tanto, consideremos que la trayectoria con la condición inicial en $pcuz_2$ evoluciona durante un tiempo que corresponde a $\pi/2$. El primer componente del vector de estado después de esta duración está dado por:

$$z_1^{(2)} = \left(\frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \right) e^{c \frac{\pi}{2b}}. \quad (4.87)$$

Si $z_1^{(2)} \leq \gamma/5$ significa que la trayectoria con la condición inicial en $pcuz_2$ alcanza R_1b . Considere que γ es grande con respecto a α , es decir hay mayor distancia a lo largo del eje $z_1^{(2)}$:

$$\left(\frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \right) e^{c \frac{\pi}{2b}} \leq \left(\frac{23\gamma}{15} \right) e^{c \frac{\pi}{2b}} \leq 0.17\gamma < \frac{\gamma}{5}. \quad (4.88)$$

Así las trayectorias con condición inicial en el conjunto $\{z^{(2)} \in R_2 : z_2^{(2)} \geq 0, z_3^{(2)} \geq 0\}$ alcanzan al conjunto R_1b .

Ahora considere el punto q_3z_2

$$q_3z_2 = \begin{pmatrix} \frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \\ \frac{3c\gamma - 23a\gamma}{30b} + \frac{2a\alpha}{3b} \\ \frac{\gamma}{10} \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Para verificar que la trayectoria que comienza en q_3z_2 no va a alcanzar SW_{23} cuando el radio forma un ángulo de $3\pi/2$ con el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$, consideremos el siguiente escenario exagerado: el tamaño del radio corresponde a una duración equivalente a $3\pi/2$ pero el componente $z_1^{(2)}$ corresponde a una duración equivalente a $\pi/2$ de oscilación, *i.e.* cuando el radio forma un ángulo de $3\pi/2$ con el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ se considera un radio mayor que el real, también, un valor menor de $z_1^{(2)}$ y por lo tanto un caso exagerado:

Luego para obtener el radio:

$$r = e^{a \frac{3\pi}{4b}} \sqrt{\left(\frac{3c\gamma - 23a\gamma}{30b} + \frac{2a\alpha}{3b} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{10} \right)^2}. \quad (4.90)$$

Buscamos el radio más grande y por lo tanto el caso más exagerado, bajo la Suposición 4.1.3:

$$e^{a\frac{3\pi}{4b}} \sqrt{\left(\frac{3c\gamma - 23a\gamma}{30b} + \frac{2a\alpha}{3b}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{10}\right)^2} \leq e^{a\frac{3\pi}{4b}} \sqrt{\left(\frac{3c\gamma - 23a\gamma}{30b}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{10}\right)^2}, \quad (4.91)$$

$$e^{a\frac{3\pi}{4b}} \sqrt{\left(\frac{3c\gamma}{30b} - \frac{23a\gamma}{30b}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{10}\right)^2} \leq e^{a\frac{3\pi}{4b}} \sqrt{\left(-\frac{1\gamma}{5} - \frac{23\gamma}{750}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{10}\right)^2}, \quad (4.92)$$

$$e^{a\frac{3\pi}{4b}} \sqrt{\left(-\frac{1\gamma}{5} - \frac{23\gamma}{750}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{10}\right)^2} = \gamma e^{a\frac{3\pi}{4b}} \sqrt{\left(-\frac{173}{750}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2}, \quad (4.93)$$

$$\gamma e^{a\frac{3\pi}{4b}} \sqrt{\left(-\frac{173}{750}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} \leq 0.3036\gamma. \quad (4.94)$$

El valor de $z_1^{(2)}$ después de una duración equivalente a $\pi/2$ está dado por

$$z_1^{(2)} = \left(\frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3}\right) e^{c\frac{\pi}{2b}}. \quad (4.95)$$

Pensando en un valor muy grande de γ con respecto a α y por lo tanto mayor distancia a lo largo del eje $z_1^{(2)}$ y bajo la Suposición 4.1.3

$$\left(\frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3}\right) e^{c\frac{\pi}{2b}} \leq \left(\frac{23\gamma}{15}\right) e^{c\frac{\pi}{2b}}, \quad (4.96)$$

$$\left(\frac{23\gamma}{15}\right) e^{c\frac{\pi}{2b}} \leq 0.17\gamma < \frac{\gamma}{5}. \quad (4.97)$$

En coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$, para un valor específico de $z_1^{(2)}$ SW_{23} satisface

$z_3^{(2)} = -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} + \frac{z_1^{(2)}}{2}$. En este ángulo de $3\pi/2$ el radio es $r = -z_3^{(2)}$. Entonces, si los valores encontrados para este escenario cumplen con la siguiente desigualdad, se puede concluir que la trayectoria con la condición inicial en q_3z_2 no alcanza SW_{23} después de una duración que corresponde a una oscilación de $\pi/2$:

$$-0.3036\gamma > -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} + 0.085\gamma, \quad (4.98)$$

para el peor caso

$$-0.3036\gamma > -\frac{18\gamma}{30} + 0.085\gamma = -0.515\gamma. \quad (4.99)$$

Entonces, la trayectoria permanece durante el tiempo que corresponde a $\pi/2$. Además, la trayectoria no alcanza SW_{23} cuando el radio está en un ángulo de $3\pi/2$ con el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ incluso cuando el crecimiento del radio es exagerado. Se puede

concluir que la trayectoria con condición inicial en q_3z_2 podría alcanzar SW_{23} hasta la segunda vez que se acerca a SW_{23} y alcanza R_1b .

Puesto que q_3z_2 es el punto en el conjunto $\{z^{(2)} \in R_2 : z_2^{(2)} \leq 0, \}$ que produce el mayor radio de ese conjunto, las trayectorias con condición inicial en este conjunto también alcanzan R_1b . Entonces, las trayectorias que comienzan en R_2 alcanzan R_1b .

Ahora para verificar que las trayectorias que comienzan en R_2 alcanzan $R_1 \subset R_1b$ es suficiente verificar las trayectorias que comienzan en el segmento $\overline{q_1z_2q_2z_2}$, ya que producen el radio más grande en R_1b .

Considere los puntos q_1z_2 y q_2z_2

$$q_1z_2 = \begin{pmatrix} \frac{17\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \\ \frac{3\gamma}{5} \\ \gamma \\ -\frac{\gamma}{10} \end{pmatrix}, \quad q_2z_2 = \begin{pmatrix} \frac{23\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \\ \frac{3\gamma}{5} \\ \frac{\gamma}{5} \\ \frac{\gamma}{10} \end{pmatrix}, \quad (4.100)$$

ambos puntos producen el mismo radio con un ángulo diferente, sin embargo, se espera más tiempo de oscilación antes de alcanzar SW_{23} de q_1z_2 . Por lo tanto, considere la trayectoria con condición inicial en q_1z_2 y el tiempo de evolución que corresponde a $3\pi/2 + 0.16515 = 4.87754$, que es un ángulo exagerado ya que se alcanza SW_{23} antes de eso.

$$r = e^{a \frac{4.87754}{b}} \sqrt{\left(\frac{3\gamma}{5}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{10}\right)^2} = \gamma e^{a \frac{4.87754}{b}} \sqrt{\frac{37}{100}}. \quad (4.101)$$

Bajo la Suposición 4.1.3

$$\gamma \sqrt{\frac{37}{100}} e^{a \frac{4.87754}{b}} \leq 0.7393\gamma. \quad (4.102)$$

Considere los puntos p_1z_2 , pa_1z_2 y p_2z_2

$$p_1z_2 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{5} \\ \frac{3\gamma}{5} \\ \frac{2\alpha}{3} - \frac{17\gamma}{30} \end{pmatrix}, \quad pa_1z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\gamma}{5} \\ -\frac{2(\gamma - \alpha)}{3} \end{pmatrix}, \quad p_2z_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{5} \\ \frac{3\gamma}{5} \\ \frac{2\alpha}{3} - \frac{23\gamma}{30} \end{pmatrix}. \quad (4.103)$$

En el segmento $\overline{pa_1z_2, pa_2z_2}$ el menor radio respecto a pa_2z_2 es el dado por el punto p_1z_2 :

$$r = \sqrt{\left(\frac{3\gamma}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha}{3} - \frac{17\gamma}{30}\right)^2}. \quad (4.104)$$

Bajo la Suposición 4.1.3:

$$\sqrt{\left(\frac{3\gamma}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha}{3} - \frac{17\gamma}{30}\right)^2} \geq \sqrt{\left(\frac{3\gamma}{5}\right)^2 + \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (4.105)$$

$$\gamma \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 0.781\gamma. \quad (4.106)$$

Como $0.7393\gamma < 0.781\gamma$ incluso cuando el incremento del radio fue exagerado, se puede concluir que las trayectorias con condición inicial en R_2 alcanzan R_1 o un atractor auto-excitado. Del mismo modo, las trayectorias con condición inicial en R_1 alcanzan R_2 o van a un atractor auto-excitado.

Para verificar la región para los parámetros $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$ y $\alpha = 1$ siete trayectorias se han simulado y se muestran en la Figura 4.10a para $\gamma = 10$ y $\gamma = 100$ en la Figura 4.10b.

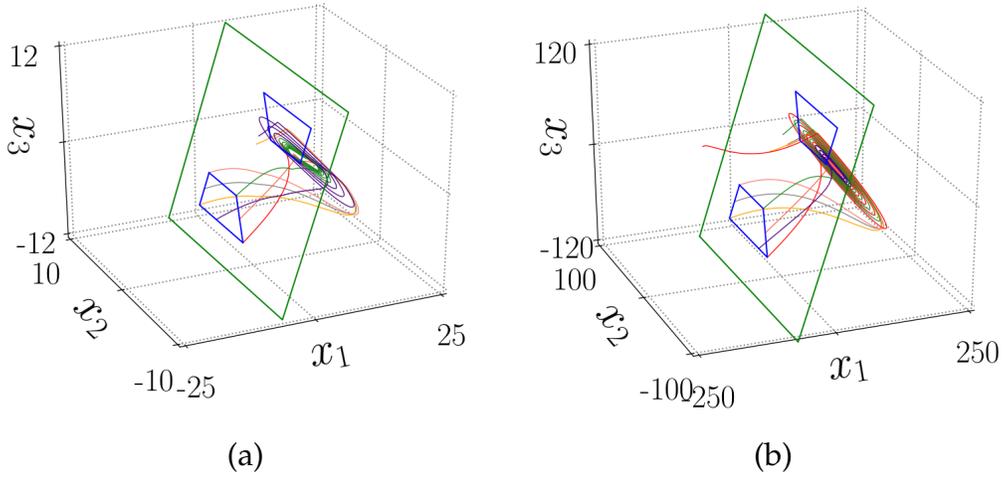


Figura 4.10: Siete trayectorias del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.25) empezando en R_1 con $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $\alpha = 1$ y diferentes valores de γ : (a) $\gamma = 10$ y (b) $\gamma = 100$.

Ahora considere dos conjuntos de condiciones iniciales en SW_{23} , I_1 e I_2 , de modo que los subconjuntos Cpa y Cpc de estos conjuntos producen trayectorias que terminan en uno de los atractores auto-excitados. Estos conjuntos están dibujados por círculos en la Figura 4.7.

Es fácil ver que si γ aumenta, entonces las regiones R_1 y R_2 crecen, pero los subconjuntos de condiciones iniciales en I_1 y I_2 que llegan a un atractor auto-excitado sin llegar a SW_{23} nuevamente se reducen. Veamos el sistema en las coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$, a medida que γ crece, SW_{23} y pcz_2 están más lejos de \mathbf{z}_{eq2}^* y entonces las trayectorias cercanas a pcz_2 tardan más en recorrer la dirección $z_1^{(2)}$ para acercarse a \mathbf{z}_{eq2}^* , sin embargo, la expansión a lo largo de $z_2^{(2)}$ y $z_3^{(2)}$ sigue siendo la misma, entonces los subconjuntos de condiciones iniciales que llegan a los atractores auto-excitados sin llegar a SW_{23} nuevamente se reduce en I_1 e I_2 pero nunca desaparecen. Como pc y pa pertenecen a R_1 y R_2 , respectivamente, siempre habrá una intersección de

estas regiones R_1 y R_2 con los subconjuntos de condiciones iniciales que llegan a los atractores auto-excitados en las regiones I_1 e I_2 .

Esto explica por qué a medida que se incrementa γ es fácil encontrar condiciones iniciales tales que las oscilaciones transitorias duren mucho. Entonces, para permitir la existencia de un atractor oculto, la intersección de las regiones R_1 y R_2 con los conjuntos dados por I_1 e I_2 debe estar vacía, *i.e.*, $Cpa \cap R_1 = \emptyset$ y $Cpc \cap R_2 = \emptyset$.

4.1.4 SURGIMIENTO DE ATRACTORES OCULTOS

Una forma de producir $Cpa \cap R_1 = \emptyset$ y $Cpc \cap R_2 = \emptyset$ y permitir la existencia de un atractor oculto es modificando la superficie de conmutación SW_{23} entre los dos atractores auto-excitados. Considere los siguientes planos de conmutación:

$$\begin{aligned} SW_{12} &= cl(P_1) \cup cl(P_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = -2\gamma, x_1 < 0\}, \\ SW_{23} &= cl(P_2) \cup cl(P_3) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}, \\ SW_{34} &= cl(P_3) \cup cl(P_4) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_3 = 2\gamma, x_1 > 0\}, \end{aligned} \quad (4.107)$$

Tenga en cuenta que la superficie de conmutación SW_{23} tiene una nueva ubicación, mientras que las superficies de conmutación SW_{12} y SW_{34} mantienen sus ubicaciones originales. Esta nueva disposición mantiene la existencia de los dos ciclos heteroclínicos y los atractores auto-excitados. Las nuevas proyecciones del sistema en las coordenadas x y z ⁽²⁾ se muestran en la Figura 4.11.

Para estudiar la aparición de un atractor oculto, se sigue el mismo procedimiento de la sección anterior.

Busquemos los puntos en SW_{23} donde el campo vectorial de P_2 y P_3 son tangentes al plano SW_{23} . Estos puntos se pueden encontrar en la siguiente ecuación:

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{a}{3} + \frac{2c}{3} & b & \frac{2c}{3} - \frac{2a}{3} \\ -\frac{b}{3} & a & \frac{2b}{3} \\ \frac{c}{3} - \frac{a}{3} & -b & \frac{2a}{3} + \frac{c}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_{eq_i} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_{eq_i} \frac{(a+2c)}{3} + bx_2 + \frac{2c-2a}{3}x_3 = 0, \quad (4.108)$$

$$x_2 = x_{eq_i} \frac{(a+2c)}{3b} - \frac{2c-2a}{3b}x_3, \text{ with } i = 1, 2, \quad (4.109)$$

entonces para el campo vectorial de P_2 tenemos la expresión:

$$x_2 = \frac{-(\gamma - \alpha)(a+2c)}{3b} - \frac{2c-2a}{3b}x_3. \quad (4.110)$$

Para el campo vectorial de P_3 la expresión es:

$$x_2 = \frac{(\gamma - \alpha)(a+2c)}{3b} - \frac{2c-2a}{3b}x_3. \quad (4.111)$$

Considere los puntos en $cl(W_{x_{eq_2}}^u \cap SW_{23})$ que satisfacen (4.110):

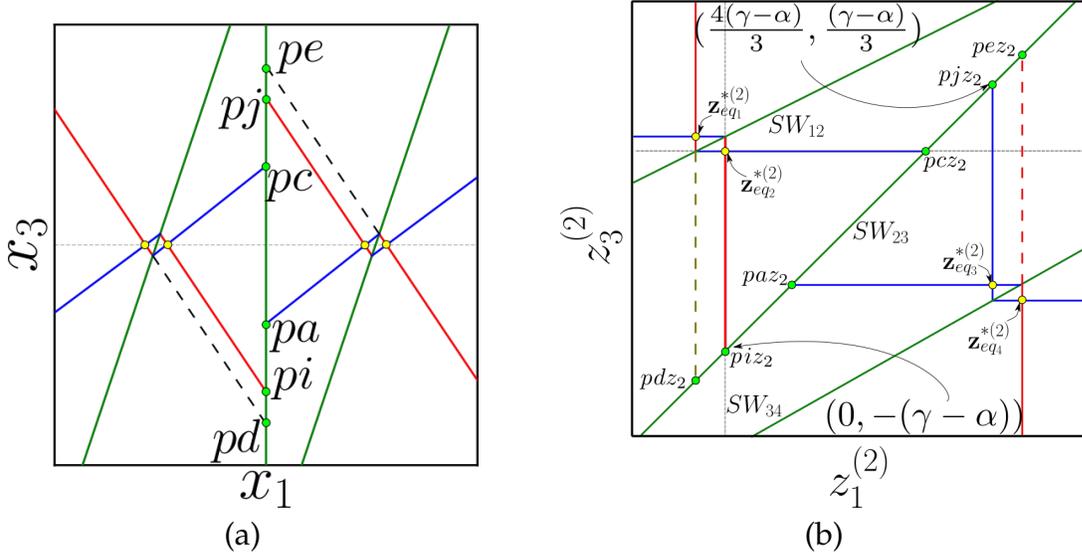


Figura 4.11: Proyección de las variedades en (a) (x_1, x_3) y (b) $(z_1^{(2)}, 1 - z_3^{(2)})$. Las variedades estable e inestable están marcadas con líneas continuas azules y rojas, respectivamente, las superficies de conmutación con líneas verdes.

$$pt_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a(\gamma-\alpha)}{b} \\ -(\gamma-\alpha) \end{pmatrix}, \quad (4.112)$$

y en coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$

$$pt_{1z_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a(\gamma-\alpha)}{b} \\ -(\gamma-\alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.113)$$

Si evaluamos la trayectoria con condición inicial en $x_0 = pt_{1z_2}$, bajo el campo vectorial de P_2 ignorando el efecto del campo vectorial de P_1 y P_3 , llega al punto $pt_{2z_2} \in SW_{23}$. El flujo φ puede escapar de P_2 a P_3 a través del segmento $pt_{1z_2}pt_{2z_2}$. Por lo tanto, las trayectorias con una condición inicial cercana a \mathbf{z}_{eq_2} y no en la variedad estable probablemente crucen SW_{23} cerca del segmento $pt_{1z_2}pt_{2z_2}$, entonces, R_1 debería incluir este segmento. Sin embargo, cuando se considera el campo vectorial de todos los átomos, las trayectorias con condiciones iniciales cercanas a pt_{1z_2} podrían alcanzar SW_{23} en puntos cuya segunda componente en las coordenadas $z^{(2)}$ están más lejos de 0 que la segunda componente en coordenadas $z^{(2)}$ de pt_{2z_2} . Esto nos permite proponer la región R_1 basada en un segmento más grande $pi_{1z_2}pi_{2z_2}$ de modo que $pt_{1z_2}pt_{2z_2} \subset pi_{1z_2}pi_{2z_2}$. Considere la condición inicial pi_{z_2} dada en coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$ por:

$$piz_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\gamma - \alpha) \end{pmatrix}, \quad (4.114)$$

entonces, el radio con respecto a $\mathbf{z}_{eq_2}^*$ sería $(\gamma - \alpha)$. Recuerde que sólo se considera el campo vectorial de P_2 y la trayectoria gira alrededor del eje $z_1^{(2)}$. Analicemos un caso imposible cuando la trayectoria con condición inicial en piz_2 alcanza SW_{23} con un incremento de radio que corresponde a $t = 2\pi/b$ (que equivale a 360°). Entonces, podríamos tomar $piz_2 = pt_1z_2$ y encontrar el componente $z_2^{(2)}$ de pi_1z_2 de:

$$\sqrt{(e^{a\frac{2\pi}{b}}(\gamma - \alpha))^2 - ((\gamma - \alpha))^2}. \quad (4.115)$$

Considere la Suposición 4.1.3, entonces:

$$\sqrt{(e^{a\frac{2\pi}{b}}(\gamma - \alpha))^2 - ((\gamma - \alpha))^2} \leq \gamma \sqrt{(e^{a\frac{2\pi}{b}})^2 - 1} \leq 0.80815\gamma \approx \frac{4\gamma}{5}. \quad (4.116)$$

Recuerde que $z_2^{(2)} = -x_2$, entonces, los puntos pi_1 y pi_2 están dados por

$$pi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4\gamma}{5} \\ -(\gamma - \alpha) \end{pmatrix}, \quad pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a(\gamma - \alpha)}{b} \\ -(\gamma - \alpha) \end{pmatrix}, \quad (4.117)$$

donde $-\frac{a(\gamma - \alpha)}{b}$ es la coordenada tangente dada por (4.110) para $x_3 = -(\gamma - \alpha)$.

Propongamos una región R_1 delimitada por los siguientes cuatro puntos:

$$\begin{aligned} p_1 &= pi_1 + \left(0, 0, \frac{\gamma}{5}\right)^T, \\ p_2 &= pi_1 - \left(0, 0, \frac{\gamma}{5}\right)^T, \\ p_3 &= pi_2 + \left(0, -\left(\frac{2c - 2a}{3b}\right) \left(-\frac{\gamma}{5}\right), -\frac{\gamma}{5}\right)^T, \\ p_4 &= pi_2 + \left(0, -\left(\frac{2c - 2a}{3b}\right) \left(\frac{\gamma}{5}\right), \frac{\gamma}{5}\right)^T. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Entonces, la región simétrica R_2 está delimitada por los puntos:

$$\begin{aligned} q_1 &= -p_1, \\ q_2 &= -p_2, \\ q_3 &= -p_3, \\ q_4 &= -p_4. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Las regiones R_1 y R_2 se han propuesto teniendo en cuenta que pd y pe son parte de las regiones y pa y pc no. En la Figura 4.12, R_1 y R_2 se muestran en las coordenadas

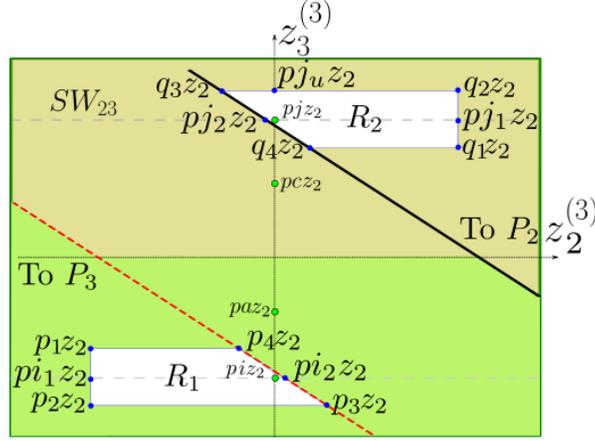


Figura 4.12: Regiones R_1 y R_2 en el plano $(z_2^{(2)}, z_3^{(2)})$.

$\mathbf{z}^{(2)}$. Los puntos en el sistema de coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$ tienen el sufijo z_2 , por ejemplo p_2 en $\mathbf{z}^{(2)}$ coordenadas es p_2z_2 .

El siguiente paso es verificar la validez de la región R_1 , ya que $p_1z_2 - p_i$ y $piz_2 - p_2z_2$ están dados por

$$p_1z_2 - p_i = \begin{pmatrix} \frac{2\gamma}{15} \\ \frac{4\gamma}{5} \\ -\frac{2\gamma}{15} \end{pmatrix}, \quad p_i - p_2z_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\gamma}{15} \\ \frac{4\gamma}{5} \\ \frac{2\gamma}{15} \end{pmatrix}, \quad (4.120)$$

definamos el conjunto R_1b de la siguiente manera:

$$R_1b = \left\{ \mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{R}^3 : z_1^{(2)} \in \left[-\frac{2\gamma}{15}, \frac{2\gamma}{15} \right] \right\}. \quad (4.121)$$

Primero, verifiquemos que los puntos en R_2 vayan a R_1b . La evaluación del campo vectorial en $p_{j1}z_2$ nos dice que el giro es en sentido antihorario en las coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$.

Considere el punto q_2z_2 dado por:

$$q_2z_2 = \begin{pmatrix} \frac{22\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \\ \frac{4\gamma}{5} \\ \frac{7\gamma}{15} - \frac{\alpha}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.122)$$

El ángulo producido por el radio desde el punto q_2z_2 hasta el eje $z_1(2)$ y el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ está dado por:

$$\arctan \left(\frac{\frac{7\gamma}{15} - \frac{\alpha}{3}}{\frac{4\gamma}{5}} \right) = \arctan \left(\frac{7}{12} - \frac{5\alpha}{12\gamma} \right). \quad (4.123)$$

Bajo la Suposición 4.1.3 el ángulo obedece la siguiente desigualdad

$$\arctan \left(\frac{7}{12} - \frac{5\alpha}{12\gamma} \right) \leq \arctan \left(\frac{7}{12} \right) \leq 0.52807. \quad (4.124)$$

Considere entonces que la trayectoria con la condición inicial en q_2z_2 evoluciona por una duración que corresponde a $\pi - 0.52807 = 2.61352$. Si después de esta duración, el primer componente del vector de estado $z_1^{(2)} \leq 2\gamma/15$ significa que la trayectoria con la condición inicial en q_2z_2 alcanza R_1b . Después de esta duración $z_1^{(2)}$ está dado por

$$z_1^{(2)} = \left(\frac{22\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \right) e^{c \frac{2.61352}{b}}. \quad (4.125)$$

Bajo la Suposición 4.1.3 para un valor grande de $z_1^{(2)}$:

$$\left(\frac{22\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \right) e^{c \frac{2.61352}{b}} \leq \left(\frac{22\gamma}{15} \right) e^{c \frac{2.61352}{b}} \leq 0.0378\gamma < \frac{2\gamma}{15}. \quad (4.126)$$

Por lo tanto, q_2z_2 alcanza la región R_1b . Además, dado que los puntos en el segmento $\overline{q_2z_2q_1z_2}$ producen un radio cuyo ángulo con el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ está entre 0 y 0.52807 las trayectorias con condición inicial en este segmento también alcanzan el conjunto R_1b .

Ahora considere el punto q_3z_2

$$q_3z_2 = \left(\frac{\frac{22\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3}}{\frac{15b}{7\gamma - 5\alpha} + \frac{a\alpha}{b}} \right). \quad (4.127)$$

El ángulo del radio en q_3z_2 con el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ es

$$- \arctan \left(\frac{\frac{2c\gamma - 17a\gamma}{15b} + \frac{a\alpha}{b}}{\frac{7\gamma - 5\alpha}{15}} \right) = - \arctan \left(\frac{2c\gamma - 17a\gamma + 15a\alpha}{7b\gamma - 5b\alpha} \right). \quad (4.128)$$

Bajo la Suposición 4.1.3 el ángulo debe ser menor que:

$$- \arctan \left(\frac{2c\gamma - 17a\gamma + 15a\alpha}{7b\gamma - 5b\alpha} \right) \leq - \arctan \left(\frac{2c}{6.5b} - \frac{17a}{6.5b} + \frac{1.5a}{6.5b} \right). \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} & - \arctan \left(\frac{2c}{6.5b} - \frac{17a}{6.5b} + \frac{1.5a}{6.5b} \right) \leq \\ & - \arctan \left(\frac{4}{6.5} - \frac{17}{6.5(25)} + \frac{1.5}{6.5(25)} \right) = 0.61785. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Para verificar que la trayectoria que comienza en q_3z_2 no va a alcanzar SW_{23} cuando el radio forma un ángulo de $3\pi/2$ con el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$, consideremos el siguiente escenario exagerado: el tamaño del radio corresponde a una duración equivalente a 3.49066 pero la componente $z_1^{(2)}$ corresponde a una duración equivalente a 2.0944 de oscilación, *i.e.* cuando el radio forma un ángulo de $3\pi/2$ con el plano $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ un radio mayor que el real se considera, también, un valor de $z_1^{(2)}$ menor al valor real es considerado.

Luego para obtener el radio:

$$r = e^{a \frac{3.49066}{b}} \sqrt{\left(\frac{2c\gamma - 17a\gamma}{15b} + \frac{a\alpha}{b} \right)^2 + \left(\frac{7\gamma - 5\alpha}{15} \right)^2}. \quad (4.131)$$

Bajo la Suposición 4.1.3 para el radio más grande

$$e^{a \frac{3.49066}{b}} \sqrt{\left(\frac{2c\gamma - 17a\gamma}{15b} + \frac{a\alpha}{b} \right)^2 + \left(\frac{7\gamma - 5\alpha}{15} \right)^2} \leq e^{a \frac{3.49066}{b}} \sqrt{\left(\frac{2c\gamma - 17a\gamma}{15b} \right)^2 + \left(\frac{7\gamma}{15} \right)^2}, \quad (4.132)$$

$$e^{a \frac{3.49066}{b}} \gamma \sqrt{\left(\frac{2c - 17a}{15b} \right)^2 + \left(\frac{7}{15} \right)^2} \leq 0.5984\gamma. \quad (4.133)$$

El valor de $z_1^{(2)}$ después de la duración que corresponde a 2.0944 es:

$$\left(\frac{22\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \right) e^{c \frac{2.0944}{b}}. \quad (4.134)$$

Bajo la Suposición 4.1.3 para el mayor valor de $z_1^{(2)}$

$$\left(\frac{22\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \right) e^{c \frac{2.0944}{b}} \leq \left(\frac{22\gamma}{15} \right) e^{c \frac{2.0944}{b}}, \quad (4.135)$$

$$\left(\frac{22\gamma}{15} \right) e^{c \frac{2.0944}{b}} \leq 0.07814\gamma < \frac{2\gamma}{15}. \quad (4.136)$$

Los puntos en SW_{23} cumplen la siguiente ecuación:

$$z_3^{(2)} = -(\gamma - \alpha) + z_1^{(2)}. \quad (4.137)$$

En este ángulo de $3\pi/2$ el radio es $r = -z_3^{(2)}$. Entonces, si los valores encontrados para este escenario cumplen la siguiente desigualdad, se puede concluir que la trayectoria con la condición inicial en q_3z_2 no alcanza SW_{23} después de una duración que corresponde a una oscilación de 2.0944:

$$-.5984\gamma > -(\gamma - \alpha) + 0.07814\gamma, \quad (4.138)$$

bajo la Suposición 4.1.3 y el peor caso

$$-.5984\gamma > -\frac{9\gamma}{10} + 0.07814\gamma = -0.82186\gamma. \quad (4.139)$$

Entonces, la trayectoria permanece durante el tiempo que corresponde a 2.0944. Además, como $z_1^{(2)} < 2\gamma/15$ la trayectoria alcanza R_1b .

Como q_3z_2 es el punto en el conjunto $\{z^{(2)} \in R_2 : z_2^{(2)} \leq 0\}$ que produce el radio más grande de ese conjunto, la misma conclusión se aplica a los puntos en este conjunto.

Para las trayectorias con condición inicial en el conjunto $\{z^{(2)} \in R_2 : z_2^{(2)} > 0\}$ la duración es el equivalente a más de 2.0944. Por lo tanto, las trayectorias que comienzan en R_2 alcanzan el conjunto R_1b .

Ahora para verificar que las trayectorias que comienzan en R_2 alcanzan $R_1 \subset R_1b$ es suficiente para verificar las trayectorias que comienzan en el segmento $\overline{q_1z_2q_2z_2}$, ya que producen el radio más grande en R_1b .

Considere los puntos q_1z_2 y q_2z_2

$$q_1z_2 = \begin{pmatrix} \frac{6\gamma}{5} - \frac{4\alpha}{3} \\ \frac{4\gamma}{5} \\ \frac{\gamma}{5} - \frac{\alpha}{3} \end{pmatrix}, \quad q_2z_2 = \begin{pmatrix} \frac{22\gamma}{15} - \frac{4\alpha}{3} \\ \frac{4\gamma}{5} \\ \frac{7\gamma}{15} - \frac{\alpha}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.140)$$

El radio más grande está en q_2z_2 mientras que el ángulo más pequeño está en q_1z_2 , entonces consideremos ese radio de q_2z_2 con el ángulo de q_1z_2 y la posición final en $3\pi/2$ con respecto al plano $z_1^{(2)} - z_2^{(2)}$, que es más que la posible rotación. El ángulo está dado por

$$\arctan\left(\frac{\frac{\gamma}{5} - \frac{\alpha}{3}}{\frac{4\gamma}{5}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{4} - \frac{5\alpha}{12\gamma}\right). \quad (4.141)$$

Bajo la Suposición 4.1.3 el ángulo más pequeño es

$$\arctan\left(\frac{1}{4} - \frac{5\alpha}{12\gamma}\right) \geq \arctan\left(\frac{5}{24}\right) = 0.20539, \quad (4.142)$$

así para $3\pi/2 - 0.20539 = 4.507$

$$\sqrt{\left(\frac{4\gamma}{5}\right)^2 + \left(\frac{7\gamma}{15} - \frac{\alpha}{3}\right)^2} e^{a\frac{4.507}{b}}. \quad (4.143)$$

Bajo la Suposición 4.1.3 para el radio más grande

$$\sqrt{\left(\frac{4\gamma}{5}\right)^2 + \left(\frac{7\gamma}{15} - \frac{\alpha}{3}\right)^2} e^{a\frac{4.507}{b}} \leq \sqrt{\left(\frac{4\gamma}{5}\right)^2 + \left(\frac{7\gamma}{15}\right)^2} e^{a\frac{4.507}{b}}, \quad (4.144)$$

$$\sqrt{\left(\frac{4\gamma}{5}\right)^2 + \left(\frac{7\gamma}{15}\right)^2} e^{a\frac{4.507}{b}} \leq \gamma \sqrt{\frac{193}{225}} e^{a\frac{4.507}{b}} \leq 1.1091\gamma. \quad (4.145)$$

Considere los puntos p_1z_2 , pa_1z_2 y p_2z_2

$$p_1z_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\gamma}{15} \\ \frac{4\gamma}{5} \\ \alpha - \frac{13\gamma}{15} \end{pmatrix}, \quad pa_1z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4\gamma}{5} \\ \alpha - \gamma \end{pmatrix}, \quad p_2z_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2\gamma}{15} \\ \frac{4\gamma}{5} \\ \alpha - \frac{17\gamma}{15} \end{pmatrix}. \quad (4.146)$$

El radio mínimo en el segmento. $\overline{pa_1z_2}, \overline{pa_2z_2}$ es

$$\sqrt{\left(\frac{4\gamma}{5}\right)^2 + \left(\alpha - \frac{13\gamma}{15}\right)^2}. \quad (4.147)$$

Bajo las Suposiciones 4.1.3 para el radio más pequeño:

$$\sqrt{\left(\frac{4\gamma}{5}\right)^2 + \left(\alpha - \frac{13\gamma}{15}\right)^2} \geq \sqrt{\left(\frac{4\gamma}{5}\right)^2 + \left(\frac{23\gamma}{30}\right)^2} = 1.1081\gamma. \quad (4.148)$$

$1.1092\gamma \approx 1.1081\gamma$, incluso cuando el ángulo de rotación fue exagerado, se puede concluir que las trayectorias con la condición inicial en R_1 alcanzan R_2 o un atractor auto-excitado. Del mismo modo, las trayectorias con condición inicial en R_2 alcanzan R_1 o van a un atractor auto-excitado.

Veamos el sistema en las coordenadas $\mathbf{z}^{(2)}$, como en la sección anterior con las superficies de conmutación anteriores, a medida que γ crece, SW_{23} y pcz_2 está más lejos de \mathbf{z}_{eq2}^* y entonces toma más tiempo para que las trayectorias cercanas a pcz_2 viajen a lo largo de la dirección $z_1^{(2)}$ para acercarse a \mathbf{z}_{eq2}^* , sin embargo, la expansión a lo largo de $z_2^{(2)}$ y $z_3^{(2)}$ permanece igual, entonces los subconjuntos de condiciones iniciales que llegan a los atractores auto-excitados sin llegar a SW_{23} nuevamente se reducen en I_1 e I_2 pero esta vez, a diferencia del caso anterior, existe un valor de γ tal que la intersección desaparece.

Entonces, para un valor suficientemente grande de γ tenemos una región R_1 de tal manera que cualquier trayectoria que comience allí sigue cruzando R_1 por $t > 0$. Entonces, podemos pensar en la posible existencia de una órbita periódica, un ciclo límite oculto, un atractor caótico oculto o una combinación de lo anterior, que debería pasar por R_1 y R_2 . Además, como las pequeñas diferencias en las condiciones iniciales en R_1 podrían producir una gran separación de trayectorias en SW_{23} , también se podría esperar sensibilidad a las condiciones iniciales, sin embargo, la prueba formal está fuera del alcance de este trabajo.

Para verificar la región para los parámetros $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $\alpha = 1$ y $\gamma = 10$ siete trayectorias se han simulado y se muestran en la Figura 4.13a.

Los experimentos de simulación verifican la conjetura sobre la aparición del atractor oculto. En la Figura 4.13b se muestra el atractor oculto para los parámetros

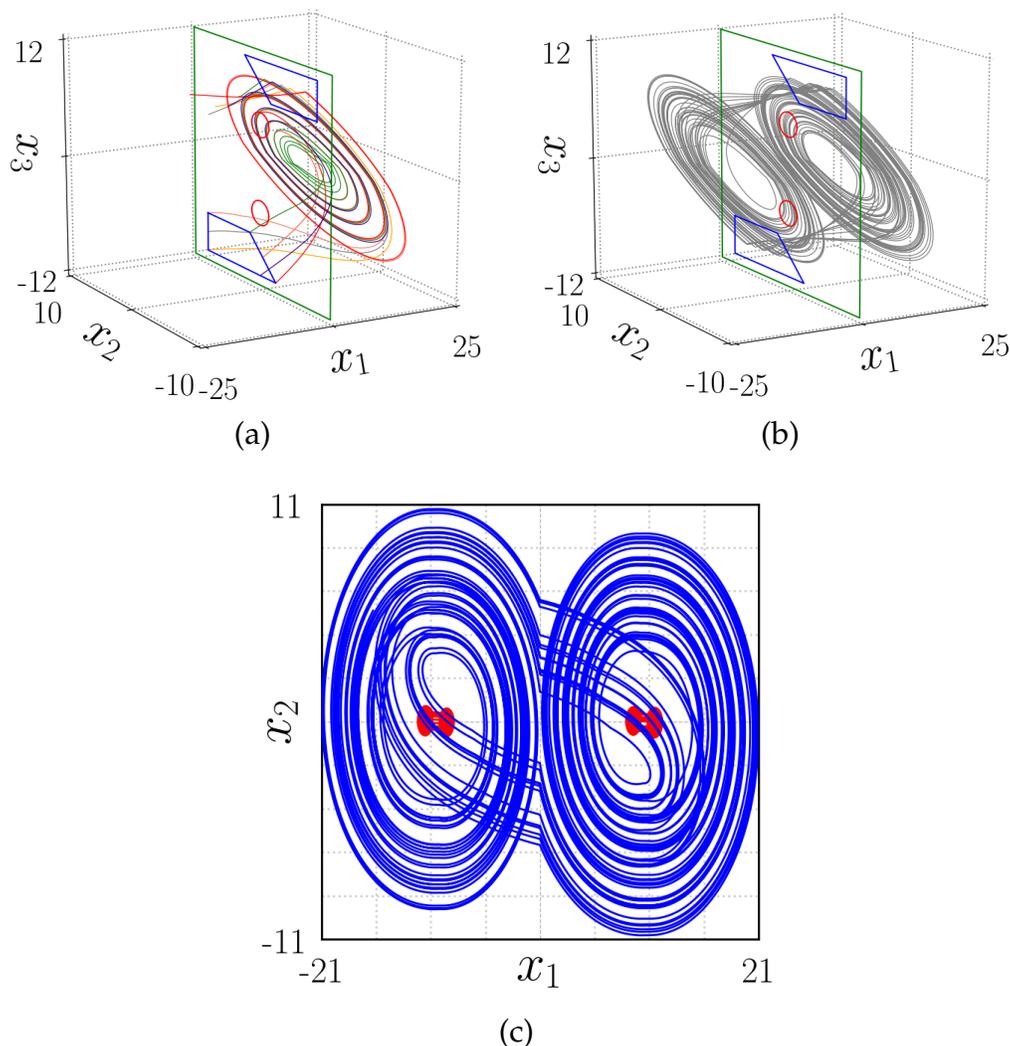


Figura 4.13: En (a) siete trayectorias del sistema dado por (4.1), (4.2), (4.4), (4.23) y (4.107) empezando en R_1 con $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $\alpha = 1$ y $\gamma = 10$. En (b) el atractor oculto para los mismos parámetros y la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$ para $t \in [50000, 50100]$. En (c) la proyección de los atractores auto-excitados y el atractor oculto proyectado en el plano (x_1, x_2) .

$a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $\alpha = 1$ y $\gamma = 10$ y la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T$ para $t \in [50000, 50100]$. En la Figura 4.13c se muestra la proyección del atractor oculto y los dos atractores auto-excitados en el plano (x_1, x_2) para los mismos parámetros.

4.1.5 COMENTARIOS FINALES

En esta sección se estudió un enfoque para la generación de atractores multienroscados basado en órbitas heteroclínicas. Particularmente, presentamos un atractor

auto-excitado de cuatro enroscados que se divide en dos atractores auto-excitados de doble enroscado, por lo que el sistema se bifurca de monoestabilidad a biestabilidad. El enfoque se basa en la coexistencia de atractores auto-excitados de doble enroscado que rodean los puntos de equilibrio y presentan órbitas heteroclínicas. El aumento de las distancias entre los atractores auto-excitados de doble enroscado genera una órbita de tipo heteroclínico entre los puntos de equilibrio de dos atractores auto-excitados de doble enroscado diferentes. Es posible generar atractores ocultos rodeando atractores auto-excitados al romper la órbita de tipo heteroclínico. El estudio reveló una relación entre la existencia de un atractor oculto y las trayectorias que se parecen a las órbitas heteroclínicas a mayor escala que se unen a los atractores auto-excitados. Los hallazgos sugieren que se pueden diseñar nuevas clases de sistemas multiestables con diferentes números de atractores auto-excitados y ocultos con un enfoque geométrico.

4.2 GENERACIÓN DE ATRACTORES OCULTOS TIPO REJILLA

En esta sección se retoma teoría desarrollada en el capítulo 4.1 y se propone un enfoque para la construcción de un sistema PWL que exhibe un atractor oculto tipo rejilla.

Considere un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ cuya dinámica está dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - AB(\mathbf{x}), \quad (4.149)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado, $A = \{\alpha_{ij}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es el operador lineal dado por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} + \frac{2c}{3} & b & \frac{2c}{3} - \frac{2a}{3} \\ -\frac{b}{3} & a & \frac{2b}{3} \\ \frac{c}{3} - \frac{a}{3} & -b & \frac{2a}{3} + \frac{c}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.150)$$

$AB(x)$ es un vector constante en cada átomo P_i . El punto de equilibrio de ensilladura de cada átomo está dado por $\mathbf{x}_{eq_i}^* = (x_{1eq_i}^*, x_{2eq_i}^*, x_{3eq_i}^*)^T = -B(\mathbf{x})$, con $i = 1, \dots, \eta$. $B(\mathbf{x})$ es una función de valor vectorial definida como:

$$B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha g(2(x_1 - f_1(x_1)) - x_3, x_3) + f_1(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.151)$$

donde

$$f_1(x_1) = \sum_{j=1}^{N_{x_1}} \gamma u(x_1 + 2\gamma(j-1) - \gamma(N_{x_1} - 1)). \quad (4.152)$$

Los parámetros α y γ satisfacen la siguiente suposición:

Suposición 4.2.1. *La distancia entre los atractores auto-excitados debería ser lo suficientemente grande como para permitir la existencia de un atractor oculto de doble enroscado, por lo que consideramos $\frac{\gamma}{\alpha} \geq 10$.*

La función $u(y)$ es la función escalón heaviside:

$$u(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \geq 0; \\ -1, & \text{si } y < 0; \end{cases} \quad (4.153)$$

y g es una función escalón definida como sigue:

$$g(y, z) = \begin{cases} 1, & \text{si } y > 0 \text{ y } z \geq 0; \\ -1, & \text{si } y \leq 0 \text{ y } z \geq 0; \\ 1, & \text{si } y \geq 0 \text{ y } z < 0; \\ -1, & \text{si } y < 0 \text{ y } z < 0. \end{cases} \quad (4.154)$$

Note que $g(y, z)$ es igual a $u(y)$ cuando $z < 0$ mientras que para $z \geq 0$ es similar a $u(y)$ con la única diferencia de que 0 es mapeado a 1 en lugar de -1 .

Para comprender la forma de $B(\mathbf{x})$ es útil separar B_1 y analizar el efecto de cada término de la suma, *i.e.* el efecto del término $\alpha g(2(x_1 - f_1(x_1)) - x_3, x_3)$ y el efecto de $f_1(x_1)$.

Primero, considere la función $f_1(x_1)$ cuya gráfica se asemeja a una escalera centrada en el origen cuyos escalones son de 2γ en altura y ancho. En la Figura 4.14 se muestran dos ejemplos para $N_{x_1} = 3$ y $N_{x_1} = 6$. Por lo tanto, $f_1(x_1)$ genera N_{x_1} planos de conmutación de la forma $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \epsilon \in \mathbb{R} : x_1 = \epsilon\}$ que son paralelos al plano (x_2, x_3) . Entonces $f_1(x)$ genera una partición $R = \{R_1, \dots, R_{N_{x_1}+1}\}$ de X . Ahora considere el término $\alpha g(2(x_1 - f_1(x_1)) - x_3, x_3)$, este término genera un plano de conmutación $\{\mathbf{x} \in R_i : 2(x_1 - f_1(x_1)) - x_3 = 0\}$ para $i = 1, \dots, N_x + 1$. Como $f_1(x_1)$ toma $N_{x_1} + 1$ valores, entonces $\alpha g(2(x_1 - f_1(x_1)) - x_3, x_3)$ genera $N_{x_1} + 1$ planos de conmutación, uno para cada elemento de la partición R . Por lo tanto, los elementos R_i se dividen y se genera la partición $P = \{P_1, \dots, P_{2N_{x_1}+2}\}$. De esta manera, $B(\mathbf{x})$ localiza dos puntos de equilibrio con una separación de 2α en el medio de cada elemento R_i (a lo largo del eje x_1) para $i = 1, \dots, N_{x_1} + 1$. En la partición P , $B(\mathbf{x})$ localiza un punto de equilibrio en cada P_i para $i = 1, \dots, 2N_{x_1} + 2$.

Por lo tanto, los puntos de equilibrio a lo largo del eje x_1 se ubican en N_{x_1} pares, cada par de puntos de equilibrio cercanos tienen una separación de 2α . Denotemos el punto medio de la línea que une un par μ de puntos de equilibrio cercanos como cp_μ con $\mu = 1, \dots, (N_{x_1} + 1)$. Entonces, la distancia de cp_i a cp_{i+1} es 2γ . El propósito de esta distribución para los puntos de equilibrio es permitir la existencia de atractores auto-excitados de doble enroscado que estén lo suficientemente separados de otros atractores auto-excitados de doble enroscado. De esta manera se parecerán a los puntos de equilibrio para la generación de un atractor enroscado más grande en una escala mayor. Este atractor enroscado más grande es, de hecho, el atractor enroscado oculto.

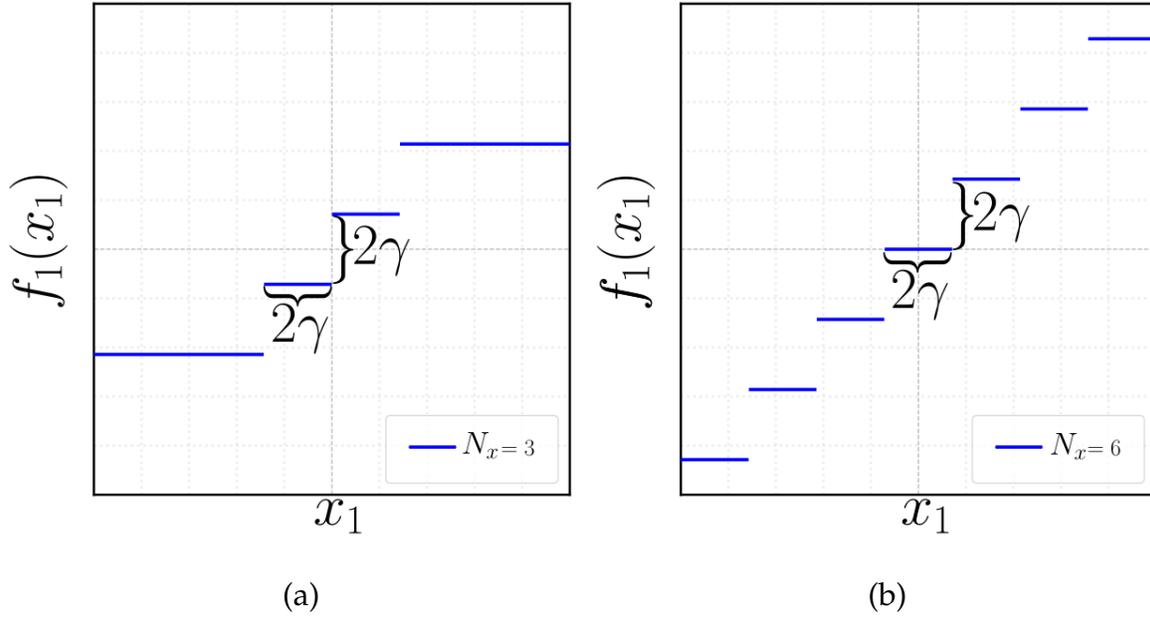


Figura 4.14: La gráfica de la función $f_1(x_1)$ para (a) $N_{x_1} = 3$ y (b) $N_{x_1} = 6$.

Los puntos de equilibrio se ubican a lo largo del eje x_1 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 x_{1eq_1}^* &= (0)2\gamma - \gamma(N_{x_1}) - \alpha, & x_{1eq_2}^* &= (0)2\gamma - \gamma(N_{x_1}) + \alpha, \\
 x_{1eq_3}^* &= (1)2\gamma - \gamma(N_{x_1}) - \alpha, & x_{1eq_4}^* &= (1)2\gamma - \gamma(N_{x_1}) + \alpha, \\
 x_{1eq_5}^* &= (2)2\gamma - \gamma(N_{x_1}) - \alpha, & x_{1eq_6}^* &= (2)2\gamma - \gamma(N_{x_1}) + \alpha, \\
 \vdots & & \vdots & \\
 x_{1eq_{2N_{x_1}-1}}^* &= (N_{x_1} - 1)2\gamma - \gamma(N_{x_1}) - \alpha, & x_{1eq_{2N_{x_1}}}^* &= (N_{x_1} - 1)2\gamma - \gamma(N_{x_1}) + \alpha, \\
 x_{1eq_{2N_{x_1}+1}}^* &= (N_{x_1})2\gamma - \gamma(N_{x_1}) - \alpha, & x_{1eq_{2N_{x_1}+2}}^* &= (N_{x_1})2\gamma - \gamma(N_{x_1}) + \alpha.
 \end{aligned} \tag{4.155}$$

Los planos de conmutación ubicados en el medio de los atractores autoexcitados se dan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 SW_{1,2} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2(x_1 - (x_{1eq_1}^* + \alpha)) - x_3 = 0, x_1 < x_{1eq_2}^* + (\gamma - \alpha)\}, \\
 SW_{3,4} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2(x_1 - (x_{1eq_3}^* + \alpha)) - x_3 = 0, x_{1eq_3}^* - (\gamma - \alpha) \leq x_1 < x_{1eq_4}^* + (\gamma - \alpha)\}, \\
 \vdots & \\
 SW_{2N_{x_1}+1, 2N_{x_1}+2} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2(x_1 - (x_{1eq_{N_{x_1}+1}}^* + \alpha)) - x_3 = 0, x_{1eq_{2N_{x_1}+1}}^* - (\gamma - \alpha) \leq x_1\}.
 \end{aligned} \tag{4.156}$$

El resto de las superficies de conmutación son:

$$\begin{aligned}
 SW_{2,3} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x = x_{1eq_2}^* + (\gamma - \alpha)\}, \\
 SW_{4,5} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x = x_{1eq_4}^* + (\gamma - \alpha)\}, \\
 &\vdots \\
 SW_{2N_{x_1}-2, 2N_{x_1}-1} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x = x_{1eq_{2N_{x_1}-2}}^* + (\gamma - \alpha)\}, \\
 SW_{2N_{x_1}, 2N_{x_1}+1} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x = x_{1eq_{2N_{x_1}}}^* + (\gamma - \alpha)\}.
 \end{aligned} \tag{4.157}$$

Para ilustrar la construcción, considere los parámetros $a = 0.2, b = 5, c = -7$ y $N_{x_1} = 1$, el sistema presenta dos atractores auto-excitados y un atractor oculto de doble enroscado que se muestra en la Figura 4.15a. Para un segundo ejemplo, considere $N_{x_1} = 4$, entonces, el sistema presenta cinco atractores auto-excitados y un atractor oculto de 5 enroscados que se muestra en la Figura 4.15b. Por lo tanto, el número de enroscados es igual al número de atractores auto-excitados que es $N_{x_1} + 1$.

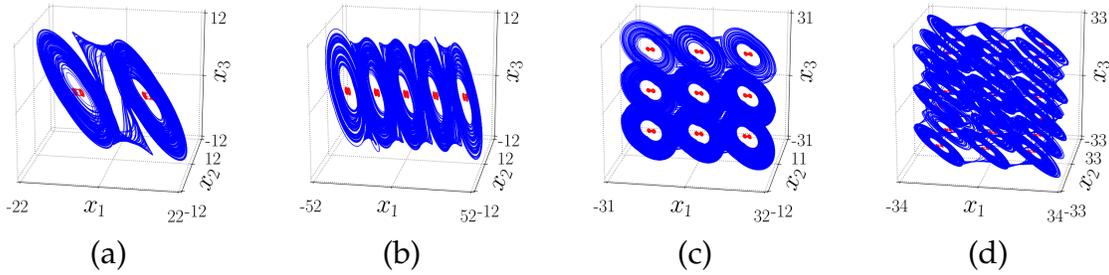


Figura 4.15: Simulación del atractor oculto (en azul) y el atractor auto-excitado (en rojo) exhibidos por el sistema (4.149) con los parámetros $a = 0.2, b = 5, c = -7$. En (a) y (b) $B(\mathbf{x})$ está dado por (4.151) con $N_{x_1} = 1$ y $N_{x_1} = 4$, respectivamente. En (c) $B(\mathbf{x})$ está dado por (4.158) con $E_2 = 0, E_3 = 1, N_{x_1} = 2$ y $N_{x_3} = 2$. En (d) $B(\mathbf{x})$ está dado por (4.158) con $E_2 = 1, E_3 = 1, N_{x_1} = 2, N_{x_2} = 2, N_{x_3} = 2$ y $w = 0.2$.

4.2.1 EXTENSIÓN PARA ATRACTORES OCULTOS REJILLAS TIPO 2D Y 3D

El enfoque anterior puede extenderse aún más para atractores en rejillas 2D y 3D. La idea es agregar superficies de conmutación que sean paralelas a los planos (x_1, x_2) y (x_1, x_3) . Esto requiere la modificación en $B(\mathbf{x})$, por simplicidad, las funciones $f_i(\cdot)$ se escriben como f_i :

$$B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_4 + f_1 - \frac{wf_2}{\gamma} \\ f_2 \\ f_3 + \frac{wf_2}{\gamma} \end{pmatrix}, \tag{4.158}$$

donde

$$f_2 = E_2 \left(\sum_{k=1}^{N_{x_2}} \gamma u(x_2 + 2\gamma(k-1) - \gamma(N_{x_2} - 1)) \right), \quad (4.159)$$

$$f_3 = E_3 \left(\sum_{l=1}^{N_{x_3}} \gamma u\left(x_3 - \frac{wf_2}{\gamma} + 2\gamma(l-1) - \gamma(N_{x_3} - 1)\right) \right), \quad (4.160)$$

$$f_1 = \sum_{j=1}^{N_{x_1}} \gamma u\left(x_1 + \frac{wf_2}{\gamma} + 2\gamma(j-1) - \gamma(N_{x_1} - 1)\right), \quad (4.161)$$

$$f_4 = \alpha g\left(2\left(x_1 + \frac{wf_2}{\gamma} - f_1\right) - \left(x_3 - \frac{wf_2}{\gamma} - f_3\right), \left(x_3 - \frac{wf_2}{\gamma} - f_3\right)\right), \quad (4.162)$$

donde $w \geq 0$ y $E_2, E_3 \in \{0, 1\}$. Si $E_2 = 1$ se tendrán enrosados a lo largo de x_2 y si $E_3 = 1$ se tendrán enrosados a lo largo de x_3 . El arreglo de enrosados del atractor rejilla está dado por $(N_{x_1} + 1) \times (E_2 N_{x_2} + 1) \times (E_3 N_{x_3} + 1)$.

Denotemos los puntos de equilibrio encontrados anteriormente como $\mathbf{x}_{eq_j}^{*1D} = (x_{1eq_j}^{*1D}, x_{2eq_j}^{*1D}, x_{3eq_j}^{*1D})^T$ para $j = 1, \dots, 2N_{x_1} + 2$. Entonces los nuevos puntos de equilibrio para el nuevo $B(\mathbf{x})$ en (4.158) son encontrados de:

$$\mathbf{x}_{jkl}^{*3D} = \mathbf{x}_{eq_j}^{*1D} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (E_3 l)2\gamma - \gamma N_{x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (E_2 k)2\gamma - \gamma N_{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{wf_2(y)}{\gamma} \\ 0 \\ \frac{wf_2(y)}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (4.163)$$

donde $k = 1, \dots, 2N_{x_2} + 2$ y $l = 1, \dots, 2N_{x_3} + 2$. Las superficies de conmutación ahora están restringidas en x_2 y x_3 y se ubican de acuerdo con los nuevos puntos de equilibrio.

Como ejemplo, considere los parámetros $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7$, $w = 0.2$ con $E_2 = 0$, $E_3 = 1$, $N_{x_1} = 2$ y $N_{x_3} = 2$ para un atractor oculto tipo rejilla 2D que se muestra en la Figura 4.15c y $E_2 = 1$, $E_3 = 1$, $N_{x_1} = 2$, $N_{x_2} = 2$ y $N_{x_3} = 2$ para un atractor oculto tipo rejilla 3D que se muestra en la Figura 4.15d.

El máximo exponente de Lyapunov ha sido calculado para este último atractor tipo rejilla 3D como $\lambda = 0.273$ usando el algoritmo propuesto por Rosenstein [30], La gráfica usada en el algoritmo se presenta en la Figura 4.16.

4.2.2 COMENTARIOS FINALES

En esta sección se presentó un enfoque para la construcción de sistemas con atractores ocultos multienrosados de manera generalizada. También presentó una extensión generalizada de atractores ocultos tipo rejilla. Estos sistemas particulares obtenidos son sistemas multiestables con una complejidad mayor a las rejillas convencionales y con potencial para aplicaciones de comunicación privada.

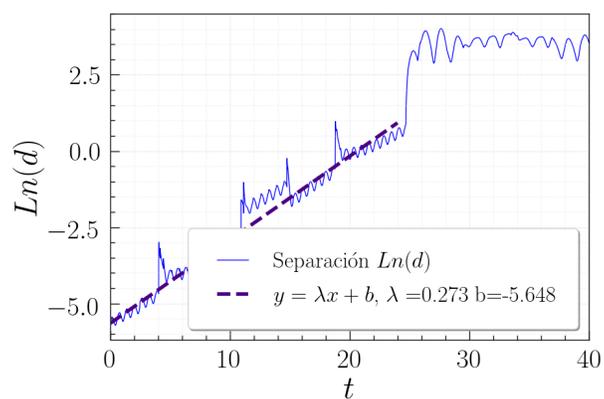


Figura 4.16: Gráfica para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov del atractor oculto tipo rejilla del sistema dado por (4.149) y (4.158) con los parámetros $a = 0.2$, $b = 5$, $c = -7 B(\mathbf{x})$, $E_2 = 1$, $E_3 = 1$, $N_{x_1} = 2$, $N_{x_2} = 2$, $N_{x_3} = 2$ y $w = 0.2$ para la condición inicial $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$.

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

- Es posible el diseño de sistemas con atractores ocultos multienroscados y tipo rejilla usando sistemas lineales por partes relativamente simples.
- Es posible obtener atractores hipercaóticos ocultos en sistemas sin puntos de equilibrio mediante el acoplamiento de sistemas tridimensionales con atractores caóticos ocultos.
- En sistemas biestables con dos atractores de doble enroscados auto-excitados la existencia de un tercer atractor oculto no depende solo de la separación simétrica de estos atractores sino también de asegurar la ausencia de trayectorias que asemejen órbitas heteroclínicas a gran escala.
- En sistemas multiestables con atractores de doble enroscado auto-excitados es posible obtener atractores ocultos multienroscados o tipo rejilla siempre y cuando se cuide la ubicación de los atractores auto-excitados y la ausencia de las órbitas que asemejan orbitas heteroclínicas.

5.1 TRABAJO A FUTURO

- Investigar si es posible la sincronización de este tipo de atractores ocultos con el fin de probar esquemas de comunicación.
- Revisar si el tamaño de rejilla o bien la multiestabilidad de este tipo de sistemas favorece algún aspecto relevante en la criptografía, por ejemplo, si con estos sistemas se puede mejorar la entropía de la información cifrada.
- Utilizar herramientas similares a las usadas en el estudio de los atractores ocultos para verificar de manera analítica el flujo acotado en ciertos sistemas con atractores multienroscados basados en UDSs.

REFERENCIAS

- [1] J. C. Sprott. "Some simple chaotic flows". En: *The American Physical Society, Physical Review E* 50.2 (1994), págs. 647-650.
- [2] W. G. Hoover. "Remark on "Some simple chaotic flows"". En: *Physical Review E* 51.1 (1995), págs. 759-760.
- [3] C. Li y col. "A New Piecewise Linear Hyperchaotic circuit". En: *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part II: Express Briefs* 61.12 (2014), págs. 977-981.
- [4] J. O. Maaita y col. "The Dynamics of a Cubic Nonlinear System with No Equilibrium Point". En: *Journal of Nonlinear Dynamics* (2015), págs. 2356-7503.
- [5] Z. Wei. "Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria". En: *Physics Letters A* 376 (2011), págs. 102-108.
- [6] Z. Wang y col. "A hyperchaotic system without equilibrium". En: *Nonlinear Dynamics* 69 (2012), págs. 531-537.
- [7] S. Jafari, J. C. Sprott y S. M. R. H. Golpayegani. "Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria". En: *Physics Letters A* 377 (2013), págs. 699-702.
- [8] V.-T. Pham y col. "A no-equilibrium hyperchaotic system with a cubic nonlinear term Viet". En: *Optik* 127.1 (2016), págs. 3259-3265.
- [9] F. R. Tahir y col. "A Novel No-Equilibrium Chaotic System with Multiwing Butterfly Attractors". En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 25.4 (2015), pág. 1550056.
- [10] D. Cafagna y G. Grassi. "Chaos in a new fractional-order system without equilibrium points". En: *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 19 (2014), págs. 2919-2927.
- [11] G. Leonov, N. Kuznetsov y V. Vagitsev. "Localization of hidden Chua's attractors". En: *Physics Letters A* 375 (jun. de 2011), págs. 2230-2233.
- [12] D. Dudkowski y col. "Hidden attractors in dynamical systems". En: *Physics Reports* 637 (2016), págs. 1-50.
- [13] L. Ontañón-García y E. Campos-Cantón. "Widening of the basins of attraction of a multistable switching dynamical system with the location of symmetric equilibria". En: *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 26 (2017), págs. 38-47.
- [14] R. J. Escalante-González y E. Campos-Cantón. "Generation of chaotic attractors without equilibria via piecewise linear systems". En: *International Journal of Modern Physics C* 28.01 (2017), pág. 1750008.

- [15] E. Campos-Cantón y col. "Multiscroll attractors by switching systems". En: *Chaos* 20.1 (2010), pág. 013116.
- [16] M. García-Martínez y col. "Hyperchaotic encryption based on multi-scroll piecewise linear systems". En: *Applied Mathematics and Computation* 270 (2015), págs. 413-424.
- [17] Y. A. Kuznetsov, S. Rinaldi y A. Gragnani. "One-Parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems". En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13.08 (2003), págs. 2157-2188.
- [18] E. Campos-Cantón. "Chaotic attractors based on unstable dissipative systems via third-order differential equation". En: *International Journal of Modern Physics C* 27.1 (2016), pág. 1650008.
- [19] T. M. Apostol. *Mathematical analysis*. China Machine Press, 1996.
- [20] E. W. Weisstein. *Invariant*. <https://mathworld.wolfram.com/Invariant.html>.
- [21] W. Krabs. *Dynamical Systems*. Springer, 2010.
- [22] S. Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer., 2015.
- [23] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer., 2000.
- [24] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003.
- [25] M. W. Hirsch, S. Smale y R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier, 2004.
- [26] D. G. Zill. *A first course in differential equations with Modeling Applications*. CENGAGE Learning, 2012.
- [27] G. A. Gottwald e I. Melbourne. "The 0-1 Test for Chaos: A Review". En: *Chaos Detection and Predictability*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016, págs. 221-247.
- [28] M. Cencini, F. Cecconi y A. Vulpiani. *Chaos From Simple Models to Complex Systems*. World Scientific, 2010.
- [29] A. Wolf y col. "Determining Lyapunov exponents from a time series". En: *Physica D* 16 (1985), págs. 285-317.
- [30] M. Rosenstein, J. Collins y C. de Luca. "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from Small Data Sets". En: *Physica D* 65 (1993), págs. 117-134.
- [31] J.-M. Ginoux. *Differential Geometry Applied to Dynamical Systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2009.
- [32] C. P. Silva. "Shil'nikov's theorem-a tutorial". En: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 40.10 (1993), págs. 675-682.
- [33] J. C. Sprott. *Elegant Chaos*. World Scientific., 2010.
- [34] L. Chua, M. Komuro y T. Matsumoto. "The double scroll family". En: *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 33.11 (1986), págs. 1072-1118.

-
- [35] J. A. Suykens, A. Huang y L. O. Chua. "A family of n-Scroll attractors from a generalized Chua's Circuit". En: *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik* 51.3 (1997), págs. 131-138.
- [36] K. S. W. Tang y col. "Generation of N-Scroll attractors via sine function." En: *IEEE Transactions on circuits and systems I: fundamental theory and applications* 48.11 (2001), págs. 1369-1372.
- [37] M. E. Yalçın, J. A. K. Suykens y J. Vandewalle. "Families of scroll grid attractors". En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 12.1 (2002), págs. 23-41.
- [38] J. Lü y col. "Generating 3-D multi-scroll chaotic attractors: A hysteresis series switching method". En: *Automatica* 40.1 (2004), págs. 1677-1687.
- [39] J. Lü, X. Yu y G. Chen. "Generating Chaotic Attractors With Multiple Merged Basins of Attraction: A Switching Piecewise-Linear Control Approach". En: *IEEE Transactions on circuits and systems—I: fundamental theory and applications* 50.2 (2003), págs. 23-41.
- [40] R. J. Escalante-González y E. Campos-Cantón. "A Class of Piecewise Linear Systems Without Equilibria With 3-D Grid Multiscroll Chaotic Attractors". En: *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 66.8 (ago. de 2019), págs. 1456-1460.
- [41] R. J. Escalante-González, E. Campos-Cantón y M. Nicol. "Generation of multi-scroll attractors without equilibria via piecewise linear systems". En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 27.5 (2017), pág. 053109.
- [42] D. Knollman. *Designing with op amps: Single-formula technique keeps it simple*. <https://www.edn.com/wp-content/uploads/1998/03/3.2.98-DF-Designing-with-op-amps.pdf>. 1998.
- [43] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2001.