



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

**Diseño de emuladores híbridos con aplicación en circuitos  
caóticos.**

Tesis que presenta

**Eduardo Elpidio Rodríguez Martínez**

Para obtener el grado de

**Maestro en Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

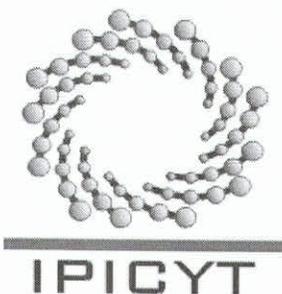
San Luis Potosí, S.L.P., Mayo de 2022

# **Constancia de aprobación de la tesis**

# Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con No. de registro: 1007026 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

La Secretaría Académica del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 048 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 10 días del mes de junio del año 2022, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Jesús Leyva Ramos</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Isaac Campos Cantón</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>
<b>Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Eduardo Elpidio Rodríguez Martínez**

sobre la Tesis intitulada:

*Diseño de emuladores híbridos con aplicación en circuitos caóticos*

que se desarrolló bajo la dirección de

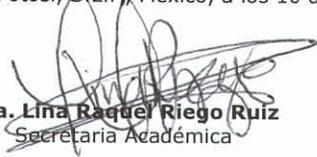
**Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 13:45 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe la Secretaría Académica del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 10 días del mes de junio de 2022.

  
**Dra. Lina Raquel Riego Ruiz**  
Secretaría Académica

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado



*A mi madre*

# Agradecimientos

- A mi madre por su infinito amor y apoyo en cada etapa de mi vida.
- A mi asesor Juan Gonzalo Barajas Ramírez, por su tiempo, dirección y paciencia, así como su constante asesoría que contribuyen en gran manera a la culminación de este trabajo de tesis.
- A mis amigos de maestría David, Luis Felipe, Ingrid y en especial Ana María por su grandiosa amistad.
- A mi querida Libertad por su apoyo y hermosa compañía.
- Al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica así como la División de Control y Sistemas Dinámicos por abrirme sus puertas.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por financiar el desarrollo de este proyecto y mi formación como maestro en Control y Sistemas Dinámicos.

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>8</b>
2.1. Memresistores . . . . .	8
2.2. Sistemas memresistivos . . . . .	10
2.3. Propiedades del memresistor . . . . .	11
2.3.1. Criterio de pasividad. . . . .	11
2.3.2. Lazo de histéresis pinchada. . . . .	12
2.3.3. Área del lóbulo del lazo de histéresis. . . . .	12
2.3.4. Degradación del lazo de histéresis. . . . .	13
2.4. Una clasificación de los memresistores. . . . .	14
2.4.1. Tipo 1. El memresistor ideal. . . . .	14
2.4.2. Tipo 2A. El memresistor ideal genérico. . . . .	15
2.4.3. Tipo 2B. Memresistor Genérico . . . . .	17
2.4.4. Tipo 3. Memresistor extendido. . . . .	18
2.5. Circuitos emuladores de memresistores . . . . .	19
<b>3. Emulación de memresistores</b>	<b>22</b>
3.1. Circuitos emuladores de memresistores. . . . .	22
3.1.1. Circuitos emuladores analógicos. . . . .	23
3.1.2. Circuitos emuladores digitales. . . . .	27
3.2. Circuitos emuladores híbridos. . . . .	29
3.2.1. Modelado de memresistores a través de fuentes controladas. . . . .	29
3.2.2. Propuesta de emulador de memresistor híbrido. . . . .	31
3.2.3. Emulador de un memresistor implementado en Simscape. . . . .	31
<b>4. Circuitos caóticos realizados mediante un emulador de memresistor híbrido</b>	<b>36</b>
4.1. Circuitos con memresistores basados en el circuito de Chua. . . . .	36
4.2. Circuito memresistivo caótico simple de tres componentes. . . . .	42
4.2.1. Implementación del circuito. . . . .	44

4.2.2.	Implementación del sistema 4.24 en un sistema embebido. . . . .	48
4.2.3.	Implementación del sistema 4.24 con un emulador de memresistor híbrido. . . . .	48
4.3.	Oscilador Canónico de Chua simplificado. . . . .	50
4.3.1.	Implementación del sistema 4.42 con un emulador de memresistor híbrido. . . . .	52
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>55</b>
5.1.	Trabajo a Futuro . . . . .	56
	<b>Apéndice A.</b>	<b>57</b>
A.1.	Código utilizado para implementar el sistema 4.24 en un sistema embebido.	57
A.2.	Código utilizado para calcular los exponentes de Lyapunov. . . . .	58
	<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

# Índice de figuras

1.1. Circuito de prueba para caracterizar el dispositivo de dos terminales B [20].	3
1.2. Los cuatro elementos fundamentales de los circuitos definidos axiomáticamente [20] . . . . .	5
2.1. Elementos de dos terminales fundamentales y la relación entre variables de cada uno [47]. . . . .	9
2.2. Lazo de histéresis pinchada obtenida al graficar $i$ vs $v$ . . . . .	13
2.3. Disminución del área de los lóbulos debido al aumento en la frecuencia de la señal de excitación. . . . .	13
2.4. Lazo de histéresis pinchado degradado a una función de único valor, para un valor grande en frecuencia. . . . .	14
2.5. Clasificación de los memresistores [28] . . . . .	15
2.6. Emulador de un memresistor ideal y su gráfica $v - i$ [51]. . . . .	15
2.7. Emulador de un memresistor genérico ideal y su gráfica $v - i$ [51]. . . . .	16
2.8. Emulador y gráfica $v - i$ de un memresistor genérico [51]. . . . .	17
2.9. Emulador y gráfica $v - i$ de un memresistor extendido [51]. . . . .	18
2.10. Modelos generales de emuladores analógicos. <b>(a)</b> basado en una función no lineal $g(x)$ y una ecuación de estado $dx/dt = u$ , donde $y = g(x)u$ , $u$ , $x$ , y son la variable de entrada, variable de estado y respuesta. <b>(b)</b> basado en la relación constitutiva $y = F(x)$ , donde $u$ , $x$ e $y$ son la variable de entrada, variable de estado y respuesta. [52] . . . . .	20
2.11. Esquema simplificado del emulador de Valsa y Biolek [52]. . . . .	21
3.1. Esquema de un emulador indirecto, que funciona según el principio de un mutador que transforma la característica $i - v$ no lineal del resistor $R$ en una característica flujo-carga de forma similar al memresistor [56]. . . . .	23
3.2. Modelo general de un memresistor con una relación constitutiva $y_I = F(u_I)$ , donde $u$ , $x$ e $y$ son la variable de excitación, la variable de estado y la respuesta, $y_I$ y $u_I$ son integrales en el dominio del tiempo de las cantidades $u$ e $y$ . Para un memresistor controlado por corriente, $u$ es corriente, $y$ es voltaje y $x$ es carga. Para un memresistor controlado por voltaje, $u$ es voltaje, $y$ es corriente y $x$ es flujo. . . . .	24
3.3. Circuito emulador basado en un fotorresistor LDR y un LED [57]. . . . .	25
3.4. Esquema del emulador de memristor propuesto en [13], que contiene un integrador, multiplicadores analógicos y un convertidor $v - i$ . . . . .	26

3.5. Emulador de un sistema memresistivo pasivo [61] . . . . .	27
3.6. Emulador memresistivo electromecánico [62] . . . . .	27
3.7. Emulador memresistivo electromecánico de dos estados [63] . . . . .	27
3.8. Circuito emulador digital [54]. . . . .	28
3.9. Diagrama esquemático del emulador conformado por un potenciómetro digital y un Arduino [34] . . . . .	29
3.10. Modelado de sistemas memresistivos controlados por voltaje y corriente [55]. CCMrS, sistema memresistivo controlado por corriente; VCMrS, sistema memresistivo controlado por voltaje; SE, ecuación de estado; PE, ecuación algebraica; VPE, ecuación en el puerto analógico de voltaje; IPE, ecuación en el puerto analógico de voltaje. . . . .	30
3.11. Esquemas simplificados del emulador híbrido, empleando una fuente controlada por corriente (a), voltaje (b) [55]. . . . .	32
3.12. Cambio de memresistencia en función del voltaje aplicado. . . . .	33
3.13. Gráfica $I - V$ . . . . .	33
3.14. Memresistor implementado en Simulink y Simscape. . . . .	34
3.15. Gráficas de corriente y voltaje del memresistor bajo un voltaje aplicado $V(t) = 2.3\text{Sin}(2\pi ft)$ . Para obtener el valor de corriente se conectó en serie una resistencia $R_0 = 100\Omega$ . . . . .	34
3.16. Lazo de histéresis pinchada del memresistor bajo un voltaje aplicado $V_M = 2.3\text{Sin}(2\pi ft)$ . Se emuló el modelo 3.4 con $\alpha = 0$ , $\beta = 62k\Omega/V \cdot s$ , $V_T = 1.75V$ , $R_1 = 1k\Omega$ , $R_2 = 10k\Omega$ . . . . .	34
4.1. El Circuito de Chua [65]. . . . .	36
4.2. Curva característica $v - i$ del Resistor no lineal $N_R$ en el Circuito de Chua [65] . . . . .	37
4.3. Atractor de doble espiral del circuito de Chua obtenido con los parámetros $C_1 = 5.5nF$ , $C_2 = 49.5nF$ , $L = 7.07mH$ , $R = 1.428k\Omega$ , $G_a = -0.8mS$ , $G_b = -0.5mS$ y $E_1 = 1V$ . . . . .	38
4.4. Oscilador canónico de Chua con un memresistor controlado por flujo [26]. . . . .	38
4.5. Corrientes $i_j$ , voltajes $v_j$ , nodos A, B y lazo C son indicados. . . . .	39
4.6. (a) Atractor caótico del oscilador canónico de Chua con un memresistor controlado por flujo. (b) Trayectorias de las variables $x$ , $y$ , $z$ y $w$ . . . . .	41
4.7. Exponentes de Lyapunov del sistema 4.12. . . . .	42
4.8. Circuito caótico más simple [12] . . . . .	42
4.9. Memresistencia $R(z)$ en función del estado interno $z$ , con el parámetro $\beta = 1.5$ . . . . .	43
4.10. Gráfica $I - V$ . . . . .	43
4.11. Diagrama esquemático del circuito caótico con un emulador de memresistor analógico. . . . .	45
4.12. (a) Atractor caótico del sistema 4.24. (b) Trayectorias de las variables $x$ , $y$ y $z$ . . . . .	47
4.13. Gráfica de los exponentes de Lyapunov en función del tiempo. . . . .	47
4.14. Diagrama esquemático del sistema embebido en Proteus M.R.. . . . .	48

4.15. Simulación del sistema embebido para el sistema caótico en su versión discreta utilizando el algoritmo de Euler. (a) Trayectorias de $x_n$ (color amarillo) e $y_n$ (color magenta). (b) Trayectoria de $z(t)$ . (c) Plano de fase de las trayectorias de $x_n$ e $y_n$ . . . . .	49
4.16. Diagrama esquemático del emulador híbrido controlado por corriente propuesto. . . . .	50
4.17. Circuito caótico con un emulador de memresistor híbrido. . . . .	50
4.18. Esquema del circuito propuesto [26]. . . . .	51
4.19. (a) Atractor caótico del sistema 4.47. (b) Trayectorias de las variables $x$ , $y$ y $z$ . . . . .	52
4.20. Exponentes de Lyapunov en función del tiempo del sistema 4.3. . . . .	53
4.21. Diagrama esquemático del emulador propuesto. . . . .	53

# Resumen

El memresistor es un dispositivo electrónico de dos terminales descrito por una relación constitutiva no lineal entre la carga y el flujo magnético. En años recientes ha surgido un gran interés en explotar las potenciales aplicaciones de estos dispositivos en diferentes tipos de circuitos. Así mismo, la diversidad de modelos memresistivos ha generado el desarrollo de emuladores que imitan y reproducen las propiedades del memresistor. En términos generales un emulador es un circuito o conjunto de dispositivos que permite experimentar diferentes aplicaciones con memresistores sin la necesidad de contar un dispositivo de estado sólido.

En este trabajo de tesis, se presenta una metodología de diseño de emuladores de memresistor que pueden ser utilizados para implementar circuitos que exhiben caos. Un emulador es llamado híbrido si se conforma de una interfaz analógica-digital, un microcontrolador en el que se programa el modelo del memresistor y una fuente de poder variable controlada digitalmente. Una ventaja que muestran estos emuladores es que permiten la emulación de diversos modelos memresistivos tanto pasivos como activos ya que utiliza una fuente de poder en lugar de un divisor de voltaje utilizando un potenciómetro digital o una resistencia variable asociada a un puerto analógico. Otro aspecto importante de estos emuladores es que las características y modelo del memresistor se pueden ajustar con relativa facilidad. Así mismo, debido a que la salida del emulador puede ser una fuente de voltaje o corriente con diferentes propiedades pasivas o activas.

Para ilustrar el método propuesto se emuló un memresistor genérico y luego un modelo de memresistor ideal. Los cuales se utilizaron en circuitos caóticos basados en el bien conocido circuito caótico de Chua y el circuito memresistivo simple, con lo cual se muestra la flexibilidad del método de emulación propuesto ya que diferentes modelos de memresistor se pueden realizar con cambios mínimos. Para comprobar que los circuitos, muestran comportamientos caóticos además de mostrar atractores caóticos resultantes, se calcularon sus exponentes de Lyapunov y en ambos casos se encuentra que existen exponentes positivos y que la suma de exponentes es negativa. Finalmente, se presentan realizaciones de estos circuitos caóticos con los emuladores propuestos en programas de computadora para la simulación de circuitos electrónicos y plataformas embebidas.

# Abstract

The memresistor is a two-terminal electronic device described by a nonlinear constitutive relationship between charge and magnetic flux. In recent years, there has been a great interest in exploiting the potential applications of these devices in different types of circuits. Likewise, the diversity of memresistive models has generated the development of emulators that imitate and reproduce the properties of the memresistor. In general terms, an emulator is a circuit or set of devices that allows experimenting with different applications with memresistors without the need for a solid-state device.

In this thesis work, a design methodology for memresistor emulators that can be used to implement circuits that exhibit chaos is presented. An emulator is called a hybrid if it is made up of an analog-digital interface, a microcontroller in which the memresistor model is programmed, and a digitally controlled variable power supply. An advantage that these emulators show is that they allow the emulation of various memresistive models, both passive and active, since they use a power source instead of a voltage divider using a digital potentiometer or a variable resistor associated with an analog port. Another important aspect of these emulators is that the characteristics and model of the memresistor can be adjusted relatively easily. Also, because the emulator output can be a voltage or current source with different passive or active properties.

To illustrate the proposed design, a generic memresistor was first emulated and then an ideal memresistor model. Both emulators were used in chaotic circuits based on the well-known Chua chaotic circuit, which shows the flexibility of the proposed emulation method since different memresistor models can be realized with minimal changes. To verify that the circuits show chaotic behavior in addition to showing attractors, their Lyapunov exponents were calculated and in both cases it is found that there are positive exponents but the sum of them is negative. Finally, realizations of these chaotic circuits are presented with the emulators proposed in circuit simulation platforms and embedded platforms.

# Capítulo 1

## Introducción

Durante los últimos años el memresistor ha generado un gran interés en múltiples áreas de investigación, las cuales van desde la física hasta la biología [1–3]. Sin embargo, hasta el momento, los memresistores no están disponibles fácilmente, por lo tanto, muchos investigadores se han apoyado de circuitos emuladores de memresistores que imitan el comportamiento y las propiedades del memresistor, con el objetivo de investigar sus potenciales aplicaciones, es decir, aplicaciones que incluyen circuitos de computación neuromórfica [4], redes neuronales [5, 6], memorias no volátiles [7, 8], diseño de circuitos digitales y analógicos [9–11], osciladores y sistemas caóticos. En ausencia de un memresistor físico disponible los circuitos emuladores son de gran importancia ya que, se pueden construir con componentes electrónicos básicos y de bajo costo [12, 13].

Los sistemas dinámicos son importantes en diversas ramas de la ciencia y actividad humana: física, química, biología, ecología, meteorología, economía, neurobiología, entre otras disciplinas [14]. Una interpretación de los sistemas dinámicos es que permiten comprender y predecir la evolución en el tiempo del sistema. En este sentido, los sistemas dinámicos han sido fundamentales para estudiar las propiedades de los circuitos electrónicos [15]. Un sistema dinámico es un conjunto de estados junto con una regla que representa su evolución temporal, que establece el estado actual a partir de los estados anteriores; donde el estado se define como toda la información necesaria para conocer el comportamiento y la evolución del sistema. Esta evolución adopta varias formas, es decir, ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, mapas iterados, flujos, etc. [16].

Por otra parte, consideremos los circuitos electrónicos donde una cantidad llamada “carga eléctrica” ( $q$ ), que puede ser positiva o negativa [17]. Las cargas iguales ejercen una fuerza de repulsión y las cargas diferentes ejercen una fuerza de atracción medida en culombio y se ha definido como equivalente a la carga total que poseen  $6.24 \times 10^{18}$  electrones.

El trabajo incremental  $dw$  requerido para mover un incremental de carga  $dq$  del punto  $j$  al punto  $k$  resulta en

$$v_{jk} = \frac{dw}{dq}. \quad (1.1)$$

donde  $v$  es el voltaje o diferencia de potencial. Las cargas fluyen a través de un cuerpo con una “tasa de flujo de carga” llamada corriente ( $i$ ). Es decir,

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (1.2)$$

En 1819, Hans Christian Oersted descubrió que la corriente que fluía a través de un cable producía una fuerza en la aguja de una brújula en las proximidades del cable [18]. Esto indica que la corriente (o carga en movimiento) produce un campo magnético. El flujo magnético ( $\varphi$ ) se relaciona a través de la ley de Faraday como:

$$v = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.3)$$

Se entiende por circuito eléctrico una interconexión entre elementos pasivos, activos o ambos. Uno de los aspectos más importantes de la teoría de circuitos es que existen cuatro variables fundamentales: corriente ( $i$ ), voltaje ( $v$ ), carga eléctrica ( $q$ ) y flujo magnético ( $\varphi$ ). Así mismo, existen tres elementos fundamentales pasivos, el resistor ( $R$ ), el capacitor ( $C$ ) y el inductor ( $L$ ) cuyas propiedades y aplicaciones están bien definidas y comprendidas [19]. Estos elementos básicos son de dos terminales y representan relaciones entre dos de las cuatro variables fundamentales. Hay seis posibles combinaciones entre las cuatro variables fundamentales de los circuitos, cinco de ellas ya bien establecidas. Las cuales son:

- Resistor

$$dv = Rdi \quad (1.4)$$

- Capacitor

$$dq = Cdv \quad (1.5)$$

- Inductor

$$d\varphi = Ldi \quad (1.6)$$

- Flujo de corriente

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.7)$$

- Flujo magnético

$$v = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.8)$$

Tres de ellas definen los tres elementos fundamentales de los circuitos (resistor, capacitor e inductor) y otras dos están definidas por la ley de inducción de Faraday (la carga es la integral de la corriente con respecto al tiempo y el flujo es la integral del voltaje con respecto al tiempo). Para entender la relación entre estas variables es necesario mostrar la definición de la carga y el voltaje.

A partir de las definiciones anteriores es posible definir axiomáticamente los elementos fundamentales de los circuitos [20]. Para identificar estas relaciones podemos caracterizar un objeto B de dos terminales a partir de su respuesta a una señal eléctrica. Dado que no es posible mirar dentro de B, el único recurso es realizar mediciones al objeto B en un “circuito de prueba” tal como se muestra en la Figura 1.1. Mediante medidores obtenemos funciones de tiempo  $i(t)$  y  $v(t)$  para el objeto de dos terminales B (llamadas + y -). Llamemos una señal  $(v, i)$  admisible de B si está en la lista registrada

$$B(v, i) \triangleq \{(v_1(t), i_1(t)), (v_2(t), i_2(t)), \dots, (v_n(t), i_n(t)), \dots\} \quad -\infty < t < \infty \quad (1.9)$$

de señales admisibles de  $v - i$  de todos los posibles circuitos de prueba constituye la caracterización completa del objeto de dos terminales  $B$ .

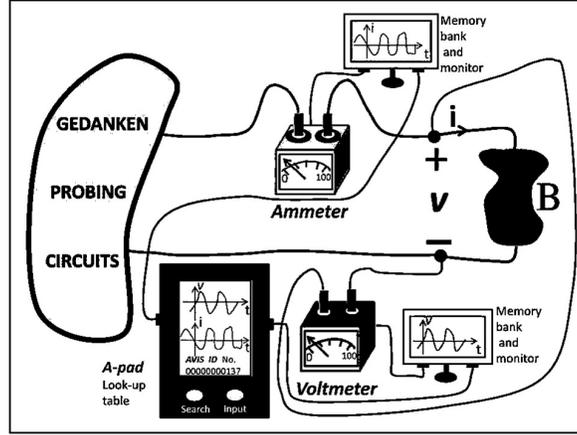


Figura 1.1: Circuito de prueba para caracterizar el dispositivo de dos terminales  $B$  [20].

A partir de  $B(v, i)$  podemos caracterizar el dispositivo en los siguientes casos:

**Caso 1:** Suponga que la relación (1.9) cumple la ley de Ohm; es decir

$$v(t) = Ri(t) \quad o \quad i(t) = Gv(t) \quad (1.10)$$

donde  $R$  es una constante llamada resistencia de  $B$  y  $G$  es una constante llamada conductancia de  $B$ . A menudo es conveniente reformular las señales admisibles en forma implícita, es decir:

$$f_{R_L}(v, i) = v - Ri = 0. \quad (1.11)$$

En teoría de circuitos se denomina relación constitutiva.

**Caso 2:** Suponga que 1.9 se pueda escribir por una relación constitutiva de la forma:

$$f_{R_{NL}}(v, i) = v + \frac{1}{3}v^3 - 1 = 0. \quad (1.12)$$

Como la ecuación (1.8) del caso 1 y la ecuación (1.10) del caso 2 involucran el mismo par de variables de circuito (voltaje, corriente), y dado que todos los dispositivos de dos terminales pueden caracterizarse por una relación constitutiva

$$f_R(v, i) = 0 \quad (1.13)$$

Se puede demostrar que es disipativo (o pasivo) si  $v, i > 0$  para toda señal admisible  $(v, i)$ . A esta clase de elementos de dos terminales se les llama resistencia lineal en (1.11) y no lineal en (1.12).

**Caso 3:** Suponga que la relación que describe a  $B$  se expresa en las variables  $(v, q)$ , es decir, se relacionan como:

$$B(v, q) = \{(v_1(t), q_1(t)), (v_2(t), q_2(t)), \dots, (v_n(t), q_n(t)), \dots\} \quad (1.14)$$

Más aun, se cumple la relación (1.15)

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

donde  $t_0$  es el tiempo inicial. Entonces la relación puede escribirse como

$$q = Cv \quad (1.16)$$

con  $C$  una constante llamada capacitancia de  $B$ . A esta clase de dispositivos de dos terminales se les llama capacitores.

**Caso 4:** Suponga que la relación involucra las variables  $(i, \varphi)$  con la relación

$$\varphi = Li \quad (1.17)$$

con  $L$  una constante llamada inductancia de  $B$ . Al dispositivo se le llama inductor.

Se observa que los cuatro casos anteriores de elementos básicos de los circuitos (resistencias (lineales y no lineales), capacitores e inductores) se definen axiomáticamente mediante una relación constitutiva entre un par de variables elegidas de  $\{v, i, q, \varphi\}$ . El par flujo-carga define una relación constitutiva, es decir, dadas las señales admisibles  $(\varphi(t), q(t))$ , se puede obtener el par  $(v(t), i(t))$ . Por razones de consistencia lógica y simetría, es necesario definir un cuarto elemento fundamental de circuito a través de la relación constitutiva

$$f_M(\varphi, q) = 0 \quad (1.18)$$

entre las variables  $\varphi$  y  $q$ . Este elemento fue postulado y llamado Memresistor en 1971 por Leon O. Chua [21]. Como se muestra en la Figura 1.2, cada elemento fundamental tiene su propia relación entre dos variables y no pueden ser reemplazados por ninguna combinación de otros elementos.

Chua postuló el nuevo elemento y lo llamó memresistor ( $M$ ) una contracción de resistencia con memoria. El memresistor puede considerarse como una resistencia variable en el tiempo cuyo valor de resistencia depende de la historia de la corriente que ha pasado a través de él, es decir, su resistencia cambia como resultado de la integral de corriente que ha pasado a través del dispositivo. Adicionalmente cuando la corriente que fluye a través de él es cero, la suma de la corriente se vuelve constante y, por lo tanto, la resistencia permanece sin cambios [21]. De esta forma, midiendo la resistencia en diferentes intervalos se puede determinar la amplitud de la señal aplicada previamente.

Desafortunadamente, una realización experimental del memresistor no se pudo obtener hasta el año 2008, en que investigadores de los Laboratorios HP fabricaron el primer memresistor basado en nano estructuras metal-aislante-metal de  $TiO_2$  dopado [22]. En general, los memresistores se describen con elementos no lineales los que los vuelve una buena opción para diseñar circuitos capaces de mostrar dinámicas caóticas [23–25]. Uno de los primeros trabajos de circuitos que incluyen memresistores fue propuesto por Chua e Itho en 2008 [26], donde mostraron una galería de osciladores caóticos obtenidos a partir del oscilador de Chua, substituyendo el elemento no lineal por un memresistor con relación constitutiva lineales por partes (PWL) en el plano  $\varphi - q$ .

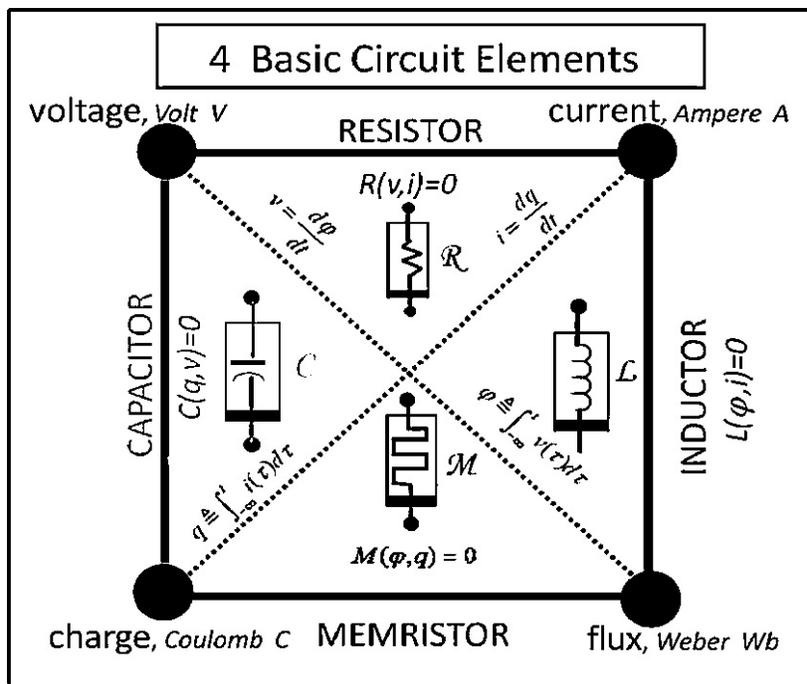


Figura 1.2: Los cuatro elementos fundamentales de los circuitos definidos axiomáticamente [20]

En [13] Muthuswamy presenta un circuito caótico con un memresistor cuya relación característica es cubica. Muthuswamy también mostró que un circuito caótico puede ser obtenido con solo tres elementos: un capacitor, un inductor y sistema memresistivo activo (una generalización del memresistor) [12]. Dado que no hay memresistores disponibles comercialmente, existe la necesidad de desarrollar circuitos emuladores para analizar los fenómenos asociados con el uso de memresistores. Los emuladores de memresistor se pueden clasificar de acuerdo con la forma en que implementan la relación constitutiva del comportamiento memresistivo. De modo que pueden ser analógicos, digitales e híbridos [27].

En el diseño de emuladores es necesario considerar aspectos como valores en los parámetros y el rango de los comportamientos deseados tanto en magnitud y frecuencia. Como primer paso se debe considerar el tipo de memresistor a emular, por ejemplo un memresistor ideal [21] tiene requerimientos diferentes a emular un sistema memresistivo generalizado, a un memresistor extendido [28]. Existen algunos trabajos [29, 30] que presentan emuladores de “pseudo memresistores” ya que pueden imitar con precisión las características de un memresistor real, sin embargo, las ecuaciones del dispositivo no corresponden a las definiciones de sistemas memresistivos. Por otro lado, el emulador presentado en [31], es denominado como “memresistor inverso”, puede exhibir varias, pero no todas las propiedades de un memresistor. En particular, el área de los lóbulos del lazo de histéresis crece en lugar de disminuir con el aumento de la frecuencia de la señal de excitación.

Los emuladores tienden a ser más complejos en aplicaciones neuromórficas, por lo que usualmente se utilizan emuladores digitales, donde es más fácil implementar relaciones complejas [32, 33]. En los emuladores analógicos, modificar el modelo es difícil y en si cambia completamente la construcción del circuito de emulación. A través del uso de potencióme-

tros digitales y un convertidor de analógico a digital (CAD), los emuladores digitales pueden generar diferentes valores de resistencia teniendo como entrada el voltaje, luego se calcula la resistencia adecuada mediante un microcontrolador. Aunque esta es una buena solución su utilidad se ve limitada pues solo tendrá salidas pasivas que se pueden usar en arreglos flotantes [27] sin embargo, para casos donde existe una referencia a tierra la salida está limitada a un divisor de voltaje lo que limita su flexibilidad.

En [34] se utilizó un emulador digital para emular el modelo del memresistor de HP utilizando un Arduino, mientras que en [35] se emuló un modelo de memresistor adaptativo de umbral. En [36] se utilizó el enfoque de emuladores digitales, pero con la diferencia de usar un potenciómetro digital la salida es una fuente de voltaje o corriente que controla su valor de voltaje mediante el microcontrolador. A este tipo de emuladores se les llama híbridos [27]. Es importante hacer notar que para tener un circuito caótico con memresistores, además del microcontrolador y el bloques de CAD y CDA, estos circuitos se deben completar con los componentes analógicos auxiliares necesarios. Por ejemplo en [37] se propone un emulador generalizado inverso, basado en dos transistores BJT conectados por diodos y un filtro RC en paralelo. En [38] se presenta un circuito caótico basado en el oscilador de Wien-bridge, en este caso el emulador del memresistor se implementó de forma analógica con elementos electrónicos básicos de fácil implementación. En [39] se presenta un circuito caótico con solo una resistencia lineal negativa, un capacitor, un inductor y un memresistor, una ventaja de este circuito es que el modelo matemático del memresistor es simple, por lo tanto su emulador analógico requiere de pocos componentes a diferencia del emulador presentado en [12], con una relación fundamental complicada. En [40] se presenta un circuito con un nuevo atractor caótico, con un emulador digital. En [41] se presenta un circuito caótico que consta de solo tres elementos donde un memresistor y un memcapacitor fueron implementados en una plataforma de procesamiento de señales digitales (DSP). La ventaja de usar esta plataforma es que se pueden implementar diferentes modelos de memresistores, lo cual reduce el uso de componentes y el diseño de nuevos circuitos emuladores.

Para poder demostrar, experimentalmente, los conceptos del fenómeno memresistivo los investigadores se han apoyado de diferentes materiales. Algunos ejemplos son el memresistor ferroeléctrico propuesto en [42], un memresistor de polímero en [43], dispositivos memresistivos basados en óxido de grafeno [44] y nano paredes de carbono [45]. Sin embargo, todos estos dispositivos memresistivos no están disponibles comercialmente, debido a su complejidad y alto costo de fabricación en dimensiones nanométricas. Por esta razón, se han realizado esfuerzos para diseñar circuitos emuladores que puedan imitar el comportamiento de un memresistor, es decir, obtener el comportamiento eléctrico no lineal de un memresistor dada una relación constitutiva. Considerando que la principal cualidad del memresistor es recordar las señales aplicadas anteriormente, por lo general, los emuladores analógicos se conforman de circuitos integradores, así como un circuito multiplicador que es la encargada de generar una relación cuadrática entre corriente y voltaje o viceversa. Estos circuitos emuladores se diseñan utilizando componentes comerciales y se implementan en PCB o placas de prueba (protoboards) [46].

Unas de las limitaciones que presentan estos circuitos emuladores es el rango de frecuencias de operación por lo que, en algunos rangos de operación, no se puede obtener el lazo de histéresis pinchada. En el caso de emuladores analógicos que imitan al memresistor ideal o al memresistor de HP, no se pueden emular sistemas memresistivos de mayor or-

den. Así mismo, estos emuladores deben estar conectados a tierra para poder operar, lo que resulta un inconveniente si se quiere trabajar en circuitos más complejos. Alguno de estos inconvenientes se pueden superar utilizando un emulador digital, el cual no solo permite ser interconectado con otros componentes, si no también la posibilidad de emular sistemas memresistivos más complejos. Sin embargo, algunas de las limitaciones que presentan es que la discretización, conversión, la pérdida de resolución y la velocidad de muestreo afectan considerablemente la frecuencia de trabajo del emulador. Así como su rango de salida en el caso del potenciómetro digital está restringido al tamaño de la implementación.

Por lo tanto, el uso de emuladores híbridos pueden ser una buena solución ya que la fuente controlada puede ser mucho más flexible por lo que su implementación no requiere de emuladores analógicos que a menudo requieren un número significativo de componentes y que para cada modelo de memresistor, se debe diseñar un circuito diferente. En esta tesis se investiga el uso de emuladores de memresistor híbridos que permitan emular modelos ideales, genéricos y extendidos, sin la necesidad de utilizar circuitos analógicos diferentes o un potenciómetro digital. Si no una fuente controlada digitalmente, de modo que se tenga una mejor frecuencia de operación máxima. Adicionalmente estos emuladores se utilizarán para implementarlos en circuitos caóticos básicos.

Los objetivos principales en esta tesis son: 1) Proponer una realización de emuladores memresistivos híbridos con salidas realizadas por fuentes de voltaje o fuentes de corriente controladas digitalmente 2) Proponer realizaciones de emuladores para circuitos que generen dinámicas caóticas basados en el circuito de Chua.

El resto del documento es: En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos de memresistores y emuladores. En el capítulo 3 se muestran diferentes métodos de emulación de memresistores. También se presenta un método de emulación de memresistores mediante fuentes de corriente y voltaje controladas digitalmente. En el capítulo 4, se presentan los fundamentos teóricos de circuitos caóticos y el estudio de dos circuitos caóticos, mediante simulación y comprobación de caos calculando sus exponentes de Lyapunov. Finalmente se desglosan conclusiones y trabajo a futuro.

# Capítulo 2

## Antecedentes

En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales relativos al memresistor. Se hace una explicación detallada de los memresistores y sus propiedades, así como su clasificación. Además, se presentan los antecedentes de circuitos emuladores de memresistores.

### 2.1. Memresistores

Partiendo de la simetría observada entre los elementos de dos terminales fundamentales en teoría de circuitos, tenemos: resistor, capacitor e inductor, así como las variables que ellos asocian: corriente, voltaje, carga eléctrica y flujo magnético, Leon O. Chua propuso un cuarto elemento de dos terminales, el cual relaciona flujo magnético y carga llamado memresistor [21]. Como se observa en la Figura 2.1, hay 6 combinaciones entre las cuatro variables fundamentales, cinco de ellas ya contaban con una definición, pero en cuanto al flujo magnético  $\varphi$  y la carga  $q$  está vinculada como la cantidad

$$M = \frac{d\varphi}{dq}. \quad (2.1)$$

donde  $M$  es la memresistencia.  $M$  está en función de la carga  $q$  y el flujo magnético  $\varphi$ , donde sus características no pueden ser duplicadas por una combinación de los otros tres elementos básicos. Un memresistor puede ser controlado por carga, si su relación flujo-carga ( $\varphi - q$ ) es expresada por una función que únicamente depende de la carga. Por otra parte, el memresistor puede ser controlado por flujo, si su relación carga-flujo ( $q - \varphi$ ) se expresa únicamente en función del flujo.

$$\varphi = f_M(q) \quad \text{Controlado por carga} \quad (2.2)$$

$$q = f_M(\varphi) \quad \text{Controlado por flujo} \quad (2.3)$$

Diferenciando (2.2) y (2.3) con respecto al tiempo, se obtienen:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{df_M(q)}{dq} \frac{dq}{dt} \quad (2.4)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{df_M(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.5)$$

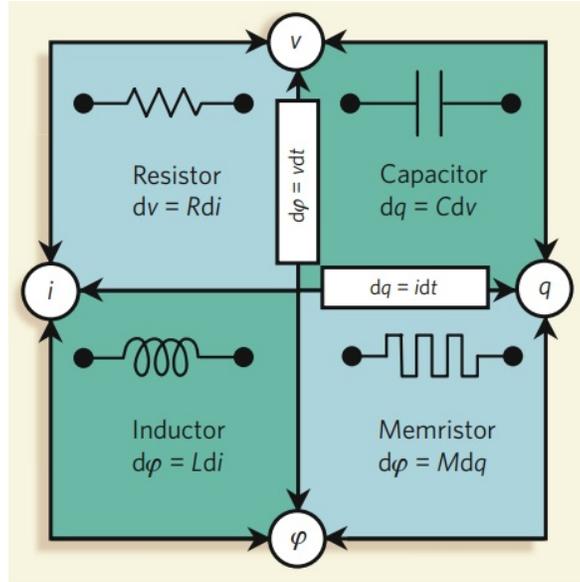


Figura 2.1: Elementos de dos terminales fundamentales y la relación entre variables de cada uno [47].

Sabiendo que  $i = \frac{dq}{dt}$  y  $v = \frac{d\varphi}{dt}$ , y reemplazándolas en (2.4) y (2.5), se obtiene una expresión de la Ley de Ohm dependiente de la carga, (para el caso del memresistor controlado por carga)

$$v = M(q)i \quad (2.6)$$

donde

$$M(q) = \frac{df_M(q)}{dq} \quad (2.7)$$

se denomina memresistencia y tiene como unidad el Ohm ( $\Omega$ ). Para el caso del memresistor controlado por flujo, la expresión de la Ley de Ohm se define como:

$$i = G(\varphi)v \quad (2.8)$$

donde

$$G(\varphi) = \frac{df_M(\varphi)}{d\varphi} \quad (2.9)$$

se denomina memductancia y tiene como unidad el Siemens ( $S$ ). Es importante mencionar que, si la relación entre la carga y el flujo es lineal, la memresistencia  $M(q)$  será constante y representará a un resistor lineal e invariante en el tiempo, por lo que una cualidad interesante del memresistor radica en su no linealidad, es decir, variar su resistencia en forma no lineal. Esto es, si la relación entre el flujo magnético y la carga está definida como:

$$\varphi = Rq \quad (2.10)$$

con  $R$  una constante. Entonces, derivando 2.10 respecto al tiempo, se obtiene:

$$v = Ri \quad (2.11)$$

la Ley de Ohm. De igual manera para una expresión en términos de conductancia  $G$ . También es importante notar que la memresistencia y memductancia dependen de la integral con respecto al tiempo de la corriente y el voltaje, es decir,

$$v = M \left( \int_{-\infty}^t q(\tau) d\tau \right) i \quad (2.12)$$

$$i = G \left( \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \right) v \quad (2.13)$$

En otras palabras, su resistencia o conductancia dependen de la historia de la corriente o voltaje del memresistor, según sea el caso. Esta dependencia provee al dispositivo de un efecto de memoria, por este motivo fue nombrado memresistor, contracción de resistencia con memoria. Entonces, en un caso práctico se puede concluir que la memresistencia (memductancia) se mantiene cambiando, mientras se aplica una señal de excitación al memresistor. Una vez que esta se remueve, el memresistor tiene la capacidad de mantener su último estado resistivo por tiempo indefinido hasta que la señal de excitación se aplique nuevamente, sin importar en que instante de tiempo ocurra esto.

## 2.2. Sistemas memresistivos

A partir de las propiedades básicas del memresistor ideal es posible generalizar el modelo de diversos dispositivos y sistemas con esas mismas características. En [48] Chua y Kang proponen una clase de sistemas dinámicos llamada sistemas memresistivos descritos por dos ecuaciones con una variable de entrada  $u$ , un estado interno  $x$  y posiblemente el tiempo.

$$y = g(x, u, t)u \quad (2.14)$$

La 2.14 describe el memresistor como una relación entrada-salida con la función.  $g(\cdot)$  representa memresistencia o memductancia. La cual depende de la entrada, el estado interno y su evolución dinámica dada por:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.15)$$

con  $f$  el campo vectorial de la variable interna usualmente una función escalar continua [48]. De 2.14 y 2.15 la salida es cero si la entrada es cero ( $u = 0$ ) y para  $f(x, u, t) = 0$  el valor de memoria es una constante independiente de  $x$ . Adicionalmente, tiene histéresis pinchada que se expresa en forma de figura de Lissajous que siempre es cero en el origen.

Un sistema memresistivo de orden  $n$  controlado por corriente está denotado por:

$$\begin{aligned} v(t) &= R(x, i, t)i(t) \\ \dot{x}(t) &= f(x, i, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  el estado interno, con corriente como entrada y  $R(x, i, t)$  es una función que describe la memresistencia del sistema. En cambio, un sistema memresistivo controlado por voltaje está denotado por:

$$\begin{aligned} i(t) &= G(x, v, t)v(t) \\ \dot{x}(t) &= f(x, v, t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  el estado interno, con voltaje como entrada y  $G(x, v, t)$  es una función que describe la memductancia del sistema. Donde  $v$  e  $i$  denotan el voltaje y la corriente en las terminales del sistema memresistivo. Un caso especial de los sistemas memresistivos es cuando las funciones  $f, R, G$  no son funciones explícitas del tiempo  $t$ , es decir, el sistema es invariante en el tiempo y se denotan por un modelo simplificado, es decir:

$$\begin{aligned} v &= R(x)i \\ \dot{x} &= f(x, i) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} i &= G(x)v \\ \dot{x} &= f(x, v) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es importante señalar que  $R(x), G(x)$  no son funciones explícitas de la corriente o el voltaje.

## 2.3. Propiedades del memresistor

### 2.3.1. Criterio de pasividad.

Un memresistor controlado por carga es pasivo si, y solo si, su memresistencia  $M(q)$  siempre es positiva, es decir,  $M(q) \geq 0$ . Por lo tanto, la potencia  $P(t)$  instantánea disipada por un memresistor está dada por

$$P(t) = v(t)i(t) = M((q(t)))[i(t)]^2 \quad (2.20)$$

El memresistor será pasivo si

$$\frac{dP}{dt} < 0 \quad (2.21)$$

Del mismo modo que los memresistores, los sistemas memresistivos son pasivos, es decir, no proporcionan energía. Para un sistema memresistivo invariante en el tiempo controlado por corriente,  $R(i) = 0$ , si y solo si,  $i = 0$ . Esto implica que  $R(i) \geq 0$  para cualquier entrada  $i(t)$ , por lo que la potencia disipada estará dada por:

$$P(t) = \int_{t_0}^t v(\tau)i(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t R(i(\tau))i^2(\tau)d\tau \quad (2.22)$$

Este criterio muestra que solo los memresistores caracterizados por una curva  $q - \phi$  monótona creciente, pueden ser un dispositivo que no necesita una fuente de energía interna

para operar [21]. Por eso son llamados memresistores pasivos. Adicionalmente, las propiedades que debe mostrar un dispositivo para que pueda ser considerado como memresistor se conocen como huellas de identidad, en inglés “fingerprints”. De acuerdo con [49] son al menos tres fingerprints, las cuales se mencionan a continuación.

### 2.3.2. Lazo de histéresis pinchada.

El memresistor presenta una propiedad única conocida como lazo de histéresis pinchada que los distingue de los dispositivos no memresistivos. El lazo de histéresis es una figura de Lissajous en el plano  $v-i$  que se obtiene al aplicar una señal de excitación bipolar periódica:

$$i(t) = A \text{sen}(\omega t) \quad (2.23)$$

El lazo de histéresis es doble valuado en  $(v(t), i(t))$ , es decir, para un valor de corriente de la señal de excitación, le corresponden como máximo dos valores distintos de voltaje para todo tiempo  $t$ , excepto en el origen donde está pinchada. Esto significa que debe pasar por el origen siempre que  $i = 0$ , para un dispositivo controlado por corriente, o cuando  $v = 0$ , si es controlado por voltaje. En [50] se desarrolla un ejemplo para obtener el lazo de histéresis pinchada de un memresistor controlado por carga con una relación constitutiva descrita por:

$$\varphi = q + \frac{1}{3}q^3 \quad (2.24)$$

Para esto, se tiene que graficar la señal de excitación  $i(t)$  contra su correspondiente en voltaje  $v(t)$ . Este voltaje se determina a partir de la relación constitutiva 2.24, por lo tanto primero se debe calcular el valor de carga correspondiente integrando 2.23:

$$q(t) = \int_{t_0}^t A \text{sen}(\omega \tau) d\tau = \frac{A}{\omega} [1 - \cos(\omega t)], \quad t \leq 0 \quad (2.25)$$

Sustituyendo 2.25 en 2.24 obtenemos el flujo asociado:

$$\varphi(t) = \frac{A}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{A^2}{\omega^2} \right) (1 - \cos(\omega t))^2 \right] \quad (2.26)$$

Derivando 2.26 se obtiene la respuesta en voltaje dada por:

$$v(t) = A \left[ 1 + \frac{A^2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))^2 \right] \text{sen}(\omega t) \quad (2.27)$$

Para un valor de  $A = 1$  y  $\omega = 1$ , se obtiene el lazo de histéresis de la Figura 2.2, se observa que la formación del histéresis ocurre debido a que los valores máximos y mínimos de voltaje y corriente no suceden al mismo tiempo, mientras que el cruce por cero ocurre debido a que la corriente y voltaje se vuelven cero al mismo tiempo.

### 2.3.3. Área del lóbulo del lazo de histéresis.

Otra de las propiedades únicas del memresistor es la dependencia que tiene la figura del lazo de histéresis de la frecuencia de la señal de excitación. Esta propiedad afirma la

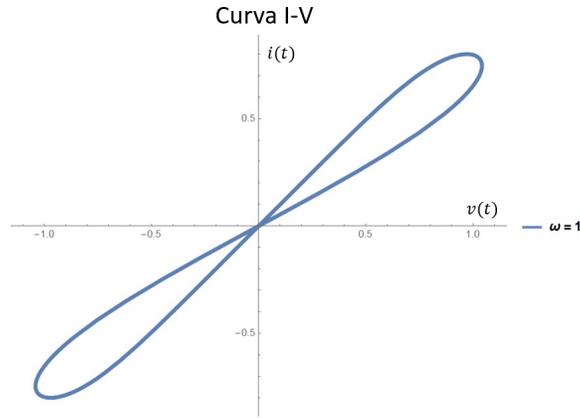


Figura 2.2: Lazo de histéresis pinchada obtenida al graficar  $i$  vs  $v$ .

existencia de una frecuencia crítica, por arriba de la cual el área de los lóbulos del lazo de histéresis decrece a medida que la frecuencia de la señal de excitación se incrementa. Considerando el memresistor controlado por carga de la sección anterior, la contracción del área se observa en la Figura 2.3, donde se presentan las gráficas del lazo de histéresis para distintos valores de frecuencia.

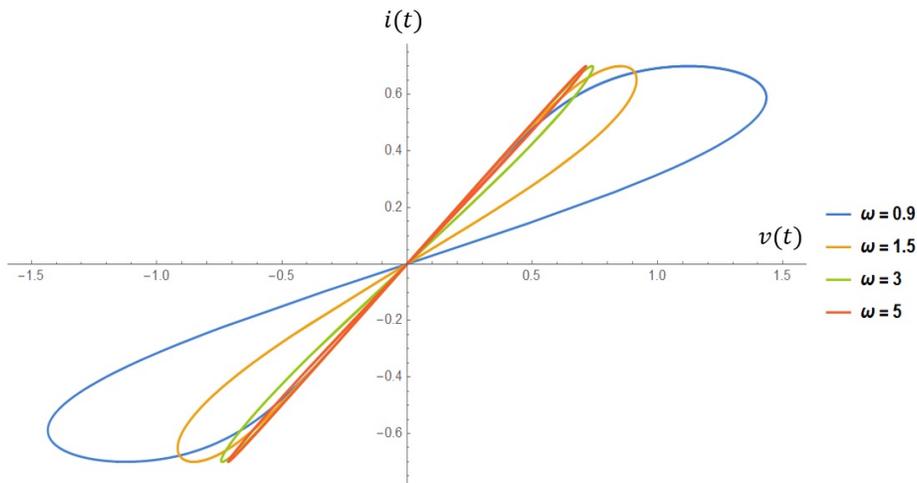


Figura 2.3: Disminución del área de los lóbulos debido al aumento en la frecuencia de la señal de excitación.

#### 2.3.4. Degradación del lazo de histéresis.

Como se mostró anteriormente, el área de los lóbulos disminuye al aumentar la frecuencia de la señal de excitación. A partir de esto, surge otra propiedad que distingue a los memresistores, la cual afirma que, aunque los lazos de histéresis son distintos para cada dispositivo memresistivo, al aumentar la frecuencia de la señal de excitación, de tal forma que tienda a infinito, todos deben degradarse a un resistor lineal invariante en el tiempo, es decir, su curva característica se convierte en una función de valor único que pasa a través del origen. En la

Figura 2.4 se observa esta propiedad considerando el memresistor de la sección anterior, con una relación constitutiva 2.24 y la señal de excitación 2.23, para un valor suficientemente grande de frecuencia. En el caso que un dispositivo presente un lazo de histéresis pinchado en el origen, pero este no se degrade al aumentar la frecuencia, entonces no puede ser considerado como memresistor.

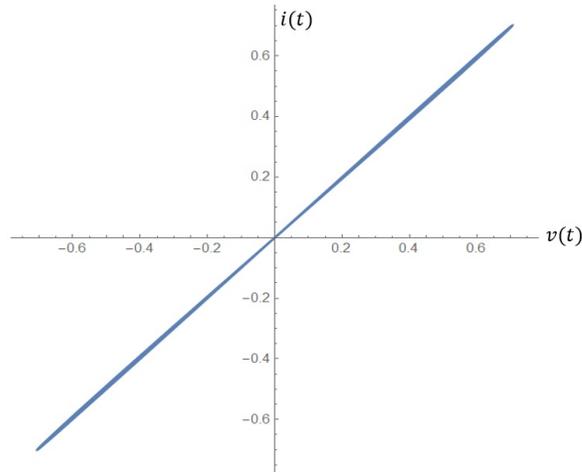


Figura 2.4: Lazo de histéresis pinchado degradado a una función de único valor, para un valor grande en frecuencia.

## 2.4. Una clasificación de los memresistores.

Una forma de clasificar los memresistores es dependiendo de la complejidad de las ecuaciones que los definen, es decir, memresistores ideales ( $A$ ) definidos por una expresión de la Ley de Ohm, memresistores genéricos ( $B$ ), los cuales son un caso especial definidos en 2.18 y 2.19 y memresistores extendidos ( $C$ ), que son definidos en 2.16 y 2.18. Cada clase tiene dos representaciones, controlados por corriente o controlados por voltaje. En la Figura 2.5 se ilustra una forma de clasificar el memresistor.

### 2.4.1. Tipo 1. El memresistor ideal.

El memresistor ideal está definido por funciones escalares simples, las cuales corresponden a la memresistencia y memductancia que son obtenidas de una relación constitutiva entre la carga y el flujo. Estas funciones pueden estar caracterizadas por una curva polinomial monótona creciente o por funciones lineales por tramos. Un memresistor es ideal controlado por corriente la única variable responsable del cambio de memresistencia es la carga. Por otro lado, un memresistor ideal es controlado por voltaje si la única variable responsable del cambio de memductancia es el flujo. En la Figura 2.6 se muestra su diagrama emulador para implementar las ecuaciones de un memresistor ideal controlado por corriente y su gráfica voltaje-corriente, donde se observa que la no linealidad es causada por la dependencia de la

## CLASIFICACIÓN DE LOS MEMRESISTORES

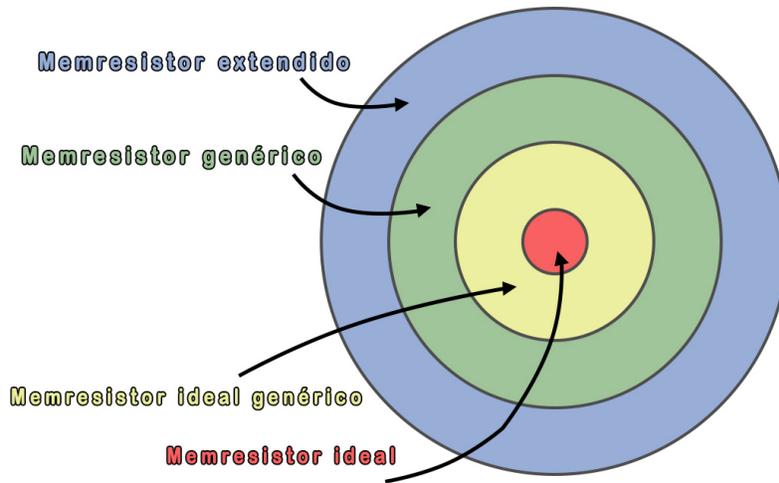


Figura 2.5: Clasificación de los memresistores [28]

memresistencia de la variable de estado. El mismo esquema puede ser utilizado para implementar un memresistor controlado por voltaje con la diferencia que el voltaje será la variable de estado.

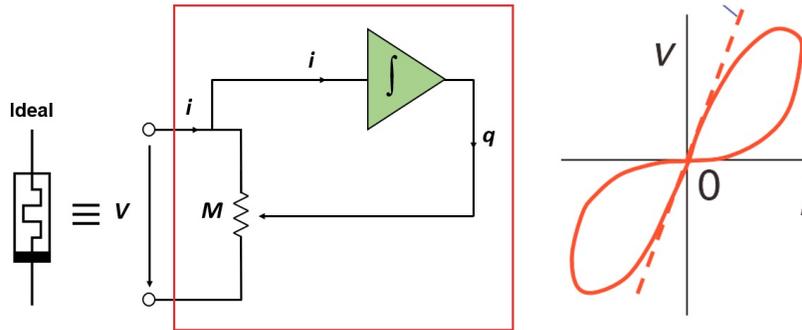


Figura 2.6: Emulador de un memresistor ideal y su gráfica  $v - i$  [51].

### 2.4.2. Tipo 2A. El memresistor ideal genérico.

Un memresistor se denomina memresistor ideal genérico [28] si

$$\begin{aligned} v &= M(x)i, \\ \dot{x} &= \hat{f}(x)i, \end{aligned} \tag{2.28}$$

si es controlado por corriente. Por otro lado es controlado por voltaje si

$$\begin{aligned} i &= G(x)v, \\ \dot{x} &= \hat{g}(x)v. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Donde  $M(x)$  y  $G(x)$  son la memresistencia y memductancia, respectivamente, mientras que  $\hat{f}(x)$  y  $\hat{g}(x)$  son funciones que definen el la ecuación de estado. Se le dice genérico porque el estado interno  $x$  es una variable que puede ser otra cosa además de flujo magnético o carga, como en el tipo ideal. En la Figura 2.7 se aprecia el comportamiento de un memresistor ideal genérico y su circuito emulador equivalente. El memresistor genérico ideal es una pequeña subclase del memresistor genérico si, y solo si  $M(x)$  y  $G(x)$  se derivan a partir de la relación constitutiva de un memresistor ideal. Recibió el termino genérico debido a que matemáticamente es equivalente al memresistor ideal, es decir, exhiben propiedades idénticas.

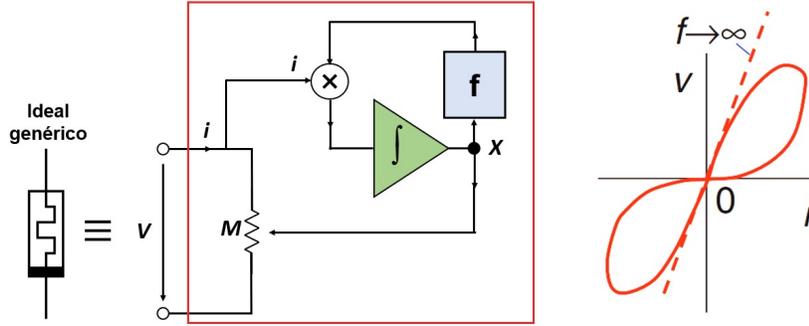


Figura 2.7: Emulador de un memresistor genérico ideal y su gráfica  $v - i$  [51].

### Procedimiento para obtener un memresistor ideal genérico [28]

- Paso 1. Escoger cualquier relación constitutiva de un memresistor ideal:

$$\varphi = q + \frac{1}{3}q^3 \triangleq \hat{\varphi}(q) \quad (2.30)$$

- Paso 2. Escoger una función uno a uno diferenciable arbitraria:

$$x = q^3 \triangleq \hat{x}(q) \quad (2.31)$$

y su inversa

$$q = x^{1/3} \triangleq \hat{x}^{-1}(x) \quad (2.32)$$

- Paso 3. Se obtiene la memresistencia

$$M(x) \triangleq \left. \frac{d\hat{\varphi}(q)}{dq} \right|_{q=x^{1/3}} = (1 + q^2) \Big|_{q=x^{1/3}} = 1 + x^{2/3} \quad (2.33)$$

- Paso 4. Se obtiene la ecuación de estado con

$$\hat{f}(x) \triangleq \left. \frac{d\hat{x}(q)}{dq} \right|_{q=x^{1/3}} = 3q^2 \Big|_{q=x^{1/3}} = 3x^{2/3} \quad (2.34)$$

- Paso 5. Substituir  $M(x)$  y  $\hat{f}(x)$  en 2.27 para obtener el siguiente memresistor genérico ideal:

$$\begin{aligned} v &= \left(1 + x^{2/3}\right) i \\ \frac{dx}{dt} &= \left(3x^{2/3}\right) i \end{aligned} \quad (2.35)$$

El procedimiento para obtener un memresistor ideal genérico es un proceso bidireccional, es decir, una vez obtenido se puede encontrar la relación constitutiva del memresistor ideal del cual se derivó.

### 2.4.3. Tipo 2B. Memresistor Genérico

Un memresistor es llamado genérico si, a diferencia del memresistor genérico ideal, en su ecuación de estado la corriente aparece dentro de la función no lineal como se muestra en la ecuación (2.37), cuando es controlado por corriente:

$$v = M(x)i \quad (2.36)$$

$$\dot{x} = f(x, i) \quad (2.37)$$

Cuando es controlado por voltaje se denota como:

$$i = G(x)v \quad (2.38)$$

$$\dot{x} = g(x, v) \quad (2.39)$$

Como se aprecia en la Figura 2.8, la corriente pasa a ser parte de la función que modifica el cambio de la variable  $x$  responsable del valor de la memresistencia, a diferencia del memresistor genérico ideal en donde solo es un valor que multiplica a la variable de estado.

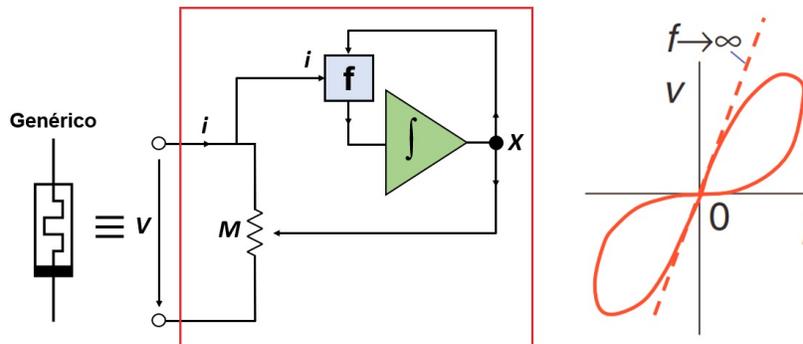


Figura 2.8: Emulador y gráfica  $v - i$  de un memresistor genérico [51].

Para entender mejor este modelo, en [28] se muestra un ejemplo de un sistema el cual deja de ser un memresistor genérico ideal, dando paso al modelo genérico. El Termistor NTC (Coeficiente de temperatura negativo) controlado por voltaje, en donde la resistencia decrece conforme la temperatura aumenta, el cual puede ser modelado a partir de la ley de ohm dependiente del estado (ecuación (2.18)) y la ecuación de estado (2.19)

$$i = W(x)v \quad (2.40)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\delta_N}{H_{CN}}(T_{ON} - x) + \frac{W(x)}{H_{CN}}v^2 \quad (2.41)$$

La memductancia en este ejemplo es definida por:

$$W(x) = \left[ R_{ON} e^{\beta_N \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{T_{ON}} \right)} \right]^{-1} \quad (2.42)$$

En donde  $\delta_N$ ,  $\beta_N$ ,  $H_{CN}$ ,  $R_{ON}$  y  $T_{ON}$  son constantes y la variable de estado  $x$  denota la temperatura del termistor NTC. Como se observa en este ejemplo, la variable  $x$  deja de ser un escalar para dar paso a la posibilidad de ser un vector, en donde varios parámetros modificarán la memresistencia o memductancia; en este caso es apreciable como la función que representa el cambio de la variable  $x$  ahora se encuentra influenciada por la variable de entrada ( $v$  o  $i$ ) a diferencia del memresistor ideal genérico.

#### 2.4.4. Tipo 3. Memresistor extendido.

La definición de un memresistor extendido controlado por voltaje es:

$$i = G(x, v)v; \text{ con } G(x, 0) \neq \infty \quad (2.43)$$

$$\dot{x} = g(x, v) \quad (2.44)$$

Se observa que la variable de entrada también modifica la memductancia directamente para el memresistor controlado por voltaje, a diferencia del memresistor genérico cuya memductancia solo depende de la variable de estado  $x$ . En el extendido la memresistencia es un número aun cuando la entrada es cero. Para el caso del control por corriente se tiene:

$$v = M(x, i)i \text{ con } M(x, 0) \neq \infty \quad (2.45)$$

$$\dot{x} = f(x, i) \quad (2.46)$$

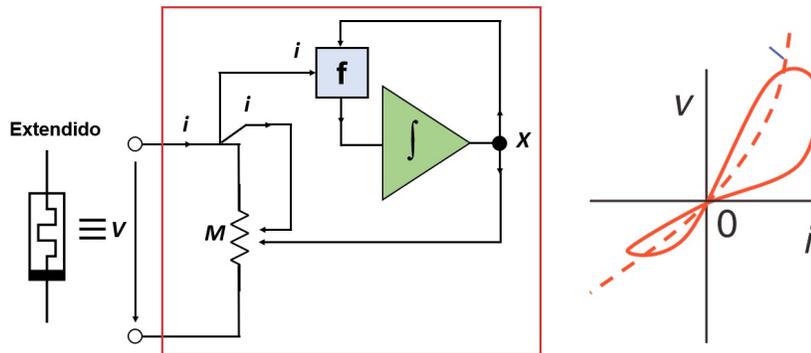


Figura 2.9: Emulador y gráfica  $v - i$  de un memresistor extendido [51].

En la Figura 2.11, se visualiza un circuito emulador que representa al memresistor extendido, donde adicionalmente a la variable de estado  $x$ , la corriente interviene en el cambio

de la memresistencia directamente, similar a una combinación de la resistencia no lineal y el memresistor genérico. Se muestra también la gráfica  $i-v$  en la cual se aprecia la intervención de la corriente, modificando la histéresis y el tamaño de los lóbulos.

En conclusión, la siguiente tabla se muestra la clasificación de los memresistores donde se encuentran las 4 clases de memresistores discutidos en esta sección.

<i>Clase</i>	<i>Controlado por Corriente</i>	<i>Controlado por Voltaje</i>
<b>Memresistor Extendido</b>	$v = M(x, i)i$ $M(x, 0) \neq \infty$ $\frac{dx}{dt} = f(x, i)$	$i = G(x, v)v$ $G(x, 0) \neq \infty$ $\frac{dx}{dt} = g(x, i)$
<b>Memresistor Genérico</b>	$v = M(x)i$ $\frac{dx}{dt} = f(x, i)$	$i = G(x)v$ $\frac{dx}{dt} = g(x, v)$
<b>Memresistor Genérico Ideal</b>	$v = M(x)i$ $\frac{dx}{dt} = \hat{f}(x)$	$i = G(x)v$ $\frac{dx}{dt} = \hat{g}(x)$
<b>Memresistor Ideal</b>	$v = M(q)i$ $\frac{dq}{dt} = i$	$i = G(\varphi)v$ $\frac{d\varphi}{dt} = v$

Tabla 2.1: Clasificación de los memresistores con sus ecuaciones.

## 2.5. Circuitos emuladores de memresistores

Un emulador es un dispositivo que replica el comportamiento que un dispositivo empleando un sistema o conjunto de dispositivos diferentes. Su función principal es la de sustituir un dispositivo conservando su comportamiento.

Los circuitos emuladores de memresistores existentes se pueden dividir en tres principales grupos:

- Analógicos. Un emulador analógico es aquel que se caracteriza por implementar la relación constitutiva del memresistor mediante componentes analógicos.
- Digitales. Los emuladores digitales utilizan un convertidor analógico-digital y un microcontrolador que calcula la relación constitutiva del memresistor y generalmente establece el valor de memresistencia o memductancia adecuada en un potenciómetro digital.
- Híbridos. Los emuladores híbridos se componen de dispositivos analógicos y digitales, es decir, una fuente de voltaje o corriente es controlada digitalmente mediante un microcontrolador que calcula la relación constitutiva del memresistor.

El primer emulador que apareció en la literatura fue una serie de circuitos con componentes analógicos, introducidos por el profesor Chua en 1971. Chua los llamó mutadores  $M - R$ ,

$M - L$  y  $M - C$  los cuales transforman la característica no lineal del resistor, capacitor o inductor en el memresistor, es decir, dada la relación constitutiva:

$$f_R = (v_R, i_R) = 0 \quad (2.47)$$

el mutador la transforma en la relación constitutiva del memresistor

$$f_M = (\varphi_M, q_M) = 0. \quad (2.48)$$

Esta transformación conserva la forma de la característica no lineal del elemento tipo  $R$ ,  $L$  o  $C$ , que se transforma en la correspondiente relación constitutiva de flujo y carga del memresistor. Cada mutador puede ser de dos tipos, dependiendo de si la variable independiente/dependiente en la característica no lineal original se transforma en variable independiente/dependiente de la relación constitutiva del memresistor (más detalles en [21]).

Generalmente los emuladores analógicos se implementan utilizando los dos métodos que se basan en el modelo general de la Figura 2.10. El primer método, que se muestra en la Figura 2.10(a), funciona integrando la señal de entrada, ya sea voltaje o corriente. Seguido, la señal de entrada se transforma a través de una función no lineal  $g(x)$ . La salida de la función no lineal y la señal de entrada se multiplican. Esta operación representa la corriente o voltaje del memresistor. El segundo método, que se muestra en la figura 2.13(b), funciona integrando la señal de entrada, que puede ser voltaje o corriente. Para determinar si la resistencia es incremental o decremental, se aplica el bloque de función no lineal  $f(x)$ . Posteriormente, se aplica un diferencial a la salida de la función no lineal de voltaje o corriente.

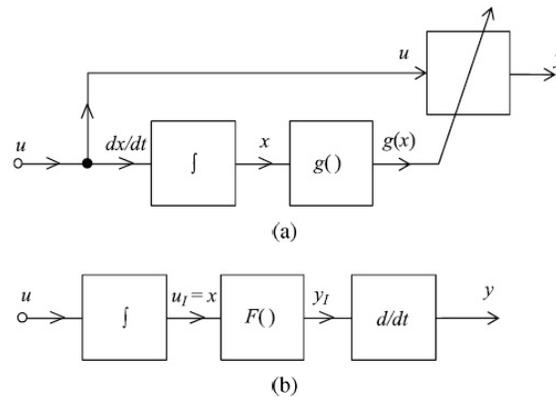


Figura 2.10: Modelos generales de emuladores analógicos. **(a)** basado en una función no lineal  $g(x)$  y una ecuación de estado  $dx/dt = u$ , donde  $y = g(x)u$ ,  $u$ ,  $x$ ,  $y$  son la variable de entrada, variable de estado y respuesta. **(b)** basado en la relación constitutiva  $y = F(x)$ , donde  $u$ ,  $x$  e  $y$  son la variable de entrada, variable de estado y respuesta. [52]

En [53] Valsa y Biolk proponen un emulador diseñado como prueba de concepto de las propiedades del memresistor mediante la observación de la respuesta en la memresistencia a diferentes señales de entrada, el cual opera sobre la base del modelo general. El circuito usa un transistor JFET para proporcionar la memductancia controlada por voltaje ( $G_M$ ) y un integrador basado en un amplificador operacional para obtener el voltaje que representa el flujo ( $v_\varphi$ ) que se usa para controlar ( $G_M$ ) (Figura 2.11). En respuesta a una señal sinusoidal

de entrada con una frecuencia y amplitud apropiadas, el circuito permite la observación del peculiar lazo de histéresis pinchada que tiene su cruce por cero.

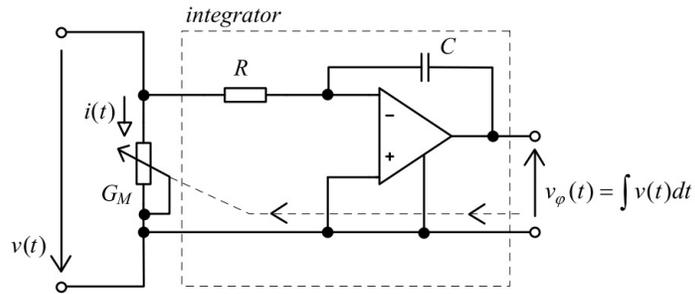


Figura 2.11: Esquema simplificado del emulador de Valsa y Biolek [52].

Asimismo, diversos diseños de emuladores de memresistor están disponibles en la literatura. Estos emuladores están compuestos en su mayoría por componentes electrónicos pasivos y algunos componentes activos como transistores y multiplicadores analógicos. En otras implementaciones se utilizan microcontroladores, conversor analógico-digital (CAD) y convertidores digital-analógico (CDA). Un ejemplo es el emulador presentado en [54] que consta de un microcontrolador, un convertidor (CAD) y un potenciómetro digital. Por otro lado en [55] se propone un emulador híbrido que combina el uso de convertidores (CAD) y (CDA), con componentes analógicos.

En el capítulo tres se discutirán otros ejemplos de emuladores, así como el diseño de emulador a partir de la implementación directa de las ecuaciones que definen el memresistor. Se discutirá de forma extensa los emuladores digitales e híbridos de memresistores. También se presenta una propuesta de emulación de memresistores a través de fuentes de voltaje o corriente controladas digitalmente.

# Capítulo 3

## Emulación de memresistores

Desde la introducción del memresistor de HP, se ha generado un gran interés en comprender e investigar las potenciales aplicaciones de este dispositivo no lineal de dos terminales. Hasta la fecha, aparte del memresistor de HP, se han encontrado algunos dispositivos experimentales que emulan el comportamiento del memresistor [43–45]. Sin embargo, todavía no están disponibles en el mercado, ni sus propiedades se pueden sintonizar fácilmente para investigar su rol en circuitos más complejos. Por lo tanto, resultan altamente valiosos los emuladores electrónicos de tales elementos con memoria que podrían construirse y sintonizarse fácilmente. Existen tres posibles etapas para estudiar el memresistor como cuarto elemento fundamental de los circuitos, la primera es mediante la generación de un modelo, la segunda es la simulación del comportamiento del elemento con la ayuda de su modelo y por último la emulación del hardware del memresistor. En este capítulo se hace una revisión más formal de los diferentes tipos de emuladores registrados en la literatura. Por otro, lado también se presenta el diseño y análisis de dos emuladores híbridos, partiendo de análisis de sus modelos matemáticos hasta la explicación de los circuitos propuestos.

### 3.1. Circuitos emuladores de memresistores.

El modelado y simulación de memresistores son herramientas importantes para investigar sus características generales. También proporcionan una retroalimentación importante para verificar la validez de los resultados teóricos. La simulación es invaluable para estudiar el objeto a través de revelar sus respuestas a cambios en sus parámetros o en la estructura de su modelo. Por lo tanto, el siguiente paso en el estudio de memresistores es mediante realizaciones experimentales. El primer paso en el diseño de un emulador es considerar si el propósito es emular el memresistor como un elemento ideal o un sistema memresistivo generalizado, así como sus propiedades. También es importante considerar si el emulador estará conectado a tierra o será un dispositivo flotante. La mayoría de los emuladores que se han propuesto en la literatura son conectados a tierra. Dado que la no volatilidad es una característica clave del memresistor, es útil preguntar cuánto debería incorporarse en el emulador esta propiedad. Paradójicamente, la no volatilidad no es muy importante para experimentos y demostraciones cuya duración es corta en comparación con la constante de tiempo de la memoria implementada en el circuito.

### 3.1.1. Circuitos emuladores analógicos.

Existe una gran cantidad de propuestas para estudiar memresistores mediante emuladores analógicos en la literatura. Una peculiaridad de estos emuladores es que la mayoría imitan las características básicas de un memresistor ideal (en particular, el lazo de histéresis pinchada) o el memresistor de HP. Los emuladores analógicos pueden ser de dos tipos: directos e indirectos. El emulador de tipo indirecto utiliza un resistor no lineal y un mutador lineal, que transforma la característica  $v - i$  no lineal del resistor al dominio  $q - \phi$ . El emulador de tipo directo está diseñado de tal manera que implementa directamente las ecuaciones que caracterizan al memresistor mediante una configuración de circuito adecuada. La característica clave del tipo indirecto es su universalidad, mientras que el tipo directo puede conducir a una implementación más simple [27].

#### (a) Emuladores analógicos de tipo indirecto

En la sección 2.3 se presentó el primer emulador analógico de tipo indirecto el cual está basado en mutadores [21]. En estos emuladores es posible obtener todas las propiedades del memresistor, ya que se basan en una relación constitutiva (RC). Esta RC se define a través de la RC de un resistor no lineal (o inductor o capacitor) conectado al puerto correspondiente del mutador. Desde este punto de vista, el emulador es fácil de reconfigurar: la RC del memresistor emulado se puede modificar reemplazando o “reprogramando” el dispositivo externo de dos terminales.

El emulador de la Figura 3.1 funciona según el principio de un mutador que transforma la característica no lineal  $i_R = G(v_R)$  del resistor  $R$ , conectada entre la salida del amplificador operacional (OpAmp, por sus siglas en inglés) número 2 y el puerto negativo del amplificador operacional número 3, en una característica flujo-carga similar al memresistor, emulado en el puerto  $v_M - i_M$ .

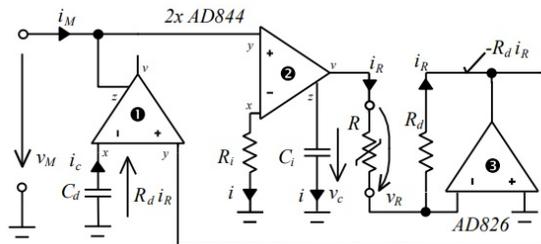


Figura 3.1: Esquema de un emulador indirecto, que funciona según el principio de un mutador que transforma la característica  $i - v$  no lineal del resistor  $R$  en una característica flujo-carga de forma similar al memresistor [56].

Un análisis más detallado del esquema de la Figura 3.1 da como resultado la conclusión de que implementa el mutador de la Figura 2.10 a través de los circuitos integrados actuales. El funcionamiento de este mutador se puede explicar a partir del modelo general de memresistor en la Figura 3.2: La variable excitante  $u$ , el voltaje en este caso, se integra y luego se transforma a través de un bloque no lineal  $F$ , que representa la relación constitutiva del memresistor, y la señal de salida de este bloque es diferenciada para obtener la cantidad de

salida  $y$ , que es la corriente del memresistor. El amplificador operacional número 2 junto con  $R_i$  y  $C_i$  forman el integrador del voltaje  $v_M$  con constantes de tiempo  $R_i C_i$ . Su voltaje de salida es también el voltaje a través de la resistencia no lineal  $R$ . La corriente que fluye a través de esta resistencia se convierte en voltaje a través del amplificador número 3 con la resistencia de retroalimentación  $R_d$ . Este voltaje luego se convierte a la corriente  $i_c = i_M$  por un convertidor de tipo diferenciador, que consiste en el amplificador número 1 y el capacitor  $C_d$ . De esta manera, la corriente a través del puerto memristivo es proporcional a la derivada en el tiempo de la corriente a través de la resistencia no lineal con el coeficiente de proporcionalidad  $R_d C_d$ .

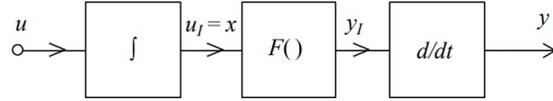


Figura 3.2: Modelo general de un memresistor con una relación constitutiva  $y_I = F(u_I)$ , donde  $u$ ,  $x$  e  $y$  son la variable de excitación, la variable de estado y la respuesta,  $y_I$  y  $u_I$  son integrales en el dominio del tiempo de las cantidades  $u$  e  $y$ . Para un memresistor controlado por corriente,  $u$  es corriente,  $y$  es voltaje y  $x$  es carga. Para un memresistor controlado por voltaje,  $u$  es voltaje,  $y$  es corriente y  $x$  es flujo.

La integral de la corriente  $i_M$ , la carga del memresistor emulado, es directamente proporcional a la corriente del resistor  $i_R$  con la constante de proporcionalidad  $R_d C_d$ , y la integral del voltaje del memresistor, el flujo, es proporcional al voltaje del resistor  $v_R$  con el coeficiente de proporcionalidad  $R_i C_i$ . El circuito emula un memresistor con memresistencia:

$$R_m = \frac{d\phi}{dq} = \frac{R_i C_i}{R_d C_d} \frac{dv_R}{di_R} = \frac{R_i C_i}{R_d C_d} R_{dif} \quad (3.1)$$

donde  $R_{dif}$  es la resistencia diferencial de la resistencia no lineal  $R$ . Se sigue de la ecuación (3.1) que la relación de las constantes de tiempo de integración y diferenciación es igual a la relación de la memresistencia emulada y la resistencia diferencial del resistor. Es útil proponer la constante de integración con respecto al rango de frecuencia donde se planea estudiar los efectos de histéresis en la característica  $i - v$  del memresistor emulado. La ganancia del integrador es la unidad para la frecuencia del voltaje de excitación:

$$f = \frac{1}{2\pi R_i C_i}. \quad (3.2)$$

Entonces, la resistencia no lineal  $R$  es excitada por un voltaje con la misma amplitud que  $v_M$ . El aumento de esta frecuencia provocará una disminución en la oscilación de voltaje en la resistencia, y los fenómenos no lineales, incluido el lazo de histéresis pinchada, disminuirán gradualmente. El emulador de la Figura 3.1 representa una de varias implementaciones posibles de los mutadores  $M - R$  (memristor-resistor) clásicos del artículo original [21] por medio de componentes electrónicos actualizados. Es más simple que el mutador de la Figura 2.10, mientras que incorpora todas sus ventajas.

## (b) Emuladores analógicos de tipo directo

En [57] se presenta un emulador compuesto de un optoacoplador, un fotorresistor (LDR, por sus siglas en inglés) y un LED, como se muestra en la Figura 3.3.

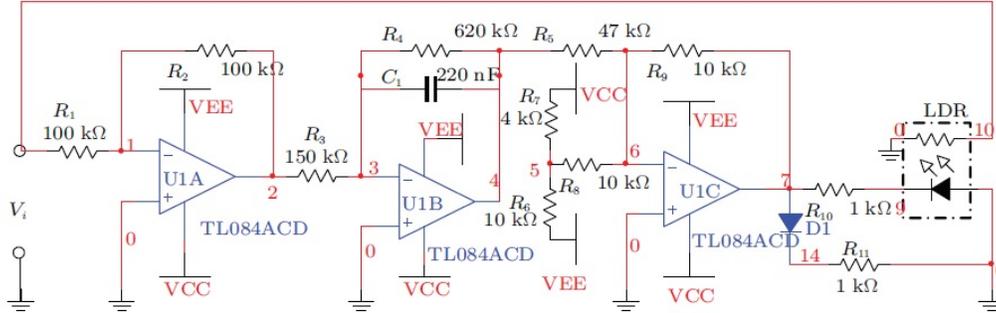


Figura 3.3: Circuito emulador basado en un fotorresistor LDR y un LED [57].

En este circuito, se utiliza un optoacoplador para generar una resistencia variable basada en la señal de entrada. Según el voltaje de entrada, el brillo del LED cambia. El cambio de intensidad hace que cambie la corriente a través de la foto celda. Se utiliza un potenciómetro para desviar el LDR en la región lineal. Según la intensidad de la luz, la pendiente de conductancia cambia, lo que implica un cambio en la resistencia. Se utiliza una resistencia en serie de  $1K\Omega$  y diodo  $D1$  con LED. El amplificador operacional  $U1A$  forma un búfer para minimizar la corriente extraída de la entrada. El amplificador operacional  $U1B$  conforma el integrador junto con las resistencias  $R3$ ,  $R4$  y el condensador  $C1$ . Las resistencias  $R6$  y  $R7$  forman el trimpot para ajustar el rango lineal de conductancia del LDR. La resistencia dependiente de la entrada se modela mediante el LED y el LDR. Este circuito exhibe un comportamiento memristivo hasta  $280Hz$ , y el rango de frecuencia está determinado por  $R3$ ,  $R4$  y  $C1$ . El amplificador operacional opera a  $+15V$  y se usa una entrada de  $0.4V$  y  $0.8V$ . El circuito se implementa en una placa de pruebas utilizando componentes electrónicos básicos. Se debe tomar en cuenta que este emulador no es adecuado para su integración en circuitos más complicados como un dispositivo de dos terminales.

El emulador de la Figura 3.4, publicado en [13], no sufre del inconveniente anterior. Su topología, que contiene multiplicadores analógicos, asegura que la memductancia del mem-resistor emulado depende del flujo  $\phi$ , es decir, la integral del voltaje  $v_1$ , según la ecuación  $G_M = (a + b\phi^2)$ , donde  $a < 0$ ,  $b > 0$  son coeficientes reales, dependientes de las resistencias  $R_1$  a  $R_5$  [13].

La emulación de otros tipos de características solo es posible después de modificar el circuito. Por ejemplo, omitiendo el multiplicador  $U_2$  e interconectando la salida  $v_{15}$  del integrador y la entrada  $y_1$  del multiplicador  $U_3$ , se obtiene una dependencia lineal, no cuadrática, de la memductancia en el flujo. Otra observación de este emulador revela lo siguiente: el voltaje  $v_{15}$  es la integral del voltaje  $v_1$ . El circuito restante transfiere este voltaje  $v_{15}$ , según una fórmula concreta, a la corriente  $i_m$ , que fluye a través del puerto emulado. Desde este punto de vista, se trata de nuevo de un modelo de memristor según el diagrama de bloques general de la Figura 2.10. A diferencia del emulador de la Figura 2.11, la corriente no se

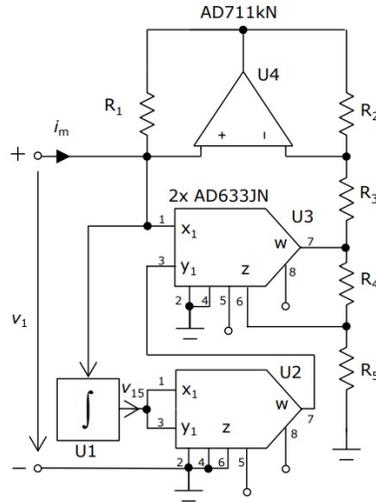


Figura 3.4: Esquema del emulador de memristor propuesto en [13], que contiene un integrador, multiplicadores analógicos y un convertidor  $v - i$ .

“calcula” a través de una resistencia no lineal, sino que se logra mediante el circuito que contiene los multiplicadores y el amplificador  $U_4$ . Usando este circuito, se puede ajustar la dependencia prescrita de la memductancia en la integral del voltaje. Por otro lado, debido a varios problemas asociados con la emulación de memresistores a través de componentes electrónicos activos, como limitaciones de señal, problemas de offset y drift, distorsión no lineal parásita procedente de amplificadores operacionales, la necesidad de una fuente de alimentación y la volatilidad de los circuitos de integración internos, los emuladores pasivos sin batería y electromecánicos pueden ser una alternativa interesante a los emuladores analógicos convencionales.

Es bien sabido que los dispositivos resistivos de dos terminales térmicamente dependientes, como lámparas incandescentes, termistores o incluso arcos eléctricos, pueden exhibir algunas propiedades de memresistores [58, 59]. Por lo tanto, estos dispositivos pueden servir como simples emuladores del comportamiento memresistivo. Sin embargo, dado que presentan lazos de histéresis pinchada de tipo II [36], no se pueden utilizar para imitar memresistores ideales como elementos fundamentales de circuito. Lo mismo se aplica a los circuitos pasivos simples que contienen diodos y elementos reactivos, como rectificadores, que proporcionan un comportamiento de histéresis [60].

Un ejemplo de este emulador se muestra en la Figura 3.7. La conductancia del transistor entre los terminales  $D$  y  $S$  está controlada por el voltaje de salida de un integrador con pérdida  $RC$  pasivo con la frecuencia de corte de aproximadamente  $1.6kHz$ , por lo que la conductancia depende de la variable de estado interno  $v_c$ . En [61] se muestra que este circuito puede mostrar propiedades básicas del memristor.

En [62] se presenta un emulador memresistivo basado en un micromotor  $CD$  acoplado mecánicamente con un potenciómetro. En la Figura 3.8, dos diodos Zener  $Z_A$ ,  $Z_B$  suprimen la corriente a través del motor a voltajes aplicados más bajos, proporcionando así los voltajes de umbral para cambiar la resistencia del potenciómetro. El motor sirve como memoria mecánica no volátil, recordando la posición del eje. El emulador se comporta como un sistema

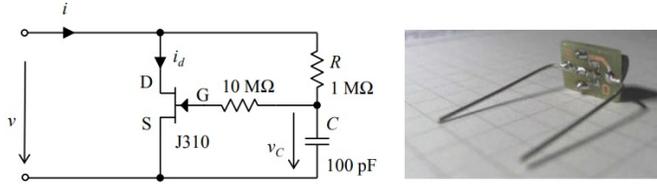


Figura 3.5: Emulador de un sistema memresistivo pasivo [61]

memristivo pasivo, flotante, no volátil controlado por voltaje.

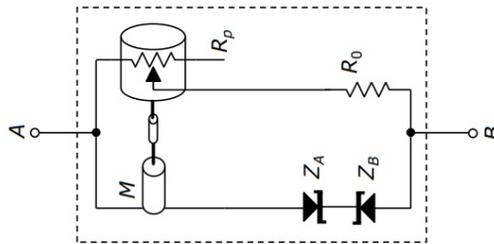


Figura 3.6: Emulador memresistivo electromecánico [62]

El dispositivo electromecánico de la Figura 3.9 de [63] emula un sistema memresistivo de dos estados. Es interesante que la memoria binaria del memresistor esté implementada por un relé de enclavamiento *TQ* biestable, que mantiene su estado sin necesidad de energía externa. El estado se puede cambiar a través de una corriente que pasa a través de las bobinas de ajuste y reinicio. Los contactos del relé conmutan una de las resistencias  $R_{ON}$  y  $R_{OFF}$  entre las terminales del dispositivo emulado.

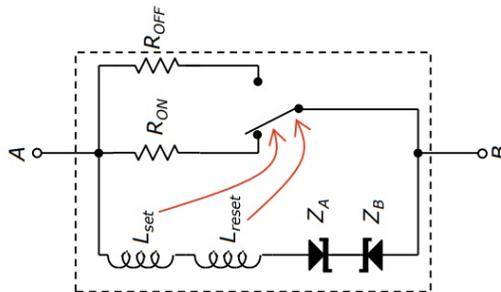


Figura 3.7: Emulador memresistivo electromecánico de dos estados [63]

### 3.1.2. Circuitos emuladores digitales.

Una de las principales ventajas que tienen los emuladores digitales es la posibilidad de emular sistemas memresistivos más complicados, ya que es posible modificar el modelo a emular mediante un microcontrolador. En [54] se presenta un emulador digital, como se

muestra en la Figura 3.8. Este emulador de memresistor programable actúa como un potenciómetro digital. Cuando se programa el memresistor, la amplitud de los pulsos de programación es crucial. Para voltajes por debajo de un nivel de umbral, el cambio de resistencia en el memristor es pequeño y para voltajes mayores, la precisión de la programación de la resistencia al valor requerido se ve afectada. Por lo tanto, se prefiere un tren de pulsos con un ancho pequeño y una amplitud pequeña (por debajo de un nivel de umbral) para programar la descripción del memresistor en el emulador.

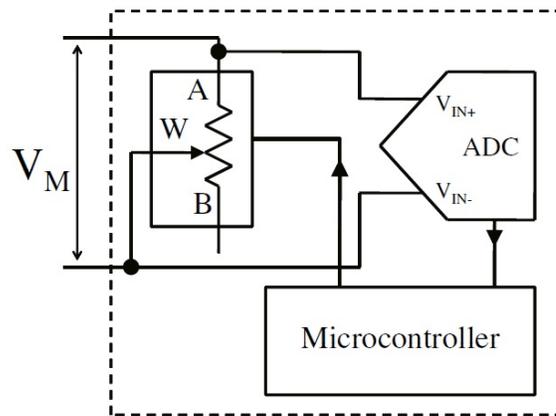


Figura 3.8: Circuito emulador digital [54].

Este circuito descrito por la Figura 3.8 consta de un potenciómetro digital, un convertidor analógico a digital ADC y un microcontrolador. Los terminales A y B del potenciómetro sirven como conexiones externas. El voltaje a través de estas terminales es procesado por el ADC, de esta forma el ADC convierte la señal analógica a binaria para ser procesada por el microcontrolador. El microcontrolador está programado para calcular el valor de la resistencia, basado en un código, y actualiza el valor de la resistencia ajustando la posición del potenciómetro digital. Por lo tanto, a medida que cambia la señal de entrada, cambia la salida del microcontrolador, el microcontrolador actualiza el valor de resistencia y la posición del potenciómetro digital cambia en consecuencia. A medida que aumenta la señal entrada, la resistencia disminuye y viceversa. El potenciómetro digital utilizado en este emulador es un AD5206 con  $10K\Omega$  de 256 posiciones y el microcontrolador utilizado es el dsPIC30F2011, que tiene un ADC interno de 12 bits. El circuito opera a  $+2.5V$  y la memresistencia se puede observar en un rango de hasta  $50Hz$ .

Por otra parte, este mismo principio de emulación se propone en [34,35]. Sin embargo, el emulador sólo consta de un potenciómetro digital que es controlado por un microcontrolador como se observa en la Figura 3.11. El convertidor analógico-digital del Arduino muestrea continuamente la variación de voltaje a través de las terminales del potenciómetro que a su vez es utilizada por el microcontrolador del Arduino para calcular la resistencia equivalente del emulador, determinada por las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del memresistor.

Una de las desventajas de utilizar componentes digitales para la emulación de memresistores es que la discretización, conversión, la pérdida de resolución y la velocidad de muestreo afectan considerablemente la frecuencia de trabajo del emulador.

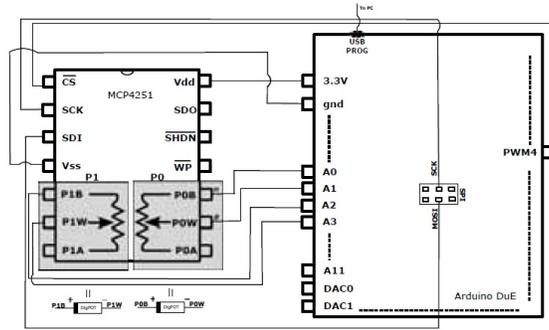


Figura 3.9: Diagrama esquemático del emulador conformado por un potenciómetro digital y un Arduino [34]

## 3.2. Circuitos emuladores híbridos.

Un emulador híbrido de memresistor es un circuito electrónico de modo mixto que imita las características de un dispositivo real en sus terminales. Su estructura híbrida contiene circuitos analógicos y dispositivos digitales unificados que modelan un memresistor de dos terminales. Este tipo de emuladores tienen una interfaz analógica-digital y un microcontrolador para programar las ecuaciones que determinan el comportamiento del memresistor. En comparación con los emuladores digitales anteriormente expuestos este enfoque de emulación no requiere de un potenciómetro digital ya que el puerto analógico del emulador se realiza mediante fuentes controladas por voltaje o por corriente.

### 3.2.1. Modelado de memresistores a través de fuentes controladas.

Este enfoque de modelado parte de la definición de sistemas memresistivos (MrS) controlados por corriente (CC), controlados por voltaje (VC), controlados por carga (QC) y controlados por flujo (FC). Como se mostró en el capítulo anterior, estos sistemas pueden ser descritos por las ecuaciones 2.27 y 2.28, es decir, una ecuación algebraica (PE) y una ecuación diferencial (SE), esta última conteniendo un vector de estados  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  y su primera derivada con respecto al tiempo. Si las variables de estado en este vector son independientes, entonces  $n$  es el orden del sistema [48]. Para modelar estos sistemas a través de fuentes controladas por voltaje o corriente, la PE debe transformarse en otra ecuación, para calcular el voltaje o corriente del puerto analógico (VPE será una PE de voltaje, mientras que IPE será una PE de corriente). El modelado de sistemas memresistivos, que se muestra en la Figura 3.16, se basa en el hecho de que una resistencia, simulando el memresistor, se puede implementar mediante una fuente de voltaje o corriente, controlada según el VPE o IPE. Es por eso que cada sistema memresistivo puede modelarse de dos maneras, etiquetadas como “tipo I” y “tipo II”.

Por ejemplo, el sistema memresistivo controlado por corriente (CCMrS) de tipo I se modela a través de una fuente de voltaje y su valor de voltaje es calculado a través del VPE. Para calcularlo, es necesario detectar la corriente  $i$  que fluye a través del puerto memresistivo y conocer el valor real de la memresistencia  $R_M$ . La memresistencia se calcula en el bloque

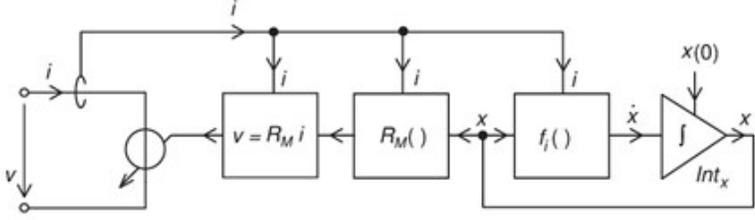
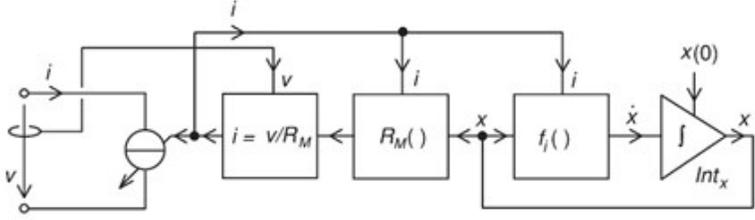
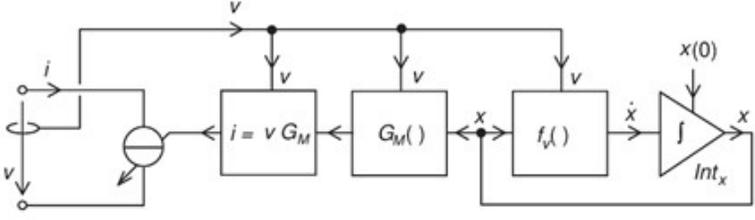
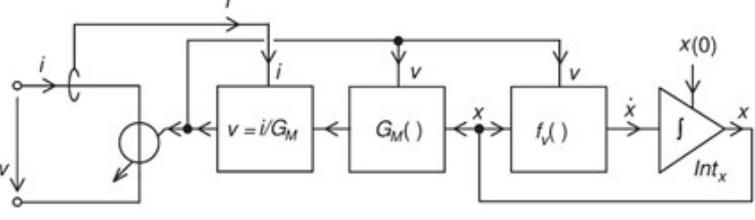
CCMrS Type I	PE: $v = R_M(x, i, t)i$ , SE: $\dot{x} = \frac{d}{dt}x = f_i(x, i, t)$ , VPE: $v(t) = R_M(t)i(t)$
	Diagram: 
CCMrS Type II	PE: $v = R_M(x, i, t)i$ , SE: $\dot{x} = \frac{d}{dt}x = f_i(x, i, t)$ , IPE: $i(t) = v(t)/R_M(t)$
	Diagram: 
VCMrS Type I	PE: $i = G_M(x, v, t)v$ , SE: $\dot{x} = \frac{d}{dt}x = f_v(x, v, t)$ , IPE: $i(t) = G_M(t)v(t)$
	Diagram: 
VCMrS Type II	PE: $i = G_M(x, v, t)v$ , SE: $\dot{x} = \frac{d}{dt}x = f_v(x, v, t)$ , VPE: $v(t) = i(t)/G_M(t)$
	Diagram: 

Figura 3.10: Modelado de sistemas memresistivos controlados por voltaje y corriente [55]. CCMrS, sistema memresistivo controlado por corriente; VCMrS, sistema memresistivo controlado por voltaje; SE, ecuación de estado; PE, ecuación algebraica; VPE, ecuación en el puerto analógico de voltaje; IPE, ecuación en el puerto analógico de corriente.

$R_M()$  a través de la PE de corriente  $i$  y el vector de estado  $x$ . El estado se calcula a partir de la SE concretamente a través de la integración de la salida  $\dot{x}$ : del bloque etiquetado como  $f_i()$ . Para el caso del CCMrS de tipo II, se debe realizar la misma metodología. La única diferencia es que este sistema se emula a través de una fuente de corriente cuyo valor de corriente se calcula como una relación entre el voltaje detectado en el puerto analógico y la memresistencia  $R_M$ .

Para los sistemas memresistivos controlados por voltaje (VCMrS), la memductancia  $G_M$  (valor recíproco de la memresistencia) es controlada por las variables de estado y el voltaje  $v$  en el puerto analógico. El tipo I se modela de tal manera que la memductancia se calcula a través del voltaje detectado, mientras que para el tipo II, este voltaje se obtiene indirectamente a través de la VPE. El cálculo del estado del sistema es el mismo que para los CCMrS.

### 3.2.2. Propuesta de emulador de memresistor híbrido.

Como se mostró en la sección anterior un sistema memresistivo se puede modelar mediante dos posibles métodos:

- Midiendo el voltaje del puerto analógico y luego calcular la corriente del puerto. Posteriormente, este valor se establece en la fuente de corriente, que está conectada en paralelo a la puerta de entrada.
- Midiendo la corriente del puerto analógico y luego calcular el voltaje del puerto. Posteriormente, este valor se establece en la fuente de voltaje, que está conectada en paralelo a la puerta de entrada.

Tomando el principio de emulación de [55] se propone este emulador de memresistor híbrido, el cual se conforma de un microcontrolador, un convertidor analógico-digital, una fuente de voltaje o corriente y una interfaz digital-analógica, en la implementación de circuitos caóticos. Sin la necesidad de utilizar un potenciómetro digital el cual puede estar limitado por sus propiedades físicas.

En la Figura 3.11(a), el microcontrolador mide el voltaje  $v$  del puerto a través del ADC, calcula la corriente  $i$  usando la ecuación de Ohm dependiente del estado interno y su ecuación de estado, así mismo establece un valor en una fuente de corriente controlada digitalmente. De esta forma, es posible emular cualquier sistema memresistivo de dos terminales controlado por corriente. De manera similar el ADC en la Figura 3.11(b) mide la caída de voltaje a través de la resistencia  $R$ , que es causada por la corriente de una fuente controlada a través de la corriente  $i$  del puerto analógico. Usando la ecuación de Ohm dependiente del estado interno y su ecuación de estado, el MCU calcula el voltaje  $v$  requerido y lo establece en una fuente de voltaje controlada digitalmente. De esta forma, es posible emular todos los sistemas memresistivos de dos terminales controlados por voltaje.

### 3.2.3. Emulador de un memresistor implementado en Simscape.

El modelo de este emulador es un sistema memresistivo controlado por voltaje descrito por

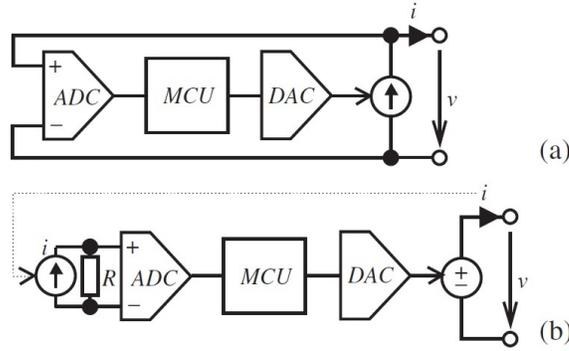


Figura 3.11: Esquemas simplificados del emulador híbrido, empleando una fuente controlada por corriente (a), voltaje (b) [55].

$$I = R_M^{-1} V_M \quad (3.3)$$

$$\dot{x} = (\beta V_M + 0.5(\alpha - \beta)[|V_M + V_T| - |V_M - V_T|]) \times \theta(x - R_1) \theta(R_2 - x). \quad (3.4)$$

El cual es un memresistor controlado por voltaje con valor umbral, donde 3.3 describe la corriente en las terminales del emulador según la ley Ohm, mientras que la ecuación (3.4) describe la evolución del sistema en función de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $V_T$  y la función  $\theta$ . Por otro lado la tasa de cambio de memresistencia está definida por la función

$$f(V_M) = \beta V_M + 0.5(\alpha - \beta)[|V_M + V_T| - |V_M - V_T|] \quad (3.5)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son la la razón de cambio de memresistencia cuando  $|V_M| \leq V_T$  y cuando  $|V_M| > V_T$ , respectivamente. Si el valor de  $\beta$  incrementa, entonces más rápido cambia el valor de memresistencia.  $V_T$  es el valor umbral, las funciones  $\theta$  de tipo escalón muestran el rango en que la memresistencia puede cambiar, es decir, entre  $R_1$  y  $R_2$  [64]. En la Figura 3.12 se muestran las pendientes generadas por  $\alpha$  y  $\beta$ . Donde se aprecia que con valores de  $\alpha = 500 \frac{\Omega}{(V \cdot s)}$ ,  $\beta = 2\alpha$  y  $V_T = 0.5V$ , el cambio de memresistencia antes del valor umbral es pequeño, mientras que al superar el valor umbral  $V_T$  el cambio es mucho mayor.

Por otro lado, en la Figura 3.13 se observa el lazo de histéresis pinchada al aplicar una señal  $v(t) = 2\cos(2\pi\omega t)$ , donde se demuestran las propiedades del memresistor, es decir, que la histéresis tiene cruce por cero en el origen y se degrada al aumentar la frecuencia (1.257, 6.28 y 31.42 Hz), lo cual se debe a la dependencia del área de los lóbulos de la frecuencia de la señal de excitación, si el valor es muy alto el memresistor no tiene el tiempo suficiente para que los parámetros ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) tengan un efecto en la ecuación 3.4. Cuando la frecuencia de la señal de excitación es alta, la gráfica  $v - i$  tenderá a ser mono-valuada similar a un resistor.

La simulación del emulador se realizó mediante la herramienta Simscape de Simulink que permite modelar sistemas físicos. La construcción del modelo se basa en en los diagramas de bloques mostrados en la sección 2.4. En el esquema de la Figura 3.14 el memresistor es representado como un resistor variable con tres terminales de acuerdo a la librería de Simscape, el cual cumple con las mismas características de un potenciómetro digital. Dos de sus terminales permiten medir el voltaje del dispositivo, mientras que la tercera es una

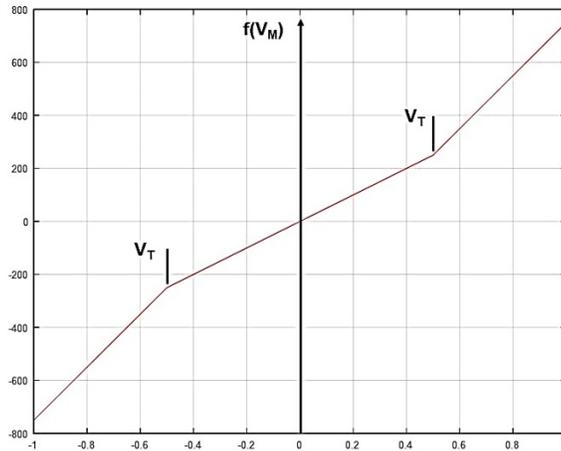


Figura 3.12: Cambio de memresistencia en función del voltaje aplicado.

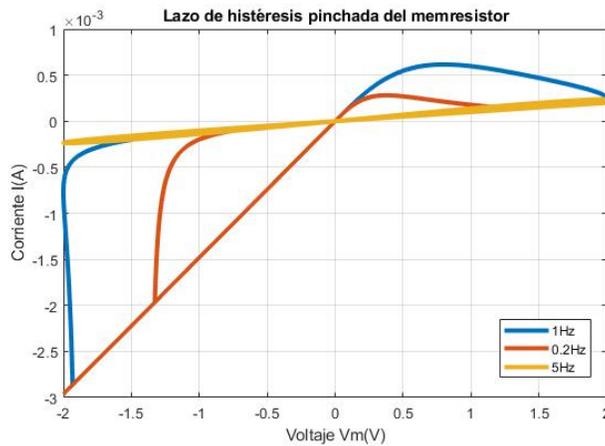


Figura 3.13: Gráfica  $I - V$ .

entrada que permite la regulación directa del valor de memresistencia del emulador en función de una señal de entrada. Además, se utilizan un par de bloques que permiten conectar bloques de Simulink y bloques de Simscape (en una implementación experimental son equivalentes a los convertidores ACD y CDA). Para establecer el valor de corriente adecuado del memresistor, es necesario medir el valor de voltaje a través de las terminales del memresistor mediante un medidor de voltaje, con ese valor el microcontrolador MCU calcula el valor de memresistencia de acuerdo con 3.3 y 3.4.

En la Figura 3.16 se puede ver el voltaje de entrada y la corriente en las terminales del memresistor. En la Figura 3.17 se muestra el lazo de histéresis pinchada con cruce por cero en el origen.

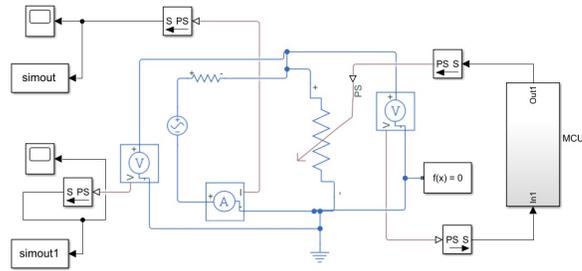


Figura 3.14: Memresistor implementado en Simulink y Simscape.

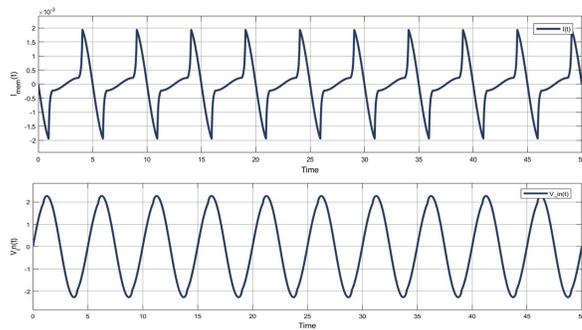


Figura 3.15: Gráficas de corriente y voltaje del memresistor bajo un voltaje aplicado  $V(t) = 2.3\text{Sin}(2\pi ft)$ . Para obtener el valor de corriente se conectó en serie una resistencia  $R_0 = 100\Omega$ .

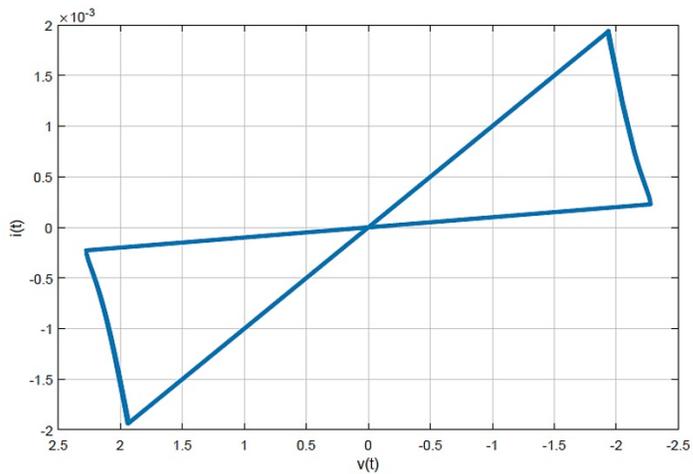


Figura 3.16: Lazo de histéresis pinchada del memresistor bajo un voltaje aplicado  $V_M = 2.3\text{Sin}(2\pi ft)$ . Se emuló el modelo 3.4 con  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 62\text{k}\Omega/\text{V} \cdot \text{s}$ ,  $V_T = 1.75\text{V}$ ,  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 10\text{k}\Omega$ .

Como se mencionó anteriormente el uso de un microcontrolador facilita la implementación del modelo del memresistor en comparación de un emulador completamente analógico el cual se vuelve más complicado de construir de acuerdo al grado de complejidad del modelo a emular. Por otra parte para los fines de la presente tesis, este enfoque de emulación puede favorecer el estudio de nuevos sistemas memresistivos que generen comportamientos caóticos, incluso el estudio de otros mem-elementos (memcapacitor y memductor) para los cuales no existe un elemento equivalente como el potenciómetro digital [55].

# Capítulo 4

## Circuitos caóticos realizados mediante un emulador de memresistor híbrido

En este capítulo utilizamos como casos de estudio dos circuitos caóticos basados en memresistor presentados en la literatura [12, 26]. Para los cuales reemplazamos el memresistor mediante un emulador híbrido. Además de mostrar los atractores resultantes de los circuitos caóticos con emulador, se calculan los exponentes de Lyapunov para verificar su comportamiento caótico.

### 4.1. Circuitos con memresistores basados en el circuito de Chua.

En la década de los 80's, se propuso el Circuito de Chua, mostrado en la Figura 4.1, como el primer circuito electrónico diseñado intencionalmente para comportarse de manera caótica [65]. En su diseño, Chua partió del análisis de los sistemas caóticos de Lorenz y Rössler, notando que en ambos casos el comportamiento caótico de estos sistemas se debía a la presencia de al menos dos puntos de equilibrio inestables, de este modo formuló las siguientes especificaciones para lograr que el circuito sea caótico.

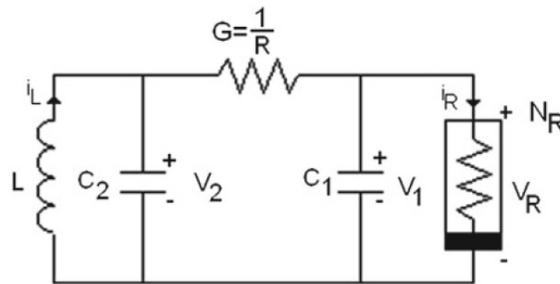


Figura 4.1: El Circuito de Chua [65].

- Contener dos o tres puntos de equilibrio inestables.

- Contener al menos tres elementos pasivos capaces de almacenar energía como inductores o capacitores.
- Contener un resistor no lineal caracterizado por una curva  $v - i$  lineal por partes.

El circuito contiene tres elementos que almacenan energía: dos capacitores y un inductor, una conductancia  $G$  y un resistor no lineal  $N_R$  que también es localmente activo, caracterizado por una curva  $v - i$  lineal por tramos con tres segmentos como se observa en la Figura 4.2. La no linealidad de este elemento proporciona tres puntos de equilibrio, mientras que al ser un elemento activo produce la energía necesaria para que el circuito oscile de manera autónoma [65].

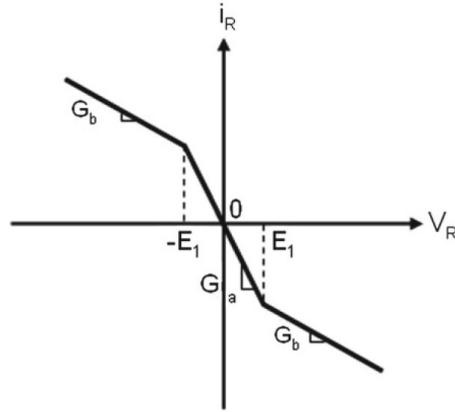


Figura 4.2: Curva característica  $v - i$  del Resistor no lineal  $N_R$  en el Circuito de Chua [65]

A continuación, se muestran las ecuaciones que definen la dinámica del circuito en la Figura 4.1 obtenidas mediante las leyes de circuitos de Kirchhoff,

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 &= \frac{1}{C_1} [G(v_2 - v_1) - g(v_1)] \\
 \dot{v}_2 &= \frac{1}{C_2} [G(v_1 - v_2) + i_L] \\
 \dot{i}_L &= -\frac{1}{L} v_2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i_L$  representan el voltaje a través del capacitor  $C_1$ , a través del capacitor  $C_2$  y la corriente en el inductor  $L$ , mientras que  $i_R = g(v_1)$  representa la característica lineal por tramos del resistor no lineal

$$g(v_1) = \begin{cases} G_b v_1 + (G_b - G_a) E_1, & \text{si } v_1 \leq -E_1 \\ G_a v_1, & \text{si } |v_1| < E_1 \\ G_b v_1 + (G_a - G_b) E_1, & \text{si } v_1 \geq E_1 \end{cases} \tag{4.2}$$

donde  $G_a$  es la pendiente del segmento interior,  $G_b$  uno de los dos segmentos exteriores y  $\pm E_1$  los puntos de corte. Con los parámetros adecuados se obtiene el atractor caótico de doble espiral que se muestra en la Figura 4.3.

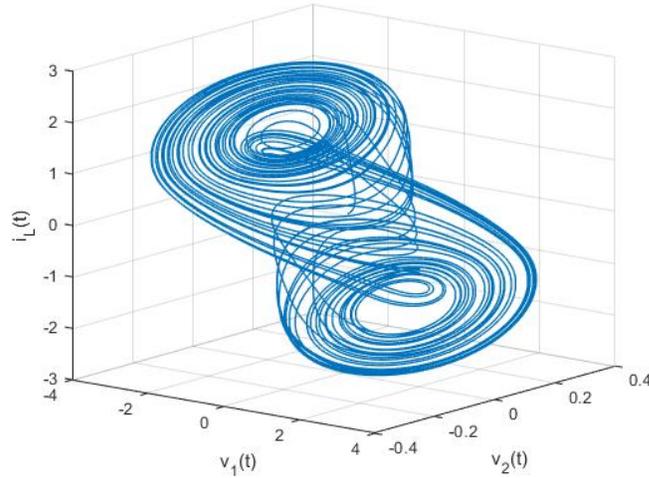


Figura 4.3: Atractor de doble espiral del circuito de Chua obtenido con los parámetros  $C_1 = 5.5nF$ ,  $C_2 = 49.5nF$ ,  $L = 7.07mH$ ,  $R = 1.428k\Omega$ ,  $G_a = -0.8mS$ ,  $G_b = -0.5mS$  y  $E_1 = 1V$ .

Por otra parte, dado que el memresistor es un elemento no lineal, se ha propuesto como remplazo del diodo Chua. En [26] se derivan los primeros osciladores no lineales que contienen memresistores. En el cual se reemplaza el diodo de Chua por memresistores caracterizados por una función monótona creciente y lineal por partes, en el oscilador canónico de Chua. Al reemplazar el diodo de Chua se obtiene el siguiente circuito.

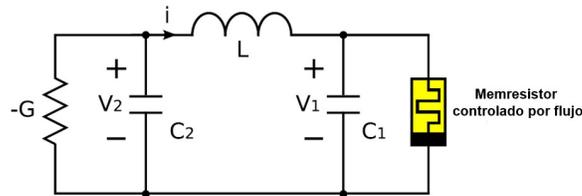


Figura 4.4: Oscilador canónico de Chua con un memresistor controlado por flujo [26].

Aplicando la ley de Kirchhoff a los nodos A, B y el lazo C del circuito mostrado en la Figura 4.5, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_3 - i, \\ v_3 &= v_2 - v_1, \\ i_2 &= -i_3 + i_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Integrando (4.3) con respecto al tiempo  $t$ , se obtiene un conjunto de ecuaciones que definen la relación entre dos variables fundamentales de circuitos, es decir, la carga y el flujo:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_3 - q(\varphi), \\ \varphi_3 &= \varphi_2 - \varphi_1, \\ q_2 &= -q_3 + q_4, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

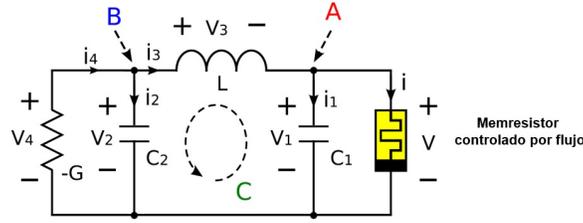


Figura 4.5: Corrientes  $i_j$ , voltajes  $v_j$ , nodos A, B y lazo C son indicados.

donde

$$\left. \begin{aligned}
 q_1 &\triangleq \int_{-\infty}^t i_1(t) dt, \\
 q_2 &\triangleq \int_{-\infty}^t i_2(t) dt, \\
 q_3 &\triangleq \int_{-\infty}^t i_3(t) dt, \\
 q_4 &\triangleq \int_{-\infty}^t i_4(t) dt, \\
 q &\triangleq \int_{-\infty}^t i(t) dt,
 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned}
 \varphi_1 &\triangleq \int_{-\infty}^t v_1(t) dt, \\
 \varphi_2 &\triangleq \int_{-\infty}^t v_2(t) dt, \\
 \varphi_3 &\triangleq \int_{-\infty}^t v_3(t) dt, \\
 \varphi &\triangleq \int_{-\infty}^t v(t) dt = \varphi_1
 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Los símbolos  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$  y  $q$  denotan la carga de los capacitores  $C_1$ ,  $C_2$ , el inductor  $L$ , la conductancia  $-G$  y el memresistor respectivamente. La curva característica  $\varphi - q$  lineal por partes del memresistor está dada por

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|) \quad (4.6)$$

La cual cumple con la propiedad de pasividad de los memresistores. Resolviendo la ecuación (4.4) para  $(q_3, q_4, \varphi_1, \varphi_2)$ , se obtiene

$$\left. \begin{aligned}
 q_3 &= q_1 + q(\varphi), \\
 q_4 &= q_1 + q_2 + q(\varphi), \\
 \varphi_1 &= \varphi, \\
 \varphi_2 &= \varphi + \varphi_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Entonces,  $(q_1, q_2, \varphi, \varphi_3)$  se pueden escoger como variables independientes, es decir la carga de los capacitores  $C_1$ ,  $C_2$  y el flujo del inductor y del memresistor respectivamente. De la ecuación (4.3) (o diferenciando la ecuación 4.4 con respecto al tiempo  $t$ ), se obtiene un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales de primer orden, que definen la relación entre las 4 variables  $(v_1, v_2, i_3, \varphi)$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} &= i_3(t) - W(\varphi)v_1(t), \\ L \frac{di_3(t)}{dt} &= v_2(t) - v_1(t), \\ C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} &= -i_3(t) + Gv_2(t), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= v_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} &= i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dq_3}{dt} &= i_3 \\ \frac{dq_4}{dt} &= i_4 = Gv_2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= v_1, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= v_2, \\ \frac{d\varphi_3}{dt} &= v_3 = L \frac{di_3}{dt}, \\ W(\varphi) &= \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Note que dos tipos de variables independientes están relacionadas por

$$\begin{aligned} (q_1, q_2, \varphi, \varphi_3) &\longleftrightarrow (v_1, v_2, \varphi, i_3) \\ q_1 &= C_1 v_1, q_2 = C_2 v_2, \varphi_3 = L i_3 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Entonces (4.8) puede ser reformulada en el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales usando sólo la carga y el flujo como variables:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\varphi_3}{L} - \frac{W(\varphi)q_1}{C_1}, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} &= -\frac{\varphi_3}{L} + \frac{Gq_2}{C_2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{q_1}{C_1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Ahora se estudiará el comportamiento de este circuito. La ecuación (4.8) puede ser transformada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - W(w)x), \\ \frac{dy}{dt} &= z - x, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y + \gamma z, \\ \frac{dw}{dt} &= x, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde  $x = v_1$ ,  $y = i_3$ ,  $z = v_2$ ,  $w = \varphi$ ,  $\alpha = 1/C_1$ ,  $\beta = 1/C_2$ ,  $\gamma = G/C_2$ ,  $L = 1$ . Las ecuaciones que definen el comportamiento del memresistor están dadas por

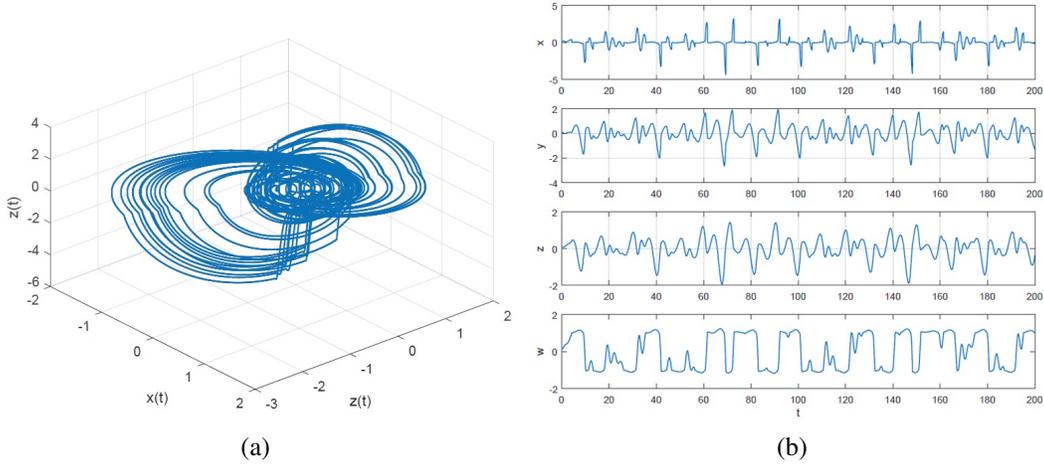


Figura 4.6: (a) Atractor caótico del oscilador canónico de Chua con un memresistor controlado por flujo. (b) Trayectorias de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $w$ .

$$\begin{aligned}
 i_M &= W(\varphi)x \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= x
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

El cual es un memresistor ideal controlado por flujo,  $W(\varphi)$  es la memductancia definida como

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = \begin{cases} a, & |\varphi| < 1, \\ b, & |\varphi| > 1, \end{cases}
 \tag{4.14}$$

donde  $a, b > 0$ . Es importante mencionar que la unicidad de las soluciones para la ecuación (4.12) no se puede garantizar ya que  $W$  es discontinua si  $a \neq b$ . Si establecemos  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.65$ ,  $a = 0.2$  y  $b = 10$ , la simulación del sistema 4.12 muestra que tiene un atractor caótico como se observa en la Figura 4.6.

Para confirmar el comportamiento caótico del sistema se calcularon los exponentes de Lyapunov por el método de series de tiempo [66]. Un exponente de Lyapunov positivo implica una dirección de expansión en el espacio de fase. Sin embargo, si la suma de los exponentes de Lyapunov es negativa, entonces tenemos volúmenes que se contraen en el espacio de fase. Estas dos propiedades aparentemente contradictorias son indicaciones de un comportamiento caótico en un sistema dinámico. Se observa que el sistema tiene un exponente positivo y otro negativo, lo que implica que es sistema 4.12 es caótico. La gráfica de la Figura 4.7 muestra los exponentes de Lyapunov en función del tiempo.

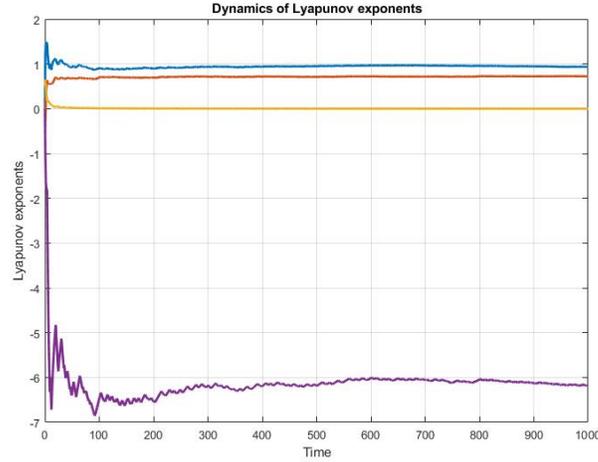


Figura 4.7: Exponentes de Lyapunov del sistema 4.12.

## 4.2. Circuito memresistivo caótico simple de tres componentes.

En [12] se presenta el desarrollo de un circuito autónomo compuesto de tres elementos conectados en serie, un inductor lineal pasivo, un capacitor lineal pasivo y un memresistor localmente activo, como se muestra en la Figura 4.8.

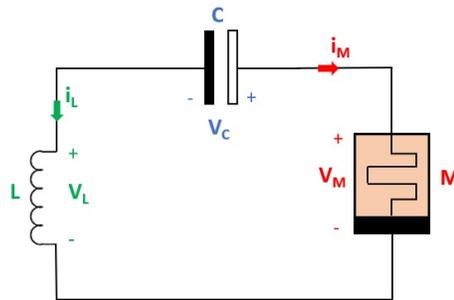


Figura 4.8: Circuito caótico más simple [12]

El modelo de este memresistor está definido por las siguientes ecuaciones

$$\text{Ley de Ohm } v = R(z)i, \quad (4.15)$$

$$\text{Ecuación de estado } \frac{dz}{dt} = f(z, i), \quad (4.16)$$

donde

$$R(z) = \beta(z^2 - 1), \quad (4.17)$$

$$f(z, i) = i - \alpha z - iz. \quad (4.18)$$

De acuerdo con la clasificación presentada en la sección 2.4 se trata de un memresistor genérico. 4.15 representa el voltaje en las terminales del memresistor, mientras que la 4.16 representa la evolución del sistema en función de la corriente  $i$ . Debido a que la función de memresistencia  $R(z)$  mostrada en la Figura 4.9 es negativa en el intervalo  $-1 < z < 1$ , el memresistor es localmente activo, es decir, que depende de una fuente de alimentación interna para operar. Por otro lado, en la Figura 4.10 se muestra el lazo de histéresis pinchada del memresistor, la cual tiene cruce por cero en el origen y se observa la reducción del área de los lóbulos cuando se aumenta la frecuencia de la señal de entrada  $i(t) = \sin(\omega t)$  con  $\omega = 0.5$  Hz, 0.15 Hz y 0.07 Hz, respectivamente.

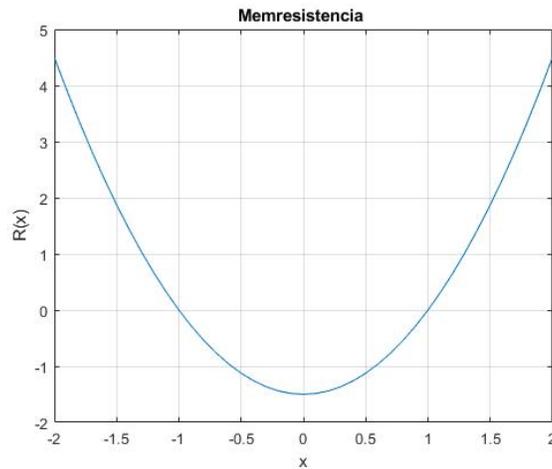


Figura 4.9: Memresistencia  $R(z)$  en función del estado interno  $z$ , con el parámetro  $\beta = 1.5$ .

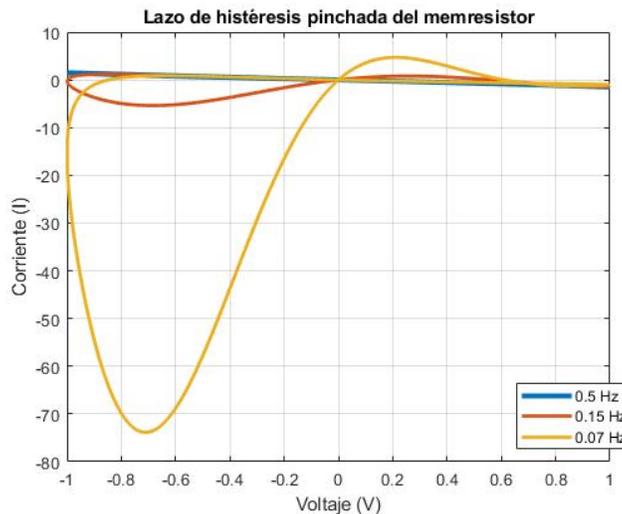


Figura 4.10: Gráfica  $I - V$ .

Las ecuaciones que definen la dinámica de este circuito se obtienen al establecer como variables de estado el voltaje en el capacitor, la corriente en el inductor y el estado interno del sistema memresistivo

$$\begin{aligned}
x(t) &\triangleq v_C(t) \\
y(t) &\triangleq i_L(t) \\
z(t) &= \text{estado interno del sistema}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Por definición, a partir de la relación constitutiva del capacitor se obtiene la ecuación

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_L}{C} \tag{4.20}$$

Aplicando las leyes de Kirchoff alrededor del lazo tenemos que

$$v_L + v_C = v_M \tag{4.21}$$

Simplificando y usando las relaciones constitutivas del capacitor, inductor y memresistor se obtiene

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{-1}{L}(v_C + \beta(z^2 - 1)i_L) \tag{4.22}$$

Por último, la ecuación diferencial que rige el estado interno del memresistor se define como

$$\frac{dz}{dt} = -y - \alpha z + yz \tag{4.23}$$

Por lo tanto las ecuaciones del sistema en término de sus variables de estado quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{y}{C} \\
\dot{y} &= -\frac{1}{L}(x + \beta(z^2 - 1)y) \\
\dot{z} &= -y - \alpha z + yz
\end{aligned} \tag{4.24}$$

#### 4.2.1. Implementación del circuito.

Como primer paso en la implementación física del circuito es obtener la primera ecuación de estado a través de la relación constitutiva del capacitor  $C_n$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_L}{C_n} \tag{4.25}$$

El segundo paso es calcular la corriente que fluye por el circuito mediante una resistencia  $R_s$  y de este modo convertirla en voltaje. Se elige  $R_s = 100\Omega$  y se conecta a un amplificador diferencial, por lo tanto el valor de corriente convertida a voltaje esta dado por

$$v_0 = -I_s i_L \tag{4.26}$$

Donde  $I_s = R_s \frac{R_{s1}}{R_{s2}}$ , de esta forma se obtiene un valor de corriente escalada por un factor  $I_s$  convertida en un voltaje  $v_0$ . Antes de obtener la segunda ecuación de estado es necesario realizar la función de memresistencia  $R(z)$ , la cual es implementada mediante 2 multiplicadores analógicos y un amplificador sumador. De los multiplicadores analógicos la señal de salida obtenida es  $-z^2 v_0$ , se conectaron divisores de tensión entre los pines W y Z esto para cancelar el factor de escala interno de multiplicación, como se muestra en la Figura 4.11. Mientras que la señal de salida obtenida en el amplificador sumador es

$$v_M = -\frac{\beta 5k_{pot}}{R6} v_0 - \frac{\beta 5k_{pot}}{R5} (-z^2 v_0) \quad (4.27)$$

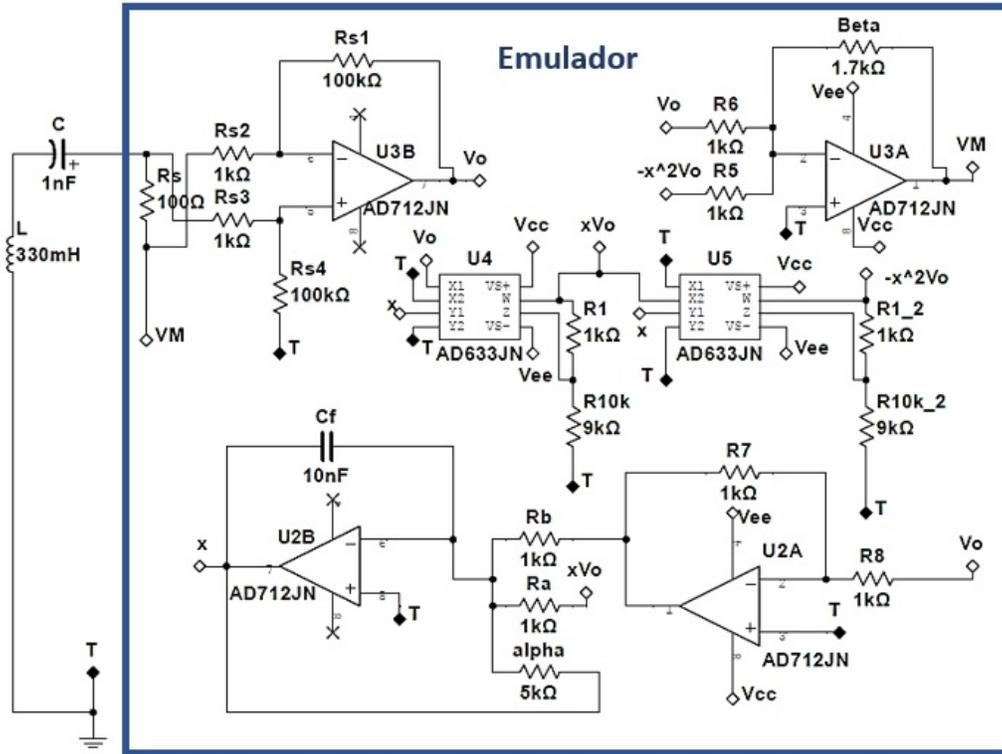


Figura 4.11: Diagrama esquemático del circuito caótico con un emulador de memresistor analógico.

Dado que  $R_5 = R_6 = R$ , entonces  $\beta \triangleq \frac{\beta 5k_{pot}}{R}$ . Sustituyendo  $\beta$ ,  $v_0$  en 4.27 y después de simplificar obtenemos

$$v_M(t) = -\beta I_s (z^2 - 1) i_L \quad (4.28)$$

La segunda ecuación de estado se obtiene al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff, de modo que

$$v_L + v_C = v_s + v_M \quad (4.29)$$

La ecuación 4.27 se puede reescribir como

$$L_n \frac{di_L}{dt} = -v_C + v_M - R_s i_L \quad (4.30)$$

Sustituyendo  $v_M$  en 4.31 finalmente se obtiene:

$$L_n \frac{di_L}{dt} = \frac{-1}{L_n} (v_C + \beta I_s (z^2 - 1) i_L + R_s i_L) \quad (4.31)$$

Por último, la tercera ecuación de estado se implementa mediante un amplificador integrador donde la señal obtenida es

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{v_0}{R_c C_f} - \frac{z}{\alpha_{10kpot} C_f} + \frac{z v_0}{R_a C_f} \quad (4.32)$$

Sustituyendo  $v_0$  en la ecuación 4.32 se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{I_s i_L}{R_c C_f} - \frac{z}{\alpha_{10kpot} C_f} - \frac{z I_s i_L}{R_a C_f} \quad (4.33)$$

Es importante mencionar que las ecuaciones 4.25, 4.31 y 4.33 son versiones transformadas del sistema 4.24 con una escala de tiempo, dicha transformación esta definida como

$$\begin{aligned} x(\tau) &= v_C(t) \\ y(\tau) &= I_s i_L(t) \\ z(\tau) &= z(t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Donde la escala de tiempo  $\tau = T_s t = 10^5$  e  $I_s = 10000$ . Por lo tanto la variable de estado  $y(t)$ , es decir, la corriente tiene una escala de cientos de microamperios y decenas de microsegundos. Considerando que  $R_s = 100\Omega$ ,  $R_b = R_a = 1k\Omega$ ,  $C_f = 10nF$ ,  $I_s = 10000$  y  $T_s = 10^5$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{y}{C} \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{1}{L} (x + \beta (z^2 - 1)y + 0.01y) \\ \frac{dz}{d\tau} &= -y - \alpha z + yz \end{aligned} \quad (4.35)$$

Los valores de los parámetros del sistema 4.35 son calculados mediante las siguientes ecuaciones

$$C = I_s C_n T_s \quad (4.36)$$

$$L = \frac{L_n T_s}{I_s} \quad (4.37)$$

$$\beta = \frac{\beta_{5kpot}}{R} \quad (4.38)$$

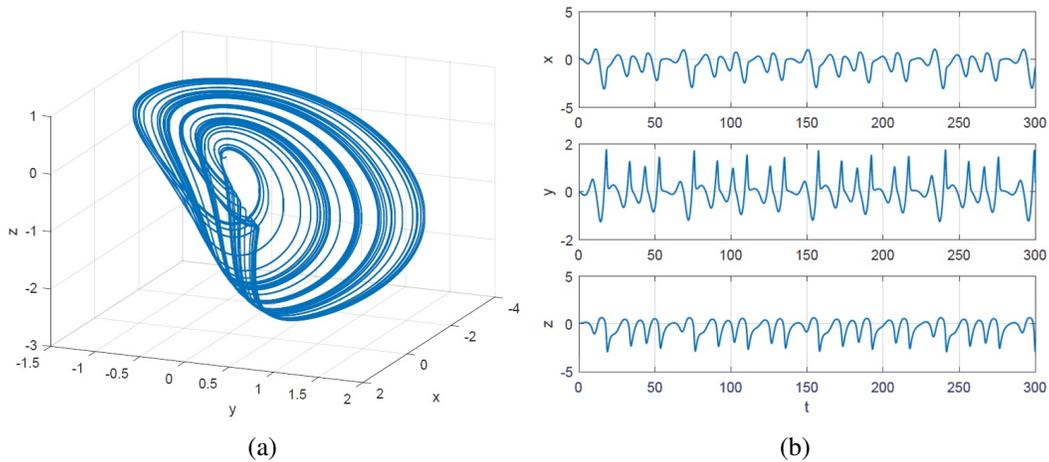


Figura 4.12: (a) Atractor caótico del sistema 4.24. (b) Trayectorias de las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

$$\alpha = \frac{1}{T_s C_f \alpha_{10kpot}} \quad (4.39)$$

Dados los siguientes valores de los parámetros,  $C = 1$ ,  $L = 3$ ,  $\beta = 1.5$  y  $\alpha = 0.6$ . Se obtiene el atractor caótico de la Figura 4.12.

Para confirmar el comportamiento caótico del sistema se calcularon los exponentes de Lyapunov mediante el método de series de tiempo. Los exponentes calculados son  $(0.028, \approx 0, -0.57)$ . Para un valor de  $\beta = 1.5$  se obtiene un exponente positivo, mientras que la suma de los exponentes es negativa, lo que indica comportamiento caótico. La gráfica de la Figura 4.13 muestra los exponentes de Lyapunov en función del tiempo.

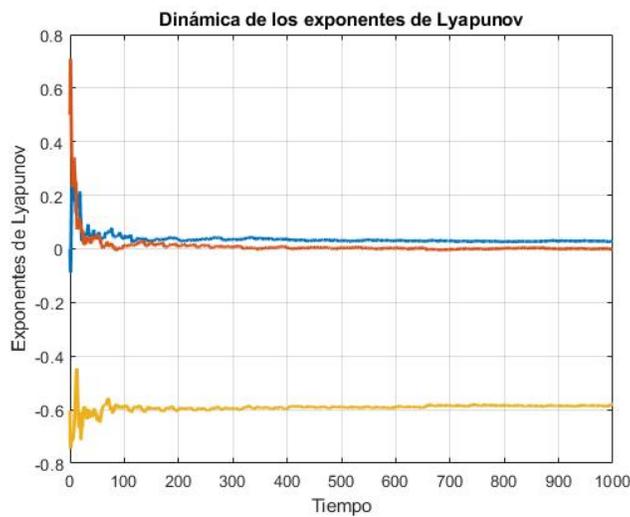


Figura 4.13: Gráfica de los exponentes de Lyapunov en función del tiempo.

### 4.2.2. Implementación del sistema 4.24 en un sistema embebido.

La implementación de este sistema se realizó en el simulador de Proteus que contiene la librería para reproducir el microcontrolador de Arduino Mega 256. Se utilizó el algoritmo de Euler para obtener el sistema caótico 4.24 en su versión discreta, es decir

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \tau \left( \frac{y_n}{C} \right) \\ y_{n+1} &= y_n + \tau \left( -\frac{1}{L} + \beta(z_n^2 - 1) y_n \right) \\ z_{n+1} &= z_n + \tau (-y_n - \alpha z_n + y_n z_n) \end{aligned} \quad (4.40)$$

A través de los puertos PWM del Arduino se enviaron las variables de estado  $x(t)$  e  $y(t)$ , de manera que se facilita la conversión digital a analógica mediante un filtro de paso bajo, tal como se observa en la Figura 4.14.

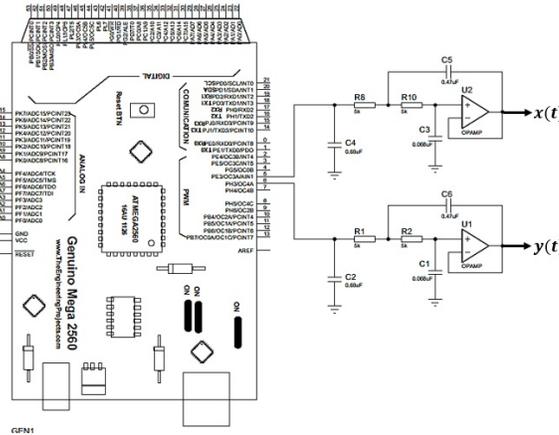


Figura 4.14: Diagrama esquemático del sistema embebido en Proteus M.R..

En la Figura 4.15(a) se muestran las trayectorias de  $x_n$  e  $y_n$ . Debido a la capacidad de procesamiento del Arduino Mega, la memoria de programa que posee este microcontrolador solo permite reproducir las trayectorias de dos variables de estado. En la Figura 4.15(b) se muestra el atractor obtenido donde el efecto caótico de algunas trayectorias se ven afectadas por el rendimiento del microcontrolador.

### 4.2.3. Implementación del sistema 4.24 con un emulador de memresistor híbrido.

En la sección 4.2.1 se mostró la implementación del sistema 4.24 con componentes analógicos. Distintas configuraciones de amplificadores operaciones se utilizaron para resolver las funciones de memresistencia y estado interno del memresistor (Figura 4.11). Una de las principales ventajas de utilizar emuladores analógicos es que permiten emular las propiedades del memresistor a altas frecuencias. Sin embargo, el principal inconveniente de utilizar un emulador analógico es lo complicado que resulta resolver las funciones del memresistor

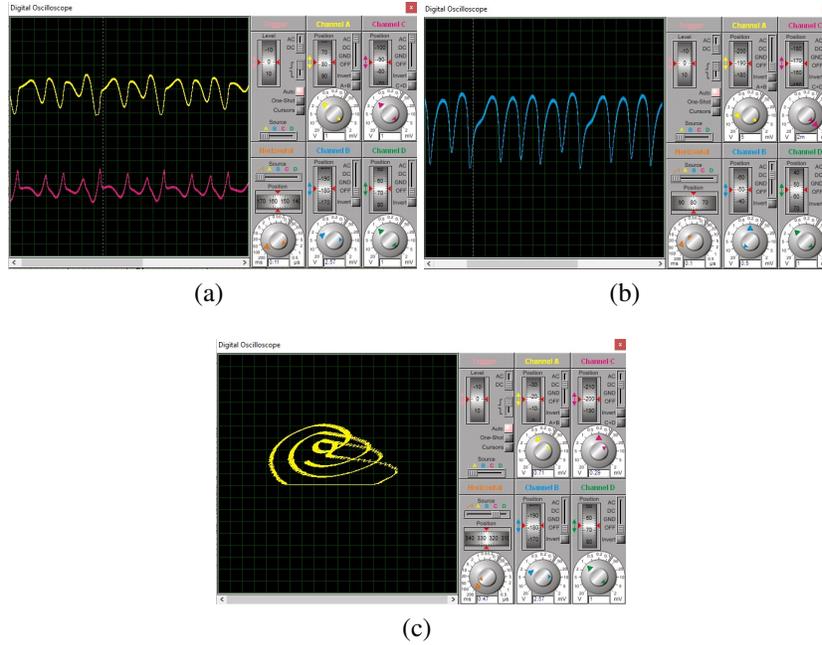


Figura 4.15: Simulación del sistema embebido para el sistema caótico en su versión discreta utilizando el algoritmo de Euler. (a) Trayectorias de  $x_n$  (color amarillo) e  $y_n$  (color magenta). (b) Trayectoria de  $z(t)$ . (c) Plano de fase de las trayectorias de  $x_n$  e  $y_n$ .

de manera analógica. Debido a esto, se propone un emulador híbrido para emular el memresistor genérico del sistema caótico 4.24 mediante los esquemas emulación propuestos en la sección 3.2. De esta forma se obtendrá un circuito emulador más compacto, ya que las funciones de memresistencia y el estado interno del memresistor serán resueltas por un microcontrolador.

El esquema del emulador propuesto se muestra en la Figura 4.16. A diferencia del esquema de la Figura 4.11, en este caso el emulador se implementará mediante una fuente de voltaje controlada digitalmente, la cual establecerá el voltaje  $v_M(t)$  necesario en las terminales del puerto analógico

$$v_M(t) = R_M(t)i(t) \quad (4.41)$$

Donde  $i$  es la corriente que fluye en el circuito y  $R_M$  el valor de memresistencia. Para calcular el valor de memresistencia  $R_M$ , será necesario medir la caída de voltaje mediante el resistor  $R$ , este valor de voltaje será procesado por un convertidor analógico-digital de tal manera que el valor muestreado sea procesado por un microcontrolador que obtendrá el valor del estado interno del memresistor resolviendo la ecuación 4.18. Con la variable de estado se calcula el valor de memresistencia y se obtendrá el valor de voltaje de acuerdo a la ecuación 4.41.

A continuación se describe el procedimiento que realizará el microcontrolador para obtener el estado interno del sistema y el valor de voltaje  $v_M$

1.  $i = \text{getAD}();$

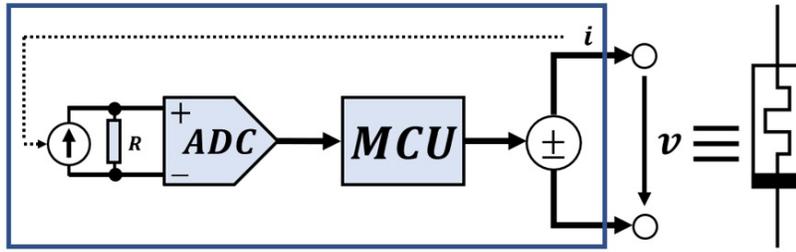


Figura 4.16: Diagrama esquemático del emulador híbrido controlado por corriente propuesto.

2.  $z = z + ((i - \alpha z - iz)dT)$ ;
3.  $v = \beta(z^2 - 1)i$ ;
4.  $setDA(v)$ ;

Como primer paso, el microcontrolador lee el valor de corriente  $i$  obtenido del convertidor analógico-digital. Posteriormente se resuelve la ecuación de estado del memresistor mediante el algoritmo de Euler, donde  $dT$  es la duración del intervalo de muestreo. Por último se obtiene el valor de voltaje  $v_M$  y se establece el valor calculado a un convertidor digital-analógico. Una vez implementado el emulador, se conectará en serie como se muestra en la Figura 4.17.

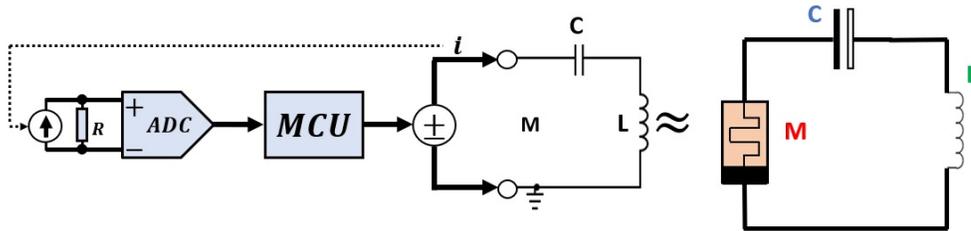


Figura 4.17: Circuito caótico con un emulador de memresistor híbrido.

### 4.3. Oscilador Canónico de Chua simplificado.

En la Figura 4.18 se muestra un circuito que consta de un inductor, dos capacitores y un memresistor controlado por flujo. Este circuito es una versión simplificada del oscilador canónico de Chua que se obtiene al reemplazar el diodo de Chua por un memresistor y eliminando la conductancia.

Aplicando la ley de Kirchhoff a la Figura 4.18, se obtiene la dinámica que define la relación entre las cuatro variables del circuito

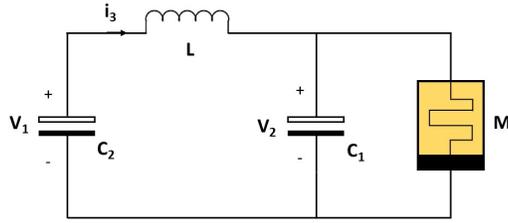


Figura 4.18: Esquema del circuito propuesto [26].

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_3 - W(\varphi)v_1, \\
 L \frac{di_3}{dt} &= v_2 - v_1, \\
 C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -i_3, \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= v_1,
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Las ecuaciones que definen al memresistor están dadas por la relación constitutiva 4.43, 4.44 define el valor de corriente  $i_M$  en las terminales del memresistor y por último, la ecuación 4.45 define la variable de estado del memresistor, que este caso se trata de un memresistor ideal

$$q(\varphi) = b\varphi + 0.5(a - b)(|\varphi + 1| - |\varphi - 1|) \tag{4.43}$$

$$i_M = W(\varphi)v_1 \tag{4.44}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_1 \tag{4.45}$$

$W(\varphi)$ , es la memductancia, definida como

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = \begin{cases} a, & |\varphi| < 1, \\ b, & |\varphi| > 1, \end{cases} \tag{4.46}$$

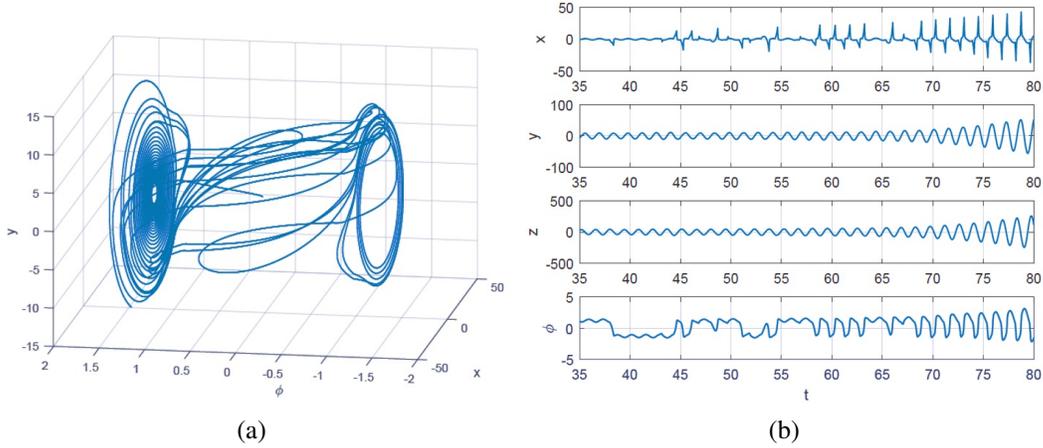


Figura 4.19: (a) Atractor caótico del sistema 4.47. (b) Trayectorias de las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

La ecuación (4.42) se puede transformar de la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= a(y - W(w)x), \\
 \frac{dy}{dt} &= -\xi(z + x), \\
 \frac{dz}{dt} &= \beta y, \\
 \frac{dw}{dt} &= x,
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

donde  $x = v_1$ ,  $y = i_3$ ,  $z = -v_2$ ,  $w = \varphi$ ,  $\alpha = 1/C_1$ ,  $\beta = 1/C_2$ ,  $\xi = 1/L$ . Simulando el sistema 4.47 con  $\alpha = 4.2$ ,  $\beta = -20$ ,  $\xi = -1$ ,  $a = -2$  y  $b = 9$ , se obtiene el atractor caótico mostrado en la Figura 4.19.

El valor de los exponentes de este sistema son  $(0.1048, 0.05, \approx 0, -36.25)$ , lo que confirma el comportamiento caótico del sistema al tener al menos un exponente positivo y la suma total de los exponentes es negativa. La gráfica de la Figura 4.20 muestra los exponentes de Lyapunov en función del tiempo.

### 4.3.1. Implementación del sistema 4.42 con un emulador de memresistor híbrido.

El esquema de emulación que se propone para este circuito se muestra en la Figura 4.21. En este caso se trata de la emulación de un memresistor ideal, el cual se implementará mediante una fuente de corriente controlada digitalmente, que establecerá el valor de corriente  $i_m(t)$  necesario en las terminales del puerto analógico

$$i_M(t) = G_M v(t) \tag{4.48}$$

Donde  $v$  es el voltaje en las terminales del puerto analógico y  $G_M$  es la memductancia, que depende de la variable de estado del memresistor y el voltaje  $v$ . Para calcular el valor

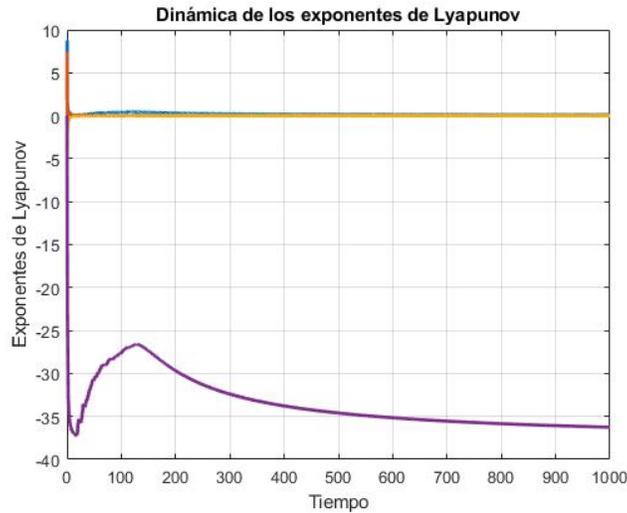


Figura 4.20: Exponentes de Lyapunov en función del tiempo del sistema 4.3.

de memductancia será necesario medir el voltaje  $v$  del puerto analógico a través de un convertidor analógico digital, con el valor muestreado el microcontrolador calculara la corriente  $i_M$  usando la ecuación 4.44 y la variable de estado del memresistor. Es importante mencionar que para este circuito, será necesario que las terminales del emulador estén conectadas en paralelo a un convertidor de ganancia negativa para que el memresistor sea un elemento activo.

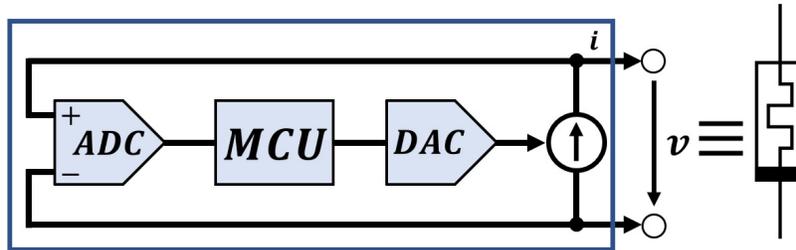


Figura 4.21: Diagrama esquemático del emulador propuesto.

El procedimiento que realizará el microcontrolador para el obtener el estado interno del sistema y el valor de corriente  $i_M$  se muestra a continuación:

1.  $i = getAD();$
2.  $v = z + ((i - \alpha z - iz)dT);$
3.  $i = W(\varphi)v;$
4.  $setDA(i);$

Donde el microcontrolador lee el valor de voltaje  $v$  obtenido por el convertidor analógico-digital. Posteriormente, este resuelve la ecuación de estado del memresistor con el algoritmo

de Euler, donde  $dT$  es la duración del intervalo de muestreo. Por último se obtiene el valor de corriente  $i_M$  y el microcontrolador lo establece en una fuente de corriente con apoyo de un convertidor digital-analógico.

Como se mostró en los dos casos anteriores, el uso de un emulador de memresistor híbrido, que combina dispositivos analógicos y digitales, facilita la implementación del modelo a emular gracias al microcontrolador. Por otra parte, debido a que la salida será una fuente de voltaje o corriente, esto ayudará a ajustar a los parámetros adecuados y obtener la salida deseada en el emulador. Así mismo, este circuito auxiliar analógico, permitirá ajustar el voltaje o corriente a los valores de operación del microcontrolador.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El memresistor fue definido por Leon O. Chua en 1971 como el cuarto elemento fundamental de los circuitos, que relaciona el flujo magnético y la carga eléctrica. A medida que se ha estudiado su comportamiento memresistivo se ha descubierto que está presente en sistemas naturales y artificiales, de modo que ha existido desde mucho tiempo antes a su definición [27].

Las propiedades que este dispositivo presenta han generado un gran interés en electrónica de estado sólido y ciencia de materiales, debido a su utilidad en memorias de alta densidad, aplicación en sistemas neuromórficos, entre otras aplicaciones potenciales. Distintos modelos y explicaciones físicas se han desarrollado para entender cómo se manifiestan las propiedades del memresistor y el origen de su comportamiento. Por cada dispositivo memresistivo puede tener un modelo propio. En el Capítulo 3 se muestra que la emulación de memresistores se puede conseguir mediante diferentes métodos llamados analógicos, digitales e híbridos, cada uno con sus ventajas y desventajas. Tomando en cuenta sus principales limitantes se propone un método de emulación mediante fuentes controladas por voltaje y por corriente, con las cuales se evita el uso de un potenciómetro digital que puede afectar el desempeño del emulador debido a la discretización y conversión analógica. El emulador propuesto se compone de un microcontrolador que estable el voltaje en el puerto analógico, un convertidor analógico-digital y una fuente de corriente o voltaje con una interfaz digital-analógica que evita el uso potenciómetro digital por lo que se puede emular pasivos y activos.

Debido a las propiedades no lineales del memresistor se ha propuesto como un elemento que proporcione la no linealidad necesaria para generar caos, sustituyéndolo en el circuito de Chua, un circuito autónomo con comportamiento caótico. En el Capítulo 4 se presentaron esquemas de emulación de dos tipos de modelos de memresistores, uno genérico y un memresistor ideal. Se utilizaron 2 circuitos como casos de estudio, seleccionados de tal manera que se caracterizan por tener componentes activos en su estructura, que es una condición necesaria pero no suficiente para presentar caos, en ambos casos se muestra el procedimiento que realizará el controlador para obtener las variables de estado y obtener los valores de voltaje y corriente adecuados para cada circuito. Para verificar esta propiedad se calcularon los exponentes de Lyapunov mediante el método de series de tiempo. Adicionalmente, se muestra la implementación del circuito memresistivo caótico simple en un sistema embebido, en el cual se utilizó el algoritmo de Euler para representar la versión discretizada del sistema caótico, debido a que este algoritmo utiliza menos operaciones matemáticas, es de

fácil implementación, por lo que resulta apto para implementarse en plataformas de acceso libre como Arduino.

## **5.1. Trabajo a Futuro**

Se pueden considerar varias líneas de investigación como trabajo a futuro, la primera es el desarrollo experimental del emulador propuesto y de esta forma verificar las posibles limitantes que pudieran surgir. Así mismo estudiar la emulación de otros tipos de mem-elementos mediante el método propuesto de emulación y sus posibles aplicaciones en el diseño de circuitos.

Adicionalmente, resulta de interés determinar la factibilidad de nuevos modelos de mem-resistores para generar comportamientos caóticos mediante simulación numérica, así como su emulación mediante el método de fuentes de voltaje y corriente controladas digitalmente. También resulta interesante estudiar la emulación de modelos de memresistores extendidos los cuales no fueron abordados en esta tesis.

Otra línea de investigación que puede ser abordada es la de estudiar la implementación de sistemas caóticos en sistemas embebidos experimentalmente, ya que es un campo aun en desarrollo donde se puede mejorar su desempeño mediante la implementación de sistemas embebidos más robustos, así como el uso de otros algoritmos numéricos más poderosos como el de Heun y Runge-Kutta.

# Apéndice A

En esta sección se incluyen los programas para la implementación del 4.24 en un sistema embebido y el calculo de los exponentes de Lyapunov,utilizados en en Capítulo 4.

## A.1. Código utilizado para implementar el sistema 4.24 en un sistema embebido.

En este programa se implementa el algoritmo de Euler [67] para resolver el sistema de ecuaciones 4.24. Se definieron como salidas  $x(t)$  e  $z(t)$ . Para obtener el estado  $y(t)$  solo es necesario reescribir el código con la variable  $y$  en donde sea necesario.

```
1 float x_pos;
2 float z_pos;
3 int x_out = 5;
4 int z_out = 6;
5
6 //Condiciones iniciales
7 float x = 0.1;
8 float y = 0;
9 float z = 0.1;
10
11 float alpha = 0.333;
12 float beta = 0.5;
13
14 float xdot;
15 float ydot;
16 float zdot;
17 float dt = 0.01;
18
19 void setup() {
20
21     pinMode(x_out, OUTPUT);
22     pinMode(z_out, OUTPUT);
```

```

23 //Frecuencia del PWM
24   TCCR0A = ( 1<<COM0A1 | 0<<COM0A0 |
25   1<<COM0B1 | 0<<COM0B0 |
26   1<<WGM01 | 1<<WGM00);
27
28   TCCR0B = ( 0<<FOC0A | 0<<FOC0B |
29   0<<WGM02 |
30   0<<CS02 | 0<<CS01 |
31   1<<CS00 );
32
33   TIMSK0 = ( 0<<OCIE0B | 0<<TOIE0 |
34   0<<OCIE0A );
35 }
36
37 void loop() {
38
39   xdot = y;
40   ydot = (-alpha)*x + (beta)*y - (beta)*z*z*y;
41   zdot = -y - 0.6*z + y*z;
42
43
44   x = x + (xdot*dt);
45   y = y + (ydot*dt);
46   z = z + (zdot*dt);
47
48
49   x_pos = 128+(50 * x);
50   z_pos = 128+(50 * z);
51
52   analogWrite(x_out, x_pos);
53   analogWrite(z_out, z_pos);
54 }

```

## A.2. Código utilizado para calcular los exponentes de Lyapunov.

En este programa contiene los códigos necesarios para calcular los exponentes de Lyapunov basado en el método de series de tiempo propuesto en [66]. Este código aparece en [13] y fue adaptado para calcular los exponentes de los sistemas presentados en el Capítulo 4.

```

1
2 function OUT = Memristor(t,X)
3 %Settings:

```

```

4 % ODEFUNCTION: Memristor
5 % Final Time: 1000, Step: 0.01,
6 % update Lyapunov: 10
7 % Initial Conditions: 0 0.11 0.11 0,
8 % no. of linearized ODEs: 16
9 % The first 4 elements of the input data X
10 % correspond to the
11 % 4 state variables. Restore them.
12 % The input data X is a 12-element vector
13 % in this case.
14 % Note: x is different from X
15 x = X(1); y = X(2); z = X(3); w = X(4);
16 %% MAKE SURE CODE IS ON A SINGLE LINE!
17 % Parameters.
18 a=0.2;
19 b=10;
20 if abs(w) < 1
21 W=a;
22 end
23 if abs(w) > 1
24 W=b;
25 end
26 % ODE
27 dx = 4*(y-W*x);
28 dy = z-x;
29 dz = -y+0.65*z;
30 dw = x;
31 % Q is a 4 by 4 matrix, so it has 12
32 % elements.
33 % Since the input data is a column
34 % vector, rearrange the last 12
35 % elements of the input data in a
36 % square matrix.
37 Q = [X(5), X(9), X(13), X(17);
38      X(6), X(10), X(14), X(18);
39      X(7), X(11), X(15), X(19);
40      X(8), X(12), X(16), X(20)];
41 % Linearized system (Jacobian) about equilibrium state: (0,0,0,0)
42 J = [-W 4 0 0; 1 0 1 0; 0 -1 0.65 0; 1 0 0 0];
43 % Multiply J by Q to form a variational
44 % equation
45 F = J*Q;
46 OUT = [dx; dy; dz; dw; F(:)];
47 end

```

```

1
2 [T,Res]=lyapunov(4,@Memristor,@ode45,0,0.01,1000,[0.1 0 0.1 0],10);
3 plot(T,Res);
4 title('Dynamics of Lyapunov exponents');
5 xlabel('Time');
6 ylabel('Lyapunov exponents');

```

# Bibliografía

- [1] R. Marani, G. Gelao, and A. G. Perri, “A review on memristor applications,” *ArXiv*, vol. abs/1506.06899, 2015.
- [2] G. C. Adam, B. D. Hoskins, M. Prezioso, F. Merrikh-Bayat, B. Chakrabarti, and D. B. Strukov, “3-d memristor crossbars for analog and neuromorphic computing applications,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 64, no. 1, pp. 312–318, 2017.
- [3] E. Bilotta, P. Pantano, and S. Vena, “Speeding up cellular neural network processing ability by embodying memristors,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 28, no. 5, pp. 1228–1232, 2017.
- [4] M. Hu, H. Li, Y. Chen, Q. Wu, G. S. Rose, and R. W. Linderman, “Memristor crossbar-based neuromorphic computing system: A case study,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 25, no. 10, pp. 1864–1878, 2014.
- [5] T. Li, S. Duan, J. Liu, L. Wang, and T. Huang, “A spintronic memristor-based neural network with radial basis function for robotic manipulator control implementation,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 46, no. 4, pp. 582–588, 2016.
- [6] S. P. Adhikari, C. Yang, H. Kim, and L. O. Chua, “Memristor bridge synapse-based neural network and its learning,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 23, no. 9, pp. 1426–1435, 2012.
- [7] D. Chabi, Z. Wang, C. Bennett, J. Klein, and W. Zhao, “Ultrahigh density memristor neural crossbar for on-chip supervised learning,” *IEEE Transactions on Nanotechnology*, vol. 14, no. 6, pp. 954–962, 2015.
- [8] K. Kim, S. Gaba, D. Wheeler, J. M. Cruz-Albrecht, T. Hussain, N. Srinivasa, and W. Lu, “A functional hybrid memristor crossbar-array/cmos system for data storage and neuromorphic applications,” *Nano Letters*, vol. 12, no. 1, pp. 389–395, 2012.
- [9] L. Guckert and E. E. Swartzlander, “Mad gates—memristor logic design using driver circuitry,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 64, no. 2, pp. 171–175, 2017.
- [10] L. Gao, F. Alibart, and D. B. Strukov, “Programmable CMOS/memristor threshold logic,” *IEEE Transactions on Nanotechnology*, vol. 12, no. 2, pp. 115–119, 2013.

- [11] J. Borghetti, Z. Li, J. Straznicky, X. Li, D. A. A. Ohlberg, W. Wu, D. R. Stewart, and R. S. Williams, "A hybrid nanomemristor/transistor logic circuit capable of self-programming," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 106, no. 6, pp. 1699–1703, 2009.
- [12] B. Muthuswamy and L. O. Chua, "Simplest chaotic circuit," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, no. 05, pp. 1567–1580, 2010.
- [13] B. Muthuswamy, "Implementing memristor based chaotic circuits.," *International Journal Bifurcation and Chaos*, vol. 20, pp. 1335–1350, 05 2010.
- [14] M. Brin and G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [15] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, 2000.
- [16] K. T. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke, *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 2021.
- [17] L. O. Chua, *Introduction to Nonlinear Network Theory*. McGraw-Hill, 1969.
- [18] B. Muthuswamy and S. Banerjee, *Introduction to Nonlinear Circuits and Networks*. Springer International Publishing, 2019.
- [19] C. K. Alexander and M. N. O. Sadiku, *Fundamentals of electric circuits*. McGraw-Hill Higher Education, 2008.
- [20] L. O. Chua, "The fourth element," *Proceedings of the IEEE*, vol. 100, no. 6, pp. 1920–1927, 2012.
- [21] L. O. Chua, "Memristor—the missing circuit element," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. 18, no. 5, pp. 507–519, (1971).
- [22] D. Strukov, G. Snider, and D. Stewart, "The missing memristor found," *Nature*, vol. 453, pp. 80–83, 2008.
- [23] B. Bo-Cheng, L. Zhong, and X. Jian-Ping, "Transient chaos in smooth memristor oscillator," *Chinese Physics B*, vol. 19, no. 3, pp. 030–510, 2010.
- [24] B. Bocheng, L. Zhong, and X. Jianping, "Steady periodic memristor oscillator with transient chaotic behaviours," *Electronics Letters*, vol. 46, pp. 237 – 238, 03 2010.
- [25] D. B. T. Driscoll, Y.V. Pershin, "Chaotic memristor," *Appl. Phys. A*, vol. 102, pp. 885–889, 2011.
- [26] M. Itoh and L. O. Chua, "Memristor oscillators," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 18, no. 11, pp. 3183–3206, 2008.
- [27] D. Biolek, "Memristor emulators," *In: Chua L., Sirakoulis G., Adamatzky A. (eds) Handbook of Memristor Networks.*, pp. 1137–1159, 2019.

- [28] L. O. Chua, "Everything you wish to know about memristors but are afraid to ask," *Radioengineering*, vol. 24, pp. 319–368, 2015.
- [29] A. G. Alharbi, Z. J. Khalifa, M. E. Fouda, and M. H. Chowdhury, "A new simple emulator circuit for current controlled memristor," *2015 IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems (ICECS)*, pp. 288–291, 2015.
- [30] A. G. Alharbi, M. E. Fouda, and M. H. Chowdhury, "A novel memristor emulator based only on an exponential amplifier and ccii+," *2015 IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems (ICECS)*, pp. 376–379, 2015.
- [31] M. Fouda, A. Elwakil, and A. Radwan, "Pinched hysteresis with inverse-memristor frequency characteristics in some nonlinear circuit elements," *Microelectronics Journal*, vol. 46, no. 9, pp. 834 – 838, 2015.
- [32] M. F. Tolba, Y. Halawani, H. Saleh, B. Mohammad, and M. Al-Qutayri, "FPGA-based memristor emulator circuit for binary convolutional neural networks," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 117736–117745, 2020.
- [33] O. Camps, M. M. Al-Chawa, C. De Benito, M. Roca, S. G. Stavrinides, R. Picos, and L. O. Chua, "A purely digital memristor emulator based on a flux-charge model," *2018 25th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, pp. 565–568, 2018.
- [34] O. A. Olumodeji and M. Gottardi, "Arduino-controlled HP memristor emulator for memristor circuit applications," *Integration*, vol. 58, pp. 438 – 445, 2017.
- [35] M. Bouraoui, I. Barraji, K. Abbes, and M. Masmoudi, "Digital memristor emulator based on threshold adaptive model," *2020 IEEE International Conference on Design Test of Integrated Micro Nano-Systems (DTS)*, pp. 1–5, 2020.
- [36] Z. Biolek and D. Biolek, "How can the hysteresis loop of the ideal memristor be pinched?," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 61, no. 7, pp. 491–495, 2014.
- [37] N. A. Khalil, L. A. Said, A. G. Radwan, and A. M. Soliman, "A simple bjt inverse memristor emulator and its application in chaotic oscillators," *2019 Fourth International Conference on Advances in Computational Tools for Engineering Applications (ACTEA)*, pp. 1–4, 2019.
- [38] M. T. Abuelma'atti and Z. J. Khalifa, "A memristor-based wien-bridge sinusoidal/chaotic oscillator," *The International Journal of Electrical Engineering and Education*, vol. 53, no. 3, pp. 280–288, 2016.
- [39] R. Wu and C. Wang, "A new simple chaotic circuit based on memristor," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no. 09, p. 1650145, 2016.
- [40] Q. Song, H. Chang, and Y. Li, "Complex dynamics of a novel chaotic system based on an active memristor," *Electronics*, vol. 9, no. 3, 2020.

- [41] X. Ma, J. Mou, and J. Liu, “A novel simple chaotic circuit based on memristor–memcapacitor,” *Nonlinear Dyn*, vol. 100, pp. 2859–2876, 2020.
- [42] A. Chanthbouala, V. Garcia, and R. Cherifi, “A ferroelectric memristor,” *Nature Mater*, vol. 11, pp. 860–864, 2012.
- [43] C. Yu, L. Gang, W. Cheng, Z. Wenbin, L. Run-Wei, and W. Luxing, “Polymer memristor for information storage and neuromorphic applications,” *Mater. Horiz.*, vol. 1, pp. 489–506, 2014.
- [44] S. Porro, E. Accornero, C. F. Pirri, and C. Ricciardi, “Memristive devices based on graphene oxide,” *Carbon*, vol. 85, pp. 383 – 396, 2015.
- [45] P. Russo, M. Xiao, and N. Y. Zhou, “Carbon nanowalls: A new material for resistive switching memory devices,” *Carbon*, vol. 120, pp. 54 – 62, 2017.
- [46] G. Abdullah and M. Chowdhury, *Memristor Emulator Circuits*. Springer International Publishing, 2021.
- [47] J. Tour and T. He, “The fourth element,” *Nature*, vol. 453, pp. 42–43, 2008.
- [48] L. O. Chua and Sung Mo Kang, “Memristive devices and systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 64, no. 2, pp. 209–223, 1976.
- [49] S. P. Adhikari, M. P. Sah, H. Kim, and L. O. Chua, “Three fingerprints of memristor,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 60, no. 11, pp. 3008–3021, 2013.
- [50] L. Chua, “Resistance switching memories are memristors,” *Appl. Phys. A*, vol. 102, p. 765–783, 2011.
- [51] D. Biolek and Z. Biolek, “About fingerprints of chua’s memristors,” *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 18, no. 2, pp. 35–47, 2018.
- [52] D. Biolek, “Memristor emulators,” *Memristor networks*, pp. 487–503, 2014.
- [53] J. Valsa, D. Biolek, and Z. Biolek, “An analogue model of the memristor,” *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 24, pp. 400 – 408, 07 2011.
- [54] Y. V. Pershin and M. Di Ventra, “Practical approach to programmable analog circuits with memristors,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 57, no. 8, pp. 1857–1864, 2010.
- [55] Z. Kolka, V. Biolkova, and D. Biolek, “On hybrid emulation of mem-systems,” *2014 European Modelling Symposium*, pp. 490–494, 2014.
- [56] D. Biolek, J. Bajer, V. Biolkova, and Z. Kolka, “Mutators for transforming nonlinear resistor into memristor,” *2011 20th European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, pp. 488–491, 2011.

- [57] A. L. Fitch, H. H. C. Iu, X. Y. Wang, V. Sreeram, and W. G. Qi, “Realization of an analog model of memristor based on light dependent resistor,” *2012 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pp. 1139–1142, 2012.
- [58] Z. Biolek, D. Biolek, J. Vavra, V. Biolkova, and Z. Kolka, “The simplest memristor in the world,” *2016 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pp. 1854–1857, 2016.
- [59] G. Gandhi, V. Aggarwal, and L. Chua, “Coherer is the elusive memristor,” *2014 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pp. 2245–2248, 2014.
- [60] F. Corinto and A. Ascoli, “Memristive diode bridge with lcr filter,” *Electronics Letters*, vol. 48, pp. 824–825, 07 2012.
- [61] D. Biolek, V. Biolkova, Z. Kolka, and Z. Biolek, “Passive fully floating emulator of memristive device for laboratory experiments,” *Adv Electr Comput Eng*, pp. 112–116, 2015.
- [62] S. Asapu and Y. V. Pershin, “Electromechanical emulator of memristive systems and devices,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 62, no. 11, pp. 3678–3684, 2015.
- [63] S. Zuin, M. Escudero-López, F. Moll, A. Rubio, I. Vourkas, and G. C. Sirakoulis, “Experience on material implication computing with an electromechanical memristor emulator,” *2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, pp. 1–6, 2016.
- [64] Y. V. Pershin and M. Di Ventra, “Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks,” *Neural Networks*, vol. 23, no. 7, pp. 881–886, 2010.
- [65] A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca, and G. Sciuto, *A Concise Guide to Chaotic Electronic Circuits*. 2014.
- [66] A. Wolf, J. B. Swith, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, “Determining lyapunov exponents from a time series,” *Physica*, vol. D16, pp. 285–317, 1985.
- [67] W. Yang, W. Chao, T. S. Chung, and J. Morris, *Applied numerical methods using Matlab*. Jhon Wiley and Sons, Inc, 2005.