

DIVISIÓN DE MATEMÁTICAS APLICADAS



TÍTULO DE LA TESIS:

Aplicaciones de los sistemas dinámicos: desigualdades de concentración en Shifts contables de Markov y modelos económicos con la dinámica del replicador.

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

PRESENTA:

Humberto Alejandro Muñiz Colorado

DIRECTOR DE LA TESIS:

Dr. César Octavio Maldonado Ahumada

San Luis Potosí, S.L.P.
6 de septiembre de 2021



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis: “**Aplicaciones de los sistemas dinámicos: desigualdades de concentración en Shifts contables de Markov y modelos económicos con la dinámica del replicador**”, presentada para obtener el Grado de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por: **Humberto Alejandro Muñiz Colorado** y aprobada el **6 de septiembre del dos mil veintiuno** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. César Octavio Maldonado Ahumada
Director de la tesis

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus
Presidente

Dr. Joss Erick Sánchez Pérez
Jurado en el examen

Dr. Elvio Accinelli Gamba
Jurado en el examen

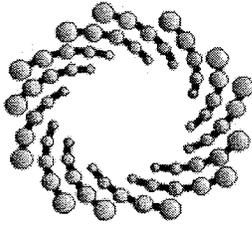
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Jurado en el examen



Créditos institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. César Octavio Maldonado Ahumada.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (486020) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 019 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 6 días del mes de septiembre del año 2021, se reunió a las 11:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus	Presidente	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Secretario	IPICYT
Dr. Elvio Accinelli Gamba	Sinodal externo	UASLP
Dr. Joss Erick Sánchez Pérez	Sinodal externo	UASLP
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Humberto Alejandro Muñiz Colorado

sobre la Tesis intitulada:

Aplicaciones de los sistemas dinámicos: desigualdades de concentración en Shifts contables de Markov y modelos económicos con la dinámica del replicador

que se desarrolló bajo la dirección de

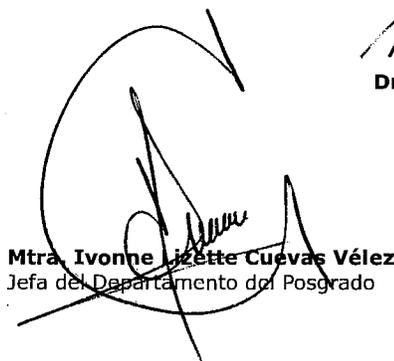
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 13:10 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 6 días del mes de septiembre de 2021.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



IPICYT
SECRETARÍA ACADÉMICA
INSTITUTO POTOSINO DE
INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
Y TECNOLÓGICA, A.C.

Contenido

Constancia de aprobación de la tesis	Página I
Créditos institucionales	Página II
Acta de examen	Página III
Contenido	Página IV
Resumen	Página V
Abstract	Página VI
Introducción	Página 1
Parte I	Página 6
Parte II	Página 52
Parte III	Página 83

Resumen

En esta tesis estudiamos algunas aplicaciones de los sistemas dinámicos, en particular nos centraremos en estudiar el fenómeno de concentración de la medida de Gibbs en shifts contables de Markov y una aplicación de la dinámica del replicador a la economía, para modelar la repercusión sobre el bienestar de los consumidores a causa de las decisiones de inversión de los *mánagers* de las empresas en una economía de propiedad privada. Por fines de claridad estructuramos la tesis como sigue.

En la primera parte de esta tesis estudiamos las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos simbólicos dotados de una medida de Gibbs, en particular nos enfocamos en el estudio de las desigualdades de concentración, las cuales nos brindan cotas no asintóticas sobre la probabilidad de desvío de observables de interés respecto de su valor esperado, dicho estudio lo separaremos en dos casos: (1) para el primero supondremos que el alfabeto que define el sistema simbólico es finito, contexto en el cual se sabe que una desigualdad de concentración se satisface para potenciales Lipschitz y observables separadamente Lipschitz de n variables (ver [22], [23] o [24]), es importante señalar que en esta desigualdad aparece una constante denominada constante de concentración, de la cual en esta tesis damos una estimación, la importancia de esta estimación recae en sus posibles aplicaciones, las cuales abordaremos a lo largo de este trabajo. (2) Por otro lado consideraremos el shift contable de Markov, el cual se obtiene al suponer que el alfabeto que define al sistema es contable no finito, para este tipo de sistemas probaremos que al igual que en el caso finito se satisface una desigualdad de concentración exponencial, más aun probaremos que las aplicaciones de las desigualdades de concentración para el caso finito permanecen válidas para el caso contable, en este sentido, los resultados obtenidos en este trabajo de tesis permiten extender los resultados existentes en la literatura sobre desigualdades de concentración en sistemas dinámicos simbólicos dotados con una medida de Gibbs.

En la segunda parte de esta tesis mostramos una aplicación de los sistemas dinámicos a la economía, para esto presentaremos un modelo basado en la dinámica del replicador para analizar cómo las decisiones racionales de los *mánagers* de las empresas, quienes buscan obtener mayores beneficios invirtiendo en las ramas de producción que les generan mayores beneficios, provocan un cambio en los precios y/o asignaciones de equilibrio y como esto a su vez puede traer repercusiones no deseables para los consumidores, de quienes supondremos son accionistas de las empresas, pues para este modelo consideraremos economías de producción de propiedad privada con ramas de producción. Además utilizando resultados de Accinelli y Covarrubias en [1] mostramos que nuestro modelo puede ser considerado como un juego N -poblacional, lo cual sienta las bases del trabajo futuro que discutiremos en la parte final de esta tesis, con el cual se pretende relacionar el contenido de ambas partes de este trabajo, para lo cual introduciremos los llamados juegos con potencial, los cuales son una clase especial de juegos donde el incentivo de los jugadores a cambiar de estrategia está dado por una función potencial, para esta clase de juegos en [21] los autores prueban que las medidas de Gibbs, al menos en el sentido de la física estadística aparecen de forma natural.

Abstract

In this thesis we study some applications of dynamical systems, in particular we will focus on studying the concentration phenomenon of the Gibbs measure in Markov accounting shifts and an application of the replicator dynamics to the economy, to model the impact on welfare. of consumers because of the investment decisions of company managers in a privately owned economy. For the sake of clarity we structure the thesis as follows.

In the first part of this thesis we study the statistical properties of symbolic dynamical systems endowed with a Gibbs measure, in particular we focus on the study of concentration inequalities, which provide us with non-asymptotic limits on the probability of deviation of observables of interest with respect to their expected value, this study will be separated into two cases: (1) for the first we will assume that the alphabet that defines the symbolic system is finite, a context in which it is known that an inequality of concentration is satisfied for Lipschitz potentials and separately observable Lipschitz of n variables (see [22], [23], or [24]), it is important to point out that in this inequality there appears a constant called constant of concentration, of which in this thesis we give an estimate, the importance of this estimate lies in its possible applications, which we will address throughout this work. (2) On the other hand, we will consider the Markov accounting shift, which is obtained by assuming that the alphabet that defines the system is non-finite countable, for this type of systems we will prove that, as in the finite case, an inequality of exponential concentration, moreover we will prove that the applications of the concentration inequalities for the finite case remain valid for the accounting case, in this sense, the results obtained in this thesis work allow us to extend the existing results in the literature on concentration inequalities in symbolic dynamic systems endowed with a Gibbs measure.

In the second part of this thesis we show an application of dynamic systems to the economy, for this we will present a model based on the replicator dynamics to model how the rational decisions of company administrators, who seek to obtain greater benefits by investing in the branches of production that generate higher profits for them, cause a change in prices and/or equilibrium allocations and how this in turn can bring undesirable repercussions for consumers, of whom we will assume are shareholders of the companies, because for In this model we will consider economies of production of private property with branches of production. In addition, using the results of Accinelli and Covarrubias in [1] we show that this model can be considered as a N -population game, this result lays the foundations of the future work that we will discuss in the final part of this thesis, with which it is intended to relate the content of both parts of this work, for which we will introduce the so-called games with potential, which are a special class of games where the incentive of the players to change strategy is given by a potential function, for this class of games in [21] the authors prove that the measures of Gibbs, at least in the sense of statistical physics, appear naturally.

Índice general

1. Introducción	1
I Desigualdades de concentración	5
2. Definiciones	6
3. Sistemas simbólicos	9
3.1. Conjugaciones, codificación y ejemplos	10
4. Medidas de Gibbs	14
5. El operador de Ruelle, propiedades espectrales y aplicaciones	17
5.1. Operador de Ruelle	17
5.2. El Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius	18
6. Demostración del teorema 3	20
7. Complejidad del full-shift	23
7.1. Aplicaciones del principio variacional	25
7.1.1. Ejemplo: Medida de Bernoulli	25
8. Propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos	27
8.1. Sistemas caóticos	27
8.2. Teoremas límite: Procesos independientes e idénticamente distribuidos	28
8.3. Teoremas límite: Sistemas dinámicos	30
8.4. Desigualdades de concentración	32
9. Resultados en sistemas simbólicos	36
9.1. Estimación de la constante de concentración	36
9.2. Condición de Walters y concentración	40
9.3. Aproximación de observables	42
9.4. Shift contable de Markov	45
9.4.1. Desigualdades de concentración en alfabetos contables	47
9.4.2. Resultado principal en el caso contable	49
9.4.3. Corolarios de las desigualdades de concentración	49

II	Aplicaciones de los sistemas dinámicos a la economía	51
10.	El consumidor y las empresas	52
10.1.	Teoría del consumidor	52
10.1.1.	Comportamiento del consumidor	53
10.2.	Conjunto de producción	54
11.	Economía de propiedad privada con ramas de producción	55
12.	Dinámica del replicador	58
13.	Economías singulares y regulares	60
14.	Economías de producción de Shapley-Shubik	62
14.1.	Problemas de maximización	62
14.1.1.	Maximización de beneficios	63
14.1.2.	Maximización de utilidad	63
14.2.	Existencia y multiplicidad de equilibrios	64
14.2.1.	Existencia de equilibrio en economías con dotaciones no interiores	65
14.2.2.	Existencia de equilibrio en economías con dotaciones interiores	66
14.2.3.	Economías mirror symmetric de Shapley-Shubik con producción	67
14.2.4.	Multiplicidad de equilibrios en economías singulares	68
14.3.	Construcción de ejemplos	69
14.3.1.	Ejemplos generales	70
15.	Distribución sobre ramas de producción	73
16.	Dinámica del replicador: Segunda parte	75
16.1.	Ejemplos: Dinámica del replicador	76
16.1.1.	Ejemplos generales	77
16.2.	Repercusiones sobre el bienestar	81
III	Comentarios finales y producción	82
19.	Conclusiones y trabajo a futuro	83
19.1.	Trabajo futuro	84
A.	Apéndices	88
A.1.	Perron-Frobenius	88
A.2.	Aplicaciones: El modelo de Leontief cerrado	89
A.3.	Modelo de Leslie	92
A.4.	Teoría de juegos	93

1. Introducción

La hipótesis ergódica de Boltzmann, fundamental en la mecánica estadística, asegura que “para grandes sistemas de partículas que interactúan en equilibrio, el tiempo promedio a lo largo de una sola trayectoria es igual al promedio espacial”. Si bien esta hipótesis resultó ser falsa en general, el estudio de las condiciones bajo las cuales se satisface, sentó las bases de lo que hoy se conoce como teoría ergódica, la cual tiene como premisa estudiar las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos que preservan una medida, lo que permitió relacionar la teoría de los sistemas dinámicos con la teoría de probabilidad. Cuando un sistema admite más de una medida invariante bajo la dinámica, una pregunta interesante surge, ¿Cuál medida elegir para analizar estas propiedades?, una respuesta a esta pregunta es elegir las medidas ergódicas, pues no solo la hipótesis ergódica, bajo ciertas condiciones, se satisface para esta clase de medidas, sino que además se puede probar que toda medida invariante se puede descomponer como combinación de un número finito o infinito de medidas ergódicas [5], [31], [55]. Sin embargo, aun bajo esta restricción en la medida, el problema de determinar que medida invariante elegir esta lejos de ser resuelto, pues, un sistema dinámico puede admitir más de una medida ergódica, por lo que para delimitar aun más las medidas interesantes definidas sobre un sistema, Sinai y Ruelle introdujeron ideas de la mecánica estadística a la teoría de los sistemas dinámicos para proponer una manera de elegir medidas invariantes naturales desde este contexto [53], además ellos mostraron que bajo ciertas condiciones las medidas de probabilidad invariantes, que son importantes en la teoría ergódica, guardan cierta similitud con la distribución de Gibbs, en el sentido de la física estadística, por lo que estas medidas son llamadas “*medidas de Gibbs*”. El estudio de estas medidas, sus propiedades y relación con la distribución de Gibbs dio origen al formalismo termodinámico. Una de las características importantes de las medidas de Gibbs, al menos por su aplicación en distintas áreas de la ciencia, dentro de la que señalamos por ser de interés para este trabajo de tesis, a modelos de crecimiento poblacional, es la de ser un estado de equilibrio, esto significa que para esta clase de medida un principio variacional, análogo a los enunciados en la física, se satisface [62]. En palabras esto significa que dado un sistema dinámico y un potencial definido sobre el espacio fase del sistema, las medidas de Gibbs maximizan la suma de la energía más la entropía del sistema, esto lo discutiremos para el caso de sistemas simbólicos en el capítulo 7.

Desde su origen el formalismo termodinámico y en particular las medidas de Gibbs han encontrado área de aplicación en diferentes ramas de la ciencia, dentro de las que destacamos, por su interés para los propósitos de esta tesis, a los sistemas dinámicos simbólicos, al crecimiento poblacional, a la economía y a la teoría de juegos. En el contexto de los sistemas dinámicos, usando particiones de Markov del espacio fase de un sistema dinámico abstracto y codificando el sistema, Sinai encontró una conexión entre la teoría ergódica de los sistemas Anosov y la mecánica estadística, la cual fue posteriormente, generalizada principalmente por Bowen [19], a una clase más general de sistemas dinámicos hiperbólicos. Esto llevo, de forma natural, a la introducción de las medidas de Gibbs al estudio de los sistemas dinámicos simbólicos y en particular al estudio de las propiedades estadísticas de estos sistemas respecto a esta clase de medidas. El principio variacional, a su vez, ha permitido aplicar el formalismo termodinámico en modelos evolutivos de crecimiento como el de Leslie, en el cual, este principio, permite relacionar la tasa de crecimiento poblacional con la entropía de la población y el potencial reproductivo [9]. En esta línea es de esperar que

a partir del trabajo reciente de Argasinski y Broom [8], en el cual se relaciona el modelo de Leslie con el modelo evolutivo del replicador [58], se pueda relacionar la dinámica del replicador con el formalismo termodinámico. Es importante señalar en este punto que este resultado será relevante en el desarrollo de este trabajo de tesis. Por otro lado, trabajos como el de Berry, Salamon y Heal [13] donde se utiliza el formalismo termodinámico para relacionar la disipación de energía con la velocidad a la que se ejecuta un proceso, el de Kummel [37] y Berry-Andresen [12] (entre otros) donde se describe la importancia de la energía y la entropía en la economía o el trabajo Brida en [20], en el cual se utiliza la entropía, junto con la dinámica simbólica para formalizar la intuición económica de que diferentes mecanismos gobiernan el comportamiento económico en diferentes situaciones de estado, dejan de manifiesto el profundo arraigo y aplicación del formalismo termodinámico en la economía. En esta misma línea de aplicaciones el formalismo termodinámico y en particular las medidas de Gibbs han encontrado un amplio campo de acción la teoría de juegos, donde se sabe que para una clase de amplia de juegos, llamados juegos con potencial, esta clase de medidas aparecen de forma natural en el juego [21]. Accinelli y Covarrubias en [1] demuestran que bajo ciertas condiciones modelos económicos basados en la dinámica del replicador pueden ser considerados como juegos N -poblacionales, por lo que en este contexto se abre una línea de investigación para determinar la posibilidad de relacionar los modelos como los descritos en [1], [2], [3] con los juegos potencial y así con las medidas de Gibbs, y a partir de los resultado de Argasinski y Broom [8] con el formalismo termodinámico.

Motivados por las aplicaciones del formalismo termodinámico en los diferentes contextos descritos anteriormente, en esta tesis nos centraremos en estudiar algunas aplicaciones de los sistemas dinámicos: *(i)* al estudio de las desigualdades de concentración de los sistemas dinámicos simbólicos dotados de una medida de Gibbs, y *(ii)* presentar el desarrollo de un modelo económico basado en la dinámica del replicador y el cómo este puede ser representado mediante un juego N -poblacional [1], lo cual, como discutiremos en el proyector futuro presentado en la parte final de esta tesis, puede ser relevante para relacionar este modelo con el formalismo termodinámico a través de las medidas de Gibbs. Describimos a continuación brevemente ambas líneas de investigación.

(i) Las desigualdades de concentración son una rama de reciente interés en el estudio de las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos simbólicos dotados de una medida de Gibbs, estas desigualdades nos brindan un cotas no asintóticas sobre la probabilidad de desvío de observables de interés respecto a su valor esperado, en otras palabras, estas desigualdades nos ofrecen un resultado no asintótico sobre la fluctuación de cierta clase de observables alrededor de su valor esperado. Bajo ciertas condiciones sobre los observables (ser Lipschitz separables), este tipo de desigualdades ha sido ampliamente estudiado en [22], [23], [24], bajo el supuesto de que el alfabeto que define el sistema simbólico es finito. Vale la pena señalar que aun en este contexto el estudio de estas desigualdades esta lejos de estar completo, por ejemplo en este tipo de desigualdades aparece una constante de la cual hasta ahora desconocía una estimación, por lo que la estimación de esta constante que presentamos en la sección 9.1 es nueva en la literatura, es importante señalar que la importancia de esta estimación recae en sus aplicaciones, las cuales abordaremos en la sección 8.4, por otro lado el determinar condiciones menos restrictivas sobre los observables, bajo las cuales una desigualdad de concentración se mantenga, sigue siendo un problema abierto, para el cual en la sección 9.3, basado en resultado de Podving [48] y Kachurovskii y Podving [35], presentamos una extensión al considerar observable continuas y acotados casi en todas partes respecto a la medida de Gibbs del sistema. Finalmente nuestro resultado principal sobre concentración presentado en la sección 9.4.2 contribuye a enriquecer el tema al permitir al alfabeto que define el sistema ser contable.

(ii) La dinámica del replicador surge a partir del trabajo de Maynard Smith y Price “la lógica del conflicto animal” [58], en un intento por modelar el comportamiento de las especies, quienes adoptan o replican el comportamiento de otra, cuando este les lleva a sobresalir sobre el resto, esta dinámica, además

es de gran interés en la teoría de juegos evolutivos, donde los participantes buscan replicar las estrategias que les garanticen una mayor utilidad y recientemente en la economía, donde Accinelli y Covarrubias en [1] y Accinelli y Muñiz en [3], [2] la han utilizado está dinámica para modelar las repercusiones sobre los precios de equilibrio de la economía debidas a las decisiones de inversión de los mángers de las firmas en una economía quienes buscan invertir en la rama de producción que mayores beneficios les genere [3], [1] y [2]. Este modelo lo presentaremos en el capítulo 12 de esta tesis. Uno de los principales problemas que surge al considerar una economía con ramas de producción es la aparición de la multiplicidad de equilibrios, la cual desde el punto de vista de la estática comparativa introduce dificultades en análisis económico del modelo, en esta línea, en el capítulo 14 presentamos nuestro resultado principal sobre la aplicación económica de los sistemas dinámicos a la economía, el cual nos brinda algunos criterios que permiten determinar el número de equilibrios de la economía y las condiciones que garantizan la unicidad del equilibrio.

Como mencionamos anteriormente el modelo económico basado en la dinámica del replicador podría ser relacionado con el formalismo termodinámico a través de la teoría de juegos y/o su relación con el modelo de Leslie, por lo que el estudio de esta relación sienta las bases de nuestro trabajo futuro, el cual discutiremos en la parte final de esta tesis.

A fin de brindar una mejor exposición de los resultados presentados en esta tesis, dividiremos el trabajo en tres partes, en la primera de ellas nos centraremos en el estudio de los sistemas simbólicos dotados de una medida de Gibbs, sus propiedades estadísticas y las aplicaciones de estos a la economía. Mientras que en la segunda describiremos un modelo económico basado en la dinámica del replicador, utilizada en la biología para modelar el comportamiento de las especies [58], en nuestro contexto, utilizaremos esta dinámica para modelar las repercusiones económicas de las decisiones de inversión de los gerentes de las empresas en una economía. Finalmente en la tercera parte incluimos algunos comentarios finales y conclusiones sobre el trabajo, así como una breve discusión sobre el trabajo futuro a desarrollar a partir de esta tesis.

El contenido de esta tesis está organizado como sigue. En el capítulo 2 de la parte I presentamos algunas definiciones importantes en el desarrollo del contenido de este trabajo, en el capítulo 3 describimos el sistema simbólico, mientras que en el capítulo 4 enunciamos el teorema de existencia de una medida de Gibbs asociada a potenciales Lipschitz para el caso de alfabetos finitos, para la demostrar de este hecho en el capítulo 5 introducimos el operador de Ruelle y sus propiedades principales, mientras que en el capítulo 6 realizamos la demostración de existencia de la medida de Gibbs. En el capítulo 7 discutimos el principio variacional. En capítulo 8 presentamos y analizamos las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos y su relación con los teoremas límite de la estadística (ley de los grandes números, teorema del límite central y principio de grandes desvíos), en particular en este capítulo describimos el fenómeno de concentración de la medida y el teorema ergódico de Birkhoff y mostramos su relación con el principio de los grandes desvíos y con la ley de fuerte de los grandes números respectivamente. En el capítulo 9 presentamos los resultados obtenidos: estimación de la constante de concentración para alfabetos finitos, cotas sobre la rapidez de convergencia de la probabilidad de desvío del promedio espacial al promedio temporal para observables continuos y acotados casi en todas partes, así como una desigualdad de concentración para el caso caso de shifts de Markov contables.

En la parte II de este trabajo de tesis mostramos una aplicación de los sistemas dinámicos abstractos a la teoría económica. Para brindar una mejor exposición de los resultados presentados en esta parte de la tesis, en el capítulo 10 definimos el conjunto de alternativas de elección, posteriormente en este mismo capítulo abordamos el comportamiento del consumidor, para lo cual estudiaremos las preferencias del consumidor y su representación mediante funciones de utilidad. En la sección 10.2 definimos el conjunto de producción y los supuestos clásicos sobre este, además describimos como representarlos mediante funciones

de producción y cuales son las características de estas, finalmente abordamos el problema de maximización de beneficios de las firmas. Una vez descritos los fundamentos que nos permiten definir el modelo matemático de una economía con producción, enunciamos su definición formal en la capítulo 11. Posteriormente en el capítulo 12 introducimos la dinámica del replicador, para modelar las repercusiones sobre los equilibrios de la economía de las decisiones de inversión de los máangers de las firmas, lo que nos lleva a clasificar las economías en singulares y regulares, la definición formal de este tipo de economía la presentamos en el capítulo 13. La dinámica del replicador será el instrumento principal para construir una dinámica que nos permita modelar, cómo a través del tiempo las firmas “más pobres”, en el sentido de que obtienen beneficios más bajos, buscan adaptarse e imitar a aquellas que obtienen mayores beneficios, vale la pena señalar que este modelo fue primeramente estudiado por Accinelli y Covarrubias en [1], para economías de producción de propiedad privada divididas en dos ramas de producción (definición 30) y m -consumidores caracterizados por dos diferentes funciones de utilidad, este trabajo fue retomado por Accinelli y Muñiz en [2] para una familia de economías con producción con múltiples equilibrios, llamadas economías con producción de Shapley-Shubik, cuya definición presentamos en el capítulo 14, para esta clase de economías en la sección 14.1 obtenemos soluciones explícitas para el problema de maximización de beneficios de productores y el problema de maximización de utilidad para los consumidores, con base en estos resultados en la sección 14.2 presentamos condiciones que garantizan la existencia de al menos un equilibrio en la economía, estos resultados serán relevantes para las aplicaciones mostradas en el capítulo 15, en el cual permitimos a las empresas ubicarse en distintas ramas de producción. En el capítulo 16 analizamos vía la dinámica del replicador, cómo el comportamiento de los máangers de las firmas afecta el número de equilibrios y el bienestar de los consumidores en una economía.

En la parte III hacemos algunos comentarios finales y conclusiones respecto al trabajo desarrollado a lo largo de esta tesis, además incluimos el una breve exposición del trabajo futuro, en el cual se pretende conectar el modelo económico del replicador, vía la teoría de juegos y e modelo de Leslie con el formalismo termodinámico y en particular con las medidas de Gibbs. Además por completitud en esta parte incluimos la producción científica, participación en eventos científicos y estancias realizadas durante el doctorado. Finalmente se incluye un apéndice en el que incluimos el teorema de Perron-Frobenius (apéndice A.1), las aplicaciones económicas de este al modelo de Leontief (apéndice A.2) y a el modelo de evolutivo de Leslie (apéndice A.3), por otro lado en el apéndice final presentamos la relación del modelo del replicador con la teoría de juegos (apéndice A.4), lo cual es relevante para el trabajo futuro presentado en la sección 19.1.

Parte I

Desigualdades de concentración

2. Definiciones

En este capítulo introducimos algunos conceptos que nos permitirán tener un mejor entendimiento en el desarrollo del contenido de esta tesis, para ello definimos formalmente un sistema dinámico de medida, la terminología referente a sus propiedades de medida, así como las referentes a la transformación definida en el espacio. Además por completitud incluimos el teorema de descomposición ergódica, el cual motiva el estudio de las medidas ergódicas. Por otro lado en este capítulo describimos la propiedad mixing de una medida y su interpretación desde el punto de vista estadístico.

Dado que gran parte del estudio en este trabajo se basa en las propiedades espectrales del operador de Ruelle (ver sección (5.1)), comenzaremos por el concepto de operador acotado y su espectro, para una revisión más profunda de estos conceptos sugerimos revisar [10].

Definición 1. Sea $(B, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, decimos que un operador $L : B \rightarrow B$ es acotado si existe una constante positiva C tal que $\|L\varphi\| \leq C\|\varphi\|$, para todo $\varphi \in B$. El conjunto resolvente de L denotado por $\text{Res}(L)$ es el conjunto de los z en \mathbb{C} tales que $L - zI : B \rightarrow B$ es invertible con inversa acotada, donde I denota a la identidad. El espectro $\text{sp}(L)$ de L es el complemento de $\text{Res}(L)$. Mientras que el radio espectral $R(L)$ de L es

$$R(L) = \sup\{|z| : z \in \text{sp}(L)\}.$$

Si $z \in \text{sp}(L)$ es tal que $L - zI$ no es inyectivo, decimos que z es un eigenvalor de L . La multiplicidad geométrica de un eigenvalor z es la dimensión $1 \leq m_1(z) \leq \infty$ del espacio $\{v \in B : (L - z)v = 0\}$, la multiplicidad algebraica de z es la dimensión $0 \leq m_2(z) \leq \infty$ del espacio generalizado $\{v \in B : \text{existe } m \geq 1, (L - z)^m v = 0\}$. Claramente, $m_2(z) \geq m_1(z)$. Si $m_1(z) = m_2(z) < \infty$, el eigenvalor z se dice semisimple o diagonalizable.

Definición 2. El radio esencial R_{es} de L es el número más pequeño $R_{es} \geq 0$, tal que para cualquier $\lambda \in \text{sp}(L)$ con módulo $|\lambda| > R_{es}$ es un eigenvalor aislado de multiplicidad finita.

Definición 3. Un operador lineal $L : X \rightarrow Y$ se dice Fredholm si es acotado, $\dim \text{Ker} L$ y $\dim Y - \dim LX$ son finitas.

Definición 4. El espectro esencial de un operador L es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $L - \lambda I$ no es un operador Fredholm.

A continuación presentamos la definición formal de un sistema dinámico y algunos conceptos de importancia en el desarrollo de esta parte de la tesis, al lector interesado sugerimos revisar [36].

Definición 5. Un sistema dinámico discreto consiste de un conjunto no vacío X y una función $f : X \rightarrow X$ tal que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la n -ésima iteración de f es la composición de f consigo mismo n -veces, es decir, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, con la convención de que f^0 es la identidad.

En general no se suele asumir ninguna estructura extra sobre X o f , sin embargo, en el presente trabajo estamos interesados en el caso en que X tiene estructura de espacio de medida y f es una función medible de X en sí mismo, formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 6. Un sistema dinámico de medida consiste de un conjunto no vacío X llamado espacio fase, una sigma álgebra \mathcal{B} de subconjuntos de X , una función medible f de X en sí mismo y una medida finita μ .

Definición 7. Dadas dos medidas μ y ν sobre (X, \mathcal{B}) decimos que:

- a) μ y ν son mutuamente singulares si existen conjunto disjuntos $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $X = A \cup B$, $\mu(A) = 0$ y $\nu(B) = 0$ y que
- b) ν es absolutamente continua con respecto de μ , si $\nu(A) = 0$ para cualquier medible A tal que $\mu(A) = 0$.

Las medidas interesantes desde el punto de vista de la dinámica, son aquellas que son invariantes bajo la acción de la dinámica, esto es, las medidas que satisfacen la condición siguiente.

Definición 8. Dado un sistema dinámico de medida (X, \mathcal{B}, f, μ) , decimos que f es una transformación que preserva la medida o que μ es f -invariante si $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Por otro lado, decimos que:

Definición 9. Dado un sistema dinámico de medida (X, \mathcal{B}, f, μ) , decimos que f es una transformación

- a) no singular si para cualquier $A \in \mathcal{B}$, $\mu(f^{-1}(A)) = 0$ si y solo si $\mu(A) = 0$.
- b) Conservativa si para todo medible A de medida no nula, existe un $n > 0$ tal que $\mu(A \cap f^{-n}(A)) > 0$.

Al igual que en el álgebra lineal, el descomponer un espacio vectorial en subespacios invariantes bajo una cierta transformación lineal y analizar el comportamiento de la transformación en cada subespacio, en el estudio de los sistemas dinámicos de medida el descomponer un sistema en subconjuntos invariantes bajo la dinámica juega un rol importante.

Definición 10. Sea (X, \mathcal{B}, f, μ) un sistema dinámico de medida, supongamos que μ es invariante bajo f , entonces decimos que un conjunto $B \in \mathcal{B}$ es invariante bajo f o f -invariante, si $\mu(T^{-1}(A) \Delta A) = 0$. Si además se cumple que para cualquier conjunto medible f -invariante $B \in \mathcal{B}$, $\mu(A) = 0$ o $\mu(A^c) = 0$, decimos que μ es ergódica.

Vale la pena señalar que la importancia de las medidas ergódicas recae en el hecho de que toda medida invariante se puede descomponer en componentes ergódicas, esto es, toda medida invariante se puede descomponer como combinación de un número finito o infinito de medidas ergódicas, este resultado es conocido como el teorema de descomposición ergódica, ver [5], [31] y [55] para su demostración. Formalmente esto es enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 1 (Teorema de descomposición ergódica). Sea f una transformación conservativa y no singular sobre un espacio de probabilidad (X, \mathcal{B}, μ) . Entonces existe un espacio de probabilidad (Y, \mathcal{A}, ν) y una familia de medidas de probabilidad μ_y sobre (X, \mathcal{B}) , para $y \in Y$ tal que:

- (i) Para cada $A \in \mathcal{B}$ la función $y \mapsto \mu_y(A)$ es Borel medible y para cada $A \in \mathcal{B}$

$$\mu(A) = \int \mu_y(A) d\nu(y).$$

- (ii) Para $y, y' \in Y$ las medidas son mutuamente singulares.

- (iii) Para cada $y \in Y$ la transformación f es no singular, conservativa y ergódica sobre (X, \mathcal{B}, μ_y) .

(iv) Para cada $y \in Y$

$$\frac{d\mu \circ f}{d\mu} = \frac{d\mu_y \circ f}{d\mu_y} \mu_y\text{-c.t.p.}$$

Definición 11. Sea $f : X \rightarrow X$ una transformación continua, f es llamada transitiva topológica hacia adelante o uni lateral si existe un $x \in X$ con órbita densa en X . Si f es un homeomorfismo, entonces f es llamada transitiva topológica, si existe un $x \in X$ tal que $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es denso en X .

Cuando X es un espacio métrico compacto, la transitividad topológica unilateral es equivalente a la condición de que para cualesquiera dos abiertos U y V , existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}U \cap V \neq \emptyset$, ver [10].

Definición 12. Dada una transformación continua $f : X \rightarrow X$, decimos que f es topológicamente mixing si para cualesquiera dos abiertos U y V existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}U \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$.

Note que para U fijo, la propiedad de que f sea topológicamente mixing, nos dice que f “esparce” a U sobre todo el espacio, esto es, para todo $V \in \mathcal{B}$, después de un número suficientemente grande de iteraciones, $f^n(U)$ intersecta a V . Además es fácil ver que si X es compacto y f es topológicamente mixing, entonces necesariamente es transitiva topológica. Sin embargo, el regreso no es necesariamente cierto, ver [10] para esto. Finalmente presentamos la siguiente definición.

Definición 13. Sea (X, \mathcal{B}, f, μ) un sistema dinámico de medida y supongamos que μ es f invariante. Entonces, decimos que μ es mixing si para cada par de conjuntos medibles U y V , se cumple que

$$\mu(f^{-n}(U) \cap V) \rightarrow \mu(U)\mu(V) \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Es fácil ver que la propiedad mixing de la medida implica la ergodicidad de la misma. El siguiente resultado nos permite conectar las definiciones 12 y 13.

Lema 1. Sea (X, \mathcal{B}, f, μ) un sistema dinámico, supongamos que la medida μ es mixing y que $\mu(U) > 0$ para todo $U \in \mathcal{B}$ no vacío, entonces μ es topológicamente mixing.

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{B}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}(U) \cap V) = \mu(U)\mu(V) > 0,$$

por lo que necesariamente existe un $N > 0$ tal que $\mu(f^{-n}(U) \cap V) > 0$ para todo $n \geq N$, de donde $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. \square

Dado que μ es una medida finita, podemos suponer sin pérdida de generalidad que μ es una medida de probabilidad, por lo que cuando μ satisface la propiedad de ser mixing, la condición (2.1) puede interpretarse como que cualesquiera dos conjuntos medibles U y V son asintóticamente independientes, es decir, $f^{-n}(U)$ y V tienden a ser independientes cuando n crece. Para ver el por qué de esta interpretación notemos que (2.1) es equivalente a

$$\frac{\mu(f^{-n}U \cap V)}{\mu(U)} \rightarrow \mu(V) \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

usando el hecho de que $\mu(f^{-n}U) = \mu(U)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\frac{\mu(f^{-n}U \cap V)}{\mu(f^{-n}(U))} \rightarrow \mu(V) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Estos hechos clarifican el por qué llamar a los conjuntos medibles asintóticamente independientes cuando μ es mixing, pues guardan una similitud muy cercana con el concepto de eventos independientes el sentido estadístico.

3. Sistemas simbólicos

En esta sección, siguiendo la notación utilizada en [19], exponemos las nociones básicas de los sistemas dinámicos simbólicos comenzando por describir el full-shift, para ello dado un conjunto finito no vacío A , consideramos el espacio de sucesiones $A^{\mathbb{N}} = \{x = x_0x_1 \cdots : x_i \in A\}$, sin pérdida de generalidad supondremos $A = \{1, 2, \dots, N\}$. En cuyo caso $A^{\mathbb{N}}$ es concebido como el espacio de sucesiones sin prohibiciones, esto es, cualquier símbolo puede seguir a cualquier símbolo. En un contexto más general es posible introducir prohibiciones considerando una matriz T de ceros y unos, y definiendo

$$\Sigma_T = \{x \in A^{\mathbb{N}} : T_{x_i x_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Es importante notar que cuando todas las entradas de la matriz T son 1, es decir, $T_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i, j \leq N$, Σ_T es simplemente $A^{\mathbb{N}}$. En lo subsecuente siempre supondremos que T no tiene columnas, ni filas completas de ceros, esto debido a que nos interesa considerar sucesiones en N símbolos, y en caso de tener columnas y/o filas de ceros podría ocurrir que $\Sigma_T = \Sigma_{T'}$ con T' una matriz de $m \times m$ con $m < N$. En este contexto, dados dos símbolos $a, b \in A$ decimos que la transición ab está permitida si $T_{ab} = 1$, extrapolando, la cadena $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ está permitida si $T_{a_i a_{i+1}} = 1$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Del teorema de Tychonoff, el cual asegura que el producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto, se sigue que el espacio de sucesiones en N símbolos $A^{\mathbb{N}}$ es compacto bajo la topología producto de la topología discreta en A . Este hecho implica que Σ_T también lo es, al ser un subconjunto cerrado de $A^{\mathbb{N}}$. Esta topología tiene como base a los cilindros, los cuales definimos a continuación:

Definición 14. *Dada una cadena permitida de tamaño n , $a_0^{n-1} := a_0 a_1 \dots a_{n-1}$, $a_i \in A$, definimos el cilindro de longitud n como el conjunto*

$$[a_0^{n-1}] := \{x \in \Sigma_T : x_i = a_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Esto es, el cilindro de tamaño n basado en la cadena a_0^{n-1} es el conjunto de todas las sucesiones cuyos primeros n términos son $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$. Para probar que los cilindros forman una base para la topología producto en $A^{\mathbb{N}}$, notemos que $\beta = \{a : a \in A\}$ es una base para la topología discreta en A , en particular el conjunto puntual $\{a\}$ es abierto, y $[a_0^n] = \{a_0\} \times \cdots \times \{a_{n-1}\} \times A \times \dots$, por lo que el resultado se sigue del siguiente teorema, cuya demostración puede ser encontrada en [44].

Teorema 2. *Supongamos que X_i , $i \in \mathbb{N}$ es una familia de espacios topológicos, si \mathcal{U}_i es una base para la topología de X_i , entonces la topología producto sobre $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod_{i=1}^n U_i$, donde U_i pertenece a \mathcal{U}_i para cada i y $U_i = X_i$ excepto para un número finito de valores de i .*

Ya que los cilindros son abiertos y el complemento de estos es una unión de cilindros, se tiene que los cilindros son abiertos y cerrados en la topología producto de $A^{\mathbb{N}}$.

Por otro lado, dado $\theta \in (0, 1)$ fijo, para $x, y \in \Sigma_T$ ponemos $d_\theta(x, y) = \theta^{\max\{i: x_i = y_i\}}$, con la convención de que $\max\{i: x_i = y_i\} = \infty$ si $x = y$ y $\theta^\infty = 0$ y si x, y son tales que $x_0 \neq y_0$, ponemos $d(x, y) = 0$. A partir de un cálculo directo es fácil ver que d_θ define una distancia sobre Σ_T , la cual es compatible con la topología producto, por lo que Σ_T no solo es un espacio topológico sino que además es metrizable. De manera natural y dado que nos interesan las propiedades de medida de los sistemas dinámicos simbólicos podemos considerar a Σ_T como espacio de medida tomando a \mathcal{B} como la sigma álgebra generada por los cilindros, esto es, la sigma álgebra generada por la topología en Σ_T y para la dinámica, consideramos el mapeo shift o desplazamiento hacia la izquierda $\sigma: \Sigma_T \rightarrow \Sigma_T$, el cual dado $x \in \Sigma_T$ está definido por la regla $(\sigma x)_i = x_{i+1}$, para todo i . Al espacio $(A^{\mathbb{N}}, \sigma)$ se le conoce como *full shift*, mientras que a (Σ_T, σ) se le denomina *subshift de tipo finito*. Dado que nuestro interés se centra en estudiar las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos simbólicos dotados con una medida de Gibbs, en lo que sigue implícitamente siempre supondremos que el espacio de medida base es (Σ_T, \mathcal{B}) y la dinámica será la inducida por el shift.

3.1. Conjugaciones, codificación y ejemplos

El concepto de conjugación es de suma importancia ya que nos permite identificar cuando dos sistemas dinámicos abstractos (X, f) y (Y, g) , pueden ser concebidos como “iguales”, a grandes rasgos, este concepto en el estudio de los sistemas dinámicos juega el papel de los isomorfismos en el álgebra lineal o el de los difeomorfismos en topología diferencial; su importancia recae en el hecho de que las propiedades interesantes de un sistema se mantienen bajo conjugación, por lo que al estudiar sistemas dinámicos abstractos cuyo análisis es complejo resulta de gran ayuda encontrar un sistema “más simple”, cuyas características relevantes sean iguales a las del sistema original, con el fin de formalizar esta noción introducimos el siguiente concepto.

Definición 15. Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos, una conjugación entre f y g es un homeomorfismo $\psi: Y \rightarrow X$ tal que $\psi \circ g = f \circ \psi$, ya que ψ es invertible, esta condición puede ser escrita como $g = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$.

Es fácil probar que cuando f y g son conjugadas vía una transformación $\psi: Y \rightarrow X$, entonces $y \in Y$ es un punto periódico de período n para g , si y solo si $\psi(y)$ es un punto periódico de período n para f , esto es, una conjugación ψ entre f y g no solo lleva puntos periódicos a puntos periódicos, si no que también preserva el orden de periodicidad. Además, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1. Supongamos que (X, f) y (Y, g) son topológicamente conjugados. Entonces

- i) f es topológicamente transitiva si y solo si g es topológicamente transitiva,
- ii) f es topológicamente mixing si y solo si g es topológicamente mixing,
- c) La órbita bajo g de $y \in Y$ es densa en Y si y solo si la órbita de $\psi(y)$ bajo f lo es en X .

A grandes rasgos esta proposición nos dice que las propiedades topológicas interesantes de los sistemas dinámicos son preservadas bajo conjugaciones. En consecuencia, el estudio de muchas propiedades importantes de un sistema dinámico se vuelven más sencillas si somos capaces de encontrar un sistema “más simple y sencillo” de analizar, el cual sea conjugado a nuestro sistema original. En este sentido los subshifts de tipo finito juegan un papel importante, pues hasta hoy en día siguen siendo los sistemas dinámicos mejor entendidos y de los que se puede extraer mayor información. Además existe una manera natural de codificar un sistema, lo cual nos permite pasar de un sistema dinámico abstracto (X, f) a uno simbólico de manera directa, pero antes de ahondar en ello precisamos lo siguiente.

Definición 16. f y g se dicen semiconjugados, si existe una función suprayectiva $\psi: Y \rightarrow X$ tal que $\psi \circ g = f \circ \psi$.

Observación 1. En el caso en que f y g sean semiconjugadas solo se puede garantizar que la imagen de órbitas densas y puntos periódicos en Y , corresponden con órbitas densas y puntos periódicos en X respectivamente, y que cuando g es topológicamente transitiva o topológicamente mixing, entonces f también lo es.

Ejemplo 1. Sea $T : [0, 1]/ \sim \rightarrow [0, 1]/ \sim$, $T(x) = 2x \pmod{1}$, \sim denota la relación de equivalencia que identifica a 0 con 1. Entonces, si a cada $x \in [0, 1]/ \sim$, lo escribimos en su expansión binaria, esto es, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$, $x_i \in \{0, 1\}$, tenemos

$$T(x) = 2x \pmod{1} =$$

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i+1}}{2^i},$$

Sea $A = \{0, 1\}$ y para $x = x_0x_1x_2 \dots \in A^{\mathbb{N}}$ pongamos $\psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$, definida como $\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \in [0, 1]$, ya que todo número en $[0, 1]$ tiene una expresión binaria y en $A^{\mathbb{N}}$ no hay restricciones entre las configuraciones posibles ψ es suprayectiva, sin embargo no es inyectiva, pues la imagen bajo ψ de $0111\dots$ y $1000\dots$ es $1/2$, por lo que ψ solo define una semiconjugación entre T y $\sigma : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$.

Las conjugaciones tiene un rol fundamental para describir la conexión entre los sistemas dinámicos abstractos (X, f) y los espacios simbólicos (Σ_T, σ) , para ver esto consideramos una partición finita $\mathcal{P} = \{P_n\}$ del espacio X y dado un punto $x \in X$ introducimos la función *itinerario*, la cual está definida como $i_k(x) = n$ si $f^k(x) \in P_n$, esta función describe la trayectoria de un punto a lo largo del tiempo. A partir de i_k podemos realizar una codificación del espacio como sigue, para cada x ponemos $i(x) = i_0(x)i_1(x)i_2(x)\dots$, ya que esta codificación depende de la partición elegida del espacio fase, nos preguntamos cuál o cuáles particiones del espacio nos permiten obtener una mejor codificación del sistema, en el sentido de que (al menos se satisfaga que) para cada par de puntos $x \neq y \in X$ sus codificaciones sean diferentes, esto es, $i(x) \neq i(y)$, a dichas particiones se les conoce en la literatura como particiones de Markov (ver definición 17). Sin embargo como se menciona en [4], aún en la mejor de las situaciones, cada punto del espacio fase podría tener más de una codificación. A continuación ilustraremos un ejemplo de una codificación.

Ejemplo 2. Sea $X = S^1 = [0, 1]/ \sim$, donde \sim denota la relación de equivalencia en $[0, 1]$ que identifica los extremos del intervalo, consideramos T de S^1 en sí mismo definida como $T(x) = 2x \pmod{1}$ y la partición del intervalo dada por $I_0 = [0, 1/2)$, $I_1 = [1/2, 1)$, es fácil ver que $i(x)$ es la expresión binaria de $x \in [0, 1)$, y que i no es una biyección entre $[0, 1]$ y $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, pues no existe $x \in [0, 1]$ tal que $i(x) = 0111\dots$.

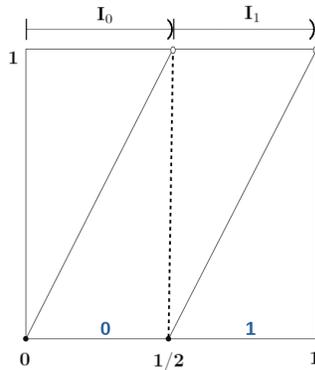


Figura 3.1: Gráfica de $2x \pmod{1}$, ejemplo 2.

Un ejemplo más interesante que muestra la posibilidad de conjugar sistemas dinámicos con subshift de tipo finito es el siguiente, donde una vez más identificamos al 0 con el 1:

Ejemplo 3. Sea $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ dada por $f(x) = 2x$ si $x \in [0, 1/2)$ y $f(x) = x - 1/2$ si $x \in [1/2, 1)$, entonces tomando $I_0 = [0, 1/2)$ e $I_1 = [1/2, 1)$ podemos ver fácilmente que para todo $x \in I_1$, $f(x) \in I_0$, mientras que para $x \in I_0$ se tiene que $f(x) \in I_0$ cuando $x \in [0, 1/4)$ y $f(x) \in I_1$ cuando $x \in [1/4, 1/2)$, por tanto concluimos que al codificar $([0, 1), f)$ jamás obtenemos una sucesión con un 2 seguido de un 2, por lo que parece más prudente usar para la codificación de este sistema un subshift de tipo finito, para ello ponemos

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y consideramos Σ_T .

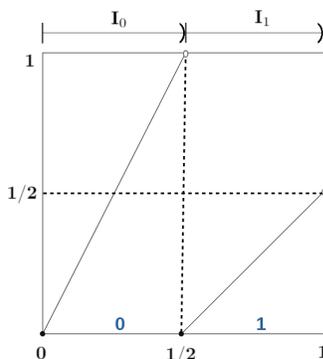


Figura 3.2: Gráfica de $f(x)$, ejemplo 3.

Antes de continuar con nuestra exposición, vale la pena señalar que es posible visualizar a los elementos tanto del full shift, como a los de un subshift de tipo finito, como caminos sobre un grafo, para ello dada una matriz de transición T de tamaño $N \times N$, el grafo G_T asociado con T está dado por los vértices v_1, \dots, v_N , donde v_i y v_j están conectados por una flecha de v_i a v_j si y solo si $A_{ij} = 1$. Sin pérdida de generalidad identificaremos a cada vértice del grafo con su índice, esto es, escribiremos i en lugar de v_i .

Ejemplo 4. Para la matriz T del ejemplo 3, el grafo asociado es representado en la figura 3.3.

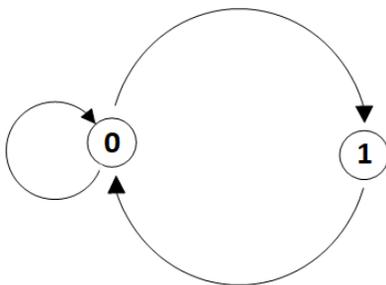


Figura 3.3: G_T , ejemplo 4

En el siguiente ejemplo mostramos como utilizar los espacios simbólicos para obtener información acerca de los puntos periódicos de sistemas más generales, en este caso una vez más consideraremos el sistema dado en el ejemplo 1.

Ejemplo 5. Si bien la transformación ψ definida en el ejemplo 1 no es una conjugación entre f y σ , sí está cerca de serlo, pues los puntos en los que falla para ser inyectiva son solo un número contable de puntos,

los cuales tienen la forma 2^{-k} , $k = 1, 2, 3, \dots$, aprovechando esta información podemos probar utilizando el full shift en dos símbolos que $f(x) = 2x \bmod 1$ tienen $2^n - 1$ puntos periódicos de período n , para ello basta con ver que los puntos periódicos bajo σ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, son todas aquellas sucesiones $x = x_0x_1\dots$ tales que $x_i = x_{n+i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, ya que en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ no hay prohibiciones se sigue que existen 2^n puntos periódicos bajo σ , usando el hecho de que $\psi(000\dots) = 0 \sim 1 = \psi(111\dots)$ concluimos que en $f(x) = 2x \bmod 1$, tiene $2^n - 1$ puntos periódicos. Por ejemplo $\overline{00} \sim \overline{11}$, $\overline{01}$ y $\overline{10}$ son los únicos puntos periódicos de período 2 para σ , los cuales corresponden con $0, 1/3, 2/3$ respectivamente, de igual forma es fácil probar que los únicos puntos periódicos de período 3, son $0, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7$ y $6/7$, los cuales están asociados a las sucesiones periódicas $\overline{000} \sim \overline{111}, \overline{001}, \overline{010}, \overline{011}, \overline{100}, \overline{101}$ y $\overline{110}$ respectivamente.

Si bien en este caso fue suficiente utilizar una semiconjugación para determinar el número de puntos periódicos de período n del sistema, este no es un resultado general, pues como mostraremos en el siguiente ejemplo existen sistemas semiconjugados f y g vía una transformación ψ , para los cuales $\psi(y)$ es un punto periódico de período n de f , pero y no es un punto periódico para g .

Ejemplo 6. Sea $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ definida como $F(x, y) = (2x, y/2)$ si $x \in [0, 1/2)$ y $F(x, y) = (2x - 1, (y + 1)/2)$ si $x \in [1/2, 1)$, entonces utilizando $\pi_1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1)$, dada por $\pi_1(x, y) = x$, podemos ver que F y $f(x) = 2x \pmod{1}$ son semiconjugados. Sin embargo, a diferencia de la semiconjugación del ejemplo anterior, en este caso tenemos que $\pi_1(1/3, 4/5) = 1/3$ es un punto periódico para f , pero $(1/3, 4/5)$ no es periódico para F .

Por lo tanto del ejemplo anterior podemos concluir que cuando dos espacios (X, f) y (Y, g) son semiconjugados vía una transformación $\psi : Y \rightarrow X$ pueden existir más puntos periódicos en X que en Y .

A fin de esclarecer que es una partición de Markov del espacio fase, incluimos la siguiente definición.

Definición 17. Si el sistema (X, f) admite una partición $\{P_n\}$ del espacio fase que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada k , $f : P_k \rightarrow f(P_k)$ es una biyección y,
 - a) $P_l \subset f(P_k)$ cuando $f(P_k) \cap P_l \neq \emptyset$, si f es no invertible.
 - b) Si f no es invertible: $f(P_k)$ se extiende completamente a través de X en la dirección de expansión siempre que $f(P_k) \cap P_l \neq \emptyset$, y $f^{-1}(P_k)$ se extiende completamente a través de P_l en la dirección de contracción siempre que $f^{-1}(P_k) \cap P_l \neq \emptyset$.

Entonces decimos que el sistema admite una partición de Markov del espacio fase.

Las particiones de Markov nos permiten codificar la dinámica en X , el resultado de esta codificación es un subshift unilateral de tipo finito cuando la transformación es no invertible, mientras que sí lo es, entonces su codificación puede ser representada por uno bilateral.

En esta sección mostramos que la función itinerario nos permite codificar un sistema dinámico, esto es importante, pues de la proposición 1 y la observación 1, podemos concluir que los sistemas dinámicos simbólicos pueden ser utilizados para analizar sistemas dinámicos discretos, ya que muchas de las propiedades de estos últimos se ven reflejas en su codificación, por ejemplo la transitividad topológica, el hecho de que f sea mixing, el que f tenga puntos fijos, puntos periódicos o elementos con órbitas densas.

4. Medidas de Gibbs

En este capítulo definimos la medida de Gibbs y presentamos las condiciones que garantizan su existencia, la demostración de la existencia de esta medida se realiza en el capítulo 6, ya que la herramienta principal que permite probar este resultado es el operador de Ruelle, cuya definición y propiedades son presentadas en el capítulo 5.

Las medidas de Gibbs relacionan la dinámica hiperbólica con las cadenas de memoria infinita. Estas últimas son una generalización de las cadenas de Markov, permitiendo que la probabilidad de un estado no sólo pueda depender de un número finito de estados anteriores, sino de una infinidad. En este caso la probabilidad condicional de estar en un estado que depende de todo el «pasado» está determinada por una función especial [28]. En el contexto del formalismo termodinámico, a esa función se le llama **potencial**. Para ser más precisos tenemos las siguientes definiciones y resultados.

Sea $C(\Sigma_T)$ el espacio de funciones continuas de Σ_T a \mathbb{R} , para $f \in C(\Sigma_T)$ y $m \geq 0$, el módulo de continuidad de f está dado por la expresión

$$\text{var}_m f := \sup \{ |f(x) - f(y)| : x_i = y_i, i = 0, 1, \dots, m-1 \}. \quad (4.1)$$

Dado que Σ_T es compacto, $f \in C(\Sigma_T)$ necesariamente es uniformemente continua, y por tanto $\text{var}_m f$ tiende a cero cuando m tiende a infinito. La siguiente observación nos permite caracterizar al espacio de funciones Lipschitz a partir de la variación, para ello recordemos que una función $f : \Sigma_T \rightarrow \mathbb{R}$ se dice Lipschitz continua si existe una constante $C > 0$, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C d_\theta(x, y) \text{ para todo } x, y \in \Sigma_T. \quad (4.2)$$

Sea $m = \sup\{i : x_i = y_i\} \geq 0$, tomando supremos de ambos lados de la desigualdad anterior tenemos $\text{var}_m f \leq C\theta^m$. Por otro lado la desigualdad $|f(x) - f(y)| \leq \text{var}_m f$ siempre se verifica, por lo que tenemos:

Observación 2. $f : \Sigma_T \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz respecto de d_θ si y solo si $\text{var}_m f \leq C\theta^m$, para cada $m = 0, 1, 2, \dots$.

De particular interés en este trabajo de tesis es el espacio de funciones Lipschitz con respecto a d_θ , usando la observación anterior podemos caracterizar a este espacio como sigue:

$$\mathcal{F}_\theta := \{f \in C(\Sigma_T) : \text{var}_k f \leq C\theta^k, C > 0, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

El objetivo de esta sección se centra en dar condiciones para garantizar la existencia de las medidas de Gibbs, para dicho propósito el siguiente lema juega un papel fundamental:

Lema 2 ([19]). *El shift $\sigma : \Sigma_T \rightarrow \Sigma_T$ es topológicamente mixing si y solo si existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $T^M > 0$, es decir, $T_{i,j}^M > 0$ para todo i, j .*

En el contexto de los subshifts de tipo finito, la existencia de medida de Gibbs para potenciales Lipschitz está estrechamente ligada al hecho de que el sistema (Σ_T, σ) satisfaga la condición de ser topológicamente mixing o equivalentemente a que alguna potencia de la matriz subyacente al sistema sea una matriz estrictamente positiva. Recordemos que cuando la matriz de transición es tal que $T_{i,j} = 1$, para todo i, j , recobramos el full shift, por tanto cualquier resultado enunciado para subshifts de tipo finito es válido para el full shift. Además, es importante enfatizar que el espacio $(A^{\mathbb{N}}, \sigma)$ trivialmente es topológicamente mixing, en consecuencia preferimos enunciar el siguiente resultado debido a Bowen en [19] en el contexto de los subshifts de tipo finito.

Teorema 3 ([19]). *Si Σ_T es topológicamente mixing y $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, entonces existe una única medida de probabilidad σ -invariante μ_ϕ definida sobre Σ_T , para la cual existen constantes $C \geq 1$ y P tales que*

$$C^{-1} \leq \frac{\mu_\phi[z_0^{m-1}]}{e^{S_m \phi(z) - mP}} \leq C \text{ para todo } z = z_0 z_1 z_2 \cdots \in \Sigma_T, \quad (4.3)$$

donde $S_m \phi := \sum_{k=0}^{m-1} \phi \circ \sigma^k$ y $[z_0^{m-1}]$ denota el cilindro de tamaño m basado en z . Más aún, μ_ϕ es mixing, esto es, para cualquiera dos abiertos U, V de Σ_T , $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\phi(U \cap T^{-n}V) = \mu_\phi(U)\mu_\phi(V)$.

La prueba de este teorema se basa en las propiedades espectrales del operador de Ruelle, el cual definiremos en la sección 5, dichas propiedades están capturadas en el teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, ver teorema 5 en dicha sección.

A la medida μ_ϕ se le conoce como *medida de Gibbs* asociada al potencial ϕ . Mientras que, a la constante P se le conoce como *presión topológica* de ϕ y está dada por la siguiente expresión

$$P(\phi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \sum_{x^* \in [a_0^{m-1}]} e^{\sum_{k=0}^{m-1} \phi(\sigma^k x^*)}, \quad (4.4)$$

donde a_0^{m-1} es una cadena de símbolos permitida en Σ_T .

Observación 3. *Es importante señalar que siempre podemos asumir que $P = 0$, para ver esto basta considerar el potencial $\phi - P(\phi)$, para el cual se obtiene la misma medida de Gibbs, ver [19].*

Con el propósito de enfatizar la importancia de las medidas de Gibbs, incluimos el siguiente resultado, llamado *principio variacional* por su paralelismo con los principios variacionales de la física estadística.

Teorema 4 ([19]). *Sea $\phi : \Sigma_T \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial tal que $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, entonces*

$$P(\phi) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_T)} (h_\nu(\sigma) + \int \phi d\nu).$$

Donde $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma_T)$ denota el espacio de medidas σ -invariantes, esto es, $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_T)$ si y solo si $\nu(\sigma^{-1}B) = \nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$, h_ν denota la entropía topológica del sistema.

Antes de continuar señalamos que por conveniencia y claridad en la exposición postergaremos la definición precisa e interpretación de entropía topológica hasta la sección 7.

El principio variacional es un resultado importante en el formalismo termodinámico, porque exhibe una clase de medidas particulares, aquellas medidas σ -invariantes que alcanzan el supremo. Además que relaciona a la entropía topológica con el promedio del potencial (a esta cantidad se le suele denominar en la literatura como *energía*) respecto a la medida ν . De forma análoga a como se definen las medidas de equilibrio en la mecánica estadística. De ahí la definición siguiente:

Definición 18. Una medida σ -invariante $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_T)$ es llamada **medida de equilibrio** para el potencial ϕ si satisface que:

$$P(\phi) = h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu.$$

El teorema 8 junto con el la igualdad (7.6) presentados en la sección 7 prueban la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Las medidas de Gibbs con potenciales Lipschitz en subshifts de tipo finito resultan ser medidas de equilibrio [19].

5. El operador de Ruelle, propiedades espectrales y aplicaciones

En este capítulo comenzamos por describir el operador de Ruelle, el cual es la herramienta principal para probar la existencia de una medida de Gibbs en sistemas dinámicos simbólicos (ver teorema 3), además sus propiedades son esenciales para garantizar una desigualdad de concentración exponencial y la estimación su constante de concentración para el caso en que al alfabeto que define el sistema es finito (ver teorema 17 e igualdad (9.13), respectivamente). Además vale la pena señalar que el teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (teorema 5) generaliza el teorema de Perron-Frobenius, el cual por su importancia en las aplicaciones a modelos económicos (modelo de Leontief) enunciamos en el apéndice A.1.

5.1. Operador de Ruelle

Dado el *shift*, se define el *operador de transferencia* \mathcal{L}_ϕ , también llamado *operador de Ruelle* asociado al potencial ϕ y a la dinámica σ , el actúa sobre las funciones continuas como sigue:

$$\mathcal{L}_\phi f(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}x} e^{\phi(y)} f(y). \quad (5.1)$$

Este operador nos dice esencialmente qué le pasa a las funciones bajo la dinámica.

La versión analítico funcional del teorema de Perron-Frobenius ([46]-[29]) es debida a Ruelle y establece que para $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, el operador de Ruelle actuando sobre el espacio de funciones continuas tiene un eigenvalor simple maximal $\lambda_\phi > 0$ asociado a una eigenfunción estrictamente positiva h . Este teorema además establece que para el operador dual \mathcal{L}_ϕ^* que actúa sobre el espacio de medidas, existe una eigenmedida de probabilidad ν asociada al mismo eigenvalor λ , de forma que $\int h d\nu = 1$ y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \lambda^{-m} \mathcal{L}_\phi^m g - h \int g d\nu \right\|_\infty = 0, \quad (5.2)$$

para todas las funciones continuas g definidas sobre el *full shift* [10, 19]. Esto es que las funciones continuas bajo la acción del operador convergen a la función propia, o en su versión dual, dice que las medidas convergen a la medida invariante bajo la dinámica. Más aún, el teorema asegura que el espectro del operador \mathcal{L}_ϕ sin considerar al eigenvalor λ_ϕ está contenido en un disco de radio $\rho\lambda_\phi$ con $\rho \in (0, 1)$, cuando este actúa sobre el espacio \mathcal{F}_θ , ver [59].

El teorema de Ruelle-Perron-Frobenius garantiza que el radio espectral es justamente el eigenvalor $\lambda_\phi > 0$, mientras que el radio esencial tiene magnitud $\rho\lambda_\phi$ para algún $\rho \in (0, 1)$, cuando \mathcal{L}_ϕ actúa sobre el espacio de funciones Lipschitz. Este resultado implica la existencia de un hueco entre el eigenvalor maximal y el resto del espectro, lo cual tiene varias consecuencias importantes sobre las propiedades estadísticas

del sistema dinámico simbólico $(\Sigma_T, \mathcal{B}, \sigma, \mu_\phi)$, por ejemplo, el teorema del límite central, decaimiento de correlaciones y concentración.

5.2. El Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius

En esta sección enunciamos el teorema del Ruelle-Perron-Frobenius, para lo cual definimos, para cada $g \in \mathcal{F}_\theta$:

$$\|g\|_\theta := \sup \left\{ \frac{\text{var}_k g}{\theta^k} : k \geq 0 \right\} \quad \text{y} \quad \|g\|_\theta := \|g\|_\theta + \|g\|_\infty.$$

Note que para $g \in \mathcal{F}_\theta$, $\|g\|_\theta$ es simplemente su mínima constante Lipschitz, por otro lado $\|\cdot\|_\theta$ define una norma sobre \mathcal{F}_θ , bajo la cual este espacio es un espacio de Banach. Además es fácil probar que para todo $g \in \mathcal{F}_\theta$, la siguiente desigualdad se satisface $\|g\|_\infty \leq \|g\|_\theta$.

Supongamos que matriz de transición T es irreducible y aperiódica, es decir, $T^M > 0$, para algún entero positivo M , pongamos $b = b_\theta = \max\{1, \|\phi\|_\theta\}$. Antes de proseguir hacemos señalamos que el siguiente teorema es válido cuando el alfabeto A es finito.

Teorema 5 ([59]). (*Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius*)

- a) Existe una única $\lambda > 0$, una medida de probabilidad ν sobre Σ_T y una función positiva $h \in \mathcal{F}_\theta$ tal que $\mathcal{L}_\phi h = \lambda h$ y $\mathcal{L}^* \nu = \lambda \nu$, más aún $\int h d\nu = 1$ (o equivalentemente $\nu(h) = 1$). El radio espectral de \mathcal{L}_ϕ como operador sobre \mathcal{F}_θ es λ y su espectro esencial es $\theta\lambda$. La eigenfunción satisface

$$\frac{1}{K} \leq h \leq K, \quad \|h\|_\theta \leq BbK,$$

donde $K = Bb^{r_0}$ y

$$B = \frac{e^{\frac{2\theta}{1-\theta}} N^{M+1} e^{2(M+1)\|\phi\|_\infty}}{1-\theta}, \quad r_0 = \frac{\log N + 2\|\phi\|_\infty}{|\log \theta|}.$$

- b) La medida de probabilidad $\mu = h\nu$ es σ -invariante.
- c) Tenemos que $\text{spec}_\theta(\mathcal{L}_\phi) \cap \{x \in \mathbb{C} : |x| = \lambda\} = \{\lambda\}$. Más aún es un eigenvalor simple para λ_ϕ y cada $z \in \text{spec}_\theta(\mathcal{L}_\phi)$ con $|z| < \lambda$ satisface $|z| \leq \rho\lambda$, donde

$$\rho = 1 - \frac{1-\theta}{8K^3} \in (0, 1).$$

- d) Definiendo $D_\theta = \frac{100K^5 b^3}{1-\theta}$, para cada $g \in \mathcal{F}_\theta$ y cada entero $n \geq 0$, tenemos

$$\left\| \lambda^{-n} \mathcal{L}_\phi^n g - h \int g d\nu \right\|_\theta \leq D_\theta \lambda^n \rho^n \|g\|_\theta,$$

Para una prueba completa de este teorema, sugerimos revisar el teorema 2.1 en [59].

El operador de Ruelle es una de las herramientas más importantes en el estudio de las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos, porque precisamente nos dice cómo se modifican las densidades bajo la dinámica. Los puntos fijos del operador son las densidades invariantes correspondientes a las medidas invariantes. Las propiedades espectrales del operador también nos dan información cuantitativa acerca de

la dinámica. Por ejemplo, si el operador presenta hueco espectral en un espacio de Banach adecuado, esto es si el valor propio maximal es estrictamente mayor (en norma) que el resto del espectro, entonces se puede mostrar que la dinámica muestra decaimiento exponencial de las correlaciones [10]. En el caso de medidas de Gibbs en el *full shift*, el operador de Ruelle tiene hueco espectral en el espacio \mathcal{F}_θ , como resultado de que el operador es cuasi-compacto en \mathcal{F}_θ .

6. Demostración del teorema 3

En esta sección probaremos que la medida invariante $\mu = h\nu$ enunciada en el inciso b) del teorema de Ruelle-Perron-Frobenius presentado en el capítulo anterior satisface la condición (4.3) del teorema 3, esto es, probaremos que $\mu = h\nu$ es la única medida σ -invariante sobre Σ_T , para la cual existen constantes positivas C y P tales que

$$C^{-1} \leq \frac{\mu[z_0^{m-1}]}{e^{S_n \phi(z) - mP}} \leq C$$

para todo $z = z_0 z_1 z_2 \cdots \in \Sigma_T$.

Demostración. Dividiremos la prueba del teorema 3 en una serie de lemas auxiliares. Primero probaremos que μ es σ -invariante.

Lema 3. μ es σ -invariante.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{F}_\theta$, de un cálculo directo obtenemos que $(\mathcal{L}f \cdot g)(x) = \mathcal{L}(f \cdot (g \circ \sigma))(x)$, de donde tenemos

$$\mu(f) = \nu(hf) = \nu(\lambda^{-1} \mathcal{L}h \cdot f) = \lambda^{-1} (\mathcal{L}^* \nu)(h \cdot (f \circ \sigma)) = \mu(f \circ \sigma),$$

donde la penúltima desigualdad se sigue de que \mathcal{L}^* es el operador dual de \mathcal{L} con eigenmedida ν (ver inciso a) en el teorema 5). \square

Lema 4. μ es mixing.

Demostración. Dado que $(\mathcal{L}^n f)(x) = \sum_{y \in \sigma^{-n}x} e^{S_n \phi(y)} f(y)$, obtenemos

$$((\mathcal{L}^n f) \cdot g)(x) = \sum_{y \in \sigma^{-n}x} e^{S_n \phi(y)} f(y) g(\sigma^n y) = \mathcal{L}^n(f \cdot (g \circ \sigma^n)).$$

Para $x, y \in \Sigma_T$,

$$\begin{aligned} \mu([x_0^s] \cap \sigma^{-n}[y_0^r]) &= \mu(\chi_{[x_0^s]} \cdot \chi_{\sigma^{-n}[y_0^r]}) = \nu(h\chi_{[x_0^s]} \cdot (\chi_{[y_0^r]} \circ \sigma^n)) = \lambda^{-n} \mathcal{L}^{*n} \nu(h\chi_{[x_0^s]} \cdot (\chi_{[y_0^r]} \circ \sigma^n)) \\ &= \nu(\lambda^{-n} \mathcal{L}^n(h\chi_{[x_0^s]} \cdot (\chi_{[y_0^r]} \circ \sigma^n))) = \nu(\lambda^{-n} \mathcal{L}^n(h\chi_{[x_0^s]}) \cdot \chi_{[y_0^r]}). \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} |\mu([x_0^s] \cap \sigma^{-n}[y_0^r]) - \mu([x_0^s])\mu([y_0^r])| &= |\mu([x_0^s] \cap \sigma^{-n}[y_0^r]) - \nu(h\chi_{[x_0^s]}) \nu(h\chi_{[y_0^r]})| \\ &= |\nu((\lambda^{-n} \mathcal{L}^n(h\chi_{[x_0^s]}) - \nu(h\chi_{[x_0^s]}) h) \chi_{[y_0^r]})| \leq \| \lambda^{-n} \mathcal{L}^n(h\chi_{[x_0^s]}) - \nu(h\chi_{[x_0^s]}) h \| \nu(\chi_{[y_0^r]}) \end{aligned}$$

El lema 1.12 en [19] garantiza la existencia de constantes $A > 0$ y $\beta \in (0, 1)$, tales que para todo $n \geq s$,

$$\|\lambda^{-n} \mathcal{L}^n (h\chi_{[x_0^s]} - \nu (h\chi_{[y_0^r]})) h\| \leq A\mu(\chi_{[x_0^s]})\beta^{n-s},$$

usando que $h > 0$, obtenemos

$$|\mu([x_0^s] \cap \sigma^{-n}[y_0^r]) - \mu([x_0^s])\mu([y_0^r])| \leq A(\inf h)^{-1} \mu(\chi_{[x_0^s]})\mu(\chi_{[y_0^r]})\beta^{n-s}, \quad n \geq s$$

y por tanto

$$\mu([x_0^s] \cap \sigma^{-n}[y_0^r]) \rightarrow \mu([x_0^s])\mu([y_0^r]) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

□

Corolario 1. *La medida $\mu = h\nu$ es ergódica.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{B}$ invariante bajo σ , entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{-n}U = U$, del lema anterior sabemos que μ es mixing, por lo que concluimos que

$$\mu(U)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\sigma^{-n}U \cap U) = \mu(U),$$

de donde $\mu(U) = 0$ o $\mu(U) = 1$, por lo que concluimos el resultado. □

Para concluir que $\mu = h\nu$ es una medida de Gibbs notemos que para $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, $\text{var}_k \phi \leq C\theta^k$ y que dados $a, z \in \Sigma_T$, existe a lo más un $y \in [z_0^{n-1}]$ tal que $\sigma^n y = a$, por lo que $\chi_{[z_0^{n-1}]}(y) = 1$ para a lo más un $y \in \Sigma_T$, dado que $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, se sigue que

$$|S_n \phi(y) - S_n \phi(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \text{var}_k \phi \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k = \frac{C}{1-\theta},$$

usando esta desigualdad junto con el hecho de que $h(x) \leq \|h\|_\infty$, para toda $x \in \Sigma_T$ (esto se sigue de que h es acotada, ver inciso a) en teorema 5) tenemos

$$\mathcal{L}^n (h\chi_{[z_0^{n-1}]}) (a) = \sum_{\sigma^n y = a} e^{S_n \phi(y)} h(y) \chi_{[z_0^{n-1}]}(y) \leq e^{\frac{C}{1-\theta}} \|h\|_\infty e^{S_n \phi(z)}$$

y así

$$\mu([z_0^{n-1}]) = \nu(h\chi_{[z_0^{n-1}]}) = \lambda^{-n} \nu(\mathcal{L}^n(h\chi_{[z_0^{n-1}]})) \leq \lambda^{-n} e^{\frac{C}{1-\theta}} \|h\|_\infty e^{S_n \phi(z)}. \quad (6.1)$$

Por otro lado, por hipótesis $T^M > 0$ para algún $M > 0$, por lo que para cualquier $a \in \Sigma_T$ existe al menos un $y \in [z_0^{n-1}]$ tal que $\sigma^{n+M}(y) = a$, por lo que una vez más utilizando el inciso a) del teorema 5, podemos concluir que $h(x) \geq \inf h$, para todo $x \in \Sigma_T$, de donde

$$\mathcal{L}^{n+M}(h\chi_{[z_0^{n-1}]}) (a) \geq e^{S_{n+M} \phi(y)} h(y) \geq e^{-M\|\phi\|_\infty} e^{-\frac{C}{1-\theta}} (\inf h) e^{S_n \phi(z)},$$

de donde

$$\mu[z_0^{n-1}] = \lambda^{-n-M} \nu(\mathcal{L}^{n+M}(h\chi_{[z_0^{n-1}]})) \geq \lambda^{-n-M} e^{-M\|\phi\|_\infty} e^{-\frac{C}{1-\theta}} e^{S_n \phi(z)}. \quad (6.2)$$

De (6.1) y (6.2), tenemos la siguiente desigualdad

$$C_1 \leq \frac{\mu[z_0^{n-1}]}{\lambda^{-n} e^{S_n \phi(z)}} \leq C_2,$$

donde $C_1 = \lambda^{-M} e^{-M\|\phi\|_\infty} e^{\frac{C}{1-\theta}}$ y $C_2 = e^{\frac{C}{1-\theta}} \|h\|_\infty$, para concluir ponemos $P = \log \lambda$ y $C = \max\{C_1^{-1}, C_2\}$, de donde se obtiene

$$C^{-1} \leq \frac{\mu[z_0^{n-1}]}{e^{S_n \phi(z) - nP}} \leq C, \quad (6.3)$$

por tanto concluimos que $\mu = h\nu$ es una medida de Gibbs.

Observación 4. *Note además que $P = \log \lambda$, nos dice que la presión topológica coincide con el logaritmo del eigenvalor de módulo máximo del operador de transferencia \mathcal{L} .*

Para concluir la prueba del teorema 3 resta probar la unicidad de la medida μ , para ello proseguimos como sigue:

Si μ' es otra medida que cumple la propiedad (6.3) con constantes C' y P' . Dado un conjunto finito \mathcal{C}_n de Σ_T con la propiedad de que $\bigcup_{x \in \mathcal{C}_n} [x_0^{n-1}] = \Sigma_T$, obtenemos

$$C'^{-1} e^{P'n} \sum_{x \in \mathcal{C}_n} e^{S_n \phi(x)} \leq \sum_{x \in \mathcal{C}_n} \mu'([x_0^{n-1}]) = 1 \leq C' e^{P'n} \sum_{x \in \mathcal{C}_n} e^{S_n \phi(x)},$$

por lo que

$$\frac{1}{n} \log \left(C'^{-1} \sum_{x \in \mathcal{C}_n} e^{S_n \phi(x)} \right) \leq P' \leq \frac{1}{n} \log \left(C' \sum_{x \in \mathcal{C}_n} e^{S_n \phi(x)} \right),$$

por tanto concluimos que $P' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{x \in \mathcal{C}_n} e^{S_n \phi(x)} \right)$, lo cual es independiente de μ' y por ende podemos concluir $P' = P$.

Una vez más utilizando (6.3), junto con el hecho de que $P' = P$ obtenemos para todo $[x_0^{n-1}]$

$$\frac{C'^{-1}}{C} \leq \frac{\mu'([x_0^{n-1}])}{\mu([x_0^{n-1}])} \leq \frac{C^{-1}}{C'},$$

por lo que μ y μ' tienen los mismos conjuntos nulos y así ambas medidas son equivalentes (es decir, ambas medidas tienen los mismos conjuntos de medida nula), del teorema de Radom-Nikodym $\mu' = f\mu$ para alguna función integrable f con respecto de μ , ya que μ es ergódica, el teorema de Birkhoff aplicado a f nos asegura que

$$\int f d\mu' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n f(x) = \int f d\mu = \int d\mu',$$

por lo que $f = 1$ casi en todas partes, y así $\mu' = \mu$. □

7. Complejidad del full-shift

En el capítulo 3 señalamos (sin prueba) que una de las características principales de las medidas de Gibbs es la de satisfacer el principio variacional, el cual afirma que la presión topológica se alcanza tomando el supremo de la entropía más la energía sobre todas las medidas de probabilidad σ -invariantes. Antes de definir la entropía del sistema, sus características e interpretación, fijamos la siguiente notación.

Dado un sistema dinámico medible (X, f, \mathcal{B}) y dos particiones \mathcal{P} y \mathcal{Q} de X , ponemos

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q : P \in \mathcal{P} \text{ y } Q \in \mathcal{Q}\}$$

y $f^{-1}\mathcal{P} = \{f^{-1}(P) : P \in \mathcal{P}\}$. Entonces definimos

$$\mathcal{P}_n = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\mathcal{P} := \mathcal{P} \vee f^{-1}\mathcal{P} \vee \dots \vee f^{n-1}\mathcal{P}.$$

Entonces, la *entropía topológica* es un número no negativo que mide la tasa de crecimiento exponencial del número de órbitas distinguibles cuando el sistema evoluciona. Formalmente la *entropía topológica* está dada por

$$h_{top}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log |\mathcal{P}_n|.$$

Se puede demostrar que esta cantidad es independiente de la partición que se considere, lo cual enunciaremos sin demostración a continuación (ver [19]), pero antes definiremos la entropía.

Sea $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $\varphi(x) = -x \log x$ si $x \neq 0$ y $\varphi(0) = 0$. Si μ es una medida de probabilidad sobre (X, f, \mathcal{B}) y \mathcal{P} una partición finita de X , ponemos

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \varphi(\mu(P)) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log(\mu(P)),$$

definimos la *entropía de μ con respecto de \mathcal{P}* como la cantidad

$$H_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\mathcal{P} \right),$$

y la *entropía de μ* como sigue:

$$h_\mu(f) = \sup \{H_\mu(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es una partición finita de } X\}. \quad (7.1)$$

En la práctica resulta difícil estimar $h_\mu(f)$ utilizando (7.1), por lo que el siguiente resultado juega un rol fundamental en la estimación de la entropía y por tanto en la estimación de la entropía topológica.

Teorema 6. *Sea (X, f, \mathcal{B}, μ) un sistema dinámico invariante. Si la partición \mathcal{P} es tal que*

a) $\bigvee_{j=0}^{\infty} f^{-j}\mathcal{P}$ genera a \mathcal{B} , si f es no-invertible.

b) $\bigvee_{j=-\infty}^{\infty} f^{-j}\mathcal{P}$ genera a \mathcal{B} , si f es invertible.

Entonces $h_{\mu}(f) = H_{\mu}(f, \mathcal{P})$.

Por lo que para determinar la entropía es suficiente encontrar una partición del espacio para la cual se satisfaga el teorema anterior, si bien este problema no es sencillo en general, sí lo es para el caso de los sistemas simbólicos, pues esta partición resulta estar dada por los cilindros de tamaño 1. Finalmente enunciamos sin demostración el siguiente resultado,

$$h_{top}(f) = \sup \{h_{\nu}(f) : \nu \text{ es una medida de probabilidad } f\text{-invariante}\}. \quad (7.2)$$

Del principio variacional enunciado a continuación, se sigue que $h_{top}(f) = P(0)$.

Recordemos que para el caso de sistemas dinámicos simbólicos sobre alfabetos finitos la presión topológica de un potencial ϕ está dada por expresión (4.4). Esto será relevante en los siguientes resultados.

Teorema 7. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, $f : X \rightarrow X$ una función continua y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial continuo. Entonces*

$$P(\phi) = \sup \left\{ h_{\nu}(T) + \int \phi d\nu : \nu \text{ es una medida de probabilidad } \sigma\text{-invariante} \right\}. \quad (7.3)$$

Para el caso en que el sistema dinámico en cuestión sea el full shift, este resultado fue enunciado en teorema 4 en la sección 4. Al combinar dicho resultado con el siguiente teorema, cuya demostración puede ser revisada en [19] (teorema 1.22), podemos concluir que las medidas de Gibbs son medidas de equilibrio del sistema. Es importante señalar que el siguiente resultado es válido para sistemas simbólicos sobre alfabetos finitos.

Teorema 8. *Supongamos que $\phi \in \mathcal{F}_{\theta}$, Σ_T es topológicamente mixing y μ_{ϕ} la medida de Gibbs asociada con este potencial. Entonces, μ_{ϕ} es la única medida de probabilidad σ -invariante para cual*

$$P(\phi) = h_{\mu_{\phi}} + \int \phi d\mu_{\phi}. \quad (7.4)$$

Demostración. Ver proposición 1.21 y teorema 1.22 en [19]. □

En particular note que cuando $P(\phi) = 0$, el resultado del teorema anterior nos permite estimar de manera sencilla la energía del potencial, pues bajo esta condición se tiene

$$\int \phi d\mu_{\phi} = -h_{\mu_{\phi}} \quad (7.5)$$

lo que significa que cuando la presión es 0, la energía del potencial es igual a menos la entropía del sistema.

Antes de proseguir con la exposición de esta tesis, consideramos prudente hacer el siguiente señalamiento, el cual clarificará el porqué optamos por señalar que al combinar el resultado del teorema 4 junto con el enunciado en el teorema anterior, nos permiten concluir que las medidas de Gibbs son una medida de equilibrio del sistema, pues a primera vista podría resultar que estamos siendo redundantes en esta conclusión. El punto primordial al escribirlo de esta manera radica en que, la prueba de este teorema presentada en [19] se basa en demostrar que $P(\phi)$ definida por la expresión (4.4) iguala al lado derecho de (7.4), de donde a consecuencia del principio variacional (teorema 4 o teorema 7), el cual como señalamos

con anterioridad, relaciona la presión topológica con el supremo de la entropía más la energía sobre todas las medidas de probabilidad σ -invariantes, se tiene que

$$\sup_{\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_T)} (h_\nu(\sigma) + \int \phi d\nu) = P(\phi) = h_{\mu_\phi} + \int \phi d\mu_\phi. \quad (7.6)$$

lo que nos permite concluir que la medida de Gibbs μ_ϕ asociada a un potencial Lipschitz con respecto de d_θ es una medida de equilibrio del sistema.

7.1. Aplicaciones del principio variacional

En esta sección mostramos algunas aplicaciones del principio variacional, en el primer ejemplo utilizamos este resultado para estimar la entropía y energía de un sistema simbólico. Mientras que el segundo describimos una aplicación a la teoría evolutiva, en particular al modelo de Leslie, en el cual la presión, entropía y energía del sistema tiene una interpretación desde el punto de vista del crecimiento poblacional, vale la pena señalar que este resultado será de suma importancia en las secciones finales de este trabajo.

7.1.1. Ejemplo: Medida de Bernoulli

Consideremos el espacio de todas las sucesiones en dos símbolos, los cuales por conveniencia denotaremos por $A = \{+1, -1\}$, entonces cada $p \in (0, 1)$ define una medida sobre los cilindros $[x_0^{n-1}]$, llamada *medida de Bernoulli*, definida como

$$\mu_p[x_0^{n-1}] = \prod_{i=0}^{n-1} p(x_i), \text{ donde } p(+1) = p \text{ y } p(-1) = 1 - p.$$

Poniendo

$$\phi(x) = \begin{cases} \log p & \text{si } x_0 = +1, \\ \log(1 - p) & \text{si } x_0 = -1 \end{cases} \quad (7.7)$$

es fácil ver que μ_p es una medida de Gibbs con constantes $C = 1$ y $P = 0$, para ello basta ver que

$$\mu_p[x_0^{n-1}] = \prod_{i=0}^{n-1} p(x_i) = \prod_{i=0}^{n-1} e^{\phi(\sigma^i(x))} = \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i(x))\right).$$

Dada una configuración finita $x_0 x_1 \dots x_{n-1}$ de símbolos de A , sabemos que la probabilidad de observar k símbolos $+1$ en dicha configuración está dada por

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

tomando $\mathcal{P} = \{[-1], [+1]\}$ (ver teorema 6), para cualquier cadena finita $x_0^{n-1} \in A^n$ obtenemos

$$\begin{aligned} H_\mu \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \sigma^{-k} \mathcal{P} \right) &= - \sum_{x_0^{n-1}} \mu[x_0^{n-1}] \log \mu[x_0^{n-1}] = - \sum_{x_0^{n-1}} \prod_{i=0}^{n-1} \phi(x_i) \log \prod_{i=0}^{n-1} \phi(x_i) \\ &= - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \log (p^k (1 - p)^{n-k}) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} k \log p \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} (n - k) \log(1 - p) = n(-p \log p - (1 - p) \log(1 - p)), \end{aligned}$$

por lo que

$$h_\mu(\sigma) = H_\mu(\sigma, \mathcal{P}) = -p \log p - (1-p) \log(1-p). \quad (7.8)$$

Usando (7.2) obtenemos $h_{top}(\sigma) = \log 2$, esto es, el sistema muestra máxima incertidumbre cuando $p = 1/2$, entonces si se elige $p = 1/2$ se tiene $h_{\mu_\phi} = h_{top}(\sigma)$, de donde utilizando (7.5), concluimos que en esta situación la medida $\mu_{1/2}$ es la única medida de equilibrio del sistema. Note además que utilizando (7.5) y (7.8), concluimos que cuando el potencial ϕ está definido por (7.7), la *energía del potencial* está dada por

$$\int \phi d\mu_\phi = p \log p + (1-p) \log(1-p). \quad (7.9)$$

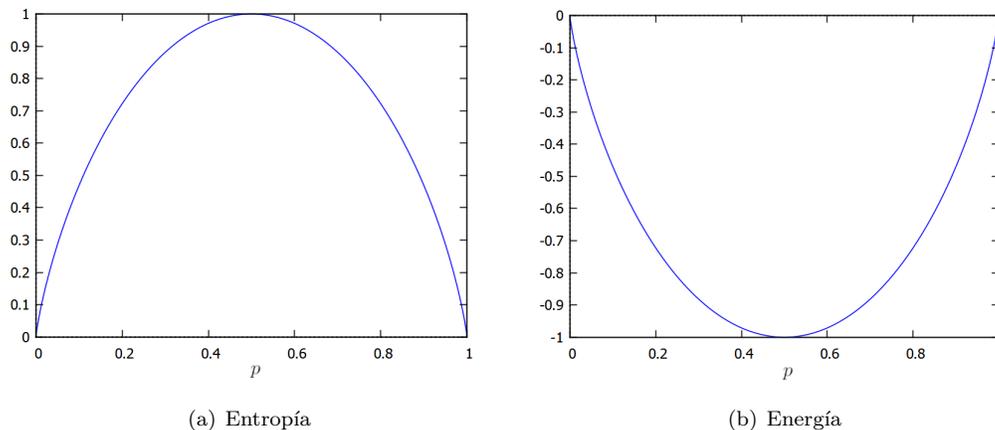


Figura 7.1: Gráfica de la entropía y energía del potencial en función de la probabilidad p (ejemplo: medida de Bernoulli).

En esta sección hemos mostrado que la medida de Bernoulli es de hecho un ejemplo de una medida Gibbs cuya presión topológica es 0, esto nos permitió estimar, vía el principio variacional, la energía del potencial, la cual como vimos en este caso sencillo es simplemente menos la entropía del sistema.

8. Propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos

En este capítulo discutimos la importancia de estudiar las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos para analizar sistemas que exhiben caos en el sentido de Devaney [26], para esto comenzaremos la sección 8.1 definiendo qué es un sistema caótico y sus principales características, en la sección 8.2 enunciaremos los tres teoremas límite de la estadística: la ley fuerte de los grandes números, el teorema del límite central y el principio de grandes desvíos. En la sección 8.3 relacionamos el primero con el teorema ergódico de Birkhoff y enunciaremos el teorema del límite central para sistemas dinámicos. Finalmente en la sección 8.4 discutimos los resultados existentes sobre desigualdades de concentración y como estos son consistentes con el principio de grandes desvíos.

8.1. Sistemas caóticos

Un sistema dinámico (X, f) es caótico en el sentido de Devaney en [26], si se satisface:

Definición 19. *Un sistema dinámico $f : X \rightarrow X$ se dice caótico cuando se cumplen las siguientes condiciones:*

- i) f es transitivo,*
- ii) el conjunto de los puntos periódicos de f es denso en X ,*
- iii) f tiene una dependencia sensible a las condiciones iniciales, esto es, existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y todo $\delta > 0$ existe un $y \in X$ y un $n \geq 0$, tal que $d(x, y) < \delta$ pero $d(f^n x, f^n y) \geq \epsilon$.*

Dado que el interés en este trabajo de tesis se centra en estudiar las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos simbólicos, los cuales intrínsecamente están definidos sobre un espacio compacto (para la topología producto), en lo subsecuente, a menos que se especifique lo contrario, siempre supondremos que el espacio X es compacto. Esto será relevante más adelante, pues bajo este supuesto se tiene que la propiedad de ser topológicamente mixing implica transitividad.

Proposición 2. *Dado un alfabeto finito A y una matriz de transición T . El full shift $\sigma : \Sigma_T \rightarrow \Sigma_T$ satisface las condiciones i), ii), iii) anteriores, si existe un $M > 0$ tal que $T^M > 0$.*

Esta proposición nos dice que la propiedad de mezclado del mapeo σ implica que este es caótico.

Demostración. El lema 2 en el capítulo 2 de este trabajo garantiza que $T^M > 0$ para algún entero positivo M si y solo si σ es mixing, por lo que las hipótesis de la proposición 2 implican que σ es transitivo, y así la condición i) en la definición anterior se cumple, pues Σ_T es compacto.

Para probar ii) procedemos como sigue: dado $\epsilon > 0$ y $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ un punto arbitrario en Σ_A . Sea n el menor entero positivo tal que $\theta^n < \epsilon$. Dado que $T^M > 0$ existe (a lo más) un camino de tamaño M que conecta a x_n con x_0 , esto es, $(x_n = z_0, \dots, z_{M-2}, z_{M-1} = x_0)$, por lo que poniendo

$y = (x_0 \dots x_n z_1 \dots z_{M-2} x_0)^1$ obtenemos un punto periódico tal que $d(x, y) \leq \theta^n < \epsilon$, de donde concluimos que el conjunto de puntos periódicos de σ es denso en Σ_T .

Sea $x \in \Sigma_T$ y $\delta > 0$ arbitrarios, consideremos un $y \in \Sigma_T$ para el cual $d(x, y) = \theta^N < \delta$, entonces $d(\sigma^N x, \sigma^N y) = 1 > 1/2 =: \epsilon$, de donde se sigue *iii*). \square

Los sistemas caóticos muestran una dependencia sensible a las condiciones iniciales en el sentido de que para puntos arbitrariamente cercanos sus órbitas muestran comportamientos muy diferentes, como se menciona en [33] los sistemas caóticos son deterministas mas no predecibles, pues si se conoce el estado inicial del sistema, entonces todos los estados futuros también serán conocidos. Sin embargo un pequeño error en la determinación del estado inicial puede provocar grandes cambios en las observaciones futuras, por lo que en esta clase de sistemas se prefiere el estudio de las propiedades estadísticas del sistema en lugar del estudio global de las órbitas de puntos típicos en el espacio X . Vale la pena señalar que aún cuando en los sistemas dinámicos caóticos la predicción puntal a largo plazo en general no es posible, en la mayoría de los casos sí lo es la estimación de promedios y demás propiedades estadísticas, por ejemplo es posible estimar la probabilidad de que el sistema se ubique en una región dada $R \subset X$ en cualquier momento del tiempo, ver [30]. Dicha estimación suele hacerse utilizando medidas de probabilidad intrínsecas al sistema o de características de interés desde diferentes puntos de vista. En general una característica que suele buscarse en las medidas μ definidas sobre el sistema (X, \mathcal{B}, f) es la ergodicidad, pues no solo en este contexto es donde se pueden obtener mayor cantidad de resultados relevantes sobre las propiedades estadísticas del sistema, si no que además como se demuestra en [6], [57] y [64] entre otros, una clase amplia de sistemas caóticos poseen de manera natural de una medida ergódica. Finalmente cabe señalar que las medidas contienen información sobre el comportamiento estadístico del sistema (X, f) y sobre el comportamiento de los promedios de observables a lo largo de trayectorias típicas del sistema, por lo que el estudio de las propiedades estadísticas de los sistemas caóticos, en lugar del estudio individual de las trayectorias individuales de diferentes puntos en X , se vuelven de suma importancia en este contexto.

8.2. Teoremas límite: Procesos independientes e idénticamente distribuidos

A fin de mostrar la importancia de estudiar las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos en esta sección enunciamos los tres teoremas límites: Ley de los grandes números, teorema del límite central y principio de grandes desvíos. Por completitud consideraremos el caso de procesos estocásticos i.i.d., como veremos en la siguiente sección para el caso de sistemas dinámicos (X, f) debemos considerar el proceso $\{X_n\} := \{g \circ f^n\}$, donde $g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 9 (Ley fuerte de los grandes números). *Sea $\{X_n\}$ un proceso independiente e idénticamente distribuido con distribución \mathbb{P} y esperanza $\mathbb{E}(X) < \infty$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ se tiene que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^n X_j \rightarrow \mathbb{E}(X) \text{ casi ciertamente, cuando } n \rightarrow \infty.$$

Este teorema nos asegura que con probabilidad 1 la sucesión de medias muestrales converge a su valor esperado. Para describir este hecho presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7. *Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatoria independientes e idénticamente distribuidas que toman valores en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con igual probabilidad, entonces para cada $i = 1, \dots, n$, $E(X_i) = 3.5$, luego, la ley fuerte de los grandes números nos garantiza que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge casi ciertamente a 3.5, cuando $n \rightarrow \infty$. La siguiente gráfica ilustra este hecho.*

¹ $(x_0 \dots x_n z_1 \dots z_{M-2} x_0, x_1 \dots x_n z_1 \dots z_{M-2} x_0 \dots)$ denota el punto periódico

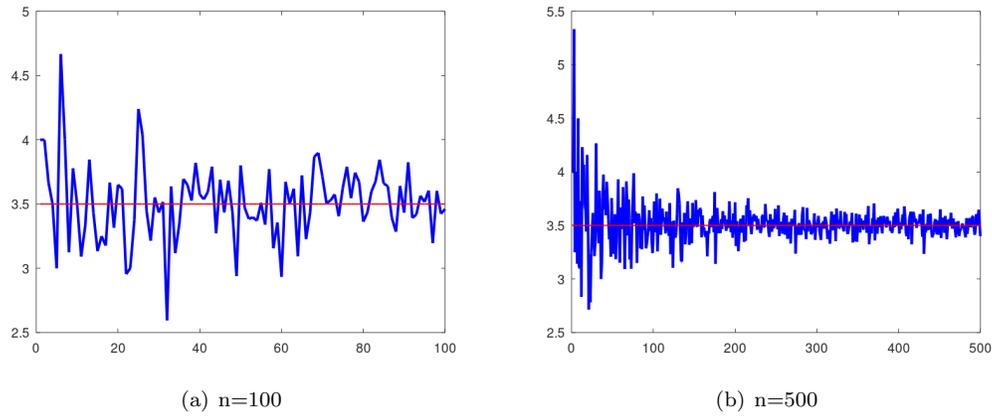


Figura 8.1: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, para $n = 100$ y $n = 500$.

Teorema 10 (Teorema del límite central). *Sea $\{X_n\}$ un proceso independiente e idénticamente distribuido con ley \mathbb{P} , esperanza $\mathbb{E}(X_k)$ y varianza $V(X_k)$ finitas, entonces para todo $t > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} X_k - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{nV(X)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(X)}} \int_{-\infty}^t \exp \left[-\frac{(s - \mathbb{E}(X))^2}{2V(X)} \right] ds.$$

Ejemplo 8. *Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatoria independientes e idénticamente distribuidas que toman valores en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ con igual probabilidad, entonces $\mathbb{E}(X_k) = 5.5$ y $V(X_K) = 8.25$. Para $n = 1000$, $\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \right) = 5.4987$, mientras que para $n = 5000$ se tiene $\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \right) = 5.501$, esto es representado en la figura 8.2.*

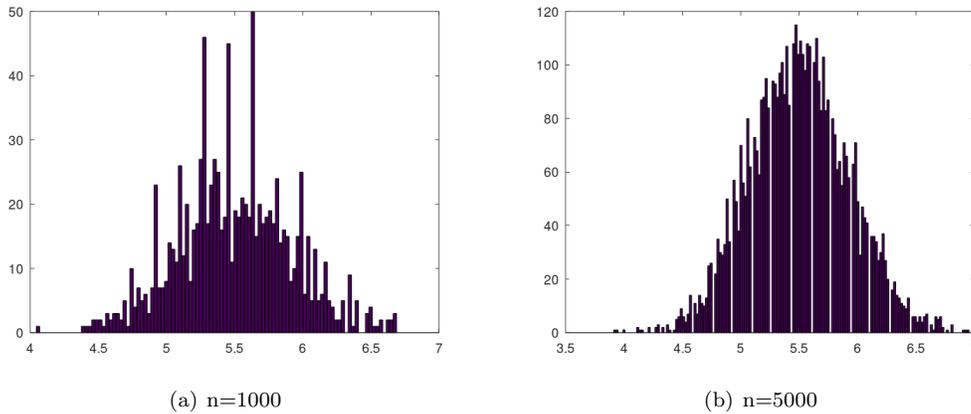


Figura 8.2: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, para $n = 100$ y $n = 500$.

Por último, presentamos una versión para procesos i.i.d. del principio de grandes desvíos.

Teorema 11 (Principio de grandes desvíos). *Sea $\{X_n\}$ un proceso independiente e idénticamente distribuido con ley \mathbb{P} , entonces tenemos que el siguiente límite existe para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k > t \right) = -I(t).$$

A la función $I(\cdot)$ se le llama función tasa y puede ser obtenida explícitamente, de la siguiente forma:

$$I(t) = \sup_{s>0} \{st - \lambda(s)\},$$

donde $\lambda(\cdot)$ es la función generatriz (de momentos),

$$\lambda(s) = \log \mathbb{E}(e^{sX}).$$

En la siguiente sección mostraremos un análogo tanto del teorema del límite central como de la ley de los grandes números para el caso de sistemas dinámicos simbólicos.

8.3. Teoremas límite: Sistemas dinámicos

La dependencia a las condiciones iniciales de un sistema dinámico implican la dependencia del proceso $\{g \circ f^n\}_n$, donde g es una función de X en \mathbb{R} , a la cual llamaremos observable. Sin embargo, aún cuando el sistema puede ser dotado de una medida invariante que satisface la propiedad de mixing, el sistema exhibe una forma de independencia asintótica, pues la propiedad mixing de ser la medida implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}(U) \cap V) = \mu(U)\mu(V), \quad U, V \in \mathcal{B},$$

lo que nos dice que los medibles U y V , vistos como eventos, se vuelven independientes bajo la dinámica. En términos de integrales este límite puede ser reescrito como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_{f^{-n}U \cap V} d\mu = \int \chi_U d\mu \int \chi_V d\mu$$

ya que $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ y $\chi_{f^{-n}A} = \chi_A \circ f^n$, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_U \circ f^n \cdot \chi_V d\mu = \int \chi_U d\mu \int \chi_V d\mu.$$

Dado que este resultado es válido para la característica de cualquier conjunto medible obtenemos para cualesquiera funciones medibles e integrables g_1, g_2 con respecto de μ ($g_1, g_2 \in L^1(\mu)$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_1 \circ f^n \cdot g_2 d\mu = \int g_1 d\mu \int g_2 d\mu. \quad (8.1)$$

A la función

$$C_{g_1, g_2}(l) := \int g_1 \circ f^l \cdot g_2 d\mu - \int g_1 d\mu \int g_2 d\mu. \quad (8.2)$$

se le denomina función de correlación de orden l entre g_1 y g_2 . Si $g_2 = g_1 = g$, escribiremos simplemente $C_g(l)$. Esta cantidad nos ayuda a cuantificar que tan rápido pierde memoria la medida respecto de la dinámica. La igualdad (8.2) nos dice que para cualesquiera dos observables g_1, g_2 , cuando la medida es mixing la correlación tiende a 0, cuando l tiende a infinito. El estudiar el orden de convergencia (a 0) de la función de correlación es fundamental en el estudio de las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos. Un resultado bien conocido y estudiado en el caso en que sistema dinámico está dado por el full shift, es que cuando las observables satisfacen las propiedad de ser Lipschitz, esta convergencia es exponencialmente rápida ([19], [49]). Formalmente este hecho es resumido en el siguiente teorema.

Teorema 12 ([19]). *Si $g_1, g_2 \in \mathcal{F}_\theta$ y $\mu = \mu_\phi$ es el estado de equilibrio asociado con $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, entonces existen constantes $D > 0$ y $\beta \in (0, 1)$ tales que*

$$\left\| \int (g_1 \circ \sigma^n \cdot g_2) d\mu - \int g_1 d\mu \int g_2 d\mu \right\|_\infty \leq D\beta^n \|g_1\|_\theta \|g_2\|_\theta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Es bien sabido que para $g \in \mathcal{F}_\theta$, la autocorrelación de g decae exponencialmente, esto es, $|C_g(N)| = O(\beta^N)$, $\beta \in (0, 1)$. Bajo esta condición en el orden de convergencia (a 0) de la autocorrelación de g , se obtiene un teorema del límite central (ver [19], [49], [56]).

Teorema 13 (Teorema del límite central para el full shift). *Sea $g \in \mathcal{F}_\theta$ y $\mu = \mu_\phi$ es el estado de equilibrio asociado con $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, entonces existe una constante $\xi = \xi(g) \in [0, \infty)$ tal que*

$$\mu \left\{ x \in \Sigma_T : \frac{1}{\sqrt{n}} (S_n g(x) - n\mu(g)) < r \right\} \rightarrow \frac{1}{\xi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^r e^{-x^2/2\xi^2} dx, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Cuando la medida es ergódica, tal es el caso de la medida de Gibbs, el teorema ergódico de Birkhoff que enunciamos a continuación, puede ser visto como la ley fuerte de los grandes números para sistemas dinámicos, para ser precisos tenemos:

Teorema 14 (Teorema Ergódico de Birkhoff [14]). *Sea (X, f, \mathcal{B}) un sistema dinámico medible, si f es una transformación que preserva la medida o equivalentemente μ es f invariante, entonces para cualquier función $g \in L^1(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(f^j x) = \bar{g}(x), \quad (8.3)$$

converge casi ciertamente a una función $\bar{g} \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int g d\mu = \int \bar{g} d\mu.$$

Mientras que si μ es ergódica, se tiene que

$$\int g d\mu = \bar{g}.$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(f^j(x)) = \int g d\mu, \quad (8.4)$$

para casi todo $x \in X$ (con respecto de μ).

El límite (8.4) se puede interpretar como que el comportamiento observado a largo plazo iguala a su valor esperado. En particular dado un medible A , para $g = \chi_A$, (8.4) se transforma en

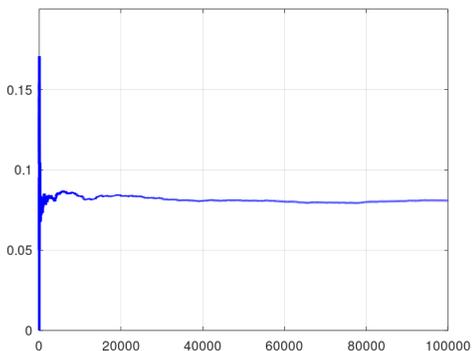
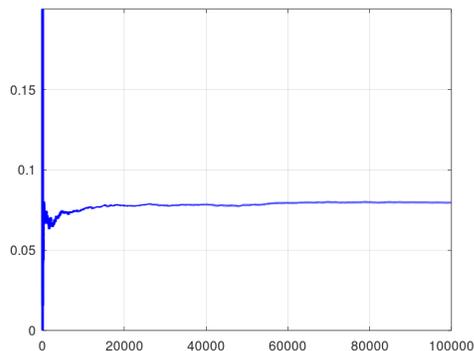
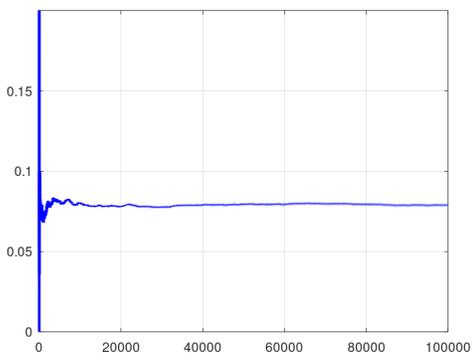
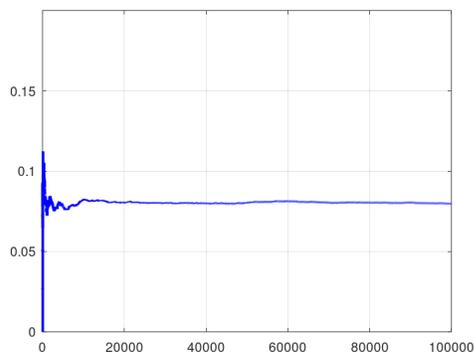
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j x) = \int \chi_A d\mu = \mu(A), \quad (8.5)$$

para casi todo $x \in X$ (con respecto de μ).

Esto es importante en sistemas caóticos, pues si bien en esta clase de sistemas no posible predecir a largo plazo de la evolución de las órbitas, el teorema ergódico de Birkhoff y en particular (8.5) nos aseguran que dado un medible A de X , y un punto típico $x \in X$ (x pertenece a conjunto de medida completa), la frecuencia promedio con la que x visita a A es próxima a la medida de A . Una vez mostrados los resultados anteriores, en analogía con los teoremas 9, 10 y 11, solo resta preguntarnos por la tasa del convergencia de $S_n g$ a su valor esperado, para algún observable de interés, esto lo haremos en la siguiente sección, para lo cual introduciremos las desigualdades de concentración (ver desigualdad (8.16)) las cuales son uno de los temas centrales de esta tesis.

Para ejemplificar el teorema ergódico de Birkhoff y su relación con la ley fuerte de los grandes números presentamos el siguiente ejemplo tomado de [45].

Ejemplo 9. Consideremos $X = [-1, 1]$, $f(x) = 1 - 2x^2$, y $g = \chi_{[0.5, 0.7]}$ la función característica del intervalo $[0.5, 0.7]$. Dada una condición inicial $x_0 \in [-1, 1]$, para analizar la convergencia de $\frac{1}{n}S_n g(x_0)$, mostramos gráficamente el comportamiento de la sucesión de sumas parciales $\{\frac{1}{k}S_k g(x_0)\}_{k=1}^n$, para $n = 100000$. La gráfica siguiente muestra el comportamiento de las sumas parciales para $x_0 = -0.2$, $x_0 = 0.52$, $x_0 = 0.6$ y $x_0 = 0.68$.

(a) $x_0 = -0.2$, $\frac{1}{n}S_n g(x_0) \approx 0.08077$ (b) $x_0 = 0.52$, $\frac{1}{n}S_n g(x_0) \approx 0.07951$ (c) $x_0 = 0.6$, $\frac{1}{n}S_n g(x_0) \approx 0.0788$ (d) $x_0 = 0.68$, $\frac{1}{n}S_n g(x_0) \approx 0.079564$ Figura 8.3: $\frac{1}{n}S_n g(x_0)$, para $n = 100000$ y diferentes valores de x_0 , para el ejemplo 9.

Aunque en este ejemplo hemos considerado pocos valores de x_0 , las estimaciones hechas de $\frac{1}{n}S_n g(x_0)$ parecieran estabilizarse independientemente de x_0 en algún valor próximo a 0.8.

8.4. Desigualdades de concentración

Las desigualdades de concentración son una rama de reciente interés en el estudio de las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos. Éstas nos permiten obtener cotas sobre la probabilidad de desvío de un observable de interés alrededor de su valor esperado [39]. Además, dichas desigualdades nos ofrecen información acerca de las propiedades de convergencia de cantidades de interés a tiempo finito, es decir, nos dan resultados no asintóticos acerca de la fluctuación de un observable alrededor de su valor esperado.

La importancia del estudio de las desigualdades de concentración recae en sus aplicaciones a distintas áreas tales como análisis funcional, teoría de la información, estadística [40, 65], física estadística [43], teoría de la probabilidad [17], entre otras. Si bien el estudio del fenómeno de la concentración de la medida para sumas de variables aleatorias independientes ha sido ampliamente estudiado en la teoría de probabilidad, no fue sino hasta inicio de los 70's con la aparición de los métodos de martingalas que fue posible generalizar dicho resultado para funciones más generales, ver por ejemplo Milman y Gromov [32] y Talagrand [60, 61].

Dado $\{X_k\}_{k=1}^n$ una familia de variables aleatorias que toma valores en un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, consideramos una variable aleatoria $Y_n = K(X_1, X_2, \dots, X_n)$ donde $K : X^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, aquí X^n denota el n -ésimo producto cartesiano de X consigo mismo, entonces el objetivo de las desigualdades de concentración es el de cuantificar (para cada n) el tamaño de desvío de Y_n alrededor de su valor esperado $E(Y_n)$, esto es, encontrar (si es que existe) una función positiva $b(n, t)$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| > t) \leq b(n, t).$$

Bajo ciertas condiciones, en las cuales no profundizaremos en este trabajo, pero recomendamos al lector interesado ver [50] para más detalles, McDiarmid [42] probó la siguiente desigualdad de concentración.

Teorema 15 (Desigualdad de McDiarmid). *Sea $\{X_k\}_{k=1}^n$ una familia de variables aleatorias (no necesariamente independientes) sobre un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, y consideremos una variable aleatoria $Y_n = K(X_1, X_2, \dots, X_n)$, donde $K : X^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medida que satisface el supuesto de diferencias acotadas, esto es,*

$$\sup_{x_1, \dots, x_n, x'_i \in X} |K(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - K(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| < d_i, \quad (8.6)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, donde d_i son constantes positivas arbitrarias. Entonces, para cada $t > 0$, se satisface la siguiente desigualdad

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n d_k^2}\right). \quad (8.7)$$

El siguiente teorema debido a Hoeffding en [34], prueba una desigualdad de concentración para el caso de suma de variables aleatorias independientes y acotadas.

Teorema 16 (Desigualdad de Hoeffding). *Sea $\{X_k\}_{k=1}^n$ una familia de variables aleatorias independientes y acotadas, para $k \in \{1, \dots, n\}$, $X_k \in [a_k, b_k]$ para algunas constantes $a_k < b_k \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(|\sum_{k=1}^n Y_k - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k)| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2}\right), \quad \forall k \geq 0. \quad (8.8)$$

En el caso de los sistemas dinámicos medibles (X, \mathcal{B}, f, μ) , nos interesa cuantificar el tamaño de desvío de un observable de interés, valuado en segmentos de órbita alrededor de su valor esperado, es decir, nos interesa encontrar una función $b(n, t) > 0$ tal que:

$$\mu\{x \in X : |K(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)) - \int K(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))d\mu| > t\} \leq b(n, t). \quad (8.9)$$

En particular, es bien sabido que para sistemas dinámicos simbólicos dotados con una medida de Gibbs asociada a potenciales con cierta regularidad: Lipschitz [22], [24], condición de Walters [23] (esta condición implica el mismo resultado para potenciales de variación sumable), un resultado como este se mantiene para observables separadamente Lipschitz de n -variables, por conveniencia enunciamos a continuación este resultado para el caso Lipschitz y postergamos su demostración hasta la sección 9.1, mientras que el caso en el cual se cumple la condición de Walters será tratado en la sección 9.4.1.

Definición 20. Decimos que un observable $K : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ es separadamente Lipschitz de n -variables, si se satisface

$$\text{Lip}_i(K) := \sup_{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n} \sup_{x_i \neq x'_i} \frac{|K(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - K(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)|}{d_\theta(x_i, x'_i)} < \infty. \quad (8.10)$$

Para este tipo de observables se tiene la siguiente desigualdad de concentración exponencial.

Teorema 17 ([22, 24]). Dado el full shift (Σ_T, σ) en N símbolos dotado con una medida de Gibbs μ_ϕ asociada a un potencial ϕ Lipschitz continuo bajo la métrica usual d_θ , y una función $K : \Sigma_T^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz separable de n -variables. Entonces existe una constante $D > 0$, tal que

$$\int e^{K(x, \dots, \sigma^{n-1}x)} d\mu_\phi \leq \int e^{\int K(y, \dots, \sigma^{n-1}y) d\mu_\phi} e^{D \sum_{i=0}^{n-1} \text{Lip}_i^2 K}, \quad (8.11)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como consecuencia obtenemos una desigualdad de concentración.

Corolario 2. Para todo $t > 0$,

$$\mu_\phi \left(x : K(x, \sigma x, \dots, \sigma^{n-1}x) - \int K(y, \sigma y, \dots, \sigma^{n-1}y) d\mu_\phi(y) \geq t \right) \leq e^{-\frac{t^2}{4D \sum_{i=0}^{n-1} \text{Lip}_i^2(K)}}. \quad (8.12)$$

Vale la pena señalar que la demostración del teorema 17 se basa en las “buenas” propiedades espectrales del operador de Ruelle \mathcal{L}_ϕ (ver definición 5.1) sobre el espacio de Banach de funciones Lipschitz dotadas con la norma $\|\cdot\|_\theta = \|\cdot\|_\infty + |\cdot|_\theta$.

Notemos que dada una función Lipschitz $g : (\Sigma_T)^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in \Sigma_T$, la función $K(x, \sigma x, \dots, \sigma^n x) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\sigma^k x)$ es Lipschitz separable de n -variables, en el lema 1 de la sección 5 se probó que μ_ϕ es una medida ergódica, por lo que el teorema ergódico de Birkhoff (teorema 14) permanece cierto, además es bien sabido que convergencia puntual implica convergencia en medida, por lo que tiene sentido preguntarnos por la probabilidad de desvío de $\sum_{k=0}^{n-1} g(\sigma^k x)$ respecto a $\int g d\mu$, en este contexto la desigualdad de concentración (8.12) nos brinda una cota sobre esta probabilidad a tiempo finito, esto es, la desigualdad (8.12) nos garantiza la existencia de una constante positiva C , tal que para todo $t > 0$ la siguiente desigualdad se satisface

$$\mu_\phi \left(x : \left| S_n g(x) - \int g d\mu \right| \geq t \right) \leq 2 \exp(-Cnt^2), \quad (8.13)$$

donde $C = 1/(4D |f|_\theta)$. Reemplazando t por t/\sqrt{n} en esta desigualdad obtenemos

$$\mu_\phi \left(x : \left| S_n g(x) - n \int g d\mu \right| \geq t\sqrt{n} \right) \leq 2 \exp(-Cnt^2), \quad (8.14)$$

para todo n y $t > 0$. Finalmente señalamos que este resultado no asintótico es consistente con el teorema del límite central (teorema 13).

La desigualdad de concentración (8.12) nos permite obtener un análogo al principio de grandes desvíos (teorema 11), para ver esto, sea g un observable Lipschitz integrable tal que $\int g d\mu = 0$, entonces de (8.12) concluimos que

$$\mu_\phi \left(x : S_n g(x) \geq t \right) \leq \exp(-Cnt^2), \quad (8.15)$$

esta última desigualdad nos proporciona una cota para cada iteración de n de la rapidez de convergencia de la probabilidad de desvío de $S_n g$ respecto de su valor esperado. Por lo que para cada n obtenemos

$$\frac{1}{n} \log (\mu_{\phi}(x : S_n g(x) \geq t)) \leq -Ct^2,$$

de donde

$$-I(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\mu_{\phi}(x : S_n g(x) \geq t)) \leq -Ct^2. \quad (8.16)$$

Mientras que el principio de grandes desvíos (teorema 11), nos garantiza que para valores “muy grandes” de n , $\mu_{\phi}(x : S_n g(x) \geq t)$ puede ser aproximada por $e^{-nI(t)}$, la desigualdad (8.15) nos ofrece la posibilidad de determinar una cota sobre la probabilidad de desvío para cualquier valor de n , si bien las estimación para valores pequeños de n pueden no ser tan buenas, la importancia de este resultado recae en su practicidad, pues para poder ser aplicado básicamente solo necesitamos estimar la constante Lipschitz de g . De aquí la importancia de tener una estimación de la constante de concentración D que aparece en el teorema 17, esta estimación es realizada en la sección 9.1.

9. Resultados en sistemas simbólicos

El objetivo general de esta parte del trabajo se centró en estudiar las desigualdades de concentración en sistemas simbólicos y sus aplicaciones. Dentro de los resultados obtenidos destacan la estimación de la constante de concentración en el caso de medidas de Gibbs asociada a potenciales Hölder, dicha estimación es presentada en la sección 9.1. En la sección 9.2 obtendremos vía desigualdades de concentración, una cota en la rapidez de convergencia del teorema ergódico de Birkhoff, la cual nos permite extender los resultados clásicos sobre este tema al poder considerar funciones continuas y acotadas casi en todas partes con respecto de μ_ϕ . Finalmente generalizamos los resultados de concentración a funciones Lipschitz separables de n -variables sobre shifts contables de Markov, este resultado es mostrado en la sección 9.4.

9.1. Estimación de la constante de concentración

En esta sección demostramos el teorema 17. Además, utilizando resultados de Stoyanov [59] sobre las propiedades espectrales del operador de Ruelle damos una estimación explícita de la constante de concentración D .

Demostración del teorema 17. Dada una función $K : (A^{\mathbb{N}})^m \rightarrow \mathbb{R}$ separadamente Lipschitz de m -variables, y sucesiones $z, x^i \in A^{\mathbb{N}}$, $i = 0, 1, \dots, m$, introducimos la siguiente extensión del operador de Ruelle, el cual lleva funciones de $m - 1$ variables a funciones de m variables

$$(\mathbb{L}_\phi K)(x^1, x^2, \dots, x^{m-1}) := \sum_{z \in \sigma^{-1}(x^1)} e^{\phi(z)} K(z, x^1, x^2, \dots, x^{m-1})$$

Poniendo $S_k \phi = \sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ \sigma^i$, es fácil ver que

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_\phi^j K)(x^1, x^2, \dots, x^{m-j}) &:= \\ \sum_{y \in \sigma^{-j}(x^1)} e^{S_j \phi(y)} K(y, \sigma(y), \sigma^2(y), \dots, \sigma^{j-1}(y), x^1, x^2, \dots, x^{m-j}). \end{aligned}$$

Si $U(x) = K(x, \dots, \sigma^{n-1}(x))$, entonces

$$LU(x) = (\mathbb{L}_\phi^j K)(x, \dots, \sigma^{n-2}(x)).$$

La siguiente serie de lemas son la clave en nuestra estimación de la constante de concentración.

Lema 5 ([27]). *Sea (Y, ν) un espacio de probabilidad, sea $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y ν -medible. Entonces tenemos*

$$\int_Y e^{g(y) - \nu(g)} d\nu \leq \exp\left(\frac{1}{8} \text{osc}^2(g)\right), \quad (9.1)$$

donde $\text{osc}(g) := \sup_{y, y' \in Y} (g(y) - g(y'))$.

Usando de forma recursiva esta desigualdad, obtenemos el siguiente lema (para ver una demostración de teorema sugerimos ver la demostración del lema II.2 en [25]).

Lema 6. Para (Σ_T, μ_ϕ) , donde μ_ϕ es una medida de Gibbs asociada a un potencial Lipschitz ϕ , obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int \exp(K(x, \sigma x, \dots, \sigma^{n-1}x)) d\mu_\phi \leq \exp\left(\int K(x, \sigma x, \dots, \sigma^{n-1}x) + \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{n-1} \text{osc}_1(\mathbb{L}_\phi^j K)\right), \quad (9.2)$$

donde

$$\text{osc}_1(\mathbb{L}_\phi^j K) := \sup_{y \neq y'} \sup_{x^2, \dots, x^{n-1}} \{K(y, x^2, \dots, x^{n-1}) - K(y', x^2, \dots, x^{n-1})\}$$

$y, x^1, \dots, x^{n-1} \in \Sigma_T$.

El siguiente lema, el cual demostraremos un poco más adelante, es la herramienta principal en la estimación de la constante de concentración D .

Lema 7. Existen constantes $D_0 > 0$ y $0 < \bar{\beta} < 1$ tales que para cualquier entero positivo n , y para cualquier función real K Lipschitz separable de n variables, tenemos para todo $0 \leq k < n$

$$\text{osc}_1(\mathbb{L}^k(K)) \leq D_0 \sum_{j=1}^{k+1} \bar{\beta}^{k+1-j} \text{Lip}_j(K),$$

y

$$\text{osc}_1(\mathbb{L}^n(K)) \leq D_0 \sum_{j=1}^n \bar{\beta}^{n-j} \text{Lip}_j(K). \quad (9.3)$$

Donde $\text{osc}_1(K) := \sup_{y \neq y'} \sup_{x_2, \dots, x_n} \{K(y, x_2, \dots, x_n) - K(y', x_2, \dots, x_n)\}$.

Usando la desigualdad (9.3) junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que $0 < \beta < 1$ obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} \text{osc}_1^2(\mathbb{L}^j(K)) \leq \frac{D_0^2}{(1-\bar{\beta})^2} \sum_{i=1}^n \text{Lip}_i^2 K,$$

entonces para concluir con la demostración del teorema 17 podemos tomar

$$D = \frac{D_0^2}{(1-\bar{\beta})^2}. \quad (9.4)$$

□

Dado que estamos interesados en obtener una estimación explícita de la constante D , realizamos ahora la demostración del lema 7, pues es justo esta prueba la herramienta necesaria para dar una estimación de la constante de concentración D que aparece en el teorema 17, para ello utilizamos los resultados presentados en la sección 5, los cuales son tomados del trabajo de Stoyanov en [59] y que por completitud incluimos aquí

$$b = b_f := \max\{1, |\phi|_\theta\}, \quad K = Bb^{r_0}, \quad (9.5)$$

$$B = \frac{e^{\frac{2\theta}{1-\theta}} n^{(M+1)} e^{2(M+1)|\phi|_\theta}}{1-\theta}, \quad r_0 = \frac{\log n + 2 \|\phi\|_\infty}{|\log \theta|}, \quad (9.6)$$

$$\rho = 1 - \frac{1-\theta}{8K^3} \in (0, 1), \quad D_\phi = \frac{100K^5 b^3}{1-\theta}. \quad (9.7)$$

Lema 8. Para cada $g \in \mathcal{F}_\theta$, tenemos

$$\|\mathcal{L}_\phi^n g - \int g d\mu\|_\infty \leq 8K^2 b \beta^n \|g\|_\theta, \quad (9.8)$$

donde $\beta = 1 - \frac{1-\theta}{4K^3} \in (\theta, 1)$.

Demostración del Lema 7. Nuestro objetivo es probar las desigualdades en el lema 7, ya que ambas demostraciones son análogas procedemos como sigue:

Para un vector fijo estimamos $\mathbf{r}_1^{m-j-1} := (r^1, r^2, \dots, r^{m-j-1}) \in (A^\mathbb{N})^{m-j-1}$ la cantidad

$$\sup_{y \neq y'} \left\{ (\mathbb{L}_\phi^j K)(y, \mathbf{r}_1^{m-j-1}) - (\mathbb{L}_\phi^j K)(y', \mathbf{r}_1^{m-j-1}) \right\}, \quad (9.9)$$

ahora fijamos un $x^* \in A^\mathbb{N}$ arbitrario. Para $1 \leq l \leq j$, introducimos la siguiente sucesión de funciones auxiliares de l variables

$$v_l^j(x^1, x^2, \dots, x^l) := K(x^1, x^2, \dots, x^{m-j}, x^*, \sigma(x^*), \dots, \sigma^{j-l} x^*, \mathbf{r}_1^{m-j-1}),$$

para $j \geq 0$, consideramos

$$v_0^j := K(x^*, \sigma(x^*), \dots, \sigma^j x^*, \mathbf{r}_1^{m-j-1}),$$

y

$$v_{j+1}^j(x^1, x^2, \dots, x^{j+1}) := K(x^1, x^2, \dots, x^{j+1}, \mathbf{r}_1^{m-j-1}),$$

esto nos permite escribir

$$\begin{aligned} K(x, \sigma(x), \dots, \sigma^j(x), \mathbf{r}_1^{m-j-1}) &= \\ v_0^j + \sum_{l=0}^j [v_{l+1}^j(x, \sigma(x), \dots, \sigma^l x) - v_l^j(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{l-1} x)]. \end{aligned}$$

Aplicando \mathbb{L}_ϕ^j a esta expresión y usando el hecho de que $\mathcal{L}_\phi v_0^j = v_0^j$, obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_\phi^j K)(x, \mathbf{r}_1^{m-j-1}) &= \\ v_0^j + \sum_{l=0}^j \mathbb{L}_\phi^j [v_{l+1}^j(x, \sigma(x), \dots, \sigma^l x) - v_l^j(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{l-1} x)] &= \\ v_0^j + \sum_{l=0}^j \mathcal{L}_\phi^{j-l} (\mathbb{L}_\phi^l [v_{l+1}^j(x, \sigma(x), \dots, \sigma^l x) - v_l^j(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{l-1} x)]). \end{aligned}$$

Finalmente ponemos

$$w_l^j(x) = \sum_{z \in \sigma^{-l}(x)} e^{S_l \phi(z)} [v_{l+1}^j(x, \sigma(x), \dots, \sigma^l x) - v_l^j(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{l-1} x)],$$

de donde obtenemos

$$(\mathbb{L}_\phi^j K)(x, \mathbf{r}_1^{m-j-1}) = v_0^j + \sum_{l=0}^j \mathcal{L}_\phi^{j-l} w_l^j(x),$$

un cálculo directo nos lleva a

$$\|w_l^j\|_\infty \leq \text{Lip}_{l+1}(K) \text{ y } \|w_l^j\|_\theta \leq 2 \sum_{i=0}^l \theta^{l-i} \text{Lip}_{i+1}(K),$$

de lo cual se sigue que

$$\|w_l^j\|_\theta \leq \text{Lip}_{l+1}(K) + 2 \sum_{i=0}^l \theta^{l-i} \text{Lip}_{i+1}(K) \leq 3 \sum_{i=0}^l \theta^{l-i} \text{Lip}_{i+1}(K). \quad (9.10)$$

Poniendo $g = w_l^j$ en (9.8), obtenemos

$$\|\mathcal{L}^{j-l} w_l^j - \int w_l^j d\mu\|_\infty \leq 8K^2 b \beta^{j-l} \|w_l^j\|_\theta,$$

por otro lado estimando $\text{osc}_1(\mathbb{L}_\phi^j)$, tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{L}_\phi^j w_l^j(y, r_1^{n-j-1}) - \mathbb{L}_\phi^j w_l^j(y', r_1^{n-j-1}) \right| = |v_0^j + \sum_{i=0}^j \mathcal{L}^{j-l} w_l^j(y) - v_0^j - \sum_{i=0}^j \mathcal{L}^{j-l} w_l^j(y')| \\ & = \left| \sum_{i=0}^j \mathcal{L}^{j-l} w_l^j(y) - \sum_{i=0}^j \int w_l^j d\mu + \sum_{i=0}^j \int w_l^j d\mu - \sum_{i=0}^j \mathcal{L}^{j-l} w_l^j(y') \right| \\ & \leq \sum_{i=0}^j (|\mathcal{L}^{j-l} w_l^j(y) - \int w_l^j d\mu| + |\mathcal{L}^{j-l} w_l^j(y') - \int w_l^j d\mu|) \\ & \leq 2 \sum_{i=0}^j \|\mathcal{L}^{j-l} w_l^j - \int w_l^j d\mu\|_\infty \leq 16K^2 b \sum_{i=0}^j \beta^{j-l} \|w_l^j\|_\theta \\ & \leq 48K^2 b \sum_{i=0}^j \beta^{j-l} \sum_{i=0}^l \theta^{l-i} \text{Lip}_{i+1}(K), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de (9.10), como $\theta < \beta < 1$, obtenemos

$$\sum_{l=0}^j \beta^{j-l} \sum_{i=0}^l \theta^{l-i} \text{Lip}_{i+1}(K) \leq \sum_{l=0}^j \sum_{i=0}^l \beta^{j-i} \text{Lip}_{i+1}(K).$$

Por lo tanto

$$\text{osc}_1(\mathbb{L}_\phi^j) \leq \sum_{l=0}^j \sum_{i=0}^l \beta^{j-i} \text{Lip}_{i+1}(K),$$

poniendo $\beta_1 = \frac{1+\beta}{2}$, queremos obtener una constante $C > 0$ independiente de n , tal que

$$\sum_{l=0}^j \sum_{i=0}^l \beta^{j-i} \text{Lip}_{i+1}(K) \leq C \sum_{i=0}^j \beta_1^{j-i} \text{Lip}_{i+1}(K),$$

comparando término a término, para cada $m \in \mathbb{R}_+$, queremos obtener una constante positiva C , tal que

$$m\beta^{m-1} \leq C \left[\frac{1+\beta}{2} \right]^{m-1},$$

lo cual es equivalente a encontrar el máximo de la función

$$f(n) = n \left[\frac{2\beta}{1+\beta} \right]^{n-1},$$

esta función alcanza su máximo en $N = \frac{-1}{\log(\frac{\beta}{1+\beta}) + \log(2)}$, por lo que obtenemos $C = f(N)$, es decir,

$$C = \frac{-1}{\log(\frac{2\beta}{1+\beta})} \left[\frac{2\beta}{1+\beta} \right]^{\frac{-1}{\log(\frac{2\beta}{1+\beta})} - 1} \quad (9.11)$$

por lo tanto

$$\text{osc}_1(\mathbb{L}_\phi^j) \leq 48K^2 b C \sum_{i=0}^j \beta_1^{j-i} \text{Lip}_{i+1}(K). \quad (9.12)$$

Tomando $D_0 = 48K^2bC$ y $\bar{\beta} = \beta_1$ concluimos la demostración. \square

Finalmente, notemos que la demostración anterior nos da una cota explícita del valor de D_0 , por lo que utilizando (9.4) obtenemos la siguiente estimación de la constante de concentración enunciada en el teorema 17.

$$D = \frac{2304K^4b^2C^2}{(1 - \bar{\beta})^2}. \quad (9.13)$$

Donde los parámetros b , K , $\bar{\beta}$ y C están definidos en las expresiones (9.5) y (9.11).

Vale la pena señalar que el resultado de concentración demostrado en esta sección, es válido para el caso de sistemas dinámicos simbólicos dotados de medidas de Gibbs asociadas a potenciales Lipschitz, y observables que satisfacen la condición de ser separadamente Lipschitz de n -variables. En la siguiente sección utilizando resultados recientes sobre concentración de Chazottes, Moles y Ugalde [23], junto con la técnica de aproximación de observables desarrollada por Podving en [48], extendemos el resultado (8.13) para observables más generales.

9.2. Condición de Walters y concentración

Chazottes, Moles y Ugalde en [23] probaron los mismos resultados sobre concentración para sistemas dinámicos simbólicos dotados con una medida de Gibbs que los mostrados en la sección 8.4, en el caso en que el potencial ϕ satisface la condición de Walters, esto es, ellos probaron un resultado análogo al teorema 17, corolario 2, desigualdades 8.13 y 8.14 para potenciales que satisfacen la condición de Walters, la cual definimos a continuación.

Dado un potencial ϕ y $x, y \in A^{\mathbb{N}}$, ponemos

$$W(\phi, x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{a \in A^n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i ax) - \phi(\sigma^i ay) \right|,$$

supongamos que existe una constante positiva $W(\phi)$ (dependiendo de ϕ), tal que

$$W(\phi, x, y) \leq W(\phi).$$

Para $k \in \mathbb{N}$, sea

$$W_k(\phi) := \sup \left\{ W(\phi, x, y) : x_i = y_i, 0 \leq i \leq k-1 \right\}.$$

Entonces, decimos que ϕ satisface la *condición de Walters* si $(W_k(\phi))_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de números positivos que converge a cero, cuando k tiende a infinito. A partir de esta sucesión definimos la distancia d_ϕ sobre $A^{\mathbb{N}}$ como sigue, $d_\phi(x, y) = W_k(\phi)$ si $d_\theta(x, y) = \theta^k$ y $d_\phi(x, x) = 0$. Para esta distancia el espacio de funciones Lipschitz es el conjunto

$$\mathcal{F}_\phi := \{ f : A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R} : \text{var}_k f \leq CW_k(\phi), C > 0, k = 0, 1, 2, \dots \},$$

y para una $f \in \mathcal{F}_\phi$ su mínima constante Lipschitz está dada por

$$\| f \|_\phi = \sup \left\{ \frac{\text{var}_k f}{W_k(\phi)} : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observación 5. Es fácil ver que cuando $W_n(\phi) = O(\theta^n)$ la distancia d_ϕ y d_θ son equivalentes y $\mathcal{F}_\phi = \mathcal{F}_\theta$.

El teorema 2.1 en [23], afirma que para cualquier potencial ϕ que satisface la condición de Walters existe un único estado de equilibrio, de hecho, al igual que el caso ϕ Lipschitz este teorema prueba que dicho estado es mixing y así en particular μ_ϕ es una medida ergódica.

El siguiente teorema garantiza que bajo ciertas condiciones en W_n , el sistema $(\Sigma_T, \sigma, \mu_\phi)$ satisface una desigualdad de concentración.

Teorema 18 ([23]). *Sea $\phi : \Sigma_T \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial, para el cual uno de los siguientes incisos se cumple*

1. $W_n(\phi) = O(\theta^n)$,
2. $W_n(\phi) = O(n^{-\beta})$ para algún $\beta > 1$,
3. $W_n(\phi) = O(\theta^{(\log n)^\beta})$ para algún $\theta \in (0, 1)$ y $\beta > 1$,
4. $W_n(\phi) = O(e^{-cn^\beta})$ para algún $c > 0$ y $\beta \in (0, 1)$.

Entonces, el sistema $(\Sigma_T, \sigma, \mu_\phi)$ satisface una desigualdad de concentración exponencial, para cualquier función K Lipschitz separable de n -variables respecto de d_θ , es decir, se cumple

$$\int \exp(K(x, \sigma x, \dots, \sigma^{n-1}x)) d\mu_\phi(x) \leq \exp\left(\int K(x, \sigma x, \dots, \sigma^{n-1}x)\right) d\mu_\phi(x) \exp\left(D \sum_{j=0}^{n-1} \text{Lip}_i^2(K)\right). \quad (9.14)$$

Como corolario tenemos:

Corolario 3. *Para todo $t > 0$, se satisfacen las desigualdades (8.13) y (8.14).*

En el caso del corolario 2, el resultado puede ser extendido a considerar observables $g : \Sigma_T \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz con respecto a d_ϕ , lo cual enunciamos a continuación.

Corolario 4. *Si $W_n(\phi)$ satisface uno de los incisos del teorema 18, entonces para cualquier $g \in \mathcal{F}_\phi$ existe una constante positiva D tal que para cualquier $t > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\mu_\phi(x : S_n g(x) - \int g d\mu_\phi \geq t) \leq e^{-\frac{nt^2}{4D|g|_\phi^2}} \quad (9.15)$$

y

$$\mu_\phi(x : |S_n g(x) - \int g d\mu_\phi| \geq t) \leq 2e^{-\frac{nt^2}{4D|g|_\phi^2}}. \quad (9.16)$$

Observación 6. *Si ϕ satisface una de las condiciones del teorema 18, entonces el punto crucial en la estimación de una cota sobre la probabilidad de desvío (8.13) recae en el hecho de que g pertenece a \mathcal{F}_ϕ . Note además que cuando $W_n(\phi) = O(\theta^n)$, obtenemos el caso Lipschitz, por lo que bajo esta condición se tiene que \mathcal{F}_ϕ es simplemente el espacio de funciones Lipschitz con respecto a d_θ , por lo que en este sentido los resultados presentados en esta sección, extienden los resultados existentes al considerar funciones Lipschitz respecto a nueva métrica, lo cual nos permite obtener como caso particular los resultados ya conocidos.*

Si bien, los resultados mostrados en esta sección permiten extender los resultados conocidos sobre concentración, también nos hacen cuestionarnos si es posible obtener los mismos resultados o algunos de sus corolarios para funciones menos regulares respecto de la métrica usual del sistema simbólico. En este sentido en la siguiente sección mostraremos que es posible extender algunos de los resultados de concentración para funciones continuas y acotadas casi en todas partes con respecto de μ_ϕ , cuando Σ_T es dotado con la distancia d_θ .

9.3. Aproximación de observables

En esta sección, siguiendo la construcción propuesta en [35], extendemos las conclusiones del corolario 4 para funciones menos regulares. Formalmente consideramos el full shift en N símbolos $(A^{\mathbb{N}}, \sigma)$ dotado con estructura de espacio métrico al considerar la distancia $d = d_\theta$ o $d = d_\phi$, por conveniencia cuando los resultados y/o construcciones realizadas en esta sección sean válidos tanto para d_θ como para d_ϕ simplemente escribiremos d en lugar de distinguir cada uno de los casos, y cuando no sea esta la situación escribiremos explícitamente el subíndice θ o ϕ para señalar que lo enunciado solo es válido cuando se considera la distancia correspondiente al subíndice.

Sea μ_ϕ el estado de equilibrio asociado a un potencial ϕ que satisface una de las propiedades enunciadas en el teorema 18 y supongamos que $g : A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada casi en todas partes con respecto a μ_ϕ , esto es, g es continua y $\|g\|_\infty < \infty$ salvo en un conjunto de medida nula con respecto a μ_ϕ , entonces dado un $\delta > 0$ definimos las siguientes funciones

$$g_1^\delta(x) = \inf_{y \in A^{\mathbb{N}}} (g(y) + 2\|g\|_\infty \delta^{-1} d(x, y)), \quad g_2^\delta(x) = \sup_{y \in A^{\mathbb{N}}} (g(y) - 2\|g\|_\infty \delta^{-1} d(x, y)). \quad (9.17)$$

Además, afirmamos que tanto g_1^δ como g_2^δ son Lipschitz continuas con constante $2\|g\|_\infty \delta^{-1}$ y que la siguiente desigualdad se mantiene

$$g_1^\delta(x) \leq g(x) \leq g_2^\delta(x). \quad (9.18)$$

La primera parte de la afirmación se sigue de que

$$|g_1^\delta(x) - g_1^\delta(z)| \leq \sup_{y \in A^{\mathbb{N}}} \{2\|g\|_\infty \delta^{-\alpha} |d(x, y) - d(y, z)|\} \leq 2\|g\|_\infty \delta^{-\alpha} \sup_{y \in A^{\mathbb{N}}} \{d(x, z)\}, \quad (9.19)$$

donde la última desigualdad se sigue de la segunda desigualdad del triángulo, además notemos que $d(x, z)$ es independiente de y , por lo que $|g_1^\delta(x) - g_1^\delta(z)| \leq 2\|g\|_\infty \delta^{-\alpha} d(x, z)$. De forma completamente análoga se puede probar que g_2^δ es Lipschitz. Para probar la segunda parte de la afirmación, sea $x \in A^{\mathbb{N}}$ fijo pero arbitrario y consideramos los siguientes conjuntos

$$S(x) := \{g(y) + 2\|g\|_\infty \delta^{-\alpha} d(x, y) : y \in A^{\mathbb{N}}\}, \quad s(x) := \{g(y) - 2\|g\|_\infty \delta^{-\alpha} d(x, y) : y \in A^{\mathbb{N}}\},$$

es fácil ver que $g(x) \in S(x)$ y que $g(x) \in s(x)$, por lo que tomando ínfimo y supremo sobre todos los $y \in A^{\mathbb{N}}$ respectivamente, se sigue que $g(x) \geq g_1^\delta(x)$ y $g(x) \leq g_2^\delta(x)$ de donde concluimos la afirmación.

Dado que (9.17) y (9.18) son ciertas para cualquier $\delta > 0$ y en la conclusión de los resultados nos interesa el caso límite en que δ tiende a cero, en el resto del trabajo a menos que se especifique explícitamente lo contrario siempre supondremos que $\delta = \theta$ y pondremos $\bar{g}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{d(x, y) \leq \theta^N} g(y)$ y $\underline{g}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{d(x, y) \leq \theta^N} g(y)$. Entonces g se dice que es continua μ_ϕ -a.e. si

$$\mu_\phi \{x \in A^{\mathbb{N}} : \bar{g}(x) - \underline{g}(x) > 0\} = 0.$$

El siguiente teorema nos permite obtener una cota en la tasa de convergencia del teorema ergódico de Birkhoff para la clase de observables continuos y acotados casi en todas partes con respecto a μ_ϕ , para el caso en que el estado de equilibrio μ_ϕ está asociado con un potencial que satisface unos de los incisos de las hipótesis del teorema 18.

Proposición 3. *Sea $\phi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial que satisface una de las siguientes condiciones*

1. $W_n(\phi) = O(\theta^n)$,
2. $W_n(\phi) = O(n^{-\beta})$ para algún $\beta > 1$,

3. $W_n(\phi) = O(\theta^{(\log n)^\beta})$ para algún $\theta \in (0, 1)$ y $\beta > 1$,
4. $W_n(\phi) = O(e^{-cn^\beta})$ para algún $c > 0$ y $\beta \in (0, 1)$.

Si μ_ϕ denota el estado de equilibrio asociado con ϕ , entonces para cualquier $g : (A^\mathbb{N}, d_\theta) \rightarrow \mathbb{R}$ continuo y acotado μ_ϕ -a.e. y cualquier $t > 0$, $n, N \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} & \mu_\phi \{x \in A^\mathbb{N} : |S_n g(x) - \mu_\phi(g)| \geq t + \rho_g(\theta)\} \\ & \leq \mu_\phi \{x \in A^\mathbb{N} : |S_n g_1^\theta(x) - \mu_\phi(g_1^\theta)| \geq t\} + \mu_\phi \{x \in A^\mathbb{N} : |S_n g_2^\theta(x) - \mu_\phi(g_2^\theta)| \geq t\}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

donde $\rho_g(\theta)$ es el módulo de continuidad promedio de g , es decir,

$$\rho_g(\theta) = \mu_\phi \left(\sup_{\overline{N} \geq N} \{ |g(x) - g(y)| : x_i = y_i, i = 0, 1, \dots, \overline{N} \} \right).$$

Demostración. Como $W_n(\phi)$ satisface las hipótesis del teorema 18, el estado de equilibrio μ_ϕ es ergódico, entonces podemos aplicar el teorema 2 en [35] a g para garantizar que $\mu_\phi(g)$ tiene sentido. Notemos que para cada $N \in \mathbb{N}$, θ^N define un $\delta = \delta_N$ positivo, el cual tiende a 0 cuando $N \rightarrow \infty$ y

$$\sup_{d(x,y) \leq \delta_N} |g(x) - g(y)| = \sup_{\overline{N} \geq N} \{ |g(x) - g(y)| : x_i = y_i, i = 0, 1, \dots, \overline{N} \}.$$

Luego el teorema 1 en [48], establece que bajo estas condiciones (9.20) se satisface. \square

La proposición 3 junto con la cota (9.16) obtenida en el corolario 4, nos permite obtener una cota explícita de la probabilidad de desvío de la suma ergódica $S_n g(x)$ a su media para la clase de funciones continuas y acotadas casi en todas partes con respecto de μ_ϕ . Nuestro siguiente teorema generaliza los resultados existentes para potenciales y observables Lipschitz, pues como mencionamos con anterioridad cuando $W_n(\phi) = O(\theta^n)$ recobramos el caso Lipschitz, ver por ejemplo corolario 3.3 en [24] y la desigualdad (3.6) en [23]. La novedad aquí corresponde con el caso en que $W_n(\phi)$ satisface los incisos 2, 3 y 4, y los observables son continuos y acotados μ_ϕ -a.e., pues en este caso los estados de equilibrio están asociados con un potencial no Lipschitz y los observables tampoco lo son, sin más preámbulo enunciamos nuestro resultado principal a continuación:

Teorema 19. *Sea $\phi : A^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial para el cual se cumple una de las siguientes condiciones*

1. $W_n(\phi) = O(\theta^n)$,
2. $W_n(\phi) = O(n^{-\beta})$ para algún $\beta > 1$,
3. $W_n(\phi) = O(\theta^{(\log n)^\beta})$ para algún $\theta \in (0, 1)$ y $\beta > 1$,
4. $W_n(\phi) = O(e^{-cn^\beta})$ para algún $c > 0$ y $\beta \in (0, 1)$.

Y sea μ_ϕ el único estado de equilibrio asociado con ϕ , entonces para cualquier función $g : (A^\mathbb{N}, d_\theta) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada μ_ϕ -a.e., $t > 0$ y cualquier $n \geq 1$, obtenemos la siguiente cota

$$\mu_\phi \{x \in A^\mathbb{N} : |S_n g(x) - \mu_\phi(g)| \geq t + \rho_g(\theta)\} \leq 4 \exp \left(-\frac{t^2 \theta^2 n}{16D \|g\|_\infty^2} \right).$$

Demostración. De (9.20) en el teorema 3 y (9.16) en el corolario 4, tenemos

$$\mu_\phi \{x \in A^\mathbb{N} : |S_n g(x) - \mu_\phi(g)| \geq t + \rho_g(\theta)\} \leq 4 \exp \left(-\frac{t^2 n}{4D \max \{ |g_1^\theta|_\infty^2, |g_2^\theta|_\infty^2 \}} \right), \quad (9.21)$$

donde

$$\rho_g(\theta) = \mu_\phi \left(\sup_{\overline{N} \geq N} \{ |g(x) - g(y)| : x_i = y_i, i = 0, 1, \dots, \overline{N} \} \right)$$

y g_1^θ, g_2^θ están definidos en (9.17).

Usando el hecho de que $|g_i^\theta|_{\theta \leq 2\|g\|_\infty}$, el lado derecho de (9.21) está acotado por $4 \exp\left(-\frac{t^2 \theta^2 n}{16D\|g\|_\infty^2}\right)$ y así

$$\mu_\phi \{x \in A^{\mathbb{N}} : |S_n g(x) - \mu_\phi(g)| \geq t + \rho_g(\theta)\} \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2 \theta^2 n}{16D\|g\|_\infty^2}\right), \text{ para todo } n \geq 1.$$

□

Del corolario 4 en la sección 9.2 se sigue que la construcción en (9.17) se mantiene válida para d_ϕ en lugar de d_θ , por lo que tenemos el siguiente resultado para observables continuos y acotados casi en todas partes.

Teorema 20. *Supongamos que $W_n(\phi)$ satisface uno de los incisos en las hipótesis del teorema 19, entonces existe una constante D tal que para cualquier función $g : (A^{\mathbb{N}}, d_\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada μ_ϕ -a.e., $\delta, t > 0$ y cualquier $n \geq 1$, se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\mu_\phi \{x \in A^{\mathbb{N}} : |S_n g(x) - \mu_\phi(g)| \geq t + \rho_g(\delta)\} \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2 n}{4D \max\{|g_1^\delta|_\phi^2, |g_2^\delta|_\phi^2\}}\right), \quad (9.22)$$

donde $|g_i^\delta|_\phi = \sup_{n \geq 1} \left\{ \frac{\text{var}_n(g_i^\delta)}{W_n(\phi)} \right\}$, $i = 1, 2$.

Vale la pena señalar que la constante D en este teorema puede ser diferente de la que aparece en el teorema 19 (ver el teorema 3.5 en [23]).

Demostración. Para cualquier $\delta > 0$, g_1^δ y g_2^δ son funciones d_ϕ -Lipschitz con constante Lipschitz $|g_i^\delta|_\phi \leq 2\|g\|_\infty \delta^{-1}$, $i = 1, 2$ (ver por ejemplo [35]). Entonces el teorema 3.5 en [23] aplicada a g_1^δ y g_2^δ garantiza la existencia de una constante positiva D , tal que para todo $t > 0$ y todo $n \geq 1$

$$\mu_\phi \{x \in A^{\mathbb{N}} : |S_n g_i^\delta(x) - \mu_\phi(g_i^\delta)| \geq t\} \leq \exp\left(-\frac{nt^2}{4D |g_i^\delta|_\phi^2}\right), \quad i = 1, 2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} & \mu_\phi \{x \in A^{\mathbb{N}} : |S_n g_1^\delta(x) - \mu_\phi(g_1^\delta)| \geq t\} + \mu_\phi \{x \in A^{\mathbb{N}} : |S_n g_2^\delta(x) - \mu_\phi(g_2^\delta)| \geq t\} \\ & \leq \exp\left(-\frac{nt^2}{4D \max\{|g_1^\delta|_\phi^2, |g_2^\delta|_\phi^2\}}\right). \end{aligned} \quad (9.23)$$

De esta desigualdad y el teorema 1 en [48] se sigue el resultado. □

El resultado enunciado en el teorema 20 constituye una extensión de la aplicación del resultado clásico de concentración, el cual nos ayuda a determinar una cota de la probabilidad de desvío de la suma ergódica a su valor esperado cuando el observable satisface la condición de ser Lipschitz respecto de la métrica usual d_θ o la métrica d_ϕ introducida en [23], este resultado permite a los observables tener un poco menos de regularidad, como corolario tenemos:

Corolario 5. *Bajo las hipótesis del teorema 20, para cualquier $\delta \in (0, 1)$, $t > 0$, $n \geq 1$ y $g : (A^{\mathbb{N}}, d_\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada μ_ϕ -a.e., tenemos*

$$\mu_\phi \{x \in A^{\mathbb{N}} : |S_n g(x) - \mu_\phi(g)| \geq t + \rho_g(\delta)\} \leq 4 \exp\left(-\frac{t^2 \delta^2 n}{16D \|g\|_\infty^2}\right).$$

Los resultados presentados en el teorema 20 y el corolario 5 son nuevos en literatura y extienden los resultados existentes al considerar funciones no necesariamente Lipschitz. El aporte principal de este trabajo de tesis a las desigualdades de concentración para sistemas dinámicos simbólicos dotados de una medida de Gibbs, se presenta en la siguiente sección.

9.4. Shift contable de Markov

En esta sección introducimos la teoría suficiente para describir el shift contable de Markov, el cual surge al considerar alfabetos contables (no necesariamente finitos), para ello dado un alfabeto contable A y una matriz $T = (t_{ij})_{A \times A}$ de ceros y unos, sin columnas, ni filas idénticamente cero, definimos el shift de Markov contable generado por T , como

$$\Sigma_T := \{x = (x_0 x_1 \dots) : x_i \in A \text{ y } t_{x_i x_{i+1}} = 1\}.$$

Al igual que para alfabetos finitos dotamos a Σ_T con la sigma álgebra generada por la topología cuya base está dada por los cilindros $[a_0^{n-1}] := \{x \in \Sigma_T : x_i = a_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in A$, a diferencia del caso finito cuando A es contable infinito, Σ_T no es compacto y los supuestos hechos en el capítulo 4 sobre T y ϕ no son suficientes para garantizar la existencia de una medida de Gibbs, lo cual constituye uno de los principales problemas al considerar alfabetos contables, por lo que preguntarnos por el fenómeno de concentración de la medida para el caso contable podría carecer de sentido. Sin embargo, para este caso Sarig en [52] probó la existencia de una medida de Gibbs bajo ciertas condiciones sobre el potencial ϕ y la matriz de transición T , las cuales enunciaremos a continuación, pero primero necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 21. *La presión de Gurevich de ϕ está definida como el límite*

$$P_G(\phi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\sigma^n x = x} e^{\phi_n(x)} \chi_{[a]}(x),$$

donde $\chi_{[a]}$ es la función característica del cilindro $[a]$, $a \in A$.

Definición 22. *Decimos que la matriz T satisface la propiedad de las grandes imágenes y preimágenes (propiedad BIP por sus siglas en inglés) si:*

$$\text{existen } b_1, b_2, \dots, b_N \in A \text{ tales que, para todo } a \in A, \text{ existe } i, j, \text{ para los cuales } t_{b_i a} t_{a b_j} = 1.$$

A menos que se especifique lo contrario, la notación de distancia, variación y espacio de funciones serán las mismas que las definidas en la sección 4, esto es, d_θ denotará la regla para distancia que la definida para el caso $|A| < \infty$, $\text{var}_k(\cdot)$ estará dado por la ecuación 4.1 y $C(A^{\mathbb{N}})$ denotará el espacio de funciones continuas. El siguiente resultado, aunque válido para potenciales más generales que los Lipschitz, es presentado en este último contexto, ya que nuestros resultados principales enunciados en las secciones subsecuentes de esta tesis corresponden a potenciales Lipschitz continuos.

Teorema 21 ([52]). *Si (Σ_T, σ) es topológicamente mixing y $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, entonces ϕ tiene una medida de Gibbs invariante si y solo si T satisface la propiedad de las grandes imágenes y preimágenes y $P_G(\phi) < \infty$.*

El teorema anterior establece que cuando el shift contable de Markov es topológicamente mixing y el potencial ϕ es Lipschitz continuo, la propiedad BIP junto con el supuesto de que el potencial tiene presión de Gurevich finita son condiciones suficientes y necesarias para garantizar la existencia de una medida de Gibbs sobre el shift de Markov contable, por lo que este teorema da pie a preguntarnos por la posibilidad de obtener una desigualdad de concentración exponencial para este caso, es decir, preguntarnos si sobre $(\Sigma_T, \sigma, \mu_\phi)$ se satisface una desigualdad del tipo (9.14) para el caso en que μ_ϕ es la medida de Gibbs asociada a un potencial ϕ satisfaciendo las condiciones del teorema 21. En este proyecto de tesis probaremos que en efecto para el shift contable de Markov dotado de una medida de Gibbs se satisface una desigualdad de concentración exponencial, para probar esta afirmación comenzamos con algunos resultados preliminares.

Sea β la partición más pequeña con la propiedad de que la sigma álgebra generada por β contiene a $\{\sigma[a] : a \in A\}$, y definamos

$$D_\beta f := \sup_{B \in \beta} \sup_{x \neq y \in B} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_\theta(x, y)}$$

y $\mathcal{F} := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\mathcal{F}} := \|f\|_\infty + D_\beta f < \infty\}$.

Vale la pena señalar que \mathcal{F} es invariante bajo \mathcal{L}_ϕ y que además este espacio tendrá un rol fundamental en la prueba de una desigualdad de concentración en el caso en que A es contable no finito.

Si $\phi \in \mathcal{F}$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 22. *Si (Σ_T, σ) es topológicamente mixing, T satisface la propiedad BIP y $\phi \in \mathcal{F}_\theta$, entonces:*

- (1) *existe un número real $\lambda > 0$, una función positiva Lipschitz continua h , y una medida ν finita sobre los cilindros, tal que $\mathcal{L}_\phi h = \lambda h$, $\mathcal{L}_\phi^* \nu = \lambda \nu$, y $\int h d\nu = 1$;*
- (2) *$0 < h < \infty$ y $\nu(X) < \infty$.*
- (3) *Existen constantes $C > 0$ y $\rho \in (0, 1)$ tales que para todo $f \in \mathcal{F}$,*

$$\|\lambda^{-n} \mathcal{L}_\phi^n f - h \int f d\nu\|_{\mathcal{F}} \leq C r^n \|f\|_{\mathcal{F}}. \quad (9.24)$$

Este teorema es una combinación de los corolarios 2 y 3 en [52] o una consecuencia directa del corolario 2 en dicho trabajo junto con el teorema 5 y lema 6 en [51]. Del teorema 2 en [52] y la observación 5 en [51] se sigue que $\mu = h\nu$ es una medida de Gibbs invariante con operador de transferencia $L_\phi f = \lambda^{-1} h^{-1} \mathcal{L}_\phi(hf)$.

En lo que sigue siempre supondremos que las hipótesis sobre (Σ_T, σ) , ϕ , T y $P_G(\phi)$ del teorema 22 se cumplen y h , ν , λ , C y r siempre denotarán a la función, medida y constantes en la conclusión del mismo teorema. Finalmente, denotamos por μ_ϕ a la medida de Gibbs $h\nu$.

Observación 7. *De lo argumentado anteriormente y poniendo $g = \frac{\lambda^{-1} h e^\phi}{h \circ \sigma}$, se tiene que $\mathcal{L}_{\log g}$ es el operador de transferencia de μ , de hecho g es el Jacobiano inverso de σ y por lo tanto $g^{(k)} = \frac{\lambda^{-k} h e^{\phi^k}}{h \circ \sigma^k}$ es el Jacobiano inverso de σ^k . Es importante notar que la invarianza de μ implica que*

$$\Sigma_{\sigma^i y = z} g^{(i)}(y) = 1, \quad (9.25)$$

y usando el hecho de que h es acotada fuera de cero e infinito, $g^{(n)}$ satisface la propiedad de distorsión, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $k > 0$

$$\left| 1 - \frac{g^{(k)}(x')}{g^{(k)}(y')} \right| \leq C d_\theta(x, y) \text{ para todo } x, y \text{ tales que } x_i = y_i, i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (9.26)$$

Ver por ejemplo [23], [41] o [51].

9.4.1. Desigualdades de concentración en alfabetos contables

Note que cualquier función K separadamente Lipschitz de n variables puede ser identificada con una función de $\Sigma_T^{\mathbb{N}}$ a \mathbb{R} , para esto es suficiente poner $\text{Lip}_i(K) = 0$ para todo $i \geq n$. Por lo que siguiendo la misma línea que la prueba de concentración en [22] definimos:

$$K_p(x_p, x_{p+1}, \dots) = \sum_{\sigma^p y = x_p} g^{(p)}(y) K(y, \dots, \sigma^{p-1} y, x_p, \dots).$$

Para probar concentración en el caso contable no finito es necesario probar el siguiente lema.

Lema 9. *Existen constantes $C > 0$ y $\rho \in (0, 1)$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\left| K_p(x_p, x_{p+1}, \dots) - \int K(y, \dots, \sigma^{p-1} y, x_p, \dots) d\mu_\phi \right| \leq C \sum_{j=0}^{p-1} \text{Lip}_j(K) \rho^{p-1-j}.$$

Demostración. Ya que la prueba de este lema es una adaptación de la presentada en [22], preferimos hacer solo un esbozo de la misma, señalando la diferencia de nuestro caso con el expuesto en el trabajo antes citado, la proposición 4 enunciada a continuación es la piedra angular en la obtención de nuestro resultado principal.

Esbozo de la prueba:

1) Fijando $x_* \in X$ y poniendo

$$\begin{aligned} K_p(x_p, \dots) &= \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{\sigma^p(y)=x_p} g^{(i)}(y) \left(K(y, \dots, \sigma^i y, x_*, \dots, x_*, x_p, \dots) - K(y, \dots, \sigma^{i-1} y, x_*, \dots, x_*, x_p, \dots) \right) \\ &\quad + K(x_*, \dots, x_*, x_p, \dots). \end{aligned}$$

2) Definimos

$$H(y, \dots, T^i y) := K(y, \dots, T^i y, x_*, \dots, x_*, x_p, \dots) - K(y, \dots, T^{i-1} y, x_*, \dots, x_*, x_p, \dots).$$

introducimos también

$$f_i(z) := \sum_{\sigma^i y = z} g^{(i)}(y) H(y, \dots, T^i y).$$

Dado que K es separadamente Lipschitz de n variables, tenemos

$$\|H\|_\infty \leq \text{Lip}_i(K) \quad \text{y} \quad \|f_i\|_\infty \leq C \text{Lip}_i(K), \quad (9.27)$$

donde la última desigualdad se sigue de (9.25). Enunciamos ahora la siguiente proposición, la cual es la base de la prueba de nuestro resultado principal.

Proposición 4. *Para todo i , f_i pertenece a \mathcal{F} .*

Demostración. Para ver esto es suficiente probar que $D_\beta f_i < \infty$. Dados z, z' en el mismo elemento de la partición, debemos distinguir los dos casos siguientes:

Caso 1) Si z, z' son tales que $z_0 = z'_0$, es decir, si estos puntos pertenecen a el mismo cilindro de tamaño 1, entonces tenemos:

$$f_i(z) - f_i(z') = \sum \left(g^{(i)}(y) - g^{(i)}(y') \right) H(y, \dots, T^i y) + \sum g^{(i)}(y') (H(y, \dots, \sigma^i y) - H(y', \dots, \sigma^i y')),$$

donde la suma es sobre todos lo y, y' tales que $y_j = y'_j$ para $j = 0, \dots, i-1$, $\sigma y = z$ y $\sigma y' = z'$. De (9.26)

$$|g^{(i)}(y) - g^{(i)}(y')| \leq C g^{(i)}(y) d_\theta(z, z'),$$

usando una vez más (9.36), obtenemos que la primera suma es acotada por $CLip_i(K)d_\theta(z, z')$. Para la segunda suma tenemos

$$|H(y, \dots, \sigma^i y) - H(y', \dots, \sigma^i y')| \leq 2 \sum_{j=0}^i Lip_j K d(\sigma^j y, \sigma^j y') \leq 2 \sum_{j=0}^i Lip_j K \theta^{i-j} d(z, z').$$

Por lo que

$$|f_i(z) - f_i(z')| \leq C \sum_{j=0}^i Lip_j(K) \theta^{i-j} d_\theta(z, z'). \quad (9.28)$$

Caso 2) Si $z_0 \neq z'_0$, de la segunda desigualdad en (9.27) tenemos

$$|f_i(z) - f_i(z')| \leq 2 \|f_i\|_\infty \leq CLip_i K \leq C \sum_{j=0}^i Lip_j K \theta^{i-j}. \quad (9.29)$$

Note que el i -ésimo término en la desigualdad anterior es exactamente $CLip_i K$, y $d(z, z') = 1$. Entonces, combinando (9.28) y (9.29) concluimos que

$$D_\beta f \leq C \sum_{j=0}^i Lip_j K \theta^{i-j}. \quad (9.30)$$

De la segunda desigualdad en (9.27) y de la desigualdad (9.30) se sigue la proposición. \square

Como $f_i \in \mathcal{F}$, la desigualdad (9.24) en el teorema 22 y la desigualdad (9.30) implican que

$$\|L^{p-i} f_i - \int f_i d\nu\|_{\mathcal{F}} \leq Cr^{p-i} \|f_i\|_{\mathcal{F}} \leq Cr^{p-i} \sum_{j=0}^i Lip_j K \theta^{i-j}. \quad (9.31)$$

Entonces para cualquier $\rho \in (r, 1)$, tenemos

$$\begin{aligned} & \left| K_p(x_p, \dots) - \sum_{i=0}^{p-1} \int f_i d\mu - K(x_*, \dots, x_*, x_p \dots) \right| \leq C \sum_{i=0}^{p-1} r^{p-i} \sum_{j=0}^i Lip_j K r^{i-j} \\ & \leq C \sum_{j=0}^{p-1} Lip_j K r^{p-j} (p-j) \leq C \sum_{j=0}^{p-1} Lip_j K \rho^{p-j}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\left| K_p(x_p, \dots) - \sum_{i=0}^{p-1} \int f_i d\mu - K(x_*, \dots, x_*, x_p \dots) \right| \leq C \sum_{j=0}^{p-1} Lip_j K \rho^{p-j}.$$

Sumando todas las integrales de f_i del lado izquierdo de la desigualdad anterior y después de todas las cancelaciones el único término que no se cancela es $\int K(y, \dots, \sigma^{p-1} y, x_p, \dots) d\mu_\phi$ de donde obtenemos nuestro resultado. \square

9.4.2. Resultado principal en el caso contable

El lema 9 enunciado en la sección anterior es el resultado clave en la demostración del fenómeno de concentración para el shift de Markov contable, esto es enunciado en el teorema siguiente.

Teorema 23. *Supongamos que (Σ_T, σ) es topológicamente mixing y $\phi \in \mathcal{F}_\theta$. Entonces el sistema $(\Sigma_T, \sigma, \mu_\phi)$ satisface una desigualdad de concentración exponencial, es decir, existe una constante positiva $D = D(\phi)$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier función separadamente Lipschitz $K : (\Sigma_T)^n \rightarrow \mathbb{R}$, se satisface la siguiente desigualdad:*

$$\int \exp(K(x, \sigma x, \dots, \sigma^{n-1}x)) d\mu_\phi(x) \leq \exp\left(\int K(x, \sigma x, \dots, \sigma^{n-1}x) d\mu_\phi(x)\right) \exp\left(D \sum_{j=0}^{n-1} \text{Lip}_i^2(K)\right). \quad (9.32)$$

Demostración. La demostración este teorema es completamente análoga a la demostración del teorema 2.1 en [22] una vez que notamos que para el caso en que A es contable, el lema 9 enunciado en esta tesis toma el papel del lema 2.2 en ese trabajo. \square

De la desigualdad de Markov y la ecuación (9.32), obtenemos la siguiente desigualdad de concentración.

Corolario 6. *Para cualquier $t > 0$, se tiene:*

$$\mu_\phi \{x \in \Sigma_T : |K(x, \dots, \sigma^{n-1}x) - \int K(y, \dots, \sigma^{n-1}y) d\mu_\phi(y)| \geq t\} \leq 2 \exp\left(\frac{-t^2}{4D \sum_{i=0}^{n-1} \text{Lip}_i^2 K}\right). \quad (9.33)$$

Tanto el teorema 23 como el corolario 6 constituyen una generalización de los resultados existentes en la literatura, pues permiten considerar alfabetos contables en lugar de finitos.

9.4.3. Corolarios de las desigualdades de concentración

En esta sección enunciamos algunos corolarios de las desigualdades de concentración válidos tanto para alfabetos finitos como para alfabetos contables.

Corolario 7. *Para todo $t > 0$, tenemos*

$$\int \left(K(x, \dots, \sigma^{n-1}x) - \int K(y, \dots, \sigma^{n-1}y) d\mu_\phi(y)\right)^2 d\mu_\phi(x) \leq 2D \sum_{i=0}^{n-1} \text{Lip}_i^2(K). \quad (9.34)$$

Dado que en cualquiera de los contextos μ_ϕ es una media ergódica, dado un observable continuo $f : A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ el teorema ergódico de Birkhoff garantiza que el promedio ergódico

$$S_n f(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k x), \quad (9.35)$$

converge $\mu - a.e.$ a $\int f d\mu_\phi$, lo que implica que para todo $t > 0$

$$\mu_\phi(x : |S_n f(x) - \int f d\mu_\phi| \geq t) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (9.36)$$

En general este es un resultado asintótico, sin embargo, imponiendo algunas restricciones a los observables f es posible obtener una estimación explícita de la tasa de convergencia de (9.36), es decir, bajo ciertas condiciones en la función f podemos determinar que tan rápido esta cantidad tiende a cero, este es el caso de los observables que pertenecen a la clase de funciones Lipschitz, para los cuales una tasa de convergencia de la probabilidad de desvío (9.36) fue determinada en [24], mientras que para potenciales

un poco más generales, los cuales describiremos en la siguiente sección, un resultado análogo fue probado en [23]. En ambos casos las estimaciones fueron determinadas usando las desigualdades de concentración. Entonces como consecuencia del corolario 7, si f es Lipschitz con respecto a d_θ , tenemos la siguiente tasa de convergencia del promedio ergódico (9.35) a su promedio espacial.

Corolario 8. *Supongamos que $f : \Sigma_T \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz, entonces para todo $t > 0$ y $n \geq 1$, tenemos*

$$\mu_\phi \left(x : S_n f(x) - \int f d\mu_\phi \geq t \right) \leq \exp \left(-\frac{nt^2}{4D \|f\|_\theta^2} \right). \quad (9.37)$$

Este resultado nos da una cota de la probabilidad de desvío de la suma de Birkhoff respecto de su promedio espacial.

Una vez concluidas las aportaciones obtenidas a los desigualdades de concentración en este trabajo de tesis, dejamos de lado los sistemas dinámicos simbólicos para enfocarnos ahora a mostrar una aplicación de los sistemas dinámicos más generales a la economía, para ello en la siguiente parte de esta tesis, introduciremos la dinámica del replicador (capítulo 12) para modelar una situación económica de interés, además describiremos las principales aportaciones de este modelo a la literatura del tema. Es importante señalar que aunque distantes el modelo económico y los sistemas simbólicos, estos pueden ser relacionados a través de la teoría de juegos, en particular de los llamados juegos con potencial, pues es bien sabido que para esta clase de juegos las medidas de Gibbs aparecen de forma intrínseca. Aunque la teoría de juegos va más allá de los propósitos de esta tesis, en la siguiente parte de este trabajo la abordaremos de manera breve y haremos algunas observaciones que sientan las bases del proyecto futuro que servirá para relacionar los sistemas simbólicos, las medidas de Gibbs y quizá sus propiedades estadísticas con la aplicación económica de la dinámica del replicador.

Parte II

Aplicaciones de los sistemas dinámicos a la economía

10. El consumidor y las empresas

En esta parte de las tesis abordamos principalmente una aplicación de los sistemas dinámicos abstractos a la economía, dejando de lado por un momento los sistemas dinámicos simbólicos y sus propiedades estadísticas presentadas en la parte I, vale la pena señalar que la dinámica que consideraremos en esta parte de la tesis es la dinámica del replicador, la cual hasta ahora ha sido de gran interés tanto en la biología, como en la teoría de juegos evolutivos. Sin embargo como mostraremos en esta parte de la tesis es posible adaptar este modelo, para analizar las posibles repercusiones sobre una economía, cuando los máangers de las firmas deciden cambiar sus inversiones de una rama de producción en búsqueda de mayores beneficios (ver capítulo 12). Es importante señalar que este modelo y los resultados enunciados a lo largo de esta parte del trabajo fueron desarrollados en colaboración con el Dr. Elvio Accinelli Gamba de la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Los resultados presentados en la primera parte de esta tesis podrían ser relacionados con los presentados en esta parte a través de la teoría de juegos y el modelo evolutivo de Leslie, esta posible relación forma parte del trabajo futuro a ser desarrollado a partir de esta tesis y que será brevemente discutido en la sección 19.1, por otro lado al lector interesado sugerimos revisar los apéndices A.3 y A.4, donde presentamos el modelo de Leslie y su relación con el teorema de Ruelle-Perron-Frobenius y algunos conceptos de la teoría de juegos y su relación con nuestro modelo.

10.1. Teoría del consumidor

La microeconomía puede ser concebida como la rama de la economía cuyo objetivo es el de modelar la actividad económica desde el punto de vista de los entes individuales, de quienes se asume un comportamiento racional en búsqueda de mejorar o maximizar sus intereses personales, utilidades o beneficios, por lo que comenzamos la exposición de esta sección presentando algunas definiciones necesarias para comprender el modelo de economía que se desarrollará en las secciones subsecuentes, comenzamos analizando el comportamiento del consumidor, posteriormente en el capítulo 29 describimos brevemente el conjunto de producción y planteamos el problema a resolver por parte del sector de producción en la economía.

El punto central en el análisis de las decisiones individuales de los agentes económicos es el *conjunto de posibles alternativas de elección*, a grandes rasgos este conjunto representa las diferentes alternativas de elección a la que se enfrenta un agente económico y de las cuales debe elegir una alternativa dadas ciertas restricciones (de presupuesto por ejemplo). A lo largo de esta tesis consideraremos que el conjunto de posibles alternativas de elección es justamente *el conjunto de consumo* de cada agente económico, a este conjunto lo denotaremos por X y señalamos que este conjunto puede ser $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : x_i \geq 0\}$, donde cada entrada de $x \in \mathbb{R}_+^n$ denota la cantidad de un bien económico, un espacio de sucesiones, indicando dotaciones de bienes en un número contable de períodos o el simplex $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ de dimensión $n - 1$. Una vez introducido este conjunto el siguiente paso es modelar el comportamiento de elección individual de los consumidores, para lo cual existen dos alternativas, que bajo ciertas condiciones se interrelacionan, la primera manera para modelar el comportamiento de los agentes económicos es mediante

relaciones de preferencia \succsim , cuya definición damos a continuación.

Definición 23. Una preferencia \succsim sobre X es un pre-orden completo en X , esto es, \succsim es una relación en X tal que:

- i) \succsim es completa: para todo $x, y \in X$ se tiene $x \succsim y$ o $y \succsim x$.
- ii) \succsim es transitiva: para todo $x, y, z \in X$ si $x \succsim y$ y $y \succsim z$, entonces $x \succsim z$.

Cuando $x \succsim y$ y $y \succsim x$ escribimos $x \sim y$.

La segunda aproximación al modelado del comportamiento de los agentes económicos es mediante funciones de utilidad, las cuales están definidas como:

Definición 24. Una función de utilidad es una función $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada elemento de $x \in X$ le asocia un nivel de satisfacción $u(x)$.

Definición 25. Decimos que una preferencia \succsim representa a una función de utilidad o que u representa a \succsim en el caso en que para todo $x, y \in X$ $x \succsim y$ si y solo si $u(x) \geq u(y)$.

Notemos que dada una función de utilidad u , esta trivialmente define una relación de preferencia poniendo $x \succsim y$ si y solo $u(x) \geq u(y)$. El recíproco de esta afirmación no es cierto (ver ejemplo 1 en [7]). Sin embargo imponiendo ciertas restricciones al conjunto X se puede garantizar que una preferencia \succsim puede ser representada mediante una función de utilidad.

Definición 26. Supongamos que X es un espacio topológico y sea \succsim una preferencia sobre X , entonces decimos que la preferencia es continua, si \succsim como subconjunto de $X \times X$ es un conjunto cerrado.

Teorema 24. Supongamos que X es un espacio topológico segundo contable y que $\succsim \subset X \times X$ es una preferencia continua, entonces existe una función de utilidad $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ que la representa.

En lo subsecuente estamos interesados en el caso en que $X \subset \mathbb{R}_+^n$, en este contexto damos la siguiente definición.

Definición 27. Una preferencia \succsim sobre \mathbb{R}_+^n se dice:

- i) estrictamente monótona si dado $x > y \in \mathbb{R}_+^n$, entonces $x \succ y$.
- ii) monótona si dado $x \gg y$ ($x_i > y_i, i = 1, \dots, n$), entonces $x \succ y$.
- iii) localmente no saciada si dados $x \in \mathbb{R}_+^n, \epsilon > 0$ existe $y \in \mathbb{R}_+^n$ con $|x - y| < \epsilon$ y $y \succ x$.

10.1.1. Comportamiento del consumidor

Una vez descritas las maneras de representar las preferencias del consumidor y la relación entre estas, podemos comenzar a investigar el comportamiento del consumidor. El supuesto básico acerca del comportamiento es el de racionalidad, es decir, el consumidor siempre busca consumir la cesta de consumo que le genera mayor utilidad dentro de sus alternativas disponibles. La principal restricción a la que se enfrenta un consumidor es la dada por su ingreso, el cual denotaremos por W , pues un modelo donde el ingreso del consumidor sea ilimitado carece de sentido, por tanto para modelar esta restricción comenzamos por suponer que hay n bienes el mercado, y al igual que la sección anterior supondremos que el espacio de consumo es \mathbb{R}_+^n y a sus elementos los llamaremos cestas de consumo, entonces cada entrada de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ representa cantidades de cada bien a ser consumidas, así x_i es la cantidad del bien i que podría ser demanda por un consumidor. Además, supondremos que el precio de cada bien es

conocido y lo representaremos por un vector $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$, por lo que p_i representa el precio del bien i . Por simplicidad siempre supondremos que $p \gg 0$, es decir, $p_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, por conveniencia definimos $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x \gg 0\}$. Entonces bajo estas condiciones definimos la restricción presupuestaria como sigue:

Definición 28. Sea $W \in \mathbb{R}_+$ el ingreso del consumidor y sea $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ el vector de precios de los bienes $1, \dots, n$. El conjunto presupuestario del consumidor está dada por

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^n : p \cdot x \leq W\}.$$

Entonces el problema del consumidor es el siguiente:

$$\text{máx } u(x), \text{ s.a. } p \cdot x \leq W, \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

La función x que relaciona el precio p con el ingreso W y que resuelve el problema de maximización de utilidad anterior es conocida como función de demanda y será denotada por $x(p, \omega)$.

10.2. Conjunto de producción

Una vez introducido el comportamiento del consumidor, estudiamos la economía desde del lado de la producción, esto es, estudiamos el proceso mediante el cual los bienes son producidos. Para ser consistentes con la teoría presentada en la sección anterior, supondremos una economía con n bienes, por lo que en este contexto un vector de producción es un elemento $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ con la convención de que las entradas positivas denotan las cantidades producidas de un bien y las entradas negativas denotan insumos. Supondremos que una firma está caracterizada por su tecnología.

Definición 29. Una firma está caracterizada por su tecnología, que es representada por un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$, tal que Y es

- i) No vacío.
- ii) Cerrado y estrictamente convexo.
- iii) $0 \in Y$, esto puede ser interpretado como que la firma puede dejar de operar sin incurrir en costos, esto suele denominarse posibilidad de inacción.
- iv) $Y \cap \mathbb{R}_+^n = \{0\}$.
- v) $-\mathbb{R}_+^n \subset Y$.

Entonces el problema del productor es el de maximizar sus beneficios, esto puede ser escrito como sigue, dada un vector de precios, el problema del productor es determinar las cantidades de insumos y productos $y \in Y \subset \mathbb{R}_+^n$ tales que

$$\text{máx } p \cdot y, \quad y \in Y. \tag{10.1}$$

Al vector y^* que resuelve el problema de maximización del productor (10.1) lo llamaremos *oferta de la firma*. Algunas veces es conveniente describir el conjunto Y usando funciones de producción g , las cuales deben reflejar las propiedades anteriores, en particular a nosotros nos interesa el caso $n = 2$, pues es en este caso donde ejemplificaremos ciertas características de la dinámica del replicador, la cual describiremos en la sección 12, por lo que señalamos que para $n = 2$ podemos describir al conjunto de producción a través de una función cóncava g de una variable tal que $g(0) = 0$, en este caso el conjunto de producción Y está definido como

$$Y_j = \{(y_1, y_2) : y_j \leq g_j(y_i), \quad i = 1, 2\}, \quad j = 1, 2.$$

11. Economía de propiedad privada con ramas de producción

En esta sección definimos desde el punto de vista del modelo matemático qué es una economía con producción de propiedad privada con ramas de producción.

Definición 30. Una economía con producción de propiedad privada con L bienes, M consumidores y N firmas divididas en L ($N \geq L$) ramas de producción, está definida por un conjunto

$$\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^L, (u_i, \omega_i), (Y_j, N_j), \theta_{ik}, i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, M\}, k \in \mathcal{K} = \{1, \dots, L\}\}$$

donde

1. \mathbb{R}_+^L es el espacio de consumo.
2. Cada consumidor está identificado con un índice $i \in \mathcal{I}$ y es caracterizado por sus dotaciones iniciales $\omega_i \in \mathbb{R}_+^L \setminus \{0\}$ y por una función de utilidad que representa sus preferencias, las cuales asumimos estrictamente monótonas de clase al menos C^2 .
3. Hay L ramas de producción, cada una de las cuales produce uno de los L bienes disponibles en la economía, en lo subsecuente utilizaremos como sinónimos los términos, industrias, ramas de producción y tecnologías disponibles, pues supondremos que dentro de cada rama de producción las firmas producen usando la misma tecnología.
4. Suponemos N firmas divididas en las L ramas de producción, entonces si N_k , $k = 1, 2, \dots, L$, denota el número de firmas en la rama k , entonces tenemos $N = \sum_{k=1}^L N_k$. Sea

$$D = \left\{ \mathcal{N} \in \mathbb{N}^L : \sum_{k=1}^L N_k = N \right\}$$

el conjunto de distribuciones de las firmas sobre las ramas de producción y

$$\mathcal{D} = \left\{ n \in \mathbb{R}_+^L : \sum_{k=1}^L n_k = 1, \text{ donde } n_k = N_k/N \right\} \subset \Delta^{L-1}$$

donde Δ^{L-1} denota el simplex de dimensión $L - 1$.

5. La k -ésima rama de producción está caracterizada por un conjunto de producción convexo Y_k que satisface las propiedades descritas en la definición 29.
6. Suponemos que los planes de producción entre ramas diferentes no pueden ser obtenidos mediante combinaciones lineales de los planes de las diferentes ramas de producción.

7. θ_{ik} denota la participación del i -ésimo consumidor en el beneficio de la k -ésima rama de producción, como es típico supondremos que $\theta_{ik} \in [0, 1]$, para todo i y $\sum_{i=1}^M \theta_{ik} = 1$, para todo $k = 1, 2, \dots, L$.

Si bien el caso más general tratado en [3], asume la existencia de K (K no necesariamente igual a L) ramas de producción y la participación es sobre las firmas y no las ramas de producción, los resultados obtenidos en ese trabajo puede ser puestos en el contexto descrito aquí al asumir que cada consumidor tienen la misma participación en cada una de las firmas, esto es, $\theta_{i1} = \theta_{i2} = \dots = \theta_{iN}$, para cada $i = 1, 2, \dots, M$. Dado que nuestro interés es el de mostrar las aplicaciones obtenidas de los sistemas dinámicos a la economía, para fines de simplificación y un mejor entendimiento del tema, preferimos presentar el modelo simplificado, sin embargo al lector interesado en profundizar en el tema le sugerimos revisar [1], [2] y [3]. Ahora señalamos que la monotonía estricta de las preferencias implica que el problema de maximización de utilidad del consumidor tiene solución en \mathbb{R}_{++}^L .

Si siguiendo lo definido en la sección 10.2, sea $y_j^* : \mathbb{R}_{++}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$ la función de oferta del j -ésimo productor, ya que estamos suponiendo que el problema de las firmas es el de maximizar su beneficio y que dentro de cada rama de producción las firmas producen utilizando la misma tecnología, entonces necesariamente debe ocurrir que $y_k^*(p) = y_j^*(p)$, para todo $k, j \in \mathcal{K}$, por lo que simplemente denotaremos por y_k^* a la oferta de las firmas en la rama k , por $\pi_{jk} : \mathbb{R}_{++}^L \rightarrow \mathbb{R}$ denotamos la función de beneficios de la firma j cuando esta se encuentra en la rama de producción k , esto es, $\pi_{jk}(p) = p \cdot y_k^*$, supondremos además de que π_{jk} es estrictamente cóncava y diferenciable y que para cada p , $\partial_p \pi_{jk}(p) = y_k^*(p)$, las condiciones en el modelo implican que las firmas en una misma rama de producción tienen el mismo beneficio, por lo que simplemente escribiremos π_k para denotar el beneficio de cada firma en la rama de producción k . Dada una distribución $\mathcal{N} \in D$ fija, el ingreso del consumidor i dados los precios $p = (p_1, \dots, p_L)$ está dado por

$$W_i(p, \omega_i, \theta_{ik}, \mathcal{N}) = p \cdot \left(\omega_i + \sum_{k=1}^L \theta_{ik} N_k y_k^*(p) \right) = p \cdot \omega_i + \sum_{k=1}^L \theta_{ik} N_k \pi_k(y_k^*(p)) \quad (11.1)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, M$. Fijando las dotaciones iniciales y la participación de los consumidores en cada rama de producción, definimos la aplicación diferenciable $W : \mathbb{R}_{++}^L \times D \rightarrow \mathbb{R}_{++}^M$ dada por

$$W(p, \mathcal{N}) = (W_1(p, \mathcal{N}), \dots, W_M(p, \mathcal{N})),$$

donde $W_i(p, \mathcal{N}) = W_i(p, \omega_i, \theta_{ik}, \mathcal{N})$, de la ecuación (11.1) es claro que el ingreso del i -ésimo consumidor depende del beneficio de las empresas en cada rama de producción. Finalmente dada una distribución $\mathcal{N} \in D$, definimos la función exceso demanda $Z : \mathbb{R}_{++}^L \times D \rightarrow \mathbb{R}^L$ como

$$Z(p, \mathcal{N}) = \sum_{i=1}^M (x_i(p, W_i(p, \mathcal{N})) - \omega_i) - \sum_{k=1}^L N_k y_k^*(p), \quad (11.2)$$

donde $x_i(p, W_i(p, \mathcal{N})) \in \mathbb{R}_+^L$ es el vector cuyas entradas denotan la demanda de cada uno de los bienes disponibles en la economía por parte del consumidor i , esto es,

$$x_i(p, W_i(p, \mathcal{N})) = (x_{i1}(p, \omega_i(p, \mathcal{N})), \dots, x_{iL}(p, \omega_i(p, \mathcal{N}))) \quad (11.3)$$

Es bien sabido que la función exceso de demanda satisface:

1. La ley de Walras $pZ(p, W(p, \mathcal{N}), \mathcal{N}) = 0$, para todo $p \in \mathbb{R}_{++}^L$ y $\mathcal{N} \in D$, por lo que podemos escribir, sin pérdida de generalidad, a la L -ésima entrada del exceso de demanda como combinación lineal de sus primeras $L - 1$ entradas.

2. Z es homogénea de grado 0, esto es, $Z(\alpha p, W(\alpha p, \mathcal{N})) = Z(p, W(p, \mathcal{N}))$, para todo $\alpha > 0$.

Utilizando estas dos propiedades podemos restringirnos a considerar sistemas de precios en el simplex de dimensión $L - 1$, esto es,

$$p \in S = \left\{ p \in \mathbb{R}_{++}^L : \sum_{i=1}^L p_i = 1 \right\},$$

Ya que el comportamiento racional de los mánagers de las empresas los lleva a invertir en las ramas de producción con beneficios más altos, la distribución de firmas en cada rama de producción podría cambiar a lo largo del tiempo, pero no así el número total de firmas en la economía ($N = \sum_{k=1}^L N_k$), por lo que definimos $\mathcal{N} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}^K$ como $\mathcal{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_L(t))$ donde $\sum_{k=i}^L N_i(t) = N$, para todo $t \geq 0$. Esto será relevante en la siguiente sección cuando describamos la dinámica del replicador, pues en cierto sentido $\mathcal{N}(t)$ describe como se mueven las firmas de una rama a otra dependiendo de las decisiones que toman los mánagers de las firmas a lo largo de tiempo.

Observación 8. De la ley de Walras y la homogeneidad de grado 0, nos podemos restringir a considerar a la función exceso de demanda Z , como una función definida de $S \times D$ a \mathbb{R}^{L-1} , este hecho será importante para la construcción de ejemplos como explicaremos más adelante.

Observación 9. Además de la homogeneidad del exceso de demanda tenemos $\partial_p Z(p, \mathcal{N}) \cdot p = 0$, para todo $p \in S$, donde $\partial_p Z(p, \mathcal{N})$ denota el Jacobiano de Z en (p, \mathcal{N}) .

Para ver esto, notemos que $Z(\alpha p, \mathcal{N}) = Z(p, \mathcal{N})$, para cualquier $\alpha > 0$, de donde diferenciando ambos lados de esta igualdad con respecto de α y evaluando en $\alpha = 1$ obtenemos $\partial_p Z(p, \mathcal{N}) \cdot p = 0$. Explícitamente $\partial_p Z(p, \mathcal{N})$ está definido por

$$\partial_p Z(p, \mathcal{N}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z^1}{\partial p_1} + \sum_{j=1}^M \frac{\partial Z^1}{\partial W^j} \frac{\partial W^j}{p_1} & \cdots & \frac{\partial Z^1}{\partial p_L} + \sum_{j=1}^M \frac{\partial Z^1}{\partial W^j} \frac{\partial W^j}{p_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Z^L}{\partial p_1} + \sum_{j=1}^M \frac{\partial Z^L}{\partial W^j} \frac{\partial W^j}{p_1} & \cdots & \frac{\partial Z^L}{\partial p_L} + \sum_{j=1}^M \frac{\partial Z^L}{\partial W^j} \frac{\partial W^j}{p_L} \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

De la observación 9, concluimos que el rango de $\partial_p Z(p, \mathcal{N})$ es a lo más $L - 1$ para todo $p \in S$.

Definición 31. Supongamos que los elementos que describen la economía \mathcal{E} están fijos con excepción de la distribución de las firmas sobre las ramas de producción, entonces decimos que el par $(p, \mathcal{N}) \in S \times D$ es un equilibrio Walrasiano de la economía con producción \mathcal{E} , si $Z(p, \mathcal{N}) = 0$. Por E denotaremos el conjunto de precios de equilibrio de la economía \mathcal{E} , esto es,

$$E = \{(p, \mathcal{N}) \in S \times D : Z(p, \mathcal{N}) = 0\}.$$

Bajo las condiciones de la definición anterior, una economía es caracterizada por la distribución \mathcal{N} , por lo que para hacer explícito este hecho la denotaremos por $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$, cuando este sea el caso denotaremos por $Z_{\mathcal{N}}$ a la función exceso de demanda y por $E_{\mathcal{N}}$ al conjunto de precios de equilibrio, esto es,

$$E_{\mathcal{N}} = \{p \in S : z_{\mathcal{N}}(p) = 0\} = Z_{\mathcal{N}}^{-1}(0).$$

Para fines de conveniencia señalamos lo siguiente, al considerar distribuciones de las firmas en la distintas ramas de producción es conveniente normalizar como sigue $n = \mathcal{N}/N \in \Delta^{K-1}$, lo que nos permitirá considerar la función exceso de demanda Z con dominio $S \times \mathcal{D}$ en lugar de $S \times D$, si bien en este caso la función Z podría carecer de sentido económico, en nuestro contexto nos permite obtener resultados interesantes acerca de la evolución de la economía, lo cual consideraremos en el siguiente capítulo.

12. Dinámica del replicador

A lo largo del tiempo la teoría de juegos ha sido utilizada para describir situaciones de conflicto entre dos o más participantes llamados jugadores, quienes en búsqueda de maximizar su utilidad toman decisiones racionales, las cuales son influenciadas por las decisiones (racionales) de los demás participantes en el juego. Desde sus inicios la teoría de juegos ha estado fuertemente relacionada con la economía, encontrando en esta ciencia un gran campo de aplicación. Sin embargo, a partir del trabajo de Maynard Smith y Price, la lógica del conflicto animal [58], la teoría ha encontrado un importante campo de aplicación en biología, es en este contexto que la teoría de juegos evolutivos surgió en un intento de explicar la igualdad aproximada de la proporción de sexos en los mamíferos [63]. Las situaciones biológicas, incluso cuando se ven distantes de la economía, tienen una relación con situaciones económicas, por ejemplo, en la naturaleza los animales compiten por recursos limitados, territorios, alimentos o posibilidades de reproducción, mientras que en la economía, las empresas compiten para obtener mayores y mejores beneficios económicos.

A diferencia de los agentes económicos o sociales, los animales no se comportan racionalmente, sin embargo, las fuerzas de la selección natural actúan como optimizadores del comportamiento natural y, por lo tanto, una especie o animal cuya salud o comportamiento hacia su presa o sus depredadores no sea óptima tenderá a extinguirse, esta misma situación ocurre en la economía con las empresas que no adaptan sus precios ni sus tecnologías a las exigencias del mercado. Maynard Smith y Price en [58] utilizan la dinámica del replicador, la cual definiremos más adelante para modelar la reproducción de un tipo de comportamiento de una especie dada. La presión natural provoca que el comportamiento que mejor se adapta al medio tiende a reproducirse con mayor probabilidad. El concepto asume una gran población de replicadores, en la que los diferentes tipos se encuentran en proporción a su participación en la población. Luego se introduce en la teoría económica, donde la racionalidad reemplaza a la presión natural.

En el largo plazo, los agentes económicos aprenderán y seguirán, el comportamiento asociado con mejores rendimientos, es decir, se comportarán como replicantes de la estrategia más exitosa. Los agentes económicos elegirán al final de cada período entre mantener o cambiar su estrategia en un conjunto de posibles estrategias o comportamientos. Entendemos que el proceso de aprendizaje tal vez, por “prueba y error”, conduce a la estrategia más exitosa, en nuestro caso el que tiene la mayor rentabilidad esperada.

Como describimos en la sección anterior, en este trabajo estamos suponiendo que las firmas en la misma rama de producción producen utilizando la misma tecnología y así todas las firmas en una misma rama de producción tienen iguales beneficios. Dada una distribución $\mathcal{N} \in \mathcal{D}$ y un precio de equilibrio $p^* \in E_{\mathcal{N}}$, como el equilibrio depende de la distribución, entonces ponemos $p^* = p^*(\mathcal{N})$ para hacer explícita esta dependencia, ahora sea $\pi_k(p^*(\mathcal{N}))$ el beneficio asociado a las firmas en la rama k al precio de equilibrio $p^*(\mathcal{N})$ y $\bar{\pi}(p^*(\mathcal{N}))$ el beneficio promedio de las ramas de producción al precio $p^*(\mathcal{N})$, esto es, $\bar{\pi}(p^*(\mathcal{N})) = \sum_{k=1}^L n_k \pi_k(p^*(\mathcal{N}))$, cuando no haya riesgo de confusión simplemente escribiremos $\bar{\pi}$ en lugar de $\bar{\pi}(p^*(\mathcal{N}))$, en lo que sigue consideraremos que los managers de las firmas como los replicadores de las tecnologías o ramas de producción que tienen mayores ganancias asociadas. Por lo que una vez descrito lo anterior y sin más preámbulo presentamos la dinámica del replicador, la cual está definida por un conjunto de ecuaciones diferenciales

como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{n}_k &= n_k(1 - n_k) [\pi_k(p^*(n)) - \bar{\pi}], \quad k = 1, \dots, L, \\ \dot{n}_k &= -\sum_{j \neq k}^L \dot{n}_j, \quad k = 1, \dots, L, \\ n(t_0) &= n_0,\end{aligned}\tag{12.1}$$

donde $n(t_0) = n_0$ denota el estado inicial de la economía al estado o distribución de las firmas sobre el conjunto de producción al tiempo $t = t_0$, es importante notar que además del caso $n_K = 0$, la economía alcanza un estado estacionario si y solo existe una distribución \mathcal{N} , para la cual existe un precio de equilibrio $p^*(\mathcal{N})$ tal que $\pi_k(p^*(\mathcal{N})) = \bar{\pi}$, para todo $k = 1, \dots, L$, esto necesariamente implica que en este precio $\pi_1(p^*(\mathcal{N})) = \dots = \pi_k(p^*(\mathcal{N}))$. Como veremos en la sección 16, bajo ciertos supuestos no tan restrictivos, este siempre es el caso en economías con dos bienes, dos consumidores y dos ramas de producción. Sin embargo, incluso cuando la igualdad entre beneficios ocurra, esto no garantiza que el sistema alcance el equilibrio dinámico. Finalmente note que mientras la distribución de las firmas sobre las ramas de producción se modifica de acuerdo con las decisiones de los mángers de las firmas quienes buscan maximizar sus beneficios, la economía evoluciona sobre el conjunto $E = \{(p, n) \in S \times \mathcal{D} : z(p, n) = 0\}$, este conjunto es una variedad (de hecho una subvariedad de $\mathbb{R}^{L-1} \times \mathbb{R}^{L-1}$), llamada variedad de equilibrio.

13. Economías singulares y regulares

Para explicar la importancia de la dinámica del replicador y como está ayuda explicar fenómenos económicos de interés, en esta sección clasificamos la economías como singulares o regulares, estas últimas como explicaremos más adelante se pueden identificar con un umbral de la crisis económica, donde por crisis económica nos referimos a un cambio abrupto en el comportamiento de la economía, como resultado de cambios arbitrariamente pequeños en sus fundamentos [1], estos cambios pueden ser provocados por las decisiones de racionales de los mángers de las firmas, quienes buscan obtener mayores beneficios mudando a su compañía hacia la rama con mayores beneficios.

Definición 32. Decimos que la economía $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ es regular, si para todo $p \in E_{\mathcal{N}}$ el rango de $\partial_p Z(p, \mathcal{N})$ es $L - 1$. Si existe un sistema de precios de equilibrio p , tal que $\partial_p Z(p, \mathcal{N}) < L - 1$ decimos que la economía $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ es singular. Por otra lado, dada una distribución \mathcal{N} , decimos que $p \in \mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ es un precio de equilibrio regular, si $\partial_p Z(p, \mathcal{N}) = L - 1$, mientras que si $\partial_p Z(p, \mathcal{N}) < L - 1$, decimos que p es un equilibrio singular para la economía $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$.

Recordemos que dada una función suave f , entre variedades X e Y ($f : X \rightarrow Y$) de dimensiones n y m respectivamente, con $n \leq m$, se dice que f es una *submersión* en $x \in X$ si y solo si rango del Jacobiano de f es igual a m , mientras que $x \in X$ se dice un punto regular si f es una submersión en x , de otra manera decimos que x es singular. Finalmente un punto $y \in Y$ es llamado un valor regular de f si y solo si el conjunto $f^{-1}(y)$ es vacío o está constituido solo de puntos regulares, de otra manera decimos que y es un valor singular. Utilizando estos conceptos podemos extender la definición 32 a distribuciones $n \in \Delta^{L-1}$, al decir que una distribución n es regular o singular si y solo si respectivamente, 0 es un valor regular o singular de $Z_n : S \rightarrow \mathbb{R}^{L-1}$.

En nuestro modelo estamos suponiendo que el número de ramas en la economía es igual al número de bienes diferentes existentes en la economía y que la producción entre las diferentes ramas de producción en la economía son linealmente independientes (ver definición 30, incisos 3 y 6). En lo que sigue siempre supondremos que la función exceso de demanda Z es de clase C^r , $r \geq 1$.

Proposición 5. Para la economía descrita en la definición 30, 0 es un valor regular de la función exceso de demanda $Z : S \times D \rightarrow \mathbb{R}^{L-1}$ y el conjunto de precios de equilibrio $E = \{(p, n) \in S \times D : Z(p, n) = 0\}$ es una variedad de clase C^r de dimensión $L - 1$.

Demostración. De la definición de Z , tenemos que la l -ésima entrada de Z , o equivalentemente el exceso de demanda para los bienes $l = 1, \dots, L - 1$, que denotaremos por Z^l , se puede reescribir como $Z^l = (x^l - \omega^l) - (n_1 N y_1^l + \dots + n_L N y_L^l)$, donde $x^l - \omega^l = \sum_{i=1}^M x_{il} - \omega_{il}$, y x_{il} y ω_{il} denotan respectivamente, la demanda y dotación inicial del bien l del i -ésimo consumidor (ver (11.3) y (11.2)) y $n_k N y_k^l = N_k y_k^l$ es la oferta total del bien l por parte de la rama k , $l, k = 1, \dots, L$, por lo que Z^l denota la demanda agregada del bien l , por lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathcal{N}} Z(p, n) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Z^1(p, \mathcal{N})}{\partial n_1} & \cdots & \frac{\partial Z^1(p, \mathcal{N})}{\partial n_{L-1}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial Z^{L-1}(p, \mathcal{N})}{\partial n_1} & \cdots & \frac{\partial Z^{L-1}(p, \mathcal{N})}{\partial n_{L-1}} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} y_1^1(p) - y_L^1(p) & \cdots & y_{L-1}^1(p) - y_L^1(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{L-1}(p) - y_L^{L-1}(p) & \cdots & y_{L-1}^{L-1}(p) - y_L^{L-1}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}, \tag{13.1}
\end{aligned}$$

la última igualdad se sigue de que $N = N_1 + \cdots + N_{L-1}$, para concluir note que la matriz del lado derecho de la igualdad anterior, es un menor de la matriz

$$- \begin{pmatrix} y_1^1(p) - y_L^1(p) & \cdots & y_{L-1}^1(p) - y_L^1(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{L-1}(p) - y_L^{L-1}(p) & \cdots & y_{L-1}^{L-1}(p) - y_L^{L-1}(p) \\ y_1^L(p) - y_L^L(p) & \cdots & y_{L-1}^L(p) - y_L^L(p) \end{pmatrix} = - [y_1(p) - y_L(p) \cdots y_{L-1}(p) - y_L(p)], \tag{13.2}$$

cuyas columnas son linealmente independientes, pues por hipótesis $y_1(p), y_2(p), \dots, y_L(p)$ lo son, por lo cual existe un menor de tamaño $(L-1) \times (L-1)$, cuyo determinante no se anula en ningún $(p, n) \in E$, reetiquetando las y_k^l si fuera necesario, obtenemos el resultado. \square

De la misma manera uno puede probar:

Proposición 6. *Supongamos que la función exceso de demanda $Z : S \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{L-1}$ es de clase C^r . Si para todo $(p, n) \in E$ tal que $Z(p, n) = 0$, los vectores $\nabla_p Z^1(p, n), \dots, \nabla_p Z^{L-1}(p, n)$ son linealmente independientes. Entonces, 0 es un valor regular de Z y E_n es una subvariedad diferencial de dimensión $K-1$ en $S \times \mathcal{D}$.*

Corolario 9. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, supongamos que $Z(p^*, n^*) = 0$, entonces, existen vecindades V_{n^*} y V_{p^*} de n^* y p^* respectivamente, y una aplicación diferenciable $p : V_{n^*} \rightarrow V_{p^*}$ tal que $p(n^*) = p^*$ y $z(p(n), n) = 0$ para todo $n \in V_{n^*}$.*

Demostración. De la proposición anterior tenemos que $\partial_p Z(p^*, n^*) : \mathbb{R}^{L-1} \rightarrow \mathbb{R}^{L-1}$ es un isomorfismo. Este hecho nos pone en las condiciones del teorema de la función implícita, de donde el teorema se sigue. \square

Este corolario nos asegura que en una vecindad de un precio regular, cambios pequeños en la distribución de equilibrio n^* implican cambios pequeños en los precios. Sin embargo como veremos más adelante este no es cierto para economías singulares, es decir, para economías regulares pequeños cambios en la distribución de las firmas puede causar “grandes” cambios en el comportamiento de los precios de equilibrio, este hecho será ejemplificado en la sección 14.3.

14. Economías de producción de Shapley-Shubik

Para mostrar como actúa la dinámica del replicador en una economía con producción \mathcal{E} , en esta sección, siguiendo los resultados de Accinelli y Muñiz en [3], consideraremos una clase amplia de economías de propiedad privada, sobre las cuales podemos mostrar diferentes resultados interesantes desde el punto de vista económico, para ello hacemos la siguiente definición:

Definición 33. Sean $f_1, f_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables estrictamente cóncavas tales que $B_i = \lim_{z \rightarrow 0} f_i(z) \geq 0$ y $\lim_{z \rightarrow \infty} f'_i(z) \leq 0$, definamos $u^1(x_1, x_2) = x_1 + f_1(x_2)$ y $u^2(x_1, x_2) = f_2(x_1) + x_2$, entonces una economía con producción de propiedad privada de Shapley-Shubik está dada por el conjunto

$$\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, (u^1, \omega^1), (u^2, \omega^2), g_1, g_2, \theta_{ij}, i, j = 1, 2\},$$

donde g_j , $j = 1, 2$, son funciones cóncavas tales que $g_j(0) = 0$, $\bar{B}_j = \lim_{z \rightarrow 0} g'_j(z) \geq 0$ y $y_2 = g_1(y_1)$ y $y_1 = g_2(y_2)$, $\omega^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1)$ y $\omega^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2)$ tales que $\omega_i^i > 0$ y $\omega_j^i \geq 0$, $\theta_{ij} \in [0, 1]$ con $\theta_{1j} + \theta_{2j} = 1$, $i, j = 1, 2$.

En particular en analogía con economías mirror-symmetric, si $f_1 = f_2 = f$, $g_1 = g_2 = g$, y $y_2 = g(y_1)$ y $y_1 = g(y_2)$, donde f y g satisfacen las propiedades mencionadas para f_1, f_2, g_1 y g_2 , es decir, cuando ambas ramas de producción usan la misma tecnología para producir un bien diferente usando diferentes insumos, llamaremos a la economía *mirror symmetric con mirror production*.

Antes de continuar fijemos la siguiente notación, $B_i = \lim_{z \rightarrow 0} f'_i(z)$ y $\bar{B}_i = \lim_{z \rightarrow 0} g'_i(z)$, $i = 1, 2$, cuando $f_1 = f_2$ simplemente escribiremos B para el valor común del límite B_1, B_2 , de la misma forma cuando $g_1 = g_2$, escribiremos \bar{B} , en lugar de $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$, en principio trataremos el caso en que $B_i, \bar{B}_i < \infty$, a menos que se enuncie explícitamente lo contrario. Ahora note que como f'_i y g'_i son estrictamente cóncavas, entonces f'_i y g'_i son estrictamente decrecientes y así invertibles, por lo que fijamos la siguiente notación $\phi_i = (f'_i)^{-1}$ y $\psi_i = (g'_i)^{-1}$, cuando $f_1 = f_2$ y $g_1 = g_2$, omitiremos poner el subíndice, $i = 1, 2$ en ϕ_i y ψ_i .

Observación 10. Para el caso en que B_i es finito, se tiene que $\phi_i(p) \geq 0$ para todo $p \in (0, B_i]$, con igualdad cuando $p = B_i$. Más aún, bajo estas condiciones y del teorema de la función inversa se sigue que $\phi'_i(p) < 0$.

14.1. Problemas de maximización

En esta sección discutimos los problemas de maximización tanto de las firmas como de los consumidores, ya que estamos considerando economías para las cuales $\omega_2^1, \omega_1^2 \geq 0$, a lo largo de esta sección haremos distinción entre ambos casos, enunciado en cada caso condiciones suficientes que garanticen la existencia de equilibrios en la economía.

14.1.1. Maximización de beneficios

En esta sección abordaremos de forma general el problema de maximización del beneficio por parte de las firmas. Primeramente señalamos que los supuestos sobre las funciones de producción g_i , $i = 1, 2$, aseguran que el problema de maximización de beneficios de cada firma tiene solución, es decir, dado un precio $p \in \mathbb{R}_{++}^2$, existe un vector $y^i \in \mathbb{R}^2$, llamado *oferta de la firma i* , $i = 1, 2$, el cual resuelve el problema de maximización (ver sección 10.2, ecuación (10.1)):

$$\max_{y \in Y_i} p \cdot y.$$

Por lo que resolviendo este problema, la ofertas de las firmas está dada por

$$(g_1(\psi_1(p^{-1})), -\psi_1(p^{-1})) \quad \text{y} \quad (-\psi_2(p), g_2(\psi_2(p))), \quad (14.1)$$

Aquí, como es usual las entradas negativas denotan insumos y las positivas productos. Utilizando este resultado los beneficios de las firmas está dado por

$$\pi_1(p) = pg_1(\psi_1(p^{-1})) - \psi_1(p^{-1}) \quad \text{y} \quad \pi_2(p) = g_2(\psi_2(p)) - p\psi_2(p) \quad (14.2)$$

La siguiente observación nos da condiciones bajo las cuales la demanda de insumos es positiva.

Observación 11. *Dado que g'_i es estrictamente decreciente, pues g_i es estrictamente cóncava, se sigue que la demanda de insumos por parte de las industrias es cero, cuando $p^{-1} \geq \lim_{z \rightarrow 0} g'_1(z) = \bar{B}_1$ y $p \geq \lim_{z \rightarrow 0} g'_2(z) = \bar{B}_2$, y es positiva cuando la desigualdad contraria se mantiene. En particular, cuando $B_i = \infty$, $i = 1, 2$, las firmas demandan cantidades positivas de insumos.*

Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 34. *En una economía de Shapley-Shubik de producción de propiedad privada, decimos que la demanda de insumos es interior para el precio $p > 0$, cuando $1/\bar{B}_1 < p < \bar{B}_2$ y $\pi_i(p) > 0$, $i = 1, 2$.*

14.1.2. Maximización de utilidad

Una vez discutido el problema de maximización de beneficio de los productores, procedemos a describir el problema y solución de la maximización de utilidad por parte de los consumidores, para ello utilizando (14.2), la restricción presupuestaria del consumidor 1 toma la forma

$$px_1 + x_2 = p\omega_1^1 + \theta_{11}\pi_1(p) + \theta_{12}\pi_2(p). \quad (14.3)$$

Una condición necesaria para que el consumidor 1 demande cantidades positivas del bien 1 y 2, es que su tasa marginal de sustitución entre el bien 2 y el bien 1 sea igual al inverso del precio relativo p , es decir, $f'_1(x_2) = 1/p$, por lo tanto obtenemos que la demanda del consumidor 1 por el segundo bien está dada por

$$x_2^1(p) = \phi_1(1/p), \quad (14.4)$$

mientras que la demanda del consumidor 1 por el primer bien está dada por

$$\begin{aligned} x_1^1(p) = & \omega_1^1 - (1/p)\phi_1(1/p) + \theta_{11}(g_1(\psi_1(p^{-1})) - (1/p)\psi_1(p^{-1})) + \\ & \theta_{12}((1/p)g_2(\psi_2(p)) - \psi_2(p)). \end{aligned} \quad (14.5)$$

De la misma manera la restricción presupuestaria del consumidor 2 está dada por

$$px_1 + x_2 = \omega_2^2 + \theta_{21}(pg_1(\psi_1(p^{-1})) - \psi_1(p^{-1})) + \theta_{22}(g_2(\psi_2(p)) - p\psi_2(p)), \quad (14.6)$$

y cuando el consumidor 2 demanda cantidades positivas de ambos bienes necesariamente la siguiente igualdad se debe mantener

$$\begin{aligned} x_1^2(p) &= \phi_2(p), \\ x_2^2(p) &= -p\phi_2(p) + \omega_2^2 + \theta_{21} (pg_1(\psi_1(p^{-1})) - \psi_1(p^{-1})) + \\ &\theta_{22} (g_2(\psi_2(p)) - p\psi_2(p)). \end{aligned} \quad (14.7)$$

Entonces, usando (14.5) y la primer desigualdad en (14.7) junto con \bar{y}^1 y \bar{y}^2 , concluimos que la función exceso de demanda de la economía está dada por la regla de asignación

$$\begin{aligned} Z(p) &= -(1/p)\phi_1(1/p) + \theta_{11} (g_1(\psi_1(p^{-1})) - (1/p)\psi_1(p^{-1})) + \\ &\theta_{12} ((1/p)g_2(\psi_2(p)) - \psi_2(p)) + \phi_2(p) + \psi_2(p) - g_1(\psi_1(p^{-1})) - \omega_1^1. \end{aligned} \quad (14.8)$$

En lo que sigue Z' denotará la deriva de Z respecto de p , esto es, $Z' = dZ/dp$.

Definición 35. Decimos que la demanda del i -ésimo consumidor es interior en el precio p , si $x^i(p) = (x_1^i(p), x_2^i(p)) \in \mathbb{R}_{++}^2$. Por otro lado, si el sistema de precios p es un equilibrio de la economía con producción \mathcal{E} y $x^i(p) > 0$, $y^i(p) > 0$ y $\pi_i(p) > 0$ para $i = 1, 2$, decimos que el precio de equilibrio p es interior.

Observación 12. De la observación 10 y

- i) la ecuación (14.4), si B_1 es finito, entonces la demanda del consumidor 1 por el bien 2 falla para ser interior si $(1/p) \geq B_1$. Mientras que $B_1 = \infty$, entonces $x_2^1(p) > 0$, para todo precio estrictamente positivo p .
- ii) De la misma manera, la primer desigualdad en (14.7) implica que cuando B_2 es finita, la demanda del bien 1 por parte del consumidor 2, falla para ser interior si $p \geq B_2$. Para el caso en que $B_2 = \infty$, $x_1^2(p) > 0$, para cada $p > 0$.

Definición 36. Sea \mathcal{E} una economía de propiedad privada de Shapley-Shubik como la descrita anteriormente, entonces la demanda de los consumidores 1 y 2 son interiores, cuando $\max\{1/B_1, 1/\bar{B}_1\} < p < \min\{B_2, \bar{B}_2\}$ y

$$\begin{aligned} \psi_1(1/p) &< pg_1(\psi_1(1/p)) \\ p\psi_2(1/p) &< g_2(\psi_2(p)) \\ \phi_1(1/p) &< p\omega_1^1 + \theta_{11} (pg_1(\psi_1(p^{-1})) - \psi_1(p^{-1})) + \theta_{12} (g_2(\psi_2(p)) - p\psi_2(p)), \\ p\phi_2(p) &< \omega_2^2 + \theta_{21} (pg_1(\psi_1(p^{-1})) - \psi_1(p^{-1})) + \theta_{22} (g_2(\psi_2(p)) - p\psi_2(p)). \end{aligned} \quad (14.9)$$

14.2. Existencia y multiplicidad de equilibrios

En esta sección presentamos, en diferentes contextos, algunos resultados que garantizan la existencia y multiplicidad de equilibrios en una economía con producción del tipo Shapley-Shubik, ya que para este tipo de economías las dotaciones iniciales $\omega^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1)$ y $\omega^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2)$ satisfacen $\omega_1^1, \omega_2^2 > 0$ y $\omega_2^1, \omega_1^2 \geq 0$, entonces distinguimos dos casos: 1) $\omega_2^1, \omega_1^2 > 0$ y 2) $\omega_2^1 = 0$, y/o $\omega_1^2 = 0$, al primero lo llamaremos el caso *dotaciones iniciales interiores*, mientras que al segundo lo denominaremos *dotaciones iniciales no interiores*.

14.2.1. Existencia de equilibrio en economías con dotaciones no interiores

Comenzamos tratando el caso en que las dotaciones iniciales son no interiores y damos condiciones para que la economía presente multiplicidad de equilibrios, para ello tenemos el siguiente resultado.

Teorema 25. *Sea \mathcal{E} una economía de propiedad privada de Shapley-Shubik, donde las dotaciones iniciales están dadas por $\omega^1 = (\omega_1^1, 0)$ y $\omega^2 = (0, \omega_2^2)$. Si B_1, \bar{B}_1 y B_2, \bar{B}_2 son finitas y $\max\{1/B_1, 1/\bar{B}_1\} < \min\{B_2, \bar{B}_2\}$, entonces existe un precio de equilibrio $p^* \in (\min\{1/B_1, 1/\bar{B}_1\}, \max\{B_2, \bar{B}_2\})$. Más aún, si $Z'(p^*) > 0$ entonces la economía tiene al menos otros dos equilibrios.*

Demostración. Note que podemos reescribir la función exceso de demanda como sigue

$$Z(p) = x_1^1(p) - \omega_1^1 + x_1^2(p) + \psi_2(p) - g_1(\psi_1(1/p)) \quad (14.10)$$

De (14.5) y (14.7), sabemos que $x_1^1(p) - \omega_1^1 = \frac{1}{p} [\theta_{11}\pi_1(p) + \theta_{12}\pi_2(p)] - \frac{1}{p}\phi_1(1/p)$ y $x_1^2 = \phi_2(p)$, donde $\pi_1(p) = pg_1(\psi_1(1/p)) - \psi_1(1/p)$ y $\pi_2(p) = g_2(\psi_2(p)) - p\psi_2(p)$.

Sea $p_m = \min\{1/B_1, 1/\bar{B}_1\}$, entonces usando la observación 11 y la observación 12, junto con el hecho de que $\max\{1/B_1, 1/\bar{B}_1\} < \min\{B_2, \bar{B}_2\}$, tenemos

1. $\phi_1(1/p_m) = 0$ y por lo tanto $x_2^1(p_m) = 0$,
2. $\psi_1(1/p_m) = 0$ y así $g_1(\psi(1/p_m)) = 0$, lo que implica que $\pi_1(p_m) = 0$,
3. $\phi_2(p_m) > 0$ o equivalentemente $x_1^2(p_m) > 0$,
4. $\psi_2(p_m) \geq 0$ y entonces $\pi_2(p_m) \geq 0$.

Por lo que concluimos que $Z(p_m) > 0$. Ahora note que para $p_M = \max\{B_2, \bar{B}_2\}$

1. $\phi_2(p_M) = 0$ o equivalentemente $x_1^2(p_M) = 0$,
2. $\psi_2(p_M) = 0$, $g_2(\psi_2(p_M)) = 0$ y $\pi_2(p_M) = 0$,
3. $\phi_1(1/p_M) > 0$,
4. $\psi_1(1/p_M) \geq 0$, $g_1(\psi_1(1/p_M)) \geq 0$, y $\pi_1(p_M) \geq 0$.

Entonces, una vez que notamos que

$$\theta_{11} \frac{1}{p_M} \pi_1(p_M) - g_1(\psi_1(1/p_M)) = (\theta_{11} - 1) g_1(\psi_1(1/p_M)) - \theta_{11} \frac{1}{p_M} \psi_1(1/p_M) \leq 0,$$

concluimos que $Z(p_M) < 0$. De la continuidad de Z y el hecho de que $Z(p_m) > 0$ y $Z(p_M) < 0$, debe existir un precio positivo $p^* \in (\min\{1/B_1, 1/\bar{B}_1\}, \max\{B_2, \bar{B}_2\})$ para el cual $Z(p^*) = 0$. La segunda parte del teorema se sigue fácilmente que $Z(p_m) > 0$, $Z(p_M) < 0$ y que Z corta al eje x de forma ascendente en p^* . \square

Cabe señalar que la condición $Z'(p) > 0$ nos garantiza que el precio de equilibrio p es regular (ver definición 32), además esta condición es solo una condición suficiente que garantiza la multiplicidad de equilibrios en una economía con producción de Shapley-Shubik, esto será probada en la sección 14.2.4, teorema 30.

Teorema 26. *Supongamos que las hipótesis del teorema 25 se mantienen válidas y que $1/B_1 < 1/\bar{B}_1 < f'_2(\omega_1^1), 1/f'_1(\omega_2^2) < \bar{B}_2 < B_2$, entonces la economía con producción de propiedad privada de Shapley-Shubik \mathcal{E} tiene un precio de equilibrio p^* en el intervalo $(1/\bar{B}_1, \bar{B}_2)$. Más aún, si en el precio p^* se satisfacen las siguientes desigualdades $\pi_i(p^*) > 0$, $i = 1, 2$, $\phi_1(1/p^*) < p^*\omega_1^1 + \theta_{11}\pi_1(p^*) + \theta_{12}\pi_2(p^*)$ y $p^*\phi_2(p^*) < \omega_2^2 + \theta_{21}\pi_1(p^*) + \theta_{22}\pi_2(p^*)$ se mantienen, entonces p^* es un precio de equilibrio interior y cuando $Z'(p^*) > 0$ la economía tiene al menos tres precios de equilibrio.*

Demostración. Para $p_m = 1/\bar{B}_1$, la función exceso de demanda está dada por

$$Z(p_m) = \frac{1}{p_m} [\theta_{12}\pi_2(p_m) - \phi_1(1/p_m)] + \omega_1^1 + \phi_2(p_m) - \omega_1^1 + \psi_2(p_m),$$

ahora debemos probar que $z(p_m) > 0$, primero note que como $x_1^1(p_m) = \frac{1}{p_m} [\theta_{12}\pi_2(p_m) - \phi_1(1/p_m)] + \omega_1^1 \geq 0$, entonces esta cantidad es no negativa, el mismo razonamiento aplica a $\psi_2(p_m)$, pues esta representa la demanda de insumos de la firma 2. Ahora para concluir, usamos el hecho de que f'_2 es estrictamente decreciente y $\phi_2 = (f'_2)^{-1}$, entonces $\phi_2(p) > \omega_1^1$ cuando $p < f'_2(\omega_1^1)$, así $\phi_2(p_m) - \omega_1^1 > 0$ por lo tanto, concluimos que $Z(p_m) > 0$.

Ahora para finalizar la primera parte de la demostración, probaremos que $Z(p_M) < 0$ para $p_M = \bar{B}_2$, para este propósito note que

$$p_M Z(p_M) = \theta_{11}\pi_1(p_M) - \phi_1(1/p_M) + p_M \phi_2(p_M) - p_M g_1(\psi_1(1/p_M)) \quad (14.11)$$

De la restricción presupuestaria del consumidor 2, tenemos que $p_M \phi_2(p_M) \leq \omega_2^2 + \theta_{21}\pi_1(p)$ y del hecho de que $\theta_{11} + \theta_{21} = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} p_M Z(p_M) &\leq \pi_1(p_M) - \phi_1(1/p_M) + \omega_2^2 - p_M g_1(\psi_1(1/p_M)) = \\ &\omega_2^2 - \phi_1(1/p_M) - \psi_1(1/p_M) < -\psi_1(1/p_M), \end{aligned}$$

la última desigualdad se sigue del hecho de que $1/f'_1(\omega_2^2) < \bar{B}_2$ y de que $\omega_2^2 < \phi_1(1/p)$, cuando $f'_2(\omega_2^2) > 1/p$ o equivalentemente para cualquier $p > 1/f'_2(\omega_2^2)$, como $\psi_1(1/p_M)$ es no negativa, concluimos que $Z(p_M) < 0$. Por lo tanto, una vez más de la continuidad de Z debe existir un precio $p^* \in (p_m, p_M)$ tal que $Z(p^*) = 0$, por lo tanto concluimos la primera parte del teorema. La segunda parte es una consecuencia directa de la restricción presupuestaria de cada consumidor y del hecho de que cuando $\pi_i(p)$ es positiva al precio p , necesariamente $\phi_1(1/p) > 0$ y $\phi_2(p) > 0$. Finalmente, si $Z(p^*) > 0$ la demostración de la tercera parte del teorema es completamente análoga a la parte final de la demostración del teorema 25. \square

Afirmación 2. *Antes de continuar, afirmamos que si \bar{B}_1 y \bar{B}_2 son finitas y positivas, pero no necesariamente B_1 o B_2 lo son, y además se cumple que $1/B_1 \leq 1/\bar{B}_1 < f'_2(\omega_1^1), 1/f'_1(\omega_2^2) < \bar{B}_2 \leq B_2$, entonces existe un equilibrio interior, la prueba de esta afirmación es consecuencia directa de la demostración del teorema 26, una vez que notamos que $\max\{1/B_1, \bar{B}_1\} = \bar{B}_1$ y $\min\{\bar{B}_2, B_2\} = \bar{B}_2$, por lo que la prueba de este teorema puede ser trasladada directamente a este caso.*

14.2.2. Existencia de equilibrio en economías con dotaciones interiores

Abordamos ahora el caso en que $\omega^1, \omega^2 \in \mathbb{R}_{++}^2$, es decir, consideraremos economías con producción de Shapley-Shubik con dotaciones iniciales, y permitimos que B_1 y B_2 sean infinitos, pero no así \bar{B}_1 y \bar{B}_2 .

Teorema 27. *Sea \mathcal{E} una economía con producción de Shapley-Shubik con dotaciones iniciales interiores, si $1/\bar{B}_1 < \bar{B}_2$ y $f'_2(\omega_1^1) \neq 1/f'_1(\omega_2^1)$, entonces la economía tiene un precio de equilibrio p^* en el intervalo $(\min\{1/\bar{B}_1, 1/f'_1(\omega_2^1), f'_2(\omega_1^1)\}, \max\{\bar{B}_2, 1/f'_1(\omega_2^1), f'_2(\omega_1^1)\})$. Además, si $Z'(p^*) > 0$, entonces la economía tiene al menos tres equilibrios.*

La prueba de este teorema es análoga a la demostración del teorema 25, la omitiremos en esta parte.

14.2.3. Economías mirror symmetric de Shapley-Shubik con producción

En esta sección presentamos algunos resultados obtenidos sobre la multiplicidad de equilibrios en economías con producción del tipo Shapley-Shubik, en el caso especial en que las funciones de utilidad satisfacen $u_1(x, y) = u_2(y, x)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}_+$, lo cual impone la restricción $f_1 = f = f_2$ sobre la parte no lineal de la función de utilidad, bajo estas condiciones llamaremos a la economía, economía de Shapley-Shubik mirror-symmetric con producción, en analogía con las economías de intercambio puro de Shapley-Shubik.

Teorema 28 ([11]). *Sea $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}_+^2, (u_1, (\omega_1^1, 0)), (u_2, (0, \omega_2^2))\}$ una economía de intercambio puro, supongamos que $u_1(x_1, x_2) = x_1 + f(x_2)$ y $u_2(x_1, x_2) = x_2 + f(x_1)$, con f una función estrictamente cóncava, continuamente diferenciable para la cual $\lim_{z \rightarrow 0} f'(z) \leq 0$ y pongamos $\phi = (f')^{-1}$, entonces si $\phi(1) < \min\{\omega_1^1, \omega_2^2\}$ y $\phi(1) + 2\phi'(1) > 0$, existen al menos tres precios de equilibrio, uno en $p = 1$, otro en algún $p^* > 1$ y uno más en $1/p^* < 1$.*

Una generalización de este resultado fue obtenida en [2], para economías de Shapley-Shubik mirror symmetric con mirror production (ver teorema 4 en [2]), para fines de claridad presentamos explícitamente la definición de estas economías a continuación. En el trabajo mencionado los autores se limitan a analizar el caso en que B_i es finita y \bar{B}_i es infinita para $i = 1, 2$, de hecho solo analizan el caso en que la parte no lineal de las funciones de utilidad son cuadráticas y las funciones de producción tiene la forma z^β con $\beta \in (0, 1)$, por lo que en este trabajo de tesis, generalizamos estos resultados al permitir que las constantes B_i tomen valores infinitos, esto nos permitirá considerar una clase más amplias de funciones de utilidad y producción para las cuales las economías con producción presentan multiplicidad de equilibrio.

Definición 37. *Sea $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}_+^2, u_2, \omega^1, u_2, \omega^2, g_1, g_2, \theta_{i,j}, i, j = 1, 2\}$ una economía con producción de propiedad privada del tipo Shapley-Shubik, entonces si la parte no lineal de las funciones de utilidad satisfacen $f_1 = f = f_2$ para alguna función estrictamente cóncava y continuamente diferenciable, para la cual $\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) \leq 0$, las tecnologías son tales que $g_1 = g_2 = g$, y las participaciones de los consumidores en los beneficios de las empresas son tales que $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, $i, j = 1, 2$, entonces decimos que la economía \mathcal{E} es una economía mirror de Shapley-Shubik symmetric con producción de propiedad privada.*

Note que el supuesto $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, $i, j = 1, 2$, implica que $\theta_{i1} + \theta_{i2} = 1$, $i = 1, 2$.

Teorema 29. *Sea \mathcal{E} una economía mirror symmetric con producción de propiedad privada de Shapley-Shubik, supongamos que $1 < B, \bar{B} < \infty$, entonces $p = 1$ es un precio de equilibrio de la economía. Si además las desigualdades (14.12) se mantienen, entonces $p = 1$ es un equilibrio interior de la economía, más aún si (14.13) se mantiene, entonces la economía tiene al menos tres diferentes precios de equilibrio.*

$$\psi(1) < g(\psi(1)) \tag{14.12}$$

$$\phi(1) < \min\{\omega_1^1 + pg(\psi(1/p)) - \psi(1/p), \omega_2^1 + pg(\psi(1/p)) - \psi(1/p)\}$$

$$2\phi(1) + 2\phi'(1) + 2\psi'(1) - \theta_{11}\psi(1) + \theta_{12}g(\psi(1)) - [g(\psi(1)) - \psi(1)] > 0, \tag{14.13}$$

Demostración. De (14.8) deducimos que

$$Z(p) = \theta_{11}\pi_1(p)p^{-1} + \theta_{12}\pi_2(p)p^{-1} - \phi(p^{-1})p^{-1} + \phi(p) + \psi(p) - g(\psi(p^{-1})). \quad (14.14)$$

Ahora note que $\pi_1(1) = \pi_2(1)$, como $\theta_{11} + \theta_{12} = 1$, se sigue que $\theta_{11}\pi_1(1) + \theta_{12}\pi_2(1) = \pi_1(1)$ y así

$$Z(1) = g(\psi(1)) - \psi(1) - \phi(1) + \phi(1) + \psi(1) - g(\psi(1)) = 0, \quad (14.15)$$

entonces $p_1 = 1 \in E$, derivando $Z(p)$ y evaluando en $p = 1$, podemos ver que

$$Z'(1) = 2\phi(1) + 2\phi'(1) + 2\psi'(1) - \theta_{11}\psi(1) + \theta_{12}g(\psi(1)) - [g(\psi(1)) - \psi(1)],$$

la cual por hipótesis es positiva, de donde concluimos el teorema. \square

14.2.4. Multiplicidad de equilibrios en economías singulares

Hasta ahora nos hemos enfocado en la existencia de múltiples equilibrios en el caso de economías con un precio regular para el cual $Z'(p) > 0$, sin embargo como mencionamos en la sección 14.2 esta condición solo es una condición suficiente para garantizar la existencia de múltiples equilibrios en economías con producción del tipo Shapley-Shubik, el siguiente teorema nos da condiciones suficientes para la existencia de múltiples equilibrios en economías singulares.

Teorema 30. *Sea \mathcal{E} una economía con producción de propiedad privada de Shapley-Shubik, supongamos que las hipótesis del teorema 25, teorema 26 y/o teorema 27 son válidos, entonces si existe un p^* precio de equilibrio que pertenece a uno de los intervalos descritos en los teoremas mencionados, para el cual existe una vecindad N_{p^*} , tal que $Z'(p') > 0$ para todo $p' \in (0, p^*) \cap N_{p^*}$, entonces la economía tiene al menos otro equilibrio. Más aún, si*

- i) $Z'(p') > 0$ para todo $p' \in N_{p^*}$, entonces la economía tienen al menos 3 precios de equilibrio diferentes.*
- ii) $Z'(p') > 0$ para $p' \in (0, p^*) \cap N_p$ y $Z'(p') < 0$, $p' \in (p^*, \infty) \cap N_{p^*}$, entonces la economía es singular con al menos dos precios de equilibrio diferentes.*

Demostración. Los supuestos del teorema implican que el precio p^* debe pertenecer a uno de los intervalos $(\min\{1/B_1, 1/\bar{B}_1\}, \max\{B_2, \bar{B}_2\})$, $(1/\bar{B}_1, \bar{B}_2)$, $(\min\{1/\bar{B}_1, f'_2(\omega_1^2)\}, \max\{\bar{B}_2, f'_2(\omega_1^2)\}, 1/f'_1(\omega_2^1)\})$, dependiendo de cual de las hipótesis se verifica. Dado que la idea detrás de la prueba es la misma independientemente del intervalo al cual p^* pertenezca, supondremos sin pérdida de generalidad que las condiciones del teorema 25 son las que se verifican y por lo tanto supondremos que $p \in (\min\{1/B_1, 1/\bar{B}_1\}, \max\{B_2, \bar{B}_2\})$. Ahora note que las hipótesis $Z(p^*) = 0$ y $Z'(p') > 0$ para todo $p' < p^*$ en una vecindad suficientemente pequeña de p^* , entonces se sigue que $Z(p') < 0$ para todo $p' < p^*$ en esta vecindad, de las hipótesis del teorema 25, sabemos que $Z(p)$ es positiva para $p_m = \min\{1/B_1, 1/\bar{B}_2\}$, entonces de la continuidad de Z , existe un $0 < p_1 < p^*$ tal que $Z(p_1) = 0$, y por lo tanto concluimos que la economía tiene a menos dos equilibrios. (i) se sigue de que $Z(p^*) = 0$ y $Z'(p') > 0$ para todo $p' \in N_{p^*}$ lo que implica que Z cruza el eje x en p^* y $Z(p) < 0 < Z(p')$ para algunos precios $p < p^* < p'$, para concluir el inciso (i) note que $z(p) < 0$ para todo $p_M = \max\{f'_2(\omega_2^1), \bar{B}_2\}$. Para el inciso (ii), note que $Z'(p') > 0$ para $p' \in (0, p^*) \cap N_p$ y $Z'(p') < 0$ para $p' \in (p^*, \infty) \cap N_{p^*}$ lo que implica que $(p^*, 0)$ es un mínimo local de la función exceso de demanda, de donde (ii) se sigue del hecho de que $Z(p) > 0$ para algún $p > 0$. \square

Dado que nuestro objetivo en esta parte del trabajo es encontrar condiciones sobre los parámetros que definen una economía con producción, en el caso particular del modelo de Shapley-Shubik, bajo las cuales podamos garantizar que la economía tenga múltiples equilibrios, para posteriormente analizar la posibilidad de que perturbaciones en los parámetros que la definen, lleven a cambios en el número de equilibrios. En lo que sigue, nos referiremos solo a casos de economías que admiten $p = 1$ como precio de equilibrio *prefijado*. Esto nos permitirá construir ejemplos tratables numéricamente. En la subsección 14.3.1, explicamos cómo construir economías con producción con múltiples, ninguno de los cuales es $p = 1$.

14.3. Construcción de ejemplos

A partir de los resultado obtenidos con anterioridad, en esta sección mostramos como construir ejemplos de economías con múltiples equilibrios. En este sentido, el ejemplo 10 mostrado a continuación corresponde con una economía con tres equilibrios, la construcción de este ejemplo corresponde a utilizar el teorema 25, para garantizar la existencia de un equilibrio regular p^* para el cual $Z'(p^*) > 0$, mientras que en el ejemplo 11 mostramos una economía singular con 2 equilibrios, este ejemplo se construye adaptando la prueba del teorema 30. Finalmente señalamos que los ejemplos construidos en la subsección 14.3.1 son tomados de [2] y si bien no corresponden con los resultados mostrados en esta tesis, dejan de manifiesto que es posible construir economías con producción de Shapley-Shubik, para las cuales \bar{B}_1 y \bar{B}_2 toman el valor 0.

Ejemplo 10. *Supongamos que las firmas producen de acuerdo a las funciones $y_1 = g_1(y_2) = \frac{4}{3}y_2 - \frac{4}{9}y_2^3$ y $y_2 = g_2(y_1) = 4y_1 - 2y_1^2$, supongamos que las preferencias de los consumidores están representadas por las funciones cuasilineales $u_1(x, y) = x - a_1e^{-y}$, $u_2(x, y) = y - a_2e^{-x}$, con a_1 y a_2 por ser determinados, supongamos que la participación de los consumidores en los beneficios de las firmas está dado por $\theta_{11} = 3/4$ y $\theta_{12} = 1/3$, note que $B_1 = a_1$, $B_2 = a_2$, $\bar{B}_1 = 4/3$ y $\bar{B}_2 = 4$. Entonces la oferta de las firmas 1 y 2 respectivamente, está dada por*

$$\left(\frac{4}{3} \left(\frac{4p-3}{4p} \right)^{1/2} - \frac{4}{9} \left(\frac{4p-3}{4p} \right)^{3/2}, - \left(\frac{4p-3}{4p} \right)^{1/2} \right) \text{ y } \left(-\frac{4-p}{4}, 4-p-2 \left(\frac{4-p}{4} \right)^2 \right), \quad (14.16)$$

luego resolviendo el problema de maximización de utilidad para los consumidores y estimando $Z'(1) > 0$ obtenemos la siguiente condición $a_1 > e^{39/12}$, usando las condiciones en los parámetros B_1, B_2, \bar{B}_1 y \bar{B}_2 descritas en las secciones anteriores, para garantizar que la demanda de los consumidores y la oferta de los productores este bien definida, ponemos $a_1 = 37$, de la misma manera resolviendo $Z(1) = 0$ junto con esta elección de a_1 , concluimos que $a_2 = 37e^{-43/72}$, estos valores garantizan que la economía tiene múltiples equilibrios. De hecho tiene exactamente 3 equilibrios, dados por $p_1 \approx 0.82$, $p_2 = 1$, $p_3 \approx 3.95$. La función exceso de demanda para este ejemplo está representada en la figura 14.1 (a).

Ejemplo 11. *Usando los mismos supuestos del ejemplo anterior y eligiendo $a_1 = e^{39/12}$ y $a_2 = e^{181/72}$, obtenemos una economía singular con dos equilibrios, $p = 1$, $p \approx 2.47$, ver figura 14.1 (b).*

Ejemplo 12. *Consideremos las funciones no lineales $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2$, dotaciones iniciales $\omega^1 = (10, 0)$, $\omega^2 = (0, 10)$, participación en los beneficios $\theta_{11} = 0.6$, $\theta_{12} = 0.4$ y funciones de producción definidas por la regla $g(y) = 1 - e^{-5y}$, entonces de un cálculo directo podemos ver que la oferta de la firma 1 está dada por $\left(1 - \frac{1}{5p}, \frac{1}{5} \ln \left(\frac{1}{5p} \right)\right)$, mientras que la oferta de la firma 2 está definida como sigue $\left(\frac{1}{5} \ln \left(\frac{p}{5} \right), 1 - \frac{p}{5}\right)$, los cuales son interiores cuando $0.2 < p < 5$. Por otro lado, para los consumidores tenemos*

$$x^1(p) = \left(10 + \frac{1}{p} [0.52p + 0.28 + 0.12 \ln(0.2p^{-1}) + 0.08p \ln(0.2p)] - \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}, 4 - \frac{1}{p} \right), \quad (14.17)$$

$$x^2(p) = \left(4 - p, p^2 - 3.72p + 10.52 + 0.08 \ln(0.2p^{-1}) + 0.12p \ln(0.2p) \right),$$

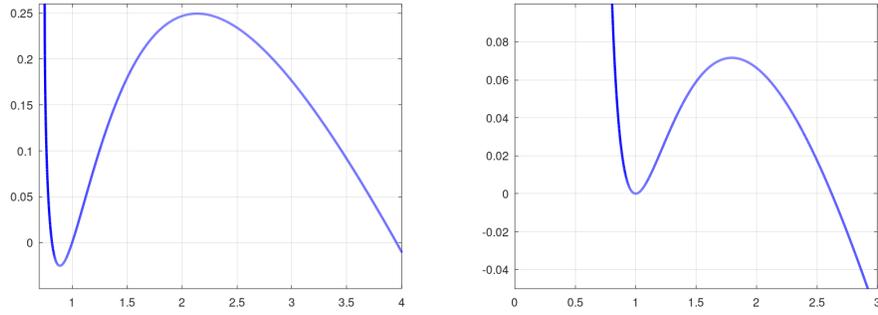
entonces

$$Z(p) = 3 + \frac{1}{p} [0.52p + 0.28 + 0.12 \ln(0.2p^{-1}) + 0.08p \ln(0.2p)] - 4p^{-1} + p^{-2} - p + 0.2p^{-1} + 0.2 \ln(5p^{-1}).$$

Es fácil ver que $Z(1) = 0$ y

$$Z'(p) = -0.28p^{-2} - 0.12p^{-2} - 0.12p^{-2} \ln(0.2p^{-1}) + 0.08p^{-2} + 0.08 \ln(0.2p) + 4p^{-2} - 2p^{-3} - 1 - 0.2p^{-1} - 0.2p^{-2},$$

por lo que $Z'(1) > 0$. Como $Z(0.2) > 0$, $Z(2.6) < 0$ y $1 \in [0.2, 2.6]$, del teorema 29 deben existir al menos tres equilibrios en el intervalo, ver figura 14.2.



(a) Función exceso de demanda del ejemplo 10. (b) Función exceso de demanda del ejemplo 11.

Figura 14.1: Funciones exceso de demanda de los ejemplos 10 y 11.

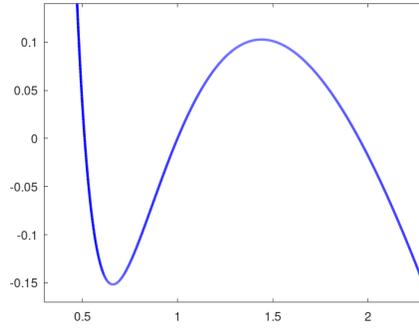


Figura 14.2: Función exceso de demanda del ejemplo 12.

De hecho estos equilibrios son $p_1 \approx 0.5122$, $p_2 = 1$, $p_3 \approx 1.9509$. Tenemos que $Z'(p_1) < 0$, $Z'(p_2) > 0$ y $Z'(p_3) < 0$. De donde podemos observar que el consumidor 1 prefiere $p_3 \succeq p_2 \succeq p_1$, mientras que para el segundo consumidor $p_1 \succeq p_2 \succeq p_3$, esto nos permite concluir que incluso cuando los consumidores tengan participación en el beneficios de las firmas, cuando estas maximizan su beneficio no necesariamente esto trae consigo una mejora en el bienestar de los consumidores, pues como podemos observar en este ejemplo, los consumidores prefieren precios opuestos.

14.3.1. Ejemplos generales

Los siguientes ejemplos tomados directamente de [2] nos permite mostrar que es posible construir ejemplos de economías con producción para las cuales los parámetros $\bar{B}_i = \lim_{z \rightarrow \infty} g'_i(z) = \infty$, $i = 1, 2$, así como prefijar precios de equilibrio distintos de $p = 1$. El primer caso se exhibe en el ejemplo 13, mientras que el segundo en el ejemplo 14.

Consideremos la economía con producción de Shapley-Shubik descrita como sigue: supongamos que las empresas están caracterizadas por $y_2 = g_1(y_1) = ay_1^\alpha$ y $y_1 = g_2(y_2) = by_2^\beta$, para $\alpha, \beta \in (0, 1)$ y $a, b > 0$ tales que $a\alpha = 1$ y $b\beta = 1$. Mientras que la parte no lineal de las funciones de utilidad para los consumidores viene dada por funciones cuadráticas de la forma

$$f_i(x) = a_i x - \frac{1}{2} x^2$$

con $a_i > 0$, $i = 1, 2$. En los que sigue supondremos que los parámetros θ_{ij} , $i, j = 1, 2$ y α, β están fijos, por lo tanto nuestro propósito es determinar las condiciones sobre a_1, a_2 que garanticen la multiplicidad de equilibrios. De un cálculo directo obtenemos

$$Z(p) = \omega p^{-1} + \theta_{11}(a-1)p^{1/(\alpha-1)} + \theta_{12}(b-1)p^{-\beta/(\beta-1)} - (a_1 - p^{-1})p^{-1} + (a_2 - p) + p^{1/(\alpha-1)} - \omega - bp^{-\beta/(\beta-1)},$$

$$Z'(p) = -\omega p^{-2} - \left(\theta_{11}a - \frac{1}{\alpha-1}\right)p^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} + \left(\theta_{12} - \frac{1}{\beta-1}\right)p^{(1-2\beta)/(\beta-1)} + (a_1 - p^{-1})p^{-2} - p^{-3} - 1.$$

Resolviendo $Z'(p) > 0$ para a_1 y $Z(p) = 0$ para a_2 , tenemos

$$a_1 > \omega + \theta_{11}ap^{\alpha/(\alpha-1)} - \theta_{12}p^{1/(\beta-1)} + 2p^{-1} + p^2 + \frac{1}{1-\beta}p^{1/(1-\beta)} + \frac{1}{1-\alpha}p^{\alpha/(\alpha-1)}. \quad (14.18)$$

Eligiendo cualquier valor de $a_1 > 0$ que satisfaga esta desigualdad, a_2 estará determinado de forma única por

$$a_2 = (1 - p^{-1})\omega + (\theta_{11}(1 - a) - 1)p^{1/(\alpha-1)} + (\theta_{12}(1 - b) + b)p^{-\beta/(\beta-1)} + (a_1 - p^{-1})p^{-1} + p, \quad (14.19)$$

entonces para cualquier elección de a_1 de tal forma que se satisfaga (14.18) obtenemos diferentes economías con producción para las cuales p es un precio de equilibrio ((14.19) garantiza este hecho). Además, por construcción estas economías tienen al menos tres equilibrios. Notemos que en particular para $p = 1$, tenemos

$$Z(1) = \theta_{11}(a-1) + 1 + \theta_{12}(b-1) + a_2 - a_1, \quad (14.20)$$

$$Z'(1) = -\omega - \theta_{11}a + \theta_{12} + (a_1 - 3) + \frac{1}{\beta-1} + \frac{1}{\alpha-1}. \quad (14.21)$$

para este caso (14.18) y (14.19) se transforman en

$$a_1 > \omega + \theta_{11}a - \theta_{12} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\alpha} + 3. \quad (14.22)$$

$$a_2 = \theta_{11}(1 - a) + \theta_{12}(1 - b) + b - 1 + a_1 \quad (14.23)$$

Ejemplo 13. Para aclarar cómo aplicar las dos últimas ecuaciones, consideramos una economía de propiedad privada Shapley-Shubik definida por

$$\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, u_1(x, y), \omega^1, u_2(x, y), \omega^2, g_1, g_2, \theta_{ij}, i, j = 1, 2\}.$$

Para los consumidores suponemos que $\omega^1 = (20, \omega)$, $\theta^1 = (\theta_{11}, \theta_{12})$, $\omega^2 = (\omega, 25)$, $\theta^2 = (\theta_{11}, \theta_{12})$, con funciones de utilidad

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 + f_1(x_2) \quad \text{y} \quad u_2(x_1, x_2) = f_2(x_1) + x_2,$$

y para la funciones de tecnología

$$y_2 = g_2(y_1) = \frac{1}{\alpha}y_1^\alpha, \quad y_1 = g_1(y_2) = \frac{1}{\beta}y_2^\beta,$$

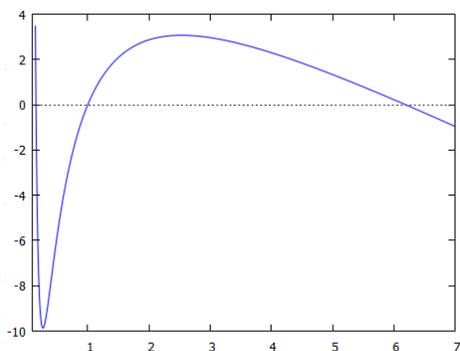
donde $f_i(z) = a_i z - \frac{1}{2}z^2$, $\omega = \frac{94}{91}$, $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.35$ con participaciones $\theta_{11} = 0.75$ y $\theta_{12} = 0.4$, por lo tanto necesitamos encontrar a_1 y a_2 que garanticen la existencia de múltiples equilibrios en la economía con producción descrita anteriormente. Por lo que usando (14.22), precisamos garantizar $a_1 > 12$, por conveniencia elegimos $a_1 = \frac{2189}{140}$, de (14.23) tenemos $a_2 = 15$. En consecuencia la función exceso de demanda está dada por

$$Z(p) = \frac{94}{91}p^{-1} + \frac{7}{4}p^{-10/7} + \frac{26}{35}p^{35/65} - \frac{2189}{140}p^{-1} + p^{-2} + 15 - p + p^{-10/7} - \frac{94}{91} - \frac{100}{35}p^{100/65}.$$

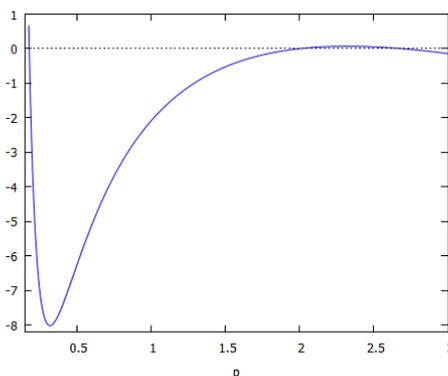
Esta función es representada en la figura 14.3 (a).

Hasta ahora todas las construcciones hechas tienen la particularidad de tener a $p = 1$ como precio de equilibrio, sin embargo el siguiente ejemplo deja de manifiesto que este hecho es solo por simplicidad en los cálculos.

Ejemplo 14. Pongamos $\theta_{11} = 0.75$, $\theta_{12} = 0.4$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.35$ y $\omega = \frac{94}{91}$. Para ilustrar, construimos una economía con múltiples equilibrios, uno de los cuales elegimos como $p = 2$. Usando este valor en (14.18) obtenemos la condición en $a_1 > 13.26596422679823$, por conveniencia ponemos $a_1 = 14$ y de (14.19) se sigue que $a_2 = 11.18083150184725$. Para este caso la gráfica de la función de demanda está representada en la figura 14.3 (b), cuyos precios de equilibrio están dados por $p_1 \approx 0.1792472498915$, $p_2 = 2$ y $p_3 \approx 2.6915745984313$.



(a) Función exceso de demanda del ejemplo 13.



(b) Función exceso de demanda del ejemplo 14.

Figura 14.3: Funciones exceso de demanda de los ejemplos 13 y 14.

En los ejemplos anteriores la construcción se basa en determinar valores que garanticen $Z'(p) > 0$, algún valor de p , sin embargo también pudimos determinar valores para los cuales $Z'(p) = 0$ y aún así conservar multiplicidad de equilibrios en la economía (ver ejemplo 11). Finalmente señalemos que aún cuando la construcción en el ejemplo 14 es más general, esto implica un poco más de trabajo, por lo tanto como en esencia ambas construcciones son iguales preferimos continuar trabajando con el caso particular donde el equilibrio base es $p = 1$.

15. Distribución sobre ramas de producción

Siguiendo lo descrito en la sección 11, introduciremos ramas de producción a las economías del tipo Shapley-Shubik. Los ejemplos construidos en la sección anterior y/o en general los resultados obtenidos sobre la multiplicidad de equilibrios en economías con producción de Shapley-Shubik, nos permitirán describir el actuar de la dinámica del replicador. Fijando todos los parámetros excepto el número de empresas que utilizan cada una de las tecnologías disponibles, podemos identificar a las economías con una distribución de empresas en el conjunto de ramas de producción, lo que significa que cada economía está identificada con una distribución $\mathcal{N} = (N_1, N_2)$, donde N_1 representa el número de empresas en la rama 1, y N_2 representa el número de empresas en la rama 2, para resumir este hecho, usaremos el símbolo $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ para representar una economía de Shapley-Shubik generalizada tal que la distribución de empresas está dada por \mathcal{N} .

Definición 38. *Sea*

$$\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, (u_i, \omega^i), (Y_j, N_j), \theta_{ik}, i = 1, 2, k \in \mathcal{K} = \{1, \dots, L\}\}$$

Una economía con producción de propiedad privada con 2 bienes y $N \geq 2$ firmas divididas en 2 ramas de producción, si las funciones de utilidad, de producción y dotaciones iniciales satisfacen las condiciones de la definición 33, entonces llamamos a la economía \mathcal{E} , economía con producción de propiedad privada de Shapley-Shubik con distribución sobre ramas de producción.

Aquí implícitamente estamos asumiendo que las restricciones tecnológicas Y_1 y Y_2 están caracterizadas por funciones g_1 y g_2 , las cuales son estrictamente cóncavas y suaves, y que el conjunto de producción toma la forma

$$Y_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 : y_1 \leq g_1(y_2)\} \quad \text{y} \quad Y_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 : y_2 \leq g_2(y_1)\}.$$

En las siguientes construcciones y resultados, cuando nos refiramos a una economía con producción de propiedad privada de Shapley-Shubik con distribución sobre ramas de producción utilizaremos la misma notación que para las economías de propiedad privada de Shapley-Shubik, esto es, para $i = 1, 2$, por f_i denotaremos la parte no lineal de sus funciones de utilidad y por ϕ_i a la función inversa de su derivada, mientras que a las funciones de producción las denotaremos por g_i y por ψ_i a la derivada de sus funciones inversas. Entonces dada una economía con producción de propiedad privada de Shapley-Shubik con distribución sobre ramas de producción y una distribución $\mathcal{N} = (N_1, N - N_1)$, la oferta agregada de las firmas está dada por $N_i y_i(p)$, $i = 1, 2$, por lo que siguiendo con la notación introducida en la sección 14 obtenemos

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{N}}(p) = & N_1 \theta_{11} [g_1(\psi_1(p^{-1})) - \psi_1(p^{-1}) p^{-1}] + (N - N_1) \theta_{12} [g_2(\psi_2(p)) p^{-1} - \psi_2(p)] + \\ & \omega_2^1 p^{-1} - \phi_1(p^{-1}) p^{-1} + \phi_2(p) + (N - N_1) \psi_2(p) - \omega_1^2 - N_1 g_1(\psi_1(p^{-1})). \end{aligned} \quad (15.1)$$

por lo que $p = p(\mathcal{N})$ es un precio de equilibrio para la economía si y solo si

$$\begin{aligned} \phi_2(p) = & \omega_1^2 + \phi_1(p^{-1}) p^{-1} + N_1 g_1(\psi_1(p^{-1})) - \omega_2^1 p^{-1} - (N - N_1) \psi_2(p) - \\ & N_1 \theta_{11} [g_1(\psi_1(p^{-1})) - \psi_1(p^{-1}) p^{-1}] - (N - N_1) \theta_{12} [g_2(\psi_2(p)) p^{-1} - \psi_2(p)], \end{aligned} \quad (15.2)$$

derivando (15.1) con respecto de p , obtenemos

$$\begin{aligned} Z'(p) = & N_1 \theta_{11} \psi_1 (p^{-1}) p^{-2} - (N - N_1) \theta_{12} g_2 (\psi_2 (p)) p^{-2} - \omega_2^1 p^{-2} + \phi_1 (p^{-1}) p^{-2} \\ & + \phi_1' (p^{-1}) p^{-2} + \phi_2' (p) + (N - N_1) \psi_2' (p) + N_1 \psi_1' (p^{-1}) p^{-3}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Note que $Z'(p) > 0$ para algún $p > 0$, es equivalente a la condición siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_1 (p^{-1}) > & (N - N_1) \theta_{12} g_2 (\psi_2 (p)) - N_1 \theta_{11} \psi_1 (p^{-1}) + \omega_2^1 - \phi_1' (p^{-1}) \\ & - \phi_2' (p) p^2 - (N - N_1) \psi_2' (p) p^2 - N_1 \psi_1' (p^{-1}) p, \end{aligned} \quad (15.4)$$

Por lo que una vez presentadas las estimaciones anteriores, el siguiente resultado nos da condiciones que garantizan la existencia de múltiples equilibrios en economías de Shapley-Shubik con producción y distribución sobre ramas de producción.

Teorema 31. *Sea $\mathcal{E}_{\mathcal{N}^*}$ una economía con producción de propiedad privada de Shapley-Shubik con distribución sobre ramas de producción. Si para una distribución $(N_1^*, N - N_1^*)$ existe un precio positivo p tal que se cumple (15.2), entonces p es un precio de equilibrio para la economía. Más aún, si se cumplen (15.2) y (15.4) para algún $p > 0$, entonces p es un precio de equilibrio y la economía tiene al menos tres precios de equilibrios.*

16. Dinámica del replicador: Segunda parte

Como mencionamos con anterioridad, Accinelli y Covarrubias en [1] introdujeron por primera vez la dinámica del replicador como representación adecuada para una economía en la que los *mánagers* de las firmas en búsqueda de mayores beneficios, toman decisiones racionales sobre su inversión, para economías con dos ramas de producción. En este contexto los *mánagers* podrían cambiar la tecnología o la rama de producción de sus inversiones de ahí la importancia de dotar al modelo de economía de una dinámica adecuada que refleje el actuar de los *mánagers* de las firmas, esto se puede realizar mediante la dinámica del replicador, esto es, el flujo de inversiones desde las ramas de producción donde las ganancias son menores hasta las ramas con mayores ganancias se puede modelar utilizando la dinámica del replicador de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= n_1(1 - n_1)(\pi_1(n) - \pi_2(n)), \\ \dot{n}_2 &= -\dot{n}_1.\end{aligned}\tag{16.1}$$

Fijando el estado inicial de la economía, es decir, una distribución de las firmas sobre las ramas de producción $\mathcal{N}(t_0) = (\frac{N_1(t_0)}{N}, \frac{N_2(t_0)}{N})$ o equivalentemente $n(t_0) = (n_1(t_0), n_2(t_0))$ la evolución de la economía está dada por la solución $n(t, t_0)$ del sistema dinámico (16.1) donde $n(t_0, t_0) = n(t_0)$ y corresponde a un continuo de economías $\mathcal{E}_{\mathcal{N}(t)}$, donde $\mathcal{N}(t) = Nn(t, t_0)$. Note que la distribución $n(t)$ depende del tiempo, porque cada gerente en cada tiempo puede elegir cambiar de rama de producción de acuerdo a los beneficios obtenidos en el tiempo t , es decir, si $\pi_1(n(t)) > \pi_2(n(t))$ entonces $\dot{n}_1(t) > 0$, lo que implica que las firmas preferirán moverse de la rama 2 a la 1, mientras que si la desigualdad contraria ocurre entonces el flujo será inverso. En el caso donde $\pi_1(n(t)) = \pi_2(n(t))$ la economía está en un estado estacionario, en este caso los gerentes no tienen incentivo a cambiar de rama de producción. Para simplificar la notación, cuando no haya riesgo de confusión omitiremos la variable t . Suponiendo fijo el número total de firmas en la economía a lo largo del tiempo, de acuerdo con la decisión de los *mánager* la cantidad de firmas en cada rama de producción cambia a lo largo del tiempo, pero suponemos que número total de empresas es constante e igual a N , es decir, $N = N_1(t) + N_2(t)$ para todo t . Los cambios en la distribución de las firmas impacta el comportamiento de los consumidores, esto es claro pues el ingreso del consumidor es una función que depende de la distribución $\mathcal{N} = (N_1, N_2)$,

$$W^i(p, \mathcal{N}) = p \cdot \omega^i + \sum_{k=1}^2 N_k \theta_{ik} \pi_k(y_k(p)).$$

Una distribución de probabilidad de las firmas sobre el conjunto de ramas de producción está dada por $n(t) = (n_1(t), n_2(t)) = (\frac{N_1(t)}{N}, \frac{N_2(t)}{N})$. Dada una distribución $\mathcal{N} = (N_1, N_2)$, la función exceso de demanda toma la forma

$$Z(p, \mathcal{N}) = x^1(p) + x^2(p) - \omega^1 - \omega^2 - N_1 y_1(p) - N_2 y_2(p).\tag{16.2}$$

o explícitamente

$$\begin{aligned} Z(p, \mathcal{N}) = & N_1 \theta_{11} [g_1(\psi_1(p^{-1})) - \psi_1(p^{-1})p^{-1}] + (N - N_1) \theta_{12} [g_2(\psi_2(p))p^{-1} - \psi_2(p)] + \\ & \omega_2^1 p^{-1} - \phi_1(p^{-1})p^{-1} + \phi_2(p) + (N - N_1)\psi_2(p) - \omega_1^2 - N_1 g_1(\psi_1(p^{-1})). \end{aligned} \quad (16.3)$$

(comparar con (15.1) teniendo en cuenta que $N_1 = N_1(t)$).

Observación 13. *Dependiendo de la distribución de las empresas en los conjuntos de tecnologías disponibles, la economía puede ser singular o regular y con multiplicidad o unicidad de equilibrio. Dado que los consumidores son los accionistas de las empresas, sus ingresos dependen de la distribución y, por tanto, los precios de equilibrio dependen también de la distribución. Entonces, podemos considerar los precios de equilibrio p como una correspondencia $p : (0, 1) \rightarrow E_{\mathcal{N}}$. Donde*

$$E_{\mathcal{N}} = \{p \in \mathbb{R}_+ : z_{\mathcal{N}}(p) = 0\}.$$

Esto muestra que las decisiones de los administradores de las empresas, que en principio solo afectarían el lado productivo de la economía, pueden tener repercusiones en el comportamiento global de las economías. En la sección 16.2, analizaremos cómo estas decisiones pueden afectar el bienestar de la economía.

Es conveniente tener, al menos para los ejemplos generales discutidos en la subsección 14.3.1, una expresión para el estado estacionario, para estos ejemplos de un cálculo directo podemos mostrar que los beneficios de las firmas están dados por

$$\pi_1(n_1) = (a - 1)p(n_1)^{\alpha/(\alpha-1)} \quad y \quad \pi_2(n_1) = (b - 1)p(n_1)^{-1/(\beta-1)}. \quad (16.4)$$

Suponemos que al final de cada período, los gerentes eligen la rama de producción de acuerdo con los beneficios observados en cada rama. Seremos testigos de un flujo desde las sucursales que ofrecen menores ganancias hacia aquellas con mayores ganancias. Esto implica un cambio en la distribución de las empresas, cuantificado por el sistema dinámico (16.1). El proceso continúa hasta que las ganancias se igualan. La economía llegará ahora a un estado estacionario, cuya estabilidad en el sentido de Liapunov indicará las posibilidades de permanecer como tal o no en el tiempo, ante posibles perturbaciones exógenas de los parámetros del sistema.

El estado de equilibrio de nuestro sistema es alcanzado para alguna distribución $n^* = (n_1^*, n_2^*)$ tal que $\pi_1(n_1^*) = \pi_2(n_1^*)$, es decir,

$$p^* = p(n_1^*) = \left[\frac{a - 1}{b - 1} \right]^{\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta-1}}. \quad (16.5)$$

Si $n_1 : p(n_1) > p^*$ entonces $\pi_1(n_1) < \pi_2(n_2)$ y observaremos un flujo de rama 1 a la rama 2 y recíprocamente cuando $p(n_1) < p^*$.

16.1. Ejemplos: Dinámica del replicador

En esta sección mostramos algunos ejemplos de aplicaciones de la dinámica del replicador, para ello consideraremos las distintas construcciones realizadas a lo largo de esta tesis. Los ejemplos que mostraremos en esta sección, nos permitirán obtener algunas conclusiones interesantes sobre el bienestar de los consumidores, cuando los managers de las firmas toman decisiones racionales a lo largo del tiempo.

16.1.1. Ejemplos generales

Consideremos una vez más el ejemplo mostrado en la subsección 14.3.1, el cual como ya mencionamos es tomado directamente de [3], en este ejemplo las empresas se caracterizan por las funciones de tecnología, $y_2 = g_1(y_1) = ay_1^\alpha$ y $y_1 = g_2(y_2) = by_2^\beta$, para $\alpha, \beta \in (0, 1)$ y $a, b > 0$ tal que $a\alpha = 1$ y $b\beta = 1$. Las funciones de utilidad están dadas por $u_1(x_1, x_2) = x_1 + f_1(x_2)$ y $u_2(x_1, x_2) = f_2(x_1) + x_2$

$$f_i(x) = a_i x - \frac{1}{2} x^2$$

con $a_i > 0$, $i = 1, 2$. En lo que sigue supondremos que los parámetros θ_{ij} , $i, j = 1, 2$ y α, β están fijos, por lo tanto nuestro propósito es determinar condiciones sobre a_1, a_2 que garanticen la multiplicidad de equilibrios, en este contexto (14.22) y (14.23) toman la forma

$$a_1 \geq \omega + \theta_{11}N_1a - \theta_{12}(N - N_1) + \frac{N_1}{1 - \alpha} + \frac{N - N_1}{1 - \beta} + 3 \quad (16.6)$$

y

$$a_2 = \theta_{11}N_1(1 - a) + \theta_{12}(N - N_1)(1 - b) - N_1 + (N - N_1)b + a_1. \quad (16.7)$$

Por lo tanto, una vez que los parámetros $\alpha, \beta, a_1, a_2, \omega, \theta_{11}, \theta_{12}$ y el número de empresas N están fijas, el número de posibles precios de equilibrio dependerán de la distribución $\mathcal{N} = (N_1, N_2)$ de las empresas sobre el conjunto de tecnologías disponibles. Si para algún N_1 las desigualdades (16.6) y (16.7) se verifican, entonces la economía tendrá tres equilibrios.

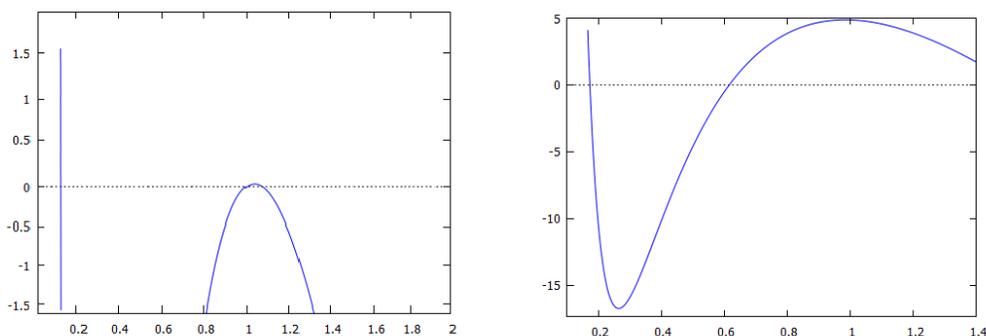
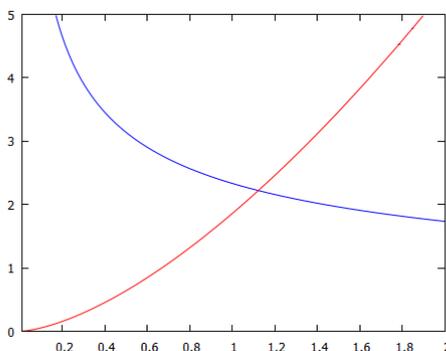
Afirmación 3. *Dados los parámetros $\alpha, \beta, a_1, a_2, \omega, \theta_{11}$ y θ_{12} . Sea $\mathcal{N} = (N_1, N_2)$ una distribución de las empresas sobre las ramas de producción tal que*

1. *La desigualdad en (16.6) se verifica, entonces la economía tiene un único equilibrio singular en $p = 1$.*
2. *$\omega + \theta_{11}N_1a - \theta_{12}(N - N_1) + \frac{N_1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} + 3 > a_1$, entonces la economía es regular con al menos tres equilibrio.*

Ambos hechos se siguen de un cálculo directo.

Ejemplo 15. *Consideremos una economía con producción de Shapley-Shubik definida por $u_1(x_1, x_2) = x_1 + f_1(x_2)$ y $u_2(x_1, x_2) = x_2 + f_2(x_1)$ son las funciones de utilidad y $f_i(z) = a_i z - \frac{1}{2} z^2$, $i = 1, 2$ y $a_1 = 90$, $a_2 = \frac{2059}{14}$ con dotaciones $\omega^1 = (20, 16/91)$, $\omega^2 = (16/91, 25)$ y participaciones de los consumidores en los beneficios de las empresas dados por $\theta_{11} = 0.75$, $\theta_{12} = 0.4$, $\theta_{21} = 0.25$ y $\theta_{22} = 0.6$, supongamos que las funciones de tecnología verifican $y_2 = g_1(y_1) = \frac{1}{\alpha} y_1^\alpha$, $y_1 = g_2(y_2) = \frac{1}{\beta} y_2^\beta$ con $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.35$.*

En este ejemplo, para las distribuciones (10, 40) y (11, 39) la economía tiene 3 equilibrios y un solo equilibrio para cualquier otra distribución, por lo que si los máangers de las firmas buscan invertir en la rama de producción que les brinde mayores beneficios, entonces decidirán cambiar sus ramas o tecnología de producción y por ende la estructura de la economía se verá modificada, esto podría provocar por ejemplo un cambiando en el número de equilibrios. Antes de que esto suceda, la economía debe haber pasado por una economía crítica. Esto podría conducir a un cambio abrupto en las distribuciones y los precios de equilibrio de la economía. Como veremos en la siguiente sección, el hecho de que del lado de la producción se vuelva más eficiente o más rentable no significa que algo similar ocurra en el lado del consumo de la economía.

(a) $p_1 \approx 0.12562$, $p_2 = 1$ y $p_3 \approx 1.07471$ (b) $p_1 \approx 0.17025$, $p_2 \approx 0.6155$ y $p_3 \approx 1.5223$ Figura 16.1: Precios de equilibrio: (a) distribución $\mathcal{N} = (10, 40)$, (b) distribución $\mathcal{N} = (11, 39)$.Figura 16.2: La línea azul representa $\pi_1(p)$, mientras que la línea roja $\pi_2(p)$: Ejemplo 15.

Continuando con el análisis del último ejemplo, se procede a analizar los beneficios de las empresas en cada rama. De un cálculo directo obtenemos

$$\pi_1(p) = \frac{7}{3}p^{-3/7} \text{ y } \pi_2(p) = \frac{65}{35}p^{100/65},$$

entonces usando la ecuación (16.5) obtenemos que el precio de igual beneficio está dado por

$$p^* = \left[\frac{49}{39} \right]^{91/179}.$$

La tabla 16.3 muestra los precios de equilibrio y beneficios para algunas distribuciones.

Dado que $p^* \approx 1.1230431$, podemos ver de la tabla anterior que no existe una distribución para la cual la igualdad de beneficios se alcanza, por lo tanto podemos concluir que el estado de equilibrio para esta economía no es alcanzable. Note que para cualquier distribución $\mathcal{N} = (N_1, N - N_1)$ con $0 \leq N_1 \leq 10$, los agentes preferirán invertir en la rama 1, entonces si el estado inicial de la economía está dado por una distribución $n(t_0) = (N_1(t_0)/50, N_2(t_0)/50)$ tal que $N_1(t_0) \leq 10$, entonces dado que $\pi_1(n(t_0)) > \pi_2(n(t_0))$, de acuerdo con el sistema dinámico (16.1) existirá un flujo creciente hacia la rama 1. Este flujo positivo permanecerá hasta el tiempo $t^* > t_0$ cuando $N_1(t^*) = 12$, porque para toda distribución $\mathcal{N} : 12 \leq N_1 < 50$ tenemos que $\pi_1(n(t_0)) < \pi_2(n(t_0))$, en este punto la desigualdad es contraria, dado que $\pi_1(n^*) = \pi_2(n^*)$

N_1	p	$\pi_1(p)$	$\pi_2(p)$
5	0.0358654	9.714076	0.011099
6	0.0455704	8.766515	0.016043
7	0.0580256	7.904130	0.023266
8	0.0741872	7.114125	0.033954
9	0.0956613	6.379756	0.050205
10	0.1256235	5.676613	0.076349
	1	2.333333	1.857143
	1.0747180	2.262376	2.074869
11	0.1725278	4.954926	0.124389
	0.6155470	2.872721	0.880302
	1.5223654	1.948742	3.545224
12	1.7717621	1.826070	4.477210

Figura 16.3: Tabla de beneficios para el ejemplo 15.

corresponde a un número no entero $50n^*$, es posible que comience un ciclo de migración de empresas de una rama a otra y recíprocamente. Un proceso simétrico se obtendría si el estado de equilibrio de la economía corresponde con una distribución $\mathcal{N}(t_0)$ tal que $12 < N_1(t_0) < 50$, en este caso el flujo será de la rama 1 a la 2, ver tabla 16.3.

Es importante notar que, en el caso de que el estado de equilibrio de la economía está caracterizado por una distribución $\mathcal{N}(t_0)$ observaremos un flujo positivo hacia la rama 1 y consecuentemente, en algún $t = t^*$ la economía pasará por una singularidad, pues se está yendo de una economía con unicidad de equilibrio a una con multiplicidad, algo similar ocurrirá si el estado inicial de la economía en el tiempo t_0 está caracterizado por una distribución $\mathcal{N}(t_0)$ tal que $12 < N_1(t_0) < 50$. En este caso, el flujo positivo será hacia la rama 2 y la transición a la distribución con $N_1 = 11$ implicaría un cambio repentino en el comportamiento de la economía que pasaría de tener solo un equilibrio a tener 3. Sin embargo, esos dos casos son completamente similares, notemos que cuando se pierde la unicidad, la economía que estaba inicialmente en estado caracterizado por $N_1(t_0) < 10$, contrario al precio que se establece cuando se pierde la unicidad, el mismo sentido de la desigualdad de los beneficios. Para el segundo caso, observaremos que hay dos posibilidades que el sentido de la desigualdad de los beneficios es contraria y solo uno permanece. Este hecho nos alerta sobre la imposibilidad de prever *a priori* las consecuencias de las decisiones racionales de los directivos de las empresas en un entorno de una economía singular. El impacto de estas decisiones sobre el número de equilibrios puede ser muy diferente. En el siguiente apartado analizaremos con precisión las repercusiones de estas decisiones en el bienestar de los consumidores.

Observación 14. Consideramos una economía \mathcal{E}_{n^*} singular, aún en el caso en el que la distribución de probabilidad dada por $n^* = (n_1^*, n_2^*)$ que define la existencia de un precio p tal que $Z(p, n^*) = 0$ y $Z'(p, n^*) = 0$ ocurre para una distribución en la cual Nn^* no corresponde con un entero positivo. Esto no va en detrimento de las conclusiones obtenidas, ya que los cambios repentinos e inesperados se perciben cuando pasamos de una economía caracterizada por una distribución $\bar{\mathcal{N}}$ con $\bar{N}_1 < n_1^*N$ a otra caracterizada por una distribución \mathcal{N}^* tal que $N_1^* > n_1^*N$.

Ejemplo 16. Consideremos una economía de propiedad privada del tipo Shapley-Shubik con N firmas, dividida en dos ramas de producción, definida por $y_1 = B_1 y_2^{\beta_1}$ para la primer rama y $y_2 = B_2 y_1^{\beta_2}$ para el segundo sector, sea N_1 el número de firmas en la primer rama, entonces $N - N_1$ es el número de firmas en la segunda. Para los consumidores asumimos que $u_1(x_1, x_2) = x_1 + a_1 x_2 - \frac{1}{2} (x_2)^2$ y $u_2(x_1, x_2) =$

$x_2 + a_2 x_1 - \frac{1}{2} (x_1)^2$. Donde

$$B_1 = \left[\frac{128}{27} \right]^{1/4}, \quad \beta_1 = \frac{3}{4}, \quad B_2 = \frac{3}{2}, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}, \quad a_1 = 234 \text{ y } a_2 = 224.$$

Supongamos que las dotaciones iniciales de los consumidores están dadas por $\omega^1 = (2125, 10)$ y $\omega^2 = (20/3, 935)$, de donde obtenemos

$$Z(p) = -\frac{5N_1}{3}p^3 + \frac{4(N - N_1)}{3}p^{-3} - 224p^{-1} + p^{-2} - p + \frac{652}{3} \quad (16.8)$$

Note que $\pi_1(1) = \frac{1}{2} = \pi_2(1)$, es decir, las firmas tienen igual beneficio en $p = 1$, supongamos que el número total de firmas es $N = 50$.

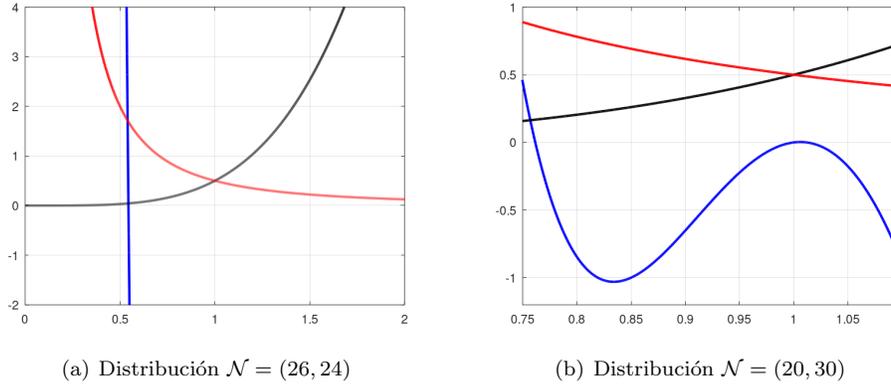


Figura 16.4: La curva negra representa $\pi_1(p)$, la curva roja $\pi_2(p)$ y la azul a la función exceso de demanda del ejemplo 16 para distintas distribuciones

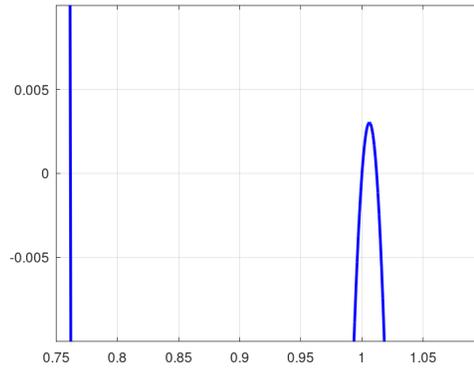


Figura 16.5: Función exceso de demanda para la distribución (20, 30).

Para la distribución (20, 30) los precios de equilibrio son $p \approx 0.76163069$, $p = 1$ y $p \approx 1.01197601$, además podemos ver que ninguno de estos precios de equilibrio es singular. Para cualquier distribución \mathcal{N}_0 diferente de $\mathcal{N}^* = (20, 30)$ la economía se mueve de \mathcal{N}_0 a \mathcal{N}^* , pues una de las ramas de producción les ofrece beneficios más altos que la otra. Para ser precisos afirmamos que para cualquier distribución $0 \leq N_1 \leq 19$ los managers de las firmas prefieren moverse de la rama 2 a rama 1 y para cualquier $50 \geq N_1 \geq 21$ los

mánagers prefieren moverse de la rama 1 a la rama 2. Note que en esta distribución $\mathcal{N}^* = (50, 20)$ existen tres diferentes precios de equilibrio.

16.2. Repercusiones sobre el bienestar

En esta sección mostraremos que aunque las decisiones de inversión de los gerentes de la empresa son racionales y tienden a aumentar las ganancias generales del lado productivo de la economía, este hecho no implica necesariamente una mejora en el bienestar de todos los consumidores, incluso cuando son accionistas de las empresas, como en el caso de una economía neoclásica de propiedad privada, para demostrar que esta afirmación es cierta, consideremos las utilidades de los consumidores del ejemplo 15, cuando la distribución de las empresas cambia de acuerdo con la decisión de los gerentes.

En la tabla 16.3 se en listan los valores de las utilidades de los consumidores cuando la distribución de las firmas cambia.

N_1	p	$u^1(x_1, x_2)$	$u^2(x_1, x_2)$
5	0.0358654	2969.97331	10846.88104
6	0.0455704	3205.44727	10846.46648
7	0.0580256	3385.79796	10845.32682
8	0.0741872	3525.68448	10843.36349
9	0.0956613	3636.21159	10840.36528
10	0.1256235	3726.19327	10835.86728
	1	4027.89011	10744.01171
	1.0747180	4036.61083	10743.12541
11	0.1725278	3804.20679	10828.58676
	0.6155470	3975.66125	10768.53385
	1.5223654	4085.00484	10767.28381
12	1.7717621	4110.39822	10803.81133

Figura 16.6: Tabla de utilidades del ejemplo 15.

Tenga en cuenta que si el estado inicial de la economía se caracteriza por una distribución $\mathcal{N}(t_0)$ tal que $0 < N_1(t_0) < 12$, entonces el número de empresas en la rama 1 tiende a aumentar como resultado de las decisiones de los gerentes. Los valores de la utilidad del consumidor aumentan a lo largo de este proceso, al mismo tiempo que la utilidad de los consumidores 2 disminuye.

Un resultado inverso sobre las utilidades de los consumidores ocurre cuando el estado inicial de la economía corresponde a una distribución con $12 < N_1(t_0) < 50$.

El ejemplo considerado, aunque representa un caso particular, nos lleva a preguntarnos si una política pública orientada a la producción podría evitar situaciones indeseables en el bienestar de los consumidores. Ciertamente esto supondría la participación de una autoridad central en la economía con las dificultades que ello implica, en particular los posibles resultados adversos.

Parte III

Comentarios finales y producción

19. Conclusiones y trabajo a futuro

En esta tesis hemos presentado diferentes resultados sobre las aplicaciones del formalismo termodinámico: propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos simbólicos dotados de una medida de Gibbs, shifts contables de Markov y con la teoría de juegos, en el caso particular de los juegos con potencial. Dentro de estas aplicaciones destacamos los resultados obtenidos sobre desigualdades de concentración tanto para subshifts de tipo finito como para shifts contables de Markov. Por otro lado mostramos un modelo basado en la dinámica del replicador para modelar el comportamiento de los *mánagers* de las empresas y sus repercusiones sobre el bienestar de los consumidores en una economía, además en este contexto presentamos condiciones que garantizan la multiplicidad o unicidad del equilibrio y mostramos la relación de este modelo con la teoría de juegos y planteamos la posibilidad de relacionar este modelo con los juegos con potencial, lo cual abre la puerta a la posibilidad de relacionar este modelo con los conceptos del formalismo termodinámico donde se espera que un resultado análogo al mostrado en el modelo de Leslie (ver apéndice A.3) se mantenga.

A fin de dar claridad a los resultados obtenidos en esta tesis y plantear las bases de las investigaciones a desarrollar como consecuencia de la misma, a continuación incluimos algunos comentarios finales sobre cada tema discutido a lo largo de este trabajo.

En la literatura existen distintas pruebas del fenómeno de concentración de la medida de Gibbs para el caso de alfabetos finitos, por ejemplo [22], [23] o [24] entre otros, dichas demostraciones solo se limitan a probar la existencia de la constante de concentración D enunciada en el teorema 17, mas no a dar una estimación o una cota sobre la misma, lo cual puede ser de importancia en las aplicaciones de las desigualdades de concentración, pues esto permitiría dar una fórmula explícita para acotar la probabilidad de desvío de un observable respecto a su media o en particular una cota en la probabilidad de desvío de la suma ergódica de Birkhoff respecto de su valor esperado, para el caso de observables Lipschitz. En este sentido la demostración del teorema 17 propuesta en este trabajo de tesis, a diferencia de las demostraciones clásicas, nos permitió obtener una estimación explícita de la constante de concentración, ver igualdad (9.13).

Los teoremas 19 y 20, así como la proposición 3 y el corolario 5 sobre el fenómeno de concentración de la medida de Gibbs obtenidos en esta tesis, nos permiten extender los resultados existentes sobre la probabilidad de desvío enunciada en el corolario 4 en el contexto de observables Lipschitz, pues nos brindan la posibilidad de considerar observables con menos regularidad como lo son las funciones continuas y acotadas casi en todas partes, cabe señalar que esta generalización se basa en la técnica de aproximación de observables desarrollada por Kachurovskii y Podvigin en [35] y Podvigin en [48].

El resultado principal de la primera parte este trabajo, enunciado en la sección 9.4, el cual además es nuevo en la literatura, permite ampliar el alcance de las desigualdades de concentración, así como sus aplicaciones al considerar un nuevo escenario de acción para los observables Lipschitz separables, como lo es, el n -ésimo producto cartesiano de un shift de Markov contable consigo mismo, este resultado se consiguió

a través de los resultados de Sarig en [51], [52] y [54], los cuales nos dan condiciones suficientes y necesarias que garantizan la existencia de una medida de Gibbs en el contexto contable, y la adaptación, para este contexto, de los resultados de Chazottes y Gouëzel en [22], a el caso de alfabetos contables.

Por otro lado los resultados obtenidos en la segunda parte del trabajo son nuevos en la literatura. Estos nos permiten establecer que en economías donde los *mánagers* de las firmas toman decisiones basadas en invertir en ramas de producción con mayores beneficios, el fenómeno no deseable de la multiplicidad de equilibrios, por la dificultad que esto establece desde el punto de vista de la estática comparativa, aparece con mayor frecuencia que en los modelos típicos de economías con producción. Además en esta parte del trabajo se establece que las decisiones de los *mánagers* pueden provocar que al cambiar sus inversiones de una rama de producción a otra con mayores beneficios, la economía pase de ser regular a singular o viceversa. Respecto al fenómeno de la multiplicidad de equilibrios los teoremas 25, 26 y 29 establecen condiciones suficientes para que esto ocurra, mientras que el teorema 30 no solo da condiciones que garanticen la multiplicidad de equilibrios, si no que además permite determinar cuando una economía con múltiples equilibrios es singular o regular.

Para las economías regulares, los cambios en el lado productivo de la economía pueden conducir a economías más eficientes sin mayores perturbaciones en el bienestar general de la economía, o incluso aumentarlo; sin embargo, no necesariamente todos los consumidores valoran estos cambios por igual. Algunos de ellos pueden verse afectados negativamente en su bienestar. Cabe señalar que en el caso de que la economía sea crítica, los cambios provocados por estas decisiones de inversión serán abruptos, inesperados e imposibles de predecir, para modelar este comportamiento y analizar sus repercusiones sobre la economía, introducimos la dinámica del replicador, la cual fue primeramente considerada por Accinelli y Covarrubias en [1] y retomada por Accinelli y Muñiz en [3] y [2], esta dinámica ha sido ampliamente utilizada en la biología para expresar la evolución de un ente llamado replicador, el cual tiene la capacidad de realizar copias de sí mismo, el replicador puede ser un gen, una creencia, un microorganismo, una técnica y/o una estrategia de juego. En nuestro modelo los *mánagers* buscan imitar la decisión de inversión más exitosa, lo cual es compatible con el hecho de que en una economía las firmas más pobres, buscan imitar el modelo de negocio de las más exitosas, es decir, de las que obtienen mayores beneficios.

Respecto al trabajo futuro, en la siguiente sección describimos algunas posibles líneas futuras de investigación, dentro de las que remarcamos construir una relación, a través de formalismo termodinámico y/o la teoría de juegos, entre ambas partes de esta tesis.

19.1. Trabajo futuro

Si bien los resultados sobre concentración de la medida, presentados en el capítulo 9, contribuyen a enriquecer la literatura sobre las desigualdades de concentración y sus aplicaciones, aún existen varias preguntas sin contestar, las cuales podrían llegar a formar parte de un trabajo futuro referente a la concentración de la medida de Gibbs, una de ellas es si será posible extender los resultados presentados en la sección 8.4 para el caso $|A| < \infty$ y en la sección 9.4 para el caso contable, a considerar *shift* aleatorios como los descritos en [9] y [15]. Ahora, de ser posible dicha extensión en alguno de estos contextos, el siguiente paso podría ser quitar algo de regularidad a los observables y tratar de probar resultados análogos a los mostrados en la sección 9.3.

Por otro lado, sobre el modelo económico presentado en la parte II, ya que la multiplicidad del equilibrio walrasiano es un tema que preocupa y cuestiona a la teoría económica, lleva a preguntarnos, dada la existencia de múltiples equilibrios, ¿cuál es el mecanismo que hace que la economía se instale en uno de ellos en particular? y además, ¿por qué una economía regular con múltiples equilibrios, una vez establecido

uno de ellos, permanece igual en el tiempo y no cambia de un momento a otro? Una respuesta puede estar en la estabilidad del equilibrio de Liapunov de un sistema dinámico similar al que Samuelson (ver [18]) considera que representa al conocido subastador de Walras. El responder a estas preguntas abre la puerta a una línea de investigación futura.

Para relacionar ambas parte de esta tesis en el apéndice A.3 presentamos algunos conceptos de la teoría de juegos y describimos como el modelo analizado a lo largo de las segunda parte de este trabajo encaja en esta teoría, además describimos la noción de juegos con potencial, pues se espera, en un trabajo posterior, conseguir relacionar a través de este tipo de juegos el modelo económico del replicador con las medidas de Gibbs y los conceptos introducidos en el marco del formalismo termodinámico (entropía, energía) presentados en la primera parte de este trabajo. Por otro lado se espera conseguir alguna conexión de este tipo, pues se sabe que el modelo del replicador y el modelo evolutivo de Leslie (ver apéndice A.3) comparten no solo fundamentos si no que además esto pueden ser relacionado entre si (ver [8]), además para este modelo evolutivo, el operador de Ruelle, las medidas de Gibbs y el principio variacional juegan un papel fundamental al permitir relacionar la tasa de crecimiento poblacional con la entropía de la población y el potencial reproductivo [9].

Publicaciones y participaciones

1. Artículos publicados

- E. Accinelli, F. Martins, **H. Muñiz**, B. Oliveira and A. Pinto, “Firms, Technology, Training and Government fiscal policies: An evolutionary approach,” *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2021.
- E. Accinelli and **H. Muñiz** “Evolution in a general equilibrium framework,” *Journal of Mathematical Economics*, 2021.
- E. Accinelli and **H. Muñiz**, “A dynamic for production economies with multiple equilibria,” *Journal of Dynamics & Games*, 8(1): 69, 2021.

2. Artículos en revisión

- C. Maldonado, **H. Muñiz**, H. Nieto, “Concentration inequalities and rates of convergence of the ergodic theorem for countable shifts with Gibbs measures,” enviado a *Journal of Difference Equations and Applications*.
- E. Accinelli, L. Quintas, **H. Muñiz**, “Rumors’ spread: A game theoretical approach with the replicator dynamics,” enviado a *Journal of Mathematical Sociology*.

4. Participación en congresos y seminarios

- **Asistente:** “IX Congreso Interdisciplinario de Posgrados,” San Luis Potosí, S.L.P., México 2020.
- **Póster:** “Fundamentos matemáticos de la teoría económica,” Segunda Jornada de Investigación y Ciencia Tecnociencia Superior 2019, Rio Verde, S.L.P., México 2019.
- **Ponencia:** “Desigualdades de concentración en sistemas dinámicos simbólicos,” V Escuela Potosina de Economía Matemática, San Luis Potosí, S.L.P., México 2019.
- **Ponencia:** “Propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos simbólicos dotados con una medida de Gibbs,” Seminario Divisional, DCS, San Luis Potosí, S.L.P., México 2019.

5. Divulgación

- **Título:** “Economía y sistemas dinámicos”, 3 Minutes Thesis Vitutal, San Luis Potosía, S.L.P., México 2021.

Estancias académicas

- **Estancia académica:** “Sistemas dinámicos: Aplicaciones al equilibrio general y teoría de juegos,” Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, S.L.P., México, del 20 de enero al 3 de julio de 2020.
- **Escuela:** “Summer School in Dynamics”, University of Houston, Houston, Texas, EUA, del 30 de mayo al 6 de junio de 2019.
- **Escuela:** “Summer school in Dynamics (introductory and Advance),” Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Trieste, Italia, del 16 al 27 de julio de 2018.

A. Apéndices

En los siguientes apéndices incluimos algunas consecuencias y aplicaciones del teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (teorema 5) enunciado en el capítulo 5 de esta tesis, en particular en el apéndice A.1, enunciamos el teorema de Perron-Frobenius (teorema 32), he indicamos como este puede ser obtenido a partir del teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, en el apéndice A.2 presentamos una aplicación de este teorema a la economía (modelo de Leontief), mientras que en el apéndice A.3 mostramos una aplicación de este teorema a un modelo de crecimiento poblacional llamado modelo de Leslie, es importante señalar que el análisis de exhaustivo de este modelo y su relación, más allá de los fundamentos teóricos, con el modelo económico basado en la dinámica del replicador que presentamos en la parte II de esta tesis, constituyen las bases de uno de nuestros trabajos futuros (ver sección 19.1), el cual pretende conectar este modelo con el formalismo termodinámico.

A.1. Perron-Frobenius

En este apéndice discutimos el teorema de Perron-Frobenius, el cual tiene importantes aplicaciones a la economía, además en indicamos al menos en un caso particular como este teorema puede ser obtenido a partir del teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (ver observación 15).

Definición 39. *Dada una matriz de tamaño $B = (b_{ij})$ de $N \times M$ decimos que B es:*

- (i) *no negativa si $b_{ij} \geq 0$ para todo i, j*
- (ii) *positiva si $b_{ij} \geq 0$ con al menos una desigualdad estricta.*
- (iii) *estrictamente positiva si $b_{ij} > 0$ para todo i, j .*

Como es típico el espectro de B , es decir, el conjunto de todos los eigenvalores de B es denotado por $\sigma(B)$, y su radio espectral $\rho(B) := \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$.

Es un resultado bien conocido que el radio espectral satisface

$$\min_i \sum_j b_{ij} \leq \rho(B) \leq \max_i \sum_j b_{ij} \quad (\text{A.1})$$

$$\min_j \sum_i b_{ij} \leq \rho(B) \leq \max_j \sum_i b_{ij} \quad (\text{A.2})$$

Para obtener más detalles sobre las siguientes definiciones y teoremas, ver [10].

Definición 40. *Una matriz cuadrada no negativa B es llamada:*

- 1) *irreducible si para todo i, j existe un entero positivo m_{ij} tal que $(B^{m_{ij}})_{ij} > 0$, donde B^n es la n -ésima potencia de B y $(B^n)_{ij}$ su i, j -entrada.*

2) irreducible y aperiódica si existe un entero positivo M tal que $B^M > 0$.

Si $i \in 1, 2 \dots N$ es tal que $B_{ii}^n = 0$ para tod $n \in \mathbb{N}$, entonces i es llamado un estado errante.

El teorema de Perron-Frobenius para estados matriciales no negativos.

Teorema 32 (Teorema de Perron-Frobenius ([46]-[29])). *Suponga que B es una matriz de tamaño $N \times N$ no negativa sin estados errantes. Entonces, existe $\lambda > 0$ y $p \geq 0$ de manera que $\lambda = \rho(B)$ y $Bp = \lambda p$. Si B es irreducible, entonces λ es simple, es decir, su multiplicidad algebraica es 1, y $v > 0$, además no hay otro autovector con coordenadas no negativas. Si B es irreducible y aperiódica, entonces no hay otro valor propio del módulo λ , es decir, λ es el valor propio único del módulo máximo.*

Demostración. Ver [16], [29] o [46]. □

Observación 15. *Para el caso en que $B = (b_{ij})$ es estrictamente positiva o al menos irreducible y aperiódica, este resultado puede ser obtenido a través del teorema 5 enunciado en la primera parte de esta tesis, para ello consideramos el espacio de sucesiones en N símbolos definido a partir de la matriz B , para lo cual definimos la matriz de transición $T = (t_{ij})$ donde $t_{ij} = 1$ si $b_{ij} \neq 0$ y $t_{ij} = 0$ si $b_{ij} = 0$. Luego identificamos los vectores $h \in \mathbb{R}^N$ con observables $h : \Sigma_T \rightarrow \mathbb{R}$ que dependen solo del primer símbolo la sucesión $x = x_0 x_1 \dots \in \Sigma_T$, esto es, $h(x) = h_{x_0}$ y al operador de Ruelle \mathcal{L}_ϕ con potencial ϕ con la matriz B como sigue $\mathcal{L}_\phi h(x_0 x_1 x_2 \dots) = \sum_{x_0=1}^N B_{x_1 x_0} h_{x_0}$, por lo que para matrices positiva o irreducibles y aperiódicas, el teorema anterior se sigue el teorema de Ruelle-Perron-Frobenius. Finalmente notemos que en este caso, la eigenfunción h es simplemente el eigenvector $h > 0$ de la matriz B , mientras que la eigenmedida ν está dada por el eigenvector izquierdo de B asociado a λ .*

Definición 41. *Un vector no negativo $p \in \mathbb{R}^N$ se llama vector de probabilidad si $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Si el vector de probabilidad p es un punto fijo (derecho) de una matriz estocástica A , entonces p se llama vector de probabilidad estacionario de A .*

Corolario 10. *Si A es una matriz estocástica, A admite un vector de probabilidad estacionario.*

Más aun a consecuencia de (5.2) y inciso a) del teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (teorema 5) tenemos

Teorema 33. *Supongamos que B es irreducible y aperiódica. Sea v su eigenvalor izquierdo positivo y h su eigenvalor positivo con eigenvector $\lambda > 0$, elegido de tal forma que $\langle h, v \rangle = 1$. Entonces, para todo $u \in \mathbb{R}^N$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda^{-1} B)^n u - h \langle u, v \rangle\|_\infty = 0 \text{ exponencialmente rápido}$$

A.2. Aplicaciones: El modelo de Leontief cerrado

Wassily Leontief describe su trabajo *La estructura de la economía Americana de 1919-1929* como “un intento de aplicar la teoría económica del equilibrio general - o mejor, interdependencia general - a un estudio empírico de las interrelaciones entre las diferentes partes de una nación económica como se revela a través de la covariación de precios, producción, inversiones e ingresos” [38]. El modelo input-output de Leontief es un modelo empírico estático que representa la interdependencia entre diferentes sectores en los que se puede dividir una economía nacional, en este modelo, Leontief profundiza en el análisis input-output para explicar la interacción entre la demanda final y el flujo de productos básicos entre diferentes sectores de la economía para obtener un producto final. En particular, en esta sección describimos el modelo cerrado de Leontief y el cómo el teorema de Perron-Frobenius, el cual se puede obtener a partir del teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (ver teorema 5, en la sección 5 de la primera parte de esta tesis), nos garantiza la existencia de un precio justo para cada bien en la economía, para ser más preciso en la siguiente sección

describiremos brevemente el modelo de Leontief y su relación con el teorema de Perron-Frobenius.

Consideremos una economía dividida en N sectores o industrias, las cuales identificamos con un índice en el conjunto $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, N\}$ y supongamos que cada industria produce un único bien, el cual es completamente usado como insumo en la producción de al menos un sector de la economía incluido el mismo. Si p_{ij} representa la fracción de la red de producción de la j -ésima industria comprados por la i -ésima industria. Entonces, $p_{ij} \geq 0$ para todo $i, j = 1, \dots, N$ y

$$\sum_{i=1}^N p_{ij} = 1, \text{ para cada } j. \quad (\text{A.3})$$

En notación matricial $P = (p_{ij})$ es una matriz no negativa, llamada matriz de insumo-producto, con la propiedad de que cada columna suma 1, lo cual refleja el hecho de que la producción del sector j es completamente comprada por las industrias en la economía.

Observación 16. *Las interacciones entre las empresas pueden ser modeladas mediante un grafo, donde una flecha del nodo i al nodo j , denota que la industria i requiere insumos provenientes del sector j en su proceso de producción.*

Ejemplo 17. *Interacción entre empresas en una economía dividida en dos sectores de producción, las cantidades sobre las flechas denotan las porciones de la cantidad total de la producción del sector j requerida por el sector i en su proceso de producción.*

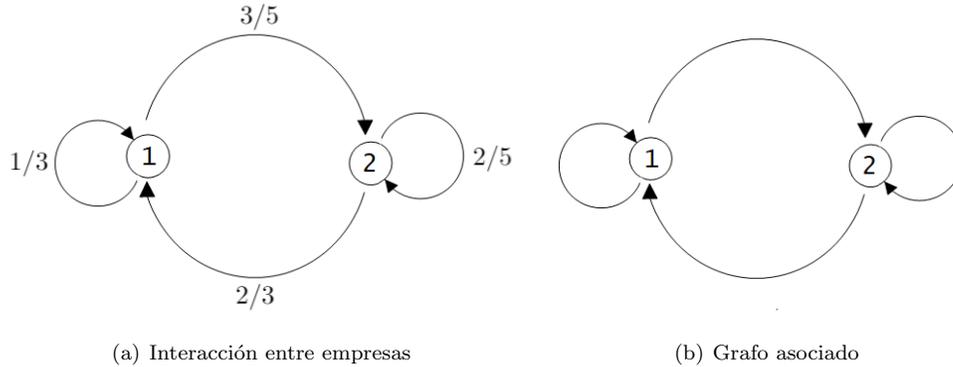


Figura A.1: Interacción entre industrias en una economía dividida en dos sectores de producción y grafo asociado, ejemplo 17.

Formalmente la descripción del modelo de Leontief es como sigue:

- (i) Si $p_i \geq 0$ denota el precio por unidad del i -ésimo bien, entonces el vector

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix},$$

cuyas entradas representan el precio por unidad de cada bien, al vector p lo llamamos vector de precios.

(ii) Como p_{ij} denota el porcentaje total de la producción de la industria j requerido por el i -ésimo sector y p_j el precio por unidad del bien j , entonces $p_{ij}p_j$ denota el gasto del sector i por la porción comprada p_{ij} de la industria j , sumando todos los j tenemos que $\sum_{j=1}^N p_{ij}p_j$ denota el total gasto de la industria i .

(iii) Ninguna industria gasta más que sus ingresos, es decir,

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}p_j \leq p_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Definición 42. Un vector de precios $p \in \mathbb{R}_+^N := \{p \in \mathbb{R}^N : p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N\}$ es llamado un vector de precios de equilibrio si

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}p_j = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.4})$$

En otras palabras, un vector de precios p es un equilibrio para la economía si y solo si el gasto total de la industria i es igual a su ingreso total. De la notación matricial, un vector de precios p es un equilibrio si y solo si

$$Pp = p, \quad (\text{A.5})$$

por lo tanto p es un vector de precios de equilibrio si p es un eigenvector de P con eigenvalor $\lambda = 1$.

(iv) El problema a resolver en el modelo de Leontief cerrado es encontrar un “precio justo” que se cargará a cada producto básico, en el sentido de que para cada industria los gastos totales son iguales al ingreso total, ver [47]. En otras palabras, el problema a resolver en el modelo de insumo-producto cerrado es encontrar un vector de precios $p = (p_1, \dots, p_n)'$ para el cual la ecuación (A.4) se cumple.

La ecuación (A.3) implica que el modelo cerrado simplificado de Leontief se describe mediante una matriz estocástica $P = (p_{ij})$, es decir, se describe mediante una matriz no negativa P con la propiedad de que la suma de cada columna es 1, económicamente hablando esto significa que cada industria dispone toda su producción entre todos los sectores de la economía. Para este tipo de matrices el teorema de Perron-Frobenius para matrices no negativas, que por conveniencia establecemos en el apéndice A.1 demuestra el siguiente teorema.

Teorema 34. Considere una economía cerrada dividida en sectores de N y sea $P = (p_{ij})$ el insumo-producto de $N \times N$ descrito anteriormente, entonces la economía admite un precio justo positivo p . Además, si $P^M > 0$ para algunos $M \in \mathbb{N}$, entonces p es estrictamente positivo.

Demostración. La primera parte del teorema se deriva del hecho de que P es una matriz estocástica y por lo tanto, el corolario 10 en la sección anterior garantiza la existencia de un vector estacionario p tal que $Pp = p$. La segunda parte es consecuencia del teorema Perron-Frobenius (teorema 32) en la misma sección. \square

Corolario 11. Si $P > 0$, entonces existe $p > 0$ tal que para cada sector $i = 1, 2, \dots, N$ en la economía el gasto total iguala al ingreso total.

$P > 0$ económicamente hablando esto significa que cualquier sector para llevar a cabo su producción requiere insumos de todos los sectores sector de la economía.

En las condiciones del corolario anterior o más generalmente si la matriz P es irreducible y aperiódica, el teorema 33 garantiza que sin importar que precio se elija en la economía, después de un número suficiente de iteraciones (interacciones entre las empresas a prueba y error) el precio convergerá al precio justo que debe ser cargado en la economía.

A.3. Modelo de Leslie

La teoría evolutiva destaca el valor adaptativo de la variabilidad dentro de las especies, principalmente se ocupa de comprender el comportamiento dinámico de las entidades que se replican, una molécula, un gen, un organismo, una creencia o una estrategia en un juego. Para mostrar otra aplicación del teorema de Perron-Frobenius presentamos un modelo de crecimiento poblacional llamado el modelo de Leslie, el cual además permite relacionar el principio variacional con los parámetros de interés de este modelo. Esta relación puede ser relevante al relacionar la dinámica del replicador con los sistemas dinámicos simbólicos y constituye la base de una posible línea de trabajo futuro, esto lo trataremos en la parte final de esta tesis. Describimos ahora el modelo de Leslie.

Consideremos un modelo discreto de crecimiento poblacional, es decir, el tiempo es tomado en \mathbb{N} , $t = 0, 1, 2, \dots$, en el cual la población está dividida en d clases según su edad. Entonces, para cada $t \in \mathbb{N}$, el vector $n(t) = (n_1(t), \dots, n_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ representa una distribución de edad de la población en el tiempo t . En este contexto, un cambio en la distribución son descritos por un sistema dinámico

$$n(t+1) = Tn(t)$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{d-1} & m_d \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$m_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, d-1$ y $m_d > 0$ denotan el número de descendientes que un individuo en el grupo de edad j en el tiempo t contribuye al primer grupo de edad en el tiempo $t+1$, mientras que las cantidades $b_j \in (0, 1]$ denotan la proporción de individuos de edad j en el tiempo t que sobrevive a la edad $j+1$ en tiempo $t+1$, utilizando la técnica descrita en la observación 15 del apéndice A.1, podemos representar la matriz T descrita por (A.6). La transición de cualquier nodo al nodo inicial $j = 1$ representa el evento reproductivo, mientras que la transición de cualquier nodo a su inmediato sucesor (transición de j a $j+1$) representa el proceso de envejecimiento.

En general se puede garantizar que la matriz T , definida anteriormente es irreducible, sin embargo a fin de aplicar el teorema de Perron-Frobenius supondremos que la matriz T es irreducible y aperiódica (cuya definición precisamos más adelante), por lo que bajo esta hipótesis existe un eigenvalor λ de módulo máximo, con eigenvalores v, h izquierdo y derecho asociados a λ [29]-[46]. Antes de continuar es importante hacer la siguiente observación:

Observación 17. *En este contexto el vector h corresponde con la distribución de edad estacionaria, mientras que v es una medida relativa de la contribución hecha a la población estacionaria en el futuro por los grupos de edad individuales. Entonces $\log \lambda$ es la tasa de crecimiento de la población (ver [9]).*

Al poner $\Sigma_T = \{x = x_0 x_1 \dots : x_i \in \{1, \dots, d\} \text{ y } T_{x_j x_{j+1}=1}\}$ podemos asociar un sistema simbólico al modelo y hacer las identificaciones correspondientes entre potenciales y observables con la matriz T y el eigenvector $h \in \mathbb{R}^d$ (ver observación 15 para más detalles), obtenemos para $x \in \Sigma_T$, $\phi(x) = T_{x_1 x_0}$ y $h(x) = h_{x_0}$ y se satisface $\mathcal{L}_\phi h = \lambda h$, luego definimos

$$p_j := \frac{l_j m_j}{\lambda^j}, \quad \tau = \sum_{j=1}^d j m_j h_j \quad (\text{A.7})$$

donde l_j representa la porción de individuos que sobreviven a la edad j , λ^j es la j -ésima potencia del eigenvalor λ y h_j denota la j -ésima entrada del eigenvector h , consideremos además la medida de Parry (ver [10]) dada por la expresión

$$p_{ij} = \frac{T_{ji}v_j}{\lambda v_i}$$

Arnold, Gundlach y Demetrius en [9], prueban que la medida de Markov sobre los cilindros $[a_0^k]$ en Σ_T definida como

$$\mu[a_0^k] = \pi_{a_0} p_{a_0 a_1} \cdots p_{a_{k-1} a_k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}$$

es la medida de Gibbs asociada al potencial $\phi(x) = T_{x_0 x_1}$, más aún en este caso se tiene que la entropía del sistema, que en este modelo de crecimiento es llamada *entropía de la población*, está dada por

$$h_\mu = -\frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^d p_j \log p_j,$$

y la energía del sistema es

$$\Phi := \int \phi d\mu = \frac{\sum_{j=1}^d p_j \log l_j m_j}{\sum_{j=1}^d j p_j} = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^d p_j \log l_j m_j.$$

Φ es nombrado el *potencial reproductivo*. Dado que las medida de Gibbs son medida de equilibrio (ver afirmación 1), es decir, son medida que satisfacen el principio variacional (ver teorema 8, el cual abordaremos en el capítulo 7 de la primer parte de este trabajo) concluimos que

$$\log \lambda = h_\mu + \Phi. \tag{A.8}$$

En palabras está igualdad nos dice que la presión topológica del sistema es igual al logaritmo del eigenvalor de módulo máximo del operador de Ruelle.

A.4. Teoría de juegos

La teoría de juegos se encarga de estudiar situaciones donde existen conflictos de interés y ha encontrado área de aplicación principalmente en las ciencias sociales, en particular en la economía. Para definir un juego de n -jugadores, hacemos los siguientes supuestos y definiciones, a cada jugador lo identificamos con un índice $i \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$, suponemos que cada jugador $i \in \mathcal{I}$ tiene m_i posibles estrategias, esto es, un plan o regla de decisión que un jugador seguirá ante cada posible situación a la que se enfrente, el conjunto de estrategias (puras) para el jugador i lo denotamos por $S_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$ y definimos el conjunto de perfiles estratégicos (puros) como $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Para cada jugador $i \in \mathcal{I}$, existe una función $\pi_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada perfil de estrategias puras $s \in S$, un pago $\pi_i(s)$. La función $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada perfil de estrategias puras s el vector de pagos $\pi(s) = (\pi_1(s), \dots, \pi_n(s))$, se denomina función de pagos. Entonces definimos un juego en forma normal como sigue:

Definición 43. *Un juego en forma normal está definido como el conjunto $\Gamma = \{I, S, \pi\}$, donde I es el conjunto de jugadores, S el conjunto de estrategias y $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ la función de pagos.*

El modelo económico descrito en la parte II de esta tesis puede ser considerado como un juego, para describir como realizar esto seguiremos las líneas de lo descrito por Accinelli y Covarrubias en [1]. Primero es importante recordar que en nuestro modelo estamos suponiendo N firmas y dos ramas de producción,

por lo que en este contexto podemos definir un juego de N jugadores con dos estrategias cada uno, elegir en invertir en la rama 1 o en la rama 2 de producción, ya que estamos identificando cada rama de producción con su restricción tecnológica tenemos $S_1 = S_2 = \{Y_1, Y_2\}$. Ahora recordemos que la oferta de las firmas está dada por una función $y_j : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ver sección 14.1.1), por lo que para la distribución $\mathcal{N} = (N_1, 1 - N_1)$, la función de pagos está dada por los beneficios de las firmas en el precio de equilibrio $p(\mathcal{N})$ correspondiente a esta distribución, esto es, está dado por $\pi_j(y_j(p(\mathcal{N}))) := p(\mathcal{N}) \cdot y_j(p(\mathcal{N}))$. En este caso la mejor respuesta de una firma es simplemente la elección de la tecnología Y_i con beneficios más altos. Formalmente tenemos:

Definición 44. Decimos que Y_j es una mejor respuesta dada la distribución $\mathcal{N} = (N_1, 1 - N_1)$, si

$$\pi_j(y^j(p(\mathcal{N}))) \geq \pi_i(y^i(p(\mathcal{N}))) \quad (\text{A.9})$$

Definición 45. Una distribución $\mathcal{N}^* = (N_1^*, 1 - N_1^*)$ es una distribución de equilibrio para este juego si y solo si para todo $i, j \in \{1, 2\}$.

$$\pi_j(y^j(p(\mathcal{N}^*))) = \pi_i(y^i(p(\mathcal{N}^*))) \quad (\text{A.10})$$

En consecuencia, un equilibrio de Nash es una distribución \mathcal{N}^* que satisface la igualdad anterior.

Definición 46. Decimos que el juego de N jugadores $\Gamma_P = \{\mathcal{I}, S, \pi : S \rightarrow \mathbb{R}^N\}$ es:

- un juego con potencial exacto si existe una función $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $s_{-i} \in S^{-i}$ y para todo $s'_i, s''_i \in S_i$,

$$\Phi(s'_i, s_{-i}) - \Phi(s''_i, s_{-i}) = \pi_i(s'_i, s_{-i}) - \pi_i(s''_i, s_{-i}) \quad (\text{A.11})$$

- un juego con potencial ponderado, si existe una función $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ y un vector $\omega \in \mathbb{R}_{++}^N$ tal que para todo $s_{-i} \in S^{-i}$ y para todo $s'_i, s''_i \in S_i$,

$$\Phi(s'_i, s_{-i}) - \Phi(s''_i, s_{-i}) = \omega_i (\pi_i(s'_i, s_{-i}) - \pi_i(s''_i, s_{-i})) \quad (\text{A.12})$$

- un juego con potencial ordinal, si existe una función $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $s_{-i} \in S^{-i}$ y para todo $s'_i, s''_i \in S_i$,

$$\Phi(s'_i, s_{-i}) - \Phi(s''_i, s_{-i}) > 0 \text{ si y solo si } \pi_i(s'_i, s_{-i}) - \pi_i(s''_i, s_{-i}) > 0 \quad (\text{A.13})$$

- un juego con potencial ordinal generalizado si existe una función $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $s_{-i} \in S^{-i}$ y para todo $s'_i, s''_i \in S_i$, si

$$\Phi(s'_i, s_{-i}) - \Phi(s''_i, s_{-i}) > 0, \text{ entonces } \pi_i(s'_i, s_{-i}) - \pi_i(s''_i, s_{-i}) > 0 \quad (\text{A.14})$$

Para esta clase de juegos y bajo ciertas condiciones en el potencial las cuales van más allá de los propósitos de esta tesis, se sabe que existe una medida de Gibbs para el juego Γ_P con potencial Φ , esto es, la medida de equilibrio para el juego es el estado de Gibbs en la temperatura inversa $\beta := (kT)^{-1}$

$$f(x) = \frac{\exp(\beta\Phi(x))}{\int_S \exp(\beta\Phi(y)) dy} \quad (\text{A.15})$$

Aquí $dy = (dy_1, \dots, dy_n)$, k es la constante de Boltzmann, T la temperatura y f la densidad conjunta sobre S , al lector interesado en profundizar en el tema y la definición de los parámetros sugerimos revisar los axiomas 1, 2 y 3 en [21].

Bibliografía

- [1] Elvio Accinelli and Enrique Covarrubias. Evolution and jump in a walrasian framework. *Journal of Dynamics & Games*, 3(3):279, 2016.
- [2] Elvio Accinelli and Humberto Muñoz. A dynamic for production economies with multiple equilibria. *Journal of Dynamics & Games*, 8(1):69, 2021.
- [3] Elvio Accinelli and Humberto Muñoz. Evolution in a general equilibrium framework. *Journal of Mathematical Economics*, page 102513, 2021.
- [4] Roy Adler. Symbolic dynamics and markov partitions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 35(1):1–56, 1998.
- [5] Jorge Albarrán. *A Guide to the Ergodic Decomposition Theorem: Ergodic Measures as Extreme Points*. Citeseer, 2004.
- [6] Dmitry Victorovich Anosov. Geodesic flows on closed riemann manifolds with negative curvature. *Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova*, 90:3–210, 1967.
- [7] Aloísio Araújo. *Introdução à economia matemática*. IMPA, 2004.
- [8] Krzysztof Argasinski and Mark Broom. Towards a replicator dynamics model of age structured populations. *Journal of Mathematical Biology*, 82(5):1–39, 2021.
- [9] Ludwig Arnold, Volker Matthias Gundlach, and Lloyd Demetrius. Evolutionary formalism for products of positive random matrices. *The Annals of Applied Probability*, pages 859–901, 1994.
- [10] Viviane Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000.
- [11] Theodore C Bergstrom, Ken-Ichi Shimomura, and Takehiko Yamato. Simple economies with multiple equilibria. *The BE Journal of Theoretical Economics*, 9(1), 2009.
- [12] Richard S Berry. *Thermodynamic constraints in economic analysis*. University of Copenhagen Physics Laboratory 2, 1979.
- [13] Richard S Berry, Peter Salamon, and Geoffrey Heal. On a relation between economic and thermodynamic optima. *Resources and Energy*, 1(2):125–137, 1978.
- [14] George D Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(12):656–660, 1931.
- [15] Thomas Bogenschütz and Volker Mathias Gundlach. Ruelle’s transfer operator for random subshifts of finite type. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15(3):413–447, 1995.

- [16] Alberto Borobia and Ujué R Triás. A geometric proof of the perron-frobenius theorem. *Revista Matemática Complutense*, 1992, 5, 01 1992.
- [17] Stéphane Boucheron, Gábor Lugosi, and Pascal. Massart. *Concentration inequalities: A nonasymptotic theory of independence*. Oxford university press, 2013.
- [18] Kenneth E Boulding. Samuelson’s foundations: The role of mathematics in economics. *Journal of Political Economy*, 56(3):187–199, 1948.
- [19] Rufus Bowen. Ergodic theory of axiom a diffeomorphisms. In *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, pages 90–107. Springer, 1975.
- [20] Juan Gabriel Brida. A two regime model of inflation and unemployment fluctuations. Documentos de Trabajo (working papers) 1100, Department of Economics - dECON, December 2000.
- [21] Michael J Campbell. A gibbsian approach to potential game theory. *arXiv preprint cond-mat/0502112*, 2005.
- [22] Jean-René Chazottes and Sébastien Gouëzel. Optimal concentration inequalities for dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 316(3):843–889, 2012.
- [23] Jean-René Chazottes, Jordan Moles, and Edgardo Ugalde. Gaussian concentration bound for potentials satisfying walters condition with subexponential continuity rates. *Nonlinearity*, 33(3):1094, 2020.
- [24] Jean-René Chazottes and Cesar Maldonado. Concentration bounds for entropy estimation of one-dimensional gibbs measures. *Nonlinearity*, 24, 02 2011.
- [25] Pierre Collet, Servet Martinez, and Bernard Schmitt. Exponential inequalities for dynamical measures of expanding maps of the interval. *Probability Theory and Related Fields*, 123(3):301–322, 2002.
- [26] Robert Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC Press, 2018.
- [27] Luc Devroye. Exponential inequalities in nonparametric estimation. In *Nonparametric functional estimation and related topics*, pages 31–44. Springer, 1991.
- [28] Roberto Fernández and Grégory Maillard. Chains with complete connections and one-dimensional Gibbs measures. *Electron. J. Probab.*, 9:no. 6, 145–176, 2004.
- [29] Georg Frobenius. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*. Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Reichsdr., 1912.
- [30] Stefano Galatolo, Mathieu Hoyrup, and Cristóbal Rojas. Statistical properties of dynamical systems—simulation and abstract computation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(1):1–14, 2012.
- [31] Gernot Greschonig and Klaus Schmidt. Ergodic decomposition of quasi-invariant probability measures. *Colloquium Mathematicum*, 2, 01 2000.
- [32] Mikhail Gromov and Vitali D Milman. A topological application of the isoperimetric inequality. *American Journal of Mathematics*, 105(4):843–854, 1983.
- [33] Chinmaya Gupta. *Statistical properties of chaotic dynamical systems: extreme value theory and Borel-Cantelli Lemmas*. University of Houston, 2010.

- [34] Wassily Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. In *The Collected Works of Wassily Hoeffding*, pages 409–426. Springer, 1994.
- [35] Alexander Kachurovskii and Ivan Podvigin. Large deviations and rates of convergence in the birkhoff ergodic theorem: From hölder continuity to continuity. *Doklady Mathematics*, 93:6–8, 01 2016.
- [36] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995.
- [37] Reiner Kümmel. Growth dynamics of the energy-dependent economy,(mathematical systems in economics 54, w. eichhorn, r. henn eds.) oelgeschlager. *Gunn & Hain, Cambridge, Mass*, 1980.
- [38] Wassily Leontief. The structure of the american economy, 1919–1929 harvard university press. *Cambridge (new, enlarged edition, Oxford University Press, New York, 1951)*, 1941.
- [39] Cesar Maldonado. *On concentration, noise and entropy estimation in dynamical systems*. Theses, Ecole Polytechnique X, September 2012.
- [40] Pascal Massart. Some applications of concentration inequalities to statistics. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Série VI. Mathématiques*, 9, 01 2000.
- [41] V. Maume-Deschamps. *Propriétés de mélange pour des systèmes dynamiques markoviens*. Lille thèses. 1998.
- [42] Colin McDiarmid. Concentration, probabilistic methods for algorithmic discrete mathematics, 195–248. *Algorithms Combin*, 16, 1998.
- [43] Neri Merhav. *Statistical physics and information theory*. Now Publishers Inc, 2010.
- [44] James Munkres. *Topology; a First Course [By] James R. Munkres*. Prentice-Hall, 1974.
- [45] Hugo Alberto Nieto Loredó. Cotas en la rapidez de convergencia en el teorema ergódico de birkhoff en sistemas dinámicos simbólicos con medida de gibbs. Master’s thesis, 2019.
- [46] Oskar Perron. Zur theorie der matrices. *Mathematische Annalen*, 64(2):248–263, 1907.
- [47] Sunnikrishna Pillai Pillai, Torsten Suel, and Seunghun Cha. The perron-frobenius theorem: some of its applications. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22(2):62–75, 2005.
- [48] Ivan Podvigin. Large deviations of birkhoff’s sums via the approximation of observables. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41(4):703–708, 2020.
- [49] Mark Pollicott. Rates of mixing for potentials of summable variation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(2):843–853, 2000.
- [50] Maxim Raginsky and Igal Sason. Concentration of measure inequalities in information theory, communications and coding. *arXiv preprint arXiv:1212.4663*, 2012.
- [51] Omri Sarig. Thermodynamic formalism for countable markov shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 19(6):1565–1593, 1999.
- [52] Omri Sarig. Existence of gibbs measures for countable markov shifts. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131(6):1751–1758, 2003.
- [53] Omri Sarig. Lecture notes on thermodynamic formalism for topological markov shifts. *Penn State*, 2009.

- [54] Omri Sarig. Introduction to the transfer operator method. *lecture notes, Second Brazilian School on Dynamical Systems*, 2012.
- [55] Klaus Schmidt. A probabilistic proof of ergodic decomposition. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, pages 10–18, 1978.
- [56] Bernard Schmitt. Poincaré inequalities and spectral gap, concentration phenomenon for g-measures. In *Dynamics and Randomness*, pages 227–273. Springer, 2002.
- [57] Yakov Sinai. Introduction to ergodic theory. *Mathematical notes*, 1976.
- [58] Maynard Smith and George Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246(5427):15–18, 1973.
- [59] Luchezar Stoyanov. On gibbs measures and spectra of ruelle transfer operators. *Canadian Mathematical Bulletin*, 60(2):411–421, Jun 2017.
- [60] Michel Talagrand. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Etudes Scientifiques*, 81(1):73–205, 1995.
- [61] Michel Talagrand. A new look at independence. *The Annals of probability*, pages 1–34, 1996.
- [62] Aernout Van Enter and Evgeny Verbitskiy. On the variational principle for generalized gibbs measures. *arXiv preprint math-ph/0410052*, 2004.
- [63] Sewall Wright. The genetical theory of natural selection: a review. *Journal of Heredity*, 21(8):349–356, 1930.
- [64] Lai-Sang Young. Ergodic theory of chaotic dynamical systems. In *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*, pages 201–226. Springer, 1993.
- [65] Huiming Zhang and Song Xi Chen. Concentration inequalities for statistical inference. *arXiv preprint arXiv:2011.02258*, 2020.