

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Diseño de ganancias de un controlador homogéneo con
realimentación por salida**

Tesis que presenta

Griselda Juárez Guevara

Para obtener el grado de

Maestra en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., Mes de Año



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Diseño de ganancias de un controlador homogéneo con realimentación por salida** presentada para obtener el Grado de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Griselda Juárez Guevara** y aprobada el **dd de mm de aaaa** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez
(Director de la tesis)

Dr. Arturo Zavala Río
(Asesor de la tesis)

Dr. Adrián René Ramírez López
(Asesor de la tesis)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez.

Durante la realización del trabajo la autora recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología No. 1079949 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

(Página en Blanco que se va a utilizar para colocar la copia del acta de examen.)

Agradecimientos

Mi profundo agradecimiento a mi familia y al M.C Emmanuel Rojas Sánchez por su apoyo incondicional.

De igual manera mis agradecimientos al Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez por ser la guía para realizar dicha investigación, por compartir sus conocimientos, por su paciencia y apoyo.

Agradezco también a mi jurado, por sus cuidadosas lecturas de la tesis, por sus valiosos comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo de tesis.

Finalmente, agradezco el apoyo brindado por el IPICYT y el CONACYT para el desarrollo de la presente tesis.

Resumen

En este trabajo se presenta un criterio de diseño de ganancias de un controlador homogéneo para un sistema de segundo orden, presentado en dos casos, retroalimentación de estados para el caso nominal y retroalimentación de salida para el caso perturbado. Para el caso no perturbado, el controlador homogéneo en lazo cerrado con el sistema estabiliza el origen en tiempo finito y el criterio de diseño de ganancias desarrollado permite garantizar la condición de oscilación o no oscilación de las trayectorias del sistema. El criterio está basado en teoría similar a la de los sistemas lineales, particularmente de sistemas de segundo orden, donde existe una relación entre las ganancias del controlador, llamada discriminante. En el caso perturbado, básicamente se inserta el controlador homogéneo dentro de un esquema de control homogéneo no lineal por retroalimentación de salida que utiliza un observador de orden extendido con un estado adicional para identificar las perturbaciones y cancelarlas a través del control, este observador estima los estados del sistema y la perturbación en tiempo finito. Al usar este esquema con el controlador homogéneo se demuestra que el sistema de control perturbado recupera en tiempo finito el mismo tipo de comportamiento que se establece en el caso de control no perturbado.

Abstract

This work presents a gain design criterion of a homogeneous controller for a second-order system, which is presented in two cases: state feedback for the nominal case, and output-feedback for the disturbed case. For the undisturbed case, the homogeneous controller in closed-loop with the system stabilizes the origin in finite time. For such a case, we develop a gain design criterion, which allows us to ensure an oscillatory or non-oscillatory convergence of the system's trajectories. The criterion is based on a similar theory to that for the linear systems, which uses a relation between the gains of the system known as discriminant. In the disturbed case the homogeneous controller is included in an output-feedback control scheme that uses an extended order sliding mode observer whose additional state is used to identify the disturbance and cancel it out through the control signal, this observer estimates the states of the system and the disturbance in finite time. So, by using this scheme with the homogeneous controller it is proven that it is recovered in finite time the type of convergence behavior designed for the undisturbed case.

Contenido

1	Introducción	1
2	Preliminares	4
2.1	Homogeneidad ponderada	4
2.2	Funciones de Lyapunov homogéneas	5
2.3	Ejemplos de sistemas homogéneos	7
2.4	Criterio de diseño de ganancias para sistemas lineales	11
3	Esquema de control homogéneo por retroalimentación de la salida	14
3.1	Esquema por retroalimentación de salida	14
3.2	Planteamiento del problema de esta tesis	19
4	Análisis de estabilidad y diseño de ganancias para un sistema de primer orden	20
4.1	Sistema de control nominal	20
4.2	Análisis de estabilidad	21
4.3	Análisis del comportamiento transitorio del sistema	21
4.4	Sistema de control perturbado	22
5	Análisis de estabilidad y diseño de ganancias para un sistema de segundo orden	27
5.1	Sistema de control nominal	27
5.2	Análisis de estabilidad	27
5.3	Criterio de diseño de las ganancias	28
5.3.1	Superficies positivamente invariantes	29
5.3.2	Tipos de comportamiento transitorio	35
5.3.3	Escalamiento de ganancias	37
5.4	Sistema de control perturbado	41
6	Conclusiones y trabajo a futuro	46
	Bibliografía	47

Notación

- \mathbb{R} Conjunto de los números reales
- \mathbb{R}^n Espacio cartesiano n-dimensional
- \mathbb{N} Conjunto de los números naturales
- $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
- C^p Conjunto de funciones p veces continuamente diferenciables.
- $[\cdot]^p = \text{sign}(\cdot)|\cdot|^p$, donde sign , es la función signo. Por ejemplo, $[x]^0 = \text{sign}(x)$, $[x]^1 = x$, y $[x]^2 = x^2 \text{sign}(x)$.

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas homogéneos son una clase amplia de sistemas no lineales que contienen subclases interesantes para la ingeniería de control automático, por ejemplo, los sistemas lineales, los sistemas polinómicos homogéneos, así como diversos algoritmos de control basados en modos deslizantes.

Cabe mencionar que existen en la literatura varios resultados acerca del diseño de controladores y funciones de Lyapunov para sistemas homogéneos [6], [20], [24], [28], [11], [21], donde se exhiben buenas características para el diseño y análisis de los algoritmos derivadas de la homogeneidad.

Algunas de las propiedades más interesantes de los sistemas homogéneos son las que se mencionan a continuación:

- si un sistema homogéneo tiene en el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable esto implica que el origen es globalmente asintóticamente estable;
- el tipo de convergencia al origen está asociado con el grado de homogeneidad $\nu \in \mathbb{R}$, a decir, si $\nu > 0$ entonces el origen es racionalmente estable, si $\nu = 0$ entonces el origen es r -exponencialmente estable, y si $\nu < 0$ entonces el origen es estable en tiempo finito [5], [1].

Otra característica importante de estos sistemas es que se pueden establecer propiedades de robustez en función del grado de homogeneidad, por ejemplo, cuando el origen del sistema es asintóticamente estable y el grado de homogeneidad es negativo esto permite garantizar Estabilidad Entrada-Estados (ISS, por sus siglas en inglés) [4].

Otra propiedad relevante de los sistemas homogéneos es la existencia de funciones de Lyapunov homogéneas que pueden ayudar a simplificar enormemente el análisis de estabilidad. Como ejemplo, se puede mencionar el trabajo en [9] donde se diseña una ley de control homogénea que estabiliza al origen de una cadena de integradores de orden arbitrario, lo cual se demuestra a través de funciones de Lyapunov homogéneas.

Una de las propiedades más importantes en los sistemas de control automático es la robustez. Por ejemplo, uno de los objetivos del control automático es dotar al sistema de la capacidad de reducir los efectos de las perturbaciones. En la teoría de los sistemas de control, existen varias técnicas para mejorar las propiedades de robustez de una dinámica controlada, por ejemplo, las técnicas de control H_∞ [33], los métodos de rechazo activo de perturbaciones [15], el control por modos deslizantes [31], y el método de rediseño de Lyapunov [16].

El control por modos deslizantes [31],[17] es efectivo para tratar el problema de control en presencia de perturbaciones, sin embargo, una desventaja en la implementación de estos controladores es que cuando la señal de control es discontinua se produce el efecto llamado *chattering*, no obstante, este problema se modera cuando en el algoritmo por modos deslizantes la señal de control no es discontinua [30].

Dentro del marco de control por modos deslizantes, debido a las buenas características que presentan los sistemas homogéneos, se ha buscado diseñar estos algoritmos con base en la homogeneidad. Por ejemplo, en [20] se presenta un diseño homogéneo donde se demuestra que las propiedades de homogeneidad producen características visiblemente importantes para una nueva familia de controladores por modos deslizantes de alto orden, aportando las características de robustez, combinadas con las ventajas que ofrece la homogeneidad.

Otra técnica de control robusto, relevante para el presente trabajo de tesis, es la de rechazo activo de perturbaciones. Dentro de esta técnica se encuentra el método conocido como Control Basado en Observador de la Perturbación (DOBC, por sus siglas en inglés) [8] que consiste en estimar la perturbación y compensarla a través del control. Por ejemplo, en [13] se presenta un esquema DOBC lineal que emplea un observador de alta ganancia de orden extendido, otro ejemplo de esta técnica se presenta en [27], en donde se propone una idea más elaborada que consiste en un esquema de control no lineal homogéneo por salida (que utiliza un observador de orden extendido basado en el diferenciador por modos deslizantes exacto y robusto[19]) para una clase de sistemas no lineales. Es importante mencionar que en [13] el control no es capaz de estimar las perturbaciones exactamente, sin embargo, el esquema propuesto en [27] estima exactamente y en tiempo finito los estados del sistema y las perturbaciones. Dicho esquema permite que la parte estática del controlador se pueda elegir libremente de entre una clase de controladores homogéneos, cuyo único requisito es que, en el caso nominal con realimentación de estados, el origen del sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable. Así, este esquema por retroalimentación de salida garantiza estabilidad asintótica del origen, y las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito a pesar de las perturbaciones.

Por otro lado, otro de los aspectos más importantes para diseñar adecuadamente las ganancias de un controlador es el desempeño del sistema. Por ejemplo, hablando específicamente de los sistemas lineales de segundo orden, un criterio importante en el ajuste de ganancias para lograr un desempeño deseado es el tipo de comportamiento transitorio del sistema: subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado. Para ese caso, tal comportamiento se puede especificar fácilmente. Desafortunadamente, para los sistemas homogéneos no lineales, existe poca bibliografía en la que presente algún criterio de ganancias con el cual se garantice un comportamiento transitorio del sistema. Ahora, obtener algún criterio de este tipo se complica más cuando se tiene que diseñar el controlador con información limitada del sistema (por ejemplo, cuando se requiere hacer control por retroalimentación de salida), y más aún cuando el sistema se enfrenta a perturbaciones.

Por lo mencionado anteriormente en el presente trabajo se considera el esquema propuesto en [27], la idea que se presenta es utilizar dicho esquema que permita lidiar con la perturbación, permitiendo concentrarse en el diseño del controlador homogéneo para el caso nominal.

El objetivo general de este trabajo es presentar un método sistemático de diseño de ganancias el cual permita determinar el comportamiento transitorio del sistema para un integrador simple y un doble integrador tanto en el caso nominal como en el perturbado. Las contribuciones

de esta tesis son las siguientes.

- Se desarrolla un método, que, en el caso nominal presenta la manera de diseñar las ganancias que garanticen la condición de oscilación o no oscilación de las trayectorias del sistema.
- Además se demuestra que, utilizando el esquema de control por retroalimentación de salida, el tipo de comportamiento del diseño nominal es recuperado en tiempo finito para el caso de control del sistema perturbado.

Organización de la tesis

El contenido de este trabajo se organiza como sigue. En el Capítulo 2 se presentan algunas definiciones y resultados requeridos para el desarrollo de los capítulos posteriores. En el Capítulo 3 se describe y explica el esquema de control por retroalimentación de salida que se considera, de igual manera, se describe el planteamiento del problema de esta tesis. En los Capítulos 4 y 5 se encuentran las contribuciones de esta tesis, a decir, se describen las metodologías utilizadas para el diseño de ganancias para un sistema de primer y segundo orden respectivamente. En estos capítulos también se presentan los resultados en simulación para verificar el funcionamiento del método propuesto. Por último, en el Capítulo 6 se establecen las conclusiones del presente trabajo y posibles desarrollos futuros.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se describen la teoría y los resultados que son necesarios para el desarrollo del presente trabajo. La primera sección presenta la definición de homogeneidad ponderada, en la siguiente sección se mencionan definiciones y resultados relevantes con respecto a estabilidad, convergencia y existencia de funciones de Lyapunov homogéneas en sistemas homogéneos, enseguida se presentan ejemplos alusivos a la teoría revisada de estos sistemas. Finalmente se presenta el criterio de diseño de ganancias de un sistema lineal de segundo orden, mostrando la relación que existe entre el tipo de respuesta transitoria y la existencia de conjuntos invariantes del sistema.

2.1 Homogeneidad ponderada

La homogeneidad es una propiedad de escalamiento de funciones y campos vectoriales. Básicamente se puede describir intuitivamente como la equivalencia entre multiplicar el argumento de la función por un factor y multiplicar la imagen de la función original por ese factor. Por ejemplo, podemos mencionar que los sistemas lineales son una clase de sistemas homogéneos cuyo grado de homogeneidad es $v = 0$.

A continuación se define formalmente la homogeneidad ponderada siguiendo el trabajo de [1].

Definición 1. Sea un conjunto de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en \mathbb{R}^n , sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una n -ada de reales positivos.

- La familia de dilataciones de un parámetro $\delta_{\varepsilon > 0}^r$ asociada con r está definida por

$$\delta_{\varepsilon}^r(x) := (\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

a los números r_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se les denomina **pesos de homogeneidad**.

- Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es δ^r -homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ si

$$V(\delta_{\varepsilon}^r(x)) = \varepsilon^m V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

- Un campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se dice que es δ^r -homogéneo de grado $\nu \in \mathbb{R}$ si la componente f_i es δ^r -homogénea de grado $\nu + r_i$ para cada i , esto es

$$f_i(\delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^{\nu+r_i} f_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Si el campo vectorial de un sistema es δ^r -homogéneo de grado ν , se dice que el sistema es δ^r -homogéneo de grado ν .

2.2 Funciones de Lyapunov homogéneas

Para estudiar la estabilidad de sistemas no lineales, el *Método directo de Lyapunov* permite determinar si el origen del sistema es estable, así, a continuación se revisan resultados y definiciones importantes que permiten estudiar propiedades dinámicas o de tipo de convergencia al origen, por ejemplo la estabilidad en tiempo finito.

Para la definición de estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov se puede consultar, por ejemplo, [1, Cap. 3].

Teorema 1 ([22]). *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un mapeo continuo de un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen, con $f(0) = 0$. Si existe una función continua definida positiva $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa, entonces el origen $x = 0$ es estable, más aun, si \dot{V} es definida negativa, entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

El resultado anterior, permite asegurar estabilidad asintótica en el origen para sistemas cuyos campos son continuos pero no necesariamente Lipschitz continuos.

Para desarrollos posteriores es necesario recordar la siguiente definición de conjunto positivamente invariante,

Definición 2 ([32]). *Considere (2.1) con $x(t)$ denotando una solución del sistema. Entonces, un conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ se llama conjunto positivamente invariante respecto a (2.1) si*

$$x(t_0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq t_0 \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Observe que un conjunto positivamente invariante se puede ver como una generalización de un conjunto invariante, es decir, todo conjunto invariante es también positivamente invariante.

Teorema 2 ([22]). *Considere el sistema (2.1), con $f \in C[\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2]$. Asuma que existe una función definida positiva y radialmente no acotada $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\dot{V} \leq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^2$, suponga que el origen $x = 0$ es el único subconjunto invariante del conjunto*

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0\},$$

entonces el equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable.

Observación 1. *El Teorema 2 es una generalización del Teorema de invarianza de LaSalle a campos continuos.*

El siguiente resultado es de relevancia ya que garantiza la existencia de funciones de Lyapunov homogéneas para cualquier sistema homogéneo continuo cuyo origen es asintóticamente estable. Además, es importante mencionar que gracias a la existencia de estas funciones homogéneas, el análisis de estabilidad puede resultar más sencillo.

Teorema 3 ([1]). *Sea el sistema (2.1), donde f es un campo vectorial continuo en \mathbb{R}^n tal que su origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Asuma que f es δ^r -homogéneo de grado ν para algunos pesos de homogeneidad $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces para cualquier $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ y cualquier $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$ existe una función de Lyapunov que es δ^r -homogénea de grado m y de clase C^p .*

La siguiente definición se introduce para describir un tipo de convergencia de las trayectorias de un sistema cuyo origen es asintóticamente estable.

Definición 3 ([1]). *El origen de (2.1) es estable en tiempo finito si se cumple lo siguiente: es estable en el sentido de Lyapunov y existen una vecindad del origen abierta U y una función $T : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (llamada función de tiempo de establecimiento) tales que para cada $x \in U \setminus \{0\}$, la solución $x(t, x_0)$ del sistema está definida en $[0, T(x_0))$, $x(t, x_0) \in U \setminus \{0\} \forall t \in [0, T(x_0))$, y $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0$.*

Note que el dominio de la función de tiempo de asentamiento se puede extender a todo U definiendo $T(0) = 0$. El siguiente corolario (que es una consecuencia directa del Teorema 3) requiere que se recuerde lo siguiente: la norma δ^r -homogénea es un mapeo $x \mapsto \|x\|_{r,p}$, dado por

$$\|x\|_{r,p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{r_i \frac{p}{p_i}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall p \geq 1.$$

Corolario 1 ([1]). *Sea f un campo vectorial continuo y δ^r -homogéneo con grado de homogeneidad ν y sea $\|\cdot\|_{r,p}$ una norma δ^r -homogénea, entonces*

- Si $\nu > 0$, existen $M_1, M_2 > 0$ tales que, $\forall t \geq 0$,

$$M_1 (1 + \|x(0)\|_{r,p}^\nu t)^{-\frac{1}{\nu}} \|x(0)\|_{r,p} \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2 (1 + \|x(0)\|_{r,p}^\nu t)^{-\frac{1}{\nu}} \|x(0)\|_{r,p}.$$

- Si $\nu = 0$, existen $M_1, M_2, D > 0$ tal que, $\forall t \geq 0$,

$$M_1 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p} \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p}.$$

- Si $\nu < 0$, el origen es estable en tiempo finito.

Este resultado nos permite saber el tipo de convergencia de un sistema δ^r -homogéneo cuyo origen es asintóticamente estable basándonos únicamente en su grado de homogeneidad.

2.3 Ejemplos de sistemas homogéneos

En esta sección se presentan ejemplos ilustrativos relacionados con la teoría revisada anteriormente.

Ejemplo 1. Como primer ejemplo se presentan los distintos tipos de convergencia al origen, una vez que se garantiza estabilidad asintótica, dependiendo del grado de homogeneidad ν , para eso, se exponen distintos casos. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 [x_1]^a + x_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0} \\ \dot{x}_2 &= -k_2 [x_1]^b.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Lo que se pretende hacer es determinar el valor del exponente a , tal que el sistema (2.2) sea homogéneo de distinto grado de homogeneidad ν , para los siguientes casos

Caso 1: $\nu = 0, \quad b = 1;$

Caso 2: $\nu = -1, \quad b = 0;$

Caso 3: $\nu = -1, \quad b = \frac{1}{3};$

Caso 4: $\nu = 2, \quad b = \frac{3}{2}.$

Al realizar la dilación homogénea del argumento del campo vectorial de (2.2), se obtiene lo siguiente

$$f(\delta_\epsilon^r(x)) = \begin{bmatrix} -\epsilon^{ar_1} k_1 [x_1]^a + \epsilon^{r_2} x_2 \\ -\epsilon^{br_1} k_2 [x_1]^b \end{bmatrix}.$$

Para encontrar los pesos de homogeneidad $r_{1,2}$ y los exponentes a, b , de acuerdo con la Definición 1, se obtienen de manera general las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}ar_1 &= r_2 = \nu + r_1 \\ br_1 &= \nu + r_2\end{aligned}\tag{2.3}$$

Para el Caso 1, al substituir los valores correspondientes, se utiliza (2.3) de donde se obtiene $r_1 = r_2$, esto indica que existe un parámetro libre, por ejemplo, si se elige $r = [1, 1]^\top$ entonces $a = 1$. En este caso el sistema (2.2) queda de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 x_1.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Para el Caso 2, de (2.3) se obtienen los siguientes valores: $a = \frac{1}{2}, r = [2, 1]^\top$. El sistema (2.2) queda de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2}} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 [x_1]^0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Este sistema dinámico es conocido como algoritmo Super-Twisting [18], observe que este sistema es discontinuo con grado de homogeneidad $\nu = -1$ con los pesos de homogeneidad $r = [2, 1]^\top$.

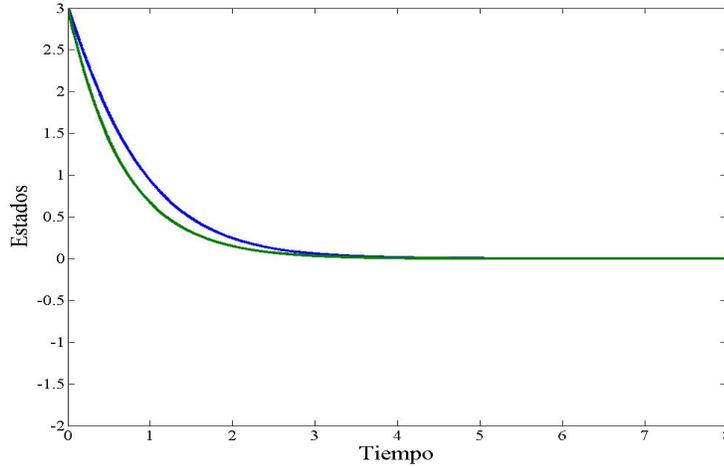


Figura 2.1: Simulación del sistema (2.2), Caso 1, $v = 1$

Para el Caso 3, se obtienen de (2.3) que $r = [3, 2]^T$ y $a = \frac{2}{3}$. De esta manera el sistema (2.2) queda de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1[x_1]^{\frac{2}{3}} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2[x_1]^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para el último caso, se obtienen los pesos de homogeneidad $r = [8, 10]^T$ y el exponente $a = \frac{10}{8}$. Así, el sistema (2.2) queda de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1[x_1]^{\frac{10}{8}} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2[x_1]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Al simular los distintos casos del sistema resulta sencillo visualizar y comprobar el Corolario 1. En la Figura 2.1, podemos observar que se presenta una simulación del caso $v = 0$ el cual corresponde al sistema lineal (2.4) y por lo tanto su convergencia es exponencial. Para la Figura 2.2 se expone el caso $v < 0$ en donde las trayectorias del sistema (2.6) llegan al origen en tiempo finito. En la Figura 2.3, la convergencia es racional, es decir, las trayectorias no llegan exactamente al cero cuando el grado de homogeneidad es $v > 0$.

Ejemplo 2. En este ejemplo muestra un sistema δ^r -homogéneo con estabilidad en tiempo finito, para el cual se puede calcular el tiempo exacto de convergencia al origen. También se muestran otros casos cuyo tipo de convergencia cambia dependiendo del valor de una potencia p .

Considere el sistema escalar

$$\dot{x}_1 = -a[x_1]^p, \quad a, p \in \mathbb{R}_{>0},$$

es importante resaltar que el comportamiento dinámico del sistema depende del valor de la potencia p . Es por esto que analizaremos distintos casos del valor de p .

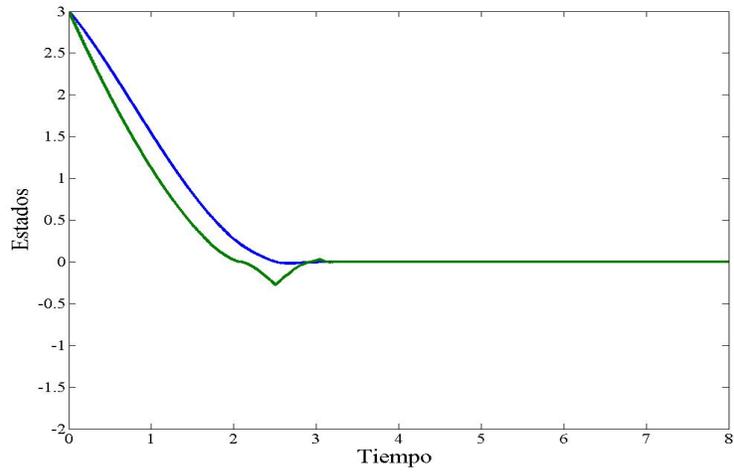


Figura 2.2: Simulación del sistema (2.2), Caso 2, $\nu < 0$

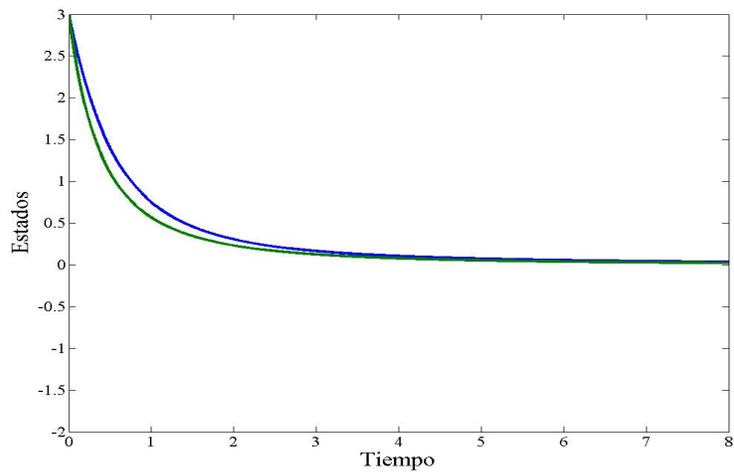


Figura 2.3: Simulación del sistema (2.2), Caso 3, $\nu > 0$

1. Caso $p \in (0, 1)$. Para cualquier condición inicial x_0 , la solución del sistema está dado por

$$x(t, x_0) = \text{sign}(x_0)(|x_0|^{1-p} - a(1-p)t)^{\frac{1}{1-p}},$$

de donde es claro que el equilibrio $x = 0$ es alcanzado en tiempo finito, a decir, el tiempo de convergencia está dado por

$$T(x_0) = \frac{|x_0|^{1-p}}{-a(p-1)}.$$

2. Caso $p = 1$. El sistema se vuelve lineal, por consiguiente, la solución ahora está dada por

$$x(t, x_0) = x_0 e^{-at}.$$

Así, el origen del sistema es exponencialmente estable.

3. Caso $p > 1$. La solución del sistema está dada por

$$x(t, x_0) = \text{sign}(x_0)(|x_0|^{1-p} + a(p-1)t)^{\frac{-1}{p-1}},$$

de donde se puede ver que para cualquier $x_0 \neq 0$, $(t, x_0) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Al analizar los tres distintos casos de p se observa lo siguiente: cuando $p \in (0, 1)$ las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito, cuando $p = 1$ el sistema se vuelve lineal por lo tanto su convergencia es exponencial, en el caso cuando $p > 1$ la convergencia es racional, verificando así lo establecido en el Corolario 1.

Ejemplo 3. En este ejemplo se verifica un caso estándar que muestra la existencia de una función de Lyapunov homogénea para un sistema homogéneo. Considere el sistema δ^r -homogéneo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

donde el único punto de equilibrio es el origen. Ahora se propone una función candidata de Lyapunov, $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(x) = \frac{b}{2}x_1^2 - ax_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad b > 0, a > 0.$$

Con el propósito de verificar que V es definida positiva, procedemos a encontrar una condición suficiente sobre los coeficientes a y b . Esto se realiza usando la desigualdad de Young (vea, por ejemplo, [23]) en el término cruzado ax_1x_2 . Así, se concluye que V es definida positiva bajo la condición $a^2 < b$. Ahora, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V} = bx_1(-x_1 + x_2) - ax_2(-x_1 + x_2) - ax_1(-x_1) + x_2(-x_1)$$

reescribiendo la derivada se obtiene

$$\dot{V} = -(b-a)x_1^2 - ax_2^2 + (b+a-1)x_1x_2.$$

Observe que fijando $a + b = 1$ se obtiene $\dot{V} = -(1 - 2a)x_1^2 - ax_2^2$. Para que \dot{V} sea definida negativa, es necesario que $2a < 1$. Por lo tanto, las condiciones suficientes sobre a y b para que V sea una función de Lyapunov para el sistema son

$$a^2 < b, \quad b = 1 - a, \quad 2a < 1,$$

las cuales se satisfacen siempre que

$$b = 1 - a, \quad a < 1/2.$$

Ejemplo 4. Este ejemplo exhibe la existencia de una función de Lyapunov homogénea en un caso menos estándar que el del ejemplo anterior, esto es, para un sistema polinómico δ^r -homogéneo cuyo origen es asintóticamente estable. Considere el sistema polinomial [1]

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^5 \quad (2.8)$$

note que el sistema es homogéneo de grado $v = 2$, con pesos de homogeneidad $r = [1, 3]^\top$. En [1] se propone la función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(x) = \frac{1}{6}x_1^6 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Esta función polinomial que es δ^r -homogénea es de grado $m = 6$ es una función de Lyapunov homogénea para (2.8), pero no es estricta, es decir, \dot{V} es solo semidefinida negativa. Sin embargo, en [26] se propone la siguiente función

$$\hat{V}(x) = \frac{1}{6}x_1^6 - \alpha x_1 [x_2]^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

donde \hat{V} es una función de Lyapunov para el sistema. Es importante mencionar que esta función también es δ^r -homogénea pero además es estricta para $\alpha > (\frac{3}{5})^{\frac{5}{6}}$. Cabe resaltar que \hat{V} se construye a partir de V , observe que V es una función polinómica, sin embargo, \hat{V} ya no lo es. En [26] se demostró que no existe una función de Lyapunov que sea polinómica y estricta, es por esto que \hat{V} es una función estricta pero ya no es polinómica. En la Figura 2.4 se presenta la gráfica de un ejemplo de la función \hat{V} .

2.4 Criterio de diseño de ganancias para sistemas lineales

En esta sección se presenta el caso de los sistemas lineales de segundo orden, en particular el sistema doble integrador controlado, en el cual se analiza la respuesta transitoria de manera específica. Considere el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \hat{u} \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde \hat{u} es la entrada de control dada por

$$\hat{u} = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0},$$

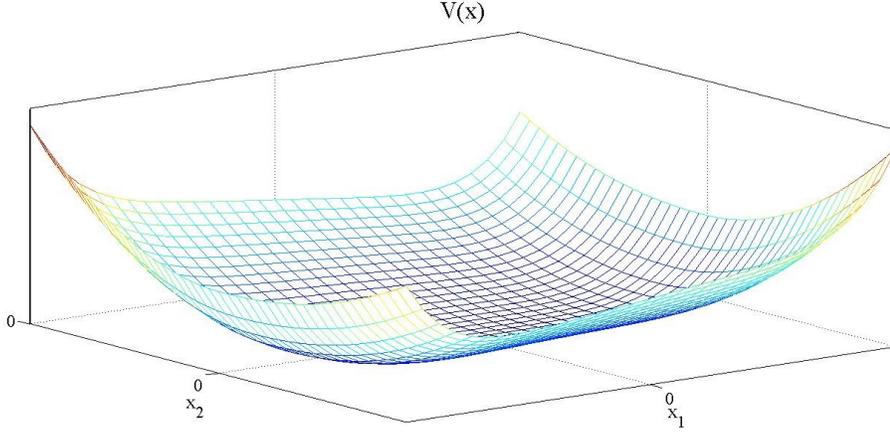


Figura 2.4: $\hat{V}(x) = \frac{1}{6}x_1^6 - x_1|x_2|^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2}x_2^2$

El tipo de comportamiento transitorio del lazo cerrado va a depender del valor que tomen las ganancias k_1 y k_2 del controlador. La forma vectorial de (2.9) en lazo cerrado con \hat{u} , es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Como se mencionó antes, la respuesta transitoria del sistema depende de cómo sean ajustadas las ganancias del controlador, habiendo tres tipos de respuesta: subamortiguada, críticamente amortiguada y sobreamortiguada. A continuación se presenta el procedimiento que se utiliza para diseñar las ganancias tal que se garantice alguno de estos tipos de respuesta.

El polinomio característico de la matriz de estados del sistema (2.10) es el siguiente

$$\bar{P}(\lambda) = \lambda^2 + k_2\lambda + k_1$$

del cual se obtienen los valores propios

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{\Omega}}{2}, \quad \Omega = k_2^2 - 4k_1$$

note que el discriminante Ω es el parámetro que puede ser utilizado para clasificar la respuesta transitoria del sistema, tal como subamortiguada, críticamente amortiguada y sobreamortiguada. Dicho lo anterior, enseguida se describen los distintos casos que se presentan dependiendo del signo de Ω .

1. $\Omega > 0$. Observe que este caso coincide con la respuesta subamortiguada del sistema. Los valores propios son $\lambda_1 = -a + b$ y $\lambda_2 = -a - b$, donde $a = \frac{k_2}{2}$ y $b = \frac{1}{2}\sqrt{\Omega}$. Dado que los valores propios son reales, se generan los siguientes vectores propios denotados por $V_{\lambda_i} = [v_1, v_2]^T \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, donde $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ es un parámetro libre

$$V_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} c \\ -a + bc \end{bmatrix}, \quad V_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} c \\ -a - bc \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Por el análisis anterior y como es bien sabido los vectores propios generan a los subespacios propios del sistema, los cuales tienen la forma

$$A_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \alpha_i x_1\} \quad \alpha_i = \frac{v_2}{v_1} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Es importante recordar el hecho de que los subespacios propios constituyen conjuntos invariantes del sistema lineal.

2. $\Omega = 0$. Note que este caso coincide con el comportamiento transitorio del sistema conocido como críticamente amortiguado. En este caso los valores propios son iguales, dados por $\lambda_{1,2} = \frac{-k_2}{2}$. Ya que los valores propios son reales y además repetidos, sus vectores propios correspondientes están dados por

$$V_{\lambda_{1,2}} = \begin{bmatrix} c \\ -\frac{k_2}{2}c \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

De acuerdo con (2.12), se genera solo un subespacio propio, y por lo tanto existe solo un conjunto invariante del sistema.

3. $\Omega < 0$. Este caso coincide a su vez con la respuesta sobreamortiguada del sistema. Los valores propios del sistema son $\lambda_1 = -a + jb$ y $\lambda_2 = -a - jb$. En vista de que los valores propios son complejos, sus vectores propios correspondientes también son complejos, en este caso no se generan subespacios propios reales por lo que se sabe que no existen conjuntos invariantes lineales del sistema.

De lo discutido en los puntos anteriores se puede observar que hay una conexión intrínseca entre la existencia de invariantes del sistema y la respuesta transitoria, a decir:

- en el caso donde existen conjuntos invariantes reales del sistema, las soluciones del sistema no son oscilatorias;
- si no existen conjuntos invariantes reales, entonces las soluciones del sistema son oscilatorias.

Cabe mencionar que un sistema lineal satisface dos propiedades, la propiedad de homogeneidad y la de aditividad. Una clase más general, a la que pertenecen los sistemas lineales, es la clase de sistemas homogéneos que a su vez (preservando la propiedad de homogeneidad) son en general sistemas no lineales. Tomando en cuenta esto, en algunos trabajos presentes en la literatura, se ha buscado desarrollar teoría y procedimientos (para el análisis y diseño de sistemas homogéneos) análogos a los establecidos para los sistemas lineales. Este trabajo de tesis va en esa dirección, en particular, en lo concerniente al diseño de ganancias que garantice algún tipo de comportamiento transitorio de las trayectorias de sistemas homogéneos.

Capítulo 3

Esquema de control homogéneo por retroalimentación de la salida

Este capítulo está integrado por la descripción del esquema de control por retroalimentación de salida que se considera en el presente trabajo. De igual forma se introduce un ejemplo de simulación para clarificar el funcionamiento de dicho esquema. Por último, en la Sección 3.2 se presenta el objetivo principal y el planteamiento del problema de esta tesis que será resuelto en los Capítulos 4 y 5.

3.1 Esquema por retroalimentación de salida

En esta sección se expone un esquema de control homogéneo por retroalimentación de la salida para una clase de sistemas no lineales. La parte dinámica del controlador es un observador de orden extendido basado en el diferenciador exacto y robusto (que es un diferenciador por modos deslizantes [19]). Este observador estima en tiempo finito a los estados del sistema, el estado adicional ayuda a identificar las perturbaciones del sistema (también en tiempo finito). La parte estática del control puede seleccionarse de entre una amplia clase de controladores homogéneos.

El sistema considerado en esta sección es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + \delta \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x = [x_1, x_2]^\top \in \mathbb{R}^2$ es el estado, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida y $\delta(t) \in \mathbb{R}$ es una perturbación cuya derivada es acotada.

El objetivo del control es estabilizar en tiempo finito el origen del sistema (3.1) a pesar de la perturbación $\delta(t)$, usando solo la salida y como información para el controlador.

Como se dijo antes, debido a las ventajas que ofrece la propiedad de la homogeneidad en los sistemas dinámicos y en vista de que existen en la literatura varios resultados acerca

del diseño de controladores homogéneos, resulta interesante considerar controladores homogéneos (que denotaremos como u_0). Por ejemplo, en [9] se proporciona una clase de controladores homogéneos para sistemas de orden arbitrario, un caso particular de esta clase para el sistema (3.1) esta dado por

$$u_0(x) = -\alpha_2 \left[[x_2]^{\frac{3}{2}} + \alpha_1 x_1 \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Observe que esta ley de control constituye una función δ^r -homogénea de grado $s = 1$ con pesos de homogeneidad $r = [3, 2]^T$. En [9] se describe un método para la selección de las ganancias α_1 y α_2 que garantizan que el origen del lazo cerrado de este controlador con el sistema $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u_0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Otro ejemplo es el siguiente. En [7] se propone el controlador

$$u_0(x) = -[x_2]^{\frac{1}{2}} - \left[x_1 + \frac{2}{3}[x_2]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Observe que nuevamente esta ley de control es una función δ^r -homogénea de grado $s = 1$ con pesos de homogeneidad $r = [3, 2]^T$.

Un tercer ejemplo de controladores homogéneos es el siguiente [14], [6], [25], [3]

$$u_0(x) = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2 [x_2]^{\frac{1}{2}}$$

donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Igualmente, este controlador es una función δ^r -homogénea de grado $s = 1$ con pesos de homogeneidad $r = [3, 2]^T$.

Dicho lo anterior, se puede asumir que se conoce un controlador homogéneo u_0 tal que el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_0(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

es δ^r -homogéneo de grado $v = -1$ con pesos de homogeneidad $r = [3, 2]^T$ y además su origen es asintóticamente estable.

Observe que, de esta forma, el origen de (3.1) en lazo cerrado con el controlador ideal

$$u = u_0(x) - \delta$$

es asintóticamente estable ya que el controlador cancela exactamente la perturbación δ , y debido a esto se recupera el lazo cerrado con el controlador u_0 en su forma nominal. Ahora, note que al tener información limitada del estado x y al no conocer a la perturbación δ , este controlador es imposible de implementar. De esta manera, siendo la señal de salida y (y la señal de control u) la única medida disponible, si se quisiera implementar o aproximar el controlador ideal se requiere estimar la perturbación y el estado. Con este fin se considera el siguiente esquema de control por retroalimentación de la salida

$$u = \gamma u_0(\gamma^{-1} \hat{x}) - \hat{\delta} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= -\gamma^{\frac{1}{3}} \hat{k}_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\gamma^{\frac{2}{3}} \hat{k}_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{3}} + \gamma u_0(\gamma^{-1} \hat{x}) \\ \dot{\hat{\delta}} &= -\gamma \hat{k}_3 [\hat{x}_1 - x_1]^0 \end{cases} \quad (3.4)$$

donde las variables $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2]^\top \in \mathbb{R}^2$, $\hat{\delta} \in \mathbb{R}$ constituyen el estado del observador. Los parámetros $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ y \hat{k}_i , $i = 1, 2, 3$ son las ganancias del observador que deben diseñarse tales que $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (3.1) en lazo cerrado con el esquema de control (3.3), (3.4). Para elegir estas ganancias se puede seguir, por ejemplo, el método descrito en [10].

Observe que (3.4) constituye la parte dinámica del esquema el cual es un observador que hace las tareas de estimación tanto de los estados como de la perturbación. Por otro lado (3.3) trata de compensar la perturbación δ a través del término $\hat{\delta}$ y por lo tanto recuperar la dinámica nominal con el controlador u_0 . De esta forma, si se estiman exactamente tanto el estado como la perturbación, entonces se garantiza estabilidad en tiempo finito del origen, justo como se establece en el siguiente resultado descrito en [27].

Teorema 4. *Considere el sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador de retroalimentación de salida (3.3), (3.4) con las siguientes suposiciones:*

- la función u_0 es Hölder continua;
- u_0 es una función homogénea y el lazo cerrado

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_0 \quad (3.5)$$

es un sistema homogéneo de grado $\nu = -1$ con pesos de homogeneidad $r = [3, 2]^\top$;

- el origen de (3.5) es un punto de equilibrio asintóticamente estable;
- la perturbación δ es tal que $|\hat{\delta}(t)| \leq \Delta$ para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y una constante conocida $\Delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Entonces, para cualquier $\Delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, existe $\gamma^* \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para toda $\gamma \geq \gamma^*$ el origen del sistema (3.1) es estable en tiempo finito.

Así, este esquema de control garantiza estabilidad asintótica del origen, además, el grado de homogeneidad negativo garantiza que la convergencia al origen sea en tiempo finito. Por lo tanto, el controlador (3.3) con el observador (3.4) garantiza estabilidad del origen de (3.1) en tiempo finito a pesar de la perturbación, lo que permite afirmar que cumple el objetivo de control planteado.

A continuación, se muestra con un ejemplo el funcionamiento del esquema de control por retroalimentación de salida (3.3), (3.4).

Ejemplo 5. *Considere el sistema perturbado de segundo orden*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + \delta \end{aligned} \quad (3.6)$$

El esquema de control propuesto (no lineal homogéneo) está dado por

$$\begin{aligned} u &= \gamma u_0(\gamma^{-1} \hat{x}) - \hat{\delta} \\ \dot{\hat{x}}_1 &= -\gamma^{\frac{1}{3}} \hat{k}_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\gamma^{\frac{2}{3}} \hat{k}_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{3}} + \gamma u_0(\gamma^{-1} \hat{x}) \\ \dot{\hat{\delta}} &= -\gamma \hat{k}_3 [\hat{x}_1 - x_1]^0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Parámetros						
γ	k_1	k_2	\hat{k}_1	\hat{k}_2	\hat{k}_3	δ
3	3	5	1.2	1.7	1.1	$1 + \cos(2t)$

Tabla 3.1: Valores de las ganancias, γ y perturbación

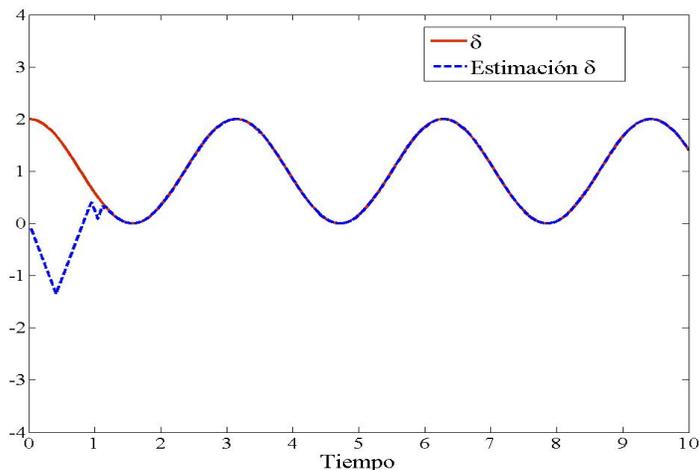


Figura 3.1: Perturbación estimada

para el cual se utiliza el controlador

$$u_0(x) = -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}$$

y considere los valores de la tabla 3.1.

En las Figuras 3.2, 3.3 se observa que los estados del observador convergen a los estados originales y ambos convergen al origen en tiempo finito. En la Figura 3.1 se observa que el estado extendido del observador identifica exactamente la perturbación δ en tiempo finito.

Algunas de las ventajas que proporciona el esquema de control descrito son las siguientes,

- El error de observación converge al origen en tiempo finito, entonces hay una estimación exacta de la perturbación y por lo tanto una compensación exacta de la perturbación.
- Se tienen las propiedades de robustez heredadas de la homogeneidad [4].
- Existe flexibilidad en la elección del controlador u_0 .
- Se permite diseñar las ganancias del controlador u_0 de forma independiente de las ganancias del observador.

Finalmente, es importante subrayar que este esquema de control por salida permite recuperar en tiempo finito el sistema de control nominal.

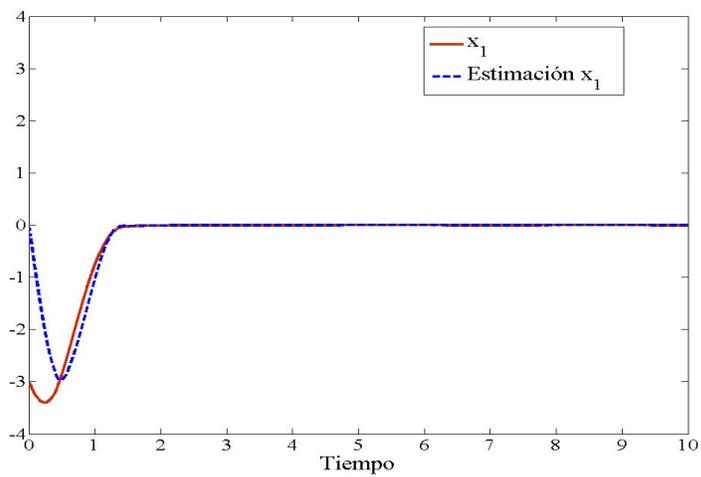


Figura 3.2: Estado x_1 y su estimación

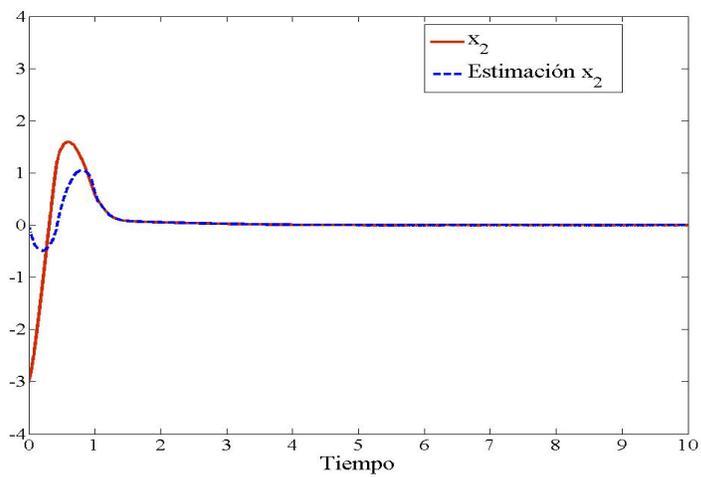


Figura 3.3: Estado x_2 y su estimación

De acuerdo con la bibliografía existen métodos de diseño de controladores homogéneos tal que se garantice estabilidad en tiempo finito, sin embargo, de manera general no existe literatura sobre alguna metodología sistemática para poder llegar a un criterio de diseño de ganancias del controlador homogéneo, en donde el sistema en lazo cerrado con dicho controlador además de ser estable en tiempo finito, proporcione algún tipo de información sobre el comportamiento transitorio, similar a los sistemas lineales de segundo orden. Siguiendo esa idea, en el presente trabajo se busca poder garantizar la condición de oscilación o no oscilación para las trayectorias del sistema no lineal considerado.

3.2 Planteamiento del problema de esta tesis

Con lo discutido anteriormente, a continuación, se presenta el problema a resolver en el presente trabajo.

Considere el sistema (3.1). El objetivo de esta tesis es: obtener un criterio de diseño de ganancias de un controlador homogéneo, el cual permita garantizar la condición de oscilación o no oscilación de las trayectorias del sistema, estudiando dos casos, el nominal y el perturbado. Para el caso nominal se considera el controlador homogéneo

$$u_0(x) = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2 [x_2]^{\frac{1}{2}},$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, mientras que para el caso perturbado se considera el controlador escalado

$$\gamma u_0(\gamma^{-1}\hat{x}) = -\gamma^{\frac{2}{3}}k_1 [\hat{x}_1]^{\frac{1}{3}} - \gamma^{\frac{1}{2}}k_2 [\hat{x}_2]^{\frac{1}{2}},$$

con $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ y donde \hat{x} es el estado del observador dado por (3.4).

Antes de describir la solución del problema planteado se analizará el caso de un integrador simple en el Capítulo 4, estudiando los sistemas de control nominal y perturbado, ya que nos servirá de guía para introducir algunas ideas que se desarrollarán en el Capítulo 5 para el sistema de segundo orden.

Capítulo 4

Análisis de estabilidad y diseño de ganancias para un sistema de primer orden

En este capítulo se describe el análisis de un controlador homogéneo para un integrador simple. Se estudian el sistema nominal y el sistema perturbado. En la Sección 4.2 se expone el análisis de estabilidad y en la Sección 4.3 se estudia el tipo de comportamiento transitorio del sistema para el caso nominal. En la Sección 4.4 se presentan el análisis y los resultados del caso perturbado, utilizando el esquema de control por retroalimentación de salida descrito en el Capítulo 3 particularizado para el sistema de primer orden.

4.1 Sistema de control nominal

Considere el siguiente sistema de primer orden

$$\dot{x} = u, \quad (4.1)$$

observe que es el caso nominal, esto es, sin la presencia de perturbaciones. Como se estableció en la descripción del problema de control en la Sección 3.1, se requiere un controlador homogéneo $u = u_0$ tal que el origen del sistema (4.1) sea asintóticamente estable con convergencia en tiempo finito al origen, por esta razón se considera el controlador u_0 de la forma siguiente

$$u = u_0(x) = -k[x]^{\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

donde k es la ganancia del controlador a ser diseñada en este capítulo. Note que, al hacer la dilación homogénea del campo vectorial, por la Definición 1, (4.1) en lazo cerrado con (4.2) es un sistema δ^r -homogéneo de grado $v = -1$ con peso de homogeneidad $r = 2$. Es importante mencionar que la homogeneidad del sistema es una característica necesaria para poder implementar el esquema de control homogéneo por retroalimentación de la salida.

4.2 Análisis de estabilidad

Para el análisis de estabilidad (vea por ejemplo [25], [3]) del sistema (4.1) en lazo cerrado con (4.2), se propone la función cuadrática de Lyapunov $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia es

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad (4.3)$$

la cual es una función δ^r -homogénea de grado $m = 2$ con el peso de homogeneidad $r = 1$. Se procede a verificar que (4.3) es una función de Lyapunov estricta lo cual es suficiente para asegurar estabilidad asintótica del origen. Para esto V tiene que ser definida positiva, lo que claramente se satisface. Ahora, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema esta dada por

$$\dot{V} = -k|x|^{\frac{3}{2}}, \quad (4.4)$$

esta función tiene que ser definida negativa, esto se satisface si y solo si $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Por lo tanto, para $k > 0$, V es una función de Lyapunov δ^r -homogénea estricta y además gracias a que el grado de homogeneidad del sistema es negativo, de acuerdo con el resultado del Corolario 1, se concluye que la convergencia de las soluciones del sistema al origen $x = 0$ es en tiempo finito. Con este análisis se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 5. *Considere el sistema (4.1) en lazo cerrado con (4.2). Para toda $k \in \mathbb{R}_{>0}$ el origen $x = 0$ del sistema es estable en tiempo finito.*

4.3 Análisis del comportamiento transitorio del sistema

En esta sección se explica el comportamiento transitorio del sistema controlado, a decir, el sistema (4.1) en lazo cerrado con (4.2) sólo puede tener un tipo de comportamiento el cual es monótonamente decreciente si las condiciones iniciales son positivas y monótonamente creciente para condiciones iniciales negativas. Este tipo de comportamiento se puede ver claramente de la solución del sistema, la cual esta explícita en el Ejemplo 2.

Teorema 6. *Considere el sistema (4.1) en lazo cerrado con (4.2). Entonces para cualquier $k \in \mathbb{R}_{>0}$ y para cualquier condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, la norma $|x(t)|$ de la solución del sistema es monótonamente decreciente.*

Demostración. Para esta prueba, basta con exhibir la solución que tiene el sistema (4.1). En el Ejemplo 2 se desarrolla la solución de este sistema de forma general, la cual está dada por

$$x(t) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) \left(|x_0|^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}t \right)^2 & t \leq T_{x_0} \\ 0 & t > T_{x_0}. \end{cases} \quad (4.5)$$

de donde es claro que la expresión $|x_0|^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}t$ decrece monótonamente en t hasta que el valor de $x = 0$ es alcanzado (en tiempo finito), y el tiempo de convergencia de cualquier estado inicial x_0 a $x = 0$ está dado por

$$T_{x_0} = \frac{2|x_0|^{\frac{1}{2}}}{k}.$$

□

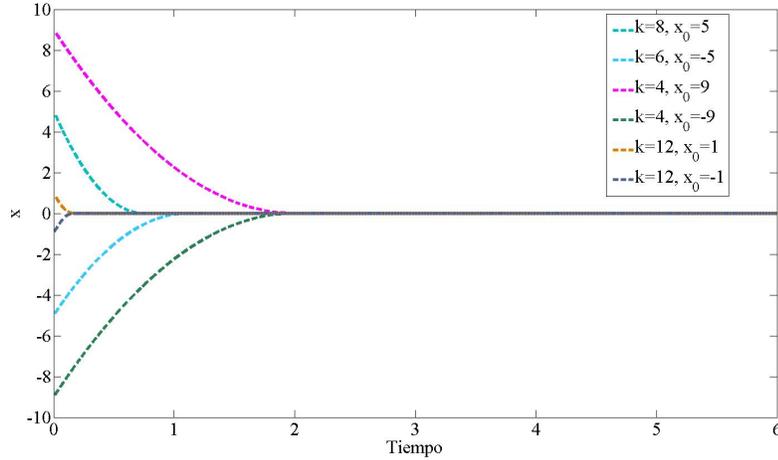


Figura 4.1: Comportamiento monótono con distinto valor de k y x_0

En la Figura 4.1 se observa que al simular el sistema (4.1) en lazo cerrado con (4.2) para distintas condiciones iniciales y distintos valores de k , se obtiene el comportamiento monótono, ya sea creciente o decreciente.

Corolario 2. *Considere el sistema (4.1) en lazo cerrado con el controlador*

$$u = \gamma u_0(\gamma^{-1}x) = -\gamma^{\frac{1}{2}} \hat{k} [x]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.6)$$

las afirmaciones del Teorema 6 son válidas para cualesquier $\hat{k}, \gamma > 0$.

Demostración. Note que la estructura de la solución (4.5) del sistema con el controlador sin escalar no cambia en comparación con la solución del sistema con el controlador escalado, ya que solo se substituye el parámetro k por $\gamma^{\frac{1}{2}} \hat{k}$, por lo tanto el comportamiento transitorio del sistema no se ve afectado, lo único que se modifica es el tiempo de convergencia que ahora esta dado por

$$T_{x_0} = \frac{2|x_0|^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}} \hat{k}}.$$

□

4.4 Sistema de control perturbado

Hasta el momento, el criterio de diseño del controlador u_0 ha estado limitado al caso nominal y no se ha tratado el caso perturbado. Con la finalidad de obtener resultados favorables para el sistema en presencia de perturbaciones, se hace uso del esquema de control por retroalimentación de salida descrito en el Capítulo 3 que, de acuerdo con el Teorema 4, puede asegurar la estabilidad en tiempo finito del origen del sistema a pesar de la presencia de perturbaciones. Sin embargo, el esquema de control por salida no garantiza algún tipo de comportamiento transitorio del sistema. Es por esto que el objetivo en esta sección es verificar el tipo de

comportamiento transitorio del sistema de primer orden ante presencia de perturbaciones con un esquema de control por realimentación de la salida.

Considere el siguiente sistema escalar con perturbación

$$\dot{x} = u + \delta, \quad y = x, \quad (4.7)$$

donde $\delta(t)$ es la perturbación cuya derivada es una función acotada y y es la salida del sistema. Para este caso el esquema de control por retroalimentación de salida (3.3), (3.4), se construye de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u &= \gamma u_0(\gamma^{-1}\hat{x}) - \hat{\delta} \\ \dot{\hat{x}} &= -\gamma^{\frac{1}{2}}\hat{k}_1[\hat{x} - x]^{\frac{1}{2}} + \gamma u_0(\gamma^{-1}\hat{x}) \\ \hat{\delta} &= -\gamma\hat{k}_2[\hat{x} - x]^0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

considerando a u_0 como en (4.2). A partir del Teorema 4 y del Teorema 6 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3. *Considere (4.7) en lazo cerrado con (4.8) con $x(t; x_0)$ denotando la solución de (4.7) para la condición inicial x_0 . Para toda $x_0 \in \mathbb{R}$ existe un tiempo finito $\hat{T}_{x_0} \in \mathbb{R}$ a partir del cual:*

- $x(t; x_0)$ tiene un comportamiento monótonamente decreciente si $x(\hat{T}_{x_0}; x_0) \geq 0$;
- $x(t; x_0)$ tiene un comportamiento monótonamente creciente si $x(\hat{T}_{x_0}; x_0) < 0$.

Demostración. La función \hat{T}_{x_0} define el tiempo de convergencia del observador, es decir, es el tiempo que tarda el error de observación en converger a cero. Así, habiendo el observador estimado exactamente los estados y la perturbación, la parte estática del controlador iguala al controlador escalado del caso nominal. Finalmente, de acuerdo al Corolario 2, se recupera el mismo tipo de comportamiento del caso nominal. \square

A continuación se presentan ejemplos de simulación del caso de control perturbado en el que se muestra el comportamiento del sistema.

Ejemplo 6. *Para simular el sistema (4.7) en lazo cerrado con (4.8) se consideran los valores de la Tabla 4.1. Para este ejemplo se consideran las condiciones iniciales: $x(0) = 3$, $\hat{x}(0) = 0$ y $\hat{\delta}(0) = 0$. En la Figura 4.2 se observa que el estado del observador converge al estado original y ambos convergen a cero en tiempo finito, también se observa que un poco antes del segundo 1 se recupera el comportamiento monótonamente decreciente. En la Figura 4.3 podemos observar que el estado extendido del observador identifica exactamente la perturbación δ en tiempo finito.*

Para el siguiente ejemplo se consideran las mismas condiciones iniciales del Ejemplo 6 pero ahora con distintos valores de γ y δ .

Ejemplo 7. *En este ejemplo se presenta la simulación del sistema, ahora considerando los valores de la Tabla 4.2. En la Figura 4.4 se observa que el estado del observador converge al estado original y ambos convergen a cero en tiempo finito. En la Figura 4.5 podemos observar que el estado extendido del observador identifica exactamente la perturbación δ en tiempo finito.*

Parámetros				
γ	k	\hat{k}_1	\hat{k}_2	δ
2	1.5	10	8	$\cos(2t)$

Tabla 4.1: Ganancias, γ y perturbación

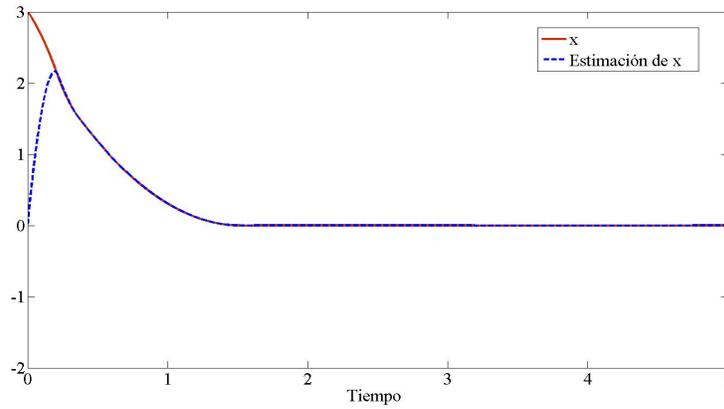


Figura 4.2: Estado original x y estado observado \hat{x}

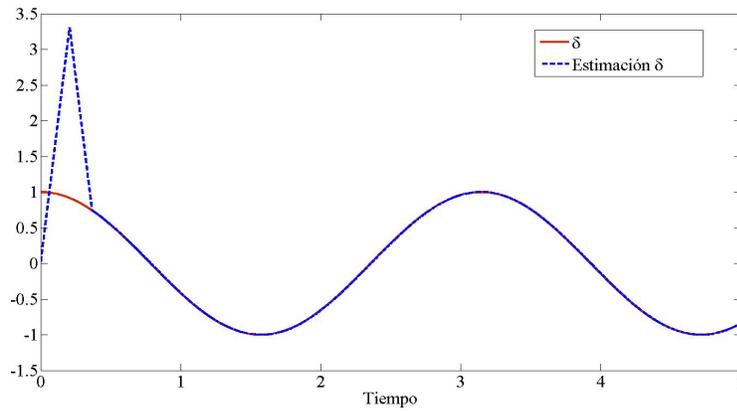


Figura 4.3: Señal de perturbación y su estimación δ

Parámetros				
γ	k	\hat{k}_1	\hat{k}_2	δ
5	1.5	1.2	1.7	$\frac{1}{5} \sin(10t)$

Tabla 4.2: Ganancias del observador, γ y perturbación

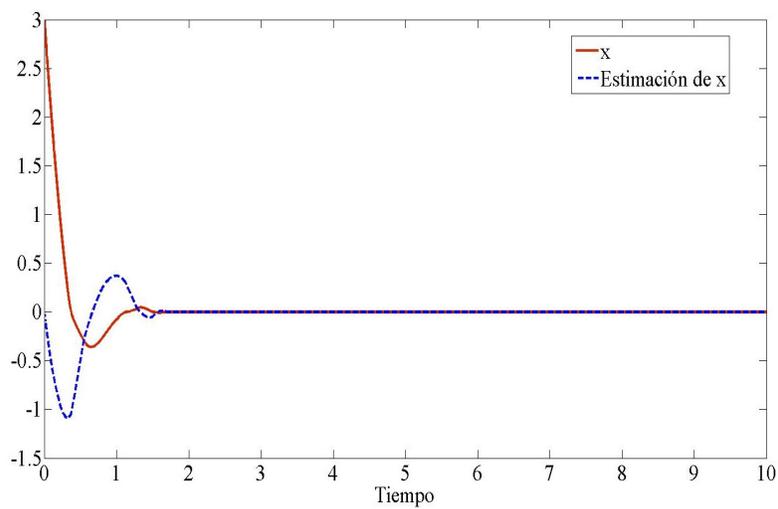


Figura 4.4: Estado original x y estado observado \hat{x}

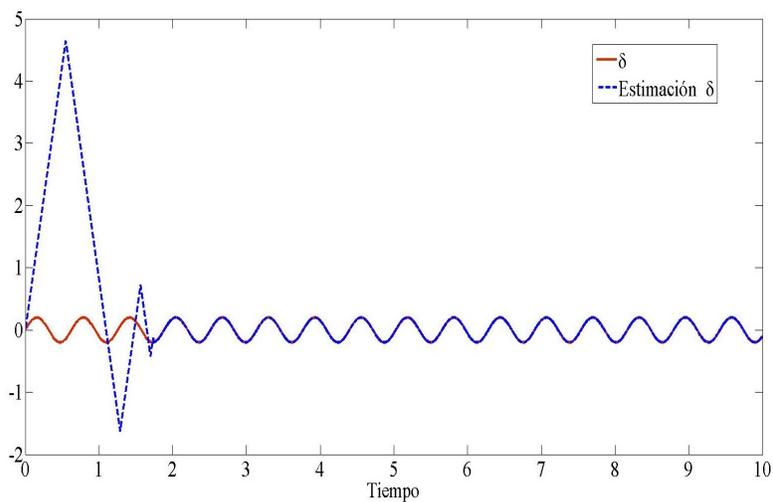


Figura 4.5: Señal de perturbación y su estimación δ

Al revisar los ejemplos es notable observar que al elegir el parámetro γ suficientemente grande y elegir las ganancias del observador adecuadas, el sistema se estabiliza en tiempo finito mas rápido.

Conclusiones del capítulo

En este capítulo se consideró un sistema de primer orden y un controlador homogéneo u_0 que, para el caso nominal, el análisis de estabilidad verifica que cualquier ganancia $k \in \mathbb{R}_{>0}$ garantiza estabilidad asintótica del origen. Tal controlador en lazo cerrado genera campos vectoriales δ^r -homogéneos de grado negativo, lo cual permite asegurar convergencia en tiempo finito de las trayectorias del sistema al origen. De igual forma, se presentó que el sistema nominal solo tiene un tipo de comportamiento transitorio, el cual es monótono creciente o decreciente dependiendo de las condiciones iniciales. Para el caso perturbado, se hace uso del esquema de control presentado en [27] y se mostró que se recupera en un tiempo finito el mismo comportamiento transitorio que el sistema de control nominal.

Capítulo 5

Análisis de estabilidad y diseño de ganancias para un sistema de segundo orden

En este capítulo se describe el resultado principal del presente trabajo, para un sistema de segundo orden. Como principal punto, la Sección 5.2 contiene el análisis de estabilidad del sistema de control nominal. En la Sección 5.3 se presenta el criterio de diseño de las ganancias del controlador para el sistema de control nominal. Finalmente, en la Sección 5.4 se extienden los resultados obtenidos al caso del sistema perturbado con control por retroalimentación de la salida.

5.1 Sistema de control nominal

Considere el sistema dinámico (3.1) para el caso no perturbado, es decir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ es el estado y $u(x) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control dada por

$$u(x) = u_0(x) = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2 [x_2]^{\frac{1}{2}}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}\tag{5.2}$$

$k_{1,2}$ son las ganancias del controlador u_0 a ser diseñadas en este capítulo. Por otro lado, note que, al hacer la dilación homogénea del campo vectorial y de acuerdo con la Definición 1, el sistema (5.1) en lazo cerrado con el controlador (5.2) es δ^r -homogéneo con grado de homogeneidad $v = -1$ y con pesos de homogeneidad $r = [3, 2]^T$.

5.2 Análisis de estabilidad

Para el análisis de estabilidad (vea por ejemplo [25], [3]) del sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.2) se propone la función candidata de Lyapunov $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$V(x) = \frac{3}{4}k_1|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}x_2^2, \quad k_1 \in \mathbb{R}_{>0}.\tag{5.3}$$

Utilizando la definición de homogeneidad en funciones, se puede ver que V es una función δ^r -homogénea de grado $m = 4$ con los mismos pesos de homogeneidad del sistema en lazo cerrado. Note que para poder garantizar estabilidad asintótica en el origen es necesario que la función V sea definida positiva y \dot{V} definida negativa, claramente se aprecia que V es una función definida positiva si y solo si $k_1 > 0$. Por otra parte, su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V} = k_1 x_1^{\frac{1}{3}} x_2 - k_1 x_1^{\frac{1}{3}} x_2 - k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}}, \quad (5.4)$$

reduciendo términos en esta expresión, se obtiene lo siguiente

$$\dot{V} = -k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}}.$$

Observe que con $k_2 > 0$, \dot{V} es una función semidefinida negativa ($\dot{V} = 0$ para $x_2 = 0$ independientemente del valor de x_1). Es importante mencionar que \dot{V} también es semidefinida negativa en el caso en donde $k_2 = 0$, sin embargo, no lo consideramos debido a que en ese caso las trayectorias del sistema oscilan sostenidamente (no convergen al origen). Por lo tanto, se toma en cuenta sólo el caso en donde $k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

De acuerdo con el método directo de Lyapunov se puede concluir solamente que el origen de (5.1) es estable. Para poder hacer uso del Teorema 2, con el cual se puede asegurar estabilidad asintótica del origen, considere al conjunto de todos los valores de x tales que $\dot{V} = 0$, esto es

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0\}.$$

Al asumir que una trayectoria del sistema está en esta región Z y permanece ahí significa que

$$x_2 = 0 \quad y \quad \dot{x}_2 = 0 \quad (5.5)$$

lo cual implica que $x_1 = 0$. Se verifica así que $\{x = 0\}$ es el único subconjunto invariante del conjunto Z y, de acuerdo al Teorema 2, esto permite concluir que el origen de (5.1) en lazo cerrado con (5.2) es asintóticamente estable.

Ahora, ya que el grado de homogeneidad del sistema es negativo, de acuerdo con el resultado del Corolario 1, se concluye que el origen $x = 0$ del sistema es estable en tiempo finito. El análisis anterior es la demostración del siguiente resultado.

Teorema 7. *Considere el sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.2). Para toda $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ el origen $x = 0$ del sistema es estable en tiempo finito.*

5.3 Criterio de diseño de las ganancias

En sistemas de control automático es de gran importancia el comportamiento transitorio del sistema. Por ejemplo, resulta relevante saber si las soluciones del sistema convergen al equilibrio de forma oscilatoria o no oscilatoria. Es por esto que en esta sección se estudia la manera de como garantizar el tipo de comportamiento transitorio para el sistema (5.1) en lazo cerrado con el controlador (5.2).

Por otro lado, es claro que de manera general no se pueden calcular las soluciones explícitas de los sistemas no lineales las cuales pudieran aportar algún tipo de información sobre su

comportamiento transitorio. Sin embargo, el sistema que se considera en el presente trabajo es un sistema homogéneo, entonces, partiendo de la idea de que los sistemas homogéneos comparten con los sistemas lineales muchas de las propiedades que son útiles en el análisis, el camino a seguir es de acuerdo a la Sección 2.4 en la cual se mostró que el tipo de comportamiento transitorio del sistema se puede determinar a través del estudio de la existencia de conjuntos invariantes. Con esta información en mente, se procede a verificar (para el caso no lineal) sí existen superficies positivamente invariantes que, en caso de existir, puedan garantizar el comportamiento que toman las trayectorias del sistema. Así, el procedimiento a seguir consiste básicamente en lo siguiente:

- proponer un conjunto que describa una superficie homogénea;
- verificar bajo que condiciones se determina que la superficie propuesta es un conjunto positivamente invariante del sistema;
- a partir de éstas condiciones de existencia, conformar el criterio de diseño de ganancias con el cual se garantice la condición de oscilación o no oscilación de las trayectorias del sistema.

5.3.1 Superficies positivamente invariantes

De acuerdo al procedimiento descrito en la sección anterior, primeramente es necesario proponer alguna superficie homogénea. Así, en este caso se definen específicamente los conjuntos S_i dados por

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \alpha_i [x_1]^{\frac{2}{3}}\} \quad i \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

La idea de que la existencia de conjuntos invariantes ayuda a determinar el tipo de comportamiento transitorio se ejemplifica en la Figura 5.1. Note que si existe alguna superficie positivamente invariante como la mostrada en la Figura 5.1, entonces por definición las trayectorias del sistema no las pueden atravesar o cortar, por lo tanto, se puede afirmar que en este caso las trayectorias no oscilan.

A continuación, se presenta uno de los principales resultados de esta tesis, en el cuál se describen las condiciones para determinar cuando los conjuntos S_i constituyen superficies invariantes del sistema y cuando no.

Teorema 8. *Considere el sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.2), el conjunto S_i dado por (5.6), y la constante Δ como sigue*

$$\Delta = \frac{9^2}{8^2} k_2^4 - 2^3 k_1^3, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}. \quad (5.7)$$

1. Si $\Delta > 0$ entonces existen α_1 y α_2 reales, tales que S_i son superficies positivamente invariantes del sistema.
2. Si $\Delta = 0$ entonces existen $\alpha_1 = \alpha_2$ reales, tales que S_i es superficie positivamente invariante del sistema.

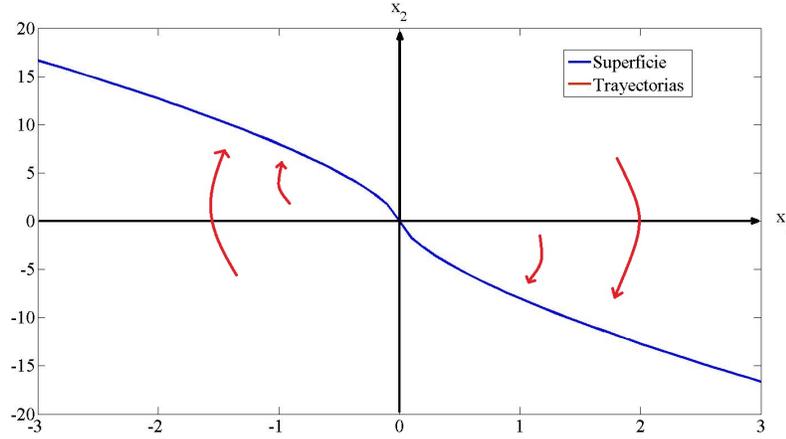


Figura 5.1: Superficie invariante

3. Si $\Delta < 0$ entonces no existen α_1 y α_2 reales, tales que S_i sean superficies positivamente invariantes del sistema.

Demostración. A partir de (5.6) defina

$$s(x) = x_2 - \alpha[x_1]^{\frac{2}{3}},$$

note que

$$s(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \alpha[x_1]^{\frac{2}{3}}. \quad (5.8)$$

Debido a que $s(x) = 0$ describe al conjunto (5.6), la idea de la demostración es verificar que si $s(x_0)$ es igual a cero, entonces, $s(x)$ también es igual a cero a lo largo de las trayectorias del sistema. Para esto, tomamos la derivada de s a lo largo de las trayectorias del sistema, la cual está dada por

$$\dot{s} = [-k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}] - \frac{2}{3}\alpha|x_1|^{-\frac{1}{3}}x_2.$$

Ahora, substituyendo en esta expresión la condición (5.8), se obtiene

$$\dot{s}|_{s=0} = -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[\alpha]^{\frac{1}{2}}[x_1]^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\alpha^2[x_1]^{\frac{1}{3}},$$

factorizando el término $[x_1]^{\frac{1}{3}}$ obtenemos

$$\dot{s}|_{s=0} = \left(-\frac{2}{3}\alpha^2 - k_2[\alpha]^{\frac{1}{2}} - k_1 \right) [x_1]^{\frac{1}{3}}.$$

Note que $\dot{s}|_{s=0} = 0 \forall x_1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$$-\frac{2}{3}\alpha^2 - k_2[\alpha]^{\frac{1}{2}} - k_1 = 0,$$

expresión que a su vez es equivalente a

$$\alpha^2 + \frac{3}{2}k_2[\alpha]^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}k_1 = 0. \quad (5.9)$$

Ahora, realizando el siguiente cambio de variable $[\alpha]^{1/2} = \lambda$ de (5.9) se obtiene

$$P(\lambda) := \lambda^4 + \frac{3}{2}k_2\lambda + \frac{3}{2}k_1 = 0.$$

Observe que la ecuación (5.9) tendrá soluciones reales siempre que $P(\lambda)$ tenga raíces reales. De esta forma, podemos asegurar que existen α_1 y α_2 reales, tales que S_i son superficies positivamente invariantes, siempre que $P(\lambda)$ tenga raíces reales. Ahora, la existencia de raíces reales de $P(\lambda)$ depende del valor de Δ , como se establece en el Lema 1 (el cual se describe más abajo). Con esto se concluye la demostración. \square

Lema 1. Sean el polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \frac{3}{2}k_2\lambda + \frac{3}{2}k_1 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (5.10)$$

y la constante Δ como en (5.7).

1. Si $\Delta > 0$, entonces el polinomio tiene 2 raíces reales distintas.
2. Si $\Delta = 0$, entonces el polinomio tiene 2 raíces reales iguales.
3. Si $\Delta < 0$, entonces el polinomio no tiene raíces reales.

Demostración. La primera etapa de la demostración del lema se hace utilizando el método de Ferrari para resolver ecuaciones de cuarto grado (vea, por ejemplo, [12]). Con este método se obtienen las raíces de $P(\lambda)$ las cuales son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[(-\sqrt{y}) + \sqrt{R_1} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[(-\sqrt{y}) - \sqrt{R_2} \right], \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{y}) + \sqrt{R_3} \right], \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{y}) - \sqrt{R_4} \right], \end{aligned}$$

donde $R_1 = R_2 = -\frac{3k_2}{\sqrt{y}} - y$, $R_3 = R_4 = \frac{3k_2}{\sqrt{y}} - y$, y donde y es alguna raíz de la ecuación cúbica resolvente dada por

$$y^3 - 6k_1y - \frac{9}{4}k_2^2 = 0. \quad (5.11)$$

Debido a que cualquier raíz y funciona para el método, tomaremos la raíz real positiva más pequeña (abajo se verifica que siempre existe). Primero observe que (al ser $y > 0$) $R_{1,2} < 0$, por lo que las raíces $\lambda_{1,2}$ no son reales, por lo tanto, solo se considerarán $\lambda_{3,4}$ en los siguientes desarrollos.

De acuerdo al método de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas (vea, por ejemplo, [12]), primero se define lo siguiente

$$p := -6k_1, \quad q := -\frac{9}{4}k_2^2, \quad (5.12)$$

note que $p, q < 0$.

Posteriormente se describen las soluciones de la ecuación resolvente que dependen del signo de Δ , a decir, como se establece a continuación.

1. $\Delta > 0$. La ecuación resolvente posee una solución real dada por

$$y = u + v, \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}},$$

que claramente es positiva.

2. $\Delta = 0$. La ecuación resolvente tiene dos soluciones reales, una simple y una doble dadas por

$$y_0 = \frac{3q}{p}, \quad y_{1,2} = \frac{-3q}{2p}, \quad (5.13)$$

note que las raíces $y_{1,2}$ siempre son negativas pero y_0 siempre es positiva.

3. $\Delta < 0$. La ecuación resolvente posee tres raíces reales dadas por

$$y_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right),$$

con $k = 0, 1, 2$ y el ángulo $\theta \in (0, \pi)$ que está determinado a través de la siguiente ecuación $\cos(\theta) = \frac{-q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}}$. De (5.7) y de (5.12) se tiene que

$$\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}. \quad (5.14)$$

Así, $\Delta < 0$ implica que $0 < \frac{-q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}} < 1$, y esto a su vez que $\theta \in (0, \pi/2)$. De aquí es claro que, en este caso, la única raíz positiva es y_0 .

La idea de la demostración es verificar que el signo de $R := R_3 = R_4$ en (5.11) coincide con el signo de Δ . Para esto, analizaremos el comportamiento de la raíz positiva de la ecuación cúbica resolvente (5.11).

Primero note que si $\Delta = 0$, entonces se obtienen las siguientes relaciones

$$27\bar{q}^2 = -4\bar{p}^3, \quad 9^2 k_2^2 = 2^9 k_1^3 \quad (5.15)$$

donde denotamos $\bar{p} = p|_{\Delta=0}$, $\bar{q} = q|_{\Delta=0}$, con p y q como en (5.12).

Ahora, denotaremos a la raíz positiva como $y = f(q, \Delta)$, es decir, consideraremos a y como una función que depende del valor Δ . Así, considerando las raíces positivas de la ecuación resolvente, (5.14) y (5.15), definimos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia

$$f(q, \Delta) = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, & \Delta > 0 \\ 2\sqrt[3]{-q/2}, & \Delta = 0 \\ 2\sqrt{\sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \Delta} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}, & \Delta < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

A continuación, se verificará que, fijando q , la función f es continua en $\Delta = 0$, es decir, verificaremos el siguiente límite

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f(q, \Delta) = f(q, 0).$$

Para esto procederemos a verificar los límites laterales.

- Caso: $\Delta > 0$. Note que claramente de (5.17) se obtiene lo siguiente

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} f(q, \Delta) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

- Caso: $\Delta < 0$. Sabemos que $\cos(\theta) = \frac{-q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}}$, equivalentemente, $-q/2 = \sqrt{-(p/3)^3} \cos(\theta)$. Sustituyendo esta igualdad en (5.14) claramente se deduce la siguiente relación

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \sin^2(\theta),$$

de esta relación se observa que si $\Delta \rightarrow 0$ entonces $\theta \rightarrow 0$ ó $\theta \rightarrow \pi$. Sin embargo, sabemos que $\theta \in (0, \pi/2)$ y por lo tanto $\theta \rightarrow 0^+$. Así, de (5.17) tenemos que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0^-} f(q, \Delta) = 2\sqrt{\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}} = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Claramente, los dos límites laterales existen y coinciden con $f(q, 0)$, por lo tanto la función f es continua en $\Delta = 0$. Ahora substituyendo el valor de y en R cuando $\Delta = 0$, y usando (5.12) se obtiene

$$R = \frac{3k_2}{\sqrt{2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}}} - 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 0,$$

por lo que $R = 0$ cuando $\Delta = 0$.

Observe que para concluir con la prueba del lema, es suficiente verificar que el signo de $R_{3,4}$ en (5.11) coincide con el signo de Δ (puesto que de ello depende que λ_3 y λ_4 sean o no sean reales). Observe también que Δ se puede ver como una función en p, q , además es homogénea de grado $m = 6$ con pesos $[2, 3]$. Considere la siguiente esfera homogénea

$$S_c = \{[p, q]^T \in \mathbb{R}^2 : V(p, q) = c\},$$

donde $V(p, q) = |p|^3 + q^2$ y c una constante real positiva (note que en S_c , $p = -(c - q^2)^{\frac{1}{3}}$). Considerando que podemos estudiar algunas propiedades de funciones homogéneas en esferas homogéneas, definimos la siguiente función que corresponde a Δ restringida a la esfera S_c , es decir

$$\bar{\Delta}(q) = \Delta|_{S_c} = \beta q^2 - \frac{c}{3^3}, \quad q \in (-\sqrt{c}, 0)$$

donde $\beta = \frac{2^2 + 3^3}{2^2 3^3}$.

Lo que queremos es verificar si el signo de Δ coincide con el signo de R , por lo tanto, también podemos analizar el signo de R en S_c . Observe que $R = 0 \Leftrightarrow 3k_2 = y^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y = (3k_2)^{\frac{2}{3}}$, es por eso que definimos la siguiente función, (tenga en cuenta que $y = f(q, \Delta)$)

$$\hat{R}(k_1, k_2) = (3k_2)^{\frac{2}{3}} - f(q, \Delta),$$

de esta forma el signo de \hat{R} tiene el mismo signo que R , ahora reescribiendo a \hat{R} en términos de p y q se obtiene

$$\tilde{R}(p, q) = 2^{\frac{2}{3}}(-q)^{\frac{1}{3}} - f(q, \Delta(p, q)),$$

ahora definimos

$$\bar{R}(q) = \tilde{R}|_{S_c} = 2^{\frac{2}{3}}(-q)^{\frac{1}{3}} - f(q, \Delta(p, q))|_{S_c}, \quad q \in (-\sqrt{c}, 0),$$

note que $f(q, \Delta(p, q))|_{S_c} = f(q, \bar{\Delta})$, con esta observación se obtiene la siguiente función

$$\bar{R}(q) = 2^{\frac{2}{3}}(-q)^{\frac{1}{3}} - \bar{f}(q), \quad q \in (-\sqrt{c}, 0),$$

donde $\bar{f}(q) = f(q, \Delta(p, q))|_{S_c}$. Por lo tanto el signo de R coincide con el signo de \bar{R} . Así, nuestro problema se reduce a verificar si el signo de $\bar{\Delta}(q)$ y el signo de $\bar{R}(q)$ coinciden. Lo que sabemos de $\bar{\Delta}$ es el dominio según su signo, es decir

- $D_{\bar{\Delta}>0} = \left(-\sqrt{c}, -\sqrt{\frac{c}{3^3\beta}}\right)$
- $D_{\bar{\Delta}=0} = \left\{-\sqrt{\frac{c}{3^3\beta}}\right\}$
- $D_{\bar{\Delta}<0} = \left(-\sqrt{\frac{c}{3^3\beta}}, 0\right)$.

Y debido al análisis de continuidad que se hizo para $f(q, \Delta)$ ya sabemos que $\bar{R} = 0$, cuando $\bar{\Delta} = 0$, por lo tanto, tenemos que

$$\bar{R}(q) = \begin{cases} 2^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{-q/2} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\bar{\Delta}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\bar{\Delta}}}, & \bar{\Delta} > 0 \\ 0, & \bar{\Delta} = 0 \\ 2\sqrt{\sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \bar{\Delta}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}, & \bar{\Delta} < 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

Para verificar en los casos restantes que $\bar{\Delta}$ y \bar{R} tienen el mismo signo, se analizará mediante una verificación numérica ¹. En la Figura 5.2 se ilustra que la función $\bar{R}(q)$ es una función decreciente en el intervalo $(-\sqrt{c}, 0)$ utilizando $c = 64$, en la cual $\bar{R}(q)$ es positiva cuando $\bar{\Delta}(q)$ es positiva, de igual manera cuando $\bar{R}(q)$ es negativa, $\bar{\Delta}(q)$ también es negativa. □

¹A pesar de que es una verificación numérica, este resultado se implica por el Teorema 7 de [29].

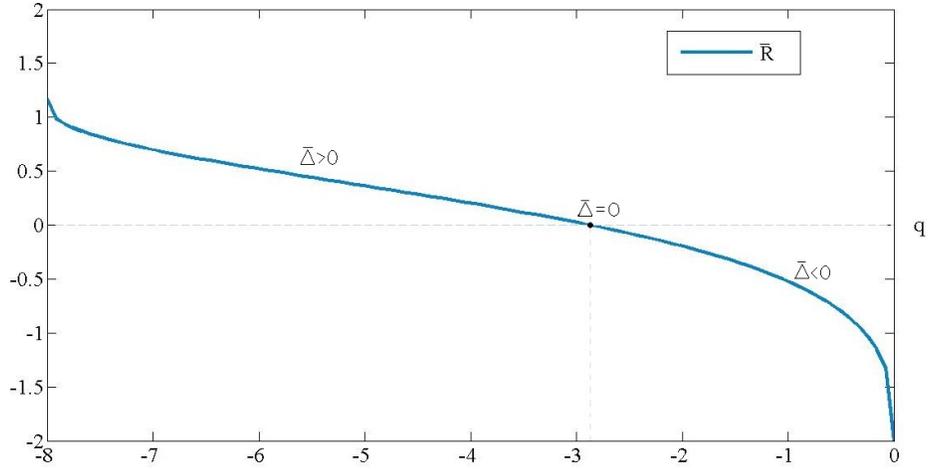


Figura 5.2: Grafica de $\bar{R}(q)$, para los distintos casos de $\bar{\Delta}(q)$.

5.3.2 Tipos de comportamiento transitorio

Ahora que ya tenemos el criterio de selección de ganancias que permite determinar la existencia de conjuntos invariantes del sistema, estableceremos sus implicaciones en el tipo de comportamiento transitorio de las soluciones del sistema.

Corolario 4. *Considere el sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.2) y la constante Δ como en (5.7).*

- Si $\Delta \geq 0$, entonces el comportamiento transitorio del sistema no es oscilatorio.
- Si $\Delta < 0$, entonces el comportamiento transitorio del sistema es oscilatorio.

Demostración. Para $\Delta \geq 0$. El comportamiento transitorio del sistema no es oscilatorio ya que en este caso existen superficies positivamente invariantes de la forma S_i como en (5.6) y debido a la Definición 1, las trayectorias no pueden atravesar estos conjuntos S_i .

Para el caso $\Delta < 0$. Se procede a revisar y evaluar el campo vectorial, para eso se analizan las trayectorias por cuadrantes. Observe que este análisis se puede reducir a solo dos cuadrantes gracias a que el campo vectorial es simétrico respecto al origen. Así, sin pérdida de generalidad, tomaremos los cuadrantes I y IV . Suponga que la trayectoria inicia en el cuadrante I , se analiza por componentes del campo vectorial para saber la dirección de la trayectoria, note que el primer componente toma el valor de x_2 que es positivo, lo que indica que se desplaza a la derecha en esta dirección, mientras que la segunda componente toma el valor de $-k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}$ que es negativo y entonces apunta hacia abajo en esta dirección (hacia el cuadrante IV). Cuando la primera componente se aproxima a cero, la segunda componente tiende a el valor de $-k_1[x_1]^{\frac{1}{3}}$ el cual no puede ser cero porque la primera componente siempre apunta hacia la derecha. Sabemos que la trayectoria no puede divergir en este caso y por lo tanto entra el cuadrante IV .

Ahora, en el cuadrante IV , se procede a verificar que el conjunto $\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 : [x_2]^{\frac{3}{2}} = [\alpha_i]^{\frac{3}{2}}x_1\}$ es atractivo para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}_{<0}$ para cualquier condición inicial en el conjunto

Casos	Valores de k_1 y k_2	Valores de k_1 y k_2	Superficie
$\Delta > 0$	$k_1 = 2, k_2 = 4$	$\alpha_1 = 0.03676, \alpha_2 = 3.17$	$S_{1,2} = x_1 + \alpha_{1,2} [x_2]^{\frac{3}{2}}$
$\Delta = 0$	$k_1 = 1, k_2 = 1.58560$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1.3505$	$S_1 = x_1 + \alpha_{1,2} [x_2]^{\frac{3}{2}}$
$\Delta < 0$	$k_1 = 3, k_2 = 2$	No son reales	No existe

Tabla 5.1: Distintos casos de la constante Δ

$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > \alpha_i [x_1]^{\frac{2}{3}}\}$. Para esto se propone la función

$$W = \bar{s}^2 \quad (5.18)$$

donde $\bar{s}(x) = [x_2]^{\frac{3}{2}} - [\alpha_i]^{\frac{3}{2}} x_1$. Lo que se quiere es verificar que $\bar{s}\dot{\bar{s}} < 0$ (vea por ejemplo [34], [2], [31]). Observe que $\bar{s}(x) = 0$ describe al conjunto S . Tomando la derivada de W a lo largo de las trayectorias del sistema, se obtiene

$$\dot{W} = 2\bar{s}\dot{\bar{s}}$$

$$\dot{W} = 2\bar{s} \left(-\frac{3}{2} k_1 [x_1]^{\frac{1}{3}} |x_2|^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} k_2 x_2 - [\alpha]^{\frac{3}{2}} x_2 \right)$$

Ahora, considerando $\bar{s}(x) = [x_2]^{\frac{3}{2}} - [\alpha_i]^{\frac{3}{2}} x_1 > 0$ y que $x_1 > 0$ se obtiene

$$\dot{W} \leq 2\bar{s} \left(-\frac{3}{2} k_1 x_2 [\alpha]^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} k_2 x_2 - [\alpha]^{\frac{3}{2}} x_2 \right)$$

$$\dot{W} \leq 2\bar{s} \left(\frac{3}{2} k_1 + \frac{3}{2} k_2 [\alpha]^{\frac{1}{2}} + \alpha^2 \right) |x_2| \frac{1}{[\alpha]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\dot{W} \leq 2\sqrt{W} \left(\alpha^2 + \frac{3}{2} k_2 [\alpha]^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} k_1 \right) |x_2| \frac{1}{[\alpha]^{\frac{1}{2}}}.$$

Esto demuestra que el conjunto S es localmente atractivo y, además, que las trayectorias lo atraviesan en tiempo finito

Por lo tanto, podemos decir que la trayectoria se desplaza al cuadrante *III*, ahora, por la simetría del campo pasa lo mismo que en el cuadrante *I*, al pasar al cuadrante *II* sucede lo mismo que en el cuadrante *IV*, completando el ciclo (vea la Figura 5.3). Por homogeneidad podemos asegurar el comportamiento oscilatorio. Observe que a pesar de converger en tiempo finito al origen, la trayectoria oscilará un infinito de ciclos hasta llegar al origen (esto se conoce como fenómeno de Zenón). \square

A manera de ilustración, enseguida se presenta un ejemplo sobre el resultado del Teorema 8.

Ejemplo 8. *En este ejemplo se presenta el comportamiento del sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.2) con distintos valores en las ganancias tales que se den los tres casos del signo de Δ , los cuales determinan la existencia o no de superficies positivamente invariantes. En la Tabla 5.1 se describen los casos de la constante Δ .*

En la Figura 5.4, se puede apreciar el plano fase del sistema para el caso $\Delta > 0$, con la existencia de 2 superficies positivamente invariantes por lo cual el comportamiento transitorio

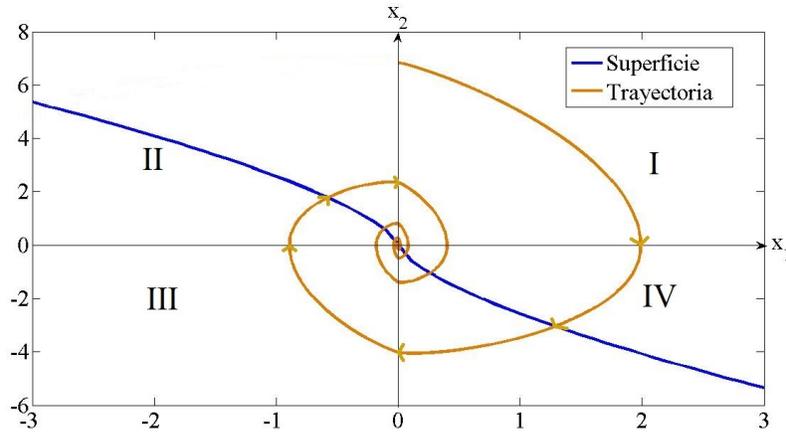


Figura 5.3: Trayectoria para el sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.2), para $\Delta < 0$

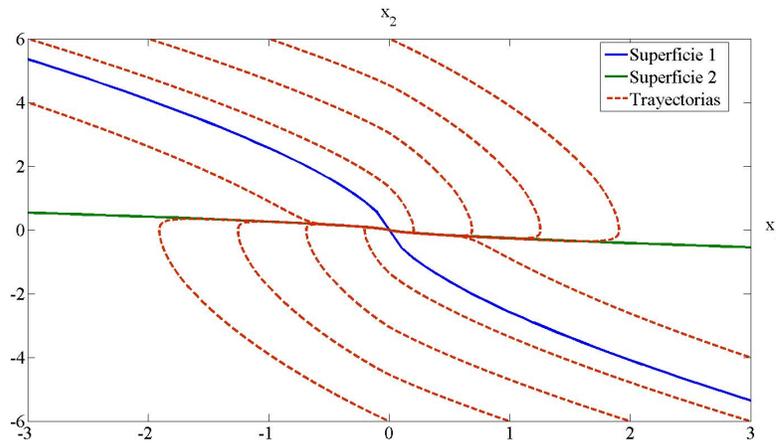


Figura 5.4: $\Delta > 0$, dos superficies invariantes

no es oscilatorio; en la Figura 5.5 se observa que existe sólo una superficie positivamente invariante, ya que $\alpha_1 = \alpha_2$ para $\Delta = 0$, nuevamente, el transitorio del sistema no es oscilatorio; por último, en la Figura 5.6 se presenta el caso $\Delta < 0$ en el cual se muestra que no existen superficies invariantes, por lo cual el comportamiento transitorio del sistema es oscilatorio.

5.3.3 Escalamiento de ganancias

A continuación, se presenta un teorema en el que se muestra que los resultados del Teorema 8 se mantienen a pesar de que se escalen las ganancias del controlador (5.2) de manera específica, a decir, el escalamiento es como en el que se realiza en el esquema de control por retroalimentación de salida descrito en el Capítulo 3.

Teorema 9. Considere el sistema (5.1) con el controlador

$$u = \gamma u_0(\gamma^{-1}x) = -\gamma^{\frac{2}{3}}k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - \gamma^{\frac{1}{2}}k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

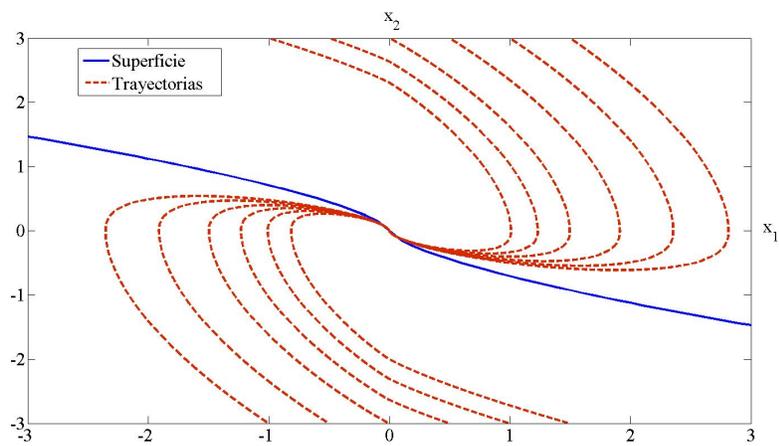


Figura 5.5: $\Delta < 0$, una superficie invariante

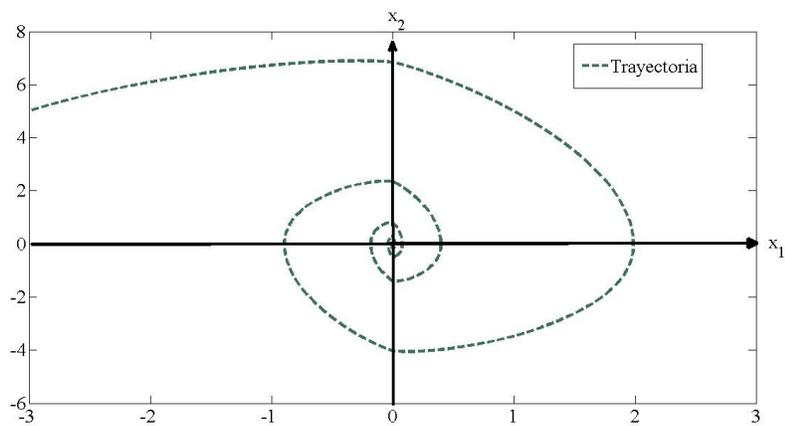


Figura 5.6: $\Delta = 0$, no existen superficies invariantes

con S_i y Δ como en el Teorema 8. Lo siguiente se satisface para toda $\gamma > 0$.

- Si $\Delta > 0$ entonces existen α_1 y α_2 reales tales que S_i son superficies positivamente invariantes del sistema.
- Si $\Delta = 0$ entonces existen $\alpha_1 = \alpha_2$ reales tales que S_i es superficie positivamente invariante del sistema.
- Si $\Delta < 0$ entonces no existen α_1 y α_2 reales tales que S_i son superficies positivamente invariantes del sistema.

Demostración. Para el sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.19), se tiene que el discriminante está dado por

$$\bar{\Delta} = \frac{9^2}{8^2} \bar{k}_2^4 - 2^3 \bar{k}_1^3,$$

donde $\bar{k}_1 = \gamma^{\frac{2}{3}} k_1$ y $\bar{k}_2 = \gamma^{\frac{1}{2}} k_2$. Substituyendo \bar{k}_1 y \bar{k}_2 en la constante $\bar{\Delta}$ se obtiene

$$\bar{\Delta} = \frac{9^2}{8^2} \gamma^2 k_2^4 - 2^3 \gamma^2 k_1^3,$$

y al factorizar γ^2 se obtiene

$$\bar{\Delta} = \gamma^2 \left(\frac{9^2}{8^2} k_2^4 - 2^3 k_1^3 \right)$$

y como resultado nos queda lo siguiente

$$\bar{\Delta} = \gamma^2 \Delta. \tag{5.20}$$

Donde Δ corresponde al sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.2), note que el signo de $\bar{\Delta}$ coincide con el signo de Δ . Por lo tanto el tipo de comportamiento transitorio del sistema se mantiene independientemente del valor del parámetro γ en ambos sistemas. \square

Observación 2. Note que si $\gamma = 1$ en (5.19), se recupera el controlador (5.2).

A continuación, se presenta un ejemplo ilustrativo del resultado del Teorema 9.

Ejemplo 9. Considere el sistema (5.1) en lazo cerrado con (5.19), en este ejemplo se toman los valores de las ganancias $k_1 = 2$ y $k_2 = 4$, note que con estos valores $\Delta < 0$, entonces es el caso de comportamiento oscilatorio.

En la Figura 5.7, se utiliza el valor de $\gamma = 0.3$ y el comportamiento es oscilatorio. En la Figura 5.8, se utiliza $\gamma = 6$ el comportamiento transitorio del sistema no se modifica, y sigue siendo oscilatorio. Por lo que se verifica que el valor de γ no afecta el comportamiento del sistema, siempre y cuando $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$.

Con esto se concluye el análisis del caso nominal. En la siguiente sección se tratará el caso con perturbaciones y retroalimentación de salida.

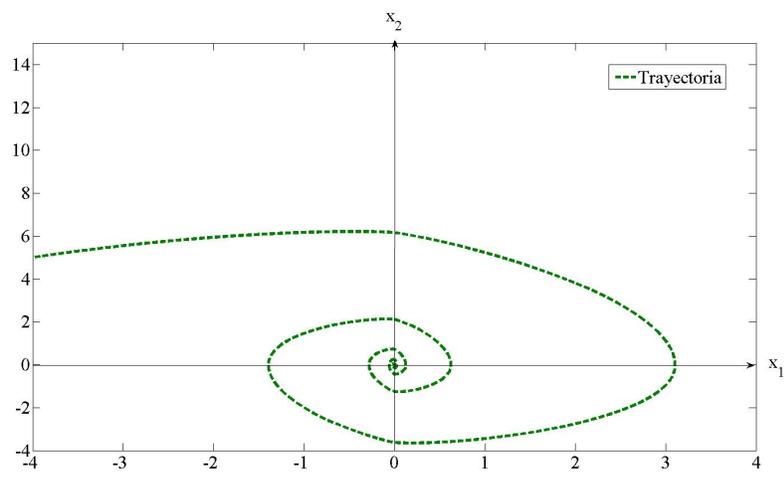


Figura 5.7: $\Delta < 0$, con $\gamma = 0.3$

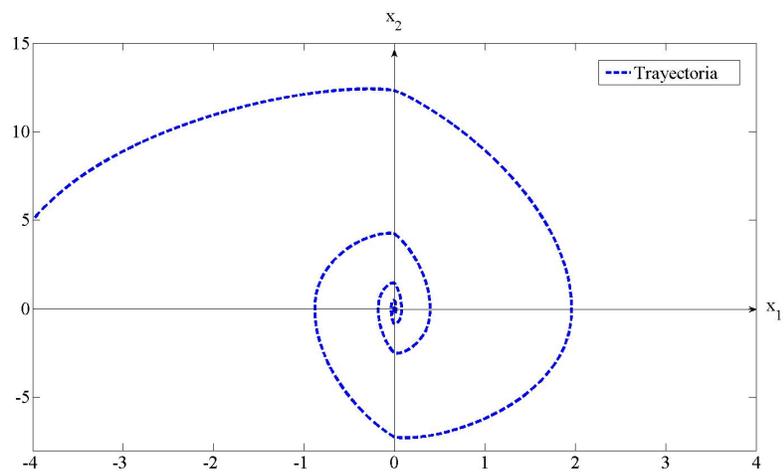


Figura 5.8: $\Delta < 0$, con $\gamma = 6$

5.4 Sistema de control perturbado

Hasta el momento, el criterio de diseño de ganancias del controlador u_0 ha estado limitado al sistema de control nominal y no se ha tratado el caso perturbado. Con la finalidad de obtener resultados favorables para el sistema en presencia de perturbaciones, se hace uso del esquema de control por retroalimentación de salida descrito en el Capítulo 3. Recuerde que de acuerdo con el Teorema 4 dicho esquema de control asegura la estabilidad en tiempo finito del origen del sistema en presencia de perturbaciones. Sin embargo, el esquema no garantiza el tipo de comportamiento transitorio del sistema. Es por esto que el objetivo en esta sección es mostrar que el tipo de transitorio del sistema (3.1) en lazo cerrado con el esquema de retroalimentación por salida se puede garantizar utilizando los desarrollos de la sección anterior.

Considere el sistema (3.1) y el esquema de control (3.3), (3.4) que es de la forma

$$\begin{aligned} u &= \gamma u_0(\gamma^{-1}\hat{x}) - \hat{\delta} \\ \dot{\hat{x}}_1 &= -\gamma^{\frac{1}{3}}\hat{k}_1[\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\gamma^{\frac{2}{3}}\hat{k}_2[\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{3}} + \gamma u_0(\gamma^{-1}\hat{x}) \\ \dot{\hat{\delta}} &= -\gamma\hat{k}_3[\hat{x}_1 - x_1]^0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Eligiendo la ley de control $u_0 = -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}$ el controlador (5.21) queda como sigue

$$\begin{aligned} u &= -\gamma^{\frac{2}{3}}k_1[\hat{x}_1]^{\frac{1}{3}} - \gamma^{\frac{1}{2}}k_2[\hat{x}_2]^{\frac{1}{2}} - \hat{\delta} \\ \dot{\hat{x}}_1 &= -\gamma^{\frac{1}{3}}\hat{k}_1[\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\gamma^{\frac{2}{3}}\hat{k}_2[\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{3}} - \gamma^{\frac{2}{3}}k_1[\hat{x}_1]^{\frac{1}{3}} - \gamma^{\frac{1}{2}}k_2[\hat{x}_2]^{\frac{1}{2}} \\ \dot{\hat{\delta}} &= -\gamma\hat{k}_3[\hat{x}_1 - x_1]^0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

A continuación, se presentan los resultados que se obtienen del sistema perturbado (3.1) en lazo cerrado con (5.22).

Corolario 5. *Considere el sistema de control nominal conformado por (5.1) en lazo cerrado con (5.2), y el sistema de control perturbado conformado por (3.1) en lazo cerrado con (5.22). Suponga que las ganancias k_1 y k_2 son las mismas en ambos sistemas. Para cualquier condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^2$ del sistema perturbado, existe un tiempo finito $\hat{T}_{x(0)}$ a partir del cual el tipo de comportamiento transitorio del sistema perturbado es igual al tipo de comportamiento del sistema nominal.*

Demostración. $\hat{T}_{x(0)}$ es el tiempo finito que tarda el error de observación en converger a cero, en el cual, se estima exactamente la perturbación que el controlador compensa exactamente. Como en este tiempo también se recuperan exactamente los estados del sistema, entonces el controlador u es equivalente al controlador (5.19), y por el Teorema 9 se puede asegurar que se recupera el comportamiento del sistema nominal. \square

A continuación se presentan ejemplos de simulación que ilustran lo establecido en el Corolario 5.

Parámetros						
γ	k_1	k_2	\hat{k}_1	\hat{k}_2	\hat{k}_3	δ
5	2	4	3.1	5.7	1.1	$\sin(t)$

Tabla 5.2: Valores de las ganancias, γ y δ

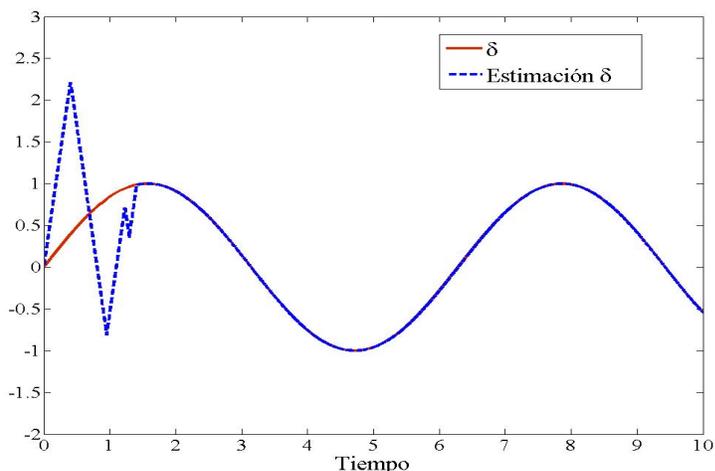


Figura 5.9: Perturbación estimada

Ejemplo 10. En este ejemplo se presenta la simulación del sistema perturbado (3.1) en lazo cerrado con (5.22), en la cual se utilizan las condiciones iniciales: $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 3$, $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 0$ y $\hat{\delta}(0) = 0$. De igual forma se consideran los parámetros descritos en la Tabla 5.2. Para la simulación se utiliza el método de Euler explícito con paso de integración de 1 ms. Observe que estas ganancias de este ejemplo satisfacen $\Delta > 0$ (vea el Teorema 8, por lo tanto, existen superficies positivamente invariantes con las cuales se garantiza que el sistema nominal no oscila).

En las Figuras 5.10 y 5.11 se puede ver que los estados del observador convergen al estado original y ambos a su vez convergen a cero en tiempo finito, un poco después del segundo 1 recupera el tipo de respuesta del caso nominal. En la Figura 5.9 podemos observar que el estado extendido del observador identifica exactamente la perturbación δ en tiempo finito.

Para el siguiente ejemplo se consideran las mismas condiciones iniciales que el ejemplo anterior, solo se considera diferente perturbación y distinto valor del parámetro γ .

Ejemplo 11. Para este ejemplo se consideran los valores de la Tabla 5.3.

En la Figura 5.12 podemos observar que el estado extendido del observador identifica exactamente la perturbación δ en tiempo finito, en las Figuras 5.13 y 5.14 se puede ver que los estados del observador convergen al estado original y ambos a su vez convergen a cero en tiempo finito, un poco antes del segundo 1 recupera el tipo de respuesta del caso nominal.

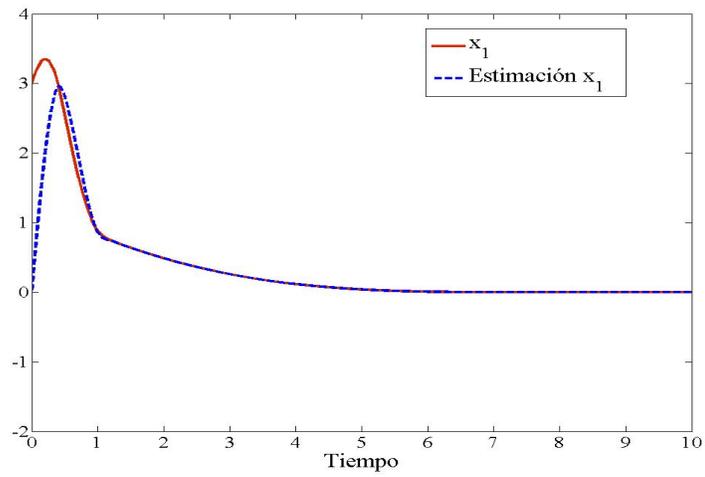


Figura 5.10: Estado x_1 y su estimación

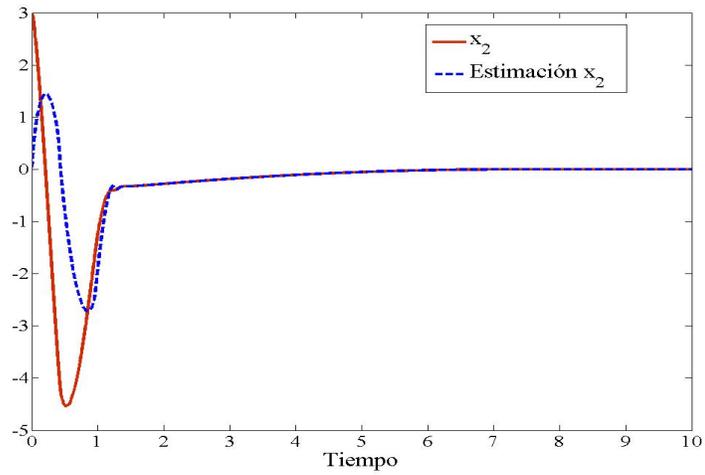


Figura 5.11: Estado x_2 y su estimación

Parámetros						
γ	k_1	k_2	\hat{k}_1	\hat{k}_2	\hat{k}_3	δ
6	2	4	3.1	5.7	1.1	$\cos(2t)$

Tabla 5.3: Ganancias, γ y δ

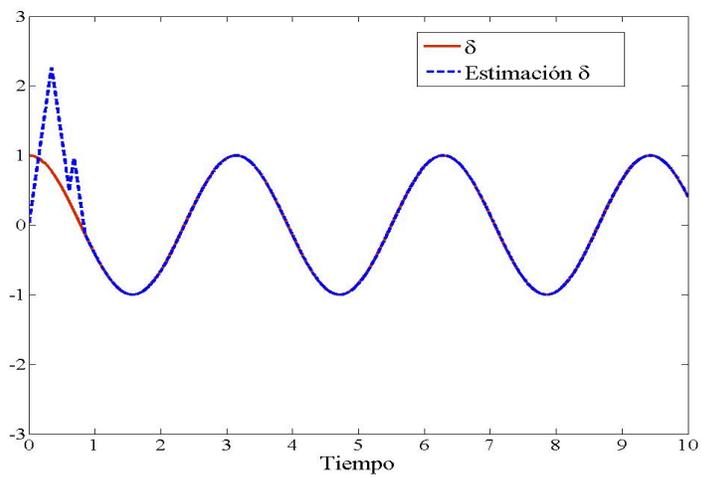


Figura 5.12: Perturbación estimada

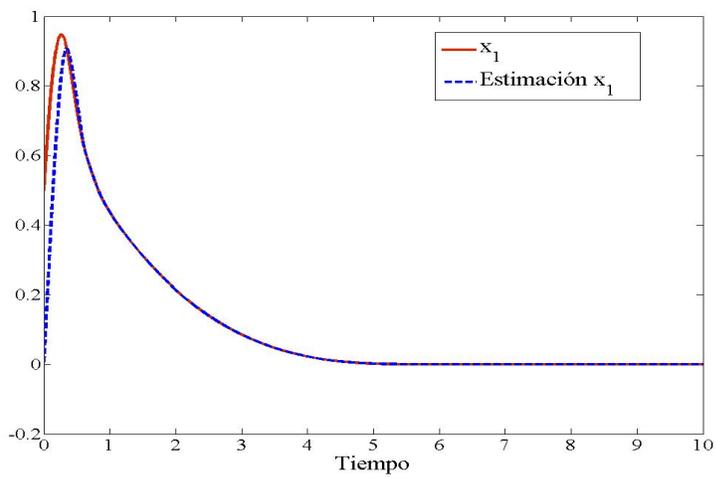


Figura 5.13: Estado x_1 y su estimación

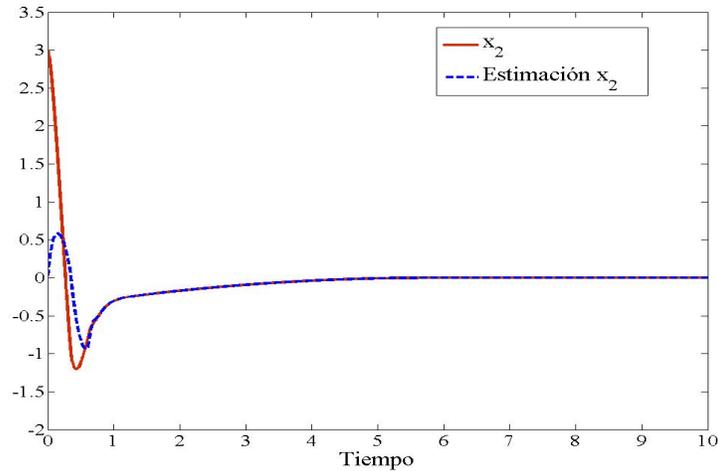


Figura 5.14: Estado x_2 y su estimación

Conclusiones del capítulo

Para el sistema de control nominal

- Se tienen 2 tipos de comportamiento transitorio del sistema, los cuales están relacionados con el criterio de diseño de las ganancias k_1 y k_2 , que pueden ser oscilatorio o no oscilatorio.
- Al proponer un conjunto que describe alguna superficie, se procede a verificar si la superficie existe, el hecho de que exista o no, implica la restricción para verificar el comportamiento del sistema, del cual se obtiene un polinomio, por lo tanto, se puede afirmar que el sistema homogéneo estudiado posee una ecuación característica tal y como pasa en los sistemas lineales.

Para el sistema de control perturbado

- El esquema de control del caso perturbado presenta que a partir de un tiempo finito se recupera el tipo de comportamiento del caso de control nominal sin tener que rediseñar las ganancias del controlador u_0 .

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

Conclusiones

Algunas de las conclusiones del trabajo desarrollado en esta tesis, en particular de los resultados obtenidos en el Capítulo 5, se enuncian a continuación.

- En este trabajo se muestra que el criterio de diseño de ganancias de un controlador homogéneo se puede obtener mediante las ideas de la teoría de los sistemas lineales de segundo orden. Ya que se exhibe que el comportamiento transitorio de un sistema no lineal puede ser determinado por la relación entre las ganancias k_1 y k_2 , como en los sistemas lineales. También es importante mencionar que el comportamiento del sistema depende de cómo sean las raíces de un polinomio, es claro que al menos en el sistema presentado en este trabajo las similitudes con los sistemas lineales son notables.
- Con el ajuste de valores de las ganancias k_1 y k_2 en la constante Δ se garantiza la condición de oscilación o no oscilación de las trayectorias del sistema.
- Para el sistema de control perturbado con el esquema de retroalimentación por salida el error de observación converge a cero en tiempo finito, que es el mismo tiempo que permite recuperar el comportamiento transitorio del caso nominal.

Trabajo a futuro

A continuación se mencionan algunas de las posibles direcciones en las que se puede continuar el trabajo desarrollado en esta tesis.

- Ampliar el método de criterio de diseño de ganancias para sistemas de orden mayor a 2.
- Para el caso de primer orden en lazo cerrado con el esquema de control por retroalimentación de salida, el orden cambia, por lo tanto, encontrar una manera para sintonizar el observador con el cual se pueda garantizar la condición de oscilación o no oscilación de las trayectorias del sistema.

- Calcular algún índice de desempeño para el sistema no lineal de segundo orden, por ejemplo, el tiempo de levantamiento, al menos en el caso de control nominal, se podría lograr obteniendo el tiempo exacto de convergencia al origen del sistema.

Bibliografía

- [1] A. Bacciotti and L. Rosier. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Communications and Control Engineering. Springer, Berlin, 2nd edition, 2005.
- [2] E. Barbashin. *Introduction to the theory of stability*. Wolters-Hoordhoff, London, 1970.
- [3] E. Bernuau, W. Perruquetti, D. Efimov, and E. Moulay. Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator. *International Journal of Control*, 88(3):451–460, 2015.
- [4] E. Bernuau, A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti. Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying weighted homogeneity. *Systems & Control Letters*, 62(12):1159 – 1167, 2013.
- [5] P. S. Bhat and S. D. Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17(2):101–127, 2005.
- [6] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite-time stability of homogeneous systems. In *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, volume 4, pages 2513–2514, 1997.
- [7] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Continuous Finite-Time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5):678–682, 1998.
- [8] W. H. Chen, J. Yang, L. Guo, and S. Li. Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods – An Overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(2):1083–1095, 2016.
- [9] E. Cruz-Zavala and J. A. Moreno. Improved convergence rate of discontinuous finite-time controllers. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):8636–8641, 2014.
- [10] E. Cruz-Zavala and J. A. Moreno. Lyapunov functions for continuous and discontinuous differentiators. *IFAC-PapersOnLine*, 49(18):660 – 665, 2016.
- [11] E. Cruz-Zavala and J. A. Moreno. Homogeneous High Order Sliding Mode design: A Lyapunov approach. *Automatica*, 80:232 – 238, 2017.
- [12] H. Cárdenas, E. Lluís, F. Raggi, and F. Tomas. *Álgebra Superior*. Trillas, México, 1990.

- [13] L. B. Freidovich and H. K. Khalil. Performance Recovery of Feedback-Linearization-Based Designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(10):2324–2334, 2008.
- [14] V. T. Haimo. Finite time controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(4):760–770, 1986.
- [15] Y. Huang and X. Xue. Active disturbance rejection control: methodology and theoretical analysis. *ISA Transactions*, 53(4):158–163, 2014.
- [16] H. K. Khalil. *Nonlinear Control*. Pearson, Boston, 2015.
- [17] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [18] A. Levant. Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998.
- [19] A. Levant. Higher-Order Sliding Modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(6):924–941, 2003.
- [20] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830, 2005.
- [21] J. A. Mercado-Uribe and J. A. Moreno. Discontinuous integral action for arbitrary relative degree in sliding-mode control. *Automatica*, 118:1–8, 2020.
- [22] A. N. Michel, L. Hou, and D. Liu. *Stability of Dynamical Systems*. Birkhauser, Boston, 2008.
- [23] J. A. Moreno. A Lyapunov approach to output feedback control using second-order sliding modes. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2012.
- [24] J. A. Moreno and M. Osorio. Strict Lyapunov functions for the Super-Twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4):1035–1040, April 2012.
- [25] Y. Orlov, Y. Aoustin, and C. Chevallereau. Finite time stabilization of a perturbed double integrator—Part I: Continuous Sliding Mode-based output feedback synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):614–618, March 2011.
- [26] T. Sanchez. *Construction of Lyapunov functions for continuous and discontinuous homogeneous systems*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City, 2016. <http://132.248.9.195/ptd2016/junio/408055776/Index.html>.
- [27] T. Sanchez and J. Moreno. Homogeneous output-feedback control with disturbance-observer for a class of nonlinear systems. (to appear in) *IFAC-PapersOnLine*, pages 1–22, 2020. 21st IFAC World Congress 2020.
- [28] T. Sanchez, J. A. Moreno, and J. A. Peralta. Diseño algorítmico de funciones de lyapunov usando formas generalizadas. In *Congreso Nacional de Control Automático, AMCA*, 2016.

- [29] T. Sanchez, A. Zavala-Río, and G. I. Zamora-Gómez. On the transient behavior and gain design for a class of second order homogeneous systems. *Automatica*, 149:110830, 2023.
- [30] V. Torres-González, T. Sanchez, L. M. Fridman, and J. A. Moreno. Design of Continuous Twisting Algorithm. *Automatica*, 80:119 – 126, 2017.
- [31] V. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [32] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewoods OHTs, New Jersey, 2nd edition, 1993.
- [33] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, London, 1997.
- [34] V. I. Zubov. *Methods of A. M. Lyapunov and their applications*. Groningen: P. Noordhoff: Limited, 1964.