



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Casos de Solución del Problema de Anulación de
Curvatura de una Conexión Afín Simétrica**

Tesis que presenta

M. en C. A. Esperanza Cuellar Castañeda

Para obtener el grado de

Doctora en Control y Sistemas Dinámicos

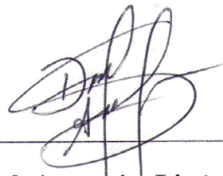
Director de la Tesis:

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

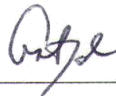
San Luis Potosí, S.L.P., 24 de Noviembre de 2023

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Casos de Solución del Problema de anulación de curvatura de una conexión afin simétrica** presentada para obtener el Grado de Doctora en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Esperanza Cuellar Castañeda** y aprobada el **27 de Septiembre de 2023** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
Director de la tesis



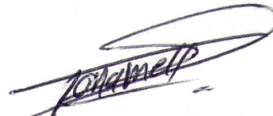
Dr. Arturo Zavala Río
Miembro del Comité Tutorial



Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Miembro del Comité Tutorial

Mauro E. Maya Méndez

Dr. Mauro Eduardo Maya Méndez
Miembro del Comité Tutorial



Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez
Miembro del Comité Tutorial



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. David A. Lizárraga Navarro.

Durante la realización del trabajo la autora recibió una beca académica del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) antes CONACYT con número de registro 232583 durante el periodo Agosto 2013-Julio 2017.

Acta de examen

Dedicatorias

Esta tesis está dedicada a:

A mi familia: A mis queridos padres, cuyo ejemplo ha sido mi guía, inspirándome en la comprensión de que para alcanzar una meta se requiere esfuerzo, paciencia y constancia. A mis hermanos, quienes, de manera directa e indirectamente han sido fuentes invaluable de motivación, impulsándome a concluir esta investigación con determinación.

A Carlo Aurelio, mi compañero de vida: Agradezco tu presencia constante y apoyo inquebrantable. Eres mi motivación continua en mi camino de aprendizaje, tanto en el ámbito académico como en el personal.

A mi yo del futuro, como un recordatorio constante de que cada esfuerzo, sin importar cuán arduo sea, lleva consigo una recompensa. Aunque el tiempo invertido pueda parecer extenso, recuerda que lo realmente valioso perdura: el conocimiento adquirido. Aprecia cada lección aprendida y, sobre todo, valora lo que aún no posees, pues la conciencia de tus carencias te guiará hacia la mejora continua.

Esta dedicación también incluye a quienes me motivaron a persistir hasta el final, agradeciendo tanto el apoyo como los consejos que, desde distintas perspectivas, me instaron a considerar detenerme. Reconozco la importancia de discernir entre la perseverancia y el prudente alto en la búsqueda de metas.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento a mi asesor el *Dr. David A. Lizárraga Navarro* por su tiempo y orientación durante el proceso de elaboración de esta tesis. Valoro las sugerencias y comentarios que proporcionó, los cuales fueron de gran utilidad para mejorar mi trabajo. Aprecio su disposición para discutir ideas y brindar asesoramiento cuando lo necesitaba, reconozco sus contribuciones a este proyecto y agradezco la oportunidad de contar con su guía en esta etapa de mi educación.

A los miembros del comité tutorial, los doctores *Arturo Zavala Río, Mauro Eduardo Maya Méndez, Hugo Cabrera Ibarra y Tonámetl Sánchez Ramírez* por sus valiosos comentarios y aportaciones hechos a mi tesis. Aprecio profundamente el tiempo que han dedicado a revisar y comentar mis escritos. Sus conocimientos y perspectivas han sido una guía indispensable en mi camino académico.

A todos los investigadores que fueron parte fundamental para mi formación académica, por sus consejos y enseñanzas durante las clases impartidas.

A mi familia y amigos por su gran apoyo moral, sus valiosos consejos y por compartir su tiempo en todo momento. Este logro no solo es mío, sino también de todos ustedes que han compartido este trayecto conmigo.

Finalmente, al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT), antes CONACYT, por la beca otorgada durante el periodo Agosto 2013 - Julio 2017 y finalmente al IPICYT por el apoyo otorgado para la realización de la escritura y publicación de un artículo científico.

Contenido

Constancia de aprobación de la tesis	II
Créditos institucionales	III
Acta de examen	IV
Dedicatorias	V
Agradecimientos	VI
Notaciones y convenciones	VIII
Resumen	IX
Abstract	X
Índice general	XI

Notaciones y convenciones

\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
$C^1(M)$	Conjunto de funciones lisas sobre M , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$
$(U; \varphi)$	Carta coordenada sobre M , $U \subset M$ (abierto), $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (homeomorfismo)
	Producto cartesiano
	Producto tensorial
$h; i$	producto interno en un espacio vectorial
\amalg	Union disjunta
$T_q M$	Espacio tangente a M en q
$T_q^* M$	Espacio cotangente a M en q
$\mathfrak{X}(M)$	Conjunto de campos vectoriales lisos sobre la variedad M
$\mathfrak{T}(M)$	Conjunto de formas diferenciales lisas sobre la variedad M
$TM = \coprod_{q \in M} T_q M$	Haz tangente de la variedad M
$T^*M = \coprod_{q \in M} T_q^* M$	Haz cotangente de la variedad M
$T_p M^{\otimes k} \otimes T_p M^{\otimes l}$	Espacio tensorial del tipo $(k; l)$
r	Conexión afín
$\frac{\partial}{\partial x^i}, \partial_i$	Derivada parcial con respecto a la coordenada x^i
$[X; Y]$	Corchete de Lie de los campos vectoriales X e Y

Resumen

Palabras clave: Conexión Afín, Tensor de curvatura, Sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) Sobredeterminado.

El problema de anular la curvatura de una conexión afín simétrica es un problema de geometría diferencial que surge en teoría de control, motivado por un problema de equivalencia (local) entre sistemas de control mecánico. La solución del problema de equivalencia consiste en determinar condiciones bajo las cuales un sistema mecánico es transformable a una de las versiones de la forma encadenada extendida (FEE). La relación de equivalencia está definida por una transformación llamada *retroalimentación de estados estática invertible*. Las FEE's son sistemas de control mecánico cuyo modelo dinámico tiene una estructura muy simple, lo cual facilita el análisis típico que se hace en teoría de control, como análisis de controlabilidad, diseño de trayectorias, leyes de control y estabilizadores, sólo por mencionar algunos. Al observar que el tensor de curvatura (R idénticamente cero) asociado a la conexión de Levi–Civita definida por la métrica de la FEE juega un papel importante dentro de las condiciones necesarias, es decir la anulabilidad de la curvatura asociada a la conexión afín simétrica definida por la métrica del sistema es una condición necesaria para que el sistema mecánico se pueda escribir o transformar en una de las versiones de una FEE, esto motivó a plantear el problema de anular la curvatura de manera similar a uno de *prescripción de curvatura*. Esto es, dada una variedad lisa M , una distribución D y una conexión afín r , con tensor de curvatura R no cero, encontrar un campo tensorial F que tome valores en D y tal que la nueva conexión $\tilde{r} = r + F$ tenga tensor de curvatura \tilde{R} idénticamente cero. La solución del problema consiste en determinar condiciones bajo las cuales existe el campo F ; a su vez, dicha solución involucra determinar condiciones de integrabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) sobredeterminados, que resultan del tensor de curvatura. En este trabajo de investigación, encontramos condiciones suficientes para resolver el problema en dimensión 2, considerando distribuciones de rango 1 constantes y conexiones afines determinadas por símbolos de Christoffel con características particulares.

Abstract

Key words: Affine Connection, curvature tensor, partial differential equations

The geometric problem of flattening an affine connection curvature arises in control theory and is motivated by a problem of (local) equivalence between mechanical systems. The solution to the equivalence problem in question consists in finding conditions under which a simple mechanical system can be transformed into one of the versions of the *extended chain form* (ECF). The equivalence relation is defined by a transformation called *invertible static feedback*. The ECF's are mechanical control systems whose mathematical model has a very simple structure, which facilitates the solution of many of the problems found in control theory such as controllability analysis, and design of control to attain different objectives. It was observed that the curvature tensor associated with the Levi-Civita connection defined by the metric tensor of the ECF plays an important role within the necessary conditions. This motivates the problem as a special case of the problem *curvature prescription*; that is, given a smooth manifold M , a distribution D and an affine connection r , with nonzero curvature tensor R over M , find a tensor field F that takes values in D and such that the new connection $r = r + F$ has curvature tensor \mathcal{R} identically zero. The solution of the problem consists of determining conditions under which F exists; in turn, the solution involves determining conditions of integrability of overdetermined systems of partial differential equations (PDEs), resulting from the curvature tensor. In this research work, we found sufficient conditions to solve the problem in dimension 2, considering constant rank 1 distributions and affine connections determined by Christoffel symbols with particular features.

Índice general

1. Introducción	1
1.0.1. Organización	2
2. Problema de anulación de curvatura	3
2.1. Planteamiento del problema	11
3. Condiciones suficientes para el caso \mathbb{R}^n	16
3.1. Condiciones suficientes para resolver el PAC2	21
3.1.1. Compendio de resultados del PAC2	31
3.1.2. Problema de anular la curvatura en dimensión 3	33
3.1.3. Ejemplo	35
4. Conclusiones	42
Anexo	43
Conceptos básicos	43
Espacios Tensoriales	43
Variedad Riemanniana	46
Conexión afín	48
Tensor de Curvatura	50
Bibliografía	52

Capítulo 1

Introducción

Debido a su efectividad y funcionalidad para realizar trabajos en el sector industrial y en la vida cotidiana, los sistemas de control mecánico han sido ampliamente estudiados [1, 2]. Desde una bicicleta hasta un robot industrial o sistemas físicos complejos, son sistemas de control mecánico que pueden ser representados por un modelo matemático, desde el punto de vista de la geometría diferencial, [1]. La mayoría de estos modelos matemáticos son difíciles de estudiar debido a la complejidad de las ecuaciones que los describen. Sin embargo, existen sistemas de control mecánico que pueden ser transformados (equivalentes) en una “Forma Encadenada Extendida” (FEE), un sistema de control mecánico simple. La transformación se logra haciendo cambios de variables de estado y de entradas de control que simplifican el modelo matemático del sistema original [3].

La simplicidad de las ecuaciones que describen a una FEE facilita el análisis y solución de problemas típicos de teoría de control (controlabilidad, estabilización, seguimiento de trayectorias, control óptimo). El problema es que no existe un método que diga de manera específica qué tipo de transformación se puede realizar, o incluso prever si la transformación existe o no. Es por esto que es importante identificar y analizar las propiedades intrínsecas que caracterizan a un sistema de control mecánico. En este sentido, *el problema de equivalencia* entre sistemas consiste en determinar un conjunto de condiciones (invariantes locales) bajo las cuales un sistema de control mecánico es transformable (equivalente) a una FEE, es importante destacar que la equivalencia se daría de manera local [3].

Resulta evidente que el número de entradas de control y la dimensión de la variedad

diferenciable, que en esencia representa todas las configuraciones del sistema, constituyen condiciones necesarias para que un sistema pueda transformarse en el otro. Sin embargo existe una que no es evidente y se le conoce como *anulación de curvatura*. La nulidad es un invariante local que es preservado bajo difeomorfismos (aplicaciones que son biyectivas, diferenciables con inversa diferenciable) [5]. Cuando se habla de la curvatura de un sistema mecánico, se hace referencia a un tensor de curvatura del tipo (1;3) que está asociado a una conexión afín simétrica. Esta conexión es definida por la métrica (matriz de inercia) del sistema [1].

Las FEE tienen curvatura idénticamente cero, lo cual sugiere que una condición necesaria para que un sistema de control mecánico sea equivalente a esta tiene que ver con el hecho de que su curvatura sea anulable (localmente). Esto motiva a plantear las siguientes preguntas: ¿Bajo qué condiciones se puede anular la curvatura de un sistema mecánico? ¿Qué parte del modelo matemático del sistema se puede manipular para obtener una conexión afín cuyo tensor de curvatura sea idénticamente cero? La solución a estas preguntas originó la idea de plantear “el problema de anulación de curvatura de una conexión afín simétrica”. Su planteamiento se hizo de manera similar a un caso particular de un problema conocido en la literatura como “prescripción de curvatura”.

El problema de anular la curvatura es un caso particular del problema general al que denominamos “problema de moldeo de curvatura de una conexión afín simétrica”. No obstante, esta tesis se enfoca principalmente en el caso de estudio de anular la curvatura en \mathbb{R}^2 , algunos ejemplos introductorios para el mismo caso en \mathbb{R}^3 , y condiciones suficientes para resolver en \mathbb{R}^n . El planteamiento del problema de anular la curvatura y las respuestas a las preguntas anteriores se describen en el siguiente capítulo.

1.0.1. Organización

El contenido y organización de esta tesis son presentados de la siguiente manera. En el capítulo 2, se incluye la motivación y planteamiento del problema. El capítulo 3 contiene los resultados que se obtuvieron para los casos \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^n y algunos ejemplos. En el capítulo 4 se dan a conocer las conclusiones, las posibles líneas de investigación y trabajo a futuro. Con el objetivo de preservar la información más significativa de esta tesis, se han incluido algunos conceptos básicos en el Anexo.

Capítulo 2

Problema de anulación de curvatura

Como se expone en [1], el proceso de resolver y analizar problemas en teoría de control, algunas veces se facilita si las ecuaciones que representan la dinámica del sistema bajo estudio se pueden escribir en una forma específica. Para ilustrar este punto, se considera un sistema de control mecánico, cuya dinámica puede ser representada por las ecuaciones de movimiento

$$M(q)\ddot{q} + C(q; \dot{q}) + G(q) = \tau; \quad (2.1)$$

donde $M(q)$ representa la matriz de inercia, $C(q; \dot{q})$ representa las fuerzas de Coriolis y centrífugas, $G(q)$ incluye los términos relacionados con la energía potencial, τ representa las fuerzas externas generalizadas, y donde q , \dot{q} y \ddot{q} son las coordenadas de posición, velocidad y aceleración, respectivamente, de los elementos rígidos móviles que conforman al sistema [1].

Los sistemas de la forma (2.1) también pueden ser transformados en modelos matemáticos en geometría diferencial, solo bastaría con determinar qué objeto geométrico diferencial lo representa [1]. Lo primero es determinar una n -variedad diferenciable Q del sistema (que represente el espacio de configuración del sistema), donde n representa el número de grados de libertad del sistema; luego bajo el supuesto de que el sistema modelado está conformado por K cuerpos rígidos, se fija un marco espacial a cada eslabón móvil del sistema, para expresar la posición y la orientación del eslabón alrededor de su centro de masa, para cada $b \in \{1, \dots, K\}$ y cada vector tangente v_q en $T_q Q$. Se construye una expresión en coordenadas del mapeo que representa la energía cinética y con ello poder calcular una representación coordenada para las velocidades espaciales del cuerpo, el número no negativo $K_b(v_q)$ da la energía cinética del cuerpo

b -ésimo, donde v_q es el vector velocidad de la trayectoria de configuración a lo largo de una curva lisa $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R} \times Q$ tal que $v_q \in T_q Q$. Al determinar la energía cinética del sistema como una función sobre el haz tangente de Q , se tiene que, para cada b existe un campo tensorial liso semidefinido positivo B_b de grado $(0;2)$ tal que $K_b(v_q) = \frac{1}{2} B_b(v_q; v_q)$; de esta manera, se puede definir una métrica Riemanniana sobre Q , estableciendo $g = B_1 + \dots + B_k$, tal que en una carta dada $(U; \cdot)$ con componentes de coordenadas $(q^1; \dots; q^n)$, g se puede expresar como $g = g_{ij} dq^i \otimes dq^j$, donde g_{ij} es la ij -entrada de la matriz de inercia $M(q)$, más detalles en [1].

Así $(Q; g)$ define una métrica Riemanniana que determina de manera única a una conexión afín de Levi-Civita, denotada por Γ , más información en [1, 4, 5]. A su vez, Γ es determinada por n^3 funciones, denotadas por Γ^k_{ij} , llamadas *símbolos de Christo* el y se definen como

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} \right); \quad (2.2)$$

para $i; j; k; l = 1; \dots; n$, donde g^{kl} representa la kl -componente de la matriz inversa de g y el término $\frac{\partial g_{il}}{\partial q^j}$ denota la derivada parcial de la il -componente de g , expresada en las coordenadas $(q^1; \dots; q^n)$ [1]. A la conexión Γ se le puede asociar un tensor de curvatura del tipo $(1;3)$ (ver Anexo). Sus componentes se pueden expresar en términos de los símbolos de Christoffel como

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial q^k} + \sum_{m=1}^n \left(\Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik} - \Gamma^l_{km} \Gamma^m_{ij} \right); \quad (2.3)$$

Es ahora cuando la noción de derivada covariante de una curva puede ser definida, esto es, sea $c : I \rightarrow \mathbb{R} \times Q$ una curva lisa sobre Q , con velocidad $\dot{c} : I \rightarrow TQ$ tal que $\Gamma_{c(t)} \dot{c}(t)$ es tangente a Q en $c(t)$, es decir, $\Gamma_{c(t)} \dot{c}(t) \in T_{c(t)} Q$. En la carta coordenada $(U; \cdot)$ se puede expresar como sigue

$$\Gamma_{c(t)} \dot{c}(t) = \left(\dot{c}(t) + \Gamma^k_{ij}(c(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial q^k} \Big|_{c(t)}; \quad (2.4)$$

A su vez, (2.4) representa una ecuación de segundo orden, donde los Γ^k_{ij} son definidos como en (2.2) y $\frac{\partial}{\partial q^k} \Big|_{c(t)}$, para $k = 1; \dots; n$, representa una base para $T_{c(t)} Q$. Si c satisface la ecuación

$$\dot{c}(t) + \Gamma^k_{ij}(c(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) = 0; \quad (2.5)$$

Entonces c se dice ser una geodésica o curva integral de r [1, 4]. El sistema de segundo orden (2.5) define una ecuación de primer orden sobre TQ y es representado por un campo vectorial llamado *spray geodésico*, que en coordenadas $(q; v)$ sobre TQ se puede expresar como

$$S(v) = v^k \frac{\partial}{\partial q^k} - \Gamma_{ij}^k(v) v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k}; \quad (2.6)$$

Las geodésicas de la conexión de Levi–Civita son soluciones de las ecuaciones de Euler–Lagrange para la función lagrangiana L_g

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial q^i} = 0; \quad (2.7)$$

Los sistemas descritos por (2.7) son llamados sistemas de control mecánico no forzados, o en ausencia de fuerzas, pero también existen sistemas sujetos a fuerzas externas, por lo que deben ser definidas sobre Q . Una fuerza se define como un mapeo liso $F : \mathbb{R} \rightarrow TQ \rightarrow T^*Q$, en la carta coordenadas $(U; q)$ la fuerza F se puede expresar como $F = F_i dq^i$, donde las funciones $F_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1; \dots; n$ representan las componentes de F . Entonces las ecuaciones de Euler–Lagrange para un sistema forzado se representa mediante la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial q^i} = F_i; \quad (2.8)$$

También se deben considerar las posibles restricciones de movimiento de los sistemas, estas restricciones aparecen en las velocidades, geométricamente son caracterizadas mediante una distribución lisa D sobre Q . En efecto, un sistema mecánico forzado y con restricciones en las velocidades se puede definir como una 4–tupla $(Q; g; F; D)$, donde Q es una variedad diferenciable de dimensión arbitraria pero finita sobre la cual se define una métrica Riemanniana g , $F = fF^1; \dots; F^m g$ es una colección de 1–formas linealmente independientes y D una distribución lisa sobre Q , todos los detalles se encuentran en [1].

En [1] también se describen los detalles de como el sistema de segundo orden (2.1) puede ser expresado en la carta coordenada $(U; q^1; \dots; q^n)$ sobre Q , como un sistema de control afín de primer orden de la forma

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + u^a(t) f_a(x(t)); \quad (2.9)$$

donde f_0 es un campo vectorial llamado *deriva*, las funciones u^a , $a = 1; \dots; m$ son las entradas de control (controles) y f_a son llamados campos vectoriales entrada o control que toman valores en la distribución control D .

Por otro lado, de la mecánica Newtoniana, la ecuación que describe el movimiento de un cuerpo es $F = ma$ (la fuerza es igual al producto de la masa y aceleración), entonces el término que corresponde a la aceleración es $r_{c(t)}\underline{c}(t)$, para el sistema forzado, los campos vectoriales $fY_a g$ son definidos por $Y_a^i = g^{ij} F_j^a$, donde g^{ij} representa las componentes de la matriz inversa que representa a g , y corresponden a los términos $\frac{1}{m}F$. Así las ecuaciones de control se pueden expresar mediante la siguiente ecuación

$$r_{c(t)}\underline{c}(t) = u^a(t) Y_a(c(t)); \quad (2.10)$$

Con la información que ya tenemos y considerando el punto de vista del lagrangiano de los sistemas de control mecánico, un sistema de la forma (2.1) puede ser expresado como un sistema de control afín, en las coordenadas $(q; v)$ de TQ , como

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= v^i; \\ \dot{v}^i &= \sum_{j,k} g^i{}_{jk} v^j v^k + u^a Y_a^i; \end{aligned} \quad (2.11)$$

Al asumir que D es una distribución lisa sobre Q y suponiendo que $fY_1; \dots; Y_m g$ es un conjunto de campos vectoriales sobre Q que toman valores en D , donde Y_a^i es la i -ésima componente de Y_a , para $a \in \{1; \dots; m\}$; y $u^a \in U$ las *entradas* de control que toman valores en el *conjunto control* U , para $U \subset \mathbb{R}^m$. Entonces, sobre TU el sistema (2.11) puede ser escrito, de manera equivalente, como un sistema de control afín de la forma

$$\dot{v} = S(v) + u^a Y_a^{\text{lift}}(v); \quad (2.12)$$

donde S es el *spray geodésico* para r sobre Q y $Y^{\text{lift}} = Y^i \frac{\partial}{\partial v^i}$, consultar los detalles en [1].

En un principio se consideró determinar condiciones bajo las cuales un sistema de control mecánico de la forma (2.12) puede ser equivalente (o transformable)(localmente) a una forma canónica en tres dimensiones con dos entradas de control w^1 y w^2 , esto es,

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= w^1; \\ \dot{x}^2 &= w^2; \\ \dot{x}^3 &= x_1 w^1; \end{aligned} \quad (2.13)$$

a este sistema se le conoce como *forma encadenada extendida* (FEE). Es importante mencionar que el sistema (2.13) puede ser considerado como un sistema de control mecánico controlable [3] que puede ser expresado como un sistema de control afín de la forma

$$\underline{z} = S(z) + w^1 Y_1^{\text{lifft}}(z) + w^2 Y_2^{\text{lifft}}(z); \quad (2.14)$$

donde S es el *spray geodésico*, y en las coordenadas $(x; z)$ sobre TM se puede expresar como

$$S(z) = z^k \frac{\partial}{\partial x^k}; \quad (2.15)$$

El problema que consiste en determinar condiciones bajo las cuales un sistema de la forma (2.11) es transformable en uno de la forma (2.13), puede ser considerado como un problema de equivalencia bajo la relación definida por una *retroalimentación de estados estática invertible* (RESI); es decir, dos sistemas son equivalentes bajo RESI si uno puede ser transformado en el otro vía una transformación de la forma $(v; w) \mapsto (z; u)$, donde $z = \psi(v)$, $u = \phi(v) + \psi(v)w$ representan, respectivamente, una transformación de variables de estado, y un cambio de entradas de control, donde $\psi : Q \rightarrow M$ es un difeomorfismo local (transformación local de espacios de configuración), $\psi(v)$ una matriz invertible para todo $v \in TR^3$ y ϕ una función lisa.

Después de la transformación, las componentes de las nuevas entradas de control adquieren la forma

$$u^j = \phi_j(v) + \sum_j \psi_{ij}(v) w^j;$$

y el sistema resultante, después de la transformación, es

$$\underline{v} = S(v) + (\phi_j(v) + \psi_{ij}(v) w^j) Y_j^{\text{lifft}}(v); \quad (2.16)$$

Efectuando un cambio de variables de estado, el sistema (2.16) se convierte en uno de la forma

$$\underline{z} = S(z) + (\phi_j(z) + \psi_{ij}(z) w^j) Y_j^{\text{lifft}}(z); \quad (2.17)$$

Luego, definiendo $\widehat{S}(z) = S(z) + \phi_j(z) Y_j^{\text{lifft}}(z)$ y $\widehat{Y}_j(z) = \psi_{ij}(z) Y_j^{\text{lifft}}(z)$, entonces (2.17) puede ser escrito como

$$\underline{z} = \widehat{S}(z) + w^j \widehat{Y}_j(z); \quad (2.18)$$

Al comparar los sprays geodésicos (2.6) y (2.15) se puede observar que los k_{ij}^k de la FEE son todos cero y, por consiguiente, las componentes del tensor de curvatura (2.3) son todas idénticamente cero. También se puede observar que, después de la transformación, los términos ${}_i(z)Y_i^{\text{lift}}(z)$ son agregados al spray geodésico $S(z)$, y que estos términos son valuados en la distribución de control D (espacio generado por las entradas de control Y con coeficientes u), por lo tanto las nuevas entradas de control siguen teniendo sentido físico y representan al sistema original.

Por otro lado, es importante notar que los términos ${}_i(z)z^i z^j \frac{\partial}{\partial z^k} + {}_i(z)Y_i^{\text{lift}}(z)$, que podemos denotar por ${}^{\sim}k_{ij}^k(z)$, definen nuevas funciones, lo que conduce a considerar la posibilidad de que exista una nueva conexión afín que podemos denotar por $\tilde{\Gamma}$, y que va a ser determinada por los ${}^{\sim}k_{ij}^k$; la nueva conexión va ser expresada en términos de la que ya se tenía originalmente Γ y los términos ${}_i(z)Y_i^{\text{lift}}(z)$, a los cuales, se les puede asociar de manera natural un tensor del tipo (1;2), que denotamos por F , sobre la distribución D .

Con base en las observaciones anteriores se podría considerar la posibilidad de que una de las condiciones que debe cumplir un sistema de control mecánico para que pueda ser transformado en una de las versiones FEE es que la curvatura del sistema sea anulable. Se puede “anular” la curvatura al eliminar los términos cuadráticos k_{ij}^k , pero esta no es una condición necesaria ni intrínseca, porque el tensor de curvatura podría ser idénticamente cero aunque los símbolos de Christoffel no sean todos cero (ver [3]). Un ejemplo de sistema mecánico que ilustra perfectamente este caso es el de un manipulador que se caracteriza por tener movimientos del tipo prismático, prismático, rotacional, conocido en la literatura como PPR Figura(2.1). Este sistema tiene una dinámica descrita por las siguientes ecuaciones:

$$M_1 \ddot{q}_1 - m_3 / \cos(q_3) \dot{q}_3^2 - m_3 / \sin(q_3) \ddot{q}_3 = \tau_1; \quad (2.19)$$

$$M_2 \ddot{q}_2 - m_3 / \sin(q_3) \dot{q}_3^2 + m_3 / \cos(q_3) \ddot{q}_3 = \tau_2; \quad (2.20)$$

$$I \ddot{q}_3 + m_3 / \cos(q_3) \dot{q}_2^2 - m_3 / \sin(q_3) \ddot{q}_1 = 0; \quad (2.21)$$

donde $M_1 = m_1 + m_2 + m_3$, m_i son las masas de los eslabones, $M_2 = m_2 + m_3$, $I = I_3 + m_3 l^2$ la inercia, y l la longitud del eslabón rotacional. Este sistema cuenta con actuadores (entradas de control) en los eslabones con movimiento prismático, pero no posee un actuador en el eslabón con movimiento rotacional. Debido a esto, el sistema es considerado subactuado, ya que el número de grados de libertad es mayor que el

número de entradas de control.

La variedad diferenciable que representa el espacio de configuraciones del sistema es definida por $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1$, con métrica Riemanniana g definida sobre Q , representada en forma matricial por

$$g_x = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & m_3/\sin(q_3) \\ 0 & M_2 & m_3/\cos(q_3) \\ m_3/\sin(q_3) & m_3/\cos(q_3) & l \end{pmatrix} : \quad (2.22)$$

Entonces los símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= \frac{m_3/\cos(q_3)(m_3^2 l^2 - M_2 l)}{M_1 M_2 l - M_2 m_3^2 l^2 \sin^2(q_3) - M_1 m_3^2 l^2 \cos^2(q_3)}; \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{m_3/\sin(q_3)(m_3^2 l^2 - M_1 l)}{M_1 M_2 l - M_2 m_3^2 l^2 \sin^2(q_3) - M_1 m_3^2 l^2 \cos^2(q_3)}; \\ \Gamma_{33}^3 &= \frac{m_3^2 l^2 \sin(q_3)(M_1 + M_2)}{M_1 M_2 l - M_2 m_3^2 l^2 \sin^2(q_3) - M_1 m_3^2 l^2 \cos^2(q_3)}. \end{aligned}$$

Aunque a simple vista no parece, las componentes del tensor de curvatura son todas iguales a cero, esto es $R_{bcd}^a = 0$ para toda $a; b; c; d \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto el PPR tiene un tensor de curvatura idénticamente cero, y [3] demuestra que este sistema es transformable a la FEE en dimensión 3, descrita por (2.13).

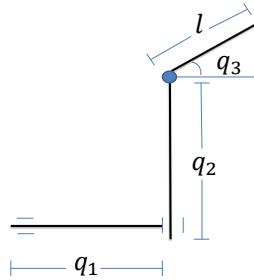


Figura 2.1: Manipulador PPR

Entonces, al agregar las funciones l_{ij} se obtiene $\tilde{k}_{ij} = k_{ij} + l_{ij}$ y, ya que r es libre de torsión, entonces los \tilde{k} también son simétricos en los índices inferiores, esto es,

$\tilde{k}_{ij} = \tilde{k}_{ji}$, y dado que $k_{ij} = k_{ji}$, entonces se tiene que $k_{ij} = k_{ji}$, y F debe ser un tensor simétrico respecto a sus índices inferiores [5]. Por lo tanto, se puede decir que un enfoque más “intrínseco” sería determinar qué campo tensorial F , que tome valores en la distribución D , define una nueva conexión afín simétrica $\tilde{\Gamma}_X Y = \Gamma_X Y + F(X; Y)$ con tensor de curvatura idénticamente cero. La existencia del campo tensorial F del tipo (1, 2), para sistemas transformables a la FEE, se establece en la siguiente proposición.

Proposición 1 *Sea un sistema de control mecánico que puede ser expresado (localmente) como la FEE por una transformación por retroalimentación estática invertible. Entonces existe un campo tensorial $F \in (D \otimes TQ)^2$ tal que $\tilde{\Gamma} = \Gamma + F$ tiene asociado un tensor de curvatura del tipo (1;3) $R = 0$.*

Demostración Sea $q \in Q$ y sea $(U; \cdot)$ una carta coordenada sobre Q , donde U es un subconjunto abierto de Q que contiene a q , entonces existe una vecindad U de q tal que $\cdot(U)$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 y dado que \cdot es transformable a una FEE entonces existe un difeomorfismo local $\cdot : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\cdot' j_U : U \rightarrow \cdot' U$ es un difeomorfismo. Así el mapeo tangente $T_q \cdot' : T_q Q \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$ es un isomorfismo lineal para todo $q \in Q$, siempre que $\cdot'(q) = p$. Luego, para cada $X \in TQ$ existe un único campo vectorial $Y \in T\mathbb{R}^3$ que está \cdot' -relacionado con X , esto es, $Y_p = T_q \cdot'(X_q)$, y el mapeo inverso satisface $(T_q \cdot')^{-1}(Y_p) = X_q$.

Por otro lado, dado que $(Q; g_Q)$ y $(\mathbb{R}^3; g_E)$ son variedades Riemannianas, entonces el pull-back de g_E por \cdot' , denotado por $\cdot' g_E$, define una métrica Riemanniana sobre Q , esto es, para cada $v, w \in T_q Q$

$$\begin{aligned} (\cdot' g_E)_q(v; w) &= (g_E)_{\cdot'(q)}(T_q \cdot'(v); T_q \cdot'(w)) \\ &= (g_E)_{\cdot'(q)}(X; Y) \\ &= (g_E \cdot')_q((T_q \cdot')^{-1}(X); (T_q \cdot')^{-1}(Y)) \\ &= (g_Q)_q(v; w); \end{aligned}$$

esto quiere decir que $\cdot' g_E = g_Q$, por lo tanto, \cdot' es una isometría.

Suponiendo que Γ denota la conexión de Levi-Civita de g_Q y $\tilde{\Gamma}$ la de g_E y dado que \cdot' es una isometría, entonces $\cdot'(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$.

Por otro lado, la diferencia entre $\tilde{\Gamma}$ y Γ define un tensor, esto es, $\tilde{\Gamma}_X Y - \Gamma_X Y = F(X; Y)$ donde F es un campo tensorial simétrico del tipo (1;2) tal que $F \in (TM \otimes TQ)$

$T M^2$) (más detalles en [5]). En particular si F toma valores en D , es decir, $F \in \Gamma(D \otimes T M^2)$ entonces $\tilde{r} = r + F$ tiene asociado un tensor de curvatura \tilde{R} del tipo $(1;3)$ idénticamente cero.

Es así como el problema de equivalencia da origen a un problema matemático al que denominamos como *problema de anulación de curvatura de una conexión afín simétrica*, o de manera mas corta lo llamaremos *problema de anulación de curvatura (PAC)*. La solución a este problema consiste en determinar condiciones para la existencia del campo F tal que al considerar una conexión afín r con tensor de curvatura R asociado y una distribución D definidos sobre una variedad diferenciable Q , la nueva conexión afín tenga asociado el tensor de curvatura nulo, y con base en esto se plantea un problema más general al que llamamos *problema de moldeo de curvatura*, para este caso se busca determinar la existencia de F para obtener un tensor de curvatura \tilde{R} predeterminado.

En este trabajo de investigación solo se incluye el análisis del problema de anular la curvatura en dimensión 2, y su planteamiento se da a conocer en la siguiente sección.

2.1. Planteamiento del problema

Dada una variedad lisa M de dimensión n , una distribución D de dimensión m , con $m \leq n$, y una conexión afín simétrica r sobre M el problema principal a resolver es:

- (i) ¿Bajo qué condiciones existe un campo tensorial F de grado $(1;2)$ simétrico tal que $F \in \Gamma(D \otimes T M^2)$, que tome valores sobre la distribución D y $\tilde{r}_X Y = r_X Y + F(X; Y)$ tenga tensor de curvatura del tipo $(1, 3)$ \tilde{R} idénticamente nulo?

Y las preguntas que surgen inmediatas a la primera son:

- (ii) ¿Existen condiciones necesarias y suficientes para determinar la existencia del campo F ?
- (iii) Si un sistema dado satisface las condiciones suficientes ¿cómo se determina F de forma explícita?

En este trabajo se intenta dar respuesta, por lo menos en casos específicos, a las preguntas planteadas de (i)–(iii) pero antes debemos entender cada una de las partes

del problema.

Si Γ es una conexión afín simétrica y $F \in (TM \otimes T^*M \otimes T^*M)$, entonces $\tilde{\Gamma} = \Gamma + F$ es otra conexión afín simétrica tal que $\tilde{\Gamma} : (TM) \rightarrow (TM) \rightarrow (TM)$ se define como

$$\tilde{\Gamma}(X; Y) = \Gamma_X Y + F(X; Y);$$

se puede mostrar fácilmente que $\tilde{\Gamma}$ satisface las propiedades (1)–(3) de la definición de conexión afín (ver Anexo), los detalles pueden ser consultados en [5].

Para expresar $\tilde{\Gamma}$ en coordenadas primero tomamos $(\frac{\partial}{\partial x^i})$, para $i = 1, \dots, n$, una base para TM , con (dx^i) su correspondiente base dual, una distribución $D_p = \text{span}\{d^j \frac{\partial}{\partial x^j}\}$, para $j = 1, \dots, m$, y suponiendo que $F \in (D \otimes T^*M \otimes T^*M)$, entonces F se puede expresar, como un tensor del tipo (1, 2), en el sistema coordenado $(U; \cdot)$ por

$$F_p = F_{ij}^l d_l \otimes dx^i \otimes dx^j;$$

como $d_l \in D$ entonces se puede expresar como una combinación lineal de los vectores que generan a D , esto es, existen funciones d_l^k tales que $d_l = d_l^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ para $l = 1, \dots, m$, por lo tanto F se puede reescribir como

$$F_p = F_{ij}^l d_l^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \otimes dx^j$$

Así la nueva conexión $\tilde{\Gamma}$ se puede expresar en coordenadas por

$$\left(\tilde{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x = \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x + F_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i}; \frac{\partial}{\partial x^j} \right); \quad (2.23)$$

Los términos del lado derecho de (2.23) también se pueden expresar, respectivamente, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x &= \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ F_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i}; \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= F_{rs}^l d_l^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^r \otimes dx^s \left(\frac{\partial}{\partial x^i}; \frac{\partial}{\partial x^j} \right); \end{aligned}$$

a su vez se cumple $dX^r(\frac{@}{@X^k}) = \frac{r}{k}$, entonces,

$$\begin{aligned} F_x(\frac{@}{@X^i}; \frac{@}{@X^j}) &= F_{rs}^l \frac{r}{i} \frac{s}{j} d_l^k(x) \frac{@}{@X^k} \\ &= F_{ij}^l d_l^k \frac{@}{@X^k}. \end{aligned}$$

Así, la ecuación (2.23) se puede reescribir como

$$\left(r \frac{@}{@x^i} \frac{@}{@x^j} \right)_x = \left(\frac{k}{ij} + F_{ij}^l d_l^k \right) \frac{@}{@X^k}. \quad (2.24)$$

Si definimos $F_{ij}^k = \frac{l}{ij}$ y $d_l^k = X_l^k$, entonces los símbolos de Christoffel que determinan a r son de la forma $\tilde{k}_{ij} = \frac{k}{ij} + \frac{l}{ij} X_l^k$ para $k; i; j = 1; \dots; n$ y $l = 1; \dots; m$, donde los $\frac{k}{ij}$ son los símbolos de Christoffel asociados a r , X_l^k es la componente k -ésima del campo vectorial X_l que toma valores en D y las $\frac{l}{ij}$ son las funciones por encontrar. En efecto, las componentes del tensor de curvatura \mathcal{R}_{bcd}^a del tipo (3, 1) asociado a r son de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{bcd}^a &= R_{bcd}^a + @_c \frac{r}{db} X_r^a + \frac{r}{db} @_c X_r^a \quad @_d \frac{r}{cb} X_r^a \quad \frac{r}{cb} @_d X_r^a \\ &+ \frac{a}{c} \frac{r}{db} X_r^a + \frac{r}{db} \frac{a}{c} X_r^a + \frac{r}{db} \frac{a}{c} X_r X^a \\ &\frac{a}{d} \frac{r}{cb} X_r^a \quad \frac{r}{cb} \frac{a}{d} X^a \quad \frac{r}{cb} \frac{a}{d} X_r X^a \end{aligned} \quad (2.25)$$

para $a; b; c; d; = 1; \dots; n$ y $r; = 1; \dots; m$. Lo anterior se puede verificar sustituyendo los \tilde{k}_{ij} en las componentes del tensor de curvatura \mathcal{R} , esto es, de la ecuación (2.3) se tiene

$$\mathcal{R}_{bcd}^a = \frac{@ \tilde{a}}{@q^c} \frac{@ \tilde{a}}{@q^d} + \sum_{=1}^n \left(\tilde{a} \tilde{cb} \quad \tilde{a} \tilde{cb} \right); \quad (2.26)$$

al sustituir los nuevos símbolos de Christoffel en la ecuación (2.26) se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{bcd}^a &= @_c \left(\frac{a}{db} + \frac{r}{db} X_r^a \right) \quad @_d \left(\frac{a}{cb} + \frac{r}{cb} X_r^a \right) + \\ &\sum_{=1}^n \left(\left(\frac{a}{c} + \frac{r}{c} X^a \right) \left(\frac{a}{db} + \frac{r}{db} X_r^a \right) \quad \left(\frac{a}{d} + \frac{r}{d} X^a \right) \left(\frac{a}{cb} + \frac{r}{cb} X_r^a \right) \right); \end{aligned}$$

Al desarrollar la ecuación se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{bcd}^a = & @_c \frac{a}{db} + @_c \frac{r}{db} X_r^a + \frac{r}{db} @_c X_r^a \quad @_d \frac{a}{cb} \quad @_d \frac{r}{cb} X_r^a \quad \frac{r}{cb} @_d X_r^a \\ & + \sum_{=1}^n \left(\frac{a}{c} \frac{r}{db} X_r^a + \frac{a}{c} \frac{r}{db} X_r^a + \frac{a}{db} \frac{r}{c} X^a + \frac{a}{c} X^a \frac{r}{db} X_r^a \right) \\ & \sum_{=1}^n \left(\frac{a}{d} \frac{r}{cb} X_r^a + \frac{a}{d} \frac{r}{cb} X_r^a + \frac{a}{cb} \frac{r}{d} X^a + \frac{a}{d} X^a \frac{r}{cb} X_r^a \right); \end{aligned}$$

Reagrupando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{bcd}^a = & @_c \frac{a}{db} \quad @_d \frac{a}{cb} + @_c \frac{r}{db} X_r^a + \frac{r}{db} @_c X_r^a \quad @_d \frac{r}{cb} X_r^a \quad \frac{r}{cb} @_d X_r^a \\ & + \sum_{=1}^n \left(\left(\frac{a}{c} \frac{r}{db} X_r^a + \frac{a}{d} \frac{r}{cb} X_r^a \right) + \frac{a}{c} \frac{r}{db} X_r^a + \frac{a}{db} \frac{r}{c} X^a + \frac{a}{c} X^a \frac{r}{db} X_r^a \right) \\ & \sum_{=1}^n \left(\frac{a}{d} \frac{r}{cb} X_r^a + \frac{a}{cb} \frac{r}{d} X^a + \frac{a}{d} X^a \frac{r}{cb} X_r^a \right); \end{aligned}$$

Obsérvese que \mathcal{R}_{bcd}^a es igual a la suma de los términos subrayados, por lo que la ecuación se reduce a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{bcd}^a = & \mathcal{R}_{bcd}^a + @_c \frac{r}{db} X_r^a + \frac{r}{db} @_c X_r^a \quad @_d \frac{r}{cb} X_r^a \quad \frac{r}{cb} @_d X_r^a \\ & + \sum_{=1}^n \left(\frac{a}{c} \frac{r}{db} X_r^a + \frac{a}{db} \frac{r}{c} X^a + \frac{a}{c} X^a \frac{r}{db} X_r^a \right) \\ & \sum_{=1}^n \left(\frac{a}{d} \frac{r}{cb} X_r^a + \frac{a}{cb} \frac{r}{d} X^a + \frac{a}{d} X^a \frac{r}{cb} X_r^a \right); \end{aligned}$$

que es idéntica a la ecuación (2.25).

Como se puede observar, \mathcal{R} involucra derivadas parciales de primer orden, consecuentemente, resolver el problema de anular la curvatura se reduce a un problema que consiste en determinar condiciones para la integrabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) de primer orden que, a su vez, determinan la existencia del campo F . El tensor \mathcal{R} tiene n^4 componentes de las cuales $\mathcal{R}_{bcd}^a = 0$ cuando $c = d$, por la antisimetría frente al intercambio de los dos últimos índices inferiores (cd) se tiene $\mathcal{R}_{bcd}^a = -\mathcal{R}_{bdc}^a$ y por la primera identidad de Bianchi descrita por la ecuación (4.0.3) (ver Anexo), el sistema de EDPs resultante tendrá solo $\frac{n^2(n^2-1)}{3}$ ecuaciones independientes, con $\frac{m n(n+1)}{2}$ incógnitas.

Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 se tiene un sistema de EDPs de 16 ecuaciones, 4 de estas independientes, con 3 incógnitas $\Gamma_{11}, \Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ y Γ_{22} . En \mathbb{R}^3 se tiene un sistema de EDPs de 81 ecuaciones, 24 independientes, con 12 incógnitas $\Gamma_{11}^l, \Gamma_{12}^l = \Gamma_{21}^l, \Gamma_{13}^l = \Gamma_{31}^l, \Gamma_{22}^l, \Gamma_{23}^l = \Gamma_{32}^l$ y Γ_{33}^l para $l = 1; 2$. Como podemos ver, los sistemas de EDPs resultantes son sobredeterminados, es decir, el número de ecuaciones es mayor en comparación con el número de incógnitas. Por consiguiente, la existencia del campo F depende directamente de la solubilidad del sistema de EDPs resultante. No obstante, hacer que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k sean todos cero basta para que las componentes de \mathcal{R} también lo sean, de esto se infiere que ésta es una condición suficiente para resolver el PAC.

Capítulo 3

Condiciones suficientes para el caso \mathbb{R}^n

El problema de anular la curvatura puede ser resuelto trivialmente si el rango de la distribución D es igual a la dimensión de la variedad M , es decir, $D = TM$; en este caso, siempre se puede encontrar funciones tales que los $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ sean idénticamente nulos. Lo interesante es determinar si con distribuciones de rango menor a la dimensión de la variedad también es posible modificar la conexión de tal manera que se obtenga una nueva conexión con curvatura nula, en otras palabras, encontrar distribuciones de rango mínimo requerido para anular la curvatura.

El siguiente resultado establece condiciones bajo las cuales los símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ pueden ser anulados.

Proposición 2 Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contiene a p y D una m -distribución lisa sobre \mathbb{R}^n . Si el $\text{span}\{r_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\}_x : i, j = 1, \dots, n; g \in D_x$, para cada $x \in U$, entonces existe un campo tensorial del tipo $(1, 2)$ $F \in (D \otimes \mathbb{R}^{n \times 2})$ tal que $\tilde{r}_x Y = r_x Y + F(X; Y)$ tiene tensor de curvatura del tipo $(1, 3)$ \tilde{R} idénticamente nulo.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{R}^n$; entonces existe una vecindad V_p de p tal que $V_p \subset U$ y dado que D es una distribución lisa sobre \mathbb{R}^n , existen m campos vectoriales $X_1, \dots, X_m \in (TV)$ tales que para cada $x \in V$, $D_x = \text{span}\{X_1(x), \dots, X_m(x)\}$. Por otro lado, si se define $C_x = \text{span}\{r_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\}_x : i, j = 1, \dots, n; g \in D_x$ entonces $C_x \subset D_x$, luego para cada $Z \in C_x$ existen funciones $a_{ij}(x)$ tales que $Z = a_{ij}^r(x) X_r^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$, para todo $i, j, k = 1, \dots, n$ y $r = 1, \dots, m$ con $m \leq n$, se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de la base de D_x ; por otra parte $Z \in C_x$ entonces también se puede expresar en coordenadas como $(r_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})_x$; por consiguiente, tenemos las siguiente

igualdad

$$(r_{@i @j})_x = a'_{ij}(x) X_i^k(x) \frac{@}{@X^k} : \quad (3.1)$$

El término izquierdo de (3.1) también se puede expresar como

$$\left(r_{\frac{@}{@x^i} \frac{@}{@x^j}} \right)_x = \frac{k}{ij}(x) \frac{@}{@X^k} :$$

así, la ecuación (3.1) se puede reescribir de la forma

$$\frac{k}{ij}(x) \frac{@}{@X^k} = a'_{ij}(x) X_i^s(x) \frac{@}{@X^s} : \quad (3.2)$$

Luego, suponiendo $s = k$, se tiene que (3.2) satisface

$$\frac{k}{ij}(x) \frac{@}{@X^k} - a'_{ij}(x) X_i^k(x) \frac{@}{@X^k} = 0 :$$

De manera equivalente

$$\frac{k}{ij}(x) - a'_{ij}(x) X_i^k(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in U : \quad (3.3)$$

Ahora si definimos $F_x = F_{ij}^r \frac{@}{@x^r} dx^i dx^j$ tal que $F_x \left(\frac{@}{@x^s}; \frac{@}{@x^t} \right) = a'_{st} X_i^r \frac{@}{@x^t} \in D_x$, entonces

$$\tilde{F}_{ij}^k = \frac{k}{ij} + a'_{ij} X_i^k = 0 : \quad (3.4)$$

En efecto, si todos los símbolos de Christoffel son nulos, entonces el tensor de curvatura \tilde{R} es idénticamente cero .

Es posible definir el campo F globalmente sobre U con el uso de particiones de la unidad, a continuación se da un esbozo de la demostración.

Sea $x \in U$, donde U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $\{U_i\}$ un atlas sobre \mathbb{R}^n tal que $\bigcup U_i = V$. Suponiendo que $\{f_i\}$ es una partición de la unidad sobre \mathbb{R}^n , entonces $\{f_i W_i\}$ es una cubierta abierta localmente finita de \mathbb{R}^n , se tiene una suma finita $\sum_{i \in I} f_i(p) = 1$, $f_i(p) \geq 0$ para todo $p \in M$ y $\text{sop}(f_i) \subset W_i$ (ver anexo). Sea F un campo tensorial del tipo $(1;2)$ definido sobre V para cada x entonces se puede definir $F_x = \sum_{i \in I} f_i(x) f_i F_i(x)$, una suma finita para cada $x \in U$. Entonces F es un campo tensorial del tipo $(1;2)$ sobre M , y por consiguiente sus componentes se pueden

expresar como

$$\begin{aligned}
 F_{ij}^k(x) &= \sum_s s(x) a_{ij}^k(x) X_i^k(x) \\
 &= \sum_s s(x) \delta_{ij}^k(x) \\
 &= \delta_{ij}^k(x):
 \end{aligned}$$

El resultado que se presenta en la proposición 2 solo proporciona condiciones suficientes para determinar la existencia del campo F , pero no son condiciones necesarias, ya que existen algunos casos en \mathbb{R}^2 que muestran que aunque no se cumplan las condiciones de la proposición el problema también puede ser resuelto, como se muestra a continuación.

Ejemplo 1 Considérese una distribución D sobre \mathbb{R}^2 y el siguiente sistema representado por las ecuaciones geodésicas:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \dot{x}_1^2; \\
 \dot{x}_2 &= 0;
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Haciendo el cambio de variables $x_3 = \dot{x}_1$, $x_4 = \dot{x}_2$, el sistema (3.5) se puede expresar como un sistema de primer orden en el espacio tangente TQ , esto es,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3 &= x_3; \\
 \dot{x}_4 &= x_4; \\
 \dot{x}_3 &= x_2 x_3^2; \\
 \dot{x}_4 &= 0;
 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones es representado, en el sistema coordenado $(U; x)$, por el spray geodésico

$$S(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

con una conexión afín Γ determinada por los símbolos de Christoffel $\Gamma_{11}^1 = x_2$ y todos los demás $\Gamma_{ij}^k = 0$. Observemos que Γ tiene asociado un tensor de curvatura R del tipo $(1;3)$ no nulo con componentes $R_{121}^1 = 1 = -R_{112}^1$ y todos los demás

$R_{bcd}^a \neq 0$. En este caso tenemos $C_x = \text{span}\{X_2 \frac{\partial}{\partial x^1} g\}$.

Luego, para anular a R agregamos un campo tensorial simétrico F de grado $(1;2)$ a la conexión ∇ tal que $F \in (D \oplus \mathbb{R}^{2 \times 2})$. La nueva conexión $\tilde{\nabla}$ está definida por los símbolos de Cristoffel $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k X^k$ donde Γ_{ij}^k son funciones por encontrar y X^k son las componentes del campo que toma valores en la distribución D . Analicemos ahora varios casos tomando distintas distribuciones.

1. Con la distribución $D = \text{span}\{f \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} g\}$ se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

$$\begin{aligned} \partial_2 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{12}^1 &= 1 + \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1; \\ \partial_2 \Gamma_{12}^1 - \partial_1 \Gamma_{22}^1 &= (X_2 + \Gamma_{11}^1) \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2; \\ \partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 &= X_2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1; \\ \partial_2 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1. \end{aligned}$$

Una solución para este sistema es $\Gamma_{11}^1 = \frac{x_2^2+1}{x_2}$, $\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{x_2}$ y $\Gamma_{22}^1 = 0$, para $x_2 \neq 0$; así, el campo F , se puede expresar en coordenadas como

$$F_x = \frac{x_2^2+1}{x_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X_3^2 + \frac{1}{2x_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X_3 X_4 + \frac{1}{2x_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X_4 X_3; \quad (3.6)$$

se puede observar, que en el caso en el que x_2 sea cero, se tiene que todos los Γ_{ij}^k son iguales a cero y, por lo tanto, tiene tensor de curvatura $R = 0$. Por otro lado, con este ejemplo, se demuestra que aunque no se cumplen las hipótesis de la Proposición 2, sí es posible encontrar a F . Por lo tanto la proposición 2 sólo nos proporciona condiciones suficientes pero no necesarias. Incluso existen otros casos donde no es posible resolver para otras distribuciones como se muestra en los siguientes ejemplos:

2. Con la distribución $D = \text{span}\{f \frac{\partial}{\partial x_2} g\}$ se obtiene un sistema de EDPs de primer orden, donde la primera ecuación muestra la inconsistencia, esto es,

$$\begin{aligned} 0 &= 1; \\ (\partial_2 \Gamma_{12}^1 - \partial_1 \Gamma_{22}^1) X_2 &= \Gamma_{12}^2 + (1 + \Gamma_{11}^1) \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 X_2^2; \\ \partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 &= X_2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1; \\ \partial_2 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 X_2. \end{aligned}$$

3. Con una distribución $D = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$. En este caso no es tan evidente identificar la inconsistencia como en el caso anterior pero al momento de intentar resolver el sistema podemos observar que el sistema es inconsistente y que no tiene solución. El sistema por resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} \theta_2 \theta_{11} - \theta_1 \theta_{21} &= 1 + \theta_{12} \theta_{21} x_2 - \theta_{22} \theta_{11} x_2; \\ \theta_2 \theta_{12} - \theta_1 \theta_{22} &= \theta_{22} x_2 - \theta_{12} \theta_{21} + \theta_{22} \theta_{11}; \\ (\theta_2 \theta_{11} - \theta_1 \theta_{21}) x_2 &= \theta_{21} x_2^2 - \theta_{11} \theta_{12} \theta_{21} x_2^2 - \theta_{22} \theta_{11} x_2^2; \\ (\theta_2 \theta_{12} - \theta_1 \theta_{22}) x_2 &= \theta_{12} + \theta_{22} \theta_{11} x_2 - \theta_{12} \theta_{21} x_2; \end{aligned}$$

del cual se obtienen nuevas ecuaciones algebraicas en términos de las funciones θ_{11} y

θ_{12}

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= x_2 + \theta_{22} x_2^4; \\ \theta_{12} &= \theta_{22} x_2^2; \end{aligned}$$

y al momento de sustituir y reducir el sistema se obtiene un sistema inconsistente, esto es,

$$\begin{aligned} x_2^2 \theta_2 \theta_{22} + \theta_1 \theta_{22} &= \frac{2}{x_2^2} \theta_{22} (1 + 4x_2); \\ x_2^2 \theta_2 \theta_{22} + \theta_1 \theta_{22} &= 4x_2 \theta_{22}; \end{aligned}$$

Con base en estos casos, surgen las siguientes preguntas: ¿por qué con algunas distribuciones D se puede resolver el problema de anular la curvatura y con otras no es posible? ¿Qué condiciones sobre la distribución D aseguran que la nueva conexión Γ tenga tensor de curvatura idénticamente cero? Para responder estas preguntas se hizo un análisis en dimensión 2, localmente, alrededor de un punto $p \in \mathbb{R}^2$ con una distribución D de rango 1 constante y conexiones afines simétricas; a este problema le llamaremos PAC2. Por el teorema de Frobenius de integrabilidad (flowbox) ver [15], se tiene que para cualquier distribución de rango 1 constante, podemos elegir un campo $X \in (D)$ definido en una vecindad de p tal que $X(p) \neq 0$ y, por lo tanto, existe un sistema coordenado $(U; \cdot)$ alrededor de p tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$, y así, $D_x = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \right\}$ para todo $x \in U$. En adelante supondremos que la conexión afín Γ la distribución D serán expresadas en el sistema coordenado $(U; \cdot)$.

3.1. Condiciones suficientes para resolver el PAC2

En general, resolver el PAC2 es equivalente a resolver el siguiente sistema de EDPs que se describe a continuación

$$\begin{aligned}
 (\omega_2 \ 11 \ \omega_1 \ 12)d^1 &= R_{112}^1 + \omega_{12}\omega_1 d^1 - \omega_{11}\omega_2 d^1 + \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ m & 12 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2m & 11 \end{matrix} \right) d^m \\
 &\quad + \left(\begin{matrix} m & 1 \\ 21 & 1m \end{matrix} \begin{matrix} m & 1 \\ 11 & 2m \end{matrix} \right) d^1 + \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ m & 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2m & 11 \end{matrix} \right) d^1 d^m \\
 (\omega_2 \ 11 \ \omega_1 \ 12)d^2 &= R_{112}^2 + \omega_{12}\omega_1 d^2 - \omega_{11}\omega_2 d^2 + \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1m & 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2m & 11 \end{matrix} \right) d^m \\
 &\quad + \left(\begin{matrix} m & 1 \\ 21 & 1m \end{matrix} \begin{matrix} m & 1 \\ 11 & 2m \end{matrix} \right) d^2 + \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ m & 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2m & 11 \end{matrix} \right) d^2 d^m \\
 (\omega_2 \ 12 \ \omega_1 \ 22)d^1 &= R_{212}^1 + \omega_{22}\omega_1 d^1 - \omega_{12}\omega_2 d^1 + \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ m & 22 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2m & 12 \end{matrix} \right) d^m \\
 &\quad + \left(\begin{matrix} m & 1 \\ 22 & 1m \end{matrix} \begin{matrix} m & 1 \\ 12 & 2m \end{matrix} \right) d^1 + \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ m & 22 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2m & 12 \end{matrix} \right) d^1 d^m \\
 (\omega_2 \ 12 \ \omega_1 \ 22)d^2 &= R_{212}^2 + \omega_{22}\omega_1 d^2 - \omega_{12}\omega_2 d^2 + \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1m & 22 \end{matrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2m & 12 \end{matrix} \right) d^m \\
 &\quad + \left(\begin{matrix} m & 1 \\ 22 & 1m \end{matrix} \begin{matrix} m & 1 \\ 12 & 2m \end{matrix} \right) d^2 + \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ m & 22 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2m & 12 \end{matrix} \right) d^2 d^m
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde d^m es la m -ésima componente del campo vectorial que genera a la distribución D para $m = 1; 2$.

Con el propósito de encontrar condiciones de integrabilidad del sistema de EDPs (3.7) comenzamos con un caso simple, esto es, con el caso en que los símbolos de Cristoffel ω_{ij}^k son constantes para todo $i; j; k = 1; 2$ en el sistema coordenado $(U; \cdot)$. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3 Si r está definida por símbolos de Christo el ω_{ij}^k tales que en el sistema coordenado $(U; \cdot)$ todos son constantes, entonces el problema de anular la curvatura en dimensión 2 admite solución.

Demostración Dado que ω_{12}^2 es constante para toda $x \in U$, consideremos primero el caso en que $\omega_{12}^2(x) \neq 0$, para todo $x \in U$. Entonces (1) se reduce al siguiente sistema de EDPs de primer orden

$$\omega_2 \ 11 \ \omega_1 \ 12 = R_{112}^1 + \omega_{12}^2 \omega_1 - \omega_{11}^2 \omega_2; \tag{3.8}$$

$$\omega_2 \ 12 \ \omega_1 \ 22 = R_{212}^1 + \omega_{11}(\omega_{22} + \omega_{22}^1) + \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 22 & 2 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 12 & 12 \end{matrix} \right) \omega_1 + \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 11 & 22 \end{matrix} \right) \omega_2; \tag{3.9}$$

$$0 = R_{112}^2 + \omega_{11}^2 \omega_1 - \omega_{12}^2 \omega_2; \tag{3.10}$$

$$0 = R_{212}^2 + \omega_{11}^2 \omega_2 - \omega_{12}^2 \omega_1; \tag{3.11}$$

Bajo los supuestos del enunciado, el tensor de curvatura R asociado a \mathcal{r} tiene componentes

$$R_{bcd}^a = \begin{matrix} a & m \\ cm & db \end{matrix} \quad \begin{matrix} a & m \\ dm & cb \end{matrix} \quad \text{donde } a; b; c; d = 1; 2;$$

Además, sabemos que $R_{bcd}^a = 0$ cuando $c = d$ y $R_{bcd}^a = R_{bdc}^a$, por consiguiente, las componentes de R no nulas son

$$\begin{aligned} R_{112}^1 &= \begin{matrix} 1 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix}; \\ R_{212}^1 &= \begin{matrix} 1 & 1 \\ 11 & 22 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 2 \\ 12 & 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 21 & 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 22 & 12 \end{matrix}; \\ R_{112}^2 &= \begin{matrix} 2 & 1 \\ 11 & 21 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 21 & 11 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix}; \\ R_{212}^2 &= \begin{matrix} 2 & 1 \\ 11 & 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 21 & 12 \end{matrix}; \end{aligned}$$

sustituyendo R_{112}^2 y R_{212}^2 en las ecuaciones (3.10)–(3.11) se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{matrix} 2 & 1 \\ 11 & 21 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 21 & 11 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 1 \\ 11 & 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 11 \end{matrix}; \\ 0 &= \begin{matrix} 2 & 1 \\ 11 & 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 21 & 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 1 \\ 11 & 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 12 \end{matrix}; \end{aligned}$$

Luego, si $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 21 & 11 \end{matrix}$, entonces (3.11) se satisface y, sustituyendo $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix}$ en (3.10) y como $\begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \notin 0$, entonces $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 21 & 12 \end{matrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 12 & 11 \end{matrix} \right) - \begin{matrix} 2 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix} \right)$. Ahora solo falta verificar las ecuaciones (3.8)–(3.9). Sustituyendo R_{112}^1 , R_{212}^1 y dado que las j_{ij} son funciones constantes por suposición acerca de los k_{ij} , entonces las ecuaciones (3.8)–(3.9) se reducen a

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{matrix} 1 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 21 & 11 \end{matrix}; \\ 0 &= \begin{matrix} 1 & 1 \\ 11 & 22 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 2 \\ 12 & 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 21 & 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 22 & 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 1 \\ 22 & 11 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 2 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 12 & 11 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 11 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 11 \end{matrix} \\ &+ \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 11 & 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 11 \end{matrix}; \end{aligned}$$

y se puede verificar que, en efecto, los j_{ij} satisfacen estas dos ecuaciones. Así el campo tensorial F se puede expresar como

$$F_x = \frac{1}{2} \left(\begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 12 & 11 \end{matrix} \right) - \begin{matrix} 2 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4 \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 22 & 11 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4^2;$$

Ahora considerando el caso donde $\begin{matrix} 2 & 2 \\ 12 & 21 \end{matrix} j_U = 0$, el sistema (3.7) se reduce al siguiente

$$\omega_{21} = \omega_{12} = R_{112}^1 \omega_{11}^2; \quad (3.12)$$

$$\omega_{21} = \omega_{12} = R_{212}^1 \omega_{11}^2 + \omega_{11}^1 (\omega_{22}^1 + \omega_{22}^2) + (\omega_{22}^2 - \omega_{12}^1 - \omega_{12}^2) \omega_{11}^2 + \omega_{11}^1 \omega_{22}^1; \quad (3.13)$$

$$0 = R_{112}^2 \omega_{11}^2 + \omega_{11}^1 \omega_{12}^2; \quad (3.14)$$

$$0 = R_{212}^2 \omega_{11}^2 + \omega_{11}^1 \omega_{22}^2; \quad (3.15)$$

y las componentes no nulas del tensor de curvatura son

$$\begin{aligned} R_{112}^1 &= \omega_{22}^1 \omega_{11}^2; \\ R_{212}^1 &= \omega_{11}^1 \omega_{22}^1 + \omega_{12}^1 \omega_{22}^2 - \omega_{21}^1 \omega_{12}^2; \\ R_{112}^2 &= \omega_{11}^1 \omega_{21}^2 - \omega_{22}^2 \omega_{11}^2; \\ R_{212}^2 &= \omega_{11}^1 \omega_{22}^2; \end{aligned}$$

al sustituir R_{112}^2 y R_{212}^2 en las ecuaciones (3.14)–(3.15) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{11}^1 \omega_{21}^2 - \omega_{22}^2 \omega_{11}^2 + \omega_{11}^1 \omega_{12}^2; \\ 0 &= \omega_{11}^1 \omega_{22}^2 + \omega_{11}^1 \omega_{22}^2; \end{aligned}$$

y se puede deducir entonces que $\omega_{12}^1 = \omega_{12}^2 + \omega_{22}^2$ y $\omega_{22}^1 = \omega_{22}^2$. Luego, al sustituir los valores de R_{112}^1 , R_{212}^1 , ω_{12}^1 y ω_{22}^1 en las ecuaciones (3.12)–(3.13), se tiene que (3.13) se satisface y de la ecuación (3.12) se tiene la siguiente ecuación

$$\omega_{21} = 0;$$

obteniendo así $\omega_{11} = f(x_1)$ para una función arbitraria $f \in C^1(U)$. Así $\omega_{11} = f(x_1)$, $\omega_{12} = \omega_{12}^1 + \omega_{22}^2$ y $\omega_{22} = \omega_{22}^2$ es una solución para el sistema (3.12)–(3.15).

Por consiguiente el campo F en forma explícita tiene la siguiente expresión

$$F_x = f(x_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 - (\omega_{12}^1 + \omega_{22}^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 x_3 - \omega_{22}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4^2;$$

En el siguiente caso se consideran conexiones afines definidas por símbolos de Christoffel ω_{ij}^k tales que en las coordenadas $(U; \cdot)$ al menos uno de estos se anula. En este caso también se obtienen condiciones suficientes como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 4 Dadas una conexión afín r y una distribución D sobre R^2 . Supóngase que existe un par $(i; j) \in \{1; 2\}^2$ tal que en el sistema coordenado $(U; \cdot)$ se tiene $\omega_{ij}^k = 0$, $D_x = \text{span} \{ \frac{\partial}{\partial x_1} j, x \}$ para toda $x \in U$ y se satisfacen las siguientes identidades

$$1) R_{212}^2 = 0$$

2) Si $\frac{2}{12} j_U \notin 0$ y se cumple $@_2(\frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}}) j_U = 0$

3) Si $\frac{2}{11} j_U \notin 0$ y se cumple $(\frac{@_2 R_{112}^2}{\frac{2}{11}}) j_U = 0$.

entonces el problema de anular la curvatura en dimensión 2 admite solución.

Demostración Si r es definida por $\frac{2}{ij}$ y $D_x = \text{span} f_{\frac{@}{@x_1}} j_x g$ en las coordenadas $(U;)$ entonces el sistema (3.7) se reduce al siguiente:

$$\begin{aligned} @_2 \frac{11}{12} \quad @_1 \frac{12}{22} &= \frac{2}{12} \frac{12}{22} \quad \frac{2}{11} \frac{22}{22}; \\ @_2 \frac{12}{22} \quad @_1 \frac{22}{22} &= \frac{11}{22} \frac{22}{22} + \frac{2}{22} \frac{12}{22} \quad \frac{2}{12} \frac{22}{22}; \\ 0 &= R_{112}^2 + \frac{2}{11} \frac{12}{22} \quad \frac{2}{12} \frac{11}{22}; \\ 0 &= R_{212}^2 + \frac{2}{11} \frac{22}{22} \quad \frac{2}{12} \frac{12}{22}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ahora supóngase un punto $p \in \mathbb{R}^2$, entonces existe V una vecindad de p en el que está contenido un conjunto abierto que contiene a p , esto es $U \cap V$ tal que para el par $(1;1) \in \mathbb{R}^1; 2g^2$, $\frac{2}{11}(x) = 0$ para todo $x \in U$, entonces el sistema de EDPs (3.16) se reduce al siguiente

$$@_2 \frac{11}{12} \quad @_1 \frac{12}{22} = \frac{2}{12} \frac{12}{22}; \quad (3.17)$$

$$@_2 \frac{12}{22} \quad @_1 \frac{22}{22} = \frac{11}{22} \frac{22}{22} + \frac{2}{22} \frac{12}{22} \quad \frac{2}{12} \frac{22}{22}; \quad (3.18)$$

$$0 = R_{112}^2 + \frac{2}{12} \frac{11}{22}; \quad (3.19)$$

$$0 = R_{212}^2 + \frac{2}{12} \frac{12}{22}; \quad (3.20)$$

de la suposición 1) y ecuaciones (3.19)–(3.20) se obtiene respectivamente

$$0 = (R_{112}^2 + \frac{2}{12} \frac{11}{22}) j_U;$$

$$0 = (\frac{2}{12} \frac{12}{22}) j_U;$$

de estas dos ecuaciones se derivan los siguientes casos

a) Si $\frac{2}{12} j_U \notin 0$ entonces $\frac{12}{22} = 0$ y $\frac{11}{22} = \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}}$, luego por la identidad 2) la ecuación (3.17) se satisface, y de (3.18) obtenemos $@_1 \frac{22}{22} = \frac{@_1 \frac{2}{12}}{\frac{2}{12}} \frac{22}{22}$, una ecuación ordinaria, cuya primitiva es $\frac{22}{22} = c_0 \exp(\int \frac{@_1 \frac{2}{12}}{\frac{2}{12}} dx_1)$ donde c_0 es una constante de integración. Luego el campo F se expresa en coordenadas por

$$F_x = \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 + c_0 \exp(\int \frac{@_1 \frac{2}{12}}{\frac{2}{12}} dx_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4^2;$$

b) Si $\frac{2}{12} j_U = 0$ entonces $R_{112}^2 j_U = 0$ y por lo tanto el sistema (3.17)–(3.20) admite solución trivial, es decir, $\frac{2}{ij} = 0$ para $i; j = 1; 2$. Así $F_x = 0$.

Ahora supóngase que para $(2;2) \in \mathcal{F}; 2\mathcal{G}^2$, $\frac{2}{22}(x) = 0$ para todo $x \in U$ entonces el sistema de EDPs (3.16) se reduce al siguiente

$$\mathcal{Q}_2 \ 11 \ \mathcal{Q}_1 \ 12 = \frac{2}{12} \ 12 \ \frac{2}{11} \ 22; \quad (3.21)$$

$$\mathcal{Q}_2 \ 12 \ \mathcal{Q}_1 \ 22 = \ 11 \ 22 \ \frac{2}{12} \ \frac{2}{12} \ 22; \quad (3.22)$$

$$0 = R_{112}^2 + \frac{2}{11} \ 12 \ \frac{2}{12} \ 11; \quad (3.23)$$

$$0 = R_{212}^2 + \frac{2}{11} \ 22 \ \frac{2}{12} \ 12; \quad (3.24)$$

de la suposición 1) y de ecuaciones (3.23)–(3.24) se obtiene respectivamente

$$0 = (R_{112}^2 + \frac{2}{11} \ 12 \ \frac{2}{12} \ 11) j_U;$$

$$0 = (\frac{2}{11} \ 22 \ \frac{2}{12} \ 12) j_U;$$

de estas dos ecuaciones tenemos los siguientes casos.

- a) Si $\frac{2}{12}$ y $\frac{2}{11}$ no se anulan en U entonces $\frac{2}{12} = \frac{2}{11} = 0$ y $\frac{2}{11} = \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}}$ satisfacen las ecuaciones (3.22)–(3.24) y por suposición 2) se satisface (3.21). Luego

$$F_x = \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2;$$

- b) Si $\frac{2}{12} j_U = 0$ y $\frac{2}{11} j_U \neq 0$ entonces $\frac{2}{11} = 0$ y $\frac{2}{12} = \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{11}}$ satisfacen (3.22)–(3.24) y de (3.21) se obtiene la ecuación ordinaria $\mathcal{Q}_2 \ 11 = \mathcal{Q}_1 \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}}$ cuya primitiva es $\frac{2}{11} = \int (\mathcal{Q}_1(\frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}})) dx_2 + c_1$, donde c_1 es una constante de integración. Por lo tanto el campo F se puede expresar de la siguiente manera

$$F_x = \left(\int (\mathcal{Q}_1(\frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}})) dx_2 + c_1 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 \ \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4;$$

- c) Si $\frac{2}{11} j_U = 0$ entonces $R j_U = 0$ y por lo tanto el sistema (3.21)–(3.24) admite solución trivial, es decir, $\mathcal{Q}_{ij} = 0$ para $i; j = 1; 2$, entonces $F_x = 0$

Ahora supóngase que para el par $(1;2) \in \mathcal{F}; 2\mathcal{G}^2$, $\frac{2}{12} j_U = 0$, entonces el sistema de EDPs (3.16) se reduce al siguiente

$$\mathcal{Q}_2 \ 11 \ \mathcal{Q}_1 \ 12 = \frac{2}{11} \ 22; \quad (3.25)$$

$$\mathcal{Q}_2 \ 12 \ \mathcal{Q}_1 \ 22 = \ 11 \ 22 \ \frac{2}{12} + \frac{2}{22} \ 12; \quad (3.26)$$

$$0 = R_{112}^2 + \frac{2}{11} \ 12; \quad (3.27)$$

$$0 = R_{212}^2 + \frac{2}{11} \ 22; \quad (3.28)$$

luego de la suposición 1) y de las ecuaciones (3.27)–(3.28) obtenemos respectivamente lo siguiente

$$0 = (R_{112}^2 + \frac{2}{11} \ 12) j_U;$$

$$0 = (\frac{2}{11} \ 22) j_U;$$

de lo cual se derivan los siguientes casos

a) Si $\overset{2}{j}_U \neq 0$ entonces $\overset{2}{2} = 0$ y $\overset{2}{12} = \frac{R_{112}^2}{\overset{2}{11}}$ satisfacen (3.26)–(3.28) y de ecuación (3.25) se obtiene la ecuación ordinaria $\overset{2}{11} = \overset{2}{1} \frac{R_{112}^2}{\overset{2}{12}}$ cuya antiderivada es $\overset{2}{11} = \int (\overset{2}{1} (\frac{R_{112}^2}{\overset{2}{12}})) dx_2 + c$ donde c es una constante de integración, por consiguiente el campo F se puede expresar como

$$F_x = \left(\int (\overset{2}{1} (\frac{R_{112}^2}{\overset{2}{12}})) dx_2 + c \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 - \frac{R_{112}^2}{\overset{2}{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4;$$

b) Si $\overset{2}{11} j_U = 0$ entonces $R j_U = 0$, por lo tanto, el sistema (3.25)–(3.28) admite solución trivial, es decir, $\overset{2}{ij} = 0$ para $i; j = 1; 2$, así $F_x = 0$.

El siguiente caso es motivado por el anterior, considerando ahora que los símbolos de Christoffel $\overset{2}{ij}$, en el sistema coordenado $(U; x_1; x_2)$, en general serán definidos como funciones arbitrarias que dependen de x_1 y x_2 para todo $i; j = 1; 2$. En este caso existen solo algunas combinaciones de los $\overset{2}{ij}$ para los cuales el PAC2 admite solución y se muestran en el siguiente resultado.

Proposición 5 Sean una distribución D y una conexión r sobre \mathbb{R}^2 . Si en el sistema coordenado $(U; \cdot)$, $\overset{2}{ij} j_U = f(x_1; x_2)$, para $i; j = 1; 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $D_x = \text{span} \{ \frac{\partial}{\partial x_1} g \}$ para $x \in U$, entonces el problema de anular la curvatura en dimensión 2 admite solución para los siguientes casos

C1. Si $\overset{2}{22} j_U = \text{cte} \neq 0$, $\overset{2}{11} j_U = f_1(x_1)$, $\overset{2}{12} j_U = f_2(x_1)$ y

$$i) R_{212}^2 j_U = 0 \text{ y } (\overset{2}{12} \overset{2}{2} R_{112}^2 - R_{112}^2 \overset{2}{21}) j_U = 0.$$

C2. Si $\overset{2}{ii} j_U = \overset{2}{jj} j_U = x_i$ y $\overset{2}{ij} j_U = x_j$ para $i \neq j$ y

$$ii) R_{212}^2 j_U = 0 \text{ y } \overset{2}{i} \overset{2}{11} j_U = \overset{2}{j} \overset{2}{12} j_U.$$

C3. Si $\overset{2}{ij} j_U = x_k$ para $k = 1; 2$ y

$$iii) R_{112}^2 j_U = R_{212}^2 j_U \text{ y } \overset{2}{1} (\frac{R_{112}^2}{\overset{2}{12}}) j_U - \overset{2}{2} (\frac{R_{112}^2}{\overset{2}{12}}) j_U + (\frac{R_{112}^2}{\overset{2}{12}})^2 j_U = 0.$$

Demostración El sistema resultante de EDPs, general, para este caso es el siguiente

$$\begin{aligned} \overset{2}{2} \overset{2}{11} - \overset{2}{1} \overset{2}{12} &= \overset{2}{12} \overset{2}{12} - \overset{2}{11} \overset{2}{22}; \\ \overset{2}{2} \overset{2}{12} - \overset{2}{1} \overset{2}{22} &= \overset{2}{11} \overset{2}{22} - \overset{2}{12} + \overset{2}{22} \overset{2}{12} - \overset{2}{12} \overset{2}{22}; \\ 0 &= R_{112}^2 + \overset{2}{11} \overset{2}{12} - \overset{2}{12} \overset{2}{11}; \\ 0 &= R_{212}^2 + \overset{2}{11} \overset{2}{22} - \overset{2}{12} \overset{2}{12}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

C1. Si $\overset{2}{j}j_U = cte \notin 0$ y $\overset{2}{i}i_U = f_1(x_1)$, $\overset{2}{12}j_U = f_2(x_1)$ entonces el tensor de curvatura asociado tiene componentes $R_{bcd}^1 = R_{212}^2 = 0$ para $b; c; d = 1; 2$, $R_{112}^2 = \frac{f_1(x_1)}{f_2(x_1)}$, $R_{122}^2 = \frac{f_2(x_1)}{af_1(x_1)}$ y el sistema (3.29) se reduce al siguiente

$$\overset{2}{2}11 = \overset{2}{1}12 = f_2(x_1) \overset{2}{12} = f_1(x_1) \overset{2}{22}; \quad (3.30)$$

$$\overset{2}{2}12 = \overset{2}{1}22 = \overset{2}{11}22 = \frac{f_1^2(x_1)}{f_2(x_1)} + a \overset{2}{12} = f_2(x_1) \overset{2}{22}; \quad (3.31)$$

$$0 = \overset{2}{1}f_2(x_1) \overset{2}{f_2^2(x_1)} = af_1(x_1) + f_1(x_1) \overset{2}{12} = f_2(x_1) \overset{2}{11}; \quad (3.32)$$

$$0 = f_1(x_1) \overset{2}{22} = f_2(x_1) \overset{2}{12}; \quad (3.33)$$

de (3.32)–(3.33) obtenemos $\overset{2}{11} = \frac{\overset{2}{1}f_2(x_1) \overset{2}{f_2^2(x_1)} + af_1(x_1)}{f_2(x_1)} + \left(\frac{f_1(x_1)}{f_2(x_1)}\right)^2 \overset{2}{22}$ y $\overset{2}{12} = \frac{f_1(x_1)}{f_2(x_1)} \overset{2}{22}$, luego si $\overset{2}{22} = 0$ entonces $\overset{2}{12} = 0$ y $\overset{2}{11} = \frac{\overset{2}{1}f_2(x_1) \overset{2}{f_2^2(x_1)} + af_1(x_1)}{f_2(x_1)}$, se observar que las ecuaciones (3.30) y (3.31) también se satisfacen. Por lo tanto $\overset{2}{12} = \overset{2}{22} = 0$ y $\overset{2}{11} = \frac{R_{112}^2}{\overset{2}{12}}$ es una solución para el sistema (3.30)–(3.33), por lo tanto $F_x = \frac{R_{112}^2}{\overset{2}{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2$

C2. Si $\overset{2}{ij}j_U = \overset{2}{jj}j_U = x_i$ y $\overset{2}{ij}j_U = x_j$ para $i \neq j$, entonces el tensor de curvatura asociado a Γ tiene componentes $R_{bcd}^1 = R_{212}^2 = 0$ para $b; c; d = 1; 2$ y $R_{112}^2 = x_j^2$, $R_{122}^2 = x_i^2$. Luego el sistema (3.29) se reduce al siguiente

$$\overset{2}{2}11 = \overset{2}{1}12 = x_j \overset{2}{12} = x_i \overset{2}{22}; \quad (3.34)$$

$$\overset{2}{2}12 = \overset{2}{1}22 = \overset{2}{11}22 = \frac{x_i^2}{x_j^2} + x_i \overset{2}{12} = x_j \overset{2}{22}; \quad (3.35)$$

$$0 = x_j^2 \overset{2}{x_i^2} + x_i \overset{2}{12} = x_j \overset{2}{11}; \quad (3.36)$$

$$0 = x_i \overset{2}{22} = x_j \overset{2}{12}; \quad (3.37)$$

y se puede deducir que $\overset{2}{11} = \overset{2}{22} = x_j$ y $\overset{2}{12} = x_i$ satisfacen las ecuaciones (3.36)–(3.37) y por la identidad ii) también satisfacen las ecuaciones (3.34)–(3.35).

C3. Si $\overset{2}{ij}j_U = x_k$ entonces Γ tiene tensor de curvatura con componentes $R_{bcd}^1 = 0$ y $R_{112}^2 = R_{212}^2$, luego el sistema (3.29) se reduce al siguiente

$$\overset{2}{2}11 = \overset{2}{1}12 = x_k(\overset{2}{12} \overset{2}{22}); \quad (3.38)$$

$$\overset{2}{2}12 = \overset{2}{1}22 = \overset{2}{11}22 = \frac{x_k^2}{x_i^2} + x_k(\overset{2}{12} \overset{2}{22}); \quad (3.39)$$

$$0 = R_{112}^2 + x_k(\overset{2}{12} \overset{2}{11}); \quad (3.40)$$

$$0 = R_{112}^2 + x_k(\overset{2}{22} \overset{2}{12}); \quad (3.41)$$

si x_k no es cero en U para $k = 1; 2$ entonces de las ecuaciones (3.40)–(3.41) obtenemos

lo siguiente

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{2R_{112}^2}{x_k} + x_{22}; \\ x_{12} &= \frac{R_{112}^2}{x_k} + x_{22}; \end{aligned}$$

y al sustituir x_{11} y x_{12} en las ecuaciones (3.38)–(3.39) obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} x_{22} - x_{11} &= R_{112}^2 + x_{11} \left(\frac{R_{112}^2}{x_k} \right) - 2x_{22} \left(\frac{R_{112}^2}{x_k} \right); \\ x_{22} - x_{11} &= R_{112}^2 - \left(\frac{R_{112}^2}{x_k} \right)^2 - x_{22} \left(\frac{R_{112}^2}{x_k} \right); \end{aligned}$$

el sistema tiene solución si se cumple

$$R_{112}^2 + x_{11} \left(\frac{R_{112}^2}{x_k} \right) - 2x_{22} \left(\frac{R_{112}^2}{x_k} \right) = R_{112}^2 - \left(\frac{R_{112}^2}{x_k} \right)^2 - x_{22} \left(\frac{R_{112}^2}{x_k} \right);$$

pero por identidad iii) se cumple que el sistema (3.38)–(3.41) tiene solución, la solución dependen de k , esto es,

- Si $k = 1$ entonces $R_{112}^2 = R_{212}^2 = 1$ y si $x_1 \neq 0$ entonces se tiene que

$$x_{22} - x_{11} = 1 - \frac{1}{x_1^2};$$

de la cual se puede deducir que si $x_{22} = x_2 - \frac{1}{x_1}$ entonces $x_{11} = \frac{1}{x_1} + x_2$, $x_{12} = x_2$, es una solución para el sistema y el campo F es

$$F_x = \left(\frac{1}{x_1} + x_2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 + \frac{x_2}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 x_3 \right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4^2;$$

- Si $k = 2$ entonces $R_{112}^2 = R_{212}^2 = 1$ y si $x_2 \neq 0$ entonces tenemos

$$x_{22} - x_{11} = 1 + \frac{2}{x_2^2};$$

de lo cual se deduce que si $x_{22} = x_1 - \frac{2}{x_2}$ entonces $x_{11} = x_1$, $x_{12} = x_1 + \frac{1}{x_2}$ y por lo tanto el sistema admite solución y el campo F se puede expresar como

$$F_x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 + \left(\frac{1 + x_1 x_2}{x_2} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 x_3 \right) + \left(\frac{x_1 x_2^2 - 2}{x_2^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4^2;$$

Obsérvese que en las proposiciones 3 y 4 los símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = 0$; no obstante, si estos no se anulan sobre $(U; \cdot)$ y si además consideramos los casos anteriores de Γ_{ij}^k donde el PAC2 admite solución, entonces para una conexión ∇ definida por Γ_{ij}^k arbitrarios y Γ_{ij}^k como en proposiciones 3 y 4 también admite solución como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 6 Sean una distribución D y una conexión r sobre \mathbb{R}^2 . Si en el sistema coordinado $(U; \cdot)$, $\frac{1}{ij} j_U = f_{ij}(x_1; x_2)$ y $\frac{2}{ij} j_U$ como en Proposiciones 3 y 4 para $i; j = 1; 2$ y $D_x = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g \right\}$ para $x \in U$ entonces el problema de anular la curvatura en dimensión 2 admite solución.

Demostración Con base en las suposiciones del enunciado, el sistema (3.7) se reduce al siguiente sistema de EDPs

$$\mathcal{R}_{112}^1 = \mathcal{A}_{112}^1 + \mathcal{B}_{1212}^1 + \mathcal{C}_{1122}^1; \quad (3.42)$$

$$\mathcal{R}_{212}^1 = \mathcal{A}_{212}^1 + \mathcal{B}_{11}^1(\mathcal{C}_{22}^1 + \mathcal{D}_{22}^1) + (\mathcal{E}_{22}^1 - \mathcal{F}_{12}^1 - \mathcal{G}_{12}^1) \mathcal{C}_{12}^1 + (\mathcal{H}_{11}^1 - \mathcal{I}_{12}^1) \mathcal{C}_{22}^1; \quad (3.43)$$

$$0 = \mathcal{R}_{112}^2 + \mathcal{A}_{1112}^2 + \mathcal{B}_{1211}^2; \quad (3.44)$$

$$0 = \mathcal{R}_{212}^2 + \mathcal{A}_{1122}^2 + \mathcal{B}_{1212}^2; \quad (3.45)$$

De la proposición 2 se tiene que $\frac{1}{ij}$ es una solución para anular los $\frac{1}{ij}$ por que en este caso tenemos una distribución engendrada por el vector $f \frac{\partial}{\partial x_1} j_x g$, por otro lado también aparecen los $\frac{2}{ij}$ y por proposiciones 3 y 4 sabemos que \tilde{ij} es solución, entonces una solución para el sistema (3.42)–(3.45) es $ij = \tilde{ij} \frac{1}{ij}$, y en seguida vamos a verificarlo sustituyendo en las ecuaciones. Sabemos que las componentes del tensor de curvatura son los siguientes

$$\mathcal{R}_{112}^1 = \mathcal{A}_{112}^1 - \mathcal{B}_{11}^1 + \mathcal{C}_{12}^1 \mathcal{D}_{21}^1 - \mathcal{E}_{22}^1 \mathcal{F}_{11}^1;$$

$$\mathcal{R}_{212}^1 = \mathcal{A}_{212}^1 - \mathcal{B}_{12}^1 + \mathcal{C}_{11}^1 \mathcal{D}_{22}^1 + \mathcal{E}_{12}^1 \mathcal{F}_{22}^1 - \mathcal{G}_{21}^1 \mathcal{H}_{12}^1 - \mathcal{I}_{22}^1 \mathcal{J}_{12}^1;$$

$$\mathcal{R}_{112}^2 = \mathcal{A}_{112}^2 - \mathcal{B}_{11}^2 + \mathcal{C}_{11}^2 \mathcal{D}_{21}^2 + \mathcal{E}_{12}^2 \mathcal{F}_{21}^2 - \mathcal{G}_{21}^2 \mathcal{H}_{11}^2 - \mathcal{I}_{22}^2 \mathcal{J}_{11}^2;$$

$$\mathcal{R}_{212}^2 = \mathcal{A}_{212}^2 - \mathcal{B}_{12}^2 + \mathcal{C}_{11}^2 \mathcal{D}_{22}^2 - \mathcal{E}_{21}^2 \mathcal{F}_{12}^2;$$

entonces el sistema (3.42)–(3.45) se reduce al siguiente

$$\mathcal{R}_{112}^1 = \mathcal{A}_{112}^1 - \mathcal{B}_{11}^1 + \mathcal{C}_{12}^1 \mathcal{D}_{21}^1 - \mathcal{E}_{22}^1 \mathcal{F}_{11}^1; \quad (3.46)$$

$$\mathcal{R}_{212}^1 = \mathcal{A}_{212}^1 - \mathcal{B}_{12}^1 + \mathcal{C}_{11}^1 \mathcal{D}_{22}^1 + \mathcal{E}_{12}^1 \mathcal{F}_{22}^1 - \mathcal{G}_{21}^1 \mathcal{H}_{12}^1 - \mathcal{I}_{22}^1 \mathcal{J}_{12}^1; \quad (3.47)$$

$$0 = \mathcal{A}_{112}^2 - \mathcal{B}_{11}^2 + \mathcal{C}_{11}^2 \mathcal{D}_{21}^2 + \mathcal{E}_{12}^2 \mathcal{F}_{21}^2 - \mathcal{G}_{21}^2 \mathcal{H}_{11}^2 - \mathcal{I}_{22}^2 \mathcal{J}_{11}^2; \quad (3.48)$$

$$0 = \mathcal{A}_{212}^2 - \mathcal{B}_{12}^2 + \mathcal{C}_{11}^2 \mathcal{D}_{22}^2 - \mathcal{E}_{21}^2 \mathcal{F}_{12}^2; \quad (3.49)$$

recordemos que los $\frac{2}{ij}$ son definidos como en las proposiciones 3 y 4 y como se mencionó anteriormente los \tilde{ij} son soluciones, entonces el sistema (3.46)–(3.49) admite solución. Luego, el campo F se puede expresar como sigue

$$F_x = (\mathcal{B}_{11} \quad \mathcal{C}_{11}^1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 + 2(\mathcal{B}_{12} \quad \mathcal{C}_{12}^1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4 + (\mathcal{B}_{22} \quad \mathcal{C}_{22}^1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4^2;$$

A continuación se dan algunos casos donde no es posible resolver y aparecen diversos tipos de inconsistencias.

Ejemplo 2 Si r es definida por $\overset{2}{j}_U = x_1$ y los demás símbolos de Christoffel son cero sobre U , entonces el tensor de curvatura asociado tiene una componente no nula $R_{212}^2 = 1$. Luego el sistema (3.7) se reduce al siguiente

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \omega_{12}; \\ \omega_{12} &= \omega_{22} + \overset{1}{11} \overset{2}{22} + \overset{2}{12} + x_1 \overset{1}{12}; \\ 0 &= 1; \end{aligned}$$

como se puede observar, el sistema resultante es inconsistente por la tercera ecuación, por lo tanto para este caso el sistema (3.7) no tiene solución.

Ejemplo 3 Si r está definida por $\overset{2}{j}_U = a$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $\overset{2}{j}_U = x_1$, los demás símbolos de Christoffel son cero sobre U , entonces el tensor de curvatura tiene componentes no nulas, si $a \neq 0$, $R_{112}^2 \overset{1}{j}_U = ax_1$ y $R_{212}^2 \overset{1}{j}_U = 1$, notar que si $a = 0$ tendríamos el caso anterior. Luego suponiendo que $a \neq 0$ el sistema (3.7) se reduce al siguiente

$$\omega_{211} - \omega_{112} = a \overset{2}{22}; \quad (3.50)$$

$$\omega_{212} - \omega_{122} = \overset{1}{11} \overset{2}{22} + \overset{2}{12} + x_1 \overset{1}{12}; \quad (3.51)$$

$$0 = ax_1 + a \overset{1}{12}; \quad (3.52)$$

$$0 = 1 + a \overset{2}{22}; \quad (3.53)$$

de las ecuaciones (3.52)–(3.53) se obtiene $\overset{1}{12} = x_1$, $\overset{2}{22} = \frac{1}{a}$ y al sustituir en (3.50) se tiene que $\overset{1}{11} = 2x_2$, sin embargo, (3.51) no se satisface pues se obtiene una inconsistencia del tipo $0 = 2x_2$, a menos que $x_2 = 0$ pero no hay restricciones sobre x_2 , por lo tanto el sistema es inconsistente y por consiguiente no tiene solución.

El siguiente ejemplo muestra un tipo de inconsistencia particular que ilustra cómo la solubilidad del sistema depende de una constante y se muestra a continuación

Ejemplo 4 Si r es definida por $\overset{2}{j}_U = a$, $\overset{2}{j}_U = b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $\overset{2}{j}_U = x_2$, entonces el tensor de curvatura tiene una componente no nula $R_{112}^2 = b^2 - ax_2$ y por lo tanto obtenemos el siguiente sistema.

$$\mathbb{C}_{21} - \mathbb{C}_{12} = b_{12} - a_{22} \quad (3.54)$$

$$\mathbb{C}_{22} - \mathbb{C}_{11} = \frac{1}{2}x_2^2 + x_2 - b_{22} \quad (3.55)$$

$$0 = b_{12}^2 - ax_2 + a_{12} - b_{11} \quad (3.56)$$

$$0 = a_{22} - b_{12} \quad (3.57)$$

luego de las ecuaciones (3.56)–(3.57), si $b \neq 0$ entonces $x_1 = \frac{b^2 - ax_2}{b} + \frac{a^2}{b^2} x_2$ y $x_2 = \frac{a}{b} x_2$ pero al sustituir en (3.54)–(3.55) obtenemos la siguiente ecuación

$$0 = \frac{a}{b}$$

la cual tiene solución solo si $a = 0$ (proposición 4) de lo contrario el sistema (3.54)–(3.57) es inconsistente. Ahora bien si $b = 0$ y $a \neq 0$ por proposición 4, el sistema es inconsistente, no cumple la identidad 3). Por otro lado si $a = b = 0$ la conexión tiene curvatura nula por lo tanto el sistema admite solución trivial.

3.1.1. Compendio de resultados del PAC2

Esta sección tiene como finalidad mostrar de manera resumida los resultados obtenidos para el PAC2. Por lo que aquí se presentan los casos de solución de las Proposiciones 3–6.

- **Proposición 3:** Con símbolos de Cristoffel todos constantes, se obtienen los siguientes casos de solución:

- Si $\frac{1}{2}j_U \neq 0$, una solución es

$$F_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{11} \right) \quad \frac{1}{22} \frac{1}{11} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 \quad \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4 \quad \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4^2;$$

- Si $\frac{1}{2}j_U = 0$, entonces una solución es

$$F_x = f(x_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 \quad \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{22} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 x_3 \quad \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4^2; \text{ para } f \in C^1(U)$$

- **Proposición 4:** Si existe un par $(i; j) \in \{1, 2\}^2$ tal que $\frac{1}{2}j_U = 0$ y se cumplen lo siguiente

- 1) $R_{212}^2 j_U = 0$,
- 2) Si $\frac{1}{2}j_U \neq 0$ y se cumple $\mathbb{C}_{21}(\frac{R_{112}^2}{2}) j_U = 0$,

3) Si $\frac{2}{11} j_U \neq 0$ y se cumple $(\frac{2}{11} R_{112}^2) j_U = 0$.

Entonces se tienen los siguientes casos de solución:

a) Si $\frac{2}{11} j_U = 0$.

a1. Si $\frac{2}{12} j_U \neq 0$, $F_x = \left(\frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}} x_3^2 + c_0 \exp\left(\int \frac{2}{12} dx_1 \right) x_4^2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a2. Si $\frac{2}{12} j_U = 0$, admite solución trivial $F_x = 0$.

b) Si $\frac{2}{12} j_U = 0$ entonces $R j_U = 0$ y por lo tanto admite solución trivial, es decir, $i_j = 0$ para $i, j = 1; 2$. Así $F_x = 0$.

c) Si $\frac{2}{22} j_U = 0$,

c1. Si $\frac{2}{12}$ y $\frac{2}{11}$ no se anulan en U . $F_x = \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2$.

c2. Si $\frac{2}{12} j_U = 0$ y $\frac{2}{11} j_U \neq 0$ $F_x = \left(\int (\frac{2}{11} R_{112}^2) dx_2 + c_1 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2$
 $\frac{R_{112}^2}{\frac{2}{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4$:

c3. Si $\frac{2}{11} j_U = 0$, solución trivial $F_x = 0$

d) Si $\frac{2}{12} j_U = 0$,

d1. Si $\frac{2}{11} j_U \neq 0$, $F_x = \left(\int (\frac{2}{11} R_{112}^2) dx_2 + c \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2 + \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 x_4$.

d2. Si $\frac{2}{11} j_U = 0$, solución trivial $F_x = 0$.

■ **Proposición 5:** Si $\frac{2}{ij} j_U = f(x_1; x_2)$, para $i, j = 1; 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, entonces el sistema tiene solución para los siguientes casos:

C1. Si $\frac{2}{22} j_U = cte \neq 0$, $\frac{2}{11} j_U = f_1(x_1)$, $\frac{2}{12} j_U = f_2(x_1)$ y

i) $R_{212}^2 j_U = 0$ y $(\frac{2}{12} @_2 R_{112}^2 - R_{112}^2 @_2 \frac{2}{21}) j_U = 0$.

C2. Si $\frac{2}{ii} j_U = \frac{2}{jj} j_U = x_i$ y $\frac{2}{ij} j_U = x_j$ para $i \neq j$ y

ii) $R_{212} j_U = 0$ y $@_i \frac{2}{11} j_U = @_j \frac{2}{12} j_U$.

C3. Si $\frac{2}{ij} j_U = x_k$ para $k = 1; 2$ y

iii) $R_{112}^2 j_U = R_{212}^2 j_U$ y $@_1(\frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}}) j_U - @_2(\frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}}) j_U + (\frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}})^2 j_U = 0$.

Las soluciones son, respectivamente, las siguientes:

1) $F_x = \frac{R_{112}^2}{\frac{2}{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3^2$,

2) $F_x = (\frac{2}{12}(x_3^2 + x_4^2) + \frac{2}{11} x_3 x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Si $\tilde{f}_{ij}^2 j_W = X_k$ se tienen dos casos

Si $k = 1$, una solución es $\tilde{f}_{11} = \frac{1}{x_1} + X_2$, $\tilde{f}_{12} = X_2$ y $\tilde{f}_{22} = X_2 - \frac{1}{x_1}$,

Si $k = 2$, una solución es $\tilde{f}_{11} = X_1$, $\tilde{f}_{12} = X_1 + \frac{1}{x_2}$ y $\tilde{f}_{22} = X_1 - \frac{2}{x_2}$

$$F_x = \left(\tilde{f}_{11} X_3^2 + \tilde{f}_{12} X_3 X_4 + \tilde{f}_{22} X_4^2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ **Proposición 6:** Si $\tilde{f}_{ij}^1 j_U = f_{ij}(X_1; X_2)$ y $\tilde{f}_{ij}^2 j_U$ como en Proposiciones 3 y 4 para $i; j = 1; 2$, entonces las soluciones son de la siguiente forma:

$$F_x = (\tilde{B}_{11} \quad \tilde{f}_{11}^1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} X_3^2 + 2(\tilde{B}_{12} \quad \tilde{f}_{12}^1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} X_3 X_4 + (\tilde{B}_{22} \quad \tilde{f}_{22}^1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} X_4^2:$$

donde las \tilde{f}_{ij}^k son soluciones de los casos en proposiciones 3 y 4.

Estos son los resultados obtenidos considerando una distribución de rango 1 constante, en realidad son pocos casos en los que el PAC2 tiene solución. Es posible que existan otras distribuciones con las que también se pueda resolver, aunque con base en el análisis de estudio realizado se podría decir que la mayoría no tiene solución.

3.1.2. Problema de anular la curvatura en dimensión 3

El problema de anular la curvatura en dimensión 3 (PAC3) se plantea de manera similar que en dimensión 2, se considera una variedad Riemanniana M , una conexión afín simétrica \tilde{r} sobre M y para que una distribución pueda modificar \tilde{r} y así obtener curvatura idénticamente cero, en este caso se consideran distribuciones de dimensión 2.

Resolver el problema es equivalente a resolver un sistema de EDPs de 24 ecuaciones y 18 incógnitas, donde cada ecuación es de la forma:

$$0 = R_{bcd}^a + @_c \tilde{f}_{db}^l X_l^a - @_d \tilde{f}_{cb}^l X_l^a + \tilde{f}_{db}^l @_c X_l^a - \tilde{f}_{cb}^l @_d X_l^a + \frac{m}{db} \frac{n}{cm} X_n^a + \tilde{f}_{db}^l X_l^m \frac{a}{cm} + \tilde{f}_{db}^l \frac{n}{cm} X_l^m X_n^a + \frac{m}{cb} \frac{n}{dm} X_n^a - \tilde{f}_{cb}^l X_l^m \frac{a}{dm} - \tilde{f}_{cb}^l \frac{n}{dm} X_l^m X_n^a. \quad (3.58)$$

para $a; b; c; d; m = f1; 2; 3g$ y $n; l = f1; 2g$, esto es,

ecuaciones (19-21)

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \circ \\ \textcircled{B} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{A} = \textcircled{B} \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \\
 R_{123}^1 + \begin{pmatrix} 1 & l \\ 2m & 3l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 3m & 2l \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 3l & 2m \end{pmatrix} X_n^1 + \begin{pmatrix} n & l \\ 2m & 3l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 3m & 2l \end{pmatrix} X_n^1 X_l^m \\
 R_{123}^2 + \begin{pmatrix} 2 & l \\ 2m & 3l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & l \\ 3m & 2l \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 3l & 2m \end{pmatrix} X_n^2 + \begin{pmatrix} n & l \\ 2m & 3l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 3m & 2l \end{pmatrix} X_n^2 X_l^m \\
 R_{123}^3 + \begin{pmatrix} 3 & l \\ 2m & 3l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & l \\ 3m & 2l \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 3l & 2m \end{pmatrix} X_n^3 + \begin{pmatrix} n & l \\ 2m & 3l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 3m & 2l \end{pmatrix} X_n^3 X_l^m \\
 + \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 \\ \textcircled{2} & 3l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{3} & 1 \\ \textcircled{2} & 2l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} + \textcircled{B} \end{pmatrix} \begin{array}{c} X_1^1 \\ X_2^2 \\ X_3^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{2} X_1^1 \\ \textcircled{2} X_2^2 \\ \textcircled{2} X_3^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{3} X_1^1 \\ \textcircled{3} X_2^2 \\ \textcircled{3} X_3^3 \end{array} \\
 + \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 2 \\ \textcircled{3} & 2l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} + \textcircled{B} \end{pmatrix} \begin{array}{c} X_2^1 \\ X_2^2 \\ X_2^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{3} X_2^1 \\ \textcircled{3} X_2^2 \\ \textcircled{3} X_2^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{2} X_2^1 \\ \textcircled{2} X_2^2 \\ \textcircled{2} X_2^3 \end{array} \\
 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \end{array} ;
 \end{array}$$

ecuaciones (22-24)

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \circ \\ \textcircled{B} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{A} = \textcircled{B} \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \\
 R_{231}^1 + \begin{pmatrix} 1 & l \\ 3m & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 1m & 32 \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 12 & 3m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ 32 & 1m \end{pmatrix} X_n^1 + \begin{pmatrix} n & l \\ 3m & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 1m & 32 \end{pmatrix} X_n^1 X_l^m \\
 R_{231}^2 + \begin{pmatrix} 2 & l \\ 3m & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & l \\ 1m & 32 \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 12 & 3m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ 32 & 1m \end{pmatrix} X_n^2 + \begin{pmatrix} n & l \\ 3m & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 1m & 32 \end{pmatrix} X_n^2 X_l^m \\
 R_{231}^3 + \begin{pmatrix} 3 & l \\ 3m & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & l \\ 1m & 32 \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 12 & 3m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ 32 & 1m \end{pmatrix} X_n^3 + \begin{pmatrix} n & l \\ 3m & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 1m & 32 \end{pmatrix} X_n^3 X_l^m \\
 + \begin{pmatrix} \textcircled{3} & 1 \\ \textcircled{3} & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 \\ \textcircled{3} & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} + \textcircled{B} \end{pmatrix} \begin{array}{c} X_1^1 \\ X_2^2 \\ X_3^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{2} X_1^1 \\ \textcircled{2} X_2^2 \\ \textcircled{2} X_3^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{3} X_1^1 \\ \textcircled{3} X_2^2 \\ \textcircled{3} X_3^3 \end{array} \\
 + \begin{pmatrix} \textcircled{3} & 2 \\ \textcircled{2} & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} + \textcircled{B} \end{pmatrix} \begin{array}{c} X_2^1 \\ X_2^2 \\ X_2^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{2} X_2^1 \\ \textcircled{2} X_2^2 \\ \textcircled{2} X_2^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{3} X_2^1 \\ \textcircled{3} X_2^2 \\ \textcircled{3} X_2^3 \end{array} \\
 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \end{array} ;
 \end{array}$$

ecuaciones (25-27)

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \circ \\ \textcircled{B} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{A} = \textcircled{B} \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \\
 R_{312}^1 + \begin{pmatrix} 1 & l \\ 1m & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 2m & 13 \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 23 & 1m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ 13 & 2m \end{pmatrix} X_n^1 + \begin{pmatrix} n & l \\ 1m & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 2m & 13 \end{pmatrix} X_n^1 X_l^m \\
 R_{312}^2 + \begin{pmatrix} 2 & l \\ 1m & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & l \\ 2m & 13 \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 23 & 1m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ 13 & 2m \end{pmatrix} X_n^2 + \begin{pmatrix} n & l \\ 1m & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 2m & 13 \end{pmatrix} X_n^2 X_l^m \\
 R_{312}^3 + \begin{pmatrix} 3 & l \\ 1m & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & l \\ 2m & 13 \end{pmatrix} X_l^m + \begin{pmatrix} m & n \\ 23 & 1m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ 13 & 2m \end{pmatrix} X_n^3 + \begin{pmatrix} n & l \\ 1m & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & l \\ 2m & 13 \end{pmatrix} X_n^3 X_l^m \\
 + \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 \\ \textcircled{2} & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{3} & 1 \\ \textcircled{2} & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} + \textcircled{B} \end{pmatrix} \begin{array}{c} X_1^1 \\ X_2^2 \\ X_3^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{3} X_1^1 \\ \textcircled{3} X_2^2 \\ \textcircled{3} X_3^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{2} X_1^1 \\ \textcircled{2} X_2^2 \\ \textcircled{2} X_3^3 \end{array} \\
 + \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 2 \\ \textcircled{3} & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{B} \\ \textcircled{A} + \textcircled{B} \end{pmatrix} \begin{array}{c} X_2^1 \\ X_2^2 \\ X_2^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{3} X_2^1 \\ \textcircled{3} X_2^2 \\ \textcircled{3} X_2^3 \end{array} + \begin{pmatrix} 1 \\ \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textcircled{2} X_2^1 \\ \textcircled{2} X_2^2 \\ \textcircled{2} X_2^3 \end{array} \\
 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \end{array} ;
 \end{array}$$

donde X_l^m es la m -componente del l -campo vectorial que toma valores en la distribución D y las funciones $\textcircled{\quad}$ representan las incógnitas del sistema. Convencionalmente el sistema se escribe por bloques en forma matricial con la finalidad de mostrar de manera clara y ordenada cada término. Se puede observar que las últimas 9 ecuaciones (19-21, 22-24 y 25-27) satisfacen la primera identidad de Bianchi, así que sólo basta con eliminar uno de los tres bloques de ecuaciones redundantes para tener, ahora sí, un sistema de ecuaciones independientes, es decir, un sistema de 24 ecuaciones con 18 incógnitas.

3.1.3. Ejemplo

Sea la variedad $M = fX \ 2 \ R^3/jjX_2j < 1g$ con métrica Riemanniana

$$g_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{donde } jjX_2j < 1; \quad (g_x)^{-1} = \frac{1}{1-x_2^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_2^2 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

y función lagrangiana $L = x_1^2 + x_2 x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 x_1 + x_3^2$. Calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \quad (3.60)$$

se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{d}{dt} (2\dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_3 + x_3 \dot{x}_2) &= 0; \\ 2\ddot{x}_1 + 2(x_2 \ddot{x}_3 + x_3 \ddot{x}_2) &= 0; \quad \text{equivalentemente,} \quad \ddot{x}_1 + (x_2 \ddot{x}_3 + x_3 \ddot{x}_2) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{d}{dt} (2\dot{x}_2 - x_1 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_1) &= 0; \\ 2\ddot{x}_2 - \dot{x}_1 \dot{x}_3 - x_3 \ddot{x}_1 &= 0; \quad \text{equivalentemente,} \quad \ddot{x}_2 - \frac{1}{2}(\dot{x}_1 \dot{x}_3 + x_3 \ddot{x}_1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} &= 0; \\ \frac{d}{dt} (2\dot{x}_3 + 2(x_2 \dot{x}_1)) &= 0; \\ 2\ddot{x}_3 + 2(\dot{x}_2 \dot{x}_1 + x_2 \ddot{x}_1) &= 0; \quad \text{equivalentemente,} \quad \ddot{x}_3 + \dot{x}_2 \dot{x}_1 + x_2 \ddot{x}_1 = 0; \end{aligned}$$

por lo tanto las ecuaciones geodésicas son:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \frac{1}{(x_2^2 - 1)}(x_2 \dot{x}_3 - x_2 \dot{x}_2 \dot{x}_1) &= 0; \\ \ddot{x}_2 - \frac{1}{2}(\dot{x}_1 \dot{x}_3 + x_3 \ddot{x}_1) &= 0; \\ \ddot{x}_3 - \frac{1}{(x_2^2 - 1)}(x_2 \dot{x}_2 \dot{x}_3 - x_2 \dot{x}_1) &= 0; \end{aligned} \tag{3.61}$$

en forma general $\ddot{x}^i + \Gamma_{ij}^k(x) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$, donde los símbolos de Christoffel son calculados mediante la ecuación $\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$, para este ejemplo los símbolos de Christoffel que no son cero son los siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{x_2}{2(x_2^2 - 1)}; \\ \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2(x_2^2 - 1)}; \\ \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}; \\ \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2(x_2^2 - 1)}; \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{x_2}{2(x_2^2 - 1)}; \end{aligned}$$

y las componentes del tensor de curvatura son calculadas mediante la ecuación

$$R_{bcd}^a = \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\frac{\partial}{\partial x^b} \frac{a}{m} \right) - \frac{\partial}{\partial x^d} \left(\frac{\partial}{\partial x^c} \frac{a}{m} \right) + \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{cm} \frac{m}{db} - \frac{a}{dm} \frac{m}{cb} \right);$$

de lo cual, las componentes distintas de cero del tensor de curvatura son:

$$\begin{aligned}
R_{212}^1 &= \frac{x_2^2 + 1}{4(x_2^2 - 1)^2} = R_{221}^1; & R_{112}^2 &= \frac{1}{4(x_2^2 - 1)} = R_{121}^2; & R_{113}^3 &= \frac{1}{4(x_2^2 - 1)} = R_{131}^3; \\
R_{113}^1 &= \frac{x_2}{4(x_2^2 - 1)} = R_{131}^1; & R_{332}^2 &= \frac{1}{4(x_2^2 - 1)} = R_{323}^2; & R_{212}^3 &= \frac{x_2}{2(x_2^2 - 1)^2} = R_{221}^3; \\
R_{223}^1 &= \frac{x_2}{2(x_2^2 - 1)^2} = R_{232}^1; & R_{123}^2 &= \frac{x_2}{4(x_2^2 - 1)} = R_{132}^2; & R_{313}^3 &= \frac{x_2}{4(x_2^2 - 1)} = R_{331}^3; \\
R_{312}^2 &= \frac{x_2}{4(x_2^2 - 1)} = R_{321}^2; & R_{223}^3 &= \frac{x_2^2 + 1}{4(x_2^2 - 1)^2} = R_{232}^3;
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variables de estado:

$$x_1 = x_4$$

$$x_2 = x_5$$

$$x_3 = x_6$$

y al reducir términos, el sistema (3.61) se puede escribir como uno de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_4 &= \frac{1}{(x_2^2 - 1)} (x_5 x_6 \quad x_2 x_5 x_4); \\
\dot{x}_5 &= x_4 x_6; \\
\dot{x}_6 &= \frac{1}{(x_2^2 - 1)} (x_2 x_5 x_6 \quad x_5 x_4);
\end{aligned}$$

así el spray geodésico resultante es

$$S_x = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \frac{1}{(x_2^2 - 1)} (x_5 x_6 \quad x_2 x_5 x_4) \\ x_4 x_6 \\ \frac{1}{(x_2^2 - 1)} (x_2 x_5 x_6 \quad x_5 x_4) \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Una pregunta que surge en este punto es ¿qué tipo de distribución podría “anular” los términos asociados a la curvatura? para responder esta pregunta es conveniente analizar la parte del spray geodésico que involucra los símbolos de Christoffel, esto es,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(x_2^2 - 1)} (x_5 x_6 \quad x_2 x_5 x_4) \\ x_4 x_6 \\ \frac{1}{(x_2^2 - 1)} (x_2 x_5 x_6 \quad x_5 x_4) \end{pmatrix} = x_5 x_6 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2 - 1} \\ 0 \\ \frac{x_2}{x_2^2 - 1} \end{pmatrix}}_{v_x^1} + x_4 x_6 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_x^2} + x_5 x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x_2}{x_2^2 - 1} \\ 0 \\ \frac{1}{x_2^2 - 1} \end{pmatrix}}_{v_x^3}; \quad (3.63)$$

Se puede observar que el espacio generado por los vectores $fV_x^1; v_x^2; v_x^3g$ es isomorfo a \mathbb{R}^3 , y por Proposición 2, si $D = \text{span} fV_x^1; v_x^2; v_x^3g$ el PAC3 admite solución, pero es interesante saber ¿existe una distribución de dimensión menor a 3 para la cual existe el campo F , y el PAC3 admite solución? La respuesta es sí, esto es, considerando las siguientes distribuciones:

1) Con la distribución $D = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Se obtiene el siguiente sistema de

EDP's:

Ecuaciones (1-3)

$$\begin{aligned} (@_2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix}) &= \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \quad x_2 \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \right) \quad \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} (x_2 \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix}) \\ (@_2 \quad \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix}) &= R_{112}^2 + \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right)^2 \\ &\quad \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} \right) \quad \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \\ x_2 (@_2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix}) &= \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} (x_2 \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix}) + x_2 \left(\begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right) + x_2^2 \left(\begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

Ecuaciones (4-6)

$$\begin{aligned} (@_3 \quad \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix}) &= R_{113}^1 + \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} + x_2 \left(\begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \right)^2 \quad x_2 \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \\ (@_3 \quad \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix}) &= \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} x_2 + \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right) + \left(x_2 \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \\ x_2 (@_3 \quad \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix}) &= R_{113}^1 + \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} x_2 + \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} x_2 \right) \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} + \left(\left(\begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \right)^2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right) x_2^2 \end{aligned}$$

Ecuaciones (7-9)

$$\begin{aligned} (@_2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix}) &= R_{212}^1 + \left(\begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \quad \left(2 \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} x_2 \quad \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \\ &\quad + x_2 \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} + \left(\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \\ (@_2 \quad \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix}) &= \left(\begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \right) x_2 \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \\ x_2 (@_2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix}) &= R_{212}^1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \quad x_2 \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \right) \quad \left(\begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} x_2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \\ &\quad + \left(\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} x_2 \right) \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} x_2 + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} x_2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} x_2^2 \end{aligned}$$

Ecuaciones (10-12)

$$\begin{aligned} (@_3 \quad \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix}) &= \left(\begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \right)^2 \\ (@_3 \quad \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix}) &= \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} x_2 \quad \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \\ x_2 (@_3 \quad \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \quad @_1 \quad \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix}) &= R_{313}^3 + \left(\begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \quad \left(x_2 \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} x_2 + \left(\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \right)^2 \right) x_2 \end{aligned}$$

$${}_2(x) = \frac{2x_6x_4(x_2^4 - 1) - (3 + x_2^2)x_5^2x_2}{2(x_2^4 - 1)}$$

2) Con la distribución $D = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, se obtiene el siguiente sistema de EDP's

Ecuaciones (1-3)

$$\begin{aligned} (@_2 \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix}) &= \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} - \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \\ (@_2 \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix}) &= R_{112}^2 + \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right) + \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right) \\ 0 &= \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

Ecuaciones (4-6)

$$\begin{aligned} (@_3 \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \quad @_1 \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix}) &= R_{113}^1 + \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} - \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right) \\ (@_1 \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \quad @_3 \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix}) &= \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \right) - \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \\ 0 &= R_{113}^3 + \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} - \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \end{aligned}$$

Ecuaciones (7-9)

$$\begin{aligned} (@_2 \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \quad @_1 \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix}) &= R_{212}^1 + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right) - \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right) + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \\ (@_2 \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \quad @_1 \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix}) &= \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} - \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} - \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \\ 0 &= R_{212}^3 + \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

Ecuaciones (10-12)

$$\begin{aligned} (@_3 \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \quad @_1 \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix}) &= \left(\begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} + \left(\begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} - \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} - \left(\begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \right)^2 \\ (@_3 \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \quad @_1 \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix}) &= \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \right) + \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} - \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} - \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \\ 0 &= R_{313}^3 + \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} - \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \end{aligned}$$

Ecuaciones (13-15)

$$\begin{aligned}
 (@_3 \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \quad @_2 \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix}) &= R_{223}^1 + \left(\begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right) + \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \right) \\
 (@_3 \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \quad @_2 \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix}) &= \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} + \left(\begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} \\
 0 &= R_{223}^3 + \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Ecuaciones (16-18)

$$\begin{aligned}
 (@_2 \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \quad @_3 \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix}) &= \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \right) + \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} \right) \quad \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \\
 (@_2 \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \quad @_3 \begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix}) &= R_{332}^2 + \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} + \left(\begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} + \left(\begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} \right)^2 \\
 0 &= \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Ecuaciones (19-21)

$$\begin{aligned}
 (@_3 \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \quad @_2 \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix}) &= \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \\
 (@_3 \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \quad @_2 \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix}) &= R_{123}^2 + \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \right) \\
 0 &= \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Ecuaciones (22-24)

$$\begin{aligned}
 (@_1 \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \quad @_3 \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix}) &= \left(\begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} + \left(\begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \\
 (@_1 \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \quad @_3 \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix}) &= \left(\begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \\
 0 &= \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Una solución es el campo $F_X = {}_1(X) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + {}_2(X) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

donde

$${}_1(X) = \frac{2x_5x_4x_2 \quad x_5^2x_3x_2 + x_5^2x_1 \quad x_6x_5x_2^2 \quad x_6}{x_2^2 \quad 1}$$

$${}_2(X) = \frac{2x_6x_4x_2^4 \quad 2x_6x_4 \quad 3x_5^2x_2 \quad x_5^2x_2^3}{2(x_2^4 \quad 1)}$$

En dimensión 3 ya es complicado notar cuando el sistema podría ser inconsistente o encontrar una solución de manera analítica, por lo cual nos apoyamos en herramientas computacionales para realizar los pasos algebraicos.

Capítulo 4

Conclusiones

Aunque el planteamiento del problema de anular la curvatura es simple, resolverlo representa un gran desafío, y el caso en dimensión 2 lo demuestra. En este trabajo hemos estudiado el PAC2 y nos hemos dado cuenta de que una de las partes difíciles del problema es caracterizar el conjunto de soluciones del sistema de EDPs resultante. La solución del problema depende directamente de la conexión afín y de la distribución que se está considerando, ya que esto involucra la caracterización tanto de los k_{ij} como de las distribuciones para asegurar que el sistema de EDPs tenga solución. Además, el PAC2 sólo pudo ser resuelto para casos particulares, considerando distribuciones de rango 1 constantes. Los resultados principales dan sólo condiciones suficientes para determinar la existencia de F ; hasta el momento no se puede decir nada concluyente sobre la existencia de condiciones necesarias. Aunque el conjunto de distribuciones de rango constante 1 cubre un gran número, no conocemos la solución del PAC2 para una distribución arbitraria.

La interpretación de los resultados también representa un gran reto, por que incluso en \mathbb{R}^2 no es evidente identificar, geoméricamente, lo que representan las condiciones que se obtuvieron y cuál es la relación con la distribución D considerada. El PAC en dimensión mayor que 2 se complica considerablemente por el tipo de sistemas de EDPs que se obtienen, es por eso que falta realizar una investigación más a fondo sobre este tipo de problemas.

Como línea de investigación, el siguiente paso sería realizar una interpretación geométrica, si es posible, considerar otras distribuciones y buscar condiciones necesarias y suficientes para resolver el PAC en dimensiones superiores.

Los resultados expuestos en este trabajo se encuentran publicados en [18].

Anexo

Esta sección contiene algunos conceptos matemáticos y notaciones que el lector pueda consultar rápidamente. Los detalles se encuentran en [1, 5, 8, 9, 14, 15].

Notaciones básicas

En este documento se hace uso de la *notación de Einstein*, que consiste en abreviar expresiones que involucran sumatorias, i.e., se reemplaza la suma representada por $\sum_i x^i E_i$ por la expresión $x^i E_i$, esto con la finalidad de facilitar la escritura. Y a continuación se describen algunos conceptos matemáticos básicos y notaciones que se emplean a lo largo de este documento.

Conceptos básicos

Los siguientes son algunos de los conceptos que más se emplean en el documento, por lo que el lector puede consultarlos de forma rápida en esta sección.

Espacios Tensoriales

Existen un tipo especial de espacios vectoriales asociados, de manera natural, al espacio tangente $T_m M$; estos son conocidos como *espacios tensoriales*, objetos algebraicos que describen una relación multilineal entre objetos de espacios vectoriales (vectores, covectores, escalares, etc.), dando lugar a campos tensoriales, como se describe en seguida.

Dada una variedad diferenciable M , un mapeo multilineal (lineal en cada uno de sus argumentos (variables))

$$T : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{k\text{-veces}} \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{l\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

es llamado $(k; l)$ -tensor (k -veces contravariante, l -veces covariante), en ocasiones también se le llama *tensor del tipo* $(k; l)$. En general, la covarianza y contravarianza son términos intercambiables por la dualidad de los espacios vectoriales, debido a esto los $(1; 0)$ -tensores son vectores tangentes y $(0; 1)$ -tensores son 1-formas.

Dado que la suma y producto por escalar de mapeos multilineales es multilineal, los $(k; l)$ -tensores forman un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , al que denotamos por $T_{(k; l)} T_p M$. Además de la suma y producto por escalar se puede definir una operación algebraica llamada producto tensorial denotado por \otimes , con el que podemos multiplicar tensores de diferentes tipos, esto es, si $T \in T_{(k; l)} T_p M$ y $S \in T_{(m; n)} T_p M$ entonces el producto tensorial de T y S es un mapeo multilineal

$$T \otimes S : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{k+m \text{-veces}} \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{l+n \text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$\begin{aligned} T \otimes S &= S(!^1, \dots, !^{k+m}; X_1, \dots, X_{l+n}) \\ &= T(!^1, \dots, !^k; X_1, \dots, X_l) S(!^{k+1}, \dots, !^{k+m}; X_{l+1}, \dots, X_{l+n}); \end{aligned}$$

esta operación es asociativa $((T \otimes S) \otimes K = T \otimes (S \otimes K))$, pero no conmutativa $(T \otimes S \neq S \otimes T)$ y el mapeo $(T; S) \mapsto T \otimes S$ es bilineal, todo esto se puede verificar fácilmente, mediante las siguientes identidades

$$\begin{aligned} ((v_1 + v_2) \otimes w) &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ (v \otimes (w_1 + w_2)) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ a(v \otimes w) &= av \otimes w = v \otimes aw \end{aligned}$$

El $(k; l)$ -haz tensorial sobre M es denotado por

$$T_{(k; l)}(TM) = \coprod_{p \in M} T_{(k; l)} T_p M;$$

y se define como el haz vectorial del espacio total $T_{(k; l)} TM$ sobre el espacio base M , con la proyección canónica, una sección de este haz es un $(k; l)$ -campo tensorial (un mapeo que a cada $p \in M$ le asigna un $(k; l)$ -tensor), a esta sección también se le conoce como *campo tensorial de grado* $(k; l)$. Es importante notar que mientras los tensores en un punto son multilineales sobre los reales los campos tensoriales son multilineales sobre las funciones $C^1(M)$, esto es,

$$T(\dots; f + g \dots) = fT(\dots) + gT(\dots)$$

donde $f, g \in C^1(M)$ y \dots son campos vectoriales o 1-formas, al conjunto de campos tensoriales de clase C^1 lo denotamos por $\mathcal{T}_{(k; l)}(TM)$.

Suponiendo que V y W son espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo F , el producto tensorial $V \otimes_F W$ se define, de manera formal, mediante generadores y relaciones de equivalencia (generalmente lo denotamos $V \otimes W$ cuando F es sobrentendido). Para el propósito de construir el producto tensorial consideramos $M(V; W)$ como el espacio vectorial que tiene como base $V \otimes W$, es decir, el espacio generado por los pares $(v; w)$ donde $v \in V$ y $w \in W$. El producto tensorial surge mediante la definición de las siguientes relaciones de equivalencia sobre $M(V; W)$

$$\begin{aligned} (v + v'; w) &= (v; w) + (v'; w) \\ (v; w + w') &= (v; w) + (v; w') \\ (v; w) &= (v; w) \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

donde $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ y $\lambda \in F$. Denotamos por N el espacio generado por estas cuatro relaciones de equivalencia, entonces el *producto tensorial* de V y W se define como el espacio cociente $V \otimes W = M(V; W)/N$.

Para cada elemento $(v; w) \in M(V; W)$, su imagen por la proyección natural

$$\pi : M(V; W) \rightarrow V \otimes W$$

será denotada por $v \otimes w$; luego, de (4.0.1) se pueden deducir las siguientes identidades sobre $V \otimes W$.

- i) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$
- ii) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$
- iii) $(\lambda v) \otimes w = \lambda (v \otimes w) = v \otimes (\lambda w)$

Una de las propiedades del producto tensorial establece que si v_1, \dots, v_n es una base para V y w_1, \dots, w_m es una base para W , entonces $\{v_i \otimes w_j; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ es una base para $V \otimes W$. En particular, la dimensión del espacio tensorial $V \otimes W$ es igual al producto de las dimensiones de V y W , es decir, $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$; esto se puede demostrar partiendo del hecho de que cada V_i es un subespacio de V , de dimensión 1, generado por v_i y W_j es un subespacio de W , de dimensión 1, generado por w_j y por inducción se demuestra que $V \otimes W = \sum_{i,j} V_i \otimes W_j$, y cada $V_i \otimes W_j$ es un espacio vectorial generado por $v_i \otimes w_j$, más detalles en [9].

Una vez que se fija un espacio vectorial se pueden definir varios espacios tensoriales, esto es, para un k entero positivo $\mathbf{T}^k = T_p M \otimes \dots \otimes T_p M$, k es el número de veces que se aplica

este producto y a \mathbf{T}^k se le llama espacio tensorial contravariante de grado k , un elemento de \mathbf{T}^k es llamado tensor k veces contravariante o tensor de grado k . De manera análoga $\mathbf{T}_l = T_p M \otimes \dots \otimes T_p M$, con l veces el producto tensorial, T_l es llamado espacio tensorial covariante de grado l , un elemento de \mathbf{T}_l es llamado tensor l veces covariante o tensor de grado l . Entonces el espacio tensorial del tipo $(k; l)$ se define como el producto tensorial $\mathbf{T}_l^k = T_p M \otimes \dots \otimes T_p M \otimes \dots \otimes T_p M$, un elemento de \mathbf{T}_l^k es llamado tensor del tipo $(k; l)$. Si $k = l = 1$, entonces $\mathbf{T}_1^0 = \mathbf{T}_1 = T_p M$, $\mathbf{T}_0^1 = \mathbf{T}^1 = T_p M$ y $\mathbf{T}_0^0 = f$ donde $f \in C^1(M)$. Usaremos la notación $T^{\otimes n} M$ en lugar de $T M \otimes \dots \otimes T M$, que es n -veces el producto de $T M$.

Si $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right\}$ y $\{fdx^i(p)\}$ son bases de $T_p M$ y $T_p^* M$ respectivamente, en una carta $(U; \varphi)$ donde $p \in U$ y $\{fdx^i(p)\}$ es la base dual de $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right\}$. Entonces, un $(k; l)$ -tensor T definido sobre U se puede expresar en coordenadas como

$$T = T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(p) \otimes dx^{j_1}(p) \otimes \dots \otimes dx^{j_l}(p)$$

donde $T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ son funciones sobre U , las componentes de T en las coordenadas $(x_1; \dots; x_n)$, correspondientes a φ . T se dice ser de clase C^k si las funciones $T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ son de clase C^k . De hecho T puede ser escrito de manera única como

$$T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}(p) = T \left(dx^{i_1}(p) \otimes \dots \otimes dx^{i_k}(p) \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_l}}(p) \right);$$

para $i_1; \dots; i_k; j_1; \dots; j_l \in \{1; \dots; n\}$, de esta forma se extraen las n^{k+l} componentes de T , en la carta coordenada $(U; \varphi)$.

Entonces los tensores

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l} : i_1; \dots; i_k; j_1; \dots; j_l \in \{1; \dots; n\} \right\}$$

forman una base local para los campos tensoriales del tipo $(k; l)$ [8, 15].

Variedad Riemanniana

Una *métrica Riemanniana* g sobre una variedad diferenciable M es un tipo especial de campo tensorial de grado $(0; 2)$, tal que a cada punto $p \in M$ le asigna un $(0; 2)$ -tensor simétrico ($g_p(X_p; Y_p) = g_p(Y_p; X_p)$) y definido positivo ($g_p(X_p; X_p) > 0$ para $p \in M$ y $X_p \neq 0$); a su vez, una métrica Riemanniana induce un producto interior en cada espacio tangente $T_p M$ para cada $p \in M$; típicamente se escribe $\langle X_p; Y_p \rangle = g_p(X_p; Y_p)$ para $X_p; Y_p \in T_p M$, esto permite definir la *longitud* o *norma* de cualquier vector $X_p \in T_p M$ como $\|X_p\| = \sqrt{g_p(X_p; X_p)}$ y el *ángulo*

entre dos vectores no cero X_p, Y_p tal que satisface $\cos(\theta) = \frac{hX_p, Y_p}{\sqrt{hX_p, X_p} \sqrt{hY_p, Y_p}}$ y $\theta \in [0, \pi]$; con base en esto, ahora se puede definir la ortogonalidad entre vectores no nulos, esto es, se dice que $X_p \perp Y_p$ si $hX_p, Y_p = 0$ son ortogonales si el ángulo entre estos es igual a $\frac{\pi}{2}$ o, equivalentemente, $hX_p, Y_p = 0$.

Si (E_1, \dots, E_n) es un marco local sobre TM , y (x^1, \dots, x^n) su correspondiente marco dual, una métrica Riemanniana se puede expresar localmente como

$$g = g_{ij} E^i \otimes E^j.$$

La matriz de coeficientes g_{ij} definida por $g_{ij} = hE_i, E_j$ es simétrica en i y j y depende diferenciablemente de $p \in M$, esto es,

$$g_p(X, Y) = g_p(Y, X) \text{ o equivalentemente } g_{ij} = g_{ji} \text{ para } X, Y \in T_pM.$$

En particular, en el sistema coordenado (x_i) , g se puede expresar como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

La métrica Euclidiana g sobre \mathbb{R}^n en coordenadas (r_i) es definida como

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r_i}, \frac{\partial}{\partial r_j}\right) = \delta_{ij}$$

donde $\frac{\partial}{\partial r_i}, \frac{\partial}{\partial r_j}$ son vectores unitarios en \mathbb{R}^n y en forma matricial $g = Id_n$. Luego aplicando g a los vectores $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$, tales que en coordenadas se pueden expresar como $v = v^i \frac{\partial}{\partial r_i}$ y $w = w^j \frac{\partial}{\partial r_j}$ respectivamente se tiene

$$\begin{aligned} g_p(v, w) &= dr^k \otimes dr^l \left(v^i \frac{\partial}{\partial r_i}, w^j \frac{\partial}{\partial r_j} \right) \\ &= v^i dr^k \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \right) \otimes w^j dr^l \left(\frac{\partial}{\partial r_j} \right) \\ &= \delta_{ij} v^i w^j \\ &= \sum_{i=1}^n v^i w^i; \end{aligned}$$

esto representa el producto interior de dos vectores en cada espacio tangente $T_p\mathbb{R}^n$, bajo la identificación natural $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Al par $(M; g)$ se le llama *variedad Riemanniana*. Si $(M; g_M)$ y $(N; g_N)$ son dos variedades Riemannianas y $\phi: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo tal que $\phi^* g_N = g_M$ entonces ϕ se dice ser una *isometría*, donde $\phi^* g_N$ representa el *pullback* de g_N por ϕ y es definido como el operador que asigna a cada $p \in M$ un tensor del tipo $(0, 2)$ en T_pM , esto es,

$$(\phi^* g_N)_p(v, w) = (g_N)_{\phi(p)}(T_p\phi(v), T_p\phi(w))$$

para $v, w \in T_p M$; donde $T' : TM \rightarrow TN$ denota el mapeo tangente de γ y, para cada $p \in M$ se tiene $T_p' : T_p M \rightarrow T_{\gamma(p)} N$.

Dado que cada espacio tangente de una variedad diferenciable es una “copia” de un espacio euclidiano, el producto interno del espacio Euclidiano puede ser transportado localmente a cada espacio tangente mediante parametrizaciones locales, a pesar de esto, no existe una elección canónica de un producto interno para cada espacio tangente, ya que al superponer las cartas podrían no coincidir. De ahí que haya que hacer una traslación infinitesimal, de manera suave (continuamente diferenciable), en ese sentido, el producto interno da la longitud de esa traslación infinitesimal y la integral de la longitud da la longitud de la curva, que se forma con dicha traslación, sobre la variedad.

Al objeto geométrico que permite “conectar” los espacios tangentes se le llama *conexión*, a la conexión que permite especificar una derivada covariante sobre una variedad diferenciable se le conoce como *conexión afín*. La derivada covariante r_i es una generalización del concepto de derivada parcial ∂_i (derivadas en la dirección de un vector dado). Una métrica Riemanniana define de manera única una conexión afín llamada de Levi-Civita, que es una conexión afín libre de torsión, que preserva la métrica Riemanniana, en la siguiente sección se definen formalmente [9].

Conexión afín

Una conexión afín sobre una n -variedad diferenciable M se define como un mapeo

$$r : (TM) \rightarrow (TM) \rightarrow (TM);$$

tal que a cada par de campos vectoriales lisos $(X; Y) \in (TM) \rightarrow (TM)$ le asigna el campo vectorial liso $r_X Y$ (derivada covariante del campo vectorial Y en la dirección del campo vectorial X) y satisface las siguientes propiedades, para todo $a; b \in \mathbb{R}$, $X; Y \in (TM)$ y $f \in C^1(M)$,

- (1) $r_X(aY_1 + bY_2) = ar_X Y_1 + br_X Y_2$ (\mathbb{R} -lineal en el 2º argumento)
- (2) $r_{fX_1 + gX_2} Y = fr_{X_1} Y + gr_{X_2} Y$ ($C^1(M)$ -lineal en el 1º argumento)
- (3) $r_X fY = fr_X Y + (Xf)Y$ (Regla de Leibniz)

donde $X(f)$ es la derivada de f en la dirección de X , más detalles en [5, 9, 15].

Una conexión afín ∇ se puede expresar en términos de un marco coordenado local $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ de manera única por n^3 funciones llamadas símbolos de Christoffel, que denotamos por Γ_{ij}^k para $1 \leq i, j, k \leq n$, esto es,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son expresados en términos del marco local $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ entonces $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ y $\nabla_X Y$ se puede expresar en coordenadas como

$$\nabla_X Y = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} Y^k X^i + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dada una conexión afín ∇ sobre una variedad M se pueden definir dos tensores sobre M asociados a ∇ , uno del tipo $(1;2)$ llamado *tensor torsión*, que denotamos por $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ y es definido como

$$T(X; Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X; Y].$$

Una conexión afín se dice ser libre de torsión o simétrica si cumple

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X; Y] = 0 \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$

donde $[X; Y]$ es el corchete de Lie de X y Y [5]. En este caso, los símbolos de Christoffel se dicen ser simétricos con respecto a los índices inferiores, esto es, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. En este trabajo solo se están considerando conexiones afines simétricas definidas sobre una variedad lisa M y, en ocasiones, usaremos ∂_i en lugar de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ para denotar la derivada parcial con respecto a la coordenada x_i , con la finalidad de simplificar la notación.

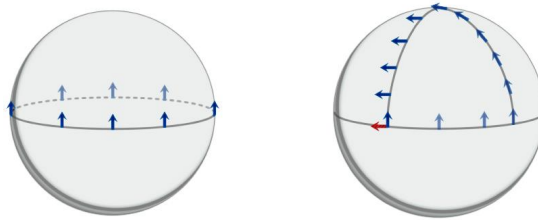


Figura 4.1: Transporte paralelo de un vector

Un campo vectorial X sobre M se dice ser paralelo a lo largo de una curva diferenciable $\gamma : I \rightarrow M$ si la derivada covariante de X respecto al vector tangente $\dot{\gamma}(t)$ a la curva $\gamma(t)$ es cero, esto es,

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X = 0$$

Tensor de Curvatura

La curvatura proporciona información acerca de la geometría de un objeto; por ejemplo, en teoría de superficies, se ha demostrado que algunas propiedades de una superficie S , embebida en \mathbb{R}^3 , son preservadas bajo isometrías (mapeos entre superficies que preservan los productos interiores (escalares)), estas propiedades son llamadas *intrínsecas*, o también conocidas como *invariantes locales*. Aunque las curvaturas principales κ_1, κ_2 (valores máximo y mínimo), de una superficie S no son intrínsecas, Gauss demostró que el producto $K = \kappa_1 \kappa_2$, llamada *curvatura de Gauss* si lo es; este resultado fue nombrado por el mismo Gauss como *teorema Egregio*, los detalles se pueden consultar en [13].

Gracias a las aportaciones de Riemann para el desarrollo de la geometría de variedades, la curvatura de Gauss fue generalizada en a dimensiones superiores, donde la curvatura sigue siendo un invariante local no obstante, medirla es mucho mas complicado porque una variedad M puede curvarse en muchas direcciones. Más aún, en general M no está embebida en espacio Euclidiano, por lo que se necesita una forma intrínseca de medir esa cantidad. Para medir cantidades geométricas (distancias, ángulos, áreas, volúmenes, curvatura, entre otras) se requiere dotar a M de una métrica; pero se puede demostrar que toda variedad suave es metrizable e incluso admite una métrica Riemanniana g , esta métrica define de manera única una conexión de Levi-Civita y es así como se puede definir la noción de derivada covariante sobre la variedad M [4].

En toda variedad Riemanniana se puede definir un mapeo, llamado *curvatura de Riemann*,

$$R: (TM) \times (TM) \rightarrow (TM) \times (TM);$$

tal que a cada $X, Y, Z \in (TM)$ le asigna el campo vectorial

$$r_X(r_Y Z) - r_Y(r_X Z) - r_{[X;Y]} Z$$

donde $[X; Y]$ denota el corchete de Lie de X y Y , a $r_X Y$ se le llama derivada covariante del campo Y en la dirección de X , y para todo $X; Y; Z \in (TM)$ y $f \in C^1(M)$ satisface las siguientes propiedades:

- Antisimetría en X y Y :

$$R(X; Y) = -R(Y; X);$$

- Bilinealidad en las variables X y Y sobre las funciones $f \in C^1(M)$:

$$R(f_1 X_1 + f_2 X_2; Y) Z = f_1 R(X_1; Y) Z + f_2 R(X_2; Y) Z;$$

$$R(X; f_1 Y_1 + f_2 Y_2) Z = f_1 R(X; Y_1) Z + f_2 R(X; Y_2) Z;$$

- Linealidad en Z sobre las funciones $f \in C^1(M)$:

$$R(X; Y)(f_1 Z_1 + f_2 Z_2) = f_1 R(X; Y)Z_1 + f_2 R(X; Y)Z_2:$$

A R se le puede considerar como un campo tensorial de grado $(1, 3)$, tal que en cada punto $p \in M$ le asigna un tensor del tipo $(1,3)$, en coordenadas locales (x_i) se puede expresar como

$$R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l;$$

Y dado que, por un lado,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}; \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \Gamma^l_{\partial x_i \partial x_j} \Gamma^m_{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_m} - \Gamma^l_{\partial x_j \partial x_i} \Gamma^m_{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_m} - \Gamma^l_{[\partial x_i \partial x_j]} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

donde $[\frac{\partial}{\partial x_i}; \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$; y por otro lado,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}; \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

en términos de los símbolos de Christoffel las componentes R^l_{ijk} componentes se pueden expresar como

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^l_{ij} + \sum_{m=1}^n \left(\Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik} - \Gamma^l_{km} \Gamma^m_{ij} \right); \quad (4.0.2)$$

El Tensor de curvatura de Riemann mide hasta qué punto la métrica no es isométrica al espacio euclidiano plano. Desde otra perspectiva, mide la *falla* del transporte paralelo (commutatividad de la derivada covariante de orden dos) [5, 9, 16]. En la Figura (4.1) se puede observar que transportar un vector sobre una curva plana el vector de llegada es igual en magnitud y dirección, pero al transportarlo paralelamente una curva que no es plana el vector de llegada apunta en otra dirección, es en este sentido que se dice que la curvatura mide la holonomía asociada al transporte paralelo.

Para una conexión Γ que proviene de una métrica Riemanniana el tensor de curvatura asociado satisface una propiedad de simetría conocida como la primera identidad de Bianchi, llamadas así en honor al matemático italiano Luigi Bianchi (1856-1928) [6]; esta identidad declara que si $X; Y; Z$ son campos vectoriales suaves sobre una variedad Riemanniana M , entonces el tensor de curvatura asociado a Γ satisface

$$R(X; Y)Z + R(Y; Z)X + R(Z; X)Y = 0; \quad (4.0.3)$$

Bibliografía

- [1] F. Bullo, A. D. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems*. Texts Appl. Math. Vol 49 Springer–Verlag, New York, 2005.
- [2] A. K. Gupta, S. K. Arora, J. R. Westcott *Industrial automation and robotics*. MERCURY LEARNING AND INFORMATION, Dulles 2017.
- [3] D. A. Lizárraga, H. Nijmeijer. *Control of underactuated systems. Partial results and open problems in the characterization of the Extended Chained Form*. Information, Decision and Control 2002, Adelaide, Australia, 2002.
- [4] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 218. Springer Verlag, 2nd edition, New York 2013.
- [5] J. M. Lee, *Riemannian manifolds, an introduction to curvature*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2nd edition, New York, 2018.
- [6] L. W. Tu, *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics 275. Springer, USA 2017.
- [7] S. Ricardo, *Equivalence and equivariants of mechanical control systems*. 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC) Orlando, 2011.
- [8] K. Burns, M. Gidea. *Differential geometry and topology, With a View to Dynamical Systems*. Chapman-Hall/CRC, USA, 2005.
- [9] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of Differential geometry*, Vol I. Jhon Wiley & Sons Inc., 1996.
- [10] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 2nd edition, USA, 2003.
- [11] A. D. Lewis, R. M. Murray.(1999). Configuration Controllability of Simple Mechanical Control Systems. *SIAM Review*,41(3),555-574.

- [12] P. J. Olver. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge University Press, New York, 1995.
- [13] P. Sharan. *Spacetime, Geometry and Gravitation*. Birkhäuser Verlag, India, 2009.
- [14] H. Nijmeijer, A. Van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer–verlag, New York, 1990.
- [15] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics Vol 94. Springer Verlag, New York, Inc., 1983.
- [16] L. W. Tu, *An introduction to manifolds*. Springer, Second Edition, New York 2011.
- [17] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer Verlag, 2nd edition, Berlin, Germany 1988.
- [18] E. Cuellar, A. C. Silva, D. A. Lizárraga, “Conditions to Flatten the Curvature Tensor Associated with a Symmetric Affine Connection”, *Journal of Mathematics*, vol. 2022, Article ID 1528246, 11 pages, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/1528246>.