



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

**Estabilización robusta y análisis de ganancia  $L_2$  para  
sistemas afines conmutados con un retardo**

Tesis que presenta

**Ana Maria Méndez Becerra**

Para obtener el grado de

**Maestra en Control y Sistemas Dinámicos**

**Codirectores de la Tesis:**

Dr. Adrián René Ramírez López

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., Mayo de 2022





## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis Estabilización robusta y análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$  para sistemas afines conmutados con un retardo presentada para obtener el Grado de de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Ana Maria Méndez Becerra** y aprobada el **dd de mm de aaaa** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

---

Dr. Adrián René Ramírez López  
(Codirector de la tesis)

---

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez  
(Codirector de la tesis)

---

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar  
(Asesor de la tesis)

---

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez  
(Asesor de la tesis)



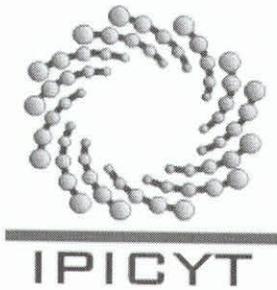


## Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la codirección de los doctores Adrián René Ramírez López y Tonámetl Sánchez Ramírez.

Durante la realización del trabajo la autora recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología No. 191227 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.





# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

La Secretaría Académica del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 047 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 23 días del mes de mayo del año 2022, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Adrián René Ramírez López</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

**Ana María Méndez Becerra**

sobre la Tesis intitulada:

*Estabilización robusta y análisis de ganancia L2 para sistemas afines conmutados con un retardo*

que se desarrolló bajo la codirección de

**Dr. Adrián René Ramírez López**  
**Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez**

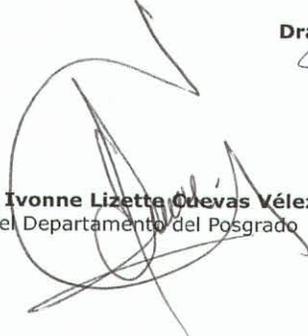
El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLA**

Dándose por terminado el acto a las 13:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe la Secretaría Académica del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 23 días del mes de mayo de 2022.

  
**Dra. Lina Raquel Riego Ruiz**  
Secretaría Académica

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado



**IPICYT**  
SECRETARÍA ACADÉMICA  
INSTITUTO POTOSINO DE  
INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA  
Y TECNOLÓGICA, A.C.



A Serafina y a mi familia



# Agradecimientos

En primer lugar, a mis directores de tesis, el Dr. Adrián René Ramírez López y el Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez, por su esfuerzo y dedicación, quienes, con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia, su valiosa dirección y apoyo me guiaron a través de cada una de las etapas del desarrollo de esta tesis hasta llegar a la conclusión de la misma.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por otorgarme una beca durante mis estudios de maestría, y al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, a todos sus miembros, profesores, cuerpo administrativo por brindarme todos los recursos y herramientas que fueron necesarios para llevar a cabo el proceso de investigación.

A mis sinodales: Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar y el Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez, por su tiempo y comentarios que enriquecieron este trabajo.

A mis compañeros: Eduardo, a Luis, a David, a Lissette y en especial a Eduardo por su valiosa amistad, aquellos momentos compartidos y por su apoyo.

Y por último a mis padres y hermanos, por su cariño y apoyo en todo momento, a Serafina, Mia, Towi, Lucha, Lucas, Verde y Amarillo por llenar mi vida de alegrías y amor.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.1.1. Sistemas de celdas de combustible . . . . .	1
1.1.2. Redes de comunicación . . . . .	3
1.1.3. Modelo unificado . . . . .	6
1.2. Estado del conocimiento . . . . .	10
1.3. Planteamiento del problema y objetivos . . . . .	11
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	12
<b>2. Control <math>H_\infty</math> y análisis de ganancia <math>\mathcal{L}_2</math></b>	<b>13</b>
2.1. Preliminares . . . . .	13
2.2. Estabilización robusta . . . . .	18
2.2.1. Demostración del Teorema 2.2 . . . . .	20
2.2.2. Demostración del Lema 2.2 . . . . .	23
2.3. Aplicaciones . . . . .	24
2.3.1. Regulación de voltaje en un sistema de celdas de combustible . . . . .	24
2.3.2. Control de congestión de una red de comunicación . . . . .	26
<b>3. Resultados principales</b>	<b>29</b>
3.1. Estabilización robusta . . . . .	29
3.1.1. Demostración del Teorema 3.1 . . . . .	32
3.1.2. Demostración del Lema 3.2 . . . . .	36
3.2. Aplicaciones . . . . .	38
3.2.1. Regulación de voltaje en un sistema de celdas de combustible . . . . .	38
3.2.2. Control de congestión de una red de comunicación . . . . .	40
<b>4. Conclusiones</b>	<b>43</b>
4.1. Contribuciones . . . . .	43
4.2. Limitaciones y trabajo a futuro . . . . .	44
<b>Apéndices</b>	<b>47</b>

<b>Apéndice A. Programación</b>	<b>49</b>
A.1. Programación en MATLAB® . . . . .	49
A.1.1. Códigos de programación del Capítulo 1 . . . . .	49
A.1.2. Códigos de programación del Capítulo 2 . . . . .	51
A.1.3. Códigos de programación del Capítulo 3 . . . . .	53
A.2. Programación en Simulink® . . . . .	57
A.2.1. Diagramas de Simulink® del Capítulo 1 . . . . .	57
A.2.2. Diagramas de Simulink® del Capítulo 2 . . . . .	59
A.2.3. Diagramas de Simulink® del Capítulo 3 . . . . .	63
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Notación

$\mathbb{R}$  Conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}^n$  Conjunto de vectores reales  $n$ -dimensionales.

$\mathbb{R}^{n \times n}$  Conjunto de matrices  $n \times n$ -dimensionales.

$\mathbb{R}_+$  Conjunto de números reales no negativos.

$\mathbb{N}$  Conjunto de los números enteros.

$\mathcal{L}_2[0, \infty)$  Espacio de funciones  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  con la norma  $\|\phi\|_{\mathcal{L}_2} = [\int_0^\infty |\phi(\tau)|^2 d\tau]^{\frac{1}{2}}$ .

$PC[a, b]$  Espacio de funciones continuas por partes  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con la norma  $\|\phi\|_{PC} = \sup_{\tau \in [a, b]} |\phi(\tau)|$ .

$C[a, b]$  Espacio de funciones continuas  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con la norma  $\|\phi\|_C = \max_{\tau \in [a, b]} |\phi(\tau)|$ .

$A^{-1}$  Inversa de la matriz  $A$ .

$A^\top$  Matriz transpuesta de  $A$ .

$A < 0$  Matriz real simétrica negativa definida.

$A > 0$  Matriz real simétrica positiva definida.

$I$  Matriz identidad.

$|x|$  Norma euclidiana del vector  $x$ .

$\|A\|$  Norma inducida (por la norma euclidiana) de la matriz  $A$ .

$\min S$  Mínimo elemento del conjunto  $S$ .

$\arg \min S$  Índices del mínimo elemento del conjunto ordenado  $S$ .

$\text{vec}(A)$  Operador que crea un vector columna de la matriz  $A$  apilando sus columnas.

$e_t$  Estado del sistema en las coordenadas del error,  $e_t : \theta \rightarrow e(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-r, 0]$ .

## Abstract

This thesis focuses on the design of a switching rule for a class of affine switched systems with delays, this switching rule is intended to ensure stability and  $H_\infty$  performance for the system in the presence of disturbances. The conditions that guarantee the stability of the system, by means of the designed switching rule, are developed in the Lyapunov-Krasovskii theoretical framework for the disturbance-free case and utilizing an  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis for the disturbed case. The stability conditions can be written in terms of linear matrix inequalities and may be easily verified via numerical computations, as we show in this research work.

In this thesis we extend some results in the literature that are focused on the development of controllers for a class of affine switched systems in the presence of delays. The study begins with a general description of the affine switched system with delays in the presence of disturbances. Then, choosing an appropriate Lyapunov-Krasovskii functional, the derivation of a stabilizing switching rule is carried out. Such a switching rule guarantees the asymptotic stability of the system. Also, an  $\mathcal{L}_2$ -gain analysis is performed, which is formulated in terms of a performance index.

Finally, with the aim of showing the importance of this class of systems, the obtained results are applied to two problems of practical relevance, namely, the output voltage regulation of a fuel cell system and the congestion control of a communication network.



## Resumen

La presente tesis se enfoca en el diseño de una regla de conmutación para una clase de sistemas afines conmutados con retardos, dicha regla de conmutación tiene como objetivo garantizar la estabilidad y desempeño  $H_\infty$  para el sistema en presencia de perturbaciones. Las condiciones que garantizan la estabilidad del sistema, a través de la regla de conmutación diseñada, se desarrollan en el marco teórico de Lyapunov-Krasovskii para el caso libre de perturbaciones y empleando un análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$  para el caso perturbado. Las condiciones de estabilidad son planteadas en términos de desigualdades matriciales lineales, las cuales, como se demuestra en este trabajo de investigación, son sencillas de verificar numéricamente.

En esta tesis se extienden algunos resultados en la literatura, los cuales están enfocados al desarrollo de controladores para una clase de sistemas afines conmutados con retardos. Esta investigación inicia con una descripción general del sistema conmutado afín con retardos ante la presencia de perturbaciones. Luego, con la selección de un funcional de Lyapunov-Krasovskii apropiado, se deriva una regla de conmutación estabilizante, con la que se garantiza la estabilidad asintótica del sistema. También se realiza el análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$  en términos de un índice de desempeño.

Finalmente, con el objetivo de mostrar la importancia de esta clase de sistemas, los resultados obtenidos son aplicados a dos problemas de relevancia práctica, a saber, la regulación del voltaje de salida de un sistema de celdas de combustible y el control de congestión de una red de comunicación.



# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis aborda el problema de estabilización y análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$  para una clase de sistemas conmutados en presencia de retardos y señales exógenas. Mediante el uso de funcionales de Lyapunov-Krasovskii, se diseña una regla de conmutación que asegura la estabilidad del sistema y garantiza un desempeño  $H_\infty$ . Como se describirá a continuación, la importancia de esta clase de sistemas radica en su habilidad de capturar el comportamiento dinámico de una gran variedad de problemas de relevancia actual como lo son la regulación del voltaje en un sistema de celdas de combustible y el control de congestión de una red de comunicación.

### 1.1. Motivación

Antes de plantear de manera formal el problema bajo estudio en esta investigación, a continuación presentamos dos problemas tecnológicos que sirven como motivación para el presente trabajo y que emplearemos a lo largo de esta tesis para clarificar los resultados obtenidos en dos aplicaciones desafiantes de control.

#### 1.1.1. Sistemas de celdas de combustible

El uso irracional de combustibles fósiles ha provocado un deterioro ambiental sin precedentes resultando en calentamiento global, derretimiento de casquetes polares, incremento del nivel del mar, lluvia ácida, reducción de la capa de ozono, entre muchos otros problemas. En consecuencia, la búsqueda de sistemas de generación de energía limpia ha tomado gran relevancia en las últimas décadas. Entre dichos sistemas, se encuentran aquellos basados

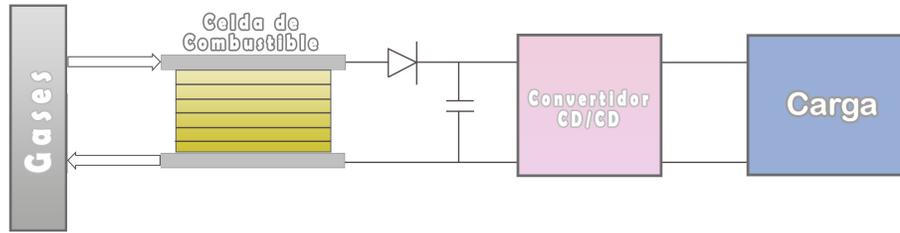


Figura 1.1: Diagrama esquemático de un sistema de celdas de combustible.

en hidrógeno. De particular interés en este trabajo, se encuentran los sistemas de celdas de combustible de hidrógeno, los cuales han probado su utilidad tanto en la industria como en el hogar [5, 37].

La Figura 1.1 muestra un diagrama esquemático del funcionamiento de un sistema de celda de combustible, el cual está compuesto por los siguientes elementos [4]:

- Una pila de celdas de combustible que genera corriente continua a cierto voltaje.
- Un convertidor para reducir o aumentar el voltaje que es producido por la celda de combustible, dependiendo de los requerimientos de la carga.
- Un diodo que evita que el flujo de corriente regrese a la celda de combustible.
- Un capacitor de enlace entre el convertidor CD-CD y la pila de celdas de combustible.

Como se puede concluir de la Figura 1.1, el convertidor CD-CD conmutado en un sistema de celdas de combustible sirve como “enlace” entre las celdas y la carga. De acuerdo a las necesidades eléctricas de la carga, dicho enlace se encarga de procesar la energía generada por el grupo de celdas. Sin embargo, se sabe que el voltaje entregado por las celdas sufre de variaciones severas, que se intensifican debido al fenómeno conocido como “falta de combustible”. Estas variaciones de voltaje se propagan a la carga, a través del convertidor de potencia, comprometiendo su correcto funcionamiento y deteriorando su desempeño. Por lo tanto, el diseño y control del convertidor es de vital importancia [41].

Una de las estructuras canónicas para el convertidor de potencia en un sistema de celdas de combustible es la topología elevadora, también conocida como “boost” en inglés. La Figura 1.2 muestra un sistema simplificado de celdas de combustible con un convertidor CD-CD ideal<sup>1</sup> tipo elevador, el cual, a grandes rasgos, se encarga de incrementar el voltaje generado por la pila de celdas de combustible  $v_{in}$  a un nivel adecuado para la carga  $R_o$ . Para ello, el “interruptor” conmuta entre dos modos de operación, conectando y desconectando la

<sup>1</sup>A lo largo de este trabajo de tesis, asumimos la presencia de un interruptor ideal, el cuál se caracteriza por presentar, exclusivamente, los estados: “encendido” o “apagado”.

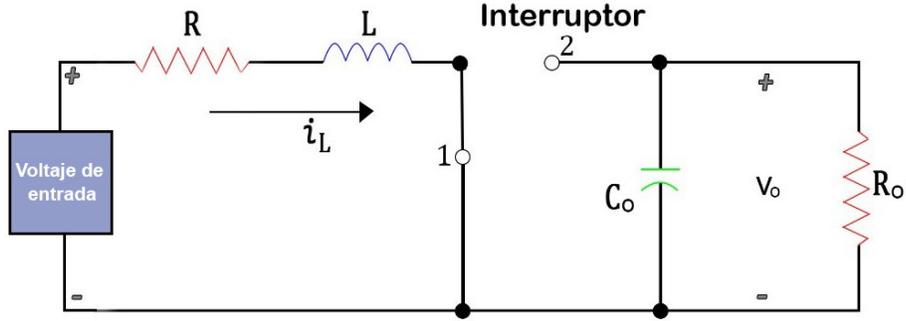


Figura 1.2: Diagrama eléctrico ideal de un sistema de celdas de combustible con un convertidor de voltaje CD-CD tipo elevador y una carga resistiva  $R_0$ .

carga de la pila de celdas de combustible.

Si se considera que el convertidor opera en modo de corriente continua, es decir,  $i_L > 0$  para todo  $t \geq 0$ , la dinámica del sistema simplificado de celdas de combustible puede ser descrita con el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales.

- Modo de operación 1:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L(t)}{dt} &= v_{in}(t) - i_L(t)R, \\ C_o \frac{dv_o(t)}{dt} &= -\frac{v_o(t)}{R_o}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

- Modo de operación 2:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L(t)}{dt} &= v_{in}(t) - i_L(t)R - v_o(t), \\ C_o \frac{dv_o(t)}{dt} &= i_L(t) - \frac{v_o(t)}{R_o}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

en donde el voltaje de entrada  $v_{in}(t)$  proporcionado por la celda de combustible es variable en el tiempo e incierto en general. Aquí, (1.1) describe el comportamiento del circuito cuando el interruptor está en la posición 1, mientras que (1.2) representan el circuito cuando el interruptor se encuentra en la posición 2.

### 1.1.2. Redes de comunicación

Una red es una colección de nodos, también conocidos como vértices, unidos por una línea denominada enlace. Una gran variedad de sistemas en física, biología e ingeniería se

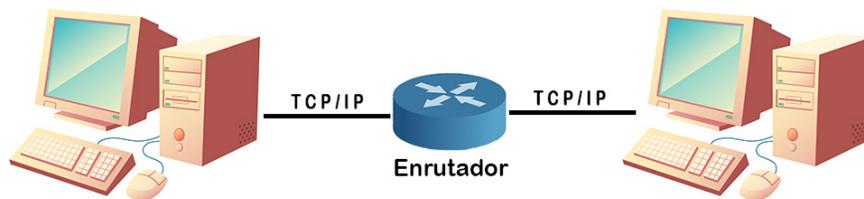


Figura 1.3: Representación simple de la red de internet utilizada para el intercambio de información alrededor del mundo.

pueden representar como una red [29]. Las redes de comunicación proporcionan la infraestructura que interconecta diferentes computadoras, dispositivos móviles y otros elementos de hardware y software. La función principal de las redes de comunicación es proporcionar la capacidad de transportar bits de información entre los diferentes elementos de las redes [42]. Una red de comunicación conocida y mundialmente utilizada es la red de Internet. Dicha red está formada por un conjunto de computadoras, u otros dispositivos, compartiendo paquetes de datos entre sí por medio de líneas telefónicas, microondas, líneas de fibra óptica o satélites [20].

La Figura 1.3 muestra la representación más simple del Internet, en donde cada nodo corresponde a una computadora y el enlace entre ambas tiene un nodo intermedio, conocido como “enrutador”, el cual se encarga de recibir paquetes de datos y reenviarlos a su destino. El control de envío de dichos paquetes se realiza aplicando el protocolo TCP/IP (cuyo nombre son las siglas de Protocolo de Control de Transmisión / Protocolo de Internet), el cual, a grandes rasgos, se divide en dos tareas: (i) la primer tarea es la aplicación del Protocolo de Internet que consiste en incluir una dirección específica IP del destino en cada paquete de datos para que pueda ser dirigida correctamente a través de la red y (ii) la segunda tarea consiste en aplicar el Protocolo de Control de Transmisión sobre el protocolo IP, el cual verifica que no existan errores en la retransmisión de los datos [29].

La congestión de una red toma lugar cuando un nodo o enlace hace frente a un flujo entrante de datos que excede sus capacidades de almacenamiento [13], este comportamiento se describe con la Figura 1.4, en donde el eje horizontal representa la carga de tráfico de los paquetes de datos desde la fuente y el eje vertical representa el rendimiento de una fuente de datos. Se puede observar que si la carga de tráfico es pequeña el rendimiento de la red se mantiene al ritmo de la carga de tráfico, pero una vez que la carga de tráfico alcanza y sobrepasa el punto 1 en la figura, el rendimiento deja de aumentar. Conforme aumenta la carga de tráfico, las colas de datos se acumulan, como consecuencia, aumenta la latencia de extremo a extremo de la red, pero sin aumentar su rendimiento. Se dice entonces que la red se encuentra en un estado de congestión. Más aún, si la carga de tráfico continúa incrementando y sobrepasa el punto 2 en la figura, el rendimiento de la red cae drásticamente debido a que

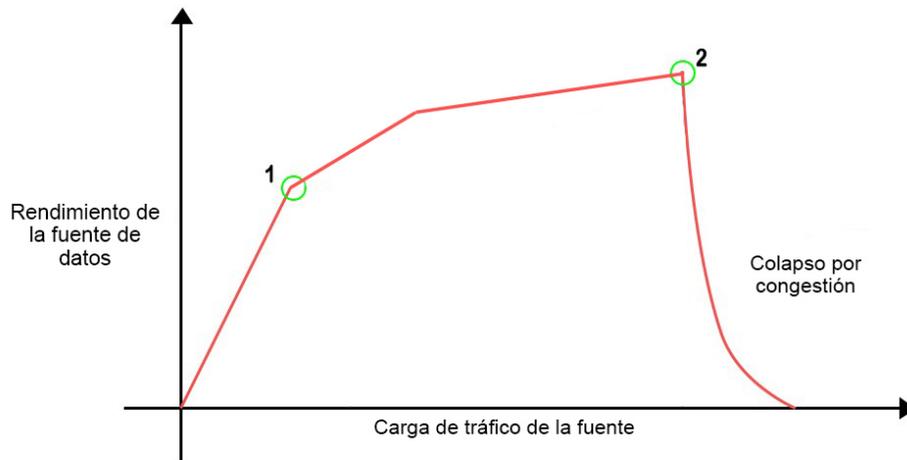


Figura 1.4: Gráfica que representa el rendimiento de la red contra la carga de tráfico.

las colas de datos crecieron excesivamente y se comenzaron a eliminar paquetes de datos.

Para poder evitar la congestión de la red, la carga de tráfico se debe mantener en la vecindad del punto 1 en la Figura 1.4. Esto se logra con la aplicación de un algoritmo para el control de congestión de la red. El problema de control de congestión de una red se puede entender como un problema de optimización distribuida en el que cada recurso compartido tiene que adaptar su carga de tráfico en función de la información que recibe de la red cuando esta intenta permanecer en el punto 1 [40].

Debido a que la red de Internet está compuesta por una gran cantidad de sistemas independientes que realizan tareas específicas y complejas, es prácticamente imposible obtener un modelo matemático claro y preciso. Para afrontar este problema, se han propuesto diferentes enfoques en la literatura [1, 16]. Un modelo que ha demostrado su utilidad es el llamado “modelo de flujo de fluidos” [9, 31, 40]. En esta aproximación, se supone que los paquetes fluyen continuamente como líquidos, los cuales son gobernados por ecuaciones diferenciales no lineales. El modelo dinámico derivado de esta aproximación es suficientemente sencillo y preciso, debido a que el error de aproximación del flujo de líquido disminuye a medida que el número de paquetes se acerca a infinito, o equivalentemente el tamaño del paquete tiende a cero [19].

A continuación consideramos un modelo de red con un enrutador con un único cuello de botella, cuyos datos enviados a través de él están representados por un líquido. El búfer del enrutador se modela como un cubo de capacidad infinita que se llena con el fluido a una tasa variable, esta tasa variable representa la tasa a la que la fuente envía sus datos al destino. El flujo del fluido sale del cubo a una tasa constante  $\mu$  que corresponde a la tasa de servicio del enrutador. La velocidad a la que se inyectan los datos en la red se controla en la fuente. Entonces, si se coloca un reloj a la entrada del búfer del enrutador, la dinámica de la cantidad

de datos en el búfer  $y(t)$  puede ser descrita como el siguiente sistema [12];

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \begin{cases} z(t - y(t)/\mu - d) - \mu, & y(t) > 0, \\ \text{máx}\{0, z(t - y(t)/\mu - d) - \mu\}, & y(t) = 0, \end{cases} \\ \dot{z} &= u(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

en donde,  $u(t) = -k_1(y(t) - y_d) - k_2(z(t) - \mu)$  es un controlador lineal,  $z(t)$  es la velocidad de envío de la fuente de datos y  $d$  es un retardo de propagación.

### 1.1.3. Modelo unificado

En este tema de tesis se presenta el diseño de una regla de conmutación estabilizante para el siguiente sistema conmutado afín con retardo;

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma x(t - r) + H_\sigma w(t) + a_\sigma, \quad (1.4)$$

$$z(t) = Cx(t) + Dx(t - r) + G_\sigma w(t), \quad (1.5)$$

en donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado instantáneo,  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  es la salida controlada con  $0 < m \leq n$ ,  $w(t)$  es una función vectorial (exógena) cuadrado integrable, i.e.  $w \in \mathcal{L}_2$ ,  $r > 0$  es el retardo,  $\sigma \in \mathbb{K}$  es la señal de conmutación, en donde  $\mathbb{K}$  está definido como  $\mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$  para algún  $N \in \mathbb{N}$ , y  $\{A_i, B_i, C, D, H_i, G_i, a_i\}$ , son matrices constantes con dimensiones adecuadas para cada  $i \in \mathbb{K}$ . La dinámica en cada modo de operación se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales afines de tipo retardado [21], [26]. La función inicial está definida en el intervalo  $[-r, 0]$  con valores en  $\mathbb{R}^n$  y se denota como  $\phi$ . En este trabajo,  $\phi$  pertenece al espacio de funciones continuas a pedazos,  $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , con la norma uniforme

$$\|\phi\|_{PC} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\phi(\theta)\|.$$

También se asume que el estado instantáneo completo está disponible para retroalimentación. Ambos modelos descritos anteriormente; es decir, (1.1)-(1.2) y (1.3), son de la forma (1.4)-(1.5) como se verifica a continuación.

En el caso de la celda de combustible en (1.1)-(1.2), considerando el voltaje de entrada como  $v_{in}(t) = E_{in} + w(t)$ , en donde  $E_{in}$  es el voltaje nominal de salida de la celda de combustible y  $w(t)$  son variaciones de voltaje desconocidas ocasionadas por cambios en las condiciones de humedad y temperatura de la celda [41], podemos definir a la corriente en el inductor  $i_L$  y el voltaje en el capacitor de salida  $v_o$  como variables de estado, es decir,  $x(t) = [i_L, v_o]^\top$ . Entonces, con  $\mathbb{K} = \{1, 2\}$  y definiendo las siguientes matrices

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 0 & -1/(R_0 C_0) \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C_0 & -1/(R_0 C_0) \end{bmatrix}, \\ H_1 &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, & H_2 &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, & a_1 = a_2 &= \begin{bmatrix} E_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}, & C &= [0 \quad 1], \end{aligned} \quad (1.6)$$

$B_i$ ,  $D$  y  $G_i$  cero para todo  $i \in \mathbb{K}$ , podemos concluir que el sistema de celdas de combustible (1.1)-(1.2) es de la forma general (1.4)-(1.5), en donde cada modo de operación se describe a continuación:

Modo de operación 1:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 0 & -1/(R_0C_0) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} w(t).$$

Modo de operación 2:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C_0 & -1/(R_0C_0) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} w(t).$$

El comportamiento del sistema de celdas de combustible se muestra en la Figura 1.5 considerando la perturbación  $w(t) = \sin(16\pi t)$  aplicada en el intervalo  $t \in [6, 8]$ . El sistema opera en lazo abierto con un ciclo de trabajo del 50%; es decir, cada uno de los modos de operación está activo 0.0001 segundos. En la figura se puede ver como la respuesta (voltaje de salida  $v_o$  en color naranja y corriente en el inductor  $i_L$  en color verde) es subamortiguada, con sobretiros de voltaje y corriente de 65 V y 70 A, respectivamente. Después, entre los segundos 6 y 8, las oscilaciones en voltaje y corriente se mantienen acotadas.

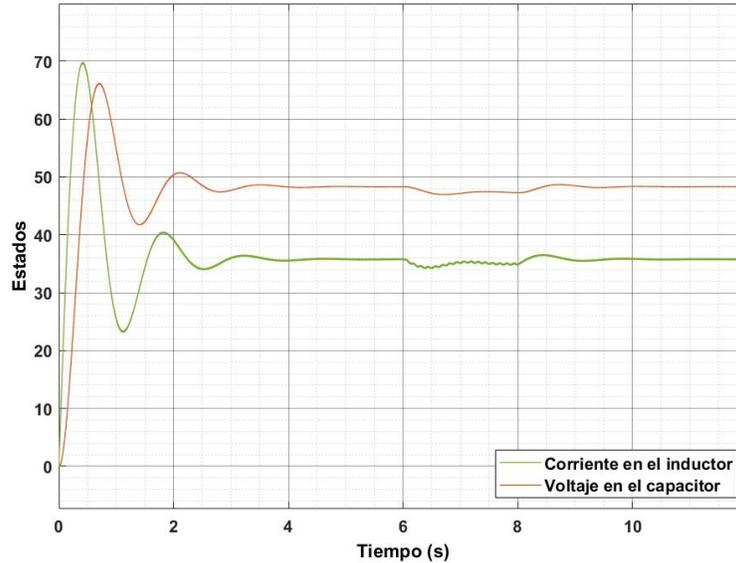


Figura 1.5: Respuesta del sistema (1.1)-(1.2) en lazo abierto conmutando a 10 kHz. Los parámetros utilizados para realizar la simulación son los siguientes: Carga nominal  $R_o = 2.7 \Omega$ , inductor  $L = 85 \mu H$ , capacitor  $C_o = 136 \mu F$ , ESR del inductor  $R = 10 m\Omega$ , voltaje nominal de entrada  $E_{in} = 24 V$ .

Considerando ahora la red de comunicación en (1.3) y definiendo  $x_1(t) = y(t) - y_d$  y  $x_2(t) = z(t) - \mu$ , en donde  $y_d$  es la cantidad deseada de datos en el búfer del enrutador, el modelo (1.3) se puede describir como un sistema con tres modos de operación:

Modo de operación 1:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t - (x_1(t) + y_d)/\mu - d), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t),\end{aligned}$$

cuando  $x_1(t) > -y_d$ .

Modo de operación 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t - (x_1(t) + y_d)/\mu - d), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t),\end{aligned}$$

cuando  $x_2(t - (x_1(t) + y_d)/\mu - d) \geq 0$ .

Modo de operación 3:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - y_d, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t),\end{aligned}$$

cuando  $x_1(t) \leq -y_d$  y  $x_2(t - (x_1(t) + y_d)/\mu - d) \leq 0$ .

Suponiendo un retardo finito, sea  $r = \max_t ((x_1(t) + y_d)/\mu + d)$ . Si además se considera el controlador  $u(t) = -k_1(y(t) - y_d) - k_2(z(t) - \mu)$  y las siguientes particiones del plano

$$\begin{aligned}X_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq -y_d \text{ y } x_2 \leq 0\}, \\ X_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq -y_d \text{ y } x_2 > 0\}, \\ X_3 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > -y_d\},\end{aligned}\tag{1.7}$$

se puede definir  $\mathbb{K} = \{1, 2, 3\}$  tal que el modo de operación  $i \in \mathbb{K}$  esta activo si  $[x_1(t), x_2(t - r)]^\top \in X_i$ . Por lo tanto, el sistema (1.3) es de la forma general (1.4)-(1.5) con el siguiente conjunto de matrices:  $D = [0, 0]$ ,  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = G_3 = 1$ ,  $C = [1, 0]$ ,

$$\begin{aligned}A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_1 = a_2 = \begin{bmatrix} -y_d \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

De manera más precisa, los modos de operación de la red de comunicación son:

Modo de operación 1:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} -y_d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [0] w(t).\end{aligned}$$

Modo de operación 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} -y_d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [1] w(t).\end{aligned}$$

Modo de operación 3:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [1] w(t).\end{aligned}$$

El comportamiento de la red de comunicación se muestra en la Figura 1.6 considerando la perturbación  $w(t) = 0.5 \sin(16\pi t)$  aplicada en el intervalo  $t \in [8, 10]$ . Cada uno de los modos de operación está activo 0.0001 segundos. En la figura se puede ver como la respuesta (cantidad de datos en el búfer en color verde y la velocidad de envío de datos de la fuente en color azul) es subamortiguada, después entre los segundos 8 y 10, cuando se activa la perturbación, las oscilaciones crecen por arriba del punto de equilibrio.

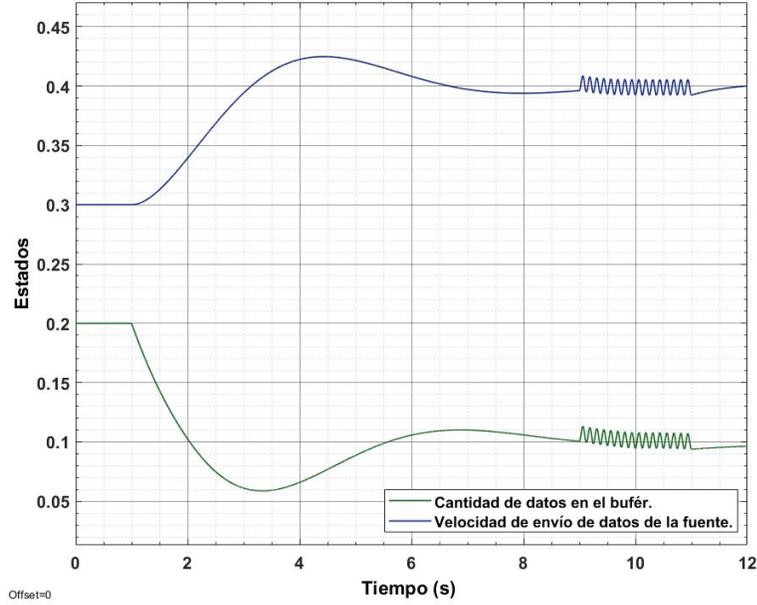


Figura 1.6: Respuesta del sistema en lazo abierto conmutando a 10 kHz. Los parámetros utilizados para realizar esta simulación son los siguientes: Capacidad del enrutador  $\mu = 0.3$ , retardo promedio de ida y vuelta  $r = 1$  s, cantidad deseada de datos  $y_d = 0.2$ , ganancia proporcional  $k_1 = 1$ , ganancia derivativa  $k_2 = 1$ .

Finalmente, dado que las mediciones de la salida del sistema  $y(t)$  contienen ruido de alta frecuencia [35], como en cualquier sistema de control, podemos considerar a dicho ruido como una perturbación  $w \in \mathcal{L}_2$ . Con lo anterior, concluimos que el modelo de congestión de datos (1.3) también es de la forma general (1.4)-(1.5). Debido a que ambas aplicaciones se pueden modelar como un sistema afín conmutado con retardo, es entonces relevante desarrollar un análisis formal que garantice la estabilidad del sistema, y así, dar una solución unificada a las problemáticas descritas anteriormente. Un reto importante en este tipo de sistemas es el de diseñar una regla de conmutación capaz de llevar los estados del sistema a un punto de equilibrio deseado [27, 44]. En este trabajo de tesis, se proporcionará una solución a dicho problema.

## 1.2. Estado del conocimiento

La estabilidad y estabilización tanto de sistemas conmutados como de sistemas con retardos se ha desarrollado *de manera independiente* en diferentes direcciones. Por un lado, la síntesis de reglas de conmutación estabilizantes para sistemas conmutados se ha realizado mediante diferentes enfoques teóricos, tales como el uso de funciones de Lyapunov [8], [15], [23], el criterio de permanencia promedio [43], el uso de desigualdades de

Gronwall-Bellman [10], principios variacionales [28] y matrices polinomiales [7]. Por otro lado, en el marco de sistemas con retardos, existe un gran número de investigaciones que emplean el enfoque de Lyapunov-Krasovskii y Lyapunov-Razumikhin [14], [17] para garantizar estabilidad. Sin embargo, para el análisis de estabilidad de sistemas afines conmutados con retardos y perturbaciones (1.4)-(1.5), existe un número limitado de contribuciones [3,24,32,34,36,39] que se pueden rastrear, de acuerdo a nuestros conocimientos, a partir del año 2011 y las cuales se describen más a detalle en las siguientes líneas.

El análisis de estabilidad de sistemas afines conmutados con retardos se ha presentado en [26], en donde el autor se enfoca en la estabilidad robusta dependiente del retardo, así como en el desempeño y la estabilización  $H_2$  y  $H_\infty$  del sistema considerando conmutación arbitraria y retardos variables en el tiempo. El análisis en dicho estudio se realiza con un enfoque de Lyapunov-Krasovskii y emplea desigualdades lineales matriciales para garantizar estabilidad asintótica interna; sin embargo, este análisis está libre de perturbaciones. En este mismo contexto, citamos los trabajos [3,24,36,39] en donde los autores consideran sistemas continuos y discretos [3], presencia de señales exógenas y/o variaciones paramétricas [39] y tiempo de permanencia promedio [24,36,39]<sup>2</sup>. Cabe mencionar que en ninguno de estos estudios se presenta en conjunto el problema de control que se desea resolver en esta tesis.

En [34] se propone un controlador estado-dependiente para sistemas bilineales MIMO con retardos constantes tanto en el estado como en la entrada. El análisis de estabilidad está basado en un funcional del Lyapunov-Krasovskii, con el cual se obtienen dos controladores, uno independiente del retardo y otro dependiente del retardo. Estos resultados son aplicados en sistemas de control de flujo turbulento. En la misma línea de investigación, un artículo directamente relacionado con el tema de investigación en este trabajo de tesis es [32], en donde se presenta el problema de estabilización de un sistema conmutado afín ante la presencia de perturbaciones. Este problema es resuelto en el marco teórico de Lyapunov-Krasovskii y empleando técnicas de control  $H_\infty$ . Como resultado, se obtiene una regla de conmutación que depende del estado completo del sistema. La regla de conmutación obtenida se aplica para la regulación del voltaje de salida de una celda de combustible y el control de congestión de una red de comunicación.

### 1.3. Planteamiento del problema y objetivos

Tomando en consideración las discusiones anteriores, podemos concluir que el análisis de estabilidad y el diseño de reglas de conmutación para sistemas de la forma (1.4)-(1.5) ha sido poco explorado. Más aún, de acuerdo a nuestros conocimientos, el número de contribuciones que consideran tanto retardos como señales exógenas en un marco unificado es

---

<sup>2</sup> El concepto de tiempo de permanencia promedio,  $\tau_a$ , significa que el sistema conmutado con todos sus modos de operación estables es estable si el intervalo promedio entre conmutaciones no es menor que  $\tau_a$  [18].

escaso y se necesita profundizar en este problema. Este trabajo de tesis aborda esta brecha en el conocimiento. Específicamente, se obtiene una regla de conmutación que garantice la estabilidad del sistema (1.4)-(1.5) mediante el uso de funcionales de Lyapunov-Krasovskii. En particular, se empleara el funcional presentando en [34] con el objetivo de eliminar restricciones que existen sobre las matrices  $A_i$  presentadas previamente en [32].

### **Objetivo general**

El objetivo principal de esta investigación es diseñar una regla de conmutación que garantice globalmente la estabilidad asintótica del sistema (1.4)-(1.5) en el caso no perturbado, y acotamiento final de las trayectorias ante la presencia de una señal exógena  $w \in \mathcal{L}_2$ .

### **Objetivos específicos**

- Diseñar una regla de conmutación en donde la combinación convexa de las matrices  $A_i$ , no esté restringida a ser *Hurwitz*, y así ampliar la clase de sistemas estudiados en [32].
- Aplicar los resultados obtenidos en modelos de problemas prácticos: regulación de sistemas de energía renovable y control de congestión en redes de comunicación.

## **1.4. Estructura de la tesis**

El resto de la tesis esta organizada de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se presenta el análisis de estabilidad de (1.4)-(1.5) desarrollado en [32], así como los conceptos y definiciones utilizados en este trabajo. También se presentan los resultados obtenidos a través de simulaciones numéricas en MATLAB<sup>®</sup> considerando un sistema de celdas de combustible y el control de congestión de redes de comunicación. En el Capítulo 3 se presenta la contribución principal de esta tesis, en donde se diseña una nueva regla de conmutación aplicando los conceptos y definiciones introducidos en el Capítulo 2, así como resultados numéricos para las aplicaciones consideradas en este trabajo. Finalmente, el Capítulo 4 presenta las conclusiones de la tesis y el trabajo a futuro.

# Capítulo 2

## Control $H_\infty$ y análisis de ganancia $\mathcal{L}_2$

En este capítulo se presentan definiciones y resultados preliminares necesarios para el desarrollo del presente trabajo de tesis. Con este fin, y por completitud, se presenta también el análisis de estabilidad del sistema (1.4)-(1.5) introducido [32], en donde los autores proponen una regla de conmutación dependiente del estado que asegura la estabilidad exponencial global del sistema afín con retardo. Dicho artículo, emplea un funcional de Lyapunov-Krasovskii para garantizar la estabilidad del sistema bajo estudio asegurando un desempeño  $H_\infty$  predefinido. Los resultados obtenidos en [32] son probados en dos modelos de aplicaciones prácticas, la primera de ellas en la regulación de sistemas de energía renovable y la segunda en el control de congestión de una red de comunicación.

### 2.1. Preliminares

Considere el sistema conmutado afín con retardo (1.4)-(1.5) presentado en el Capítulo 1, es decir,

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma x(t-r) + H_\sigma w(t) + a_\sigma, \quad (2.1)$$

$$z(t) = Cx(t) + Dx(t-r) + G_\sigma w(t), \quad (2.2)$$

en donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado instantáneo,  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  es la salida controlada con  $0 < m \leq n$ ,  $w(t)$  es una función vectorial (exógena) cuadrado integrable, i.e.  $w \in \mathcal{L}_2$ ,  $r > 0$  es el retardo,  $\sigma \in \mathbb{K}$  es la señal de conmutación, en donde  $\mathbb{K}$  está definido como  $\mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$  para algún  $N \in \mathbb{N}$ , y  $\{A_i, B_i, C, D, H_i, G_i, a_i\}$ , son matrices constantes con dimensiones adecuadas para cada  $i \in \mathbb{K}$ . La dinámica en cada modo de operación se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales afines de tipo retardado [21], [26]. La función inicial está definida en el intervalo  $[-r, 0]$  con valores en  $\mathbb{R}^n$  y se denota como  $\phi$ . En este trabajo,  $\phi$  pertenece al

espacio de funciones continuas a pedazos,  $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , con la norma uniforme

$$\|\phi\|_{PC} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\phi(\theta)\|.$$

También se asume que el estado instantáneo completo está disponible para retroalimentación.

Observe que si se diseña una regla de conmutación  $\sigma$  que dependa del estado (que es el objetivo en esta tesis), entonces (2.1) es una ecuación diferencial de tipo retardado con discontinuidades en el lado derecho y la teoría clásica sobre la existencia y unicidad de soluciones no puede ser utilizada, en consecuencia, es necesario adoptar el concepto de solución generalizada para esta clase de sistemas. Un concepto de solución de este tipo es descrito en [22], en el que se presenta una solución generalizada para ecuaciones diferenciales semilineales con discontinuidades en el lado derecho en espacios de Banach. Dicho concepto es también utilizado en [32] e incorporado en este trabajo de tesis. Así,  $x$  es una función absolutamente continua,<sup>1</sup> por lo tanto, las soluciones del sistema (2.1) se encuentran dentro del espacio de funciones absolutamente continuas [22].

#### Observación 2.1

Note que el lado derecho de (2.1) es lineal por partes. Por este motivo, el espacio de estados puede ser particionado en un conjunto de regiones  $X_i$ , tal que la dinámica dentro de cada región es afín en  $x$  [21].

Sea  $z_d \in \mathbb{R}^m$  una referencia constante para la salida  $z(t)$ . Entonces, para cualquier  $z_d$ , en ausencia de perturbaciones, existe un vector constante  $x_e \in \mathbb{R}^n$  tal que  $z_d = (C + D)x_e$  con  $0 < m \leq n$ . De tal forma que el error de salida se define como  $z_e(t) = z(t) - z_d$ . Realizando un cambio de coordenadas para (2.1)-(2.2), dado por  $e(t) = x(t) - x_e$ , se obtiene

$$\dot{e}(t) = A_\sigma e(t) + B_\sigma e(t - r) + H_\sigma w(t) + b_\sigma, \quad (2.3)$$

$$z_e(t) = C e(t) + D e(t - r) + G_\sigma w(t), \quad (2.4)$$

donde  $b_\sigma$  es el término afín descrito por

$$b_\sigma = (A_\sigma + B_\sigma)x_e + a_\sigma. \quad (2.5)$$

Antes de continuar, introducimos las siguientes definiciones:

<sup>1</sup>Una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es absolutamente continua (sobre  $[a, b]$ ), si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$ , tal que, dada cualquier colección  $\{(a_k, b_k) : 1 \leq k \leq n\}$  de intervalos abiertos de pares disjuntos de  $[a, b]$ , se tiene que  $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^N |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$ , [33].

**Definición 2.1:** Símplex  $\Lambda$  [32].

El símplex  $\Lambda$  se define como el siguiente conjunto

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}. \quad (2.6)$$

**Definición 2.2:** Combinación convexa de matrices  $S_\lambda$  [32].

Dadas las matrices reales  $S_1, \dots, S_N$  con dimensiones  $n \times m$ , se define a  $S_\lambda$  como la siguiente combinación convexa

$$S_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i S_i, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (2.7)$$

Por un lado, un aspecto importante en el estudio de sistemas lineales es aquel de determinar sus puntos de equilibrio. Por otro lado, sabemos que un sistema no lineal puede tener cualquier cantidad de puntos de equilibrio aislados. En el caso de un sistema conmutado afín se debe verificar si cada subsistema tiene algún punto de equilibrio dentro de su región de operación, es decir, verificar que exista un punto de equilibrio dentro de cada región de operación [21]. El término afín del sistema (2.3)-(2.4) es tal que  $b_\sigma \neq 0$  y por esta razón los puntos de equilibrio que puedan existir para un modo de operación no son necesariamente puntos de equilibrio para todos los modos de operación de (2.1). De acuerdo a [34], el siguiente Lema proporciona las condiciones necesarias para la selección de un punto de equilibrio  $x_e$  adecuado para el sistema (2.3)-(2.4).

**Lema 2.1:** [34].

Considerando el sistema (2.3)-(2.4) y las Definiciones 2.1 y 2.2. Si para una señal de conmutación  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  y un vector constante  $x_e \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{e}$  es una solución de (2.3)-(2.4) tal que  $\bar{e}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces existe un  $\lambda \in \Lambda$  tal que

$$(A_\lambda + B_\lambda)x_e + a_\lambda = 0. \quad (2.8)$$

Considerando a (2.3)-(2.4) libre de perturbaciones, y desde la perspectiva del Lema 2.1, se presenta la siguiente definición:

**Definición 2.3: Punto de equilibrio admisible [32].**

Se dice que  $x_e$  es un punto de equilibrio admisible de (2.1) si  $x_e \in X_e$ , donde

$$X_e = \{x_e \in \mathbb{R}^n : (A_\lambda + B_\lambda)x_e + a_\lambda = 0, \lambda \in \Lambda\}. \quad (2.9)$$

Podemos concluir que para que las trayectorias del sistema converjan al origen es necesario que la condición en (2.8) se mantenga. Para verificar dicha condición (2.8), en este trabajo de tesis se propone un  $x_e$  deseado<sup>2</sup> y se resuelve (2.8) para  $\lambda$ .

La estabilidad es una propiedad fundamental de los sistemas dinámicos, y en el caso de los sistemas afines conmutados con retardos, se puede estudiar usando un enfoque de Lyapunov – Krasovskii con base en el siguiente teorema [14, 21]:

**Teorema 2.1: Teorema de Lyapunov-Krasovskii [14].**

Suponga que  $f : \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mapea  $\mathbb{R} \times$  (conjuntos acotados en  $C[-h, 0]$ ) dentro de conjuntos acotados de  $\mathbb{R}^n$  y  $u, v, \omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  son funciones continuas no decrecientes,  $u(s)$  y  $v(s)$  son positivas para  $s > 0$ ,  $u(0) = v(0) = 0$  y  $x_t = \phi$  es la función inicial. La solución trivial de  $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$  con  $t \geq t_0$  es uniformemente estable si existe un funcional continuo  $V : \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$  el cual es positivo definido;

$$u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c),$$

tal que su derivada a lo largo de  $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$  es negativa en el sentido

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -\omega(|\phi(0)|).$$

Si  $\omega(s) > 0$  para  $s > 0$ , entonces la solución trivial  $x(t) \equiv 0$  es uniformemente asintóticamente estable. Si además  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ , entonces esta es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Otra propiedad importante es la robustez, que consiste en la habilidad de un sistema para operar correctamente en situaciones realistas, es decir, que el sistema de control soporte variaciones como incertidumbres del modelo o ruido. En otras palabras, el controlador debe de lograr su objetivo no solo para una planta si no para una familia de plantas. Si, además, el controlador es diseñado de tal manera que el sistema permanezca estable aún cuando sus

---

<sup>2</sup>Cabe mencionar que un procedimiento general para encontrar todos los puntos de equilibrio que conforman a  $X_e$  no es trivial. Este problema se puede reformular como un problema de programación lineal, el cual esta fuera de los alcances del presente trabajo.

parámetros varíen dentro de ciertos límites, se dice que el sistema posee estabilidad robusta. Adicionalmente, si el controlador puede satisfacer especificaciones de desempeño, como el seguimiento del estado estable, rechazo de perturbaciones y/o requisitos de velocidad de respuesta, se dice que posee un desempeño robusto.

El problema de diseñar un controlador que satisfaga tanto la estabilidad robusta como los requerimientos de desempeño no es trivial y para ello, como un primer paso, las especificaciones de desempeño se traducen en un índice de desempeño a minimizar mediante una acción de control adecuada. Ejemplos clásicos son los problemas de control  $H_2$  y  $H_\infty$  [6]. En este sentido, en [32] se emplea la norma  $H_\infty$ . Considerando la matriz de transferencia del sistema  $G(s)$ , dicha norma está denotada por  $\|G\|_\infty$ . Note que  $\|G\|_\infty$  es equivalente a la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema [11]; es decir,

$$\|G\|_\infty = \sup_{0 \neq w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z_e(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}} \quad (2.10)$$

Por lo tanto, la norma  $H_\infty$  se puede interpretar como la razón máxima entre la energía de la señal de salida  $\|z_e(t)\|_{\mathcal{L}_2}$  y la energía de la señal de entrada  $\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}$ . Adicionalmente, si

$$\sup_{0 \neq w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z_e(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}} < \alpha, \quad (2.11)$$

decimos que el sistema tiene ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor que  $\alpha > 0$ .

Con base en lo anterior, la norma  $H_\infty$  se puede representar en el dominio del tiempo, ver [14, Sección 4.3.1] para una prueba formal, y el análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$  se puede formular en términos de un índice de desempeño [2] como se define a continuación:

**Definición 2.4:** Ganancia  $\mathcal{L}_2$  [14].

El sistema (2.3)-(2.4) tiene ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor que  $\alpha > 0$  si la siguiente desigualdad se satisface

$$J(w) = \int_0^\infty (z_e^\top(t)z_e(t) - \alpha^2 w^\top(t)w(t))dt < 0, \quad (2.12)$$

para  $z_e$  con cualquier  $0 \neq w \in \mathcal{L}_2$  y  $\phi = 0$ .

Este índice sirve para medir la atenuación de señales exógenas, el cual debe de cumplir con la condición de  $J(w) < 0$  para garantizar que el sistema es internamente estable (en el sentido BIBO) y tiene ganancia  $\mathcal{L}_2$  menor que  $\alpha$  [14]. La cota superior de (2.11) que más se ajusta a la ganancia inducida por  $\mathcal{L}_2$  es el  $\alpha$  más pequeño [21].

Antes de continuar, se introduce el siguiente Lema:

Lema 2.2: Complemento de Schur [14].

Dadas las matrices  $A, B, C$ , se cumple lo siguiente

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix} < 0 \iff C < 0 \text{ y } A - BC^{-1}B^\top < 0. \quad (2.13)$$

En el lema anterior,  $A - BC^{-1}B^\top$  es el complemento de Schur del bloque  $C$  de la matriz  $M$ , el cual se denota como  $M/C$ .

## 2.2. Estabilización robusta

Considerando nuevamente el modelo conmutado afín con retardo;

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma x(t-r) + H_\sigma w(t) + a_\sigma, \quad (2.14)$$

$$z(t) = Cx(t) + Dx(t-r) + G_\sigma w(t), \quad (2.15)$$

en donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado instantáneo,  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  es la salida controlada con  $0 < m \leq n$ ,  $w(t)$  es una función vectorial (exógena) cuadrado integrable, i.e.  $w \in \mathcal{L}_2$ ,  $r > 0$  es el retardo,  $\sigma \in \mathbb{K}$  es la señal de conmutación, en donde  $\mathbb{K}$  está definido como  $\mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$  para algún  $N \in \mathbb{N}$ , y  $\{A_i, B_i, C, D, H_i, G_i, a_i\}$ , son matrices constantes con dimensiones adecuadas para cada  $i \in \mathbb{K}$ . La dinámica en cada modo de operación se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales afines de tipo retardado [21], [26]. La función inicial está definida en el intervalo  $[-r, 0]$  con valores en  $\mathbb{R}^n$  y se denota como  $\phi$ . En este trabajo,  $\phi$  pertenece al espacio de funciones continuas a pedazos,  $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , con la norma uniforme

$$\|\phi\|_{PC} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\phi(\theta)\|.$$

También se asume que el estado instantáneo completo está disponible para retroalimentación.

Para comenzar con la estabilización robusta del sistema (2.14)-(2.15) se presenta a continuación el problema planteado en [32]. Recuerde que el sistema (2.14) se dice que es exponencialmente estable con una tasa de decaimiento  $\gamma > 0$  si para cualquier  $\phi \in PC[-h, 0]$  existe una constante  $c \geq 1$  tal que la solución inicializada por  $x_{t_0} = \phi$  satisface la siguiente condición  $\|x(t)\| \leq ce^{-\gamma(t-t_0)} \|\phi\|_{PC}$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Problema 1:** Dado un punto de equilibrio admisible  $x_e$  para el sistema (2.1) encontrar una estrategia de conmutación que garantice: (i) que  $x_e$  es exponencialmente estable para  $w \equiv 0$ , y (ii) que para condiciones iniciales nulas, el sistema (2.3)-(2.4) con entrada  $w(t)$  y salida  $z_e(t)$ , tenga un índice de desempeño  $J(w) < 0$  para  $w \in \mathcal{L}_2$  no idénticamente cero.

Para dar solución al problema anterior, por simplicidad, considere las matrices

$$N_i = \begin{bmatrix} A_i^\top P + PA_i + Q + 2\gamma P & B_i^\top P \\ PB_i & -e^{-2\gamma r} Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} (H_i^\top P + G_i^\top C)^\top \\ (G_i^\top D)^\top \end{bmatrix} [\alpha^2 I - G_i^\top G_i]^{-1} \begin{bmatrix} (H_i^\top P + G_i^\top C)^\top \\ (G_i^\top D)^\top \end{bmatrix}^\top, \quad (2.16)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} A_i^\top P + PA_i + Q + 2\gamma P & B_i^\top P & H_i^\top P \\ PB_i & -e^{-2\gamma r} Q & 0 \\ PH_i & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \\ G_i^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \\ G_i^\top \end{bmatrix}^\top. \quad (2.17)$$

con  $i \in \mathbb{K}$ , donde  $\gamma > 0$  y  $\alpha > 0$  son escalares,  $r > 0$  es el retardo, las matrices  $P > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $H_i$ ,  $G_i$ , el cero y la identidad  $I$  son de dimensiones adecuadas. Entonces, el siguiente teorema que establece las condiciones para la construcción de la regla de conmutación:

**Teorema 2.2 [32].**

Considere el sistema (2.3)-(2.4). Sea  $x_e$  un punto de equilibrio admisible de (2.1) para algún  $\lambda \in \Lambda$ . Si existen matrices positivas definidas  $P$  y  $Q$ , y escalares  $\gamma > 0$  y  $\alpha > 0$  que satisfacen

$$\begin{bmatrix} A_\lambda^\top P + PA_\lambda + Q + 2\gamma P & PB_\lambda & PH_\lambda & C^\top \\ B_\lambda^\top P & -e^{-2\gamma r} Q & 0 & D^\top \\ H_\lambda^\top P & 0 & -\alpha^2 I & G_\lambda^\top \\ C & D & G_\lambda & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.18)$$

entonces, la regla de conmutación

$$\sigma(\zeta) \in \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \zeta^\top [N_i \zeta + 2\text{vec}(Pb_i, 0)], \quad (2.19)$$

con  $\zeta(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r)]^\top$ , garantiza que  $e = 0$  es globalmente exponencialmente estable con una tasa de decaimiento  $\gamma$  para  $w \equiv 0$ . Además se garantiza que para condiciones iniciales nulas  $J(w) < 0$  para cualquier  $w \in \mathcal{L}_2$  no idénticamente cero.

La demostración del Teorema 2.2 se realiza en la Sección 2.2.1. La regla de conmutación (2.19) es dependiente del estado, es decir, depende de  $\zeta$ . Esta ley de conmutación realiza cada instante de tiempo el cálculo de  $\zeta^\top [N_i \zeta + 2\text{vec}(Pb_i, 0)]$  para cada índice  $i$ , y el operador  $\arg \min$  (argumento mínimo) selecciona el índice  $i$  asociado al valor más pequeño calculado en ese instante de tiempo, cuyo valor es asignado a  $\sigma$ . Debido a que puede existir el mismo valor para diferentes índices  $i$ , se dice entonces que  $\sigma$  pertenece al conjunto formado por dichos índices.

### 2.2.1. Demostración del Teorema 2.2

Considere el siguiente funcional;

$$v(e_t) = e^\top(t)Pe(t) + \int_{t-r}^t e^\top(s)e^{2\gamma(s-t)}Qe(s)ds, \quad (2.20)$$

donde la función  $e_t$  está definida por  $e(\tau)$  para todo  $\tau \in [t-r, t]$ . Asimismo, recordando la discusión realizada en la Sección 2.1 sobre la definición de soluciones generalizadas para el sistema (2.1) con discontinuidades en el lado derecho, si la señal de error  $e$  es una función absolutamente continua, de igual manera se garantiza que  $v(e_t)$  también es una función absolutamente continua en el tiempo debido a las propiedades de suavidad que posee  $v$ , por esta razón su derivada existe casi en todas partes [33, pág 165] y el teorema de estabilidad estándar de Lyapunov-Krasovskii sigue siendo válido para este caso [30]. Por lo tanto, considerando nuevamente el sistema en las coordenadas del error:

$$\dot{e}(t) = A_\sigma e(t) + B_\sigma e(t-r) + H_\sigma w(t) + b_\sigma, \quad (2.21)$$

$$z_e(t) = Ce(t) + De(t-r) + G_\sigma w(t), \quad (2.22)$$

donde  $b_\sigma$  es el término afín descrito por

$$b_\sigma = (A_\sigma + B_\sigma)x_e + a_\sigma. \quad (2.23)$$

Empezamos derivando el funcional (2.20) a lo largo de las trayectorias del sistema (2.21); es decir,

$$\begin{aligned} \dot{v}(e_t) &= \dot{e}^\top(t)Pe(t) + e^\top(t)P\dot{e}(t) + e^\top(t)Qe(t) \\ &\quad - e^\top(t-r)e^{-2\gamma r}Qe(t-r) - 2\gamma \int_{t-r}^t e^\top(s)e^{2\gamma(s-t)}Qe(s)ds, \end{aligned} \quad (2.24)$$

ahora, sumando y restando el término  $2\gamma e(t)^\top Pe(t) + z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t)$  a (2.24) se produce la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{v}(e_t) + 2\gamma v(e_t) &= \dot{e}^\top(t)Pe(t) + e^\top(t)P\dot{e}(t) + e^\top(t)Qe(t) - e^\top(t-r)e^{-2\gamma r}Qe(t-r) \\ &\quad - 2\gamma e^\top(t)Pe(t) + z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t) - z_e^\top(t)z_e(t) - \alpha^2 w^\top(t)w(t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando a (2.21) y (2.22) en la ecuación anterior y definiendo el vector  $\xi(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r), w^\top(t)]^\top$ , entonces (2.25) se reescribe como sigue

$$\dot{v}(e_t) + 2\gamma v(e_t) = \xi^\top(t)M_\sigma \xi(t) + b_\sigma Pe(t) + e^\top(t)Pb_\sigma - z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t) \quad (2.26)$$

en donde la matriz  $M_\sigma$  es de la forma (2.17).

Antes de continuar, se requiere del uso del siguiente lema. Por claridad y continuidad, la prueba del mismo se presentará más adelante, vea la Sección 2.2.2 en este capítulo.

Lema 2.3 [32].

Dadas las matrices  $N_\sigma$  y  $M_\sigma$  de la forma (2.16), (2.17) respectivamente. Entonces, la siguiente desigualdad es cierta

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \xi^\top(t) M_\sigma \xi(t) \leq \zeta^\top(t) N_\sigma \zeta(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.27)$$

donde  $\zeta(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r)]^\top$ .

Continuando con la prueba del Teorema 2.2, a partir del Lema 2.3 tenemos de (2.26) que

$$\dot{v}(e_t) + 2\gamma v(e_t) \leq u_\sigma(\zeta) - z_e^\top(t) z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t) w(t). \quad (2.28)$$

en donde

$$u_\sigma(\zeta) = \zeta^\top(t) N_\sigma \zeta(t) + 2\zeta^\top(t) \text{vec}(Pb_\sigma, 0). \quad (2.29)$$

Para proseguir, se requiere estudiar la combinación convexa

$$u_\lambda(\zeta) = \zeta^\top(t) N_\lambda \zeta(t) + 2\zeta^\top(t) \text{vec}(Pb_\lambda, 0),$$

definida por  $u_\sigma$  en (2.29). Para esto, se requiere el uso de las Definiciones 2.1, 2.2 y 2.3. Como primer paso se demostrará que  $N_\lambda < 0$  usando el complemento de Schur en el Lema 2.2. Considere la matriz

$$\Psi = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_\lambda^\top P + PA_\lambda + Q + 2\gamma P & PB_\lambda & PH_\lambda & C^\top \\ B_\lambda^\top P & -e^{-2\gamma r} Q & 0 & D^\top \\ H_\lambda^\top P & 0 & -\alpha^2 I & G_\lambda^\top \\ \hline C & D & G_\lambda & -I \end{array} \right]. \quad (2.30)$$

A partir de (2.18), tenemos que  $\Psi < 0$ . Considere ahora el complemento de Schur  $\Psi/(-I)$

$$\begin{aligned} \Psi/(-I) &= \begin{bmatrix} A_\lambda^\top P + PA_\lambda + Q + 2\gamma P & PB_\lambda & PH_\lambda \\ B_\lambda^\top P & -e^{-2\gamma r} Q & 0 \\ H_\lambda^\top P & 0 & -\alpha^2 I \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \\ G_\lambda^\top \end{bmatrix} [I]^{-1} [C \ D \ G_\lambda]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si ahora se reduce esta expresión, se obtiene la siguiente matriz que por fines prácticos se renombrara como  $\Psi_2$ .

$$\Psi_2 = \left[ \begin{array}{cc|c} A_\lambda^\top P + PA_\lambda + Q + 2\gamma P & PB_\lambda & PH_\lambda \\ B_\lambda^\top P & -e^{-2\gamma r} Q & 0 \\ \hline H_\lambda^\top P & 0 & -\alpha^2 I \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc|c} CC^\top & CD^\top & CG_\lambda^\top \\ CD^\top & DD^\top & DG_\lambda^\top \\ \hline CG_\lambda^\top & DG_\lambda^\top & G_\lambda G_\lambda^\top \end{array} \right]. \quad (2.32)$$

Como  $\Psi < 0$ , a partir del Lema 2.1, es claro que  $\Psi_2 < 0$ . Aplicando nuevamente el complemento de Schur, ahora con respecto a  $(-\alpha^2 I + G_\lambda G_\lambda^\top) < 0$ , tenemos que

$$\Psi_2 / (-\alpha^2 I + G_\lambda G_\lambda^\top) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_\lambda^\top P + PA_\lambda + Q + 2\gamma P & PB_\lambda & \\ B_\lambda^\top P & -e^{-2\gamma r} Q & \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} C^\top \\ D^\top \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} C^\top \\ D^\top \end{array} \right]^\top + \left[ \begin{array}{c} (H_\lambda^\top P + G_\lambda^\top C)^\top \\ (G_\lambda^\top D)^\top \end{array} \right] [\alpha^2 I - G_\lambda^\top G_\lambda]^{-1} \left[ \begin{array}{c} (H_\lambda^\top P + G_\lambda^\top C)^\top \\ (G_\lambda^\top D)^\top \end{array} \right]^\top. \quad (2.33)$$

Note que  $\Psi_2 / (-\alpha^2 I + G_\lambda G_\lambda^\top) \equiv N_\lambda$  en donde  $N_\lambda$  es de la forma (2.16). Por el Lema 2.2, concluimos que  $N_\lambda < 0$ .

Como segundo paso, dado que  $x_e$  es un punto de equilibrio admisible, tenemos que  $b_\lambda = 0$ . Como  $N_\lambda < 0$ , entonces

$$u_\lambda(\zeta) = \zeta^\top(t) N_\lambda \zeta(t) < 0. \quad (2.34)$$

Finalmente, como

$$u_\lambda(\zeta) = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i u_i(\zeta) < 0, \quad (2.35)$$

y  $\lambda_i \geq 0$  para toda  $i \in \mathbb{K}$ , entonces existe al menos una  $i \in \mathbb{K}$  para la cual se cumple que  $u_i(\zeta) < 0$ . Por lo tanto, definiendo la regla de conmutación

$$\sigma(t) \in \arg \min_{i \in \mathbb{K}} u_i(\zeta), \quad (2.36)$$

podemos escribir a partir de (2.28) que

$$\begin{aligned} \dot{v}(e_t) + 2\gamma v(e_t) &\leq \min_{i \in \mathbb{K}} u_i(\zeta) - z_e^\top(t) z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t) w(t) \\ &< -z_e^\top(t) z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t) w(t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

De lo anterior,  $e = 0$  es exponencialmente estable siempre que  $w(t) \equiv 0$ .

Continuando con la demostración del teorema, es decir, para el caso con entrada  $w(t)$  no idénticamente cero, de la ecuación (2.37) se tiene que  $\dot{v}(e_t) < -z_e^\top(t) z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t) w(t)$ ,

integrando de 0 a  $\infty$  ambos lados de la ecuación se obtiene el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{v}(e_\theta) d\theta &< \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (-z_e^\top(\theta) z_e(\theta) + \alpha^2 w^\top(\theta) w(\theta)) d\theta, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(e_\theta) \Big|_0^t &< \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (-z_e^\top(\theta) z_e(\theta) + \alpha^2 w^\top(\theta) w(\theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Como  $v(e_0) = 0$  y el  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(e_t) \geq 0$  existe, entonces

$$\int_0^\infty (z_e^\top(\theta) z_e(\theta) - \alpha^2 w^\top(\theta) w(\theta)) d\theta < 0. \quad (2.39)$$

Con ello se obtiene que para cualquier  $w \in \mathcal{L}_2$  no idénticamente cero  $J(w) < 0$ , con lo que se completa la prueba.

#### Observación 2.2

Todos los resultados obtenidos en [32] son validos si la combinación convexa de las matrices  $A_i$  es estrictamente *Hurwitz*.

#### Observación 2.3

La regla de conmutación  $\sigma(t)$  en (2.19) requiere resolver el problema de factibilidad de la desigualdad lineal matricial (LMI, por sus siglas en inglés) dado por (2.18). Más aún, para el caso en que  $\gamma = 0$ , dicha LMI es independiente del retardo.

### 2.2.2. Demostración del Lema 2.2

Considerando la matriz  $M_\sigma$  de la forma (2.17), tenemos que

$$\begin{aligned} \xi^\top(t) M_\sigma \xi(t) &= e^\top(t) [A_\sigma^\top P + P A_\sigma + Q + 2\gamma P + C^\top C] e(t) + e^\top(t-r) [B_\sigma^\top + C^\top D] e(t) \\ &\quad + w^\top(t) [H_\sigma^\top P + C^\top G_\sigma] e(t) + e^\top(t) [P B_\sigma + D^\top C] e(t-r) \\ &\quad - e^\top(t-r) [e^{-2\gamma r} Q + D^\top D] e(t-r) + w(t) [D^\top G_\sigma] e(t-r) \\ &\quad + e(t) [P H_\sigma + G_\sigma^\top C] w(t) + e(t-r) [G_\sigma^\top D] w(t) - w(t) [\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma] w(t). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si ahora se deriva (2.40) con respecto a  $w(t)$  se obtiene como resultado la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{d(\xi^\top(t) M_\sigma \xi(t))}{dw(t)} &= [H_\sigma^\top P + C^\top G_\sigma] e(t) + [D^\top G_\sigma] e(t-r) + e(t) [P H_\sigma + G_\sigma^\top C] \\ &\quad + e(t-r) [G_\sigma^\top D] - 2w(t) [\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma], \end{aligned} \quad (2.41)$$

igualando a cero el lado derecho de (2.41) y posteriormente resolviendo para  $w(t)$ , se obtiene el valor crítico

$$w^*(t) = \{[H_\sigma^\top P + C^\top G_\sigma]e(t) + [D^\top G_\sigma]e(t-r)\}[\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma]^{-1}, \quad (2.42)$$

para el cual la función  $\xi^\top(t)M_\sigma\xi(t)$  exhibe un máximo. Sustituyendo (2.42) en (2.40) podemos deducir que

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \xi^\top(t)M_\sigma\xi(t) \leq \zeta^\top(t)N_\sigma\zeta(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.43)$$

con lo que se concluye la demostración.

## 2.3. Aplicaciones

Para mostrar el funcionamiento de la regla de conmutación diseñada en la sección anterior se utilizarán los ejemplos mencionados en Capítulo 1. Los valores numéricos se toman de [32] y las LMIs se resuelven utilizando MATLAB<sup>®</sup> con YALMIP [25] y SeDuMi [38]. La implementación de la regla de conmutación se realiza en Simulink<sup>®</sup> con el método de integración de Euler de paso fijo.

### 2.3.1. Regulación de voltaje en un sistema de celdas de combustible

Para este ejemplo, el voltaje de entrada esta dado por  $v_{in} = E_{in} + w(t)$  en donde  $E_{in} = 24$  y  $w(t)$  es una perturbación dada por  $w(t) = \sin(16\pi t)$ . Considerando nuevamente el modelo del sistema de celdas de combustible en el Capítulo 1, el cual se describe mediante los modos de operación:

Modo de operación 1:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 0 & -1/(R_0C_0) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} w(t). \end{aligned}$$

Modo de operación 2:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C_0 & -1/(R_0C_0) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} w(t). \end{aligned}$$

Note que el sistema es libre de retardos. Los valores de cada uno de los componentes de las matrices están descritos en la Tabla 2.1. Con  $r = 0$ ,  $\alpha = 1.7603$ ,  $\gamma = 0.01$  y  $x_e = [35.9285, 48]^\top \in X_e$ , el cual es admisible para la  $\lambda = [0.50748, 0.49251]$ , se satisfacen las LMIs en el Teorema 2.2 con

$$P = \begin{bmatrix} 0.024639 & -0.008935 \\ -0.008935 & 0.039216 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.002631 & 0.002606 \\ 0.002606 & 0.002642 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Implementando la regla de conmutación  $\sigma(\zeta) \in \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \zeta^\top [N_i \zeta + 2\text{vec}(Pb_i, 0)]$ , con  $\zeta(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r)]^\top$ , presentada en este capítulo, se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 2.1, la cual está dividida en dos paneles, en el panel inferior se observa como las trayectorias del sistema se mantienen reguladas a pesar de la perturbación que aparece en  $t \in [6, 8]$ . Esta perturbación genera un  $J(w) = -2.76$ . En el panel superior se aprecia el promedio de la regla de conmutación (2.19).

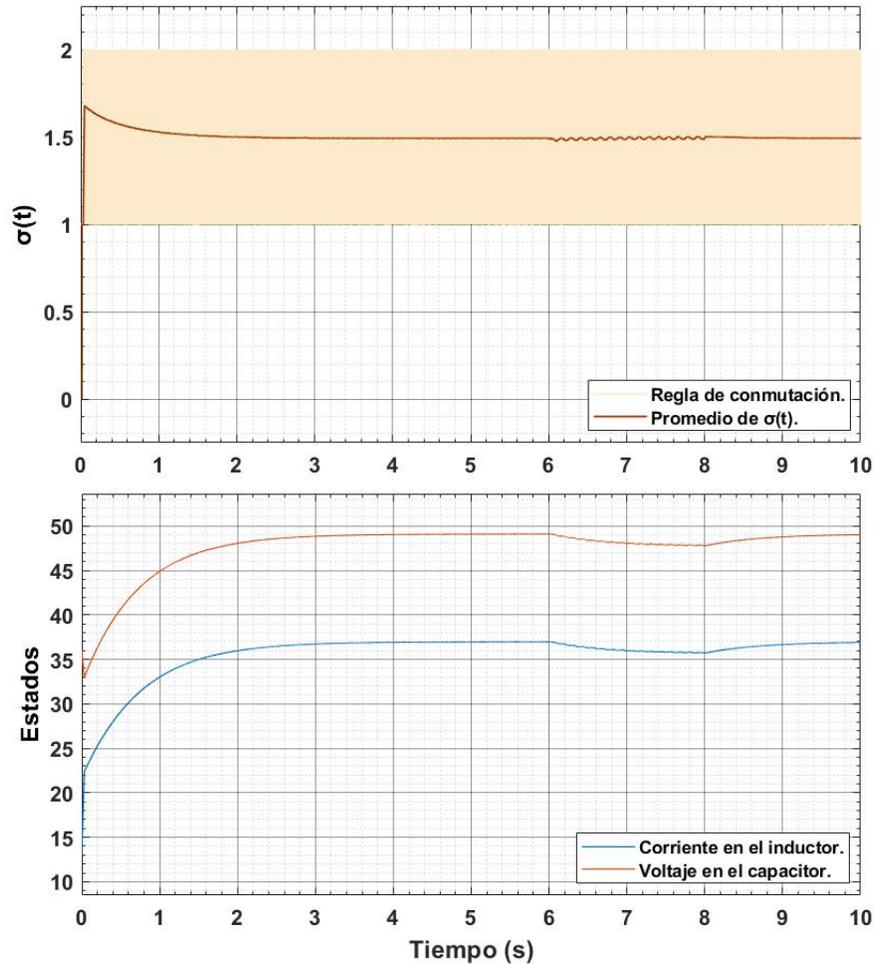


Figura 2.1: Regulación del voltaje de salida de un sistema de celdas de combustible usando la regla de conmutación (2.19).

Tabla 2.1: Parámetros del sistema de celdas de combustible

Carga nominal, $R_o$	$2.7 \Omega$	Inductor, $L$	$85 \mu H$
Capacitor (Salida), $C_o$	$136 \mu F$	ESR del inductor, $R$	$10 m\Omega$
Capacitor (Entrada), $C_{in}$	$5600 \mu F$	Voltaje nominal de entrada, $E_{in}$	$24 V$

### 2.3.2. Control de congestión de una red de comunicación

Finalmente, retomamos el ejemplo de control de congestión descrito en el Capítulo 1. cuyos modos de operación se describen nuevamente a continuación:

Modo de operación 1:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} -y_d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [0] w(t).\end{aligned}$$

Modo de operación 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} -y_d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [1] w(t).\end{aligned}$$

Modo de operación 3:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [1] w(t).\end{aligned}$$

Considerando los datos de la Tabla 2.2 para cada una de las matrices; con  $\gamma = 0.1$ ,  $\alpha = 4.0876$  y el punto de equilibrio deseado  $x_e = [-0.107692, 0.107692]^\top \in X_e$ , el cual es admisible con  $\lambda = [0.4, 0.3, 0.3]^\top$ , las LMIs en el Teorema 2.2 se satisfacen con

$$P = \begin{bmatrix} 17.651302 & 3.252260 \\ 3.252260 & 15.411501 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3.928106 & 4.867708 \\ 4.867708 & 17.303440 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Implementando la regla de conmutación  $\sigma(\zeta) \in \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \zeta^\top [N_i \zeta + 2\text{vec}(P b_i, 0)]$ , con  $\zeta(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r)]^\top$ , presentada en el Capítulo 2, se obtienen los resultados mostrados

en la Figura 2.2. Esta figura se divide en dos paneles, en el panel inferior se muestra el comportamiento de los estados del sistema, que son la cantidad de datos en el búfer

$$y(t) = x_1(t) + y_d > 0,$$

y la velocidad de envío de datos de la fuente

$$z(t) = x_2(t) + \mu > 0,$$

los cuales se ven afectados por una señal de ruido dada por  $w(t) = 0.5 \sin(16\pi t)$  en  $t \in [8, 10]$  generando un  $J(w) = -4.128$ . Note que ambos estados alcanzan el punto de equilibrio deseado  $x_e + [y_d, \mu]^T = [0.092307, 0.407692]^T$ . En el panel superior se muestra el comportamiento de la regla de conmutación (2.19) la cual se mantiene cambiando entre los tres modos de operación del sistema.

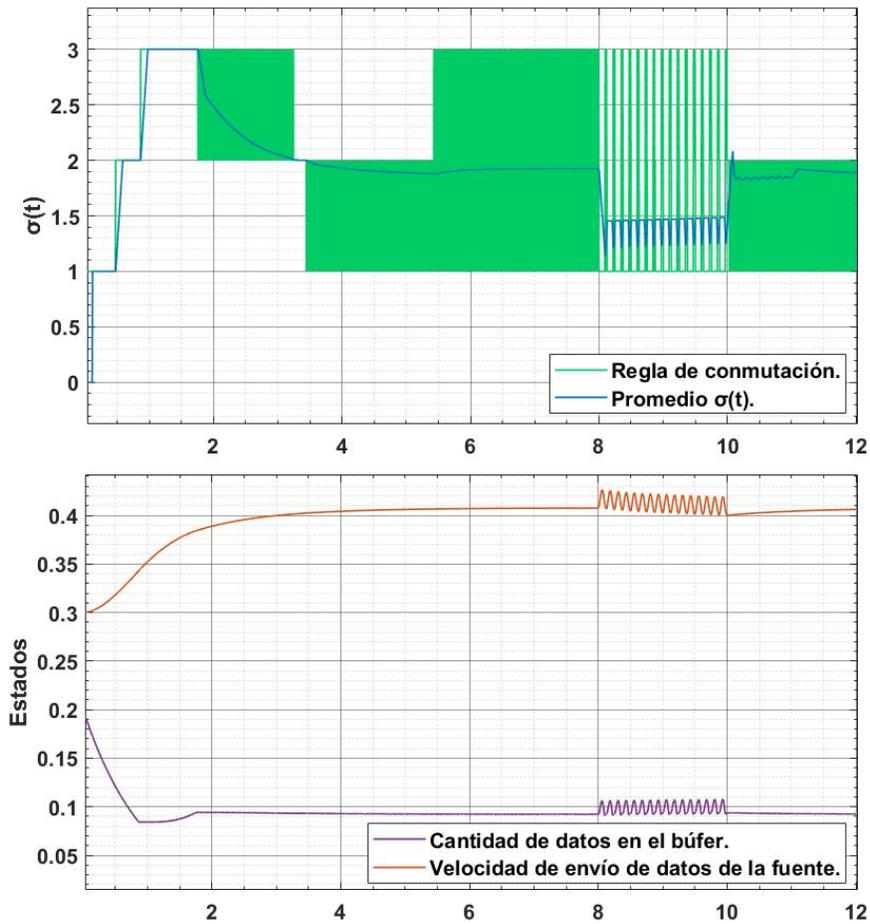


Figura 2.2: Control de congestión de una red de comunicación usando la regla de conmutación (2.19).

Tabla 2.2: Parámetros de la red de comunicación

Capacidad del enrutador, $\mu$	0.3
Retardo promedio de ida y vuelta, $r$	1s
Cantidad deseada de datos, $y_d$	0.2
Ganancia proporcional, $k_1$	1
Ganancia derivativa, $k_2$	1

# Capítulo 3

## Resultados principales

En este capítulo se presenta el resultado principal de esta tesis, el cual consiste en la obtención de una nueva regla de conmutación que garantiza la estabilidad asintótica global del sistema (2.1)-(2.2) en el caso no perturbado, y el acotamiento final de sus trayectorias en presencia de señales exógenas  $w \in \mathcal{L}_2$ . Contrario a los resultados discutidos en el capítulo anterior, la nueva regla de conmutación permite eliminar la restricción impuesta sobre la combinación convexa  $A_\lambda$  de matrices  $A_i$ . En específico,  $A_\lambda$  no requiere ser *Hurwitz*. Lo anterior se logra a través de la propuesta de un nuevo funcional de Lyapunov-Krasovskii, el cual resulta ser menos conservativo en el sentido de que es posible encontrar cotas superiores más precisas para la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del sistema bajo estudio. Los resultados obtenidos también son implementados en la regulación de voltaje de un sistema de celdas de combustible y el control de congestión en una red de comunicación.

### 3.1. Estabilización robusta

Para realizar el análisis de estabilidad del sistema presentado en el Capítulo 1 dado por:

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma x(t-r) + H_\sigma w(t) + a_\sigma, \quad (3.1)$$

$$z(t) = Cx(t) + Dx(t-r) + G_\sigma w(t), \quad (3.2)$$

en donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado instantáneo,  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  es la salida controlada con  $0 < m \leq n$ ,  $w(t)$  es una función vectorial (exógena) cuadrado integrable, i.e.  $w \in \mathcal{L}_2$ ,  $r > 0$  es el retardo,  $\sigma \in \mathbb{K}$  es la señal de conmutación, en donde  $\mathbb{K}$  está definido como  $\mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$  para

algún  $N \in \mathbb{N}$ , y  $\{A_i, B_i, C, D, H_i, G_i, a_i\}$ , son matrices constantes con dimensiones adecuadas para cada  $i \in \mathbb{K}$ . La dinámica en cada modo de operación se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales afines de tipo retardado [21], [26]. La función inicial está definida en el intervalo  $[-r, 0]$  con valores en  $\mathbb{R}^n$  y se denota como  $\phi$ . En este trabajo,  $\phi$  pertenece al espacio de funciones continuas a pedazos,  $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , con la norma uniforme

$$\|\phi\|_{PC} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\phi(\theta)\|.$$

También se asume que el estado instantáneo completo está disponible para retroalimentación y se considera nuevamente el sistema en las coordenadas del error

$$\dot{e}(t) = A_\sigma e(t) + B_\sigma e(t-r) + H_\sigma w(t) + b_\sigma, \quad (3.3)$$

$$z_e(t) = Ce(t) + De(t-r) + G_\sigma w(t), \quad (3.4)$$

donde  $b_\sigma$  es el término afín descrito por

$$b_\sigma = (A_\sigma + B_\sigma)x_e + a_\sigma. \quad (3.5)$$

Se desea dar solución al Problema 1 planteado en la Sección 2.2. Adicionalmente, se desea eliminar la restricción sobre la combinación convexa de las matrices  $A_i$ , ver Observación 2.2. Es decir, que  $A_\lambda$  no requiera ser *Hurwitz*. Por otro lado cabe destacar que las LMI presentadas en el Teorema 2.2 son independientes del retardo cuando  $\gamma = 0$  en (2.18), como se observó en el Capítulo 2, ver Observación 2.3. En este sentido, también se desea que la regla de conmutación a diseñar en el presente capítulo considere información referente al retardo.

Para simplificar el análisis primero definimos las siguientes matrices:

$$N_i = \begin{bmatrix} \Theta_i & P_1 B_i - P_2 & r(A_i^\top P_2 + P_3) \\ B_i^\top P_1 - P_2 & -S & r(B_i^\top P_2 - P_3) \\ r(P_2^\top A_i + P_3) & r(P_2^\top B_i - P_3) & -rR \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \\ 0 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} H_i^\top P_1 + G_i^\top C \\ G_i^\top D \\ r(H_i^\top P_2) \end{bmatrix} [\alpha^2 I - G_i^\top G_i]^{-1} \begin{bmatrix} H_i^\top P_1 + G_i^\top C \\ G_i^\top D \\ r(H_i^\top P_2) \end{bmatrix}^\top, \quad (3.6)$$

$$E_i = \begin{bmatrix} \Theta_i + C^\top C & P_1 B_i - P_2 + C^\top D & r(A_i^\top P_2 + P_3) & P_1 H_i + C^\top G_i \\ B_i^\top P_1 + P_2^\top + D^\top C & -S + D^\top D & r(B_i^\top P_2 - P_3) & D^\top G_i \\ r(P_2^\top A_i + P_3) & r(P_2^\top B_i - P_3) & -rR & r(P_2^\top H_i) \\ H_i^\top P_1 + G_i^\top C & G_i^\top D & r(H_i^\top P_2) & -\alpha^2 I + G_i^\top G_i \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\Theta_i = P_1 A_i + A_i^\top P_1 + P_2 + P_2^\top + Rr + S, \quad (3.8)$$

para toda  $i \in \mathbb{K}$ , donde el cero y la identidad  $I$  son matrices de dimensiones adecuadas. Entonces, se presenta el siguiente teorema que establece las condiciones para la construcción

de la regla de conmutación:

### Teorema 3.1

Considere el sistema (2.3)-(2.4) con  $r > 0$ . Sea  $x_e \in \mathbb{R}^n$  un punto de equilibrio admisible de (2.1) para algún  $\lambda \in \Lambda$ . Si existen matrices  $P_1, P_2, P_3, S, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P_1, P_3, S, R$  son matrices simétricas, con  $S$  y  $R$  matrices positivas definidas y un escalar  $\alpha > 0$  que satisfacen

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 + r^{-1}S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 A_\lambda + A_\lambda^\top P_1 + P_2 + P_2^\top + Rr + S & P_1 B_\lambda - P_2 & A_\lambda^\top P_2 + P_3 & P_1 H_\lambda & C^\top \\ B_\lambda^\top P_1 + P_2^\top & -S & B_\lambda^\top P_2 - P_3 & 0 & D^\top \\ P_2^\top A_\lambda + P_3 & P_2^\top B_\lambda - P_3 & -r^{-1}R & P_2^\top H_\lambda & 0 \\ H_\lambda^\top P_1 & 0 & H_\lambda^\top P_2 & -\alpha^2 I & G_\lambda^\top \\ C & D & 0 & G_\lambda - I & \end{bmatrix} < 0. \quad (3.10)$$

entonces, la regla de conmutación dada por:

$$\sigma(\xi) \in \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi^\top [N_i \xi + 2\text{vec}(P_1 b_i, 0, P_2^\top b_i)], \quad (3.11)$$

con  $\xi(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r), -r^{-1}\hat{e}^\top(t)]^\top$ , en donde  $\hat{e}(t) = \int_{t-r}^t e(v)dv$ , garantiza que  $e = 0$  es globalmente asintóticamente estable para  $w \equiv 0$ . Además se garantiza que, para condiciones iniciales nulas,  $J < 0$  para cualquier  $w \in \mathcal{L}_2$  no idénticamente cero.

La demostración del Teorema 3.1 se realiza en la Sección 3.1.1. Observe que la regla de conmutación propuesta en (3.11) es dependiente del estado; es decir, depende de  $\zeta$ . Esta ley de conmutación realiza, en cada instante de tiempo, el cálculo de  $\xi^\top [N_i \xi + 2\text{vec}(P_1 b_i, 0, P_2^\top b_i)]$  para cada índice  $i$ , y el operador arg mín (argumento mínimo) selecciona el índice  $i$  asociado al valor más pequeño calculado en cada instante de tiempo, cuyo valor es asignado a  $\sigma$ . Debido a que pueden existir el mismo valor para diferentes índices  $i$ , se dice entonces que  $\sigma$  pertenece a el conjunto formado por dichos índices.

### 3.1.1. Demostración del Teorema 3.1

Para iniciar con la demostración del Teorema 3.1, se emplea el siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii presentado en [34]

$$V(e_t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{e}(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{e}(t) \end{bmatrix} + \int_{t-r}^t e^\top(v)Re(v)(v-t+r)dv + \int_{t-r}^t e^\top(v)Se(v)dv, \quad (3.12)$$

en donde  $\hat{e}(t) = \int_{t-r}^t e(v)dv$ . Como se discutió en la demostración del Teorema 2.2,  $e_t$  es una función absolutamente continua en el tiempo, por lo tanto  $v(e_t)$  también. Entonces, su derivada existe casi en todas partes [33] y el teorema de estabilidad estándar de Lyapunov-Krasovskii sigue siendo válido para este caso [30].

Para continuar con la demostración se requiere el uso del siguiente lema:

**Lema 3.1:** Desigualdad de Jensen [14].

Para cualquier matriz  $R > 0$  de dimensión  $n \times n$ , un escalar  $h > 0$  y una función vectorial  $\phi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que las integraciones en cuestión estén bien definidas, se cumple lo siguiente:

$$\int_{-h}^0 \phi^\top(s)R\phi(s)ds \geq \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \phi^\top(s)dsR \int_{-h}^0 \phi(s)ds.$$

Para verificar que el funcional propuesto de Lyapunov-Krasovskii (3.12) es positivo definido, como primer paso se emplea sobre él la desigualdad de Jensen, con lo que se obtiene

$$V(e_t) \geq \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{e}(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 + r^{-1}S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{e}(t) \end{bmatrix} + \int_{t-r}^t e^\top(v)Re(v)(v-t+r)dv, \quad (3.13)$$

con lo que el funcional es positivo definido si se cumplen las siguientes desigualdades matriciales

$$R > 0, \quad y \quad \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 + r^{-1}S \end{bmatrix} > 0. \quad (3.14)$$

Derivando el funcional (3.12) a lo largo de las trayectorias de (2.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_t) = & \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{e}(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\hat{e}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\hat{e}}(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{e}(t) \end{bmatrix} + e^\top(t)Re(t) \\ & - e^\top(t-r)Se(t-r) + e^\top(t)Se(t) - \int_{t-r}^t e^\top(v)Re(v)dv. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Jensen en (3.15) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_t) \leq & \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{e}(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\hat{e}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\hat{e}}(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{e}(t) \end{bmatrix} + e^\top(t)Re(t) \\ & - e^\top(t-r)Se(t-r) + e^\top(t)Se(t) - r^{-1}\hat{e}^\top(t)R\hat{e}(t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

sustituyendo el sistema (2.3)-(2.4) en (3.16) se produce la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_t) \leq & e(t)P_1A_\sigma e(t) + e(t)P_1B_\sigma e(t-r) + e(t)P_1H_\sigma w(t) + e(t)P_1b_\sigma \\ & + \hat{e}(t)P_2A_\sigma e(t) + \hat{e}(t)P_2^\top B_\sigma e(t-r) + \hat{e}(t)P_2^\top H_\sigma w(t-r) + \hat{e}(t)P_2^\top b_\sigma \\ & + e(t)P_2e(t) - e(t)P_2e(t-r) + \hat{e}(t)P_3e(t-r) + e(t)A_\sigma^\top P_1e(t) \\ & + e(t-r)B_\sigma^\top P_1e(t) + w(t)H_\sigma^\top P_1e(t) + b_\sigma^\top P_1e(t) + e(t)A_\sigma^\top P_2\hat{e}(t) \\ & + e(t-r)B_\sigma^\top P_2\hat{e}(t) + w(t)H_\sigma^\top P_2\hat{e}(t) + b_\sigma^\top P_2\hat{e}(t) + e(t)P_2^\top e(t) \\ & - e(t-r)P_2^\top e(t) + e(t)P_3\hat{e}(t) - e(t-r)P_3\hat{e}(t) + e(t)Rre(t) \\ & - e(t-r)Se(t-r) + e(t)Se(t) - r^{-1}\hat{e}(t)R\hat{e}(t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Definiendo el vector  $\hat{\xi}(t) = [e^\top(t) \quad e^\top(t-r) \quad \hat{e}^\top(t) \quad w^\top(t)]^\top$ , podemos reescribir a (3.17) en forma matricial como

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_t) \leq & \hat{\xi}^\top(t) \begin{bmatrix} \Theta_\sigma & P_1B_\sigma - P_2 & A_\sigma^\top P_2 + P_3 & P_1H_\sigma \\ B_\sigma^\top P_1 + P_2^\top & -S & B_\sigma^\top P_2 - P_3 & 0 \\ P_2^\top A_\sigma + P_3 & P_2^\top B_\sigma - P_3 & -r^{-1}R & P_2^\top H_\sigma \\ H_\sigma^\top P_1 & 0 & H_\sigma^\top P_2 & 0 \end{bmatrix} \hat{\xi}(t) \\ & + e^\top(t)P_1b_\sigma + \hat{e}^\top(t)P_2^\top b_\sigma + b_\sigma^\top P_1e(t) + b_\sigma^\top P_2\hat{e}(t), \end{aligned} \quad (3.18)$$

en donde  $\Theta_\sigma$  es de la forma (3.8). Sumando y restando el término  $z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t)$  a (3.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_t) \leq & \hat{\xi}^\top(t) \left\{ \begin{bmatrix} \Theta_\sigma & P_1B_\sigma - P_2 & A_\sigma^\top P_2 + P_3 & P_1H_\sigma \\ B_\sigma^\top P_1 + P_2^\top & -S & B_\sigma^\top P_2 - P_3 & 0 \\ P_2^\top A_\sigma + P_3 & P_2^\top B_\sigma - P_3 & -r^{-1}R & P_2^\top H_\sigma \\ H_\sigma^\top P_1 & 0 & H_\sigma^\top P_2 & -\alpha^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \\ 0 \\ G_\sigma^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ 0 \\ G_\sigma \end{bmatrix}^\top \right\} \hat{\xi}(t) \\ & + e^\top(t)P_1b_\sigma + \hat{e}^\top(t)P_2^\top b_\sigma + b_\sigma^\top P_1e(t) + b_\sigma^\top P_2\hat{e}(t) - z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

reduciendo la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_t) \leq & \hat{\xi}^\top(t) \begin{bmatrix} \Theta_\sigma + C^\top C & P_1B_\sigma - P_2 + C^\top D & A_\sigma^\top P_2 + P_3 & P_1H_\sigma + C^\top G_\sigma \\ B_\sigma^\top P_1 + P_2^\top + D^\top C & -S + D^\top D & B_\sigma^\top P_2 - P_3 & D^\top G_\sigma \\ P_2^\top A_\sigma + P_3 & P_2^\top B_\sigma - P_3 & -r^{-1}R & P_2^\top H_\sigma \\ H_\sigma^\top P_1 + G_\sigma^\top C & G_\sigma^\top D & H_\sigma^\top P_2 & -\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma \end{bmatrix} \hat{\xi}(t) \\ & + e^\top(t)P_1b_\sigma + \hat{e}^\top(t)P_2^\top b_\sigma + b_\sigma^\top P_1e(t) + b_\sigma^\top P_2\hat{e}(t) - z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Definiendo el vector  $\xi(t) = [e^\top(t) \quad e^\top(t-r) \quad -r^{-1}\hat{e}^\top(t) \quad w^\top(t)]^\top$ , la desigualdad en (3.20) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_t) \leq & \xi^\top(t)E_\sigma\xi(t) + e^\top(t)P_1b_\sigma + \hat{e}^\top(t)r(P_2^\top b_\sigma) + b_\sigma^\top P_1e(t) + r(b_\sigma^\top P_2)\hat{e}(t) \\ & - z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t), \end{aligned} \quad (3.21)$$

en donde la matriz  $E_\sigma$  es de la forma (3.7). Reduciendo la expresión anterior (3.21) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\dot{V}(e_t) \leq \xi^\top(t)E_\sigma\xi(t) + 2e^\top(t)P_1b_\sigma + 2\hat{e}^\top(t)r(P_2^\top b_\sigma) - z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t). \quad (3.22)$$

Antes de continuar, el siguiente lema es necesario. Por claridad y continuidad, la prueba del mismo se presentará más adelante, vea la Sección 3.1.2 en este capítulo.

### Lema 3.2

Dadas las matrices  $N_\sigma$  y  $E_\sigma$  de la forma (3.6), (3.7), respectivamente. Entonces, la siguiente desigualdad es cierta

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \xi^\top(t)E_\sigma\xi(t) \leq \zeta^\top(t)N_\sigma\zeta(t) \quad \forall t, \quad (3.23)$$

donde  $\zeta(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r), -r^{-1}\hat{e}^\top(t)]^\top$ .

Continuando con la prueba del Teorema 3.1, a partir del Lema 3.2 tenemos de (3.22) que

$$\dot{V}(e_t) \leq u_\sigma(\zeta) - z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t) \quad (3.24)$$

en donde

$$u_\sigma(\zeta) = \zeta^\top(t)N_\sigma\zeta(t) + 2\zeta^\top(t)\text{vec}(P_1b_\sigma, 0, P_2^\top b_\sigma). \quad (3.25)$$

Para proseguir, se requiere estudiar la combinación convexa

$$u_\lambda(\zeta) = \zeta^\top(t)N_\lambda\zeta(t) + 2\zeta^\top(t)\text{vec}(P_1b_\lambda, 0, P_2^\top b_\lambda),$$

definida por  $u_\sigma$  en (3.25). Para esto, se emplearan también las Definiciones 2.1, 2.2 y 2.3. Como primer paso se demostrará que  $N_\lambda < 0$  usando el complemento de Schur descrito en el Lema 2.2.

Considere la matriz

$$Y = \left[ \begin{array}{cccc|c} \Theta_\lambda & P_1B_\lambda - P_2 & A_\lambda^\top P_2 + P_3 & P_1H_\lambda & C^\top \\ B_\lambda^\top P_1 + P_2^\top & -S & B_\lambda^\top P_2 - P_3 & 0 & D^\top \\ P_2^\top A_\lambda + P_3 & P_2^\top B_\lambda - P_3 & -r^{-1}R & P_2^\top H_\lambda & 0 \\ H_\lambda^\top P_1 & 0 & H_\lambda^\top P_2 & -\alpha^2 I & G_\lambda^\top \\ \hline C & D & 0 & G_\lambda & -I \end{array} \right]. \quad (3.26)$$

A partir de (3.10), tenemos que  $\Upsilon < 0$ . Considere ahora el complemento de Schur  $\Upsilon/(-I)$

$$\Upsilon/(-I) = \begin{bmatrix} \Theta_\lambda & P_1 B_\lambda - P_2 & A_\lambda^\top P_2 + P_3 & P_1 H_\lambda \\ B_\lambda^\top P_1 + P_2^\top & -S & B_\lambda^\top P_2 - P_3 & 0 \\ P_2^\top A_\lambda + P_3 & P_2^\top B_\lambda - P_3 & -r^{-1}R & P_2^\top H_\lambda \\ H_\lambda^\top P_1 & 0 & H_\lambda^\top P_2 & -\alpha^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \\ 0 \\ G_\lambda^\top \end{bmatrix} [-I]^{-1} \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \\ 0 \\ G_\lambda^\top \end{bmatrix}^\top. \quad (3.27)$$

Reduciendo esta expresión, se obtiene la siguiente matriz que por fines prácticos se renombrará como  $\Upsilon_2$

$$\Upsilon_2 = \left[ \begin{array}{ccc|c} \Theta_\lambda & P_1 B_\lambda - P_2 & A_\lambda^\top P_2 + P_3 & P_1 H_\lambda \\ B_\lambda^\top P_1 + P_2^\top & -S & B_\lambda^\top P_2 - P_3 & 0 \\ P_2^\top A_\lambda + P_3 & P_2^\top B_\lambda - P_3 & -r^{-1}R & P_2^\top H_\lambda \\ \hline H_\lambda^\top P_1 & 0 & H_\lambda^\top P_2 & -\alpha^2 I \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc|c} C^\top C & C^\top D & 0 & C^\top G_\lambda \\ D^\top C & D^\top D & 0 & D^\top G_\lambda \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_\lambda^\top C & G_\lambda^\top D & 0 & G_\lambda^\top G_\lambda \end{array} \right]. \quad (3.28)$$

Como  $\Upsilon < 0$ , a partir del Lema 2.1, es claro que  $\Upsilon_2 < 0$ . Aplicando nuevamente el complemento de Schur, ahora con respecto a  $(-\alpha^2 I + G_\lambda G_\lambda^\top) < 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \Upsilon_2/(\alpha^2 I + G_\lambda G_\lambda^\top) &= \begin{bmatrix} \Theta_\lambda + C^\top C & P_1 B_\lambda - P_2 + C^\top D & A_\lambda^\top P_2 + P_3 \\ B_\lambda^\top P_1 + P_2^\top + D^\top C & -S + D^\top D & B_\lambda^\top P_2 - P_3 \\ P_2^\top A_\lambda + P_3 & P_2^\top B_\lambda - P_3 & -r^{-1}R \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} P_1 H_\lambda + C^\top G_\lambda \\ D^\top G_\lambda \\ P_2^\top H_\lambda \end{bmatrix} [\alpha^2 I - G_\lambda^\top G_\lambda]^{-1} \begin{bmatrix} H_\lambda^\top P_1 + G_\lambda^\top C \\ G_\lambda^\top D \\ H_\lambda^\top P_2 \end{bmatrix}^\top \end{aligned} \quad (3.29)$$

Note que  $\Upsilon_2/(-\alpha^2 I + G_\lambda G_\lambda^\top) \equiv N_\lambda$  en donde  $N_\lambda$  es de la forma (3.6). Por el Lema 2.2, concluimos que  $N_\lambda < 0$ .

Como segundo paso, dado que  $x_e$  es un punto de equilibrio admisible, ver Definición 2.3, tenemos que  $b_\lambda = 0$  y junto con  $N_\lambda < 0$ , entonces

$$u_\lambda(\zeta) = \zeta^\top(t) N_\lambda \zeta(t) < 0. \quad (3.30)$$

Finalmente, dado que

$$u_\lambda(\zeta) = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i u_i(\zeta) < 0, \quad (3.31)$$

y  $\lambda_i \geq 0$  para toda  $i \in \mathbb{K}$ , entonces existe al menos una  $i \in \mathbb{K}$  para la cual se cumple que  $u_i(\zeta) < 0$ . Por lo tanto, definiendo la regla de conmutación

$$\sigma(t) \in \arg \min_{i \in \mathbb{K}} u_i(\zeta) \quad (3.32)$$

podemos escribir a partir de (3.24) que

$$\begin{aligned}\dot{V}(e_t) &\leq \min_{i \in \mathbb{K}} u_i(\zeta) - z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t) \\ &< -z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t)\end{aligned}\quad (3.33)$$

De lo anterior,  $e = 0$  es globalmente asintóticamente estable siempre que  $w(t) \equiv 0$ .

Continuando con la demostración del teorema, es decir, para el caso con entrada  $w(t)$  no idénticamente cero, de la ecuación (2.37) se tiene que  $\dot{V}(e_t) < -z_e^\top(t)z_e(t) + \alpha^2 w^\top(t)w(t)$ , integrando de 0 a  $\infty$  ambos lados de la ecuación se obtiene el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{V}(e_\theta) d\theta &< \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (-z_e^\top(\theta)z_e(\theta) + \alpha^2 w^\top(\theta)w(\theta)) d\theta, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} V(e_\theta)|_0^t &< \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (-z_e^\top(\theta)z_e(\theta) + \alpha^2 w^\top(\theta)w(\theta)) d\theta.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Como  $V(e_0) = 0$  y el  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(e_t) \geq 0$  existe, entonces

$$\int_0^\infty (z_e^\top(\theta)z_e(\theta) - \alpha^2 w^\top(\theta)w(\theta)) d\theta < 0. \quad (3.35)$$

Con ello se obtiene que para cualquier  $w \in \mathcal{L}_2$  no idénticamente cero se genera un  $J(w) < 0$ , con lo que se completa la prueba.

#### Observación 3.1

A partir de la LMI en (3.10), es claro que la nueva regla de conmutación requiere información del retardo.

### 3.1.2. Demostración del Lema 3.2

Considerando la matriz  $E_\sigma$  de la forma (3.7), tenemos que

$$\begin{aligned}\xi^\top(t)E_\sigma\xi(t) &= e(t)(P_1A_\sigma + \Theta + C^\top C)e(t) + e(t-r)(B_\sigma^\top P_1 - P_2 + D^\top C)e(t) \\ &\quad + r^{-1}\hat{e}(t)(r(P_2^\top A_\sigma + P_3))e(t) + w(t)(H_\sigma^\top P_1 + G_\sigma^\top C)e(t) \\ &\quad + e(t)(P_1B_\sigma - P_2 + C^\top D)e(t-r) + e(t-r)(-S + D^\top D)e(t-r) \\ &\quad + r^{-1}\hat{e}(t)(r(P_2^\top B_\sigma - P_3))e(t-r) + w(t)(G_\sigma^\top D)e(t-r) \\ &\quad + e(t)(r(A_\sigma^\top P_2 + P_3))r^{-1}\hat{e}(t) + e(t-r)(r(B_\sigma^\top P_2 - P_3))r^{-1}\hat{e}(t) \\ &\quad + r^{-1}\hat{e}(t)(-rR)r^{-1}\hat{e}(t) + w(t)(r(H_\sigma^\top P_2))r^{-1}\hat{e}(t) \\ &\quad + e(t)(P_1H_\sigma + C^\top G_\sigma)w(t) + e(t-r)(D^\top G_\sigma)w(t) \\ &\quad + r^{-1}\hat{e}(t)(r(P_2^\top H_\sigma))w(t) + w(t)(-\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)w(t).\end{aligned}\quad (3.36)$$

Si ahora se deriva (3.36) con respecto a  $w(t)$  se obtiene como resultado la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{d(\xi^\top(t)E_\sigma\xi(t))}{dw(t)} &= (H_\sigma^\top P_1 + G_\sigma^\top C)e(t) + (G_\sigma^\top D)e(t-r) + (r(H_\sigma^\top P_2))r^{-1}\hat{e}(t) \\ &+ e(t)(P_1H_\sigma + C^\top G_\sigma) + e(t-r)(D^\top G_\sigma) + r^{-1}\hat{e}(t)(r(P_2^\top H_\sigma)) \\ &+ 2w(t)(-\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma), \end{aligned} \quad (3.37)$$

igualando a cero el lado derecho de (3.37) y posteriormente resolviendo para  $w(t)$ , se obtiene el valor crítico de  $w(t)$  dado por

$$\begin{aligned} w^*(t) &= ((\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}(H_\sigma P_1 + G_\sigma^\top C))e(t) + ((\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}G_\sigma^\top D)e(t-r) \\ &+ ((\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}(H_\sigma^\top P_2))\hat{e}(t), \end{aligned} \quad (3.38)$$

para el cual la función  $\xi^\top(t)M_\sigma\xi(t)$  exhibe un máximo. Sustituyendo a (3.38) en (3.36) y reduciendo términos semejantes, se obtiene

$$\begin{aligned} \xi^\top(t)E_\sigma\xi(t)|_{w(t)=w^*(t)} &= e(t)(\Theta_\sigma + C^\top C)e(t) \\ &+ e(t-r)(B_\sigma^\top P_1 - P_2 + D^\top C)e(t) + r^{-1}\hat{e}(t)(r(P_2^\top A_\sigma + P_3))e(t) \\ &+ e(t)((\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1})(H_\sigma^\top P_1 + G_\sigma^\top C)(P_1H_\sigma + G_\sigma^\top C)e(t) \\ &+ e(t-r)((\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1})(G_\sigma^\top D)(H_\sigma^\top P_1 + G_\sigma^\top C)e(t) \\ &+ \hat{e}(t)((\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1})(H_\sigma^\top P_2)(H_\sigma^\top P_1 + G_\sigma^\top C)e(t) \\ &+ e(t)(P_1B_\sigma - P_2 + C^\top D)e(t-r) \\ &+ e(t-r)(-S + D^\top D)e(t-r) \\ &+ r^{-1}\hat{e}(t)(r(P_2^\top B_\sigma - P_3))e(t-r) \\ &+ e(t)(\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}(H_\sigma P_1 + G_\sigma^\top C)(G_\sigma^\top D)e(t-r) \\ &+ e(t-r)(\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}(G_\sigma^\top D)(G_\sigma^\top D)e(t-r) \\ &+ \hat{e}(t)(\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}(H_\sigma^\top P_2)(G_\sigma^\top D)e(t-r) \\ &+ e(t)(r(A_\sigma^\top P_2 + P_3))r^{-1}\hat{e}(t) \\ &+ e(t-r)(r(B_\sigma^\top P_2 - P_3))r^{-1}\hat{e}(t) \\ &+ r^{-1}\hat{e}(t)(-rR)r^{-1}\hat{e}(t) \\ &+ e(t)(\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}(H_\sigma P_1 + G_\sigma^\top C)(H_\sigma^\top P_2)\hat{e}(t) \\ &+ e(t-r)(\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}(G_\sigma^\top D)(H_\sigma^\top P_2)\hat{e}(t) \\ &+ \hat{e}(t)(\alpha^2 I + G_\sigma^\top G_\sigma)^{-1}(H_\sigma^\top P_2)(H_\sigma^\top P_2)\hat{e}(t), \end{aligned} \quad (3.39)$$

De lo anterior, se puede deducir que

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \xi^\top(t)E_\sigma\xi(t) \leq \zeta^\top(t)N_\sigma\zeta(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (3.40)$$

con lo que se concluye la demostración del lema.

## 3.2. Aplicaciones

En esta sección retomamos los dos ejemplos mencionados en Capítulo 1 y estudiados en el Capítulo 2. Los valores numéricos coinciden con los descritos en la Sección 2.3 y las LMIs se resuelven utilizando MATLAB<sup>®</sup> con YALMIP [25] y SeDuMi [38]. La implementación de la regla de conmutación se realiza en Simulink<sup>®</sup> con el método de integración de Euler explícito de paso fijo.

### 3.2.1. Regulación de voltaje en un sistema de celdas de combustible

Para verificar que la restricción *Hurwitz* impuesta sobre la combinación convexa de matrices  $A_\lambda$  es, en efecto, eliminada bajo la regla de conmutación propuesta en este capítulo, a continuación retomamos el problema de regulación de voltaje en un sistema de celdas de combustible considerando las siguientes modificaciones:

Modo de operación 1:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/(R_0C_0) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [0 \ 1] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [0 \ 0] w(t).\end{aligned}$$

Modo de operación 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 0 & -1/(R_0C_0) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ 1/C_0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [0 \ 1] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [0 \ 0] w(t).\end{aligned}$$

Los valores de cada uno de los componentes que conforman las matrices se encuentran en la Tabla 3.1. El punto de equilibrio deseado es  $x_e = [35.9285 \ 47.9999]^\top \in X_e$ , el cual es admisible para la  $\lambda = [0.5075 \ 0.4925]$ . Con los parámetros anteriores, considerando un retardo  $r = 0.001$  y un factor de atenuación  $\alpha = 1.999$ , las LMIs mostradas en el Teorema 3.1 son factibles con

$$\begin{aligned}P_1 &= \begin{bmatrix} 0.2055 & -0.0488 \\ -0.0488 & 0.3329 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -0.2296 & -0.0514 \\ 1.2314 & 0.0551 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1.5916 & 1.0340 \\ 1.0340 & 0.0116 \end{bmatrix}, \\ S &= \begin{bmatrix} 0.0204 & 0.0197 \\ 0.0197 & 0.0561 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3.7120 & -0.6064 \\ -0.6064 & 3.1574 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Implementando la regla de conmutación  $\sigma(\zeta) \in \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi^\top [N_i \xi + 2 \text{vec}(P_1 b_i, 0, P_2^\top b_i)]$ , con  $\xi(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r), -r^{-1} \hat{e}^\top(t)]^\top$ , presentada en este capítulo, los resultados obtenidos se pueden observar en la Figura 3.1 la cual está dividida en dos paneles. En el panel

inferior se observa como las trayectorias del sistema alcanzan el punto de equilibrio  $x_e$ , y estas se mantienen acotadas a pesar que existe una perturbación, dada por  $w(t) = \sin(16\pi t)$ , que aparece en el intervalo de tiempo  $t \in [6, 8]$  y que resulta en un  $J(w) = -3.7443$ . En el panel superior se aprecia el comportamiento de la regla de conmutación, cambiando entre los dos modos de operación y el promedio de la misma.

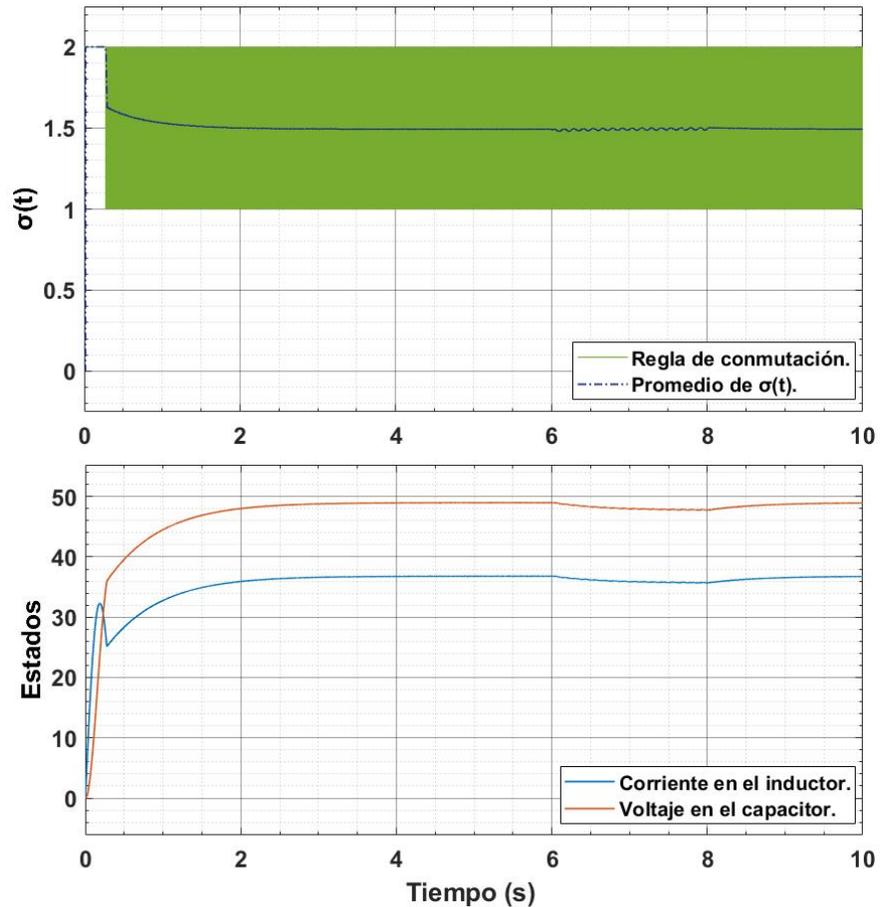


Figura 3.1: Regulación del voltaje de salida de un sistema de celdas de combustible usando la regla de conmutación (3.11).

Tabla 3.1: Parámetros del sistema de celdas de combustible

Carga nominal, $R_o$	$2.7 \Omega$	Inductor, $L$	$85 \mu H$
Capacitor (Salida), $C_o$	$136 \mu F$	ESR del inductor, $R$	$10 m\Omega$
Capacitor (Entrada), $C_{in}$	$5600 \mu F$	Voltaje nominal de entrada, $E_{in}$	$24 V$

### Observación 3.2

Un ejercicio numérico sencillo permite concluir que la combinación convexa  $A_\lambda = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$  no es una matriz *Hurwitz*. Sin embargo, como se demuestra arriba, existe una solución para el problema de factibilidad dado en el Teorema 3.1.

## 3.2.2. Control de congestión de una red de comunicación

Finalmente, resolvemos el problema de control de congestión para la red de comunicación descrita por los siguiente subsistemas:

Modo de operación 1

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} -y_d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [0] w(t).\end{aligned}$$

Modo de operación 2

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} -y_d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [1] w(t).\end{aligned}$$

Modo de operación 3

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-r) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z(t) &= [1 \ 0] x(t) + [0 \ 0] x(t-r) + [1] w(t).\end{aligned}$$

Entonces, con los datos de la Tabla 3.2, un punto de equilibrio deseado  $x_e = [-0.107692, 0.107692]^\top \in X_e$ , el cual es admisible con  $\hat{\lambda} = [0.4, 0.3, 0.3]^\top$ . El factor de atenuación se logra disminuir a  $\alpha = 1.47$  y las LMIs mostradas en el Teorema 3.1 son factibles con

$$\begin{aligned}P_1 &= \begin{bmatrix} 1.8911 & 0.3490 \\ 0.3490 & 1.7360 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -0.1646 & 0.8933 \\ 0.1302 & 0.0266 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0.1026 & -0.0712 \\ -0.0712 & -0.0155 \end{bmatrix}, \\ S &= \begin{bmatrix} 0.4674 & 0.2828 \\ 0.2828 & 0.9708 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.1888 & -0.0414 \\ -0.0414 & 0.9820 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Implementando la regla de conmutación,  $\sigma(\xi) \in \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi^\top [N_i \xi + 2\text{vec}(P_1 b_i, 0, P_2^\top b_i)]$ , con  $\xi(t) = [e^\top(t), e^\top(t-r), -r^{-1} \hat{e}^\top(t)]^\top$ , presentada en este capítulo, se obtuvieron los resultados presentados en la en la Figura 3.2. Observe que las trayectorias del sistema alcanzan el equilibrio deseado y en presencia de la perturbación  $w(t) = 0.5 \sin(16\pi t)$ ,  $t \in [8, 10]$  las trayectorias del sistema permanecen acotadas con un  $J(w) = -0.4878$ .

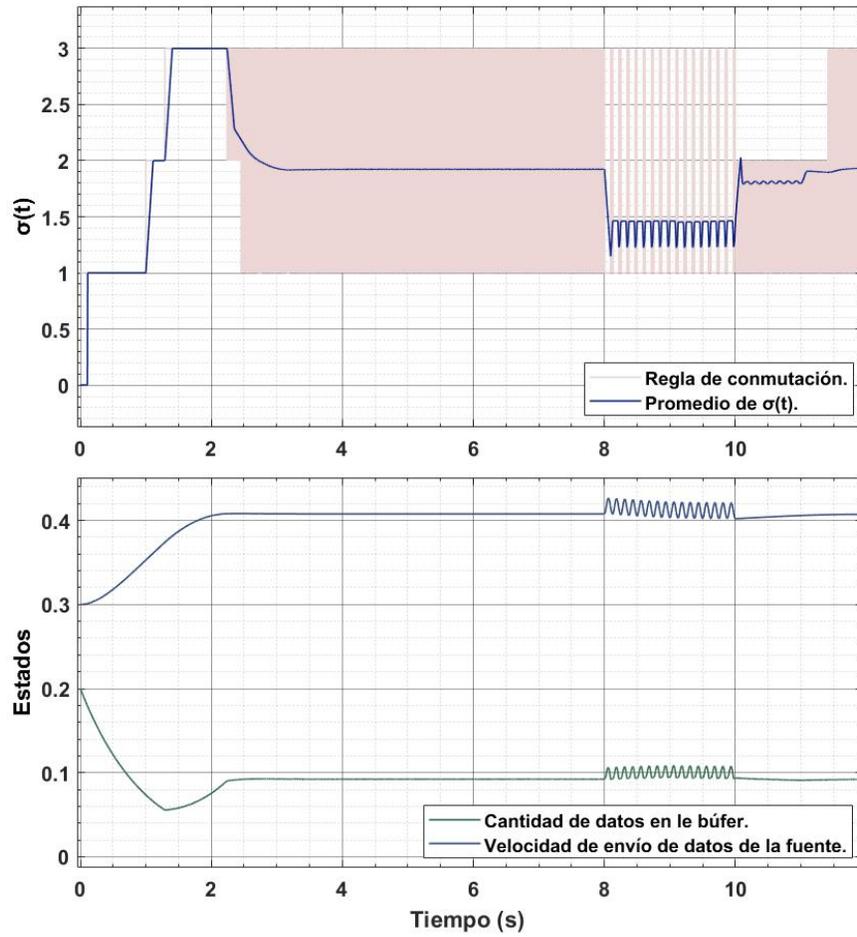


Figura 3.2: Control de congestión de una red de comunicación usando la regla de conmutación (3.11).

Tabla 3.2: Parámetros de la red de comunicación

Capacidad del enrutador, $\mu$	0.3
Retardo promedio de ida y vuelta, $r$	1s
Cantidad deseada de datos, $y_d$	0.2
Ganancia proporcional, $k_1$	1
Ganancia derivativa, $k_2$	1



# Capítulo 4

## Conclusiones

En este trabajo de tesis, mediante el uso de funcionales de Lyapunov-Krasovskii y el análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$ , se diseña una regla de conmutación para una clase de sistemas afines conmutados con un retardo que, en ausencia de perturbaciones, garantiza estabilidad global y asintótica del sistema y, en presencia de perturbaciones, asegura un índice de desempeño  $J(w) < 0$  para toda  $w \in \mathcal{L}_2$ . Estos resultados se corroboran en dos aplicaciones, la primera de ellas es la regulación del voltaje de salida en un sistema de celdas de combustible y la segunda es el control de congestión de una red de comunicación.

### 4.1. Contribuciones

En un primer acercamiento para el desarrollo de una regla de conmutación, se reproduce el análisis de estabilidad presentado en [32] —ver el Capítulo 2—, en donde se muestran los conceptos fundamentales para comprender de manera adecuada el marco teórico que envuelve el estudio de la clase de sistemas afines conmutados con retardo bajo estudio. Dicha investigación tiene como fundamento la teoría de Lyapunov-Krasovskii y el análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$ . Con base en este análisis se observó que existe una restricción sobre la combinación convexa de las matrices  $A_\lambda$  que en dicho artículo debe ser estrictamente *Hurwitz*. Para remover esta restricción, se realizó la selección de un nuevo funcional de Lyapunov-Krasovskii con el que se deriva una nueva regla de conmutación y, al mismo tiempo, se elimina la restricción sobre la combinación convexa de las matrices  $A_\lambda$  —ver el Capítulo 3—. Otro aspecto importante en el desarrollo de este trabajo de tesis es el uso del análisis de ganancia  $\mathcal{L}_2$ , el cual se presenta aquí en términos de un índice de desempeño, denotado por  $J(w)$ , que garantiza que el sistema sea internamente asintóticamente estable con la condición  $J(w) < 0$ .

Una vez concluido el desarrollo de la regla de conmutación, estos resultados son aplicados a dos problemas prácticos, mencionados de manera general en el Capítulo 1. En el primero de ellos se estudia un sistema de celdas de combustible, en donde se regula el voltaje de salida entregado por un convertidor elevador, el cual posee dos modos de operación, conectado a las terminales de una pila de celdas de combustible. Para el segundo ejemplo, se estudia el control de congestión de una red de comunicación, para este ejemplo se considera un enrutador de cuello de botella único, el cual posee tres modos de operación. Claramente, la dinámica de ambos ejemplos puede ser representada por el sistema afín conmutado con retardo estudiado en esta investigación. Usando los parámetros operacionales presentados en [32], se resuelven las desigualdades lineales matriciales (usando MATLAB<sup>®</sup> mediante SeDumi y Yalmip) que se presentan en el teorema principal enunciado en el Capítulo 3. De acuerdo con las simulaciones numéricas, en el caso del control de congestión de una red de comunicación se obtuvo un  $\alpha = 1.47$  mejorando la cota superior de la ganancia  $\mathcal{L}_2$  presentada en [32] y dada por  $\alpha = 4.0876$ . Por otro lado, el sistema de celdas de combustible es empleado en el Capítulo 3 para demostrar como la restricción *Hurwitz* sobre la combinación convexa de matrices  $A_i$  es, en efecto, eliminada bajo el enfoque propuesto en esta investigación. Con base en estos resultados obtenidos, podemos concluir que la regla de conmutación propuesta aquí presenta un mejor desempeño en comparación con la presentada en [32].

A partir de los resultados presentados en el Capítulo 3 de esta tesis, se muestra como los objetivos de la tesis planteados en el Capítulo 1 son alcanzados. En otras palabras, se garantiza la estabilidad asintótica global del sistema en el caso no perturbado y un acotamiento de las trayectorias cuando existe una perturbación. Además, se mostró que esta clase de sistemas pueden capturar dinámicas de aplicaciones reales muy diferentes, por esta razón explorar técnicas de control para esta clase de sistemas es de gran utilidad.

## 4.2. Limitaciones y trabajo a futuro

El análisis realizado en esta tesis presenta algunas limitaciones. Por ejemplo, la posible existencia de retardos en la señal de control es prácticamente inevitable y podría generar un mal funcionamiento del sistema. Este problema no se considera en este trabajo. Otra limitante de la metodología desarrollada se presenta en el caso libre de retardos; es decir, cuando  $r = 0$ . En este caso la restricción sobre la combinación convexa de las matrices  $A_\lambda$  no puede ser removida empleando las técnicas aquí descritas. Cabe mencionar que, en el caso de control de congestión de una red de comunicación, se considera un retardo fijo; sin embargo, este retardo puede ser variable en el tiempo e incluso depender de los estados del sistema o de la cantidad de datos en el búfer. Estas limitaciones podrían ser subsanadas proponiendo nuevos diseños, aplicando diferentes funcionales de Lyapunov-Krasovskii o análisis de robustez, y con ello poder ampliar el número de aplicaciones que pueden ser capturadas

por el sistema afín conmutado con retardo estudiado a lo largo de esta investigación. Otro aspecto importante es que la regla de conmutación presentada en el Capítulo 3, solo se ha probado mediante simulaciones, y sería un reto importante validar su desempeño de manera experimental.



# Apéndices



# Apéndice A

## Programación

En este apartado se presentan dos secciones; en la primera sección se muestran los códigos de programación empleados en MATLAB<sup>®</sup>, en la segunda sección se exponen los diagramas utilizados en Simulink<sup>®</sup>. Tanto los códigos de MATLAB<sup>®</sup> como los diagramas de Simulink<sup>®</sup> son empleados para la obtención de las simulaciones mostradas en los Capítulos 1, 2 y 3 de esta tesis.

### A.1. Programación en MATLAB<sup>®</sup>

Los códigos de programación empleados en MATLAB<sup>®</sup> contienen los parámetros tanto del sistema de celdas de combustible como de la red de comunicación, las matrices que describen cada uno de los modelos, además se hace el cálculo del punto de equilibrio admisible, la combinación convexa de matrices y se resuelven las desigualdades matriciales presentadas a lo largo de la tesis.

#### A.1.1. Códigos de programación del Capítulo 1

En esta sección se presentan los códigos de MATLAB<sup>®</sup> empleados para la obtención de las simulaciones presentadas en la Figura (1.5) y (1.6), cuyas matrices son descritas por las ecuaciones (1.6) y (1.8), para los modelos del sistema de celdas de combustible y la red de comunicación respectivamente.

### Código de programación A.1: Sistema de celdas de combustible.

```
1  %%% % Parámetros %%% %
2  Ein = 24;
3  paso = 0.0001
4  r = 0.00000001;
5  R = 10e-03;
6  L = 85e-06;
7  Co = 136e-06;
8  Ro = 2.7;
9  x0=0
10
11 %%% % Matrices %%% %
12 A1 = [-R/L 0;0 -1/(Ro*Co)]*10e-04;
13 A2 = [-R/L -1/L;1/Co -1/(Ro*Co)]*10e-04;
14 B1 = [0 0;0 0];
15 B2 = [0 0;0 0];
16 H1 = [1/L;0]*10e-04;
17 H2 = [0;1]*10e-04;
18 a1 = [Ein/L;0]*10e-04;
19 a2 = [Ein/L;0]*10e-04;
20 G = [0 0];
21 D = [0 0];
22 C = [0 1];
```

### Código de programación A.2: Red de comunicación.

```
1  %%% % Parámetros %%% %
2  paso = 0.0001;
3  r = 1;
4  yd = 0.2;
5  k1 = 1;
6  k2 = 1;
7  x0 = 0;
8
9  %%% % Matrices %%% %
10 A1 = [-1 0; -k1 -k2];
11 A2 = [-1 0; -k1 -k2];
12 A3 = [ 0 0; -k1 -k2];
13 B1 = [0 0; 0 0];
14 B2 = [0 1; 0 0];
15 B3 = [0 1; 0 0];
16 C1 = [1 0];
17 C2 = [1 0];
18 C3 = [1 0];
19 D1 = [0 0];
20 D2 = [0 0];
21 D3 = [0 0];
22 G1 = [0];
23 G2 = [1];
24 G3 = [1];
25 H1 = [1;1];
26 H2 = [1;0];
27 H3 = [0;1];
28 a1 = [-yd;0];
29 a2 = [-yd;0];
30 a3 = [0;0];
```

## A.1.2. Códigos de programación del Capítulo 2

En esta sección se presentan los códigos de MATLAB<sup>®</sup> empleados para la obtención de las simulaciones presentadas en la Figura (2.1) y (2.2) para los modelos del sistema de celdas de combustible y la red comunicación respectivamente.

### Código de programación A.3: Sistema de celdas de combustible.

```
1  %%%%% Parámetros %%%%%
2
3  Ein = 24;
4  r = 0;
5  R = 10e-03;
6  L = 85e-06;
7  Co = 136e-06;
8  Ro = 2.7;
9  gama = 0.01;
10 alfa = 1.7607;
11 xe=[35.9285; 48];
12
13 %%%%% Matrices %%%%%
14
15 A1 = [-R/L 0;0 -1/(Ro*Co)]*10e-04;
16 A2 = [-R/L -1/L;1/Co -1/(Ro*Co)]*10e-04;
17 B1 = [0 0;0 0];
18 B2 = [0 0;0 0];
19 H1 = [1/L;0]*10e-04;
20 H2 = [0;1]*10e-04;
21 a1 = [Ein/L;0]*10e-04;
22 a2 = [Ein/L;0]*10e-04;
23 G = [0 0];
24 D = [0 0];
25 C = [0 1];
26 I=eye(1);
27 P=[0.024654 -0.008944;-0.008944 0.039247];
28 Q=[0.002744 0.002538;0.002538 0.002851];
29
30 %%%%% Cálculo de las matrices N1, N2 y N3 %%%%%
31
32 ununo=[A1'*P+P*A1+Q+2*gama*P P*B1;B1'*P -exp(-2*gama*r)*Q];
33 dosdos=[C';D']*[C';D]';
34 trestres=[(H1'*P+G'*C)';(G'*D)'];
35 cuatrocuatro=inv([(alfa^2)*I-G'*G]);
36 cincocinco=[(H1'*P+G'*C)';(G'*D)']';
37 N1=ununo+dosdos+trestres*cuatrocuatro*cincocinco
38
39 uno=[A2'*P+P*A2+Q+2*gama*P P*B2;B2'*P -exp(-2*gama*r)*Q];
40 dos=[C';D']*[C';D]';
41 tres=[(H2'*P+G'*C)';(G'*D)'];
42 cuatro=inv([(alfa^2)*I-G'*G]);
43 cinco=[(H2'*P+G'*C)';(G'*D)']';
44 N2=uno+dos+tres*cuatro*cinco
```

## Código de programación A.4: Red de comunicación

```

1  %%%%%%%%% Parámetros %%%%%%%%%
2  paso = 0.0001;
3  alpha = 4.087500;
4  r = 1;
5  gamma = 0.01;
6  yd = 0.2;
7  k1 = 1;
8  k2 = 1;
9  x0 = 0;
10
11 %%%%%%%%% Matrices %%%%%%%%%
12 A1 = [-1      0; -k1  -k2];
13 A2 = [-1      0; -k1  -k2];
14 A3 = [ 0      0; -k1  -k2];
15 B1 = [0      0; 0      0];
16 B2 = [0      1; 0      0];
17 B3 = [0      1; 0      0];
18 C1 = [1  0];
19 C2 = [1  0];
20 C3 = [1  0];
21 D1 = [0  0];
22 D2 = [0  0];
23 D3 = [0  0];
24 G1 = [0];
25 G2 = [1];
26 G3 = [1];
27 H1 = [1;1];
28 H2 = [1;0];
29 H3 = [0;1];
30 a1 = [-yd;0];
31 a2 = [-yd;0];
32 a3 = [0;0];
33
34 %%%%%%%%% Punto de equilibrio admisible %%%%%%%%%
35 lambda = [0.4  0.3  0.3]
36 xe = -((lambda(1)*(A1+B1))+lambda(2)*(A2+B2)+lambda(3)*(A3+B3))^-1*(lambda(1)*a2+lambda(2)*a3)
37 b1 = (A1+B1)*xe+a1
38 b2 = (A2+B2)*xe+a2
39 b3 = (A3+B3)*xe+a3
40 P = [17.651302  3.252260; 3.252260  15.411501]
41 Q = [3.928106  4.867708; 4.867708  17.303440]
42 PP1 = P
43 PP2 = Q
44
45 %%%%%%%%% Cálculo de las matrices N1, N2 y N3 %%%%%%%%%
46 N1=[A1'*PP1+PP1*A1+PP2+2*gamma*PP1      PP1*B1;...
47      B1'*PP1                                -exp(-2*gamma*r)*PP2 ]+...
48      [C1';D1']*[C1';D1']'+...
49      [(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)']/(alpha^2*eye(1)-G1'*G1)*[(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)']'
50 N2=[A2'*PP1+PP1*A2+PP2+2*gamma*PP1      PP1*B2;...
51      B2'*PP1                                -exp(-2*gamma*r)*PP2 ]+...
52      [C2';D2']*[C2';D2']'+...
53      [(H2'*PP1+G2'*C2)';(G2'*D2)']/(alpha^2*eye(1)-G2'*G2)*[(H2'*PP1+G2'*C2)';(G2'*D2)']'
54 N3=[A3'*PP1+PP1*A3+PP2+2*gamma*PP1      PP1*B3;...
55      B3'*PP1                                -exp(-2*gamma*r)*PP2 ]+...
56      [C3';D3']*[C3';D3']'+...
57      [(H3'*PP1+G3'*C3)';(G3'*D3)']/(alpha^2*eye(1)-G3'*G3)*[(H3'*PP1+G3'*C3)';(G3'*D3)']'

```

### A.1.3. Códigos de programación del Capítulo 3

En esta sección se presentan los códigos de MATLAB<sup>®</sup> empleados para la obtención de las simulaciones presentadas en la Figura (3.1) y (3.2) para los modelos del sistema de celdas de combustible y la red comunicación respectivamente.

Código de programación A.5: Sistema de celdas de combustible.

```
1  %%%% Parámetros %%%%
2  paso=0.0001
3  alpha = 1.999;
4  r      = 0.001;
5  Ein = 24;
6  R = 10e-03;
7  L = 85e-06;
8  Co = 136e-06;
9  Ro = 2.7;
10 x0=[0;0]
11 p = pi
12
13 %%%% Matrices %%%%
14 A1 = [0      0; 0      -1/(Ro*Co)]*10e-04;
15 A2 = [0      -1/L; 0      -1/(Ro*Co)]*10e-04;
16 B1 = [-R/L   0; 0      0]*10e-04;
17 B2 = [-R/L   0; 1/Co   0]*10e-04;
18 C1 = [0  1];
19 C2 = [0  1];
20 D1 = [0  0];
21 D2 = [0  0];
22 G1 = [0];
23 G2 = [0];
24 H1 = [1/L;0]*10e-04;
25 H2 = [0;1]*10e-04;
26 a1 = [Ein/L;0]*10e-04;
27 a2 = [Ein/L;0]*10e-04;
28
29 %%%% Punto de equilibrio admisible %%%%
30 xe=[35.928514477831250; 47.999999624799976];
31 b1=(A1+B1)*xe+a1
32 b2=(A2+B2)*xe+a2
33 cero=[0;0]
34 f=[-10; -36]
35 Aeq = [1  1;b1  b2]
36 beq = [1;cero]
37 A = [0  0;0  0];
38 b = [0;0];
39 lb = [0,0];
40 ub = [1,1];
41 options = optimoptions('linprog','Algorithm','interior-point-legacy','TolCon',1e-07)
42 [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)
43 lambda = x;
44
45 %%%% Combinación convexa de matrices %%%%
46 A1 = lambda(1)*A1+lambda(2)*A2;
47 B1 = lambda(1)*B1+lambda(2)*B2;
48 C1 = lambda(1)*C1+lambda(2)*C2;
49 D1 = lambda(1)*D1+lambda(2)*D2;
50 G1 = lambda(1)*G1+lambda(2)*G2;
51 H1 = lambda(1)*H1+lambda(2)*H2;
```

```

52 a1 = lambda(1)*a1+lambda(2)*a2;
53
54 %%% LMI's %%%
55 n=size(A1,1);
56 P1=sdpvar(n,n,'symmetric');
57 P2=sdpvar(n,n,'full');
58 P3=sdpvar(n,n,'symmetric');
59 S=sdpvar(n,n,'symmetric');
60 R=sdpvar(n,n,'symmetric');
61 h=[P1 P2;P2' P3+(r^1)*S];
62
63 N1=[P1*A1+A1'*P1+P2+P2'+r*R+S   P1*B1-P2   r*(A1'*P2+P3);...
64     B1'*P1-P2'                   -S           r*(B1'*P2-P3);...
65     r*(P2'*A1+P3)                 r*(P2'*B1-P3)   (-r)*R ]+...
66     [C1 D1 zeros(1,n)]*[C1 D1 zeros(1,n)]+...
67     [(H1'*P1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*P2)']
68     /(alpha^2*eye(1)-G1'*G1)
69     *[(H1'*P1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*P2)'];
70
71 threshold=0;
72 F=[h>=threshold,N1<=threshold,S>=threshold,R>=threshold];
73 solvesdp(F);
74 optimize(F);
75 sol = optimize(F);
76
77 if sol.problem == 0
78 PP1=double(P1)
79 PP2=double(P2)
80 PP3=double(P3)
81 SS=double(S)
82 RR=double(R)
83
84 N11=[PP1*A1+A1'*PP1+PP2+PP2'+r*RR+SS PP1*B1-PP2 r*(A1'*PP2+PP3);...
85      B1'*PP1-PP2'                   -SS           r*(B1'*PP2-PP3);...
86      r*(PP2'*A1+PP3)                 r*(PP2'*B1-PP3)   (-r)*RR ]+...
87      [C1 D1 zeros(1,n)]*[C1 D1 zeros(1,n)]+...
88      [(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*PP2)']
89      *1/(alpha^2*eye(1)-G1'*G1)
90      *[(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*PP2)'];
91 else
92 disp('Gatito!');
93 sol.info
94 yalmiperror(sol.problem)
95 end
96
97 %%% Cálculo de las matrices NI y N2 %%%
98 N1=[PP1*A1+A1'*PP1+PP2+PP2'+r*RR+SS   PP1*B1-PP2   r*(A1'*PP2+PP3);...
99     B1'*PP1-PP2'                   -SS           r*(B1'*PP2-PP3);...
100    r*(PP2'*A1+PP3)                 r*(PP2'*B1-PP3)   (-r)*RR ]+...
101    [C1 D1 zeros(1,n)]*[C1 D1 zeros(1,n)]+...
102    [(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*PP2)']
103    /(alpha^2*eye(1)-G1'*G1)
104    *[(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*PP2)'];
105
106 N2=[PP1*A2+A2'*PP1+PP2+PP2'+r*RR+SS   PP1*B2-PP2   r*(A2'*PP2+PP3);...
107     B2'*PP1-PP2'                   -SS           r*(B2'*PP2-PP3);...
108     r*(PP2'*A2+PP3)                 r*(PP2'*B2-PP3)   (-r)*RR ]+...
109     [C2 D2 zeros(1,n)]*[C2 D2 zeros(1,n)]+...
110     [(H2'*PP1+G2'*C2)';(G2'*D2)';r*(H2'*PP2)']
111     /(alpha^2*eye(1)-G2'*G2)
112     *[(H2'*PP1+G2'*C2)';(G2'*D2)';r*(H2'*PP2)'];

```

## Código de programación A.6: Red de comunicación.

```

1  %%%%% Parametros %%%%%
2  paso=0.0001;
3  alpha=1.69999999;
4  r=1;
5  cr=0.3;
6  yd=0.2;
7  k1=1;
8  k2=1;
9
10 %%%%% Matrices %%%%%
11 A1 = [-1    0; -k1  -k2];
12 A2 = [-1    0; -k1  -k2];
13 A3 = [ 0    0; -k1  -k2];
14 B1 = [0  0; 0  0];
15 B2 = [0  1; 0  0];
16 B3 = [0  1; 0  0];
17 C1 = [1  0];
18 C2 = [1  0];
19 C3 = [1  0];
20 D1 = [0  0];
21 D2 = [0  0];
22 D3 = [0  0];
23 G1 = [0];
24 G2 = [1];
25 G3 = [1];
26 H1 = [1;1];
27 H2 = [1;0];
28 H3 = [0;1];
29 a1 = [-yd;0];
30 a2 = [-yd;0];
31 a3 = [0;0];
32
33 %%%%% Punto de equilibrio admisible %%%%%
34 lambda = [0.4 0.3 0.3]
35 xe = -((lambda(1)*(A1+B1))+lambda(2)*(A2+B2)+
36 lambda(3)*(A3+B3))^-1*(lambda(1)*a2+lambda(2)*a2+lambda(3)*a3)
37 b1=(A1+B1)*xe+a1
38 b2=(A2+B2)*xe+a2
39 b3=(A3+B3)*xe+a3
40
41 %%%%% Combinación convexa de matrices %%%%%
42 A1 = lambda(1)*A1+lambda(2)*A2+lambda(3)*A3;
43 B1 = lambda(1)*B1+lambda(2)*B2+lambda(3)*B3;
44 C1 = lambda(1)*C1+lambda(2)*C2+lambda(3)*C3;
45 D1 = lambda(1)*D1+lambda(2)*D2+lambda(3)*D3;
46 G1 = lambda(1)*G1+lambda(2)*G2+lambda(3)*G3;
47 H1 = lambda(1)*H1+lambda(2)*H2+lambda(3)*H3;
48 a1 = lambda(1)*a1+lambda(2)*a2+lambda(3)*a3;
49
50 %%%%% LMIs %%%%%
51 n=size(A1,1);
52 P1=sdpvar(n,n,'symmetric');
53 P2=sdpvar(n,n,'full');
54 P3=sdpvar(n,n,'symmetric');
55 S=sdpvar(n,n,'symmetric');
56 R=sdpvar(n,n,'symmetric');
57 h=[P1 P2;P2' P3+(r^-1)*S];
58 N1=[P1*A1+A1'*P1+P2+P2'+r*R+S    P1*B1-P2    r*(A1'*P2+P3);...
59     B1'*P1-P2'                    -S          r*(B1'*P2-P3);...
60     r*(P2'*A1+P3)                r*(P2'*B1-P3)    (-r)*R ]+...

```

```

61     [C1 D1 zeros(1,n)]'*[C1 D1 zeros(1,n)]+...
62     [(H1'*P1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*P2)']
63     /(alpha^2*eye(1)-G1'*G1)*
64     [(H1'*P1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*P2)']';
65
66 threshold = 0.000000000001;
67 F=[h>=threshold,N1<=threshold,S>=threshold,R>=threshold];
68 solvesdp(F);
69 optimize(F);
70 sol = optimize(F);
71
72 if sol.problem == 0
73 PP1=double(P1)
74 PP2=double(P2)
75 PP3=double(P3)
76 SS=double(S)
77 RR=double(R)
78
79 N11=[PP1*A1+A1'*PP1+PP2+PP2'+r*RR+SS PP1*B1-PP2 r*(A1'*PP2+PP3);...
80      B1'*PP1-PP2' -SS r*(B1'*PP2-PP3);...
81      r*(PP2'*A1+PP3) r*(PP2'*B1-PP3) (-r)*RR ]+...
82      [C1 D1 zeros(1,n)]'*[C1 D1 zeros(1,n)]+...
83      [(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*PP2)']
84      *1/(alpha^2*eye(1)-G1'*G1)
85      *[(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*PP2)']'
86
87 else
88 disp('Gatito!');
89 sol.info
90 yalmiperror(sol.problem)
91 end
92
93 %%% %%% Cálculo de las matrices N1, N2 y N3 %%% %%%
94 N1=[PP1*A1+A1'*PP1+PP2+PP2'+r*RR+SS PP1*B1-PP2 r*(A1'*PP2+PP3);...
95     B1'*PP1-PP2' -SS r*(B1'*PP2-PP3);...
96     r*(PP2'*A1+PP3) r*(PP2'*B1-PP3) (-r)*RR ]+...
97     [C1 D1 zeros(1,n)]'*[C1 D1 zeros(1,n)]+...
98     [(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*PP2)']
99     /(alpha^2*eye(1)-G1'*G1)
100     *[(H1'*PP1+G1'*C1)';(G1'*D1)';r*(H1'*PP2)']'
101
102 N2=[PP1*A2+A2'*PP1+PP2+PP2'+r*RR+SS PP1*B2-PP2 r*(A2'*PP2+PP3);...
103     B2'*PP1-PP2' -SS r*(B2'*PP2-PP3);...
104     r*(PP2'*A2+PP3) r*(PP2'*B2-PP3) (-r)*RR ]+...
105     [C2 D2 zeros(1,n)]'*[C2 D2 zeros(1,n)]+...
106     [(H2'*PP1+G2'*C2)';(G2'*D2)';r*(H2'*PP2)']
107     /(alpha^2*eye(1)-G2'*G2)
108     *[(H2'*PP1+G2'*C2)';(G2'*D2)';r*(H2'*PP2)']'
109
110 N3=[PP1*A3+A3'*PP1+PP2+PP2'+r*RR+SS PP1*B3-PP2 r*(A3'*PP2+PP3);...
111     B3'*PP1-PP2' -SS r*(B3'*PP2-PP3);...
112     r*(PP2'*A3+PP3) r*(PP2'*B3-PP3) (-r)*RR ]+...
113     [C3 D3 zeros(1,n)]'*[C3 D3 zeros(1,n)]+...
114     [(H3'*PP1+G3'*C3)';(G3'*D3)';r*(H3'*PP2)']
115     /(alpha^2*eye(1)-G3'*G3)
116     *[(H3'*PP1+G3'*C3)';(G3'*D3)';r*(H3'*PP2)']'

```

## A.2. Programación en Simulink®

En esta sección se presentan los diagramas utilizados para la implementación de la regla de conmutación mostrada en el Capítulo 2 y 3 para cada uno de los modelos presentados en el Capítulo 1, y cuyos valores son tomados de los códigos de programación realizados en MATLAB®.

### A.2.1. Diagramas de Simulink® del Capítulo 1

En esta sección se presentan los diagramas en Simulink®, para los modelos del sistema de celdas de combustible y la red comunicación, estos diagramas son empleados para la obtención de las simulaciones presentadas en la Figura 1.5 y 1.6.

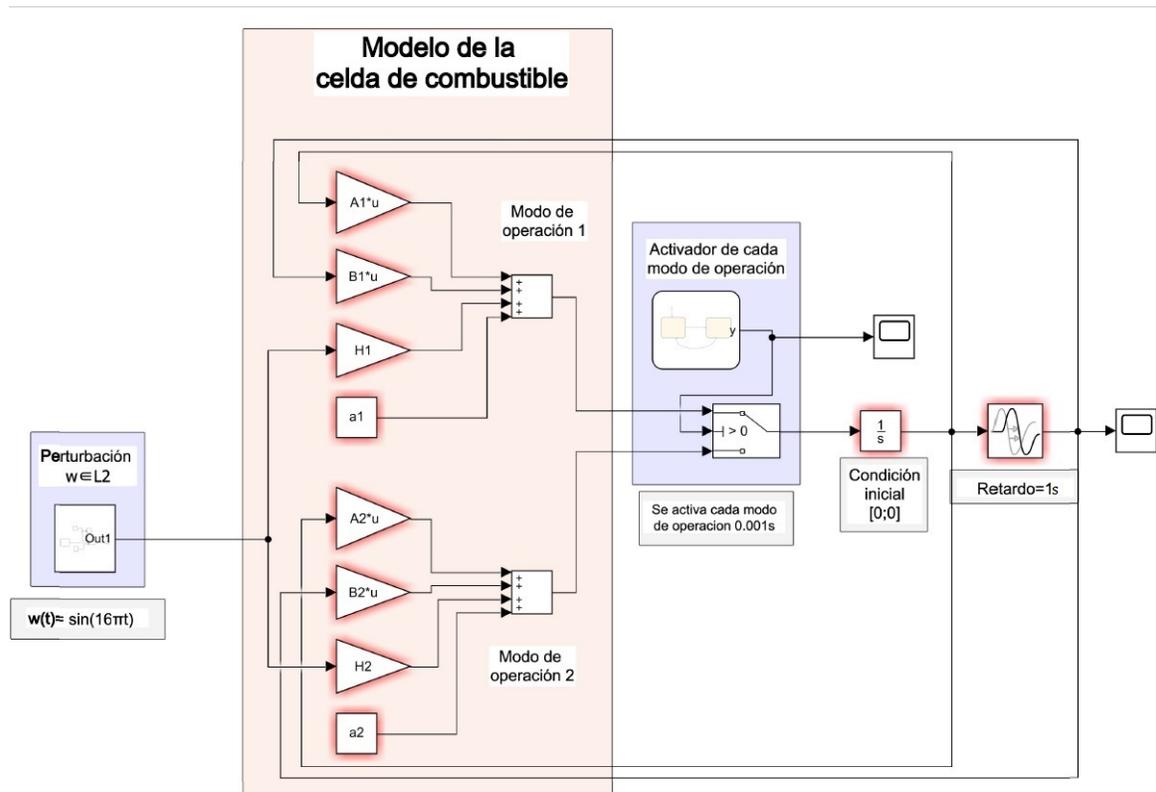


Figura A.1: Diagrama de la simulación del modelo de celdas de combustible cuyo resultado es presentado en la Figura 1.5 del Capítulo 1.

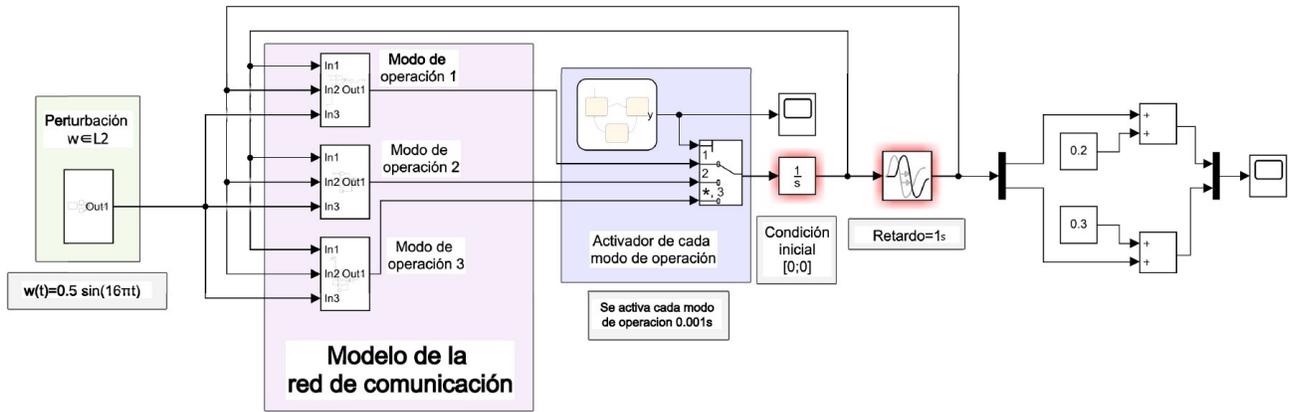


Figura A.2: Diagrama de la simulación del modelo de la red de comunicación cuyo resultado es presentado en la Figura 1.6 del Capítulo 1.

## A.2.2. Diagramas de Simulink® del Capítulo 2

En esta sección se presentan los diagramas de Simulink®, para los modelos del sistema de celdas de combustible y la red comunicación empleados para la obtención de las simulaciones presentadas en la Figura 2.1 y 2.2 respectivamente.

### Sistema de celdas de combustible

En la primera Figura A.3 se hace un avistamiento general del diagrama empleado para la obtención de la simulación de la Figura 2.1 que corresponde al sistema de celdas de combustible, este diagrama se divide en cuatro secciones generales principales que son; el modelo de la celda de combustible, la regla de conmutación, la perturbación y el índice de desempeño, y cada una de estas secciones se describen a detalle en las subsecuentes Figuras A.4, A.5 y A.6.

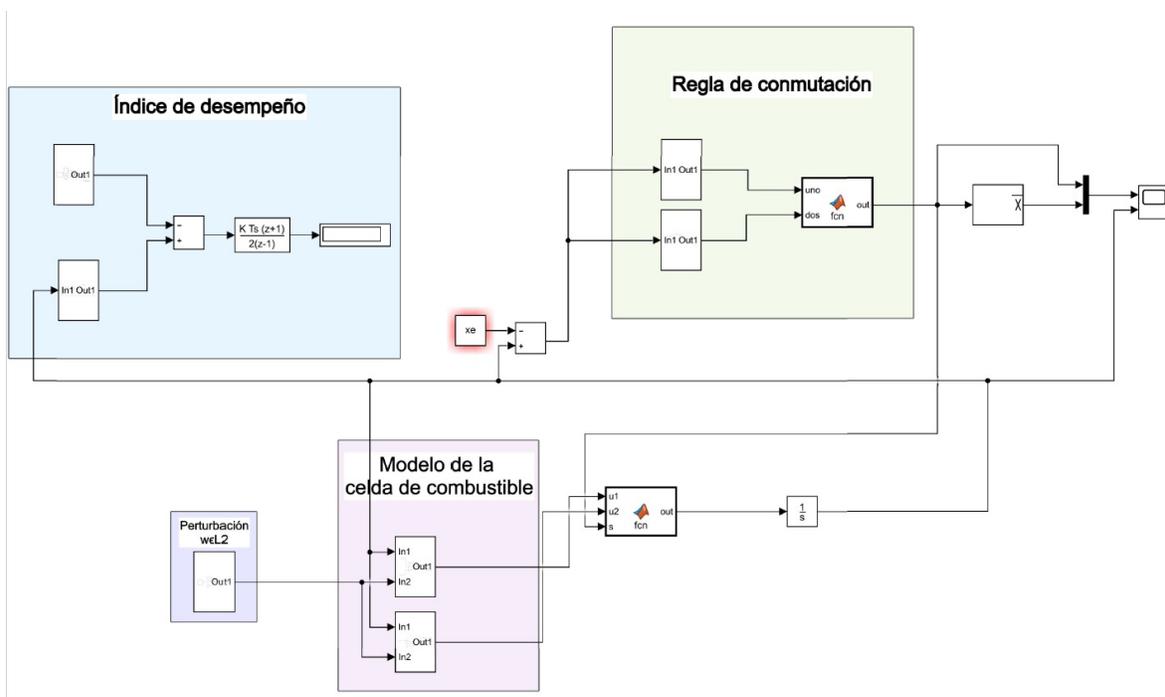


Figura A.3: Diagrama de la simulación del modelo del sistema de celdas de combustible cuyo resultado es presentado en la Figura 2.1 del Capítulo 2.

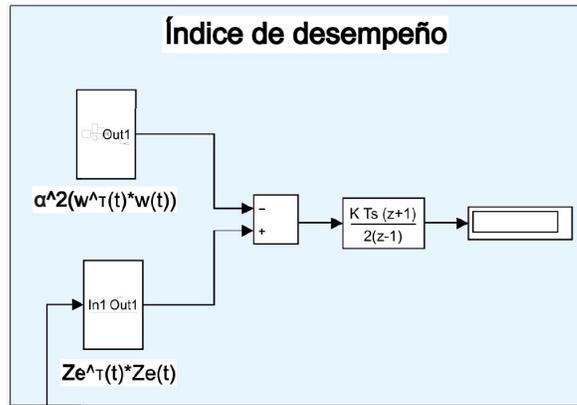


Figura A.4: Diagrama con el que se realiza el cálculo del índice de desempeño el cual corresponde a la ecuación (2.12) del Capítulo 2.

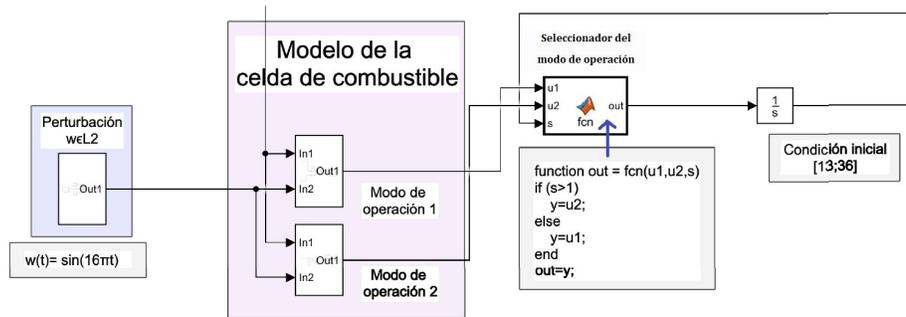


Figura A.5: Diagrama donde aparece la perturbación  $w \in \mathcal{L}_2$ , así como el modelo de la celda de combustible.

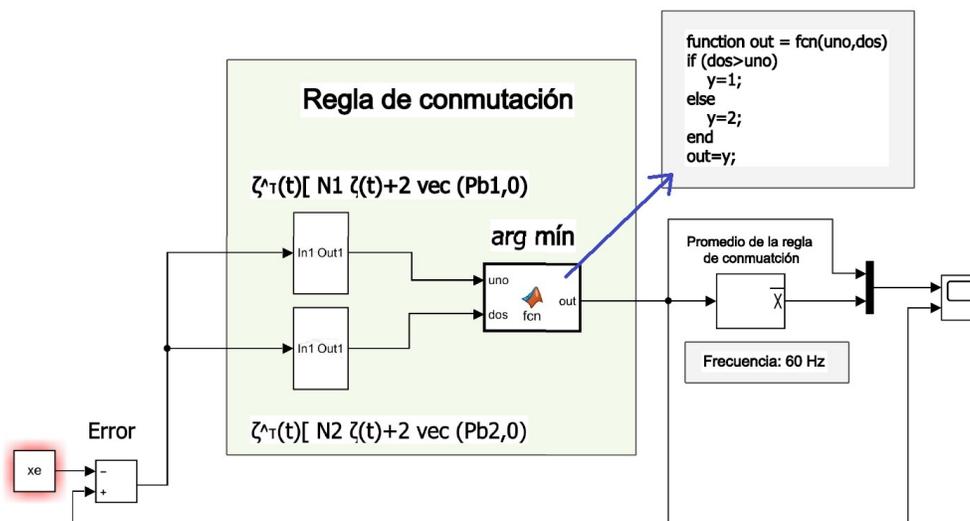


Figura A.6: Diagrama de la implementación de la regla de conmutación la cual corresponde a la ecuación (2.19).

## Red de comunicación

En la primera Figura A.7 se hace un avistamiento general del diagrama empleado para la obtención de la simulación de la Figura 2.2 que corresponde a la red de comunicación, este diagrama se divide en cuatro secciones generales principales que son; el modelo de la celda de combustible, la regla de conmutación, la perturbación y el índice de desempeño, y cada una de estas secciones se describen a detalle en las subsecuentes Figuras A.8, A.9 y A.10.

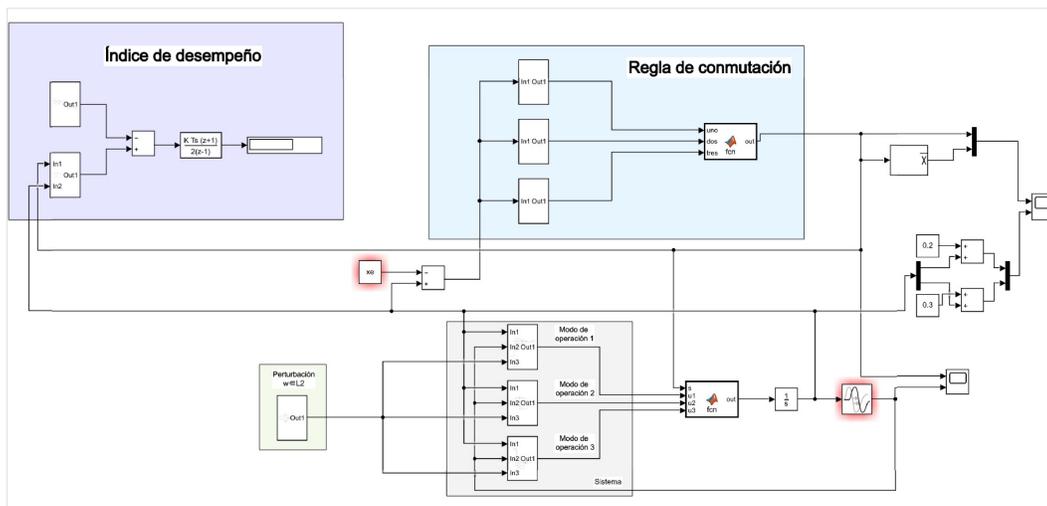


Figura A.7: Diagrama de la simulación del modelo de la red de comunicación cuyo resultado es presentado en la Figura 2.2 del Capítulo 2.

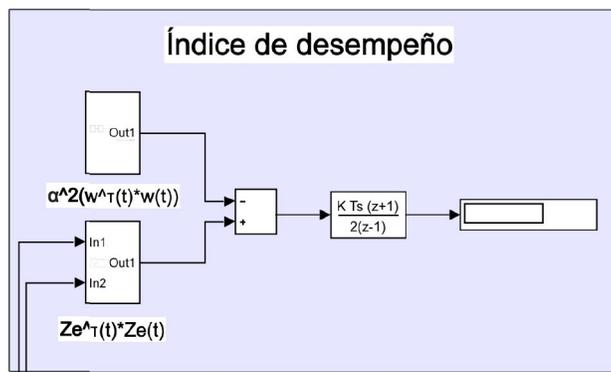


Figura A.8: Diagrama con el que se realiza el cálculo del índice de desempeño el cual corresponde a la ecuación (2.12) del Capítulo 2.

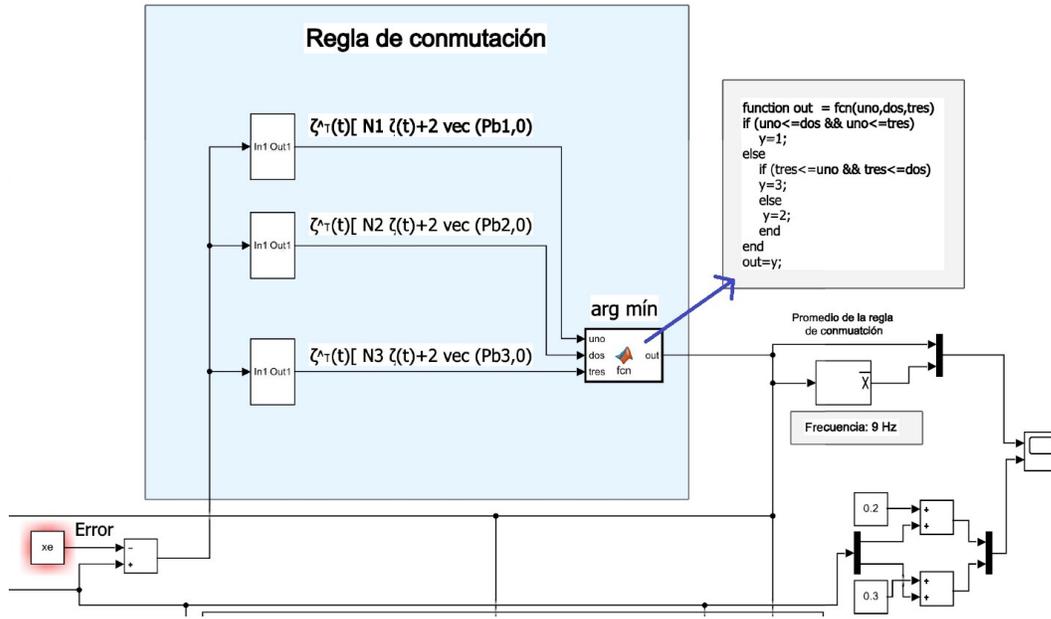


Figura A.9: Diagrama de la implementación de la regla de conmutación la cual corresponde a la ecuación (2.19).

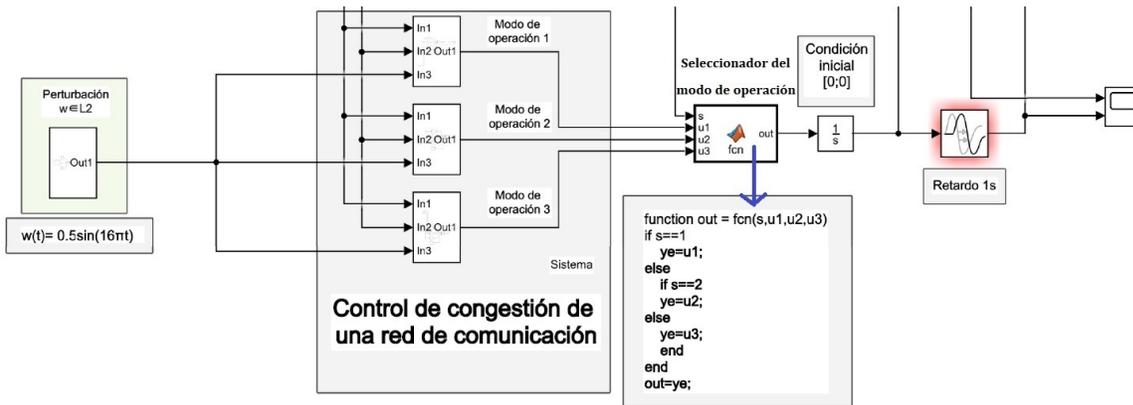


Figura A.10: Diagrama donde aparece la perturbación  $w \in \mathcal{L}_2$ , así como el modelo de la red de comunicación .

### A.2.3. Diagramas de Simulink® del Capítulo 3

En esta sección se presentan los diagramas de Simulink®, para los modelos del sistema de celdas de combustible y la red comunicación empleados para la obtención de las simulaciones presentadas en la Figura 3.1 y 3.2 respectivamente.

#### Sistema de celdas de combustible

En la primera Figura A.11 se hace un avistamiento general del diagrama empleado para la obtención de la simulación de la Figura 3.1 que corresponde al sistema de celdas de combustible, este diagrama se divide en cuatro secciones generales principales que son; el modelo de la celda de combustible, la regla de conmutación, la perturbación y el índice de desempeño, y cada una de estas secciones se describen a detalle en las subsecuentes Figuras A.12 y A.13.

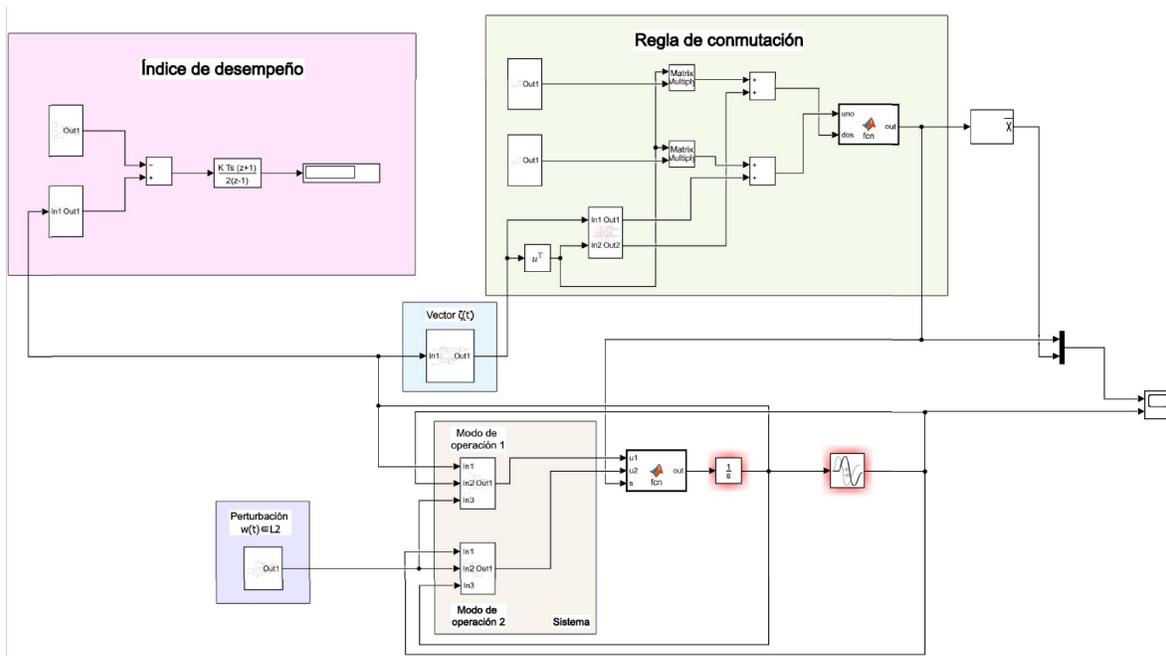


Figura A.11: Diagrama de la simulación del modelo de la red de comunicación cuyo resultado es presentado en la Figura 3.1 del Capítulo 3.

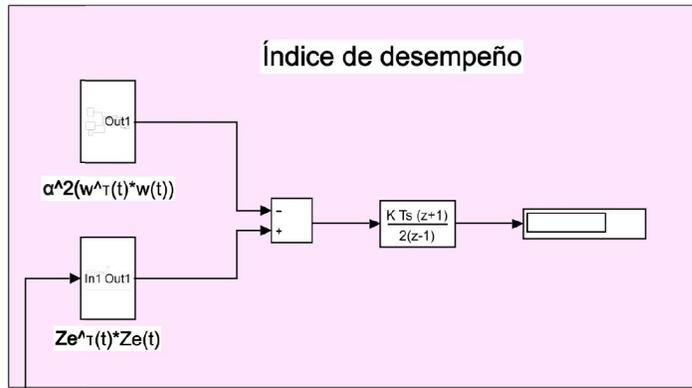


Figura A.12: Diagrama con el que se realiza el cálculo del índice de desempeño el cual corresponde a la ecuación (2.12) del Capítulo 2.

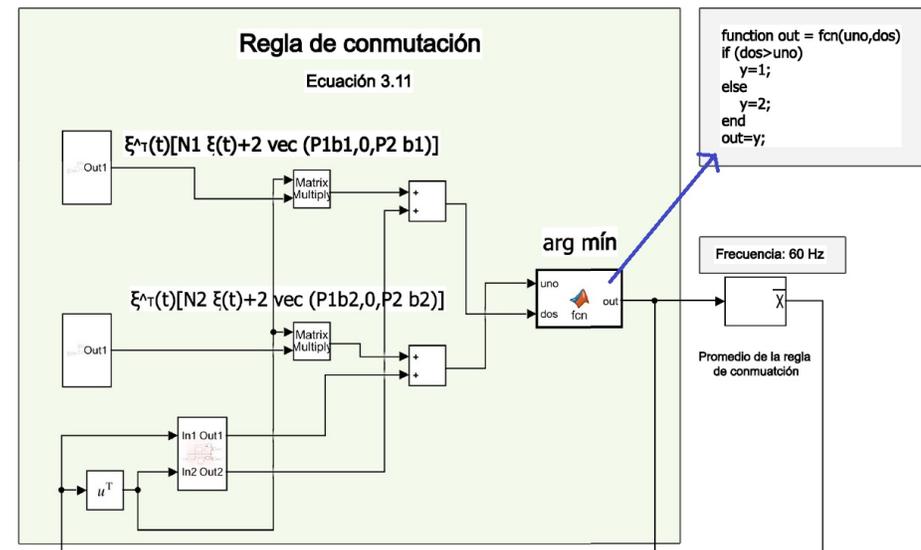


Figura A.13: Diagrama de la implementación de la regla de conmutación la cual corresponde a la ecuación (3.11).

### Red de comunicación

En la primera Figura A.14 se hace un avistamiento general del diagrama empleado para la obtención de la simulación de la Figura 3.2 que corresponde a la red de comunicación, este diagrama se divide en cuatro secciones generales principales que son; el modelo de la celda de combustible, la regla de conmutación, la perturbación y el índice de desempeño, y cada una de estas secciones se describen a detalle en las subsecuentes Figuras A.15, A.16 y A.17.

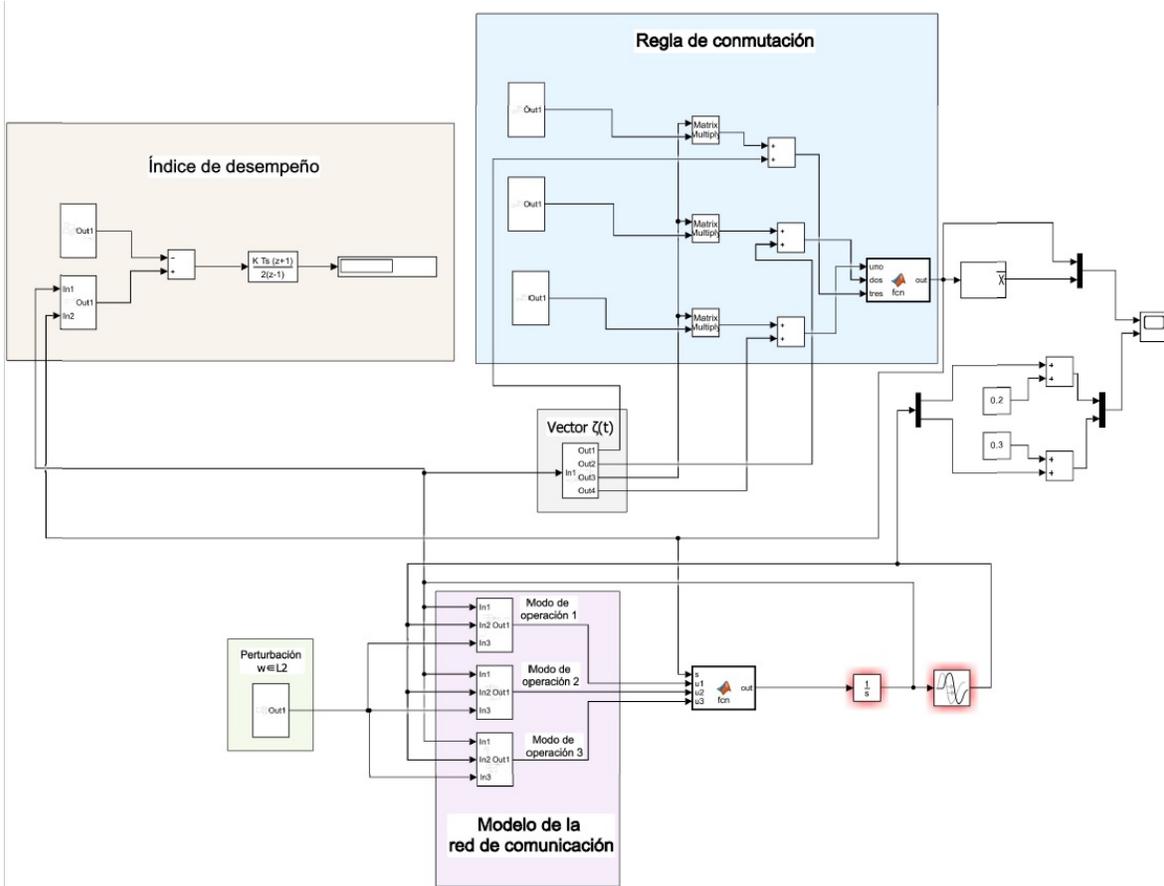


Figura A.14: Diagrama de la simulación del modelo de la red de comunicación cuyo resultado es presentado en la Figura 3.2 del Capítulo 3.

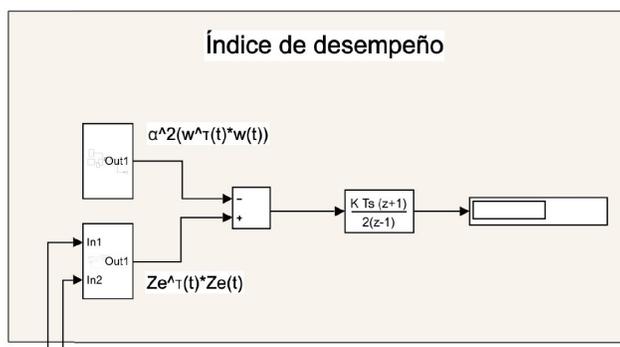


Figura A.15: Diagrama con el que se realiza el cálculo del índice de desempeño el cual corresponde a la ecuación (2.12) del Capítulo 2.

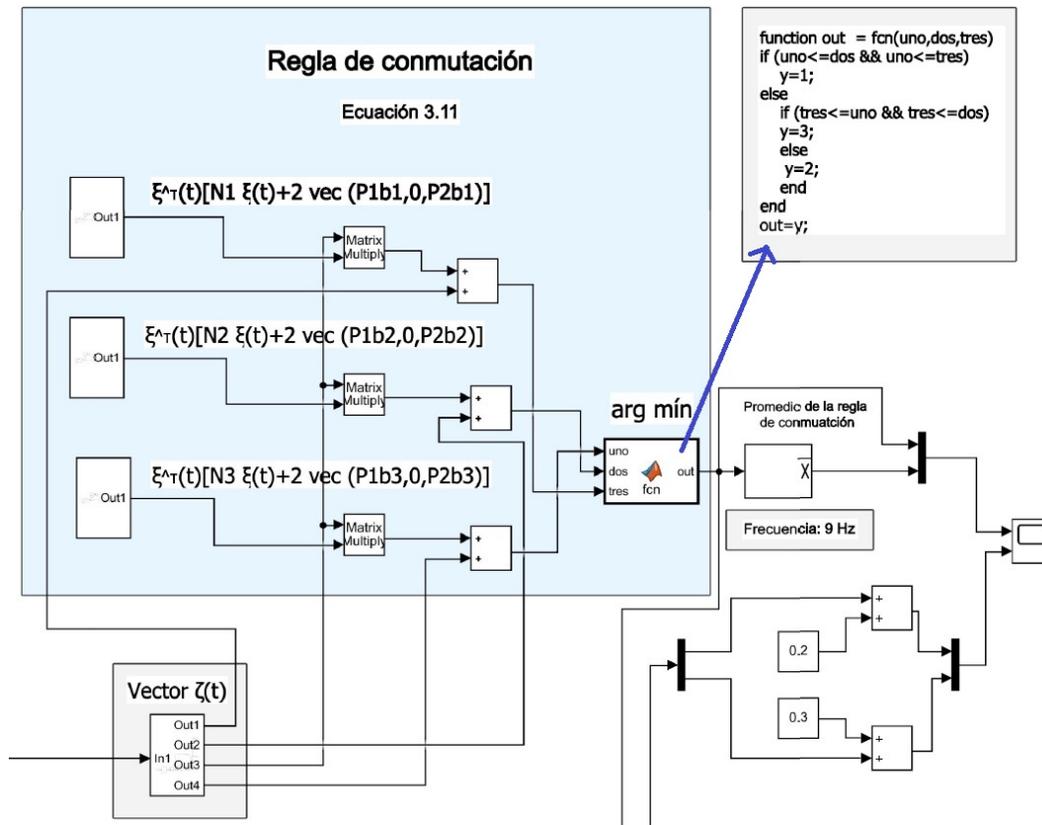


Figura A.16: Diagrama de la implementación de la regla de conmutación la cual corresponde a la ecuación (3.11).

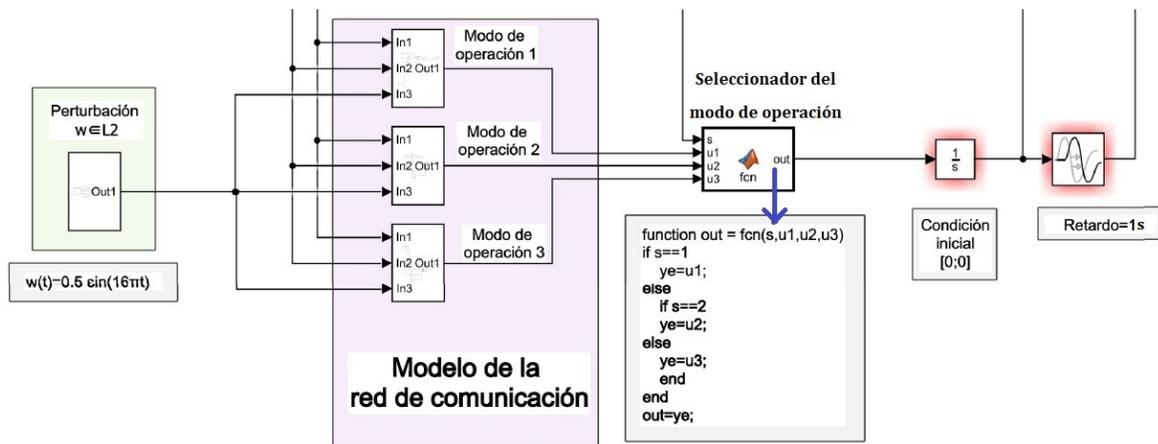


Figura A.17: Diagrama donde aparece la perturbación  $w \in \mathcal{L}_2$ , así como el modelo de la red de comunicación .

# Bibliografía

- [1] A. Afanasyev, N. Tilley, P. Reiher, and L. Kleinrock. Host-to-Host Congestion Control for TCP. *IEEE Communications Surveys Tutorials*, 12(3):304–342, 2010.
- [2] M. Aliyu. *Nonlinear  $H_\infty$ -Control, Hamiltonian Systems and Hamilton-Jacobi Equations*. CRC Press, 2011.
- [3] N. Baleghi and M. Shafiei. Stability analysis for discrete-time switched systems with uncertain time delay and affine parametric uncertainties. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(4):1150–1157, 2018.
- [4] F. Barbir. *PEM Fuel Cells: Theory and Practice*. Elsevier Science, 2013.
- [5] K. Burke. *Current Perspective on Hydrogen and Fuel Cells*, volume 4, pages 29–63. 12 2012.
- [6] B. Chen. *Robust and  $H_\infty$  Control*. Communications and Control Engineering. Springer London, 2013.
- [7] L. Cheng, X. Xu, Y. Xue, and H. Zhang. Stability analysis of switched systems with all subsystems unstable: A matrix polynomial approach. *ISA Transactions*, 114:99–105, 01 2021.
- [8] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, F. S. Garcia, and J. A. Pomilio. Switched affine systems control design with application to DC–DC converters. *IET control theory & applications*, (7):1201–1210, 2010.
- [9] A. Domański, J. Domańska, M. Pagano, and T. Czachórski. The Fluid Flow Approximation of the TCP Vegas and Reno Congestion Control Mechanism. pages 193–200, 09 2016.
- [10] J.-G. Dong. Stability analysis of switched systems with general nonlinear disturbances. *Mathematical and Computer Modelling*, 58(7):1563–1567, 2013.

- [11] F. W. Fairman. *Linear control theory: the state space approach*. John Wiley & Sons, 1998.
- [12] C. Fiter and E. Fridman. Stability of piecewise affine systems with state-dependent delay, and application to congestion control. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1572–1577, 2013.
- [13] F. Fitzek, F. Granelli, and P. Seeling. *Computing in Communication Networks: From Theory to Practice*. Academic Press, 2020.
- [14] E. Fridman. *Introduction to Time-Delay Systems*. 10 2014.
- [15] F. S. Garcia, J. A. Pomilio, G. S. Deaecto, and J. C. Geromel. Analysis and control of DC-DC converters based on Lyapunov Stability Theory. In *2009 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, pages 2920–2927, 2009.
- [16] S. Golestani and S. Bhattacharyya. A class of end-to-end congestion control algorithms for the Internet. In *Proceedings Sixth International Conference on Network Protocols (Cat. No.98TB100256)*, pages 137–150, 1998.
- [17] K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov. *Stability of Time-Delay Systems*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [18] J. Hespanha and A. Morse. Stability of switched systems with average dwell-time. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*, volume 3, pages 2655–2660 vol.3, 1999.
- [19] C. Houmkozlis and G. Rovithakis. *End-to-End Adaptive Congestion Control in TCP/IP Networks*. Automation and Control Engineering. Taylor & Francis, 2017.
- [20] T. Issariyakul and E. Hossain. *Introduction to Network Simulator NS2*. Springer US, 2011.
- [21] M. K.-J. Johansson. *Piecewise linear control systems: a computational approach*, volume 284. Springer, 2003.
- [22] L. Levaggi. Sliding modes in banach spaces. *Differential and Integral Equations*, 15(2):167–189, 2002.
- [23] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, 2003.
- [24] X. Lin, H. Du, and S. Li. Finite-time boundedness and  $L_2$ -gain analysis for switched delay systems with norm-bounded disturbance. *Applied Mathematics and Computation*,

217(12):5982–5993, 2011.

- [25] J. Lofberg. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*, pages 284–289. IEEE, 2004.
- [26] M. Mahmoud. *Switched Time-Delay Systems: Stability and Control*. Springer US, 2010.
- [27] J. L. Mancilla-Aguilar. A condition for the stability of switched nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11):2077–2079, 2000.
- [28] M. Margaliot. Stability analysis of switched systems using variational principles: An introduction. *Automatica*, 42(12):2059–2077, 2006.
- [29] M. Newman. *Networks: An Introduction*. Oxford university press, 2018.
- [30] P. Pepe. On Liapunov-Krasovskii functionals under Carathéodory conditions. *Automatica*, 43(4):701–706, 2007.
- [31] A. K. Puerto Piña. *Análisis de estabilidad de controladores PD-AQM en modelos con retardo de redes TCP*. Tesis de doctorado, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, 2021.
- [32] A. Ramírez, T. Sanchez, and J. Leyva.  $H_\infty$  Control of Switched Affine Systems with Single Delay: a Lyapunov-Krasovskii Approach with Practical Applications. *2020 17th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, Noviembre 2020.
- [33] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Higher Mathematics Series. McGraw-Hill Education, 1987.
- [34] T. Sanchez, A. Polyakov, E. Fridman, and L. Hetel. A Switching Controller for a Class of MIMO Bilinear Systems With Time Delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(5):2250–2256, 2020.
- [35] D. C. Smith. *High Frequency Measurements and Noise in Electronic Circuits*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [36] H. Song, L. Yu, D. Zhang, and W.-A. Zhang. Finite-time  $H_\infty$  control for a class of discrete-time switched time-delay systems with quantized feedback. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12):4802–4814, 2012.
- [37] B. Sorensen and G. Spazzafumo. Hydrogen and fuel cells: Emerging technologies and

- applications. Academic Press, 2018.
- [38] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, 11(1-4):625–653, 1999.
- [39] Y. Tian, Y. Cai, Y. Sun, and H. Gao. Finite-time stability for impulsive switched delay systems with nonlinear disturbances. *Journal of the Franklin Institute*, 353(14):3578–3594, 2016.
- [40] S. Varma. *Internet Congestion Control*. Elsevier Science, 2015.
- [41] E. I. Vazquez-Oviedo, M. G. Ortiz-Lopez, L. H. Diaz-Saldierna, and J. Leyva-Ramos. Modeling Study of a Combined Fuel-Cell Stack/Switch Mode DC-DC Converter. *Journal of Fuel Cell Science and Technology*, 11(1), 11 2013.
- [42] D. Verma. *Network Science for Military Coalition Operations: Information Exchange and Interaction: Information Exchange and Interaction*. Information Science Reference, 2010.
- [43] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, and A. Michel. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach. In *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, volume 32, pages 1055–1061, 2001.
- [44] Y. Zhang, X. Liu, and X. Shen. Stability of switched systems with time delay. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 1(1):44–58, 2007.