



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

**Control Digital de Sistemas Lineales por Partes: Rediseño  
Digital**

Tesis que presenta

**Brandon Alberto Moncada Beltrán**

Para obtener el grado de

**Maestro en Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

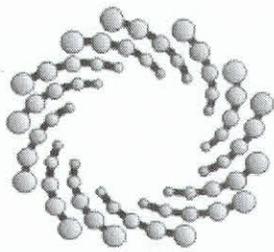
San Luis Potosí, S.L.P., Octubre de 2022

# **Constancia de aprobación de la tesis**

# Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con No. de registro: 1098842 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

La Secretaria Académica del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 050 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 16 días del mes de noviembre del año 2022, se reunió a las 18:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Eric Campos Cantón</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Jonatán Peña Ramírez</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>CICESE</b>
<b>Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Brandon Alberto Moncada Beltrán**

sobre la Tesis intitulada:

*Control Digital de Sistemas Lineales por Partes: Rediseño Digital*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 20:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe la Secretaria Académica del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 16 días del mes de noviembre de 2022.

  
**Dra. Lina Raquel Riego Ruiz**  
Secretaria Académica

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado



*A Dios, el creador de lo que vemos, entendemos, y no; a mis padres Ana y Luis, a mi  
hermana Kayla y a mi amada Kelly.*

# Agradecimientos

Quiero dar gracias a Dios por proveerme del entendimiento y resiliencia necesarios para lograr todo lo propuesto. A mi familia, en especial mis padres Ana y Luis, por creer en mí, motivarme y apoyarme de sobremano a lo largo de toda mi vida; a mi hermana Kayla, por estar siempre para mí. A Kelly, por convencerme de que el amor de verdad existe, y mostrármelo a diario con sus gestos, apoyo y confianza. A todos mis amigos y demás personas que siempre han estado detrás de mí, impulsando mis metas, en especial a Cesia Jemima, quien en el marco de una amistad sincera y duradera, ha creído en mí en este y todos los procesos. No me olvido dar las gracias a mis compañeros de maestría, Luis, Mariana, Griselda, con quienes anduvimos por los inexplorados terrenos del posgrado, en especial, a Miguel por brindarme su amistad y su invaluable compañerismo.

A todos los profesores que tuve en el posgrado, por darme los conocimientos necesarios para alcanzar este logro, por abrirme al entendimiento, y por alimentar el deseo de conocimiento. Al Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez, por su constante apoyo, comprensión y disposición; por su paciencia, por incentivar me al descubrimiento y por redefinir mi concepto de investigación; estaré agradecido siempre. A los miembros del jurado, Dr. Jonatan Peña, Dr. Eric Campos por sus valiosos comentarios, y muy especialmente al también miembro del jurado y profesor de posgrado Dr. Tonámetl Sánchez, por quien confirmé mi pasión por el control y la enseñanza. Quiero extender de igual forma, un agradecimiento al Dr. César Maldonado, por su inmenso sentido humano, sus enseñanzas y toda la ayuda brindada.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT, por brindarme esta más que enriquecedora y valiosa oportunidad, así como al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica IPICYT por abrirme sus puertas y ser el hogar que me acogió por estos dos años.

A todos, muchas gracias.

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>Abstract</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema	4
1.2. Descripción de la tesis	7
1.2.1. Objetivo general	7
1.2.2. Objetivos específicos	7
1.2.3. Hipótesis	8
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Conversión continuo a discreto	9
2.1.1. Rediseño digital	12
2.2. Sistema híbrido	13
2.2.1. Sistema lineal por partes	14
2.2.2. Estabilidad asintótica para sistemas con conmutaciones arbitrarias	15
2.3. Regulador lineal cuadrático con ganancias estáticas	16
2.4. Seguidor lineal cuadrático con ganancias estáticas	19
2.5. Sistema caótico de Chua	21
<b>3. Diseño del Control en Tiempo Continuo</b>	<b>25</b>
3.1. Estabilización a un punto de equilibrio	25
3.1.1. Aplicación del regulador lineal cuadrático a un sistema PWL	26
3.1.2. Estabilidad del sistema conmutado analógico a un punto de equilibrio	27
3.2. Seguimiento de referencias variantes en el tiempo	28
3.2.1. Aplicación del seguidor lineal cuadrático a un sistema PWL	29
3.2.2. Estabilidad del sistema conmutado con dinámica explícita de la referencia	30
<b>4. Control Digital</b>	<b>34</b>
4.1. Modelos de los sistemas híbridos de control	35
4.1.1. Sistema híbrido para estabilización a punto de equilibrio	35
4.1.2. Sistema híbrido para seguimiento de referencia	36

4.2. Rediseño Digital . . . . .	36
4.2.1. Rediseño para estabilización a punto de equilibrio . . . . .	36
4.2.2. Rediseño para seguimiento de referencias variantes en el tiempo . . . . .	38
4.3. Rediseño digital para seguimiento con comportamiento entre muestreos . . . . .	41
<b>5. Rediseño Digital Aplicado al Circuito de Chua . . . . .</b>	<b>45</b>
5.1. Control analógico . . . . .	46
5.1.1. Estabilización a un punto de equilibrio . . . . .	46
5.1.2. Seguimiento de referencia con dinámica explícita . . . . .	49
5.2. Implementación digital de los controladores diseñados . . . . .	53
5.2.1. Estabilización a un punto de equilibrio . . . . .	53
5.2.2. Seguimiento . . . . .	56
5.2.3. Comportamiento entre muestras . . . . .	63
<b>6. Conclusiones . . . . .</b>	<b>69</b>
6.1. Trabajo a Futuro . . . . .	70
 <b>Bibliografía . . . . .</b>	 <b>71</b>

# Índice de figuras

1.1. Puntos entre muestras. . . . .	7
2.1. Conversión A/D. . . . .	10
2.2. Diagrama de un sistema híbrido de control. . . . .	13
2.3. Conmutaciones dependientes de los estados. . . . .	15
2.4. Circuito de Chua. . . . .	22
2.5. Corriente en el diodo de Chua. . . . .	23
3.1. Sistema analógico de control para seguimiento de referencia. . . . .	29
4.1. Sistema híbrido de control para el caso de seguimiento de referencia. . . . .	34
5.1. Sistema Caótico de Chua. . . . .	46
5.2. Sistema de Chua controlado analógicamente para estabilización a $\bar{x}_2$ . . . . .	48
5.3. Sistema de Chua controlado analógicamente para estabilización a $\bar{x}_3$ . . . . .	49
5.4. Sistema de Referencia. . . . .	50
5.5. Sistema controlado analógicamente para seguimiento vs referencia. . . . .	52
5.6. Estados del sistema de error $e_c(t)$ vs $t$ . . . . .	52
5.7. Sistema controlado digitalmente sin rediseño para regulación. . . . .	54
5.8. Sistema controlado digitalmente con rediseño para regulación. . . . .	55
5.9. Estados de los controladores analógico y digital para regulación. . . . .	55
5.10. Sistema híbrido conmutado para seguimiento. . . . .	56
5.11. Sistema controlado digitalmente sin rediseño para seguimiento. . . . .	57
5.12. Estados del sistema híbrido $x_d(t)$ vs $\Gamma(t)$ . . . . .	57
5.13. Sistema controlado digitalmente con $T = 0.01s$ para seguimiento. . . . .	59
5.14. Estados del sistema híbrido vs referencia, y error de seguimiento $T = 0.01s$ . . . . .	59
5.15. Estados de los controladores analógico y digital para seguimiento $T = 0.01s$ . . . . .	60
5.16. Sistema controlado digitalmente con $T = 0.2s$ para seguimiento. . . . .	61
5.17. Estados del sistema híbrido vs referencia, y error de seguimiento $T = 0.2s$ . . . . .	62
5.18. Estados de los controladores analógico y digital para seguimiento $T = 0.2s$ . . . . .	62
5.19. Sistema controlado digitalmente con $T = 0.01s$ para seguimiento (Chebyshev). . . . .	64
5.20. Estados del sistema híbrido vs referencia, y error de seguimiento $T = 0.01s$ (Chebyshev). . . . .	64
5.21. Estados de los controladores analógico y digital para seguimiento $T = 0.01s$ . . . . .	65
5.22. Sistema controlado digitalmente con $T = 0.2s$ para seguimiento (Chebyshev). . . . .	66

5.23. Estados del sistema híbrido vs referencia, y error de seguimiento $T = 0.2s$ (Chebyshev). . . . .	66
5.24. Estados de los controladores analógico y digital para seguimiento. $T = 0.2s$	67

# Resumen

Los avances tecnológicos de las últimas décadas, han traído consigo significativas aportaciones en las áreas de la teoría de control y los sistemas dinámicos. Cada vez más es notorio el interés de aprovechar las ventajas que ofrecen los sistemas digitales para realizar control sobre varios tipos de sistemas de naturaleza analógica, empleados en los campos de la medicina, el espacio, la ingeniería, etc. La aplicación de controladores digitales a sistemas descritos por modelos de tiempo continuo, es decir, sistemas analógicos, resulta en una forma de sistema híbrido, con elementos discretos y continuos en el tiempo. Una forma de diseñar controladores implementados en sistemas digitales, es el llamado rediseño digital. El rediseño digital es un método que permite derivar un controlador digital a partir de un controlador analógico ya existente; el objetivo de esto, es permitir que los estados del sistema controlado digitalmente, se aproximen lo más cercanamente posible, a los estados del sistema controlado de forma analógica en los instantes de muestreo.

En este documento se estudia el problema de rediseño digital para un tipo particular de sistemas no lineales, conocidos como sistemas lineales por partes. Se propone una solución para el problema de rediseño para los casos de regulación a un punto de equilibrio y de seguimiento de los estados de una referencia variante en el tiempo. Además de lo anterior, se muestra una forma de obtener un control digital por rediseño que contiene la dinámica del sistema entre muestras. Como resultado de esta investigación, se obtiene un método para derivar controladores digitales para sistemas analógicos, que permite la coincidencia de estados en cada instante de muestreo, considerando o no el comportamiento entre muestras. Los controladores obtenidos resolverán los problemas de regulación y seguimiento de referencias. La metodología propuesta es aplicada al control de un sistema lineal por partes, de naturaleza caótica, conocido como el sistema de Chua.

# Abstract

Technological advances in recent decades have brought significant contributions in the areas of control theory and dynamical systems. It is increasingly notorious the interest to take advantage of the features offered by digital systems to perform control over multiple types of systems of analog nature, employed in the fields of medicine, space, engineering, etc.. The application of digital controllers to systems described by continuous-time models, that is, analog systems, results in a form of hybrid system, with discrete and continuous elements in time. One way to design controllers implemented in digital systems is the so-called digital redesign. Digital redesign is a method of deriving a digital controller from an existing analog controller; the objective of this, is to allow the states of the digitally controlled system to approximate as closely as possible the states of the analog-controlled system at the sampling times.

In this document, the digital redesign problem for a particular type of nonlinear systems, known as piece-wise linear systems, is studied. A solution to the redesign problem is proposed for the cases of regulation to an equilibrium point and tracking of the states of a time-varying reference. In addition to the above, a way to obtain a digital control redesign containing the system dynamics between samples is shown. As a result of this research, a method is obtained to derive digital controllers for analog systems, which allows the matching of states at each sampling time, considering or not the behavior between samples. The obtained controllers will solve the problems of regulation and reference tracking. The proposed methodology is applied to the control of a piece-wise linear system, of chaotic nature, known as Chua's system.

# Capítulo 1

## Introducción

El evidente desarrollo tecnológico de los últimos años ha propuesto un avance en los temas de control, derivado de ello, el uso de muchas herramientas en diversos tipos de sistemas industriales, clínicos, militares, entre otros. Desde que los dispositivos digitales surgieron, los sistemas de control de esta naturaleza son preferidos sobre los analógicos, con el fin de aprovechar las ventajas que las computadoras de este tipo nos brindan, entre ellas, las altas velocidades de procesamiento, la facilidad de implementación y su versatilidad [Rafee et al., 1997, Guo et al., 2000b]. El uso de estos dispositivos electrónicos en sistemas descritos por modelos en tiempo continuo da paso a lo que se conoce como sistemas híbridos [Shieh et al., 1998]. Es bien sabido que las conversiones analógico/digital están bien descritas para sistemas lineales, por lo que problemas como el de regulación, y seguimiento de referencias, están ampliamente cubiertos desde el punto de vista del control analógico. Sin embargo, para los sistemas no lineales, resulta imperativo realizar algunas extensiones en las que se deben tener consideraciones como por el ejemplo, el tamaño del periodo de muestreo, de aquí que, muchas veces resulte imposible aplicar control digital [Guo et al., 2000b].

Para efectos de análisis de los sistemas compuestos, es necesario realizar conversiones de analógico a digital, de manera que se puedan establecer estrategias de control para estas representaciones. Una manera de proponer un control es mediante el rediseño digital, que se describe como el proceso de convertir un controlador analógico a uno equivalente digital, pretendiendo que los estados del sistema híbrido coincidan con los estados del sistema controlado analógicamente en cada instante de muestreo [Shieh and Wang, 1996, Shieh et al., 1989]. En la investigación se propone aplicar rediseño digital para sistemas lineales por partes a los cuales se les puede encontrar un diseño lineal por sección, que cumplan con ciertas propiedades deseables como estabilidad y menor error posible. Una primera aproximación al rediseño digital es no considerar el comportamiento del sistema entre muestras, es decir, solo garantizar coincidencia en los instantes de muestreo. Aunque esta aproximación brinda buenos resultados, es necesario proponer otra forma de obtener nuevas ganancias, de modo que el controlador considere también el comportamiento entre muestras del sistema, lo cual se puede lograr empleando las cuadraturas de Chebyshev entre puntos de muestreo.

Algunos inconvenientes derivados de la implementación de controladores digitales, están relacionados con el periodo de muestreo, por lo que el comportamiento entre muestras pue-

de resultar en un problema de diseño [Zhang et al., 2009, Li et al., 2003]. Con un periodo de muestreo muy pequeño, el costo computacional aumenta, lo que se refleja en elevación del consumo energético y de costos, añadiendo que muchas veces estos controladores resultan imposibles de realizar. Por otro lado, con periodos de muestreo grandes, el sistema podría presentar inestabilidad y mal desempeño [Guo et al., 2000b, Jianxiong et al., 1996, Guo et al., 2000a]. Dado lo anterior, es fácil concluir que el control digital tiene buen efecto sobre el sistema controlado siempre y cuando el periodo de muestreo sea pequeño.

En este trabajo se establece un método para encontrar realizaciones de controladores digitales para sistemas analógicos con alguna aproximación lineal, basados en controladores analógicos previamente diseñados. La necesidad de resolver los problemas de regulación y seguimiento, resulta imperativa en orden de proponer metodologías para la aplicación de la tecnología digital. Con la metodología propuesta, los tiempos de muestreo pueden ser relativamente grandes sin que el sistema presente inestabilidad. Particularmente, a modo de ilustración del desarrollo de estas metodologías, se aborda el problema de rediseño digital aplicado a un sistema caótico, de características no lineales por naturaleza, que puede ser representado como un sistema lineal por partes. Para este tipo de sistema, se usa el rediseño para estabilizar al sistema a uno de sus puntos de equilibrio, o para realizar el seguimiento de una referencia variante en el tiempo cuando se conoce la dinámica de la misma. Para cada uno de los casos anteriores, se logra un buen desempeño del controlador, aún para cuando el periodo de muestreo es relativamente grande.

El problema de control de sistemas analógicos mediante controladores implementados en dispositivos digitales, hizo necesario derivar formas de realizar conversiones A/D y D/A de manera exitosa, que derivó en los métodos de conversión de modelos continuos a discretos y viceversa. Shieh [Shieh et al., 1979, Shieh et al., 1980] realizó gran aporte a la solución de este problema, mostrando un método basado en series geométricas para las conversiones A/D. Con el objetivo de sacar provecho de estos avances, se planteó aplicar estos controles digitales a sistemas continuos, lo que derivó en lo que conocemos como sistemas híbridos. Con esto, vino el problema de ¿Cómo realizar un control digital basándose en la existencia de un control analógico que satisface algún criterio de diseño?, la cual dio lugar a lo que conocemos como rediseño digital.

La idea de diseñar un control digital a partir de uno analógico, de forma que los estados del sistema controlado digitalmente coincidan con los estados del sistema controlado analógicamente, en cada instante de muestreo, fue presentada por Kuo [Kuo, 1980]. A partir de ahí, diferentes métodos de rediseño han sido propuestos. Algunos basados en estrategias de retroalimentación de estados como [Kennedy and Evans, 1990]; basados en transformación bilineal (TBG) [Zhang et al., 2009]; otros, derivados a partir del control óptimo [Shieh et al., 1989, Shieh et al., 1991, Rafee et al., 1997], incluso de tipo modulación de ancho de pulso (PWM por sus siglas en inglés) [Shieh and Wang, 1996]. Aunque los dispositivos digitales proporcionan, entre otras, ventajas como confiabilidad, versatilidad, velocidad de procesamiento, también pueden resultar difíciles de implementar debido problemas asociados al comportamiento entre muestras del sistema y los tamaños del tiempo de muestreo. En casos en que los tiempos de muestreo deban ser muy pequeños, los costos operativos aumentan,

incluso, existen casos en los que es imposible de implementar; por estos motivos, las técnicas de rediseño digital, salvo unos pocos casos, han sido poco estudiadas en sistemas no lineales en relación a lo que lo han sido para sistemas lineales [Guo et al., 2000b, Guo et al., 2000a]. Uno de estos sistemas, es el conocido sistema caótico de Chua. El sistema de Chua fue descrito por primera vez por Leon Chua en 1984, quién lo derivó del circuito más simple que posee dinámicas y características propias de sistemas de tipo caótico: sensibilidad a condiciones iniciales, presencia de varios tipos de bifurcaciones, y existencia de órbitas periódicas [Chua, 1992, Wu, 1987]. Este circuito nace en una época en la que el control de sistemas caóticos y sistemas no lineales era de gran interés. Trabajos como los de [Chen and Dong, 1993b] y [Chen and Dong, 1993c] fueron enfocados al control analógico de este tipo de sistemas, entre los que se encuentra el ya mencionado sistema caótico de Chua. Derivado de esto, la primera idea para el control del sistema de Chua fue basada en un control en tiempo continuo; esta idea fue desarrollada y extendida ampliamente. La idea de emplear controladores de datos muestreados, fue sugerida por [Yang and Chua, 1998]. A mediados de la década de 1990, autores como Shieh [Shieh and Wang, 1996] y Dedieu [Dedieu and Ogorzalek, 1994], desarrollaron métodos para el control del sistema caótico de Chua a través de controladores digitales, proporcionando buenos resultados considerando un tiempo de muestreo suficientemente pequeño. El mismo Shieh posteriormente, planteó el uso del rediseño digital para sistemas híbridos que involucraran incertidumbres, lo que abrió las puertas a la aplicación de esta metodología al control robusto [Shieh et al., 1996]. Resultados más recientes, particularmente en la década de los 2000, permiten la obtención de controladores digitales para este sistema con buen desempeño, integrando periodos de muestreo relativamente más grandes, incluso desarrollando metodologías para contemplar el comportamiento del sistema entre muestras [Guo et al., 2000b]. En ese mismo año, Shieh y Guo propusieron la aplicación del rediseño digital para la obtención de controladores predictivos, aplicándolo a un sistema caótico para obtener seguimiento de una órbita incrustada en su región de atracción [Guo et al., 2000a]. En 2005 Canelon aplicó el rediseño digital a la aproximación de un control basado en redes neuronales, para controlar un sistema caótico en tiempo continuo cuya dinámica es desconocida [Canelon et al., 2005]. La implementación de controladores digitales también ha resuelto problemas de sincronización, problema que ha cobrado especial relevancia en los últimos 20 años. [Hua et al., 2015] usaron control digital para la sincronización de sistemas caóticos tipo Lur'e considerando retardos entre dos sistemas idénticos. Más adelante, [Lu et al., 2018] emplearon este tipo de controladores para sincronizar redes neuronales cuyo control presenta muestreos no uniformes y pérdidas de información. Además de esto, [Yuan et al., 2018] usaron control basado en datos muestreados para sincronizar un tipo de red neuronal basada en memresistores. Involucrando teoría de grafos, [Cui et al., 2019] lograron el consenso entre diferentes sistemas multiagentes, empleando la idea de un "grafo promedio", introducido por un protocolo basado en datos muestreados. Problemas más complejos como el de control de redes de sistemas dinámicos, también han sido tratados con control digital. [Sun et al., 2019] lograron realizar rechazo activo de perturbaciones basados en eventos, para una red de sistemas, usando un controlador digital que consideraba perturbaciones e incertidumbres en el modelo de la red; mientras que [Amini et al., 2021] emplearon datos muestreados para realizar control basado en eventos, a redes de sistemas dinámicos en la presencia de lo que denomina "*Denial of Service*" (DoS).

## 1.1. Planteamiento del problema

A partir de lo discutido anteriormente, es preciso preguntarnos ¿Cómo es la implementación de controladores digitales en sistemas analógicos en el caso de sistemas lineales por partes?. Es bien sabido que los controladores digitales tienen una base en el dominio del tiempo discreto; una señal digital es una señal en tiempo continuo que ha sido muestreada cada cierto tiempo  $T$ , y retenida de alguna manera, lo que usualmente resulta en una señal rectangular. Derivado de esto, el sistema híbrido resultante, tiene su estabilidad sujeta al tamaño del periodo de muestreo  $T$ , es decir, el sistema tiende a presentar inestabilidad para periodos muy grandes; aunque la estabilidad de sistemas híbridos es un tema de interés, no es el objetivo de esta investigación tratarlo. Más detalles sobre los problemas de implementación, pueden encontrarse en [Jianxiong et al., 1996].

Una opción para controlar digitalmente un sistema analógico (en tiempo continuo), es diseñar un controlador analógico, y emplear estas ganancias para la versión digital. El problema de lo anterior radica en que con estas ganancias, no se garantiza un buen desempeño, donde el mejor desempeño posible proporcionado por el control digital, es el obtenido del control analógico. Lo anterior nos lleva a formular la siguiente pregunta, y la cual es el problema a resolver: ¿Cómo diseñar un controlador digital con ganancias adecuadas, a partir de un control analógico bien diseñado, tal que los estados del sistema controlado digitalmente coincidan con los estados del sistema controlado analógicamente en cada instante de muestreo?. Adicionalmente, teniendo en cuenta que los controladores digitales presentan una desventaja, y es que el comportamiento entre muestreos es indeterminado, también planteemos la pregunta: ¿Cómo rediseñar el control digital en base a las ganancias del control analógico, de modo que el comportamiento entre muestras sea considerado en el rediseño?. Estas dos preguntas son la base de la presente investigación, y serán estudiadas en este documento.

Para responder la primer pregunta, consideremos el sistema lineal, continuo, e invariante en el tiempo, expresado en forma de espacio de estados, el cual está controlado analógicamente por  $\bar{u}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= Ax_c(t) + B\bar{u}(t) \\ y_c(t) &= Cx_c(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde  $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$  como el vector de estados,  $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  el vector de entradas,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  como las matrices de estados, entradas y salidas. Todas con las dimensiones adecuadas respectivamente.  $y_c(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salida;  $n, m, p \in \mathbb{N}$  como el número de estados, entradas y salidas. Este primer problema, se divide en dos casos: regulación a un punto de equilibrio, y seguimiento de referencias. Debido a lo anterior, el control  $\bar{u}(t)$  será planteado de acuerdo al objetivo de control. Asumiremos al par  $(A, B)$  controlable.

### Regulación analógica

En el caso de regulación a un punto de equilibrio de (1.1), el controlador analógico para este sistema es:

$$\bar{u}(t) = u_{\bar{c}}(t) = -K_{\bar{c}}(x_c(t) - \bar{x}) \tag{1.2}$$

donde  $K_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de realimentación de estados y  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es un punto de operación del sistema en tiempo continuo, en adelante, llamado *punto de equilibrio*. Cerrando el lazo del sistema (1.1) con el control recién definido, obtenemos:

$$\dot{e}_c(t) = (A - BK_{\bar{c}})e_c(t) \quad (1.3)$$

donde  $e_c(t) = x_c(t) - \bar{x}$  es el vector de error respecto del punto de equilibrio.

### Seguimiento analógico

Consideremos ahora el caso en el que se desee realizar seguimiento de una referencia variante en el tiempo. Para lo anterior definamos el control analógico:

$$\bar{u}(t) = u_c(t) = -K_c x_c(t) + E_c r(t) \quad (1.4)$$

donde  $K_c \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de realimentación de estados y  $E_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz de prealimentación de los estados de la referencia  $r(t) \in \mathbb{R}^m$ . El lazo cerrado de (1.1) con el controlador analógico (1.4) queda:

$$\dot{x}_c(t) = (A - BK_c)x_c(t) + BE_c r(t) \quad (1.5)$$

Consideremos que el controlador analógico  $u_c(t)$  ha sido bien diseñado; para esta investigación nos aseguraremos de utilizar un *Regulador Lineal Cuadrático* (LQR por sus siglas en inglés) para el caso de regulación, y un *Seguidor Lineal Cuadrático* (LQT por sus siglas en inglés) para el caso de seguimiento. Lo anterior con el fin de elegir un controlador analógico que garantice un buen desempeño basado en algún criterio establecido por diseño, y mostrar que las ganancias  $K_{\bar{c}}$ ,  $K_c$  y  $E_c$  no necesariamente funcionan para el caso en que el controlador es de naturaleza digital; recordemos que el periodo de muestreo no aparece en  $\bar{u}(t)$ .

Definamos ahora un nuevo sistema en tiempo continuo (analógico), lineal, e invariante en el tiempo, controlado de manera digital por  $u(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) + Bu(t) \\ y_d(t) &= Cx_d(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde  $A, B, C$  son exactamente las mismas matrices que (1.1),  $x_d(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados en tiempo continuo del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada, y  $y_d(t) \in \mathbb{R}^p$  el vector de salida. Igual que en el caso del sistema controlado analógicamente, plantearemos los dos casos para cuando el control es de naturaleza digital, es decir, regulación y seguimiento de referencias.

### Regulación digital

En el caso de regulación, el controlador digital está dado por:

$$u(t) = u_{\bar{d}}(t) = -K_{\bar{d}}(x_d(kT) - \bar{x}) \quad (1.7)$$

para  $kT < t \leq kT + T$ ;  $K_{\bar{d}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de realimentación de estados,  $x_d(kT) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados en tiempo discreto del sistema, y  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio de

(1.6). Cerrando el lazo del sistema (1.6) con el control digital (1.7), obtenemos la dinámica en tiempo continuo del sistema híbrido:

$$\dot{e}_d(t) = Ae_d(t) - BK_{\bar{d}}e_d(kT) \quad (1.8)$$

donde  $e_d(t) = x_d(t) - \bar{x}$  es el vector de error en tiempo continuo respecto al punto de equilibrio de (1.6), y  $e_d(kT) = x_d(kT) - \bar{x}$  es el error en tiempo discreto respecto del mismo punto de equilibrio  $\bar{x}$ .

### Seguimiento digital

Por otro lado, cuando el objetivo de control sea seguimiento de referencias, el control digital a considerar es descrito como:

$$u(t) = u_d(t) = -K_d x_d(kT) + E_d r(kT) \quad (1.9)$$

con  $kT < t \leq kT + T$ ,  $K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de realimentación de estados,  $E_d \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz de prealimentación de los estados de la entrada en tiempo discreto  $r(kT) \in \mathbb{R}^m$ . El sistema (1.6) en lazo cerrado con (1.9), da como resultado al sistema híbrido:

$$\dot{x}_d(t) = Ax_d(t) - BK_d x_d(kT) + BE_d r(kT) \quad (1.10)$$

Hasta aquí, se han descrito los problemas de regulación a punto de equilibrio y seguimiento de referencias para el sistema analógico (1.1), empleando un controlador analógico  $\bar{u}(t)$  y un controlador digital  $u(t)$ . Lo anterior con la finalidad de plantear formalmente la primer pregunta de investigación. El control analógico es diseñado de modo que proporcione un desempeño aceptable en el lazo cerrado, sin embargo, esto no garantiza que sus ganancias sean adecuadas para el caso en el que el control sea discreto. De lo anterior, la necesidad de plantear un control digital cuyas ganancias sí sean las adecuadas.

Lo anterior, está relacionado con la primera pregunta de investigación mostrada en el principio de la presente sección. Dado así, y en resumen, se plantea obtener un controlador digital  $u_d(t)$  a partir del controlador analógico  $\bar{u}(t)$  de manera que para el caso de regulación, los estados  $e_d(t)$  y  $e_c(t)$  de los sistemas (1.8)-(1.3) coincidan en cada instante de muestreo  $kT$ ; mientras que para el caso de seguimiento, los estados  $x_d(t)$  y  $x_c(t)$  de los sistemas (1.10)-(1.5) coincidan en cada instante de muestreo  $kT$ . Lo anterior puede escribirse, para cada caso, como:

Regulación

$$e_d(t)|_{t=kT} = e_c(t)|_{t=kT} \quad (1.11a)$$

Seguimiento

$$x_d(t)|_{t=kT} = x_c(t)|_{t=kT} \quad (1.11b)$$

En relación a la segunda pregunta, consideremos el modelo discreto del sistema analógico (1.5), que incluye el comportamiento entre muestras:

$$\begin{aligned} x_c(kT + \mathbf{n}T_n) &= G_c^{(\mathbf{n})} x_c(kT) + H_c^{(\mathbf{n})} r(kT) \\ y_c(kT) &= C x_c(kT) \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde  $G_c = G_c(A_c, T)$  y  $H_c = H_c(A_c, B, T)$  son funciones a determinar a través de algún método de discretización.  $T \in \mathbb{R}^+$  es el periodo de muestreo,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T_n = \frac{T}{N}$  es el muestreo rápido (intermuestreo), con  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  un punto entre muestras, y  $N \in \mathbb{N}_0$  el número de puntos en el que se divide la muestra. Se propone encontrar un control como (1.9) que considere los  $N$  puntos entre muestras, de forma que se garantice (1.11b).

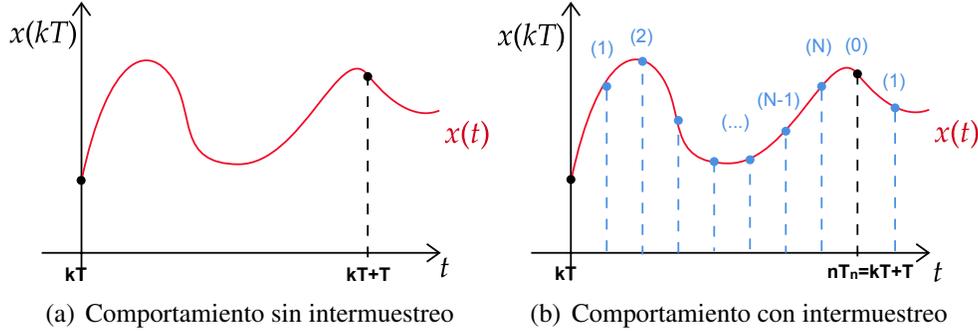


Figura 1.1: Puntos entre muestras.

En la Figura 1.1, se observa gráficamente el concepto de intermuestreo. Usualmente al realizar el muestreo de una señal continua en el tiempo, este se hace cada  $T$  tiempo, al que se le denomina *periodo de muestreo*; entre cada muestreo existe información que se pierde al no ser considerada. Para solucionar este problema, se considera ahora dividir el tiempo entre muestras en  $N$  partes, de modo que entre más puntos se tengan entre muestras, más información se recupera; más aún, si hacemos  $N \rightarrow \infty$ , habremos reconstruido toda la señal en tiempo continuo. Esta estrategia es la que se empleará para responder a la segunda pregunta de investigación, y con la que lograremos obtener un controlador que considere el comportamiento intermuestral, esto, a través de las cuadraturas Chebyshev.

## 1.2. Descripción de la tesis

### 1.2.1. Objetivo general

El objetivo general del trabajo de tesis es obtener un controlador digital para un sistema analógico lineal o lineal por partes, a través del rediseño digital, para los casos de regulación y seguimiento de referencias, de modo que se garantice el objetivo de control.

### 1.2.2. Objetivos específicos

Para lograr el objetivo general, se derivan los siguientes objetivos particulares:

1. Derivar un controlador digital (para un sistema analógico) con ganancias adecuadas a partir del diseño de un controlador analógico, de modo que los estados del sistema controlado digitalmente coincidan con los estados del sistema controlado analógicamente; esto para los casos de regulación y seguimiento de referencias.

2. Diseñar un controlador digital mediante rediseño, que contenga la información del comportamiento entre muestras, de modo que los estados del sistema híbrido coincidan con los estados del sistema analógico en cada instante de muestreo.

### 1.2.3. Hipótesis

La hipótesis de trabajo puede ser planteada en base a los objetivos derivados por las preguntas de investigación, con lo cual se contemplan dos casos. El primero, es el caso de regulación, es decir, cuando se desee estabilizar el sistema a uno de sus puntos de equilibrio; el segundo, es el caso en el que se desee realizar seguimiento de los estados de una referencia variante en el tiempo, esto asumiendo que tenemos acceso a ellos. Para ambos casos se plantea utilizar un controlador analógico de tipo LQR para regulación, y de tipo LQT para seguimiento. La implementación de este tipo de control garantiza un buen desempeño (en este caso, un error acotado) del controlador analógico, en relación a cada uno de los objetivos de control; la elección de este tipo de control analógico se realiza teniendo en cuenta que, a partir del mismo, se obtendrán las ganancias rediseñadas del control digital. Para el caso en el que el sistema sea conmutado, es necesario realizar consideraciones especiales que permitan resolver el problema como de horizonte de tiempo infinito, lo que derivará en ganancias estáticas para el control analógico.

Para la primera pregunta, mediante el método de discretización directa desarrollado en [Lewis, 1992], se obtendrán modelos discretos equivalentes con los que se realizará el rediseño que garantiza coincidencia de los estados en cada instante de muestreo, esto sin considerar comportamiento intermuestral. Para el segundo objetivo, se propone emplear cuadraturas de Chebyshev para aproximar la integral de convolución que surge en el proceso de discretización del modelo híbrido del sistema controlado digitalmente. Lo anterior permite aproximar el comportamiento del sistema a un número infinito de datos entre cada muestreo, por lo que se considera viable para obtener el comportamiento entre muestras. Cabe destacar que, las cuadraturas de Chebyshev se podrán aplicar únicamente al caso de seguimiento de referencias, debido a que en el caso de regulación no existe integral de convolución que se pueda aproximar mediante este método.

Utilizando las aproximaciones mencionadas, se desarrolla una propuesta de diseño de controladores implementados en dispositivos digitales para los casos de regulación y seguimiento de referencias. Los resultados obtenidos se ilustrarán con el sistema caótico de Chua, un sistema lineal a trozos.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se mostrarán algunos preliminares necesarios para la solución del problema planteado. Resulta pertinente definir a qué nos referimos con conversión  $A/D$  y por qué es necesaria; veremos que por medio de la conversión, se puede plantear el problema de rediseño digital. Debido a la naturaleza continua de la planta, y digital del controlador, obtendremos un sistema híbrido, por lo que también se explicará. En el ejemplo se emplea el sistema de Chua, un sistema no lineal, con representación lineal por partes, lo que deriva en un sistema conmutado. En cuanto a los objetivos de control (regulación y seguimiento), se derivan los controles LQR y LQT que se usarán a lo largo de la investigación.

### 2.1. Conversión continuo a discreto

El uso de ecuaciones diferenciales para representar a los sistemas dinámicos ha sido y es un tema de amplio estudio; como resultado, nos encontramos con diversas teorías como la teoría de control. Debido a los avances tecnológicos, se derivaron un sinnúmero de preguntas, entre ellas, ¿cómo aprovechar las ventajas de la electrónica?. La teoría del control en espacio de estados, básicamente responde esta interrogante, sin embargo, la motivación principal siempre fue usar los dispositivos analógicos para describir o controlar los modelos descritos por las ecuaciones diferenciales, ya que el funcionamiento de éstos está dado en el dominio del tiempo continuo  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Muchas teorías dentro del control en espacio de estados tienen aplicación dentro de lo analógico, no obstante, con la aparición de las computadoras y dispositivos digitales, se hizo necesario determinar alguna manera de representar en modelos discretos, la dinámica de los modelos en tiempo continuo. Como resultado de lo anterior, se plantea el problema de conversión de modelos analógicos a modelos digitales, o lo que expresado en términos de dominio temporal, convertir modelos en tiempo continuo, a modelos en tiempo discreto.

Según lo anterior, el problema de conversión continuo a discreto puede plantearse de la siguiente forma: Dado el sistema en espacio de estados en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

encontrar un modelo en tiempo discreto de la forma:

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= Gx(kT) + Hu(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned} \quad (2.2)$$

con  $G = G(A, T)$  y  $H = H(A, B, T)$ , de manera que describa la dinámica del sistema en tiempo continuo en cada muestra  $k \in \mathbb{N}$ , con  $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  como el periodo de muestreo. Existen diversos métodos para encontrar representaciones discretas de modelos en tiempo continuo, entre los más usados se encuentran algunos que emplean series geométricas, métodos de truncamiento y transformaciones bilineales [Shieh et al., 1979, Shieh et al., 1980, Zhang et al., 2009]. No obstante, uno de los métodos con más trascendencia a la hora de discretizar, y el empleado en esta investigación, es el **método de discretización directa**, desarrollado en [Lewis, 1992]. Con este método particularmente, para que la conversión tenga sentido, se debe considerar a  $u(t)$  en (2.1), como una acción de control constante durante el periodo de muestreo. Existen dos formas de conseguir lo que se plantea. La primera, es que provenga de alguna fuente en la que ya se haya realizado muestreo, por lo que  $u(t) = u(kT)$ , de manera que esté definido solo en los instantes de muestreo  $kT$ . A menudo, esta discretización de la señal de control, es obtenida al aplicar la delta de Dirac (impulso en tiempo discreto) a la función en tiempo continuo  $u(t)$ . La segunda opción, es considerar a  $u(t)$  como una señal digital, para lo cual no solo ha debido ser muestreada, sino retenida de alguna manera, usualmente por un *retenedor de orden cero* (ZOH por sus siglas en inglés), es decir,  $u(t) = u(kT)$  para  $kT < t \leq kT + T$ . Esta segunda posibilidad abre paso para el estudio del control digital para sistemas en tiempo continuo; este tipo de sistemas compuestos se conocen como *sistemas híbridos* [Shieh et al., 1998], los cuales será detallados a posteriori en el documento.

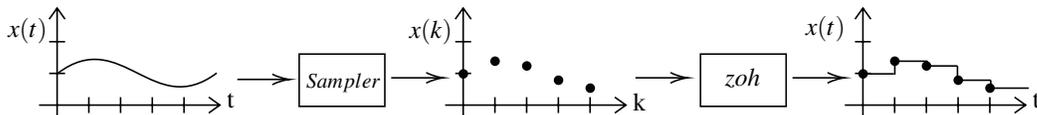


Figura 2.1: Conversión A/D.

A continuación, se explicará el método de discretización directa con el cual se obtiene un modelo discreto de la forma (2.2), a partir del modelo continuo (2.1). El método se empleará para encontrar los modelos discretos equivalentes para cada sistema, los cuales son requeridos para resolver el problema de rediseño.

Para discretizar (2.1), se multiplican ambos lados por  $e^{-At}$ :

$$e^{-At} \frac{dx(t)}{dt} = e^{-At} Ax(t) + e^{-At} Bu(t)$$

$$e^{-At} \frac{dx(t)}{dt} - e^{-At} Ax(t) = e^{-At} Bu(t)$$

$$\frac{d(\mathbf{e}^{-At}x(t))}{dt} = \mathbf{e}^{-At}Bu(t)$$

integrando ambos lados desde  $t_0$  a  $t$ , queda:

$$\int_{t_0}^t \frac{d(\mathbf{e}^{-A\lambda}x(\lambda))}{d\lambda} d\lambda = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A\lambda}Bu(\lambda)d\lambda$$

Para que el método tenga sentido, se debe considerar a  $u(t)$  como una función constante en el intervalo de integración, por lo que en su lugar, tendremos un control  $u(kT)$ , con  $T \in \mathbb{R}$  como el periodo de muestreo con el que ha sido muestreado,  $k = 1, 2, \dots$ . Con lo anterior, obtenemos:

$$\int_{t_0}^t \frac{d(\mathbf{e}^{-A\lambda}x(\lambda))}{d\lambda} d\lambda = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A\lambda}Bu(kT)d\lambda$$

$$\int_{t_0}^t \frac{d(\mathbf{e}^{-A\lambda}x(\lambda))}{d\lambda} d\lambda = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A\lambda}Bd\lambda u(kT)$$

$$\mathbf{e}^{-A\lambda}x(\lambda)|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A\lambda}Bd\lambda u(kT)$$

$$\mathbf{e}^{-At}x(t) - \mathbf{e}^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A\lambda}Bd\lambda u(kT)$$

$$\mathbf{e}^{-At}x(t) = \mathbf{e}^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A\lambda}Bd\lambda u(kT)$$

$$x(t) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-\lambda)}Bd\lambda u(kT)$$

ahora considerando  $t_0 = kT$  y  $t = kT + T$ :

$$x(kT + T) = \mathbf{e}^{A(T)}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{e}^{A(kT+T-\lambda)}Bd\lambda u(kT)$$

realizando el cambio de variables  $\tau = \lambda - kT$ , queda:

$$x(kT + T) = \mathbf{e}^{A(T)}x(kT) + \int_0^T \mathbf{e}^{A(T-\tau)}Bd\tau u(kT)$$

cambiando de nuevo  $\lambda = T - \tau$ , resulta:

$$x(kT + T) = \mathbf{e}^{AT}x(kT) + \int_0^T \mathbf{e}^{A\tau}Bd\tau u(kT)$$

pero

$$\int_0^T \mathbf{e}^{A\tau}Bd\tau = \mathbf{e}^{AT}A^{-1}B|_0^T$$

$$\int_0^T \mathbf{e}^{A\tau}Bd\tau = (\mathbf{e}^{AT} - I_{n \times n})A^{-1}B$$

así, finalmente se obtiene:

$$x(kT + T) = Gx(kT) + Hu(kT) \tag{2.3}$$

donde:

$$\begin{aligned} G &= \mathbf{e}^{AT} \\ H &= (\mathbf{e}^{AT} - I_{n \times n})A^{-1}B \end{aligned} \quad (2.4)$$

son las funciones que describen la dinámica discreta del sistema continuo (2.1). A (2.3) se le conoce como el *modelo discreto equivalente* de (2.1).

La solución al problema de conversiones continuo-discreto, abre paso al problema de control digital. Existen varias formas de diseñar un control digital, una de ellas es diseñar un control en el dominio discreto para un modelo discreto equivalente del sistema en tiempo continuo. Otra salida es diseñar un control en tiempo continuo para un sistema de la misma naturaleza, y luego discretizarlo [Keller and Anderson, 1992, Zhang et al., 2009, Kennedy and Evans, 1990, Shieh et al., 1998]. No obstante a lo anterior, encontramos algunos problemas para cada caso; en el primer caso el periodo de muestreo suele ser un problema, ya que si es muy grande, el sistema puede presentar inestabilidad; mientras que para el segundo caso, no se garantiza que exista buen desempeño del controlador para lograr el objetivo de control, ya que las ganancias del controlador analógico pueden no ser las adecuadas para su representación digital. Una forma práctica en la que es posible solucionar estos problemas, es considerar una tercera manera de diseñar el control, llamada *rediseño digital*.

### 2.1.1. Rediseño digital

El rediseño digital es una manera de obtener un control digital a partir de un control analógico bien diseñado, con el fin de que los estados del sistema controlado digitalmente, coincidan con los estados del sistema controlado de manera analógica en cada instante de muestreo  $kT$  [Guo et al., 2000b, Jianxiong et al., 1996]. La diferencia de este método en relación los mostrados en [Shieh et al., 1979, Shieh et al., 1980, Zhang et al., 2009], radica en la derivación de las ganancias. En el rediseño por coincidencia de estados, se emplea la discretización directa mencionada en la sección 2.1, pero esta vez se considera a  $u(t)$  como una señal rectangular, es decir, una señal digital [Shieh et al., 1980].

El proceso para realizar el rediseño digital se puede formular como:

1. Diseñar un controlador en tiempo continuo (analógico) para el sistema en tiempo continuo.
2. Encontrar un modelo discreto para el sistema en lazo cerrado con el control analógico  $x_c(kT + T)$ .
3. Plantear el sistema híbrido (sistema analógico, control digital) con las ganancias adecuadas
4. Encontrar el modelo discreto del sistema controlado digitalmente  $x_d(kT + T)$
5. Determinar las nuevas ganancias permitiendo  $e_d = e_c$  en cada instante de muestreo  $T$  para el caso de regulación, y  $x_d = x_c$  para el caso de seguimiento de referencias.

Todo lo anterior es concerniente al rediseño digital sin comportamiento entre muestras, es decir, lo relacionado con la primer pregunta de investigación. Para el caso en el que se desee un rediseño que considere comportamiento intermuestral, se debe proceder de la misma forma que antes, pero esta vez, en el modelo discreto (resultado de la conversión continuo a discreto) aparecerán los puntos intermuestrales. En ese modelo se debe aplicar lo que se conoce como cuadraturas de Chebyshev. Una cuadratura de Chebyshev es un método de integración numérica que permite aproximar integrales en tiempo continuo cuya forma es  $w(\lambda)f(\lambda)$ . Para ilustrar la idea de la cuadratura de Chebyshev, supongamos que se plantea calcular la integral definida de  $f(\lambda)$  en el intervalo  $[a, b]$  :

$$I = \int_a^b w(\lambda)f(\lambda)d\lambda \quad (2.5)$$

donde  $w(x)$  es una función de peso, a definir, existente en el intervalo. La anterior integral se puede aproximar así:

$$I \approx W \sum_{n=0}^N f(\lambda_n) \quad (2.6)$$

donde  $f(\lambda_n)$  es el valor de la función en cada partición  $n$  del intervalo  $[a, b]$ , por lo que  $\lambda_n = a + \frac{n(b-a)}{N}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Además,  $W$  es un factor de peso definido como:

$$W = \frac{1}{N+1} \int_a^b w(\lambda)d\lambda \quad (2.7)$$

Esta cuadratura de Chebyshev nos permitirá aproximar la integral de convolución que resulta del proceso de discretización del lazo cerrado del sistema controlado analógicamente para el caso de seguimiento (1.5). En secciones posteriores, se seleccionará la función de peso  $w(\lambda)$  para lograr obtener el rediseño que considera comportamiento intermuestral.

## 2.2. Sistema híbrido

La implementación de sistemas de control de datos muestreados (control digital), aplicados a sistemas descritos por modelos continuos, está definida como *sistema híbrido* [Shieh et al., 1998]. Aunque una definición más global es la que involucra a sistemas con interacción de dinámicas continuas y discretas [Liberzon, 2003].

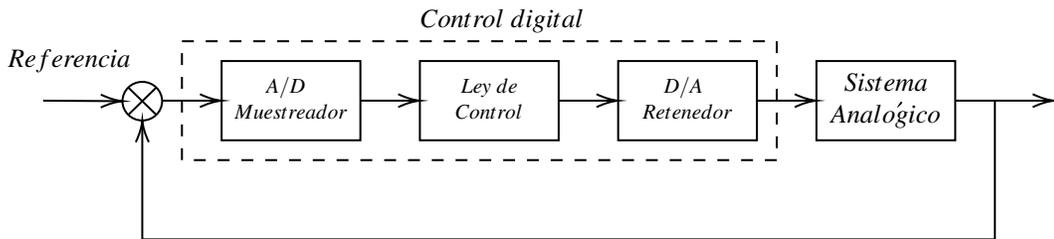


Figura 2.2: Diagrama de un sistema híbrido de control.

Para poder concebir este tipo de sistemas, es necesario la implementación de convertidores  $A/D$  y  $D/A$  según sea el caso, debido a la naturaleza digital del control. Una representación muy general de lo que es un sistema híbrido está dada por la Figura 2.2 [Fadali and Visioli, 2013]. Es claro que el problema de control digital a partir de un control analógico involucra conversiones del tipo  $A/D$  (analógico a digital), por lo que resulta conveniente considerar a una señal analógica como una función en tiempo continuo, mientras que a una señal digital rectangular, como una función continua a trozos; aunque las diferencias son sutiles, los efectos de su naturaleza sobre los sistemas pueden resultar sustancialmente diferentes. Desde esta perspectiva, podemos afirmar que las conversiones  $A/D$  son consecuencia directa de las conversiones continuo a discreto explicadas en la sección 2.1 [Shieh et al., 1980]. La señal analógica (función en tiempo continuo) pasa por un elemento que se denomina *muestreador*, lo que resulta en una función en diferencias o muestras; lo anterior, es "básicamente" una conversión continuo a discreto. Luego, esa señal muestreada, se introduce en un *retenedor*, y se produce una función continua a trozos, particularmente una señal rectangular o digital. Así, podemos ver al muestreador como el elemento conversor  $A/D$  y al retenedor como el  $D/A$ .

Existe una amplia gama de sistemas que involucran dinámicas continuas y discretas. Entre estos, centramos particular atención en aquellos sistemas en los que algunos eventos discretos tienen incidencia en la dinámica del sistema híbrido, donde estos eventos pueden estar relacionados al tiempo, o los estados. Estos sistemas se conocen como *sistemas conmutados*, y pueden ser derivados de los sistemas híbridos siempre y cuando se consideren, además de la dinámica continua, los posibles patrones de conmutación generados por el comportamiento de la parte discreta [Liberzon, 2003]. Un tipo de sistema conmutado clásico, se puede encontrar en sistemas cuya dinámica puede ser descrita como lineal por partes (PWL por sus siglas en inglés), donde a menudo las conmutaciones están regidas por alguna ley de conmutación.

### 2.2.1. Sistema lineal por partes

En este trabajo de investigación, nos concentramos en un tipo particular de sistemas dinámicos que pueden describirse como una familia de sistemas indexados, donde cada uno de los elementos de esa familia es un subsistema de naturaleza lineal (como el caso de los sistemas PWL) o no lineal, continuo en el tiempo o discreto. A este tipo de sistemas se les puede clasificar como sistemas conmutados, debido a que el espacio de estados  $\mathbb{R}^n$ , está dividido en un número de sistemas continuos en cada región de operación, los cuales conmutan de acuerdo a alguna regla conocida como *condición de conmutación* [Liberzon and Morse, 1999, Andrey V. Savkin, 2002]. Esta condición puede servir para la clasificación de los sistemas conmutados, de hecho, una buena clasificación podría darse por dos características: el tipo de conmutación (por estados o por tiempo), y la autonomía del sistema (si es autónomo, o no autónomo) [Liberzon, 2003, Araghi et al., 2013]. Particularmente en este trabajo, se muestra especial interés en los sistemas con conmutaciones arbitrarias dependientes de los estados, cuya naturaleza sea lineal y su solución continua en el tiempo para todo  $\mathbb{R}^n$ .

Cuando todos los subsistemas que componen a la familia son lineales, a esta familia se le

denomina *sistema lineal por partes*. Consideremos al conjunto de sistemas lineales

$$f_i(x) = \dot{x}(t) = A_i x(t) \quad (2.8)$$

con  $i \in \Omega$ ,  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, q\}$  como el conjunto de partes del sistema lineal conmutado, con  $q = p + 1$ , donde  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p < \infty$  es el número de *superficies de conmutación*;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  el vector de estados del sistema lineal y  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz del sistema de cada subsistema de  $\Omega$ . Una "buena" visualización de cómo se representan las conmutaciones dependientes de los estados se puede observar a continuación.

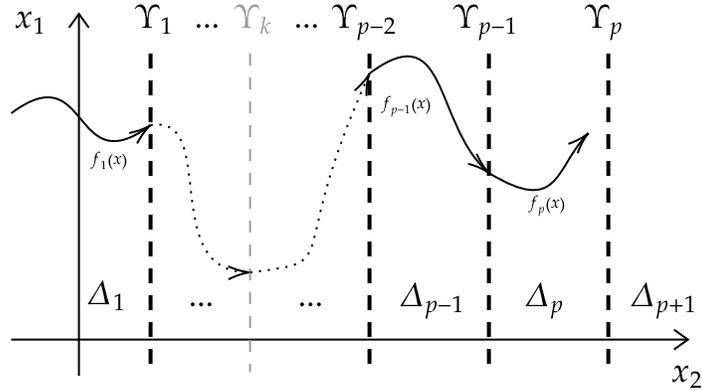


Figura 2.3: Conmutaciones dependientes de los estados.

En la Figura 2.3,  $\Upsilon_k$  representa la  $k$ -ésima superficie de conmutación del sistema PWL, donde  $k = 1, 2, \dots, p$ .  $f_i(x)$  es la dinámica continua del sistema en la  $i$ -ésima porción  $\Delta_i$  de  $\mathbb{R}^n$ . En esta investigación se consideran superficies de conmutación que no generen *saltos* en la dinámica del sistema de una parte del espacio  $\mathbb{R}^n$  a otra, ya que esto implicaría dinámicas discontinuas. En lugar de lo anterior, se consideran superficies de conmutación que den paso a *cruces* de una parte del sistema conmutado a otra contigua, permitiendo soluciones continuas, de forma que el campo vectorial de sistema conmutado sea continuo. Una característica deseable de estos sistemas conmutados, es la estabilidad, la cual ha sido estudiada prestando especial atención en los efectos de conmutación, siendo estas arbitrarias o no. En este trabajo, se considerarán conmutaciones arbitrarias dependientes de los estados del sistema PWL controlado analógicamente.

## 2.2.2. Estabilidad asintótica para sistemas con conmutaciones arbitrarias

Un problema clásico para los sistemas conmutados, es el de encontrar condiciones que garanticen la estabilidad asintótica del sistema (2.8), sujeto a conmutaciones arbitrarias. Usualmente cuando poseemos como objeto de estudio a sistemas lineales sin conmutación, basta con determinar una función de Lyapunov radialmente desacotada que cumpla con las características ya conocidas; por lo que resultaría natural pensar que, si garantizamos la existencia de una función de Lyapunov para cada  $i \in \Omega$ , el sistema conmutado será asintóticamente estable. No obstante a lo anterior, la estabilidad asintótica de todos y cada uno

de los subsistemas, no garantiza la estabilidad asintótica del sistema conmutado [Liberzon, 2003].

La idea de tener una función artificial que describa la energía en un sistema sin conmutaciones (Función de Lyapunov), puede extenderse a los sistemas conmutados de la forma (2.8). Una buena manera de obtener la estabilidad asintótica para un sistema conmutado, es garantizar que la energía a través de la solución de todos los subsistemas decrecen de la misma forma, y como una función de Lyapunov realiza precisamente esto, entonces es suficiente contar con la misma función de Lyapunov  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para todos los subsistemas de la familia  $\Omega$ ; a la anterior, se le conoce como *función común de Lyapunov*. Dado lo anterior, y considerando al origen de cada subsistema  $i \in \Omega$  como punto de equilibrio asintóticamente estable, se puede formular el siguiente teorema [Narendra and Balakrishnan, 1994, Liberzon, 2003].

**Teorema 1.** *Si todos los subsistemas de la familia (2.8) comparten una función común de Lyapunov radialmente desacotada, entonces el sistema conmutado es globalmente uniformemente asintóticamente estable [Liberzon, 2003].*

En general, el término *uniformemente*, denota uniformidad en relación a las conmutaciones cuando éstas son dependientes del tiempo; sin embargo cuando las conmutaciones dependen de los estados (como en el caso de esta investigación), se pierde la uniformidad. Aún con lo anterior, el teorema (1) tiene validez para cuando las conmutaciones son estado-dependientes. En el caso en el que no sea posible encontrar una función común de Lyapunov, es suficiente con encontrar una función de Lyapunov para cada parte del sistema conmutado [Liberzon, 2003].

Plantear condiciones para la existencia de una función común de Lyapunov, determinar para qué tipo de señales se puede garantizar la estabilidad asintótica, y construir reglas de conmutación que garanticen la estabilidad del sistema, son otros problemas relacionados a los sistemas conmutados, que no serán tratados en esta investigación, pero detalles sobre esto, pueden ser encontrados en [Liberzon and Morse, 1999, Orlov, 2009, Agrachev et al., 2010].

## 2.3. Regulador lineal cuadrático con ganancias estáticas

Aunque existen diversos tipos de LQR, el que implica retroalimentación de estados brinda, en general, más ventajas en cuanto a regulación, sensibilidad, etc, por lo que es el más empleado. El caso general de este tipo de LQR, trae consigo ganancias de Kalman variantes en el tiempo, ya que se basa en un problema de horizonte de tiempo finito. No obstante a lo anterior, emplear este tipo de controladores puede resultar complicado debido al esfuerzo computacional, ya que es necesario calcular las ganancias en tiempo real [Lewis, 1992]. Debido a lo anterior, en esta investigación se ha optado por emplear el LQR derivado del problema de horizonte de tiempo infinito, minimizando el funcional de costo en el intervalo  $[t_0, \infty)$ , lo que conlleva a un problema de control óptimo, que a su vez resulta en un control con ganancias invariantes en el tiempo [Shieh et al., 1991]. No obstante a lo anterior, primero se derivará el LQR donde  $t \in [t_0, t_f]$ , con  $t_0, t_f \in \mathbb{R}$ , y luego se definirá el caso de tiempo

infinito.

Consideremos el sistema en tiempo continuo y en espacio de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.9)$$

donde  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  el vector de entradas con  $m$  el número de entradas.  $A, B$  matrices de los tamaños adecuados, y el par  $(A, B)$  controlable. Definamos el control analógico por retroalimentación de estados:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.10)$$

con  $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , que minimiza el funcional de costo:

$$J' = \Upsilon(x(t_f), t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbb{H}(x, u, t) - \lambda(t)^\top \dot{x}(t)] dt \quad (2.11)$$

donde:

$$\Upsilon(x(t_f), t_f) = \frac{1}{2} x(t_f)^\top S(t_f) x(t_f) \quad (2.12)$$

es el término de costo final, con  $S(t_f) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , luego:

$$\mathbb{H}(x, u, t) = x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top Ru(t) + \lambda(t)^\top (Ax(t) + Bu(t)) \quad (2.13)$$

como el Hamiltoniano para el sistema LTI (2.9) como restricción; con  $Q \geq 0 \in \mathbf{R}^{n \times n}$  y  $R > 0 \in \mathbf{R}^{m \times m}$  como matrices de ponderación;  $\lambda \in \mathbf{R}^n$  es un multiplicador de Lagrange indeterminado, además,  $u(t)$  como en (2.10). Para encontrar solución al problema de minimización del funcional de costo, es necesario definir las ecuaciones de estado y coestado:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.14a)$$

$$-\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = A^\top \lambda(t) + Qx(t) \quad (2.14b)$$

y la condición estacionaria:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = Ru(t) + B^\top \lambda(t) \quad (2.14c)$$

resolviendo (2.14c) para  $u(t)$ :

$$u(t) = -R^{-1} B^\top \lambda(t) \quad (2.15)$$

La ecuación de estados (2.14a) es resuelta hacia adelante en el tiempo, desde un estado en un tiempo inicial  $t_0$ , hasta un tiempo final  $t_f$ . No obstante, la ecuación de coestados (2.14b) es resuelta hacia atrás en el tiempo, desde un valor final de tiempo  $t_f$  hacia un tiempo inicial  $t_0$ , por lo que el sistema en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1} B^\top \lambda(t)$$

no puede resolverse, en otras palabras, el control  $u(t)$  no podría implementarse. Dado lo anterior, se define la relación que se mantiene para para todo  $t \in [t_0, t_f]$ :

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \quad (2.16)$$

con  $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  por determinar. Así, el control que estaba descrito en función de la variable de coestado  $\lambda(t)$ , ahora queda en función del estado  $x(t)$ :

$$u(t) = -R^{-1}B^\top P(t)x(t) = -K(t)x(t) \quad (2.17)$$

con  $K(t) = R^{-1}B^\top P(t)$ ; con el control  $u(t)$ , el sistema (2.9) en lazo cerrado, resulta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^\top P(t)x(t) \quad (2.18)$$

Entonces (2.10) es el control que minimiza el funcional de costo, pero éste depende de  $P(t)$ , el cual se determina como sigue. Derivando (2.16) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) \quad (2.19)$$

reemplazando (2.18), queda:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)(Ax(t) - BR^{-1}B^\top P(t)x(t)) \\ \dot{\lambda}(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)Ax(t) - P(t)BR^{-1}B^\top P(t)x(t) \\ -A^\top \lambda(t) - Qx(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)Ax(t) - P(t)BR^{-1}B^\top P(t)x(t) \\ -A^\top P(t)x(t) - Qx(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)Ax(t) - P(t)BR^{-1}B^\top P(t)x(t) \\ -A^\top P(t)x(t) &= Qx(t) + \dot{P}(t)x(t) + P(t)Ax(t) - P(t)BR^{-1}B^\top P(t)x(t) \\ -\dot{P}(t)x(t) &= A^\top P(t)x(t) + Qx(t) + P(t)Ax(t) - P(t)BR^{-1}B^\top P(t)x(t) \\ -\dot{P}(t)x(t) &= (A^\top P(t) + P(t)A + Q - P(t)BR^{-1}B^\top P(t))x(t) \end{aligned}$$

lo anterior se cumple para todos los estados  $x(t)$  con  $t \in [t_0, t_f)$ , por lo que la expresión resulta:

$$-\dot{P}(t) = A^\top P(t) + P(t)A + Q - P(t)BR^{-1}B^\top P(t) \quad (2.20)$$

El anterior es el caso de horizonte de tiempo finito, la variación de  $P(t)$  en el tiempo, es la responsable de obtener ganancias variantes en el tiempo; no obstante, nuestro interés es obtener ganancias invariantes en el tiempo, por lo que la integración del funcional debe tomarse en el intervalo  $[t_0, \infty)$ . Así, el funcional de costo a minimizar, teniendo en cuenta el intervalo de tiempo infinito, es:

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top Ru(t)] dt \quad (2.21)$$

Dado lo anterior, usaremos el valor de la matriz  $K(t)$  cuando esta alcanza su estado estacionario, es decir  $K_{ss} = K$  [Lewis, 1992, Ebrahimzadeh et al., 2017].

Asumiendo para (2.20) una solución tal que  $\dot{P}(t) = 0$ , queda:

$$0 = A^\top P + PA + Q - PBR^{-1}B^\top P \quad (2.22)$$

La dependencia en el tiempo de  $P$  desaparece, puesto que  $P$  es la solución de la ecuación algebraica matricial de Riccati (2.22) cuando se encuentra en estado estacionario. De esta forma, el control óptimo que minimiza el funcional de costo con el problema de horizonte de tiempo infinito (2.11) es:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.23)$$

donde  $K = R^{-1}B^T P$ . En esta investigación, particularmente se propone realizar regulación del sistema, por lo que resulta conveniente minimizar el error del sistema respecto a uno de sus puntos de equilibrio. En la sección (3.1.1) se desarrolla este caso, donde planteamiento del controlador se dará con la finalidad de reducir un funcional de costo en función de los estados del sistema y de los estados a los que quisiéramos que nuestro sistema se aproximara en el tiempo. Los estados deseados estarán dados por las coordenadas de un punto de equilibrio del mismo sistema, por lo que estaríamos hablando del caso de regulación, o estabilización a un punto de equilibrio.

## 2.4. Seguidor lineal cuadrático con ganancias estáticas

Ya vimos en la sección anterior, cómo se deriva el LQR para horizonte de tiempo infinito. La solución mostrada puede aplicarse a problemas de regulación, particularmente, a estabilización a puntos de equilibrio. Esta vez, sin embargo, el problema a abordar es el de seguimiento de los estados de una referencia  $r(t) \in \mathbb{R}^n$ . A continuación se derivará el LQT para el problema de tracking con referencias variantes en el tiempo, que es una versión extendida del LQR. Como en la sección anterior, consideremos el caso en el que el intervalo de optimización es  $[t_0, t_f]$  es decir, el LQT como un problema de horizonte de tiempo finito.

Considerando el mismo sistema (2.9), definamos el control en tiempo continuo:

$$u(t) = -Kx(t) + Er(t) \quad (2.24)$$

que minimiza al funcional de costo:

$$J' = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x, u, t) dt \quad (2.25)$$

donde:

$$\Psi(x, u, t) = \mathbb{H}(x, u, t) - \lambda(t)^\top \dot{x}(t) \quad (2.26a)$$

y

$$\mathbb{H}(x, u, t) = \frac{1}{2} \left\{ [x(t) - r(t)]^\top Q [x(t) - r(t)] + u(t)^\top R u(t) \right\} + \lambda(t)^\top (Ax(t) + Bu(t)) \quad (2.26b)$$

como el Hamiltoniano del funcional del costo, donde  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$  es el multiplicador de Lagrange a determinar, también denominado vector de coestados. Además:

$$\phi(x(t_f), t_f) = \frac{1}{2} [x(t_f) - r(t_f)]^\top S [x(t_f) - r(t_f)] \quad (2.27)$$

como el costo terminal, donde  $x(t_f)$  y  $r(t_f)$  son los valores de los estados del sistema y los estados de la referencia en el tiempo final  $t_f$ . Consideremos en (2.24),  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$  como las matrices de realimentación de estados, y prealimentación de la referencia, respectivamente; ambas con los tamaños adecuados. Definamos:

$$\lambda(t) = P(t)x(t) - \sigma(t) \quad (2.28)$$

donde  $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n$  es una función auxiliar a determinar [Barbieri and Alba-Flores, 1998, Ebrahimzadeh et al., 2017]. Definimos las ecuaciones de estados, coestados y de condición estacionaria respectivamente:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \lambda(t)} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.29a)$$

$$-\dot{\lambda}(t) = A^\top \lambda(t) + Qx(t) \quad (2.29b)$$

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial u(t)} = Ru(t) + B^\top \lambda(t) \quad (2.29c)$$

Resolviendo (2.29c) para  $u(t)$ , obtenemos:

$$u(t) = -R^{-1}B^\top \lambda(t)$$

pero reemplazando (2.28), resulta:

$$u(t) = -R^{-1}B^\top P(t)x(t) + R^{-1}B^\top \sigma(t) \quad (2.30)$$

por lo que el sistema en tiempo continuo (2.9) en lazo cerrado con (2.30) resulta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^\top P(t)x(t) + BR^{-1}B^\top \sigma(t) \quad (2.31)$$

Ahora, derivando (2.28), obtenemos:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) - \dot{\sigma}(t)$$

Reemplazando (2.31):

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)(Ax(t) - BR^{-1}B^\top P(t)x(t) + BR^{-1}B^\top \sigma(t)) - \dot{\sigma}(t) \quad (2.32)$$

Igualando (2.29b) y (2.32), resulta:

$$A^\top \lambda(t) + Q(x(t) - r(t)) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)(Ax(t) - BR^{-1}B^\top P(t)x(t) + BR^{-1}B^\top \sigma(t)) - \dot{\sigma}(t)$$

para finalmente llegar a:

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t)x(t) &= (A^\top P(t) + P(t)A + Q - P(t)BR^{-1}B^\top P(t))x(t) \\ &\quad + (P(t)BR^{-1} - A^\top)\sigma(t) - Qr(t) - \dot{\sigma}(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Lo anterior se mantiene para todo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , lo que implica:

$$-\dot{P}(t) = A^\top P(t) + P(t)A + Q - P(t)BR^{-1}B^\top P(t) \quad (2.34)$$

la anterior se conoce como la *ecuación diferencial matricial de Riccati*. Por otro lado queda:

$$-\dot{\sigma}(t) = (A^\top - P(t)BR^{-1}B^\top)\sigma(t) - Qr(t) \quad (2.35)$$

Desde aquí, es posible derivar el LQT para el horizonte de tiempo finito, donde el término de costo terminal cobra relevancia, sin embargo, nuestro interés se encuentra en el problema de horizonte de tiempo infinito. En el caso en el que  $t \in [t_0, \infty)$ , se define el nuevo funcional de costo a minimizar por (2.24):

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \{ [x(t) - r(t)]^\top Q [x(t) - r(t)] + u(t)^\top Ru(t) \} dt \quad (2.36)$$

En este caso, observamos que la matriz de costo terminal desaparece. Además de esto, consideramos el uso de la matriz en estado estacionario de  $P(t)$  denominada como  $P_{ss} = P$ , por lo que la ganancia de realimentación de estados también será la obtenida en su estado estacionario  $K_{ss} = K$ . Lo anterior se puede afirmar puesto que consideramos existe una  $P_{ss}$  que ocasione que  $\dot{P}(t)$  se desvanezca en el tiempo. Por lo que (2.34) resulta la *ecuación algebraica matricial de Riccati*:

$$0 = A^\top P + PA + Q - PBR^{-1}B^\top P \quad (2.37)$$

con  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como su solución. Por otro lado, otro término que se desvanece en el tiempo es  $\dot{\sigma}(t)$ , por lo que, sin necesidad de integrar, obtenemos a la función auxiliar  $\sigma(t)$  de (2.35) como:

$$\sigma(t) = -[(A^\top - PBR^{-1}B^\top)]^{-1}Qr(t)$$

pero con  $R$  una matriz simétrica, y  $P$  simétrica por ser solución de la ecuación algebraica matricial de Riccati, es fácil verificar que  $(A^\top - PBR^{-1}B^\top) = (A - BK)^\top$ , por lo que finalmente obtenemos:

$$\sigma(t) = [(A - BK)^\top]^{-1}Qr(t) \quad (2.38)$$

Con la función auxiliar definida, y con  $P$  en lugar de  $P(t)$ , definimos el control óptimo para seguimiento de los estados de la referencia  $r(t)$ , como:

$$u(t) = -Kx(t) + Er(t) \quad (2.39)$$

donde:

$$K = R^{-1}B^\top P \quad (2.40a)$$

$$E = -R^{-1}B^\top [(A - BK)^\top]^{-1}Q \quad (2.40b)$$

son las matrices de realimentación y prealimentación definidas anteriormente.

## 2.5. Sistema caótico de Chua

Consideremos el sistema caótico de Chua, que es el circuito más simple, que produce dinámicas caóticas [Chua, 1992]; contiene el número mínimo de elementos almacenadores de energía para producir este tipo de dinámicas, además de contar con el elemento no lineal conocido como *diodo de chua*, por lo que en general, es de naturaleza no lineal [Wu,

1987, Chen and Dong, 1993c, Chen and Dong, 1993a]. El circuito de Chua presenta diversas características particulares, como por ejemplo dinámica de las bifurcaciones, y sensibilidad a las condiciones iniciales (lo que se traduce en caos, debido a la naturaleza no lineal), lo que implica la existencia de órbitas periódicas [Matsumoto, 1986].

La dinámica del circuito de Chua puede describirse por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{c1}(t) &= \frac{1}{C_1} [S(v_{c2} - v_{c1}) - f(v_{c1})] \\ \dot{v}_{c2}(t) &= \frac{1}{C_2} [S(v_{c1} - v_{c2}) - i_L] \\ i_L(t) &= -\frac{1}{L} v_{c2} \end{aligned} \quad (2.41)$$

con la función que describe a la corriente  $i_d$  del diodo de Chua como:

$$f(v_{c1}) = \delta_2 v_{c1} + \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_2) (|v_{c1} + \xi| - |v_{c1} - \xi|)$$

donde  $v_{c1}$  y  $v_{c2}$  son los voltajes en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente, e  $i_L$  es la corriente en el inductor  $L$ ; además  $S = 1/R$  con  $R$  como el resistor;  $\delta_{1,2} > 0$  son pendientes, mientras que  $\xi$  es el voltaje de ruptura del diodo.

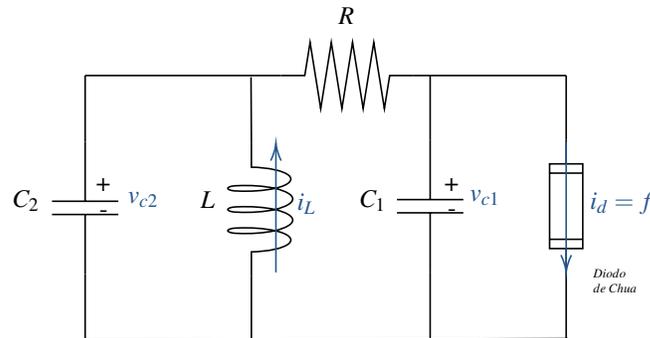


Figura 2.4: Circuito de Chua.

El sistema (2.41), puede ser llevado a una expresión sin dimensiones en términos de variables de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha (-x_1 + x_2 - f(x_1)) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde  $x_1 = v_{c1}/\xi$ ,  $x_2 = v_{c2}/\xi$ ,  $x_3 = i_R/(\xi S)$ ,  $\alpha = C_2/C_1$  y  $\beta = 1/(LS) = C_2 R^2/L$ ; con  $i_R$  como la corriente del resistor. La función  $f(x_1)$ , que describe el comportamiento de la corriente en el diodo de chua, puede ahora definirse como la función por partes:

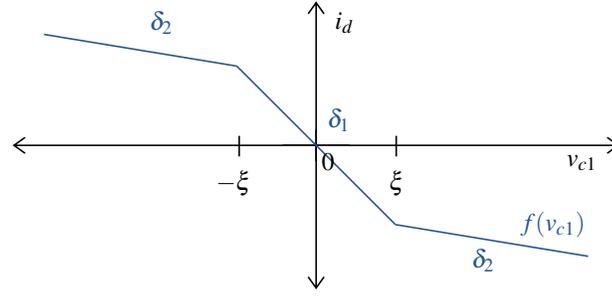


Figura 2.5: Corriente en el diodo de Chua.

$$f(x_1) = \begin{cases} m_0 x_1(t) + m_1 - m_0 & x_1(t) \geq 1 \\ m_1 x_1(t) & |x_1(t)| \leq 1 \\ m_0 x_1(t) - m_1 + m_0 & x_1(t) \leq -1 \end{cases} \quad (2.43)$$

con  $m_0 = R\delta_2$  y  $m_1 = R\delta_1$ . Derivado de que la función  $f(x_1)$  se puede escribir como en (2.43) (una función lineal por partes), el sistema (2.42) puede escribirse como una familia de subsistemas lineales que conmutan, es decir, en un sistema conmutado (definido en la sección 2.2.1), cuyas conmutaciones dependen del estado  $x_1$ . Escribiendo en forma de espacio de estados tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i v_i \\ y(t) &= C_i x(t) \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde  $x(t) = [x_1(t); x_2(t); x_3(t)] \in \mathbb{R}^3$ . Con las matrices  $A_i$  y  $B_i$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\alpha(1+m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -\alpha(m_1-m_0) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = [1, 0, 0]^\top \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -\alpha(1+m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = [0, 0, 0]^\top \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -\alpha(1+m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} \alpha(m_1-m_0) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = [1, 0, 0]^\top \end{aligned} \quad (2.45)$$

con  $C_i = I_{3 \times 3}, \forall i$ , donde  $i = 1$  si  $x_{c1}(t) > 1$ ,  $i = 2$  si  $|x_{c1}(t)| \leq 1$ , e  $i = 3$  si  $x_{c1}(t) < -1$  [Guo et al., 2000b]. Para obtener determinados comportamientos del sistema de Chua, es necesario recurrir a los parámetros; en otras palabras, dependiendo de cómo se seleccionen, el sistema presentará comportamiento caótico o no. En el capítulo 5 se proponen valores para estos parámetros, y así obtener el comportamiento caótico, y una solución periódica de periodo 1 (ciclo límite). Se ha mostrado que es posible controlar los estados del sistema de Chua hasta un ciclo límite ubicado fuera de la región de atracción del mismo. Esto mediante el uso de

controladores basados en retroalimentación de estados en tiempo continuo, lo que se traduce a controladores de tipo analógico [[Chen and Dong, 1993b](#), [Chen and Dong, 2002](#)]. Veremos más adelante cómo es posible realizar control analógico para lograr resolver dos problemas puntuales en esta investigación: regulación a un punto de equilibrio, y seguimiento de referencias. Y más aún, cómo se plantea la implementación de controladores de tipo digital para ambos objetivos de control.

Toda la información contenida en la presente sección, servirá de soporte para el planteamiento de la solución al problema de rediseño digital con y sin intermuestreo. En el siguiente Capítulo se deriva el control óptimo analógico para los casos de regulación y seguimiento de referencias, el que será el punto de partida para el problema del rediseño de las ganancias del controlador.

# Capítulo 3

## Diseño del Control en Tiempo Continuo

Consideremos el sistema lineal conmutado continuamente conectado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_i x_c(t) + B_i v_i \\ y_c(t) &= C_i x_c(t), \quad i = 1, 2, \dots, q\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x_c(t) = [x_{c1}(t), \dots, x_{cn}(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados;  $v_i \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas propio del sistema;  $y_c(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas;  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , no singular, es la matriz del sistema de la  $i$ -ésima parte  $\Delta_i$  del sistema conmutado;  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , no singular (solo para seguimiento con intermuestreo), es la  $i$ -ésima matriz de entrada;  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  es la  $i$ -ésima matriz de salida, la cual será tomada como  $C_i = I_{p \times n}, \forall i$  en esta investigación. Como  $i \in \Omega = \{1, 2, \dots, q\}$ , consideremos el caso de en el que  $q = 1$ , en tal caso, solo habrá un sistema, por lo que no existirán conmutaciones; mientras que si  $1 < q < \infty$ , el sistema (3.1) será un sistema conmutado conformado por  $q$  subsistemas conectados continuamente en el tiempo, cuya conmutación dependerá de los estados de  $x_c(t)$ . Para la controlabilidad del sistema analógico conmutado, es suficiente con que al menos un par  $(A_i, B_i)$  sea controlable [Klamka et al., 2013]. No obstante, asumiremos a todos los pares mencionados como controlables. Para el caso en el que no existan conmutaciones, es decir,  $q = 1$ , el criterio de controlabilidad se reduce al tradicional de Kalman.

### 3.1. Estabilización a un punto de equilibrio

Consideremos el caso en el que se busca estabilizar el sistema (3.1) a uno de sus puntos de equilibrio  $\bar{x}_k = [\bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}, \dots, \bar{x}_{nk}]^\top$ , con  $k \in \{1, 2, \dots, q\}$  como el número de puntos de equilibrio del sistema conmutado. Siendo:

$$\bar{x}_k = -A_k^{-1} B_k v_k\tag{3.2}$$

En este caso, el sistema estará controlado por un controlador analógico de estado completo de la forma:

$$u_{\bar{c}i}(t) = -K_{\bar{c}i} e_{\bar{x}}(t), \quad i = 1, 2, \dots, q\tag{3.3}$$

donde  $e_{\bar{x}}(t) = x_c(t) - \bar{x}_k$  es el error respecto al punto de equilibrio de nuestro interés,  $u_{\bar{c}i}(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de control, y  $K_{\bar{c}i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de realimentación de estados. El sistema

en tiempo continuo, considerando la acción de control (3.3) está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_i x_c(t) + B_i v_i + B_i u_{\bar{c}i}(t) \\ y_c(t) &= C_i x_c(t), \quad i = 1, 2, \dots, q\end{aligned}\quad (3.4)$$

Cerrando el lazo del sistema definido arriba, con el controlador analógico, se obtiene:

$$\dot{x}_c(t) = (A_i - B_i K_{\bar{c}i}) e_{\bar{x}}(t), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.5)$$

Ahora, como  $\bar{x}_k$  es un punto fijo, la derivada del error es:

$$\dot{e}_{\bar{x}}(t) = \dot{x}_c(t) \quad (3.6)$$

reemplazando en (3.5) resulta:

$$\dot{e}_{\bar{x}}(t) = A_{\bar{c}i} e_{\bar{x}}(t), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.7)$$

donde  $A_{\bar{c}i} = A_i - B_i K_{\bar{c}i}$ . El controlador analógico (3.3) puede ser empleado cuando se cumpla  $k = i$ , es decir, cuando el sistema se encuentre en la  $i$ -ésima parte en la que está el punto de equilibrio al que se desea estabilizar el sistema. Cuando el caso es  $k \neq i$ , entonces usamos el siguiente controlador, cuyas ganancias  $K_{\bar{c}i}$  son las mismas que (3.3) para cada  $i$ :

$$u_{\bar{c}i}(t) = -K_{\bar{c}i} e_{\bar{x}}(t) - B_i^{-1} A_i \bar{x}_k - v_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.8)$$

donde las matrices  $A_i$ ,  $B_i$  son no singulares  $\forall i$ . Si cerramos el lazo entre el sistema (3.4) y el controlador analógico (3.8), obtenemos el sistema (3.7).

Existen diversas maneras de diseñar la matriz de realimentación  $K_{\bar{c}i}$  para cada parte del sistema; una buena opción es emplear control tipo LQR. Tengamos en cuenta que, para los objetivos de la tesis, solo debemos diseñar un buen controlador analógico para derivar luego un buen control digital.

### 3.1.1. Aplicación del regulador lineal cuadrático a un sistema PWL

Se empleará un controlador tipo LQR subóptimo en base a los estados del sistema y el punto de equilibrio al que se quiere estabilizar al sistema, es decir, el error. En el caso en el que el sistema no presente conmutaciones, no habrán consideraciones especiales; mientras que para el caso en el que sí existan conmutaciones, consideraremos lo que a continuación.

El funcional de costo que deriva en el LQR óptimo para el sistema conmutado (3.7) es:

$$\bar{J}_{real} = \sum_{i=1}^q \omega_i(t) \bar{J}'_i \quad (3.9)$$

donde  $\omega_i(t) \in \{0, 1\}$  es la condición de conmutación que depende del tiempo;  $\bar{J}'_i$  es el funcional de costo para cada parte del sistema conmutado, con  $i = 1, 2, \dots, q$  [Wu et al., 2019]. Con el funcional de costo, en horizonte de tiempo finito  $\bar{J}'_i$ , para cada  $i$  definido como:

$$\bar{J}'_i = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e_{\bar{x}}(t)^\top \bar{Q} e_{\bar{x}}(t) + 2u_{\bar{c}i}(t)^\top \bar{S} e_{\bar{x}}(t) + u_{\bar{c}i}(t)^\top \bar{R} u_{\bar{c}i}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.10)$$

donde  $[t_0, t_f]$  es el intervalo de integración;  $\bar{Q} \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica,  $\bar{S} \geq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\bar{R} > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  simétrica, son matrices de ponderación. En esta investigación no se consideran las conmutaciones dependientes del tiempo, ya que eso conllevaría al cálculo del tiempo óptimo de conmutación, la condición óptima de conmutación, y la solución del LQR en horizonte de tiempo finito. No obstante, en lugar de minimizar el funcional óptimo (3.9), se plantea minimizar el funcional en horizonte de tiempo infinito para cada  $i$ -ésima parte del sistema conmutado. Para lo anterior, consideremos el funcional de costo para el sistema conmutado (3.7):

$$\bar{J} = \sum_{i=1}^q \bar{J}_i \quad (3.11)$$

donde  $\bar{J}_i$  es el funcional de costo a resolver para cada sección  $\Delta_i$  de  $\mathbb{R}^n$ , el cual está dado por:

$$\bar{J}_i = \int_{t_{0i}}^{\infty} \left( e_{\bar{x}}(t)^\top \bar{Q} e_{\bar{x}}(t) + u_{\bar{c}i}(t)^\top \bar{R} u_{\bar{c}i}(t) \right) dt, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.12)$$

con  $\bar{Q} \geq 0$  y  $\bar{R} > 0$  como arriba, donde  $t_{0i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es el tiempo inicial en cada conmutación. Consideremos el control analógico (3.3) que estabiliza al sistema a un punto de equilibrio:

$$u_{\bar{c}i}(t) = -K_{\bar{c}i} e_{\bar{x}}(t)$$

que minimiza al funcional de costo (3.12) para cada  $i$ .

Resolviendo el LQR, como se muestra en la sección 2.3, se obtiene:

$$K_{\bar{c}i} = \bar{R}^{-1} B_i^\top \bar{P}_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.13)$$

como la ganancia de realimentación de estados del sistema para cada  $i$ , donde  $\bar{P}_i$  es la solución de la ecuación algebraica matricial de Riccati:

$$A_{ci}^\top \bar{P}_i + \bar{P}_i A_{ci} - \bar{P}_i B_i \bar{R}^{-1} B_i^\top \bar{P}_i + C_i^\top \bar{Q} C_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.14)$$

Cada una de estas ganancias de realimentación, harán que  $A_{\bar{c}i}$  sea estable, es decir, que sus valores propios tengan parte real negativa.

Minimizar (3.12) para cada  $i$ , resulta más "costoso" que minimizar (3.9), por lo que en términos de costo:

$$\bar{J}_{real} < \bar{J} \quad (3.15)$$

por lo que el control obtenido de minimizar  $\bar{J}$ , es *subóptimo*. Cuando el sistema no presente conmutaciones, el control obtenido será *óptimo*.

### 3.1.2. Estabilidad del sistema conmutado analógico a un punto de equilibrio

Como se mencionó anteriormente, cuando  $q \in \{1\}$  el sistema no presentará algún tipo de conmutación, por lo que el análisis de estabilidad del sistema de error, el cual no tiene entradas, puede realizarse a través del método directo de Lyapunov. Por el otro lado, si  $1 < q < \infty$ ,

el sistema en tiempo continuo (3.4) se define como un sistema conmutado. La estabilidad para sistemas conmutados sin entrada tiene un requerimiento adicional en relación a los sistemas no conmutados. La estabilidad asintótica puede definirse empleando lo que se conoce como una *función común de Lyapunov*, que es una función de Lyapunov que se comparte para las  $i$  partes del sistema conmutado [Liberzon and Morse, 1999, Liberzon, 2003]. Dado lo anterior, para el caso en el que (3.7) conmute, se debe cumplir que exista una función común de Lyapunov  $V(e_{\bar{x}}(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \forall i$ , radialmente desacotada, tal que:

1.  $V(0) = 0, V(e_{\bar{x}}) > 0, \forall e_{\bar{x}} \neq 0$
2.  $\dot{V}(e_{\bar{x}}) < 0, \forall e_{\bar{x}} \in \mathbb{R}^3$

Consideremos como candidata a función común de Lyapunov a:

$$V(e_{\bar{x}}) = e_{\bar{x}}^\top \tilde{P} e_{\bar{x}} \quad (3.16)$$

con  $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como una matriz simétrica definida positiva. Derivando a lo largo de las trayectorias de (3.7):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_{\bar{x}}) &= \dot{e}_{\bar{x}}^\top \tilde{P} e_{\bar{x}} + e_{\bar{x}}^\top \tilde{P} \dot{e}_{\bar{x}} \\ \dot{V}(e_{\bar{x}}) &= ((A_i - B_i K_{\bar{c}i}) e_{\bar{x}})^\top \tilde{P} e_{\bar{x}} + e_{\bar{x}}^\top \tilde{P} (A_i - B_i K_{\bar{c}i}) e_{\bar{x}} \end{aligned}$$

obteniendo finalmente:

$$\dot{V}(e_{\bar{x}}) = e_{\bar{x}}^\top (A_{\bar{c}i}^\top \tilde{P} + \tilde{P} A_{\bar{c}i}) e_{\bar{x}}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.17)$$

con  $A_{\bar{c}i} = A_i - B_i K_{\bar{c}i}$ . Para garantizar la segunda condición, la matriz  $(A_{\bar{c}i}^\top \tilde{P} + \tilde{P} A_{\bar{c}i})$  debe ser simétrica definida negativa, ya que tanto  $V(e_{\bar{x}}(t))$  como  $\dot{V}(e_{\bar{x}}(t))$  son formas cuadráticas. Para lo anterior definimos la ecuación de Lyapunov:

$$A_{\bar{c}i}^\top \tilde{P} + \tilde{P} A_{\bar{c}i} < -\varepsilon I_{3 \times 3}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.18)$$

con  $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ , e  $I_{n \times n}$  la matriz identidad en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Seleccionando  $\varepsilon$  y resolviendo la ecuación, se obtiene  $\tilde{P}$ . Bajo estas condiciones, se cumplen los requerimientos para que el origen de (3.7) sea un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo que se garantiza la estabilización del sistema controlado analógicamente.

## 3.2. Seguimiento de referencias variantes en el tiempo

En esta sección se considera resolver el problema de seguimiento para un sistema lineal por partes controlado analógicamente. El seguimiento se propone para referencias variantes en el tiempo, para lo cual se agregará una etapa de prealimentación de la misma al controlador. El diagrama del sistema de control se observa en la Figura 3.1. Para esta investigación, en particular, consideraremos que tenemos acceso a la dinámica explícita de la referencia, lo cual será útil para el análisis de estabilidad del sistema controlado analógicamente.

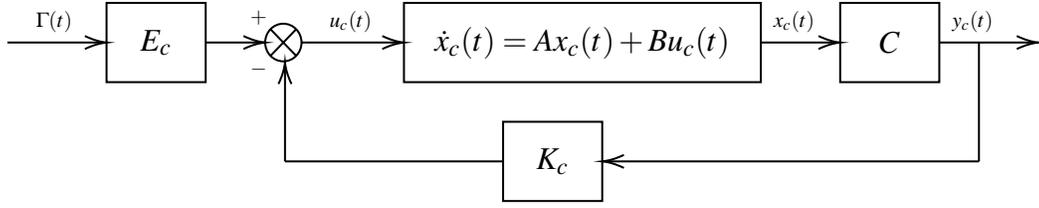


Figura 3.1: Sistema analógico de control para seguimiento de referencia.

Definamos el control analógico para seguimiento de referencias:

$$u_{ci}(t) = -K_{ci}x_c(t) + E_{ci}\Gamma(t) - v_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.19)$$

El sistema analógico conmutado (3.1), considerando el controlador (3.19), queda:

$$\dot{x}_c(t) = A_i x_c(t) + B_i v_i + B_i u_{ci}(t), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.20)$$

con  $\Gamma(t) \in \mathbb{R}^n$  como el vector de estados de la referencia a seguir. Cerrando el lazo entre el sistema (3.20) y el control analógico (3.19), se obtiene:

$$\dot{x}_c(t) = A_{ci} x_c(t) + B_i E_{ci} \Gamma(t), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.21)$$

donde  $A_{ci} = A_i - B_i K_{ci}$ .

Definamos la referencia variante en el tiempo, cuya dinámica es explícita y está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(t) &= A_{\Gamma_j} \Gamma(t) + B_{\Gamma_j} \bar{v}_j \\ r(t) &= \bar{C}_j \Gamma(t), \quad j = 1, 2, \dots, q' \end{aligned} \quad (3.22)$$

con  $\Gamma(t) = [\Gamma_1(t), \dots, \Gamma_n(t)]^\top$  es el vector de estados de la referencia;  $\bar{v}_j \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas;  $r(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas;  $A_{\Gamma_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{\Gamma_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_{\Gamma_j} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , con las matrices del sistema, de entrada y salida, respectivamente. En este caso, como buscamos seguimiento en los estados de la referencia, definimos  $C_{\Gamma_j} = I_{p \times n}$ ,  $\forall j$ . En (3.22),  $j \in \{1, 2, \dots, q'\}$ , con  $q' \in \mathbb{N}$ ,  $q' < \infty$  como el número de sistemas conectados continuamente en el tiempo que componen al sistema de referencia. Igual que en el caso del sistema de control (3.1), si  $j \in \{1\}$  el sistema de la referencia será un sistema sin conmutaciones; mientras que, si  $1 < j \leq q'$ , la referencia estará representada por un sistema conmutado de  $q'$  partes.

### 3.2.1. Aplicación del seguidor lineal cuadrático a un sistema PWL

Para el diseño de las ganancias de realimentación  $K_{ci}$  y  $E_{ci}$  se emplea un control tipo LQT subóptimo. Considerando el caso en el que  $q > 1$ , es decir, en el que el sistema conmuta entre partes y que las conmutaciones dependan de los estados, haremos una consideración adicional para el LQT. En este caso, se resolverá el LQT como un problema de horizonte de tiempo infinito, con lo que las ganancias obtenidas  $K_{ci}$  y  $E_{ci}$  para el control analógico (3.19) serán estáticas, es decir, invariantes en el tiempo.

Comenzamos considerando el funcional de costo para el LQT óptimo del sistema conmutado:

$$J_{real} = \sum_{i=1}^q \omega_i(t) J'_i \quad (3.23)$$

donde, igual que en el LQR,  $\omega_i(t) \in \{0, 1\}$  es el vector de conmutación, con  $i = 1, 2, \dots, q$ . El funcional de costo en horizonte de tiempo finito para cada  $i$  de (3.21) es:

$$J'_i = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e_c(t)^\top Q e_c(t) + 2u_{ci}(t)^\top S_i e_c(t) + u_{ci}(t)^\top R u_{ci}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.24)$$

donde  $e_c(t) = x_c(t) - \Gamma(t)$ ;  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \geq 0$  y  $R \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$ , son matrices simétricas de ponderación,  $S \geq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Como mencionamos en el caso del LQR conmutado, minimizar (3.23) resulta particularmente complejo; en su lugar, proponemos minimizar el funcional de costo para el sistema conmutado (3.21):

$$J = \sum_{i=1}^q J_i \quad (3.25)$$

donde  $J_i$  es el funcional de costo para cada parte del sistema conmutado (3.21) como:

$$J_i = \int_{t_{0i}}^{\infty} (e_c(t)^\top Q e_c(t) + u_{ci}(t)^\top R u_{ci}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.26)$$

que es minimizado por el control analógico (3.19). En (3.26) se debe considerar  $p = m$ . Además, las matrices  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \geq 0$  y  $R \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$ , como arriba. De resolver el LQR, como se muestra en la sección 2.4, se obtienen las ganancias para cada parte del sistema conmutado:

$$\begin{aligned} K_{ci} &= R^{-1} B_i^\top P_i \\ E_{ci} &= -R^{-1} B_i^\top (A_{ci}^{-1})^\top Q, \quad i = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde  $P_i$  es la solución a la ecuación algebraica matricial de Riccati para cada parte del sistema conmutado:

$$A_i^\top P_i + P_i A_i - P_i B_i R^{-1} B_i^\top P_i + Q = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.28)$$

En función del costo, es cierto que:

$$J_{real} < J \quad (3.29)$$

por lo que el controlador obtenido en el caso conmutado es *subóptimo*, y en el caso sin conmutaciones, será *óptimo*.

### 3.2.2. Estabilidad del sistema conmutado con dinámica explícita de la referencia

Es de particular interés corroborar la estabilidad del sistema de error respecto a la referencia, es decir, si el error se mantiene acotado a lo largo del tiempo. Este análisis se puede realizar cuando se conoce la dinámica del sistema de referencia, de lo contrario, la idea de analizar el error pierde sentido.

Asumiendo que tenemos acceso a los estados del sistema, definamos  $e_c(t) = x_c(t) - \Gamma(t)$  como el error respecto de la referencia. La dinámica del error es:

$$\dot{e}_c(t) = \dot{x}_c(t) - \dot{\Gamma}(t) \quad (3.30)$$

reemplazando (3.21) y (3.22) en (3.30), obtenemos

$$\dot{e}_c(t) = (A_i x_c(t) - B_i K_{ci} x_c(t) + B_i E_{ci} \Gamma(t)) - (A_{\Gamma j} \Gamma(t) + B_{\Gamma j} v_j)$$

pero  $x_c(t) = e_c(t) + \Gamma(t)$ , entonces:

$$\dot{e}_c(t) = [A_i(e_c(t) + \Gamma(t)) - B_i K_{ci}(e_c(t) + \Gamma(t)) + B_i E_{ci} \Gamma(t)] - [A_{\Gamma j} \Gamma(t) + B_{\Gamma j} v_j]$$

$$\dot{e}_c(t) = A_{ci} e_c(t) + (A_i - B_i K_{ci} + B_i E_{ci} - A_{\Gamma j}) \Gamma(t) - B_{\Gamma j} v_j$$

finalmente se obtiene:

$$\dot{e}_c(t) = A_{ci} e_c(t) + \rho(t), \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad j = 1, 2, \dots, q' \quad (3.31)$$

con  $\rho(t) = (\Delta A_{i,j} - B_i \Delta T_i) \Gamma(t) - B_{\Gamma j} v_j$ , como la entrada del sistema de error respecto de la referencia, donde  $\Delta A_{i,j} = A_i - A_{\Gamma j}$  y  $\Delta T_i = K_{ci} - E_{ci}$ . Notemos para el sistema conmutado de error (3.31), las conmutaciones se darán entre  $q * q'$  partes.

El caso general del sistema de seguimiento, es un sistema conmutado, que tiene una entrada en cada parte, por lo que un análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov no es definitivo. Dado lo anterior, la estabilidad del sistema (3.31) se analizará en el sentido BIBO. Para esto, primero se debe garantizar la estabilidad del sistema conmutado de error cuando no hay entrada, es decir  $\rho(t) = 0 \forall t$ , para lo cual, como se mostró en la sección 3.1.2, es necesario mostrar la existencia de una función común de Lyapunov  $\hat{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para todas las partes. Una vez mostrada la estabilidad del sistema conmutado sin entrada, se procede a mostrar la BIBO estabilidad [Chen, 1999].

Para el caso de seguimiento, consideraremos que la referencia  $\Gamma(t)$  está acotada para todo tiempo; en consecuencia, obtendremos que la entrada  $\rho(t)$  del sistema de error (3.31) es también acotada para todo  $t$ , esto es:

$$\rho(t) \leq \mathcal{N} < \infty, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.32)$$

con  $\mathcal{N} = \max\{\mathcal{N}_{i,j}\}$ , esto debido a que  $A_{ci}, B_i, E_{ci}, A_{\Gamma j}, B_{\Gamma j}, v_j$  son constantes y están acotadas  $\forall t$ . Para la estabilidad BIBO es necesario mostrar que para una entrada  $\rho(t)$  acotada  $\forall t$ , obtendremos:

$$\|e_c(t)\| \leq \mathcal{M} < \infty \quad (3.33)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana del vector; además,  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^+$  es una cota  $\forall t$ . La solución del sistema conmutado de error (3.31) es [Liberzon, 2003, Orlov, 2009]:

$$e_c(t) = e_c(t_0) \mathbf{e}^{A_{ci}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)} \rho(\tau) d\tau \quad (3.34)$$

la cual, por linealidad, se puede escribir como:

$$e_c(t) = e_{cnat}(t) + e_{cfor}(t) \quad (3.35)$$

donde:

$$\begin{aligned} e_{cnat}(t) &= e_c(t_0) \mathbf{e}^{A_{ci}(t-t_0)} \\ e_{cfor}(t) &= \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)} \rho(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.36)$$

son la respuesta natural y forzada del sistema, respectivamente.

Para la respuesta natural:

$$e_{cnat}(t) = e_c(t_0) \mathbf{e}^{A_{ci}(t-t_0)} \quad (3.37)$$

se garantiza estabilidad asintótica cuando  $t - t_0 \rightarrow \infty$ , tal como se muestra en la sección 3.1.2. No obstante, y debido a las conmutaciones,  $t - t_0 \rightarrow \infty$  puede no cumplirse en general. Aún con lo anterior, y teniendo en cuenta que  $A_{ci}$  estable  $\forall i, t$ , tenemos que para cada conmutación, la condición inicial  $e_c(t_0)$  se mantiene acotada, por lo que:

$$\|e_{cnat}(t)\| \leq \mathcal{Y} < \infty \quad (3.38)$$

Por otro lado, para el término de la respuesta forzada del sistema, se procede a mostrar BIBO estabilidad:

$$e_{cfor}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)} \rho(\tau) d\tau \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \|e_{cfor}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)} \rho(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)} \rho(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)}\| \|\rho(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)}\|_{\mathcal{N}} d\tau \end{aligned}$$

obteniendo finalmente:

$$\|e_{cfor}(t)\| \leq \mathcal{N} \int_{t_0}^t \|\mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)}\| d\tau \quad (3.40)$$

Hemos mostrado que  $A_{ci}$  es estable para todo  $i$ , así,  $\mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)}$  es convergente a cero si  $t - \tau$  es positivo, por lo que el término integral es acotado  $\forall t$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \|e_{cfor}(t)\| &\leq \mathcal{N} \int_{t_0}^t \|\mathbf{e}^{A_{ci}(t-\tau)}\| d\tau \\ &\leq \mathcal{N} \mathcal{W} \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{W} = \max\{\mathcal{W}_i\}, \mathcal{W}_i \in \mathbb{R}^+$ . Por lo que, en general:

$$\|e_c(t)\| \leq \mathcal{Y} + \mathcal{N} \mathcal{W} \quad (3.41)$$

definiendo  $\mathcal{M} = \mathcal{Y} + \mathcal{N}\mathcal{W}$ , queda:

$$\|e_c(t)\| \leq \mathcal{M}$$

Por lo que el sistema conmutado de error (3.31) es BIBO estable si se cumple con el criterio de la sección 3.1.2 y la referencia  $\Gamma(t)$  es acotada  $\forall t \geq 0$ . Un enfoque diferente para el análisis de la BIBO estabilidad del sistema conmutado, puede encontrarse en [Chen and Sun, 2017].

# Capítulo 4

## Control Digital

En el capítulo anterior se derivó un control analógico para los casos de estabilización a un punto de equilibrio y seguimiento de referencias. Ahora planteamos la necesidad de construir un controlador digital. Consideraremos al control digital como un controlador que ha sido muestreado cada  $T$  tiempo, y luego, retenido por un *ZOH*, el cual será tomado como ideal. Una manera de diseñar controladores digitales es emplear el modelo de un controlador analógico ya existente, de forma que se obtengan ganancias adecuadas, ya que las ganancias del control analógico no garantizan, en general, que el sistema cumpla con el objetivo de control, incluso, llegando a provocar inestabilidad. Dado esto, se busca aproximar la dinámica del sistema controlado digitalmente a la dinámica del sistema controlado analógicamente por un controlador que proporcione buen desempeño en el sistema de interés. Para lo anterior, se empleará rediseño digital. El proceso de obtener un control digital a partir de un controlador analógico, de modo que los estados del sistema controlado digitalmente coincidan en cada instante de muestreo con los estados del sistema controlado de manera analógica, se conoce como *rediseño digital*. Aplicar un controlador digital a un sistema analógico deriva en lo que conocemos como sistema híbrido, tal como se explicó en la sección (2.2), por lo que en adelante nos referiremos a este sistema de esta forma.

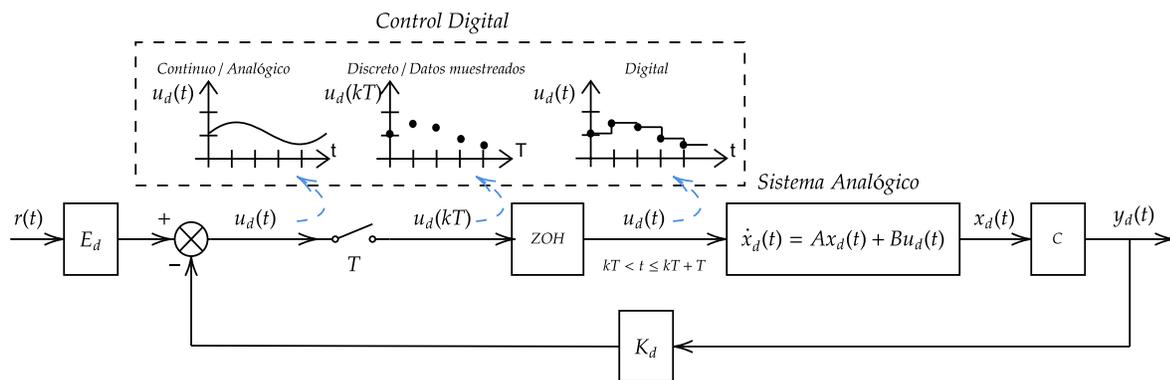


Figura 4.1: Sistema híbrido de control para el caso de seguimiento de referencia.

Para realizar el rediseño, emplearemos la discretización directa mostrada en [Lewis, 1992], la cual emplea la solución a cada parte del sistema controlado en tiempo continuo, en caso de ser un sistema conmutado; y la solución del sistema, en caso de no tener con-

mutaciones. Con el fin de que se cumpla el objetivo de la coincidencia de los estados en cada instante de muestreo  $kT$ , es necesario encontrar un modelo discreto para los sistemas híbrido y analógico, esto debido a que el modelo discreto de ambos es una aproximación al comportamiento en cada instante de tiempo. El rediseño digital emplea estas aproximaciones como estrategia para obtener las nuevas ganancias. A continuación, plantearemos el sistema híbrido para los casos de estabilización a un punto de equilibrio  $\bar{x}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$  del sistema analógico (3.1), y de seguimiento de referencias variantes en el tiempo.

## 4.1. Modelos de los sistemas híbridos de control

Consideremos el sistema analógico en tiempo continuo, invariante en el tiempo, y en general, lineal por partes:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d(t) &= A_i x_d(t) + B_i v_i(t) \\ y_d(t) &= C_i x_d(t), \quad i = 1, 2, \dots, q\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $x_d(t)$  es el vector de estados del sistema,  $v_i(t)$  es el vector de entradas propio del sistema, e  $y_d(t)$  es el vector de salida, todos con los tamaños adecuados. Además, las matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , y los vectores  $v_i$  son exactamente los mismos que los dados en (3.1) para cada  $i$ . A continuación derivaremos los modelos híbridos de los casos en los que se aplica control digital para regulación a punto de equilibrio y seguimiento de referencias.

### 4.1.1. Sistema híbrido para estabilización a punto de equilibrio

El sistema analógico (4.1) considerando la acción del control digital, queda:

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) + B_i v_i + B_i u_{\bar{d}_i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, q\tag{4.2}$$

donde el control digital con ganancias adecuadas, está dado por:

$$u_{\bar{d}_i}(t) = -K_{d_i} e_x(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q\tag{4.3}$$

con  $kT < t \leq kT + T$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$  como periodo de muestreo, donde  $e_x(t) = x_d(t) - \bar{x}_k$  es el error en tiempo continuo del sistema respecto del punto de equilibrio  $\bar{x}_k = -A_k^{-1} B_k v_k$ , y  $e_x(kT) = x_d(kT) - \bar{x}_k$  es el error muestreado. Considerando a  $\bar{x}_k$ , el lazo cerrado de (4.2) con (4.3) resulta en el sistema híbrido:

$$\dot{x}_d(t) = A_i e_x(t) - B_i K_{d_i} e_x(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q\tag{4.4}$$

Como  $\bar{x}_k$  es un punto de equilibrio para todo  $k$ , la dinámica del error queda:

$$\dot{e}_x(t) = A_i e_x(t) - B_i K_{d_i} e_x(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q\tag{4.5}$$

Los sistemas (4.4) y (4.5) son equivalentes, y contienen la dinámica del sistema analógico cuando es controlado digitalmente para ser estabilizado a uno de los puntos de equilibrio de (3.1). El control (4.3) es empleado cuando  $k = i$ , es decir, cuando es aplicado en la  $i$ -ésima parte del sistema en la que se encuentra el punto de equilibrio al que se busca estabilizar al sistema. Cuando esto no ocurre así, es decir  $k \neq i$ , consideremos emplear el controlador:

$$u_{\bar{d}_i}(t) = -K_{d_i} e_x(kT) - B_i^{-1} A_i \bar{x}_k - v_i, \quad i = 1, 2, \dots, q\tag{4.6}$$

Emplear el controlador (4.6) en el sistema (4.2), resulta en el sistema híbrido (4.5).

### 4.1.2. Sistema híbrido para seguimiento de referencia

Tomando el sistema analógico (4.1) y considerando la acción de control para seguimiento de referencias variantes en el tiempo, obtenemos:

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) + B_i v_i + B_i u_{di}(t), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.7)$$

donde el control digital con ganancias adecuadas para seguimiento es:

$$u_{di}(t) = -K_{di} x_d(kT) + E_{di} \Gamma(kT) - v_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.8)$$

donde  $kT < t \leq kT + T$ . Cerrando el lazo entre el sistema analógico (4.7) y el controlador digital (4.8), obtenemos el sistema híbrido:

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) - B_i K_{di} x_d(kT) + B_i E_{di} \Gamma(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.9)$$

## 4.2. Rediseño Digital

Los modelos (4.5) y (4.9) son los modelos de los sistemas analógicos controlados digitalmente, la obtención de estos modelos no es el problema a resolver en el rediseño. El problema a resolver es el de la derivación de las ganancias  $K_{\bar{d}i}$ , para el problema de regulación a un punto de equilibrio,  $K_{di}$  y  $E_{di}$  para el problema de seguimiento de referencias, a partir de las ganancias del controlador analógico. Para lograr el rediseño digital que garantiza coincidencia de estados en cada instante de muestreo  $T$ , es necesario recurrir al método de discretización directa mostrado en la sección (2.1), con el cual se derivarán los modelos discretos de los sistemas controlados analógicamente y digitalmente, para cada caso. A continuación la discretización para los modelos mencionados y la aplicación del rediseño digital.

### 4.2.1. Rediseño para estabilización a punto de equilibrio

Para el rediseño del controlador analógico, que busca estabilizar al sistema (3.7) a un punto de equilibrio de (3.1), es preciso discretizar los modelos (3.7) y (4.5).

Para la discretización directa del modelo analógico (3.7), multiplicamos a ambos lados del mismo por  $e^{-A_{\bar{c}i}t}$ :

$$\begin{aligned} e^{-A_{\bar{c}i}t} \frac{d(e_{\bar{x}}(t))}{dt} &= e^{-A_{\bar{c}i}t} A_{\bar{c}i} e_{\bar{x}}(t) \\ e^{-A_{\bar{c}i}t} \frac{d(e_{\bar{x}}(t))}{dt} - e^{-A_{\bar{c}i}t} A_{\bar{c}i} e_{\bar{x}}(t) &= 0 \\ \frac{d(e^{-A_{\bar{c}i}t} e_{\bar{x}}(t))}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Integrando de ambos lados desde  $t_0$  a  $t$ , obtenemos:

$$\int_{t_0}^t \frac{d(e^{-A_{\bar{c}i}\lambda} e_{\bar{x}}(\lambda))}{d\lambda} d\lambda = \int_{t_0}^{t_f} 0 d\lambda$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{-A_{\bar{c}i}\lambda} e_{\bar{x}}(\lambda) \Big|_{t_0}^t &= 0 \\
\mathbf{e}^{-A_{\bar{c}i}t} e_{\bar{x}}(t) - \mathbf{e}^{-A_{\bar{c}i}t_0} e_{\bar{x}}(t_0) &= 0 \\
\mathbf{e}^{-A_{\bar{c}i}t} e_{\bar{x}}(t) &= \mathbf{e}^{-A_{\bar{c}i}t_0} e_{\bar{x}}(t_0) \\
e_{\bar{x}}(t) &= \mathbf{e}^{A_{\bar{c}i}(t-t_0)} e_{\bar{x}}(t_0)
\end{aligned}$$

Tomando  $t_0 = kT$  y  $t = kT + T$ :

$$e_{\bar{x}}(kT + T) = \mathbf{e}^{A_{\bar{c}i}T} e_{\bar{x}}(kT)$$

Lo que finalmente se escribe como:

$$e_{\bar{x}}(kT + T) = \bar{G}_{ci} e_{\bar{x}}(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.10)$$

con  $\bar{G}_{ci} = \mathbf{e}^{A_{\bar{c}i}T}$ . El anterior, es el modelo discreto del sistema controlado analógicamente respecto al punto de equilibrio  $\bar{x}_k$ .

Ahora aplicamos el mismo método de discretización para el sistema híbrido (4.5). Multiplicamos en ambos lados por  $\mathbf{e}^{-A_i t}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{-A_i t} \frac{d(e_x(t))}{dt} &= \mathbf{e}^{-A_i t} A_i e_x(t) - \mathbf{e}^{-A_i t} B_i K_{\bar{d}i} e_x(kT) \\
\mathbf{e}^{-A_i t} \frac{d(e_x(t))}{dt} - \mathbf{e}^{-A_i t} A_i e_x(t) &= -\mathbf{e}^{-A_i t} B_i K_{\bar{d}i} e_x(kT) \\
\frac{d(\mathbf{e}^{-A_i t} e_x(t))}{dt} &= -\mathbf{e}^{-A_i t} B_i K_{\bar{d}i} e_x(kT)
\end{aligned}$$

integrando por ambos lados de  $t_0$  a  $t$ :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \frac{d(\mathbf{e}^{-A_i \lambda} e_x(\lambda))}{d\lambda} d\lambda &= - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i \lambda} B_i K_{\bar{d}i} e_x(kT) d\lambda \\
\mathbf{e}^{-A_i \lambda} e_x(\lambda) \Big|_{t_0}^t &= - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i \lambda} B_i K_{\bar{d}i} e_x(kT) d\lambda \\
\mathbf{e}^{-A_i t} e_x(t) - \mathbf{e}^{-A_i t_0} e_x(t_0) &= - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i \lambda} B_i K_{\bar{d}i} e_x(kT) d\lambda \\
\mathbf{e}^{-A_i t} e_x(t) &= \mathbf{e}^{-A_i t_0} e_x(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i \lambda} B_i K_{\bar{d}i} e_x(kT) d\lambda \\
e_x(t) &= \mathbf{e}^{A_i(t-t_0)} e_x(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_i(t-\lambda)} B_i K_{\bar{d}i} e_x(kT) d\lambda
\end{aligned}$$

pero recordemos que  $e_x(kT) = cte$  para todo  $\lambda \in [t_0, t_f]$  debido al retenedor de orden cero (ZOH), por lo que:

$$e_x(t) = \mathbf{e}^{A_i(t-t_0)} e_x(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_i(t-\lambda)} B_i d\lambda K_{\bar{d}i} e_x(kT)$$

considerando  $t_0 = kT$  y  $t = kT + T$ , queda:

$$e_x(kT + T) = \mathbf{e}^{A_i T} e_x(kT) - \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{e}^{A_i(kT+T-\lambda)} B_i d\lambda K_{\bar{d}i} e_x(kT)$$

reescribiendo

$$e_x(kT + T) = \bar{G}_i e_x(kT) - \bar{H}_i K_{\bar{d}i} e_x(kT)$$

finalmente:

$$e_x(kT + T) = (\bar{G}_i - \bar{H}_i K_{\bar{d}i}) e_x(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{G}_i &= \mathbf{e}^{A_i T} \\ \bar{H}_i &= (\bar{G}_i - I_{n \times n}) A_i^{-1} B_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (4.12)$$

Una vez obtenidos los modelos discretos del sistema controlado analógicamente y el controlado digitalmente se procede a aplicar el rediseño digital. Nuestro objetivo de control para este caso es lograr que los estados del sistema (4.5) coincidan con los estados de (3.7) en cada instante de muestreo, es decir  $x_d(t)|_{t=kT} = x_c(t)|_{t=kT}$  lo que, como vimos, es equivalente a  $e_x(t)|_{t=kT} = e_{\bar{x}}(t)|_{t=kT}$ . Para lo anterior, permitiendo  $e_x(kT + T) = e_{\bar{x}}(kT + T)$ , se obtiene:

$$(\bar{G}_i - \bar{H}_i K_{\bar{d}i}) e_x(kT) = \bar{G}_{ci} e_{\bar{x}}(kT)$$

donde para que lograr  $e_x(kT) = e_{\bar{x}}(kT)$ , se debe cumplir:

$$(\bar{G}_i - \bar{H}_i K_{\bar{d}i}) = \bar{G}_{ci}$$

de donde se obtiene el rediseño de las ganancias para el controlador digital. Resolviendo para  $K_{\bar{d}i}$ :

$$K_{\bar{d}i} = \bar{H}_i^{-1} (\bar{G}_i - \bar{G}_{ci}) \quad (4.13)$$

para  $i = 1, \dots, q$ .

## 4.2.2. Rediseño para seguimiento de referencias variantes en el tiempo

Como en el caso de estabilización a un punto de equilibrio, ahora se aplicará la discretización directa para los sistemas controlado analógicamente (3.21) y digitalmente (4.9), de manera que se aplique el rediseño digital y se cumpla  $x_d(t)|_{t=kT} = x_c(t)|_{t=kT}$ .

Para este caso, consideraremos la referencia  $\Gamma(t)$  en el sistema analógicamente controlado (3.21), como una entrada continua a trozos, es decir  $\Gamma(t) = \Gamma(kT)$ ,  $kT < t \leq kT + T$ , esto, como se explicó en la sección (2.1), es necesario para que la discretización tenga sentido. Aplicando la discretización al sistema controlado analógicamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{-A_{ci}t} \frac{d(x_c(t))}{dt} &= \mathbf{e}^{-A_{ci}t} A_{ci} x_c(t) + \mathbf{e}^{-A_{ci}t} B_i E_{ci} \Gamma(kT) \\ \mathbf{e}^{-A_{ci}t} \frac{d(x_c(t))}{dt} - \mathbf{e}^{-A_{ci}t} A_{ci} x_c(t) &= \mathbf{e}^{-A_{ci}t} B_i E_{ci} \Gamma(kT) \end{aligned}$$

$$\frac{d(\mathbf{e}^{-A_{ci}t} x_c(t))}{dt} = \mathbf{e}^{-A_{ci}t} B_i E_{ci} \Gamma(kT)$$

integrando por ambos lados de  $t_0$  a  $t$ :

$$\int_{t_0}^t \frac{d(\mathbf{e}^{-A_{ci}\lambda} x_c(\lambda))}{d\lambda} d\lambda = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_{ci}\lambda} B_i E_{ci} \Gamma(kT) d\lambda$$

$$\mathbf{e}^{-A_{ci}\lambda} x_c(\lambda) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_{ci}\lambda} B_i E_{ci} \Gamma(kT) d\lambda$$

$$\mathbf{e}^{-A_{ci}t} x_c(t) - \mathbf{e}^{-A_{ci}t_0} x_c(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_{ci}\lambda} B_i E_{ci} \Gamma(kT) d\lambda$$

$$\mathbf{e}^{-A_{ci}t} x_c(t) = \mathbf{e}^{-A_{ci}t_0} x_c(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_{ci}\lambda} B_i E_{ci} \Gamma(kT) d\lambda$$

Como la referencia  $\Gamma(\cdot)$  se mantiene constante en todo el intervalo de integración:

$$\mathbf{e}^{-A_{ci}t} x_c(t) = \mathbf{e}^{-A_{ci}t_0} x_c(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_{ci}\lambda} B_i d\lambda E_{ci} \Gamma(kT)$$

$$x_c(t) = \mathbf{e}^{A_{ci}(t-t_0)} x_c(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_{ci}(t-\lambda)} B_i d\lambda E_{ci} \Gamma(kT)$$

considerando  $t_0 = kT$  y  $t = kT + T$ , queda:

$$x_c(kT + T) = \mathbf{e}^{A_{ci}T} x_c(kT) + \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{e}^{A_{ci}(kT+T-\lambda)} B_i d\lambda E_{ci} \Gamma(kT)$$

reescribiendo:

$$x_c(kT + T) = G_{ci} x_c(kT) + H_{ci} E_{ci} \Gamma(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.14)$$

donde:

$$\begin{aligned} G_{ci} &= \mathbf{e}^{A_{ci}T} \\ H_{ci} &= (G_{ci} - I_{n \times n}) A_{ci}^{-1} B_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (4.15)$$

Una vez obtenido el modelo discreto para sistema controlado analógicamente, se procede a encontrar el modelo discreto del sistema híbrido (4.9), para lo cual procederemos como anteriormente. Multiplicamos a ambos lados del mismo por  $\mathbf{e}^{-A_i t}$ :

$$\mathbf{e}^{-A_i t} \frac{dx_d(t)}{dt} = \mathbf{e}^{-A_i t} A_i x_d(t) - \mathbf{e}^{-A_i t} B_i K_{di} x_d(kT) + \mathbf{e}^{-A_i t} B_i E_{di} \Gamma(kT)$$

$$\mathbf{e}^{-A_i t} \frac{dx_d(t)}{dt} - \mathbf{e}^{-A_i t} A_i x_d(t) = -\mathbf{e}^{-A_i t} B_i K_{di} x_d(kT) + \mathbf{e}^{-A_i t} B_i E_{di} \Gamma(kT)$$

$$\frac{d\mathbf{e}^{-A_i t} x_d(t)}{dt} = -\mathbf{e}^{-A_i t} B_i K_{di} x_d(kT) + \mathbf{e}^{-A_i t} B_i E_{di} \Gamma(kT)$$

integrando por ambos lados desde  $t_0$  a  $t$ :

$$\int_{t_0}^t \frac{d\mathbf{e}^{-A_i \lambda} x_d(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i \lambda} B_i K_{di} x_d(kT) d\lambda + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i \lambda} B_i E_{di} \Gamma(kT) d\lambda$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{-A_i\lambda}x_d(\lambda)\Big|_{t_0}^t &= -\int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i\lambda}B_iK_{di}x_d(kT) d\lambda + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i\lambda}B_iE_{di}\Gamma(kT) d\lambda \\
\mathbf{e}^{-A_it}x_d(t) - \mathbf{e}^{-A_it_0}x_d(t_0) &= -\int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i\lambda}B_iK_{di}x_d(kT) d\lambda + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i\lambda}B_iE_{di}\Gamma(kT) d\lambda \\
\mathbf{e}^{-A_it}x_d(t) &= \mathbf{e}^{-A_it_0}x_d(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i\lambda}B_iK_{di}x_d(kT) d\lambda + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-A_i\lambda}B_iE_{di}\Gamma(kT) d\lambda \\
x_d(t) &= \mathbf{e}^{A_i(t-t_0)}x_d(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_i(t-\lambda)}B_iK_{di}x_d(kT) d\lambda + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_i(t-\lambda)}B_iE_{di}\Gamma(kT) d\lambda
\end{aligned}$$

pero  $x_d(kT)$  y  $\Gamma(kT)$  son constantes en todo el intervalo de integración, por lo que:

$$x_d(t) = \mathbf{e}^{A_i(t-t_0)}x_d(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_i(t-\lambda)}B_i d\lambda K_{di}x_d(kT) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A_i(t-\lambda)}B_i d\lambda E_{di}\Gamma(kT)$$

tomando  $t_0 = kT$  y  $t = kT + T$ :

$$x_d(kT + T) = \mathbf{e}^{A_iT}x_d(kT) - \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{e}^{A_i(kT+T-\lambda)}B_i d\lambda K_{di}x_d(kT) + \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{e}^{A_i(kT+T-\lambda)}B_i d\lambda E_{di}\Gamma(kT)$$

reescribiendo:

$$x_d(kT + T) = G_i x_d(kT) - H_i K_{di} x_d(kT) + H_i E_{di} \Gamma(kT)$$

finalmente:

$$x_d(kT + T) = (G_i - H_i K_{di}) x_d(kT) + H_i E_{di} \Gamma(kT) \quad (4.16)$$

donde:

$$\begin{aligned}
G_i &= \mathbf{e}^{A_iT} \\
H_i &= (G_i - I_{n \times n}) A_i^{-1} B_i, \quad i = 1, 2, \dots, q
\end{aligned} \quad (4.17)$$

La ecuación (4.16) contiene la dinámica discreta del sistema controlado de forma digital.

Una vez obtenidos los modelos discretos para los sistemas (3.21) y (4.9), se puede realizar el rediseño de las ganancias. El objetivo en este caso es  $x_d(t)|_{t=kT} = x_c(t)|_{t=kT}$ , para lo cual permitiremos que  $x_d(kT + T) = x_c(kT + T)$ , así obtenemos:

$$(G_i - H_i K_{di}) x_d(kT) + H_i E_{di} \Gamma(kT) = G_{ci} x_c(kT) + H_{ci} E_{ci} \Gamma(kT)$$

Con la misma referencia  $\Gamma(kT)$  para ambos modelos, se cumple  $x_d(kT) = x_c(kT)$  si:

$$\begin{aligned}
G_i - H_i K_{di} &= G_{ci} \\
H_i E_{di} &= H_{ci} E_{ci}
\end{aligned}$$

de donde se pueden obtener las nuevas ganancias para el control digital. Resolviendo para  $K_{di}$  y  $E_{di}$ , el rediseño queda:

$$\begin{aligned}
K_{di} &= H_i^{-1} (G_i - G_{ci}) \\
E_{di} &= H_i^{-1} H_{ci} E_{ci}, \quad i = 1, 2, \dots, q
\end{aligned} \quad (4.18)$$

Como resultado de la aplicación del rediseño digital, se obtuvieron las ganancias adecuadas para los objetivos de control. Para regulación a un punto de equilibrio, el controlador digital (4.5) queda con las ganancias obtenidas en (4.13); mientras que en el caso de seguimiento de referencias variantes en el tiempo, el controlador (4.8) tiene como ganancias de realimentación y prealimentación las encontradas en (4.18). En ambos casos, se garantiza un mejor desempeño del control digital, cuando tiene las ganancias obtenidas por rediseño, que cuando tiene las ganancias obtenidas para el controlador analógico.

### 4.3. Rediseño digital para seguimiento con comportamiento entre muestreos

En la sección anterior se realizó el rediseño digital a través del método de discretización directa mostrado en [Lewis, 1992], el cual no contempla el comportamiento del sistema entre muestreos. A continuación, se plantea realizar el rediseño digital considerando el comportamiento entre muestras del sistema controlado digitalmente, para lo cual se emplearán cuadraturas de Chebyshev mostradas en la sección (2.1.1). Lo anterior solo se aplicará al caso en el que se busque seguimiento de referencia, debido que la integral que se reconstruye con las cuadraturas es una integral de convolución, la cual no está presente en el caso de regulación a un punto de equilibrio.

Consideremos, para el modelo discreto (4.14) del sistema controlado analógicamente (3.21), el caso de muestreo rápido, es decir, el caso en el que podamos reconstruir  $\mathbf{N}$  muestras entre muestras:

$$x_c(kT + \mathbf{n}T_n) = G_{ci}^{(\mathbf{n})}x_c(kT) + H_{ci}^{(\mathbf{n})}E_{ci}\Gamma(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.19)$$

donde  $T_n = T/\mathbf{N}$ , con  $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$  como el número de puntos en los que se divide el espacio entre muestras, y  $\mathbf{n} = 1, 2, \dots, \mathbf{N}$ . Definiendo además:

$$\begin{aligned} G_{ci}^{(\mathbf{n})} &= (\mathbf{e}^{A_{ci}T_n})^{\mathbf{n}} = \mathbf{e}^{A_{ci}\mathbf{n}T_n} \\ H_{ci}^{(\mathbf{n})} &= (G_{ci}^{(\mathbf{n})} - I_{n \times n})A_{ci}^{-1}B_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (4.20)$$

El modelo en tiempo continuo del sistema controlado de manera analógica (3.21) puede reescribirse como:

$$\dot{x}_c(t) = A_i x_c(t) - B_i K_{ci} x_c(t) + B_i E_{ci} \Gamma(t), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.21)$$

Aplicando la discretización directa mostrada anteriormente, obtenemos el siguiente modelo discreto:

$$x_c(kT + T) = G_i x_c(kT) - \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{e}^{A_i(kT+T-\lambda)} B_i K_{ci} x_c(\lambda) d\lambda + H_i E_{ci} \Gamma(kT), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.22)$$

con  $G_i$ ,  $H_i$  como en (4.17). El término de la integral de convolución se puede aproximar mediante la cuadratura de Chebyshev [Shieh et al., 1998]. Consideremos:

$$\int_a^b \mathbf{e}^{A_i(kT+T-\lambda)} B_i K_{ci} x_c(\lambda) d\lambda \approx W K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} x_c(kT + \mathbf{n}T_n), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.23)$$

donde:

$$W = \frac{1}{\mathbf{N}+1} \int_a^b \mathbf{e}^{A_i(kT+T-\lambda)} B_i d\lambda, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.24)$$

es el factor de ponderación. Sabemos de (4.17) que:

$$\int_a^b \mathbf{e}^{A_i(kT+T-\lambda)} B_i d\lambda = H_i$$

por lo que el lado izquierdo de (4.23) queda:

$$W K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} x_c(kT + \mathbf{n}T_n) = \frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} x_c(kT + \mathbf{n}T_n) \quad (4.25)$$

reemplazando (4.19) en el lado derecho de (4.25), queda:

$$\frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} x_c(kT + \mathbf{n}T_n) = \frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} G_{ci}^{(\mathbf{n})} x_c(kT) + \frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} H_{ci}^{(\mathbf{n})} E_{ci} \Gamma(kT)$$

así, por transitividad:

$$\int_a^b \mathbf{e}^{A_i(kT+T-\lambda)} B_i K_{ci} x_c(\lambda) d\lambda \approx \frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} G_{ci}^{(\mathbf{n})} x_c(kT) + \frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} H_{ci}^{(\mathbf{n})} E_{ci} \Gamma(kT) \quad (4.26)$$

reemplazando (4.26) en (4.22) obtenemos finalmente:

$$x_c(kT + T) = \left( G_i - \frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} G_{ci}^{(\mathbf{n})} \right) x_c(kT) + H_i \left( I_{n \times n} - \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} H_{ci}^{(\mathbf{n})} \right) E_{ci} \Gamma(kT) \quad (4.27)$$

Ahora, para fines del rediseño, permitamos que la dinámica discreta del sistema híbrido (4.16) coincidan con la del sistema controlado analógicamente con el muestreo entre muestras (4.27), es decir  $x_d(kT + T) = x_c(kT + T)$ :

$$\begin{aligned} (G_i - H_i K_{di}) x_d(kT) + H_i E_{di} \Gamma(kT) &= \left( G_i - \frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} G_{ci}^{(\mathbf{n})} \right) x_c(kT) \\ &+ H_i \left( I_{m \times m} - \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} H_{ci}^{(\mathbf{n})} \right) E_{ci} \Gamma(kT) \end{aligned}$$

con  $\Gamma(kT)$  igual en ambos sistemas, para lograr  $x_d(t)|_{t=kT} = x_c(t)|_{t=kT}$ , se debe cumplir:

$$G_i - H_i K_{di} = \left( G_i - \frac{1}{\mathbf{N}+1} H_i K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} G_{ci}^{(\mathbf{n})} \right), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.28a)$$

$$H_i E_{di} = H_i \left( I_{n \times n} - \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} H_{ci}^{(\mathbf{n})} \right) E_{ci}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.28b)$$

Ahora, (4.28a) y (4.28b), es decir, el rediseño de las ganancias, contienen la información de las  $\mathbf{N}$  muestras entre muestras. Consideremos como ideal, el caso en el que podamos dividir

el muestreo en infinitas partes, es decir, cuando  $\mathbf{N} \rightarrow \infty$ . Lo anterior se resolverá para las dos partes de (4.28), obteniendo el rediseño de ganancias de realimentación y prealimentación para el control digital (4.8).

Para (4.28a) tenemos:

$$K_{di} = \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} G_{ci}^{(\mathbf{n})}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.29)$$

por propiedades de sumatorias:

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} G_{ci}^{(\mathbf{n})} = [(G_{ci}^{(1)} - I_{n \times n})^{-1} (G_{ci}^{(\mathbf{N})} - I_{n \times n}) + G_{ci}^{(\mathbf{N})}]$$

pero  $G_{ci}^{(\mathbf{N})} = G_{ci}$ , por lo que:

$$K_{di} = \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} [(G_{ci}^{(1)} - I_{n \times n})^{-1} (G_{ci} - I_{n \times n}) + G_{ci}]$$

Ahora, evaluando el límite cuando  $\mathbf{N} \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} K_{di} &= \lim_{\mathbf{N} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} [(G_{ci}^{(1)} - I_{n \times n})^{-1} (G_{ci} - I_{n \times n}) + G_{ci}] \\ &= K_{ci} \lim_{\mathbf{N} \rightarrow \infty} \left[ \frac{\mathbf{N}+1}{\mathbf{N}} \left( A_{ci} T + \frac{(A_{ci} T)^2}{2! \mathbf{N}} + \dots \right) \right]^{-1} (G_{ci} - I_{n \times n}) \end{aligned}$$

obteniendo finalmente el rediseño para las ganancias de realimentación:

$$K_{di} = K_{ci} (A_{ci} T)^{-1} (G_{ci} - I_{n \times n}), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.30)$$

Por otro lado, para (4.28b) tenemos:

$$E_{di} = \left( I_{m \times m} - \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} H_{ci}^{(\mathbf{n})} \right) E_{ci}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.31)$$

reemplazando  $H_{ci}^{(\mathbf{n})}$  de (4.20):

$$\begin{aligned} E_{di} &= \left( I_{m \times m} - \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} (G_{ci}^{(\mathbf{n})} - I_{n \times n}) A_{ci}^{-1} B_i \right) E_{ci} \\ E_{di} &= \left( I_{n \times n} - \frac{1}{\mathbf{N}+1} K_{ci} \left[ \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} G_{ci}^{(\mathbf{n})} - \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} I_{n \times n} \right] A_{ci}^{-1} B_i \right) E_{ci} \end{aligned}$$

por propiedades de las sumatorias:

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}} I_{m \times m} = (\mathbf{N}+1) I_{n \times n}$$

así:

$$E_{di} = \left( I_{m \times m} - \frac{1}{N+1} K_{ci} \left[ \sum_{n=0}^N G_{ci}^{(n)} - (N+1) I_{n \times n} \right] A_{ci}^{-1} B_i \right) E_{ci}$$

$$E_{di} = E_{ci} - \frac{1}{N+1} K_{ci} \left[ \sum_{n=0}^N G_{ci}^{(n)} - (N+1) I_{n \times n} \right] A_{ci}^{-1} B_i E_{ci}$$

$$E_{di} = E_{ci} + \left[ -\frac{1}{N+1} K_{ci} \sum_{n=0}^N G_{ci}^{(n)} - \frac{N}{N+1} K_{ci} + \frac{1}{N+1} K_{ci} \right] A_{ci}^{-1} B_i E_{ci}$$

evaluando el límite cuando  $N \rightarrow \infty$ :

$$E_{di} = E_{ci} + \left[ -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} K_{ci} \sum_{n=0}^N G_{ci}^{(n)} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N+1} K_{ci} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} K_{ci} \right] A_{ci}^{-1} B_i E_{ci}$$

$$E_{di} = E_{ci} + \left[ -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} K_{ci} \sum_{n=0}^N G_{ci}^{(n)} + K_{ci} \right] A_{ci}^{-1} B_i E_{ci}$$

reemplazando (4.29), queda:

$$E_{di} = E_{ci} + (K_{ci} - K_{di}) A_{ci}^{-1} B_i E_{ci}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (4.32)$$

Así, (4.30) y (4.32) se obtuvieron mediante el rediseño considerando el comportamiento entre muestras, resultan como alternativa a las ganancias obtenidas por el rediseño sin intermuestreo (4.18), el cual no tiene la ventaja, en general, de considerar comportamiento entre muestras.

A lo largo del capítulo, se mostró la aplicación del método de discretización directa a los sistemas analógicos correspondientes a estabilización a punto de equilibrio y seguimiento de referencias variantes en el tiempo. Esta discretización es fundamental para el rediseño de las ganancias de los controladores analógicos. El primer rediseño realizado, no contempla información entre muestreos, un problema natural relacionado con los controladores digitales. No obstante, mediante cuadraturas de Chebyshev, se logró derivar un controlador digital que sí considere el comportamiento intermuestro. A continuación, se aplicarán los resultados al conocido sistema caótico de Chua, el cual puede ser descrito como un lineal por partes, cuyas conmutaciones dependen de los estados. Se diseñará el LQR y el LQT analógicos para cada objetivo de control. Con estas ganancias, se aplicará el rediseño digital recientemente visto, y se derivarán las ganancias adecuadas. El efecto de los controladores analógicos y digitales, podrán visualizarse a través de simulaciones.

## Capítulo 5

# Rediseño Digital Aplicado al Circuito de Chua

En este capítulo se aplicará el rediseño digital al circuito de Chua, partiendo desde el diseño del controlador analógico subóptimo para estabilización a punto de equilibrio y seguimiento de referencias. Se ha optado por este sistema ya que aunque es no lineal en general, se puede llevar a una representación lineal a trozos [Jianxiong et al., 1996]. Lo que aquí se sigue, puede ser aplicado a cualquier sistema lineal, lineal a trozos o incluso, no lineal que pueda ser linealizado de alguna manera. Cabe recalcar que el objetivo de esta investigación no radica en linealizar sistemas, sino en implementar el rediseño digital en sistemas que posean una representación lineal.

Como vimos en la sección (2.5), el sistema de Chua puede reescribirse en forma de espacio de estados como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_i x_c(t) + B_i v_i \\ y_c(t) &= C_i x_c(t), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $x_c(t) = [x_{c1}(t); x_{c2}(t); x_{c3}(t)]$ , y  $q = 3$ ; además, las matrices  $A_i$  y  $B_i$  son [Guo et al., 2000b]:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\alpha(1+m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} -\alpha(m_1-m_0) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{cuando } x_{c1}(t) > 1. \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -\alpha(1+m_1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{cuando } |x_{c1}(t)| \leq 1. \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -\alpha(1+m_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} \alpha(m_1-m_0) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{cuando } x_{c1}(t) < -1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

$C_i = I_{3 \times 3}$  para todo  $i$ , con  $v_1 = [1, 0, 0]^\top$ ,  $v_2 = [0, 0, 0]^\top$  y  $v_3 = [1, 0, 0]^\top$ . Con los parámetros  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 14.87$ ,  $m_0 = -0.68$  y  $m_1 = -1.27$ , el sistema (5.1) tiene el comportamiento caótico mostrado en la Figura 5.1:

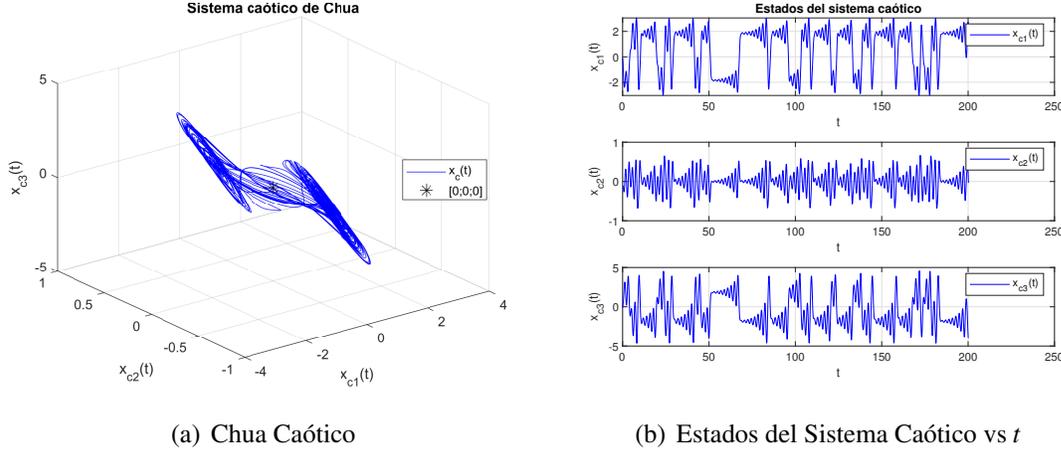


Figura 5.1: Sistema Caótico de Chua.

A continuación, se realizará el diseño analógico de dos controladores; el primero estabiliza al sistema (5.1) a uno de sus puntos de equilibrio  $\bar{x}_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ , y el segundo permite el seguimiento de referencias variantes en el tiempo. Como se mencionó anteriormente, el diseño de éstos, se hará en base a un LQR y LQT subóptimos, empleando los resultados de las secciones 3.1.1 y 3.2.1 respectivamente. Para todas las simulaciones mostradas en la presente sección, se empleó el integrador de paso fijo ode4 de MATLAB<sup>®</sup>, basado en el método clásico de cuarto orden de Runge-Kutta, con un tiempo de integración de  $t_{int} = 0.001s$ .

## 5.1. Control analógico

Nuestro primer objetivo es estabilizar el sistema (5.1) a alguno de sus puntos de equilibrio  $\bar{x}_k = [\bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}, \bar{x}_{3k}]^\top$  para  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Para encontrar a los puntos de equilibrio, procedemos resolviendo  $\dot{x}_c(t) = 0$ , por lo que obtenemos, como en (3.2):

$$\bar{x}_k = -A_k^{-1}B_k v_k, \quad k \in \{1, 2, 3\} \quad (5.3)$$

Empleando los valores de  $A_i$ ,  $B_i$  y  $v_i$ , obtenemos el punto de equilibrio para cada caso, así:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= [-1.8438, 0, 1.8438]^\top \\ \bar{x}_2 &= [0, 0, 0]^\top \\ \bar{x}_3 &= [1.8438, 0, -1.8438]^\top \end{aligned} \quad (5.4)$$

### 5.1.1. Estabilización a un punto de equilibrio

Consideremos el controlador analógico dado por:

$$u_{\bar{c}i}(t) = -K_{\bar{c}i}(x_{\bar{c}}(t) - \bar{x}_k) \quad (5.5)$$

con  $i = 1, 2, 3$  y  $k \in \{1, 2, 3\}$ , donde  $K_{\bar{c}i} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de realimentación de estados para cada parte del sistema conmutado. El sistema de Chua considerando la acción de control es:

$$\dot{x}_c(t) = A_i x_c(t) + B_i v_i + B_i u_{\bar{c}i}(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.6)$$

Definimos el error  $e_{\bar{x}}(t) = x_c(t) - \bar{x}_k$ . De la ecuación anterior,  $K_{\bar{c}i}$  es la matriz que representa la ganancia de realimentación para cada  $i$ -ésima parte del sistema conmutado, la cual será obtenida más adelante para  $i = 1, 2, 3$ . El sistema de error respecto a cada punto de equilibrio  $\bar{x}_k$  es:

$$\dot{e}_{\bar{x}}(t) = \dot{x}_c(t) \quad (5.7)$$

Cerrando el lazo del sistema (5.6) con el control definido en (5.5), tenemos:

$$\dot{e}_{\bar{x}}(t) = (A_i - B_i K_{\bar{c}i}) e_{\bar{x}}(t) \quad (5.8)$$

lo que es equivalente a:

$$\dot{x}_c(t) = (A_i - B_i K_{\bar{c}i}) x_c(t) - (A_i - B_i K_{\bar{c}i}) \bar{x}_k \quad (5.9)$$

$i = 1, 2, 3, k \in \{1, 2, 3\}$ . El origen de (5.8) es el punto de equilibrio al que se busca estabilizar el sistema de error mediante el diseño de las ganancias  $K_{\bar{c}i}$ , esto garantiza que el sistema controlado analógicamente en lazo cerrado (5.9) se estabilice al punto de equilibrio deseado. Para obtener las ganancias  $K_{\bar{c}i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , usaremos la ecuación (3.13), derivada de la aplicación del LQR a un sistema conmutado lineal por partes. Resolviendo la ecuación algebraica matricial de Riccati (3.14) para cada  $i$ , con  $\bar{R} = I_{3 \times 3}$  y  $\bar{Q} = 2 \times 10^3 * I_{3 \times 3}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} K_{\bar{c}1} &= \begin{bmatrix} 44.1893 & 2.2898 & -0.0715 \\ 0.3881 & 45.4592 & -6.7351 \\ -0.0121 & -6.7351 & 44.0586 \end{bmatrix} \\ K_{\bar{c}2} &= \begin{bmatrix} 47.2739 & 5.6139 & 0.4093 \\ 5.6139 & 46.2787 & -6.6478 \\ 0.4093 & -6.6478 & 44.0720 \end{bmatrix} \\ K_{\bar{c}3} &= \begin{bmatrix} -44.1893 & -2.2898 & 0.0715 \\ 0.3881 & 45.4592 & -6.7351 \\ -0.0121 & -6.7351 & 44.0586 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Debido a que (5.1) es un sistema conmutado, la estabilidad del punto de equilibrio  $\bar{x}_k$ , se debe comprobar usando una función común de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  radialmente desacotada, que para todas las partes lineales del sistema conmutado cumpla que:

1.  $V(0) = 0, V(e_{\bar{x}}) > 0, \forall e_{\bar{x}} \neq 0$
2.  $\dot{V}(e_{\bar{x}}) < 0, \forall e_{\bar{x}} \in \mathbb{R}^3$

de modo que el origen de (5.8) es asintóticamente estable [Liberzon, 2003, Liberzon and Morse, 1999].

Obviando por simplicidad la dependencia del tiempo en  $e_{\bar{x}}(t)$ , la función candidata común es:

$$V(e_{\bar{x}}) = e_{\bar{x}}^\top \bar{P} e_{\bar{x}} \quad (5.11)$$

con  $P$  una matriz simétrica positiva definida. Derivando la función candidata a lo largo de las trayectorias de (5.8), obtenemos:

$$\dot{V}(e_{\bar{x}}) = \dot{e}_{\bar{x}}^\top \bar{P} e_{\bar{x}} + e_{\bar{x}}^\top \bar{P} \dot{e}_{\bar{x}}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(e_{\bar{x}}) &= ((A_i - B_i K_{\bar{c}i})e_{\bar{x}})^\top \bar{P}e_{\bar{x}} + e_{\bar{x}}^\top \bar{P}(A_i - B_i K_{\bar{c}i})e_{\bar{x}} \\ \dot{V}(e_{\bar{x}}) &= e_{\bar{x}}^\top (A_{\bar{c}i}^\top \bar{P} + \bar{P}A_{\bar{c}i})e_{\bar{x}}\end{aligned}\quad (5.12)$$

con  $A_{\bar{c}i} = A_i - B_i K_{\bar{c}i}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Ahora, para obtener  $\dot{V}_i(e_{\bar{x}}) < 0$ , la matriz  $A_{\bar{c}i}^\top \bar{P} + \bar{P}A_{\bar{c}i}$  debe ser negativa definida para cada  $i$ , o lo que es equivalente:

$$A_{\bar{c}i}^\top \bar{P} + \bar{P}A_{\bar{c}i} < -\varepsilon I_{3 \times 3} \quad (5.13)$$

Seleccionando  $\varepsilon = 1$ , encontramos que con

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

la ecuación con la función candidata sí cumple las condiciones para ser una función de Lyapunov común, por lo que existe al menos una función común para las 3 partes del sistema, que cumpla con las condiciones que garantizan la estabilidad asintótica de (5.8). Así, se muestra que el diseño del controlador propuesto para el sistema conmutado de error, lo vuelve asintóticamente estable al origen.

Se simuló el sistema en lazo cerrado (5.9), con las ganancias (5.10); para lo anterior, se tomaron condiciones iniciales  $x_c(0) = [-0.1 \ -0.1 \ -0.1]^\top$  para los estados del sistema. Para esta simulación, en los primeros 100 instantes, el control no está siendo aplicado. Luego, a partir de allí, se aplica con las ganancias  $K_{\bar{c}i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  diseñadas.

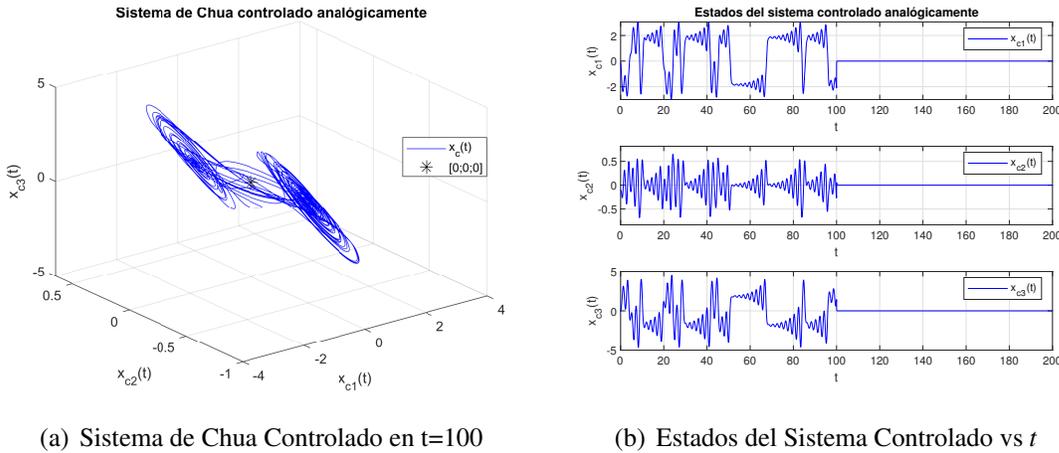


Figura 5.2: Sistema de Chua controlado analógicamente para estabilización a  $\bar{x}_2$ .

En la Figura 5.2 se puede observar el comportamiento del sistema de Chua. En (a) el sistema es caótico hasta  $t < 100$ , a partir de ahí, el sistema converge al origen. En (b) observamos lo mismo, pero desde los estados del sistema controlado. Planteemos ahora la necesidad de llevar al sistema a un punto de equilibrio diferente del origen, esto es  $\bar{x} \neq 0$ , para lo cual, basta con modificar  $\bar{x}_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  en el controlador analógico (5.5). De (5.4), tomemos  $\bar{x}_3 = [1.8438, 0, -1.8438]^\top$ . En simulación, obtenemos:

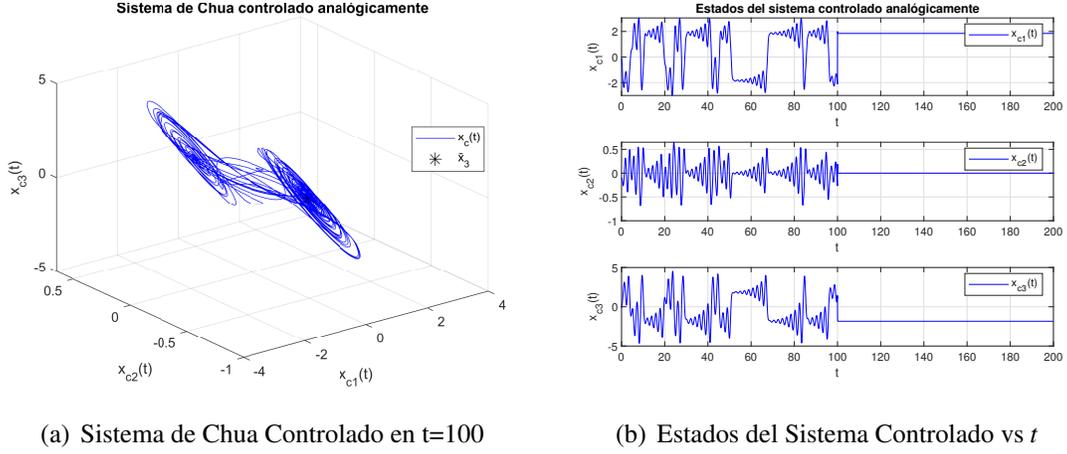


Figura 5.3: Sistema de Chua controlado analógicamente para estabilización a  $\bar{x}_3$ .

Habiendo diseñado el control analógico para regulación a un punto de equilibrio del sistema de Chua, en la siguiente sección se realiza el diseño del controlador analógico para lograr seguimiento de los estados de una referencia variante en el tiempo. Para lo anterior, se diseñará un LQT para cada parte del sistema conmutado.

### 5.1.2. Seguimiento de referencia con dinámica explícita

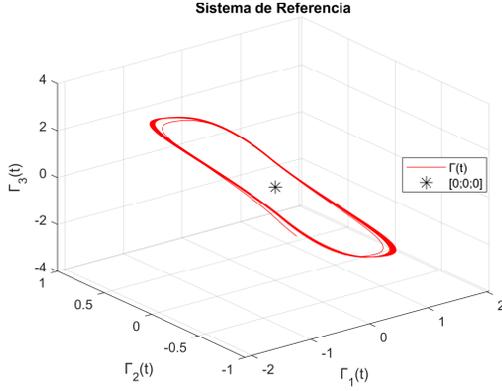
Considere ahora, como la referencia a seguir, al sistema también lineal por partes:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}(t) &= A_{\Gamma_j}\Gamma(t) + B_{\Gamma_j}\bar{v}_j, \text{ para } j = 1, 2, 3. \\ z(t) &= \bar{C}_j\Gamma(t)\end{aligned}\tag{5.15}$$

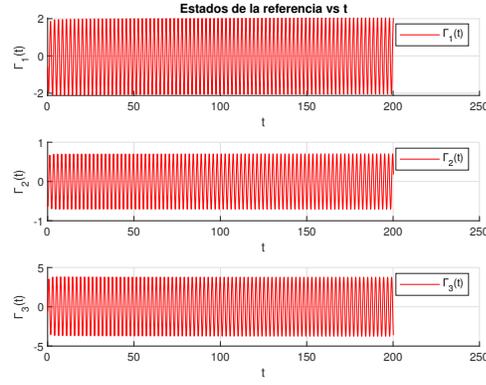
con  $\Gamma(t) = [\Gamma_1(t); \Gamma_2(t); \Gamma_3(t)]$ , y  $q' = 3$ ; además:

$$\begin{aligned}A_{\Gamma_1} &= \begin{bmatrix} -\alpha_r(1+m_{r0}) & \alpha_r & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta_r & 0 \end{bmatrix}, B_{\Gamma_1} = \begin{bmatrix} -\alpha_r(m_{r1}-m_{r0}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{cuando } \Gamma_1(t) > 1. \\ A_{\Gamma_2} &= \begin{bmatrix} -\alpha_r(1+m_{r1}) & \alpha_r & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta_r & 0 \end{bmatrix}, B_{\Gamma_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{cuando } |\Gamma_1(t)| \leq 1. \\ A_{\Gamma_3} &= \begin{bmatrix} -\alpha_r(1+m_{r0}) & \alpha_r & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta_r & 0 \end{bmatrix}, B_{\Gamma_3} = \begin{bmatrix} \alpha_r(m_{r1}-m_{r0}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{cuando } \Gamma_1(t) < -1\end{aligned}$$

En (5.15),  $\bar{C}_j = I_{3 \times 3} \forall j$ , por lo tanto, nos referiremos al vector de salida del sistema de referencia  $z(t) \in \mathbb{R}^3$  como  $\Gamma(t)$ . Definimos  $\bar{v}_1 = [1, 0, 0]^T$ ,  $\bar{v}_2 = [0, 0, 0]^T$ ,  $\bar{v}_3 = [1, 0, 0]^T$ ; mientras que los parámetros de la referencia son  $\alpha_r = 8.85591$ ,  $\beta_r = 15$ ,  $m_{r0} = -8/7$ ,  $m_{r1} = -5/7$ . Simulando la referencia, con condiciones iniciales  $\Gamma(0) = [-0.6 \ -0.6 \ -0.6]^T$ , obtenemos:



(a) Últimos 50 instantes del Sistema Referencia



(b) Estados de la Referencia

Figura 5.4: Sistema de Referencia.

Encontramos que, con las condiciones iniciales dadas, la referencia se mantiene acotada para todo tiempo. Formando el vector de valores máximos que toma cada componente de la misma, obtenemos  $\Gamma_{\text{máx}} = [2.0400, 0.7036, 3.8216]^T$ , por lo que numéricamente, encontramos la cota de (5.15) como:

$$\|\Gamma(t)\| \leq 4.3888 \quad (5.16)$$

Definamos ahora el controlador analógico para realizar seguimiento de los estados de la referencia (5.15):

$$u_{ci}(t) = -K_{ci}x_c(t) + E_{ci}\Gamma(t) - v_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.17)$$

donde  $K_{ci} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $E_{ci} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son las matrices de realimentación de estados, y prealimentación de los estados de la referencia  $\Gamma(t)$ , respectivamente. El sistema analógico (5.1) considerando la acción de control queda:

$$\dot{x}_c(t) = A_i x_c(t) + B_i v_i + B_i u_{ci}(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.18)$$

por lo que el sistema para seguimiento (5.18) en lazo cerrado con el controlador analógico (5.17), resulta:

$$\dot{x}_c(t) = A_{ci} x_c(t) + B_i E_{ci} \Gamma(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.19)$$

donde  $A_{ci} = A_i - B_i K_{ci}$  es la matriz del sistema en lazo cerrado para cada parte del sistema conmutado. Propuesto el controlador (5.17) en tiempo continuo con ganancias de realimentación  $K_{ci}$  y prealimentación  $E_{ci}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , usamos la ecuación (3.27) para obtener los valores de las mismas para cada parte del sistema analógico conmutado. Tomando  $Q = 2 \times 10^3 * I_{3 \times 3}$  y  $R = I_{3 \times 3}$ , se resuelve la ecuación algebraica matricial de Riccati (3.28) para cada parte del

sistema (5.19), obteniendo como ganancias:

$$\begin{aligned}
K_{c1} &= \begin{bmatrix} 44.1893 & 2.2898 & -0.0715 \\ 0.3881 & 45.4592 & -6.7351 \\ -0.0121 & -6.7351 & 44.0586 \end{bmatrix} \\
K_{c2} &= \begin{bmatrix} 47.2739 & 5.6139 & 0.4093 \\ 5.6139 & 46.2787 & -6.6478 \\ 0.4093 & -6.6478 & 44.0720 \end{bmatrix} \\
K_{c3} &= \begin{bmatrix} -44.1893 & -2.2898 & 0.0715 \\ 0.3881 & 45.4592 & -6.7351 \\ -0.0121 & -6.7351 & 44.0586 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.20a}$$

y

$$\begin{aligned}
E_{c1} &= \begin{bmatrix} 44.7033 & 0.5732 & -0.0935 \\ -0.5676 & 41.7573 & -7.7101 \\ -0.0271 & 7.3320 & 44.0403 \end{bmatrix} \\
E_{c2} &= \begin{bmatrix} 44.4451 & -4.2751 & 0.3848 \\ 4.0721 & 40.6715 & -7.6256 \\ 0.2938 & 7.0974 & 44.0534 \end{bmatrix} \\
E_{c3} &= \begin{bmatrix} -44.7033 & -0.5732 & 0.0935 \\ -0.5676 & 41.7573 & -7.7101 \\ -0.0271 & 7.3320 & 44.0403 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.20b}$$

Con los valores  $K_{ci}$  para  $i = 1, 2, 3$  obtenidos con el control LQT subóptimo, es fácil verificar que las matrices  $A_{ci}$  tienen los siguientes eigenvalores:

$$\begin{aligned}
\text{eig}(A_1 - B_1 K_{c1}) &= 100 \times \{-2.6391, -0.4526 \pm 0.0784i\} \\
\text{eig}(A_2 - B_2 K_{c2}) &= \{-44.8038, -0.4526 \pm 0.0784i\} \\
\text{eig}(A_3 - B_3 K_{c3}) &= 100 \times \{-2.6391, -0.4526 \pm 0.0784i\}
\end{aligned}$$

por lo que que  $A_{ci}$  es estable  $\forall i$ . Planteado el sistema en lazo cerrado, controlado analógicamente para seguimiento de referencias, mostramos interés en verificar que el error de seguimiento de la referencia  $e_c(t) = x_c(t) - \Gamma(t)$  se mantenga acotado para todo  $t$ , es decir,  $|e_c(t)| \leq M < \infty$ ; para lo cual, es necesario mostrar la BIBO estabilidad como en la sección (3.2.2). Para lo anterior, se establece el sistema de error de seguimiento como:

$$\dot{e}_c(t) = \dot{x}_c(t) - \dot{\Gamma}(t) \tag{5.21}$$

desarrollando con  $x_c(t) = e_c(t) + \Gamma(t)$ :

$$\begin{aligned}
\dot{e}_c(t) &= A_i x_c(t) + B_i v_i + B_i u_i(t) - [A_{\Gamma j} \Gamma(t) + B_{\Gamma j} \bar{v}_j] \\
\dot{e}_c(t) &= A_i x_c(t) - B_i K_{ci} x_c(t) + B_i E_{ci} \Gamma(t) - A_{\Gamma j} \Gamma(t) - B_{\Gamma j} \bar{v}_j \\
\dot{e}_c(t) &= A_{ci} e_c(t) + \rho(t)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

donde  $\rho(t) = (\Delta A_{i,j} - B_i \Delta T_i) \Gamma(t) - B_{\Gamma j} \bar{v}_j$ ,  $\Delta A_{i,j} = A_i - A_{\Gamma j}$  y  $\Delta T_i = K_{ci} - E_{ci}$ , para  $i, j = 1, 2, 3$ . Es fácil notar que, en este caso, numéricamente hablando, las ganancias del control

análogo para regulación (5.5), son las mismas ganancias de realimentación del controlador analógico para seguimiento (5.17), por lo que las matrices  $A_{ci}$  son las mismas para cada  $i$  en ambos casos. De lo anterior, y derivado de la existencia de la función común de Lyapunov (5.14), podemos asegurar que el sistema de error de seguimiento analógico (5.22) es asintóticamente estable cuando  $\rho(t) = 0, \forall t$ . Con lo anterior, y como la referencia  $\Gamma(t)$  está acotada para todo tiempo (entonces  $\rho(t)$  es acotada para todo tiempo), podemos afirmar que el sistema conmutado de error de seguimiento presenta estabilidad en el sentido BIBO.

Simulando el sistema (5.19) para  $t = 200$ , y el controlador (5.17) con las ganancias (5.20a)-(5.20b) aplicado en  $t \geq 100$ , resulta:

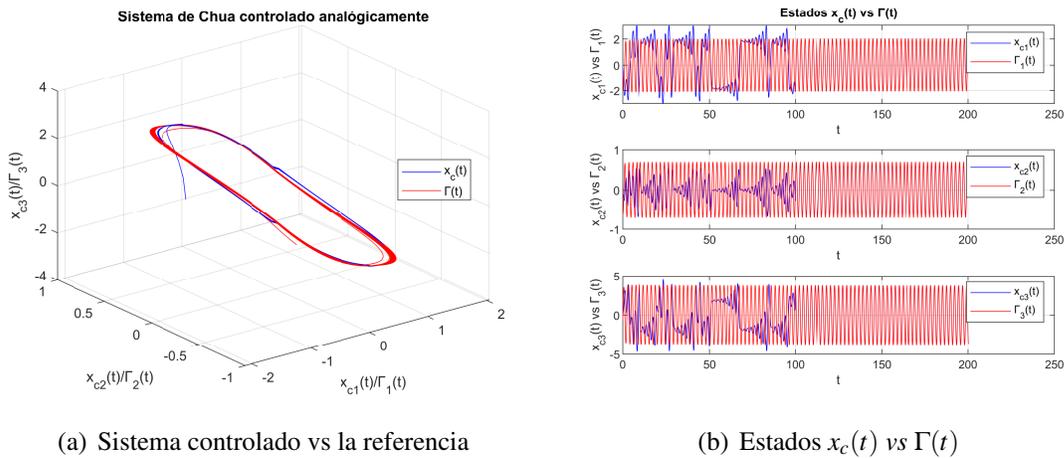


Figura 5.5: Sistema controlado analógicamente para seguimiento vs referencia.

Obteniendo los estados de este sistema en el tiempo, queda:

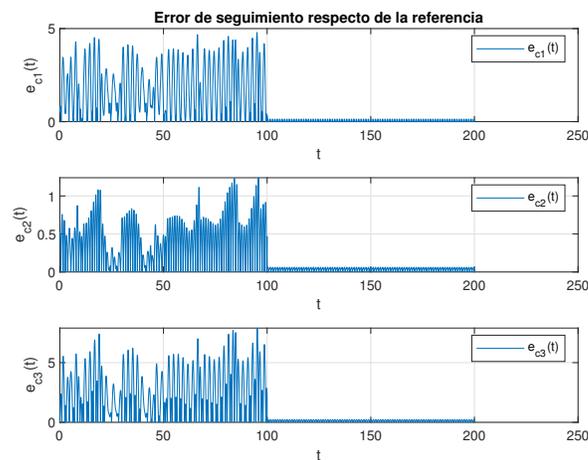


Figura 5.6: Estados del sistema de error  $e_c(t)$  vs  $t$ .

Una buena forma de obtener numéricamente una cota para el sistema controlado, es con-

siderar un vector que contenga los valores máximos que toma cada componente de (5.22), es decir  $e_{c\text{máx}} = [0.3237, 0.6614, 2.1862]^\top$ , por lo que una cota del sistema conmutado de error es:

$$\|e_c(t)\| \leq 2.3069 \quad (5.23)$$

Como vimos en la presente sección, se logró diseñar un par de controladores analógicos para el sistema analógico conmutado (5.1). El primero de ellos, garantiza estabilización a un punto de equilibrio del mismo sistema; mientras que el otro garantiza seguimiento de referencias, con un error de seguimiento acotado. En ambos casos, el controlador analógico tuvo un buen desempeño, por lo que establecemos que es un buen control analógico, el primer requerimiento para realizar el rediseño digital de las ganancias. En la siguiente sección, se aplica rediseño digital a los controladores analógicos obtenidos.

## 5.2. Implementación digital de los controladores diseñados

Hasta la sección anterior, el controlador aplicado al sistema caótico tanto para estabilizar a un punto de equilibrio  $\bar{x}_k$ , como para el seguimiento de la referencia  $\Gamma(t)$ , son de naturaleza análoga, es decir, su acción es continua en el tiempo. En esta sección se derivará la forma discreta de ambos controladores a partir de su forma continua; esto, a través de la conversión directa mostrada en la sección 2.1, con la finalidad de establecer un controlador digital para cada caso.

### 5.2.1. Estabilización a un punto de equilibrio

Planteamos ahora estabilizar el sistema analógico:

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) + B_i v_i + B_i u_{\bar{d}i}(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.24)$$

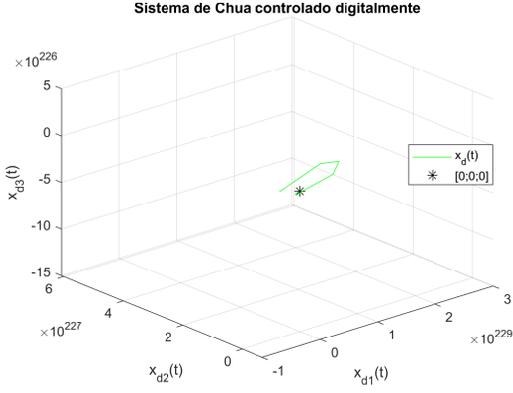
a un punto de equilibrio  $\bar{x}_k$  de (5.1), con el control digital:

$$u_{\bar{d}i}(t) = -K_{\bar{c}i}(x_d(kT) - \bar{x}_k), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.25)$$

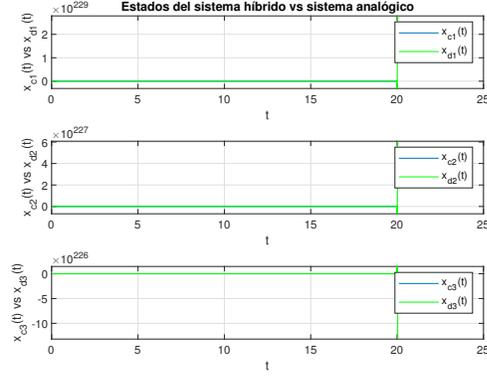
$kT \leq t < kT + T$ , donde  $T \in \mathbb{R}^+$  es el periodo de muestreo, y  $k = 1, 2, \dots$ . Para (5.24),  $A_i$ ,  $B_i$  y  $v_i$  son exactamente las mismas que en (5.2), mientras que para el control, las matrices de realimentación  $K_{\bar{c}i}$  son las mismas de (5.10), es decir, que el controlador digital (5.25) es resultado de muestrear y retener al controlador analógico (5.5), sin cambiar las ganancias. Cerrando el lazo del sistema en tiempo continuo (5.24) con el control digital (5.25), obtenemos el sistema híbrido:

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) - B_i K_{\bar{c}i} x_d(kT) + B_i v_i + B_i K_{\bar{c}i} \bar{x}_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.26)$$

Mediante simulaciones, se observó que para tiempos de muestreo menores a  $T = 0.04s$  el sistema híbrido tiene un comportamiento aceptable, sin embargo, para  $T \geq 0.04s$  el sistema tiende a inestabilizarse. Dado lo anterior, simulamos el sistema híbrido (5.26), para un periodo de muestreo de  $T = 0.04s$ , y  $\bar{x}_2 = [0, 0, 0]^\top$ , obteniendo:



(a) Chua controlado Digitalmente por  $u_{\bar{d}i}(t)$  sin rediseño



(b) Estados  $x_c(t)$  vs  $x_d(t)$

Figura 5.7: Sistema controlado digitalmente sin rediseño para regulación.

Se simularon 20 segundos, aplicando el control digital en  $t = 10.0s$ . Se puede observar cómo para  $T = 0.04s$ , los estados del sistema híbrido  $x_d(t)$  no convergen a la coordenada correspondiente del punto de equilibrio  $\bar{x}_2 = [0, 0, 0]^T$ , de hecho, el sistema se inestabiliza; mientras que los estados del sistema controlado en tiempo continuo  $x_c(t)$  sí convergen, lo que implica, que el controlador digital con ganancias sin rediseño (5.25) no proporciona buen desempeño para lograr la estabilización. Dado lo anterior, se plantea obtener nuevas ganancias que garanticen el objetivo de control a partir del rediseño digital, por lo que ahora definimos el control digital con nuevas ganancias como:

$$u_{\bar{d}i}(t) = -K_{\bar{d}i}(x_{\bar{d}}(kT) - \bar{x}_k), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.27)$$

por lo que el sistema híbrido con el nuevo controlador, resulta:

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) - B_i K_{\bar{d}i} x_d(kT) + B_i v_i + B_i K_{\bar{d}i} \bar{x}_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.28)$$

A continuación, resolveremos el problema de rediseño digital para derivar las ganancias  $K_{\bar{d}i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , que garanticen estabilización al punto de equilibrio. Para lo anterior, usaremos el resultado de la sección 4.2.1. Evaluando (4.13), con los valores conocidos de  $A_i$ ,  $B_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , y  $T = 0.04s$ , obtenemos las ganancias rediseñadas:

$$\begin{aligned} K_{\bar{d}1} &= \begin{bmatrix} 3.9778 & 0.9641 & 0.0499 \\ 0.4752 & 20.6916 & -0.6903 \\ -0.0497 & -7.1857 & 20.5023 \end{bmatrix} \\ K_{\bar{d}2} &= \begin{bmatrix} 22.3394 & 5.0944 & 0.2289 \\ 1.3319 & 20.8936 & -0.6542 \\ 0.1225 & -7.1378 & 20.5128 \end{bmatrix} \\ K_{\bar{d}3} &= \begin{bmatrix} -3.9778 & -0.9641 & -0.0499 \\ 0.4752 & .6916 & -0.6903 \\ -0.0497 & -7.1857 & 20.5023 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para la simulación del sistema híbrido con controlador rediseñado, se emplearon las mismas condiciones que en el caso sin rediseño, un periodo de muestreo  $T = 0.04s$  para estabilizar a  $\bar{x}_2 = [0,0,0]^T$ , con 20 segundos de simulación, y el controlador (5.27) con ganancias (5.29) aplicado para  $t \geq 10.0s$ :

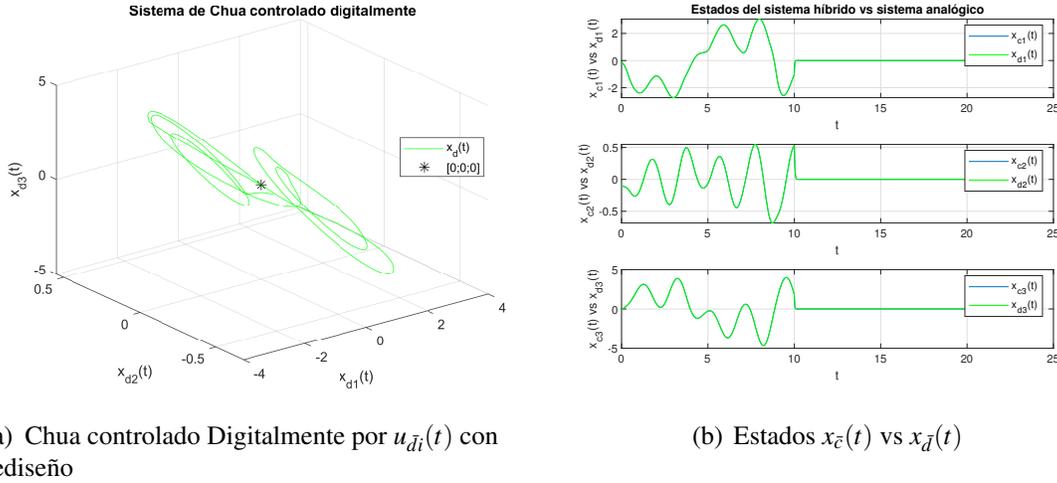


Figura 5.8: Sistema controlado digitalmente con rediseño para regulación.

Es claro que el rediseño de las ganancias analógicas, deriva en un buen desempeño del controlador digital (5.27), con el cual se logra la coincidencia de estados entre el sistema analógico (5.9) y el sistema híbrido (5.28). Graficando la acción de control, obtenemos:

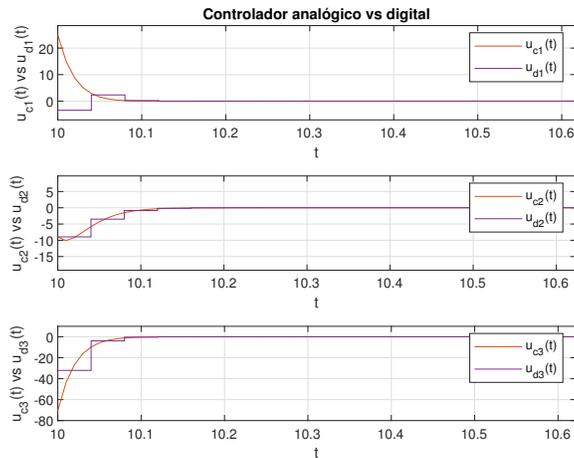


Figura 5.9: Estados de los controladores analógico y digital para regulación.

Podemos observar que el control digital emplea menos magnitud para lograr la regulación, que el control analógico. Si miramos los valores en el instante 0 de la aplicación, es decir, en  $t = 10$ , tenemos:

$ u_c(0) $	$ u_d(0) $	$ u_c(0)/u_d(0) $
$ u_{c1}(0)  = 25.03$	$ u_{d1}(0)  = 3.43$	$ u_{c1}(0)  \approx 7.29 u_{d1}(0) $
$ u_{c2}(0)  = 8.99$	$ u_{d2}(0)  = 8.95$	$ u_{c2}(0)  \approx 1.00 u_{d2}(0) $
$ u_{c3}(0)  = 70.53$	$ u_{d3}(0)  = 32.10$	$ u_{c3}(0)  \approx 2.19 u_{d3}(0) $

Cuadro 5.1: Valores de los controladores analógico y digital para regulación

por lo que problemas asociados a la magnitud de señales, como el de saturación, es altamente evitable para los dispositivos digitales, particularmente, esto se cumple en la presente implementación.

### 5.2.2. Seguimiento

El caso de la sección anterior plantea el problema de estabilización de un sistema analógico a una referencia invariante en el tiempo, particularmente, a un punto de equilibrio  $\bar{x}_k$  del sistema caótico (5.1); esto, a través de un controlador digital. En esta sección buscamos realizar seguimiento de una referencia variante en el tiempo  $\Gamma(t)$ , igualmente con un controlador digital.

Definamos ahora al sistema analógico, controlado digitalmente para seguimiento de los estados de la referencia  $\Gamma(t)$ :

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) + B_i v_i + B_i u_{di}(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.30)$$

donde  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $v_i$  son exactamente las mismas que (5.2). Consideremos entonces al controlador analógico que ha sido muestreado idealmente cada  $T$  instantes, y luego pasado por un retenedor de orden cero  $ZOH$ , es decir, el control digital:

$$u_{di}(t) = -K_{ci} x_d(kT) + E_{ci} \Gamma(kT) - v_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.31)$$

con  $kT < t \leq kT + T$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , donde  $K_{ci}$  y  $E_{ci}$  son las ganancias obtenidas para el controlador analógico (5.17). Aplicando el controlador digital al sistema analógico (5.30), obtenemos el sistema híbrido en lazo cerrado:

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) - B_i K_{ci} x_d(kT) + B_i E_{ci} \Gamma(kT), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.32)$$

donde  $K_{ci}$  y  $E_{ci}$  son las ganancias dadas en (5.20a) y (5.20b) respectivamente.

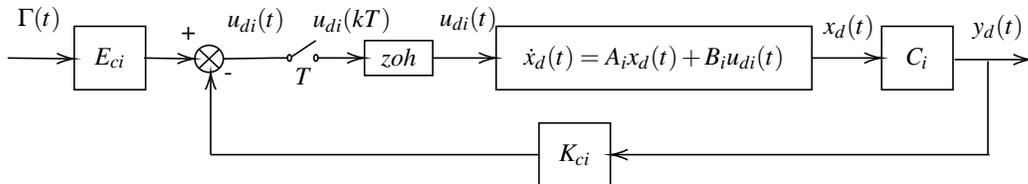
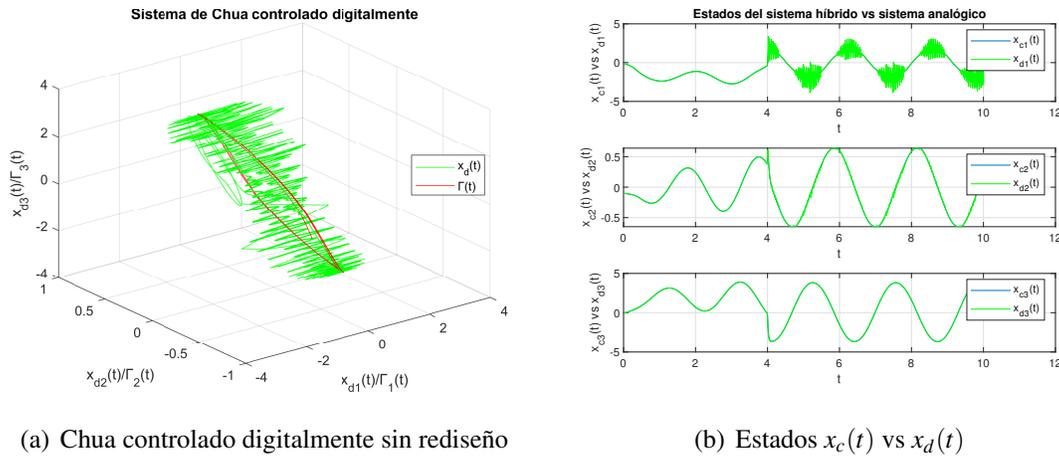


Figura 5.10: Sistema híbrido conmutado para seguimiento.

Simulando el sistema híbrido (5.32) 10 instantes de tiempo, con el control digital (5.31) aplicado en  $t = 4s$ , y con un periodo de muestreo  $T = 0.01s$ , obtenemos:



(a) Chua controlado digitalmente sin rediseño

(b) Estados  $x_c(t)$  vs  $x_d(t)$

Figura 5.11: Sistema controlado digitalmente sin rediseño para seguimiento.

En la Figura 5.11, se puede observar que el controlador digital (5.31) con las ganancias del sistema analógico, no proporciona un buen desempeño. En (b) observamos una comparativa entre los estados del sistema controlado análogamente (5.19), y los estados del sistema controlado digitalmente (5.32). En el estado  $x_{d1}(t)$  se observan oscilaciones pronunciadas debido a las conmutaciones. Para  $x_{d2}(t)$  no se observan estas oscilaciones, pero sí se logran ver algunos rizos. Comparando los estados del sistema híbrido respecto de los estados de la referencia:

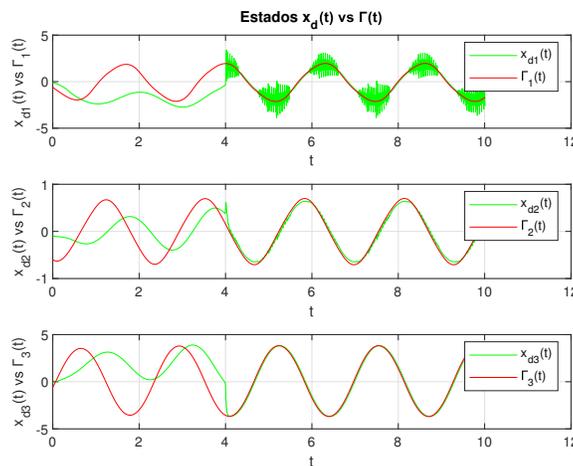


Figura 5.12: Estados del sistema híbrido  $x_d(t)$  vs  $\Gamma(t)$ .

podemos verificar que no se cumple el objetivo de seguimiento. Observando lo anterior, planteamos la necesidad de rediseñar las ganancias del controlador; por lo que definimos el

control digital con nuevas y adecuadas ganancias como:

$$u_{di}(t) = -K_{di}x_d(kT) + E_{di}\Gamma(kT) - v_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.33)$$

Por lo que cerrando el lazo del sistema analógico (5.30) con el nuevo controlador digital (5.33), obtenemos el sistema híbrido:

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t) - B_i K_{di} x_d(kT) + B_i E_{di} \Gamma(kT), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.34)$$

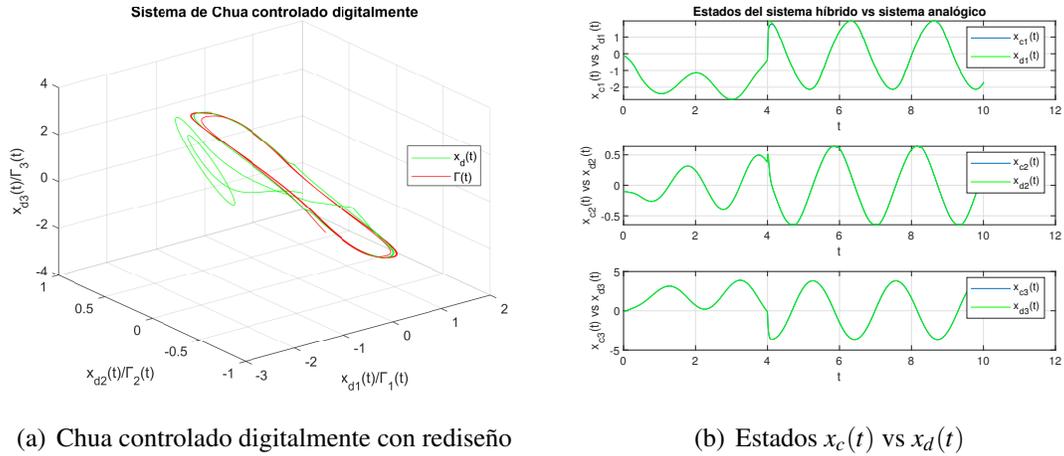
Para obtener las nuevas ganancias de controlador (5.33) para cada  $i$ , es preciso usar el resultado de la sección (4.2.2) en la que resolvió el problema de rediseño para seguimiento de referencia, en sistemas conmutados. Con las matrices  $A_i$ ,  $B_i$  como al inicio del capítulo,  $K_{ci}$  y  $E_{ci}$  como en (5.20), y un periodo de muestreo de  $T = 0.01s$ , resolvemos la ecuación (4.18) para cada  $i$ , obteniendo las ganancias adecuadas por rediseño:

$$\begin{aligned} K_{d1} &= \begin{bmatrix} 15.4524 & 1.5317 & 0.0316 \\ 0.3750 & 36.5189 & -4.1183 \\ -0.0177 & -6.9199 & 35.4645 \end{bmatrix} \\ K_{d2} &= \begin{bmatrix} 38.1021 & 5.3683 & 0.3982 \\ 3.7550 & 37.1118 & -4.0475 \\ 0.3550 & -6.8389 & 35.4774 \end{bmatrix} \\ K_{d3} &= \begin{bmatrix} -15.4524 & -1.5317 & -0.0316 \\ 0.3750 & 36.5189 & -4.1183 \\ -0.0177 & -6.9199 & 35.4645 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.35a)$$

y

$$\begin{aligned} E_{d1} &= \begin{bmatrix} 15.9843 & -0.1329 & 0.0236 \\ -0.5897 & 33.7222 & -5.0985 \\ -0.0286 & 7.1621 & 35.4503 \end{bmatrix} \\ E_{d2} &= \begin{bmatrix} 35.3125 & -4.3844 & 0.3782 \\ 2.3215 & 32.7969 & -5.0297 \\ 0.2461 & 6.9295 & 35.4630 \end{bmatrix} \\ E_{d3} &= \begin{bmatrix} -15.9843 & 0.1329 & -0.0236 \\ -0.5897 & 33.7222 & -5.0985 \\ -0.0286 & 7.1621 & 35.4503 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.35b)$$

Usando las mismas condiciones que en el caso sin rediseño, realizamos las simulaciones con 10 instantes de tiempo, con el control rediseñado aplicado en  $t = 4s$ , esto, para un periodo de muestreo  $T = 0.01s$ :

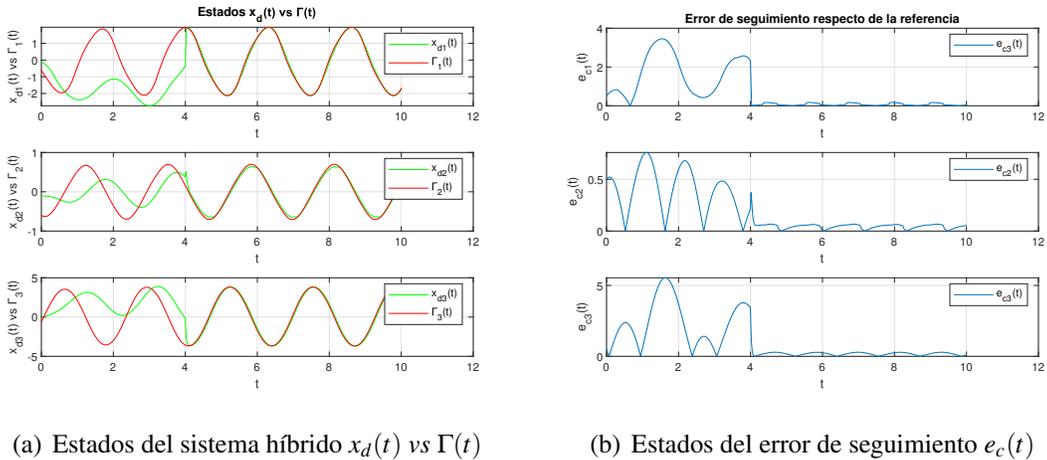


(a) Chua controlado digitalmente con rediseño

(b) Estados  $x_c(t)$  vs  $x_d(t)$

Figura 5.13: Sistema controlado digitalmente con  $T = 0.01s$  para seguimiento.

Aplicando las ganancias obtenidas por rediseño al controlador digital, se logra un mejor desempeño en relación al controlador digital con ganancias sin rediseño, logrando la coincidencia de los estados de los sistemas controlado analógicamente  $x_c(t)$  y  $x_d(t)$ , lo que resulta en un buen seguimiento de la referencia  $\Gamma(t)$  por parte del sistema híbrido (5.34), tal y como se observa en la Figura 5.14. Graficando los estados del sistema híbrido controlado con rediseño  $x_d(t)$  respecto a la referencia  $\Gamma(t)$ , queda:



(a) Estados del sistema híbrido  $x_d(t)$  vs  $\Gamma(t)$

(b) Estados del error de seguimiento  $e_c(t)$

Figura 5.14: Estados del sistema híbrido vs referencia, y error de seguimiento  $T = 0.01s$ .

Donde la cota calculada numéricamente, es:

$$\|e_c(t)\| \leq 3.9256 \quad (5.36)$$

Por otro lado, y aprovechando las ventajas de la simulación, mostramos particular interés en verificar la magnitud de la acción de control analógico en relación a la del controlador digital. Observando las magnitudes de ambos controladores en el primer instante de aplicación, en este caso  $t = 4s$ , obtenemos la siguiente tabla donde  $|\cdot|$  es el valor absoluto de cada componente del vector:

$ u_c(0) $	$ u_d(0) $	$ u_c(0)/u_d(0) $
$ u_{c1}(0)  = 92.19$	$ u_{d1}(0)  = 73.96$	$ u_{c1}(0)  \approx 1.24 u_{d1}(0) $
$ u_{c2}(0)  = 20.87$	$ u_{d2}(0)  = 12.34$	$ u_{c2}(0)  \approx 1.69 u_{d2}(0) $
$ u_{c3}(0)  = 135.97$	$ u_{d3}(0)  = 110.42$	$ u_{c3}(0)  \approx 1.23 u_{d3}(0) $

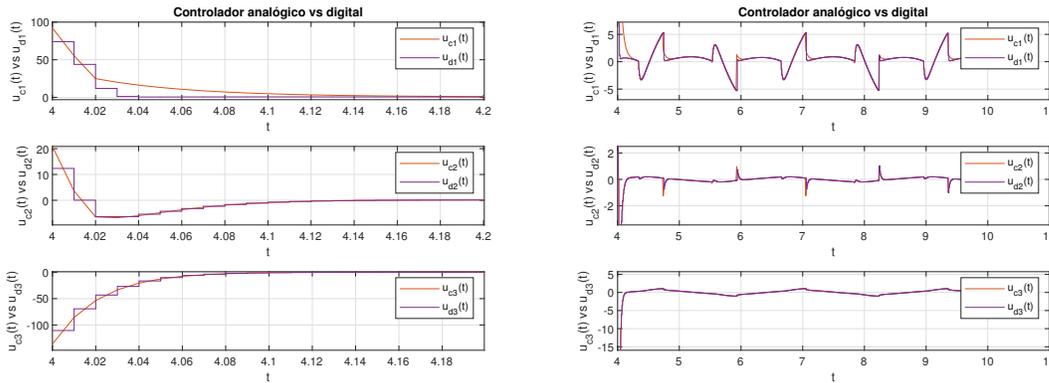
Cuadro 5.2: Valores de los controladores analógico y digital para seguimiento  $T = 0.01s$

En el caso de regulación, los controladores no conmutan entre secciones, debido a que las acciones de control analógico y digital, son lo suficientemente rápidas como para estabilizar al sistema analógico, y ocasionan que los estados del sistema controlado se mantengan en una sola una parte, por lo que la acción de control se mantiene en una parte del sistema conmutado. No obstante, en el caso de seguimiento de referencias, el sistema sí conmuta cuando las acciones de control (analógico y digital) son aplicadas, esto, se debe a la referencia. Por lo anterior, entonces definimos a los controladores que se muestran en la tabla (5.2) y la Figura 5.15 como:

$$u_c(t) = u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = [u_{c1}(t), u_{c2}(t), u_{c3}(t)]^\top$$

$$u_d(t) = u_{d1} + u_{d2} + u_{d3} = [u_{d1}(t), u_{d2}(t), u_{d3}(t)]^\top$$

por lo que en este caso, para efectos de visualización, vemos a  $u_c(t)$  y  $u_d(t)$  como las acciones de control para todo el sistema, por lo que los subíndices 1, 2, 3 en los vectores no representan una parte del sistema conmutado, sino las componentes de los vectores de control. Graficando los controladores:



(a) Primeros instantes del controlador  $u_d(t)$

(b) Controlador hasta  $t = 10s$

Figura 5.15: Estados de los controladores analógico y digital para seguimiento  $T = 0.01s$ .

Como en el caso de regulación, la acción de control analógico es mayor en magnitud que la del controlador digital.

Un periodo de muestreo  $T = 0.01s$  es relativamente bajo. Proponemos un periodo de muestreo 20 veces más grande, es decir  $T = 0.2s$ , para evaluar el comportamiento del sistema bajo

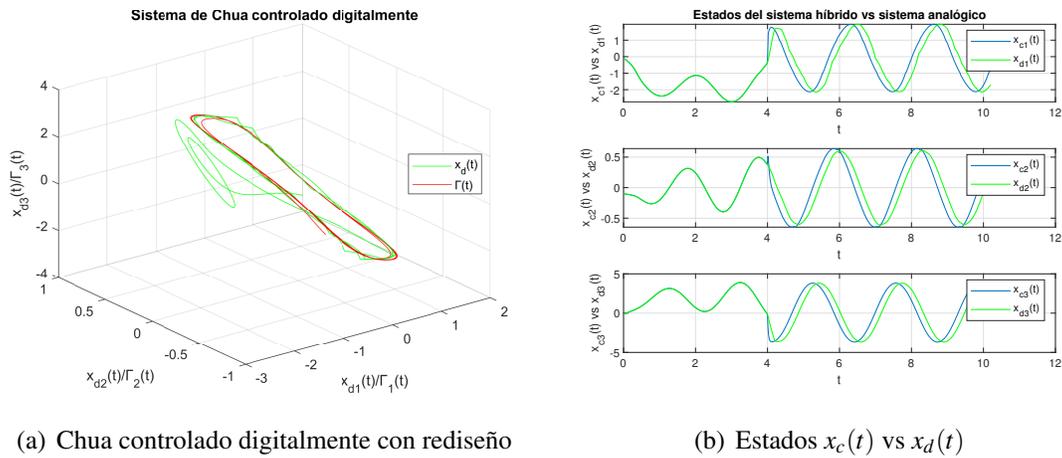
la acción de control. Para lo anterior, obtenemos el rediseño de las ganancias como antes:

$$\begin{aligned}
 K_{d1} &= \begin{bmatrix} 0.6326 & 0.7298 & 0.0282 \\ 0.4306 & 4.4336 & 0.4830 \\ -0.2463 & -7.1902 & 4.7505 \end{bmatrix} \\
 K_{d2} &= \begin{bmatrix} 6.6356 & 5.2788 & 0.1668 \\ 0.5283 & 4.4354 & 0.4825 \\ -0.2476 & -7.1804 & 4.7507 \end{bmatrix} \\
 K_{d3} &= \begin{bmatrix} -0.6326 & -0.7298 & -0.0282 \\ 0.4306 & 4.4336 & 0.4830 \\ -0.2463 & -7.1902 & 4.7505 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.37a}$$

y

$$\begin{aligned}
 E_{d1} &= \begin{bmatrix} 1.1734 & -0.8665 & 0.0272 \\ -0.5641 & 4.8834 & -0.5141 \\ -0.2419 & 6.9051 & 4.7517 \end{bmatrix} \\
 E_{d2} &= \begin{bmatrix} 3.9725 & -4.1107 & 0.1627 \\ -0.5302 & 4.6871 & -0.5147 \\ -0.3347 & 6.6287 & 4.7518 \end{bmatrix} \\
 E_{d3} &= \begin{bmatrix} -1.1734 & 0.8665 & -0.0272 \\ -0.5641 & 4.8834 & -0.5141 \\ -0.2419 & 6.9051 & 4.7517 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.37b}$$

Las Figuras 5.16 y 5.17 son el resultado de las simulaciones para cuando el periodo de muestreo es 20 veces más grande que el caso inicial. Es claro que existe un error más grande entre los estados del sistema híbrido en relación a los estados del sistema controlado de forma analógica. Dicho error se debe a que el control digital recibe nueva información acerca de los estados del sistema y de los estados de la referencia, de manera menos frecuente. En el caso de  $T = 0.01s$  este error es mínimo ya que es una tasa de muestreo relativamente pequeña.



(a) Chua controlado digitalmente con rediseño

(b) Estados  $x_c(t)$  vs  $x_d(t)$

Figura 5.16: Sistema controlado digitalmente con  $T = 0.2s$  para seguimiento.

Los estados del sistema respecto a los estados de la referencia:

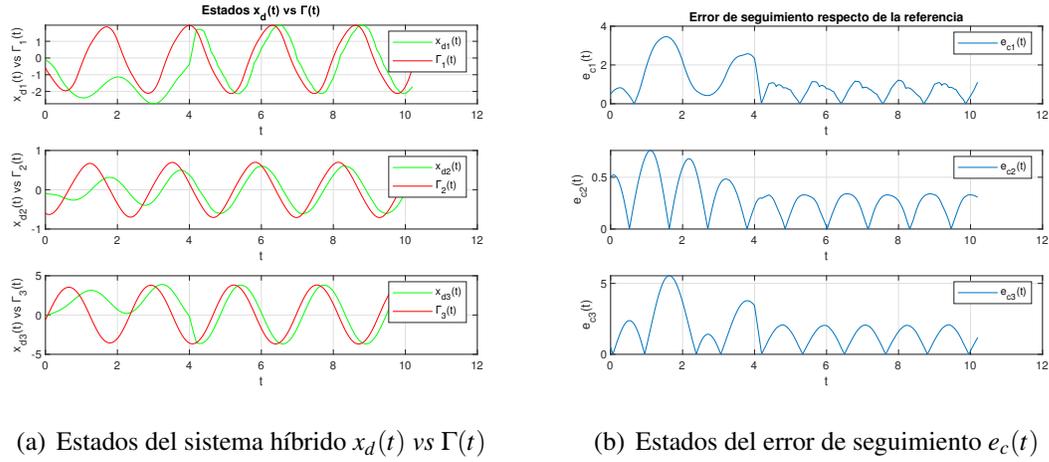


Figura 5.17: Estados del sistema híbrido vs referencia, y error de seguimiento  $T = 0.2s$ .

En (b) se observa el error de seguimiento del sistema híbrido (5.34) cuando las ganancias por rediseño son (5.37) para un periodo de muestreo de  $0.2s$ . A partir de que se aplica el controlador digital en  $t = 4s$ , el error de seguimiento decrece, lo cual indica que el control presenta buen desempeño. Encontrando una cota numéricamente para el error, como en la sección 5.1.2, tenemos:

$$\|e_c(t)\| \leq 4.1366 \quad (5.38)$$

Mientras que para los controladores, tenemos:

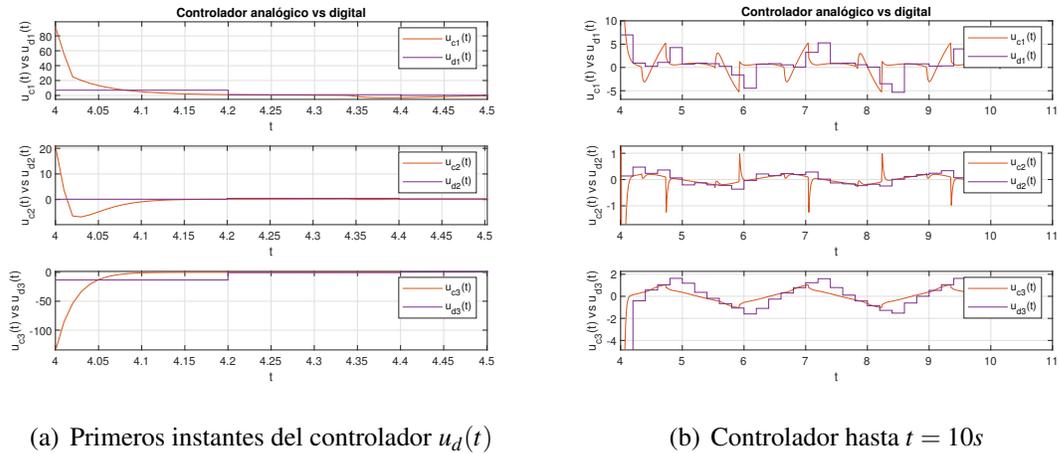


Figura 5.18: Estados de los controladores analógico y digital para seguimiento  $T = 0.2s$ .

Es fácil notar que el valor de la cota del error para este caso (5.38) es mayor que la del caso cuando  $T = 0.01$  (5.36), lo cual resulta lógico. Recordemos que a priori, entre más pequeño es el tamaño del muestreo del controlador digital, más semejante será la acción de

control respecto a la del control analógico, que como establecimos al principio del documento, es el mejor desempeño que el control digital puede lograr. Y la comparativa de valores iniciales en los controladores:

$ u_c(0) $	$ u_d(0) $	$ u_c(0)/u_d(0) $
$ u_{c1}(0)  = 92.19$	$ u_{d1}(0)  = 6.98$	$ u_{c1}(0)  \approx 13.20 u_{d1}(0) $
$ u_{c2}(0)  = 20.87$	$ u_{d2}(0)  = 0.13$	$ u_{c2}(0)  \approx 160.53 u_{d2}(0) $
$ u_{c3}(0)  = 135.97$	$ u_{d3}(0)  = 13.25$	$ u_{c3}(0)  \approx 10.26 u_{d3}(0) $

Cuadro 5.3: Valores de los controladores analógico y digital para seguimiento  $T = 0.2s$

### 5.2.3. Comportamiento entre muestras

En la sección anterior, se determinaron las ganancias para el sistema híbrido (5.34), de tal manera que sus estados coincidan con los estados del sistema controlado de forma analógica (5.19), en cada instante de muestreo  $kT$ . Este rediseño fue concebido sin considerar el comportamiento entre muestras. En la presente, se usarán los resultados de la sección 4.3, donde se derivan las ganancias rediseñadas para el controlador digital (5.33), de forma que el mismo contenga la información del sistema entre muestreos. A continuación se calculan las nuevas ganancias para cuando  $T = 0.01s$  y  $T = 0.2s$ .

Resolviendo las ecuaciones (4.30) y (4.32) para  $i = 1, 2, 3$ , y considerando  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $K_{ci}$  y  $E_{ci}$  como antes en esta sección, obtenemos las ganancias por rediseño que consideran comportamiento intermuestral del sistema híbrido para  $T = 0.01s$ :

$$\begin{aligned}
 K_{d1} &= \begin{bmatrix} 15.5503 & 1.5114 & 0.0377 \\ 0.1939 & 36.5272 & -4.1347 \\ -0.0133 & -6.7143 & 35.4073 \end{bmatrix} \\
 K_{d2} &= \begin{bmatrix} 38.0356 & 5.2247 & 0.4365 \\ 3.7435 & 37.1255 & -4.0646 \\ 0.3964 & -6.6283 & 35.4207 \end{bmatrix} \\
 K_{d3} &= \begin{bmatrix} -15.5503 & -1.5114 & -0.0377 \\ 0.1939 & 36.5272 & -4.1347 \\ -0.0133 & -6.7143 & 35.4073 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.39a}$$

y

$$\begin{aligned}
 E_{d1} &= \begin{bmatrix} 16.0821 & -0.1510 & 0.0296 \\ -0.7706 & 33.7295 & -5.1149 \\ -0.0239 & 7.3469 & 35.3933 \end{bmatrix} \\
 E_{d2} &= \begin{bmatrix} 35.2479 & -4.5074 & 0.4165 \\ 2.3099 & 32.8088 & -5.0469 \\ 0.2851 & 7.1105 & 35.4064 \end{bmatrix} \\
 E_{d3} &= \begin{bmatrix} -16.0821 & 0.1510 & -0.0296 \\ -0.7706 & 33.7295 & -5.1149 \\ -0.0239 & 7.3469 & 35.3933 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.39b}$$

Simulando para 10 segundos, con el controlador aplicado en  $t \geq 0.4s$ :

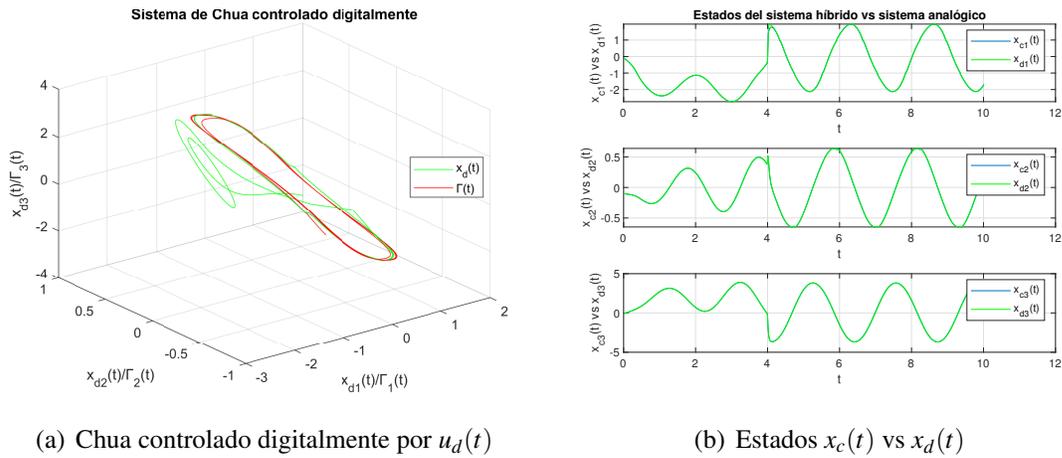


Figura 5.19: Sistema controlado digitalmente con  $T = 0.01s$  para seguimiento (Chebyshev).

En la Figura 5.19, observamos que el comportamiento del sistema con el rediseño basado en cuadraturas de Chebyshev, es básicamente el mismo comportamiento que el sistema controlado con el rediseño sin comportamiento entre muestras mostrado en la Figura 5.13; esto debido a que el tiempo de muestreo es pequeño.

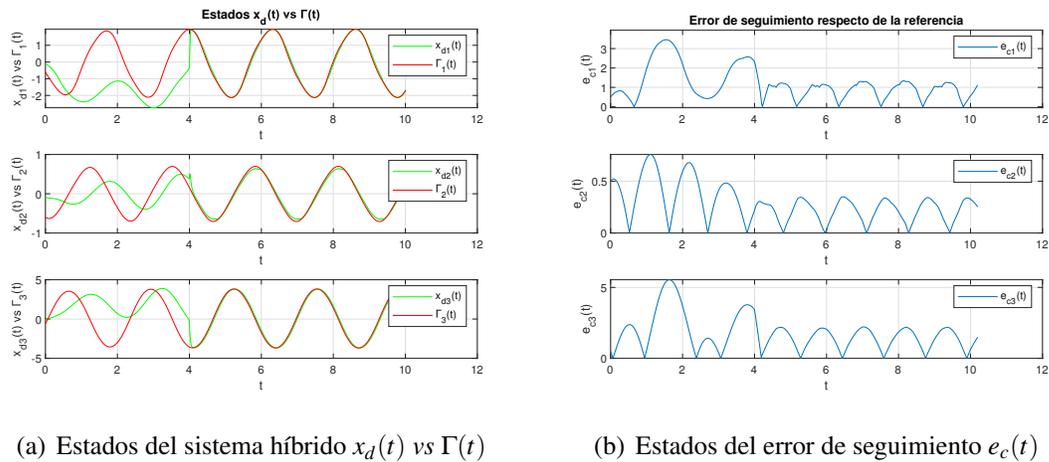


Figura 5.20: Estados del sistema híbrido vs referencia, y error de seguimiento  $T = 0.01s$  (Chebyshev).

donde una cota obtenida numéricamente es:

$$\|e_c(t)\| \leq 3.9662 \quad (5.40)$$

En cuanto a las acciones de control, tenemos:

$ u_c(0) $	$ u_d(0) $	$ u_c(0)/u_d(0) $
$ u_{c1}(0)  = 92.19$	$ u_{d1}(0)  = 73.75$	$ u_{c1}(0)  \approx 1.25 u_{d1}(0) $
$ u_{c2}(0)  = 20.87$	$ u_{d2}(0)  = 12.37$	$ u_{c2}(0)  \approx 1.68 u_{d2}(0) $
$ u_{c3}(0)  = 135.97$	$ u_{d3}(0)  = 110.22$	$ u_{c3}(0)  \approx 1.23 u_{d3}(0) $

Cuadro 5.4: Valores de los controladores analógico y digital para seguimiento  $T = 0.01s$  (Chebyshev)

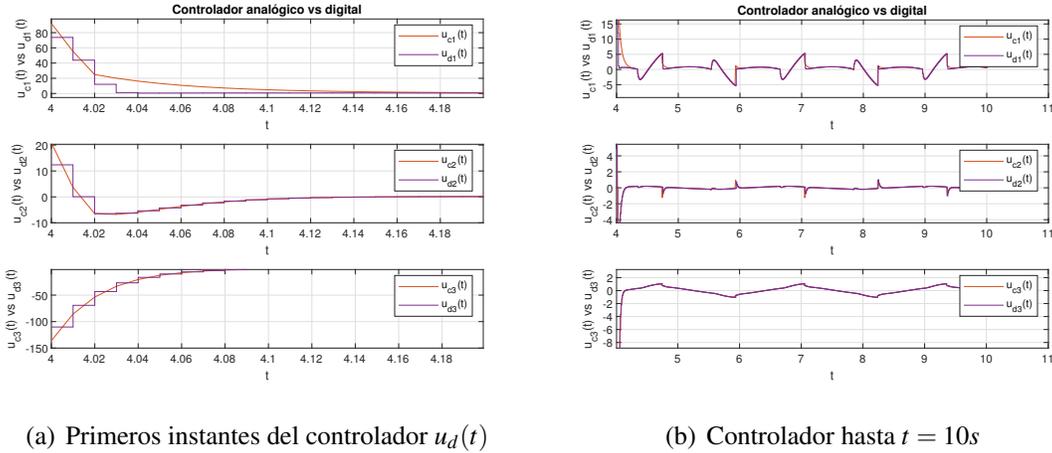


Figura 5.21: Estados de los controladores analógico y digital para seguimiento  $T = 0.01s$ .

Comparando los valores de la Tabla (5.4) con los de la Tabla (5.2) notamos que es prácticamente el mismo conjunto de valores, por lo que inferimos que la acción de control digital con ganancias obtenidas por cuadraturas de Chebyshev, proporciona casi el mismo desempeño sobre el sistema híbrido (5.34), que el controlador digital con ganancias sin comportamiento intermuestro. Lo que explica por qué las dinámicas mostradas en la Figura 5.19 y la Figura 5.13 son tan similares. Lo anterior se debe a que el periodo de muestreo es pequeño. Veremos a continuación, que para periodos de muestreo más grandes, esto no se cumple.

Consideremos ahora un periodo de muestreo de  $T = 0.2s$ . Las ganancias para el controlador digital que consideran comportamiento intermuestro del sistema híbrido, son:

$$\begin{aligned}
 K_{d1} &= \begin{bmatrix} 0.8376 & 0.1777 & 0.0311 \\ 0.0187 & 4.8750 & 0.0911 \\ -0.0036 & -1.5518 & 4.7275 \end{bmatrix} \\
 K_{d2} &= \begin{bmatrix} 5.1927 & 1.0441 & 0.1790 \\ 0.1230 & 4.8897 & 0.0927 \\ 0.1585 & -1.5116 & 4.7362 \end{bmatrix} \\
 K_{d3} &= \begin{bmatrix} -0.8376 & -0.1777 & -0.0311 \\ 0.0187 & 4.8750 & 0.0911 \\ -0.0036 & -1.5518 & 4.7275 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.41a}$$

y

$$\begin{aligned}
 E_{d1} &= \begin{bmatrix} 1.3778 & -1.3626 & 0.0297 \\ -0.9752 & 5.2797 & -0.9053 \\ 0.0055 & 11.9736 & 4.7311 \end{bmatrix} \\
 E_{d2} &= \begin{bmatrix} 2.5825 & -7.7424 & 0.1738 \\ -0.9387 & 5.0828 & -0.9039 \\ 0.0066 & 11.5074 & 4.7395 \end{bmatrix} \\
 E_{d3} &= \begin{bmatrix} -1.3778 & 1.3626 & -0.0297 \\ -0.9752 & 5.2797 & -0.9053 \\ 0.0055 & 11.9736 & 4.7311 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.41b}$$

Simulando para 10 segundos y el controlador digital aplicado en  $t \geq 0.4s$ , queda:

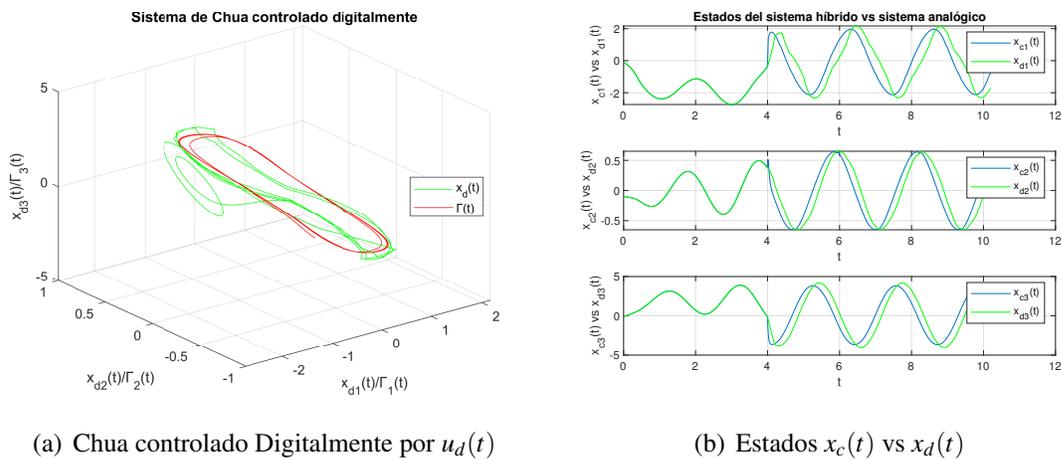


Figura 5.22: Sistema controlado digitalmente con  $T = 0.2s$  para seguimiento (Chebyshev).

Graficando los estados del sistema híbrido respecto de los estados de la referencia:

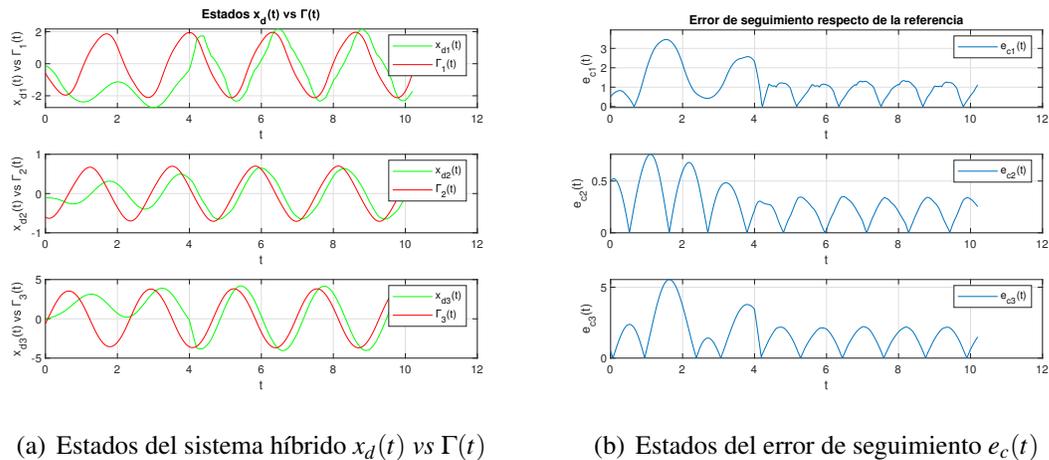


Figura 5.23: Estados del sistema híbrido vs referencia, y error de seguimiento  $T = 0.2s$  (Chebyshev).

Con una cota de error:

$$\|e_c(t)\| \leq 4.1412 \quad (5.42)$$

Con  $T = 0.2s$  el desempeño del sistema se deteriora. Esto va en relación a lo mencionado anteriormente, para periodos de muestreo muy grandes, el controlador pierde información de los estados del sistema y de los estados de la referencia, sin embargo, al igual que el caso de la Figura 5.16, el sistema es estable. La cota de error para este caso (5.42), no difiere mucho la cota (5.38).

Para los controladores:

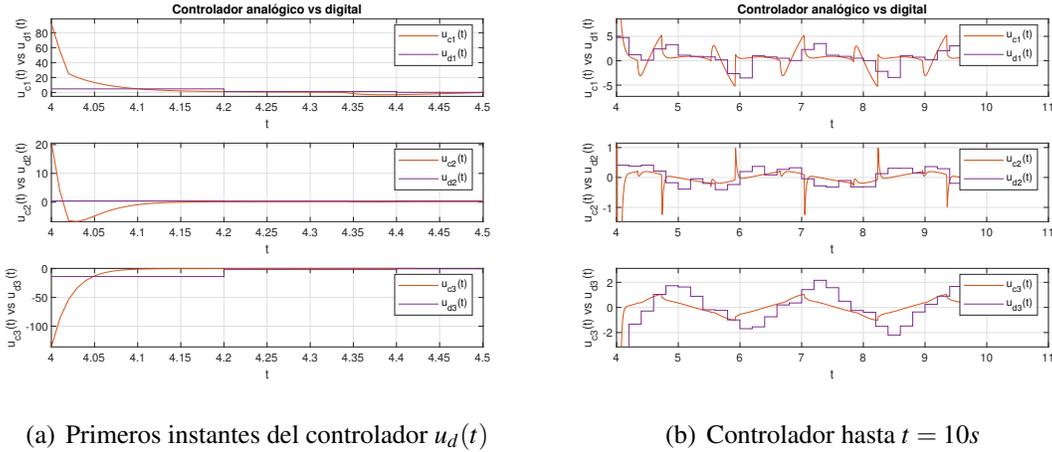


Figura 5.24: Estados de los controladores analógico y digital para seguimiento.  $T = 0.2s$

$ u_c(0) $	$ u_d(0) $	$ u_c(0)/u_d(0) $
$ u_{c1}(0)  = 92.19$	$ u_{d1}(0)  = 4.76$	$ u_{c1}(0)  \approx 19.36 u_{d1}(0) $
$ u_{c2}(0)  = 20.87$	$ u_{d2}(0)  = 0.41$	$ u_{c2}(0)  \approx 50.90 u_{d2}(0) $
$ u_{c3}(0)  = 135.97$	$ u_{d3}(0)  = 13.76$	$ u_{c3}(0)  \approx 9.88 u_{d3}(0) $

Cuadro 5.5: Valores de los controladores analógico y digital para seguimiento  $T = 0.2s$  (Chebyshev)

Habiendo realizado las simulaciones, podemos afirmar que el desempeño logrado por el controlador digital, cuyas ganancias fueron obtenidas empleando cuadraturas de Chebyshev, proporciona buen desempeño. No obstante, vimos que las cotas de error del rediseño con cuadraturas de Chebyshev, son más altas que las cotas del rediseño sin comportamiento intermuestro, lo que nos lleva a cuestionarnos si realmente obtener el comportamiento entre muestras del sistema, es una ventaja. Por otro lado, y en relación a las acciones de control, se pudo verificar que en magnitud, en el instante inicial de aplicación del controlador, el analógico tuvo valores más altos que el digital.

De esto, se presume que tiene más importancia el tamaño del periodo de muestreo del controlador, que la información en sí del sistema, esto se deja para un plan a futuro.

Mostramos que los controladores digitales funciona para periodos de muestreo largos, lo que resulta en una forma diferente de obtener nuevas ganancias en base a las del control analógico.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En esta investigación se mostró que utilizando el método de discretización directa mostrado en [Lewis, 1992], es posible realizar de manera exitosa el rediseño digital de un controlador analógico bien diseñado, particularmente, en este caso, un tipo de control subóptimo por retroalimentación de estados, para los casos de regulación a punto de equilibrio y seguimiento de los estados de referencias variantes en el tiempo, para sistemas lineales conmutados continuamente conectados, cuyo número de entradas es igual al número de estados, y número de salidas. Aunque se presume ideal obtener un controlador óptimo analógico, se optó por usar un control subóptimo, debido a la complejidad que conlleva resolver el LQR y el LQT como un problema de horizonte de tiempo finito; no obstante, consideramos adecuado el planteamiento de la investigación utilizando ganancias invariantes en el tiempo para el controlador analógico. Con estas ganancias analógicas subóptimas, se analizó la estabilidad del sistema analógico controlado analógicamente. Usando algunos resultados obtenidos en la literatura, se estableció que para el caso de regulación, el sistema conmutado analógico de error, será asintóticamente estable al origen, si se verifica la existencia de una función común de Lyapunov para todas las partes del sistema; con esto se garantiza estabilización al punto de equilibrio deseado del sistema analógico. Por otro lado, para el caso de seguimiento analógico, se mostró que el sistema conmutado de error presenta BIBO estabilidad si se verifica la existencia de una función común de Lyapunov para todas las partes, cuando no existe entrada, y además de esto, cuando la referencia del sistema está acotada para todo tiempo; de cumplirse estas dos condiciones, el sistema controlado analógicamente para seguimiento, será BIBO estable.

Planteando la necesidad de emplear dispositivos digitales, se realizó una primera propuesta de rediseño que no considera el comportamiento del sistema entre instantes de muestreo; la única restricción para lograr este rediseño, es la existencia de la inversa de las matrices  $A$  y  $A_c$  para todas las partes del sistema analógico conmutado. Dado que este primer rediseño no considera comportamiento intermuestro, se sugirió emplear cuadraturas de Chebyshev para aproximar la integral de convolución resultante en la discretización del modelo en tiempo continuo; lo que dio paso a una manera diferente de realizar el rediseño digital. Este método se derivó para el caso de seguimiento, ya que en el caso de regulación no existe una integral de convolución.

En el ejemplo se implementó un sistema caótico, particularmente el generado por el bien conocido circuito de Chua. El circuito de Chua proporciona una dinámica que puede ser descrita como un sistema lineal a trozos (conmutado). Se aplicaron el LQR y el LQT subóptimos de forma analógica, obteniendo buenos resultados en la minimización del índice cuadrático de desempeño (para ambos casos) para cada parte del sistema conmutado. Luego, aplicando rediseño digital, y rediseño digital con comportamiento entre muestras, se logró el objetivo de control con buen desempeño. Se realizaron comparaciones en el comportamiento del sistema controlado digitalmente, teniendo en cuenta el tamaño del periodo de muestreo, asegurando que incluso para tiempos relativamente grandes de muestreo, el sistema cumple el objetivo. En cuanto al tipo de rediseño, aunque tener la información intermuestral del sistema parezca ser una ventaja respecto a no considerarla en el control, las simulaciones sugieren que, en general, esto no es así; no obstante, al obtener un desempeño similar al control sin cuadraturas de Chebyshev, el método para obtener controladores digitales que contengan esta información, resulta como una buena alternativa para realizar el rediseño digital.

El planteamiento mostrado está formulado, en general, para sistemas lineales, lineales a trozos (con los pedazos continuamente conectados en el tiempo) y sistemas no lineales con aproximaciones lineales en forma de realización, por lo que la aplicación de este trabajo es extensa. Además de lo anterior, por simplicidad, en esta investigación se tomaron a la matrices de salida del sistema conmutado de referencia, y del sistema analógico, como la identidad; sin embargo, es posible extender el análisis al caso general cuando  $C$ ,  $C_{\Gamma} \neq I_{n \times n}$ , para lo cual, resultan restricciones un poco diferentes.

## 6.1. Trabajo a Futuro

1. Debido a que los controladores analógicos propuestos para el control del sistema analógico conmutado, son de naturaleza subóptima (y las ganancias son estáticas), se propone aplicar control óptimo con ganancias variables en el tiempo, y verificar el desempeño en relación a las ganancias estáticas.
2. Al considerar el comportamiento intermuestral del sistema, es natural pensar que el desempeño del controlador debe ser mejor que cuando no tiene esta información. Debido a que vimos en las simulaciones que para este caso, esto no se cumple, podemos concluir que esto no es cierto en general. Como trabajo a futuro, queda analizar si es más importante el periodo de muestreo del controlador, o la cantidad de información que recibe el controlador sobre el sistema.
3. En relación a los controladores, vimos en el Capítulo (5), que en la mayoría de casos, la acción de control analógica, superó en magnitud a la del control digital, en el primer instante de aplicación. Debido a esto, se plantea verificar qué tipo de control conviene emplear en términos energéticos, para sistemas conmutados.

# Bibliografía

- [Agrachev et al., 2010] Agrachev, A. A., Baryshnikov, Y., and Liberzon, D. (2010). Towards robust lie-algebraic stability conditions for switched linear systems.
- [Amini et al., 2021] Amini, A., Asif, A., Mohammadi, A., and Azarbahram, A. (2021). Sampled-data dynamic event-triggering control for networked systems subject to dos attacks. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 8.
- [Andrey V. Savkin, 2002] Andrey V. Savkin, R. J. E. (2002). *Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1 edition.
- [Araghi et al., 2013] Araghi, L. F., Suratgar, A. A., and Feizi, E. (2013). Stability of a class of switched linear systems with infinite number of subsystems. *Control Engineering and Applied Informatics*, 15.
- [Barbieri and Alba-Flores, 1998] Barbieri, E. and Alba-Flores, R. (1998). New look at the  $\infty$ -horizon linear-quadratic tracking problem. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 4:4444–4449.
- [Canelon et al., 2005] Canelon, J. I., Shieh, L. S., Guo, S. M., and Malki, H. A. (2005). Neural network-based digital redesign approach for control of unknown continuous-time chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 15.
- [Chen and Sun, 2017] Chen, C. and Sun, Z. (2017). Bibo stability of switched linear systems via arbitrary switching. *IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA*.
- [Chen, 1999] Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, inc., New York, NY, 3 edition.
- [Chen and Dong, 1993a] Chen, G. and Dong, X. (1993a). Controlling chua’s circuit. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 3:139–149.
- [Chen and Dong, 1993b] Chen, G. and Dong, X. (1993b). On feedback control of chaotic continuous-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40.
- [Chen and Dong, 1993c] Chen, G. and Dong, X. (1993c). Ordering chaos of chua’s circuit - a feedback control approach. volume 4, pages 2604–2607.

- [Chen and Dong, 2002] Chen, G. and Dong, X. (2002). Ordering chaos of chua's circuit—a feedback control approach. pages 2604–2607. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).
- [Chua, 1992] Chua, L. O. (1992). Genesis of chua's circuit. *AEU. Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, 46:250–257.
- [Cui et al., 2019] Cui, Y., Miao, Q., Zhang, W., and Wang, L. (2019). Sampled-based consensus for nonlinear multi-agent systems with average graph. *Chaos*, 29.
- [Dedieu and Ogorzalek, 1994] Dedieu, H. and Ogorzalek, M. (1994). Controlling chaos in chua's circuit via sampled inputs. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 04:447–455.
- [Ebrahimzadeh et al., 2017] Ebrahimzadeh, F., Tsai, J. S. H., Liao, Y. T., Chung, M. C., Guo, S. M., Shieh, L. S., and Wang, L. (2017). A generalised optimal linear quadratic tracker with universal applications – part 1: continuous-time systems. *International Journal of Systems Science*, 48.
- [Fadali and Visioli, 2013] Fadali, M. S. and Visioli, A. (2013). *Digital control engineering: Analysis and design*. Academic Press, Waltham, MA, 2 edition.
- [Guo et al., 2000a] Guo, S. M., Shieh, L. S., Chen, G., and Ching-Fang, L. (2000a). Effective chaotic orbit tracker: a prediction-based digital redesign approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47:1557–1570.
- [Guo et al., 2000b] Guo, S. M., Shieh, L. S., Chen, G., and Ortega, M. (2000b). Ordering chaos in chua's circuit: A sampled-data feedback and digital redesign approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 10:2221–2231.
- [Hua et al., 2015] Hua, C., Ge, C., and Guan, X. (2015). Synchronization of chaotic lur'e systems with time delays using sampled-data control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 26.
- [Jianxiong et al., 1996] Jianxiong, X. U., Chen, G., and Shieh, L. S. (1996). Digital redesign for controlling the chaotic chua's circuit. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32:1488–1499.
- [Keller and Anderson, 1992] Keller, J. P. and Anderson, B. D. (1992). A new approach to the discretization of continuous-time controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37.
- [Kennedy and Evans, 1990] Kennedy, R. A. and Evans, R. J. (1990). Digital redesign of a continuous controller based on closed loop performance. volume 3.
- [Klamka et al., 2013] Klamka, J., Czornik, A., and Niezabitowski, M. (2013). Stability and controllability of switched systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 61.

- [Kuo, 1980] Kuo, B. C. (1980). *Digital Control Systems*. Holt, Rinehart and Winston, New York, NY, 1 edition.
- [Lewis, 1992] Lewis, F. L. (1992). *Applied Optimal Control and Estimation: Digital Design and Implementation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [Li et al., 2003] Li, J., Tsai, J. S. H., and Shieh, L. S. (2003). Digital redesign of continuous-time suboptimal tracker for two-dimensional systems. *Asian Journal of Control*, 5:78–87.
- [Liberzon, 2003] Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Springer Science+Business Media, Urbana, IL.
- [Liberzon and Morse, 1999] Liberzon, D. and Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, 19:59–70.
- [Lu et al., 2018] Lu, R., Shi, P., Su, H., Wu, Z. G., and Lu, J. (2018). Synchronization of general chaotic neural networks with nonuniform sampling and packet missing: A switched system approach. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 29.
- [Matsumoto, 1986] Matsumoto, T. (1986). The double scroll family. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 33.
- [Narendra and Balakrishnan, 1994] Narendra, K. S. and Balakrishnan, J. (1994). A common lyapunov function for stable lti systems with commuting amtrices.
- [Orlov, 2009] Orlov, Y. (2009). *Discontinuous systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*.
- [Rafee et al., 1997] Rafee, N., Chen, T., and Malik, O. P. (1997). A technique for optimal digital redesign of analog controllers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 5.
- [Shieh et al., 1980] Shieh, L. S., Wang, H., and Yates, R. E. (1980). Discrete-continuous model conversion. *Topics in Catalysis*, 4:449–455.
- [Shieh and Wang, 1996] Shieh, L. S. and Wang, W. M. (1996). Design of pam and pwm controllers for sampled-data interval systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 118.
- [Shieh et al., 1998] Shieh, L. S., Wang, W. M., and Panicker, M. K. A. (1998). Design of pam and pwm digital controllers for cascaded analog systems. *ISA Transactions*, 37.
- [Shieh et al., 1979] Shieh, L. S., Yates, R. E., Leonard, J. P., and Navarro, J. M. (1979). A geometric series approach to modelling discrete-time state equations from continuous-time state equations. *International Journal of Systems Science*, 10:1415–1426.
- [Shieh et al., 1991] Shieh, L. S., Zhang, J. L., and Coleman, N. P. (1991). Optimal digital redesign of continuous-time controllers. *Computers and Mathematics with Applications*, 22:25–35.

- [Shieh et al., 1989] Shieh, L.-S., Zhao, X.-M., and Zhang, J.-L. (1989). Locally optimal-digital redesign of continuous-time systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 36:511–515.
- [Shieh et al., 1996] Shieh, L. S., Zou, X., and Coleman, N. P. (1996). Digital interval modeling and hybrid control of uncertain systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 43.
- [Sun et al., 2019] Sun, J., Yang, J., Li, S., and Zheng, W. X. (2019). Sampled-data-based event-triggered active disturbance rejection control for disturbed systems in networked environment. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 49.
- [Wu et al., 2019] Wu, G., Sun, J., and Chen, J. (2019). Optimal linear quadratic regulator of switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64.
- [Wu, 1987] Wu, S. (1987). Chua’s circuit family. *Proceedings of the IEEE*, 75:1022–1032.
- [Yang and Chua, 1998] Yang, T. and Chua, L. O. (1998). Control of chaos using sampled-data feedback control. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 8.
- [Yuan et al., 2018] Yuan, M., Wang, W., Luo, X., Ge, C., Li, L., Kurths, J., and Zhao, W. (2018). Synchronization of a class of memristive stochastic bidirectional associative memory neural networks with mixed time-varying delays via sampled-data control. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- [Zhang et al., 2009] Zhang, G., Chen, X., and Chen, T. (2009). Digital redesign via the generalised bilinear transformation. *International Journal of Control*, 82:741–754.