



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Robustificación de sistemas lineales usando
control por modos deslizantes**

Tesis que presenta

Ingrid Lissette Tirado López

Para obtener el grado de

Maestría en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., Mayo 2024



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis Robustificación de sistemas lineales usando control por modos deslizantes presentada para obtener el Grado de de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Ingrid Lissette Tirado López** y aprobada el **dd de mm de aaaa** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez
(Director de la tesis)

Dr. Arturo Zavala Río
(Sinodal)

Dr. Adrián René Ramírez López
(Sinodal)

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
(Sinodal)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez.

Durante la realización del trabajo la autora recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CVU:1006801 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

A mi padre Alfredo Tirado por siempre darme su apoyo incondicional y no soltar mi mano

A mi hermana Cindy Xanath porque aunque no es muy evidente, siempre está conmigo.

A la memoria de mi madre Irene López porque siempre fuiste y serás mi mejor motivación.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi asesor de tesis, el Dr. Tonámetl Sánchez por su paciencia, apoyo y conocimientos brindados durante este largo camino.

Al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica y a la División de Control y Sistemas Dinámicos por abrirme sus puertas. A los doctores y maestros que pertenecen a la División por la formación y tolerancia, en especial a mis sinodales; Dr. César Maldonado, Dr. Adrián Ramírez y al Dr. Arturo Zavala.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por financiar el desarrollo de este proyecto y mi formación en la Maestría de Control y Sistemas Dinámicos.

Al Ing. Javier Alejandro Qui Martin por su apoyo en la ejecución de las pruebas experimentales llevadas a cabo en el Laboratorio de Control de la División de Control y Sistemas Dinámicos del IPICYT.

A todos mis amigos/compañeros del posgrado que han hecho todo más ameno y divertido.

A mi familia y padrinos por brindarme su apoyo, por estar conmigo y siempre tener las palabras correctas para continuar.

El más sincero agradecimiento a mi hermana Cindy, a mi padre Alfredo y a mi madre Irene por el inmenso amor, pero sobretodo por motivarme a ser siempre mejor y seguir adelante. Les debo todo, espero siempre hacerlos sentir orgullosos.

Índice general

1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema y objetivos	5
3. Marco Teórico	8
3.1. Control por modos deslizantes	8
3.1.1. Controlador por modos deslizantes estándar	9
3.1.2. Control por modos deslizantes integral	15
3.1.3. Modos deslizantes en esta tesis	21
3.2. Inclusiones Diferenciales	22
3.2.1. Existencia de Soluciones	23
3.2.2. Estabilidad	23
3.2.3. Método de la función de Lyapunov	24
4. Robustificación ante perturbaciones acotadas	26
4.1. Sistema lineal	26
4.2. Modos deslizantes de orden reducido	27
4.2.1. Modo deslizante de orden reducido para $\lambda_1 = \lambda_2$	43
4.3. Modos deslizantes de orden completo	44
4.3.1. Modo deslizante integral para sistemas con valores propios reales	49
5. Robustez ante perturbaciones no acotadas	56
5.1. Planteamiento del problema	57
5.2. Construcción de la función de Lyapunov	58
5.3. Análisis de robustez	61
6. Conclusiones	71
A. Teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo	73
B. Función tipo Lyapunov para controlador por modos deslizantes en coordenadas originales	79
B.1. Modos deslizantes de orden reducido	79
B.2. Modos deslizantes de orden completo	81
B.2.1. Modo integral para valores propios reales	82

C. Sobre la función de Lyapunov	83
Bibliografía	86

Índice de figuras

3.1. Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$	12
3.2. Comportamiento de señales en el sistema con SMC.	13
3.3. Superficie deslizante y señal de control	13
3.4. Ganancia K y perturbación constante D	14
3.5. Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$	14
3.6. Comportamiento de señales en el sistema con SMC	15
3.7. Superficie deslizante y señal de control	15
3.8. Ganancia K y perturbación constante D	16
3.9. Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$	18
3.10. Comportamiento de señales en el sistema con SMC.	18
3.11. Superficie deslizante y señal de control	19
3.12. Ganancia K y perturbación constante D	19
3.13. Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$	20
3.14. Comportamiento de señales en el sistema con SMC	20
3.15. Superficie deslizante y señal de control	21
3.16. Ganancia K y perturbación constante D	21
4.1. Simulación 1. Trayectorias del sistema nominal (4.1) con $k_1 = 2$ y $k_2 = 3$	29
4.2. Simulación 2. Trayectorias del sistema nominal (4.1) con $k_1 = 4$ y $k_2 = 8$	30
4.3. Simulación 3. Trayectorias del sistema nominal (4.1) con $k_1 = 40$ y $k_2 = 20$	30
4.4. Simulación 1. Trayectorias del sistema diagonal (4.7) sin entradas.	31
4.5. Simulación 2. Trayectorias del sistema diagonal (4.7) sin entradas.	31
4.6. Simulación 3. Trayectorias del sistema diagonal (4.7) sin entradas.	32
4.7. Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s(x) = 0$	35
4.8. Comportamiento de los estados del sistema controlado.	35
4.9. Ganancia K y perturbación constante d	36
4.10. Variable deslizante y señal de control.	36
4.11. Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s(x) = 0$	37
4.12. Comportamiento de los estados del sistema controlado.	37
4.13. Ganancia K y perturbación constante d	38
4.14. Variable deslizante y señal de control.	38
4.15. Acercamiento de la trayectoria y la superficie deslizante para $K = 1$ y $K = 6$	39
4.16. Circuito	40
4.17. Respuesta del péndulo simple a una señal cuadrada	41
4.18. Péndulo simple (no perturbado) con controlador lineal kx	42

4.19. Péndulo perturbado con controlador lineal implementado	42
4.20. Comportamiento de la planta (4.20) con control $u = -K \text{sing}(s)$	43
4.21. Trayectoria del sistema controlado.	48
4.22. Comportamiento temporal de los estados del sistema.	48
4.23. Ganancia K y perturbación constante d	49
4.24. Variable deslizante y señal de control.	49
4.25. Trayectoria del sistema controlado.	50
4.26. Comportamiento temporal de los estados del sistema.	50
4.27. Superficie deslizante y señal de control.	51
4.28. Ganancia K y perturbación constante D	51
4.29. Trayectoria del sistema controlado y variable deslizante $s(x, v)$	53
4.30. Comportamiento temporal de los estados del sistema.	53
4.31. Ganancia K y perturbación constante d	54
4.32. Variable deslizante y señal de control.	54
5.1. Regiones en \mathbb{R}^2	60
5.2. Función V_a	61
5.3. Gráfica de la Función de Lyapunov V_z	64
5.4. Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$	66
5.5. Comportamiento de señales en el sistema con SMC.	67
5.6. Superficie deslizante y señal de control	67
5.7. Ganancia K y perturbación presente en el sistema	68
5.8. Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$	68
5.9. Comportamiento de señales en el sistema con SMC	69
5.10. Superficie deslizante y señal de control	69
5.11. Ganancia K y perturbación presente en el sistema	70

Resumen

El control por modos deslizantes, es un método de control retroalimentado discontinuo y robusto, donde las superficies de deslizamiento son conjuntos descritos por ecuaciones que combinan los estados del sistema. La señal de control obliga a las trayectorias del sistema a ir desde una condición inicial a la superficie de deslizamiento elegida en tiempo finito para posteriormente deslizarse sobre ella y converger al punto de equilibrio. En la presente tesis, se diseña un control por modos deslizantes para un sistema controlado linealmente, con esto, se añade robustez al sistema sin modificar los términos del control lineal (diseñado previamente) ni las propiedades que este aporta. Para esto, se propone que el controlador por modos deslizantes esté presente solamente con una ley de conmutación (sin términos adicionales que dependan del estado) con una ganancia que solo sea función de la magnitud de la perturbación. A través de una transformación lineal de coordenadas, se obtienen los espacios propios, que serán elegidos como superficies de deslizamiento, y una función tipo Lyapunov cuadrática (en términos de la variable de deslizamiento) que es útil para verificar robustez ante perturbaciones acotadas del sistema. Otra contribución importante de esta investigación es la construcción de funciones de Lyapunov, que además de verificar estabilidad asintótica del punto de equilibrio, sirven para analizar propiedades adicionales de robustez, a decir, ante la presencia de perturbaciones no acotadas dependientes de los estados.

Abstract

Sliding mode control is a discontinuous and robust feedback-control method, where the sliding surfaces are sets described by equations combining the system's states. The control signal drives the trajectories of the system from initial conditions to the sliding surface in finite-time in order to they slide on it and converge to the equilibrium point. In the present thesis, a sliding mode control is designed for a system (with a previously designed linear control) to add robustness without modifying the terms of the linear control. The aim is to introduce the control signal as a commutation law (without additional terms depending on the state) with a gain that is only a function of the upper bound of the disturbance. By means of a linear transformation of the system's coordinates we obtain the eigenspaces that are chosen as sliding surfaces, and a quadratic Lyapunov-like function (in terms of the sliding variable) that is useful to verify robustness against bounded disturbances of the system. An important contribution of this research is the construction of a Lyapunov function that, apart from verifying asymptotic stability of the equilibrium point, is useful to analyze additional robustness properties of the system, namely, in the presence of state-dependent unbounded perturbations.

Capítulo 1

Introducción

Un modelo matemático de algún sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que pueden ser obtenidas por medio de leyes o relaciones físicas, químicas o de alguna otra índole, y que representan la dinámica del sistema. Estos modelos sirven para captar propiedades importantes del sistema bajo estudio, proporcionando bases necesarias para entender o modificar el comportamiento del sistema real. Por otra parte, para el diseño de cualquier sistema de control, existen diferencias entre las plantas físicas reales y los modelos matemáticos que se desarrollan para el diseño y análisis del controlador. Estas diferencias se deben, por ejemplo, a las dinámicas no modeladas, variaciones de parámetros, perturbaciones, o aproximación de un comportamiento complejo del sistema por modelos más sencillos. Ahora, usualmente es deseable que los sistemas de control proporcionen eficiencia y buen desempeño ante incertidumbres, perturbaciones y fallas, así como que sean sencillos de diseñar y de implementar. Por esto, se puede considerar a la robustez y a la facilidad de diseño como dos características relevantes de un controlador.

Las técnicas de control clásicas fueron desarrolladas con base en modelos lineales de los sistemas físicos [4, 22] (que, en general, solo son útiles para estudiar y resolver problemas en un ámbito local). Sin embargo, hoy en día, muchos de los problemas de control requieren un enfoque desde un punto de vista global y con requerimientos más sofisticados, lo que implica el uso de modelos no lineales, ya que (estrictamente) todos los sistemas presentan algún tipo de no linealidad y, por lo tanto, dichos modelos pueden representar mejor los fenómenos de la vida real.

Para el desarrollo de este trabajo, consideramos los sistemas no lineales de segundo orden y afines en la entrada de control que pueden expresarse de la siguiente forma

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x) + bU + \delta, \quad (1.1)$$

donde $x = [x_1, x_2]^\top \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, U es una entrada de control y δ es una perturbación, ambas escalares. Este sistema dinámico es de interés debido a que se sabe que muchos sistemas en la realidad (como sistemas eléctricos, mecánicos o electromecánicos), a pesar de su complejidad, pueden ser modelados como un sistema de segundo orden [5, 18, 22, 28]. Así, bajo este modelo matemático pueden ser estudiados,

obteniendo las propiedades necesarias para diseñar controladores adecuados y poder gobernar su comportamiento en la realidad.

Cuando se tiene que el modelo del sistema es no lineal como el que se presenta en (1.1), uno de los métodos más utilizados en el proceso de diseño de sistemas de control es la linealización, puesto que con ésta es posible aproximar las ecuaciones no lineales que representan al sistema en una región cercana al punto de equilibrio. Así, con un control lineal (diseñado a partir de la linealización) se puede llegar a controlar de manera satisfactoria sistemas cuya dinámica se parezca mucho a la de un sistema lineal. Sin embargo, las técnicas de control lineal no siempre son suficientes para cumplir los requerimientos del sistema de control (por ejemplo, garantizar estabilidad asintótica del origen de un sistema no lineal), por lo que diversas técnicas de control no lineal han sido desarrolladas.

Con éstas técnicas, se pueden lograr mejores resultados en el sistema de control, por ejemplo, mantener la estabilidad en un rango de operación mayor [18, 17, 31, 21]. Es importante mencionar que en la mayoría de las técnicas de control no lineal, las funciones de Lyapunov se han convertido en una de las herramientas más importantes en la construcción y diseño de sistemas de control, tanto para el análisis de estabilidad como el análisis de robustez.

Entre las técnicas de control no lineal, la linealización por retroalimentación de la salida es relativamente simple y ventajosa, ya que (tras cancelar los términos no lineales) el lazo cerrado se puede especificar con procedimientos lineales estándar. Sin embargo, es bien sabido que dicha técnica carece generalmente de robustez ante perturbaciones e incertidumbres [34, Cap. 6]. Afortunadamente, existen técnicas que, a través de términos adicionales de control, permiten añadir robustez al lazo cerrado, por ejemplo, las técnicas de rechazo activo de perturbaciones [8] y el rediseño de Lyapunov [18, Cap. 14]. Además el control por modos deslizantes¹ [36, 37, 11], es una técnica que en general su diseño estándar no es planteado como un método de robustificación, sino como una técnica de control directo, sin embargo, se pueden obtener diseños robustos ante cierto tipo de incertidumbres (o errores de modelado), así como también algoritmos de control capaces de rechazar alguna clase de perturbaciones externas.

El control por modos deslizantes es una técnica de control no lineal robusto cuyo diseño puede resultar relativamente simple. La investigación acerca de estos controladores ha ido creciendo (puede verse, por ejemplo, [36, 11, 37, 32]) ya que ha demostrado ser aplicable para un amplio rango de problemas, por ejemplo, ha sido probado satisfactoriamente en convertidores de potencia [27], sistemas electromecánicos [37, 9], aplicaciones de control de movimiento en robots [24, 39], aplicaciones aeroespaciales [38] y aplicaciones médicas [32, 29]. También se refleja en tópicos como redes inteligentes, eficiencia energética, automóviles eléctricos, entre otros [10, 19, 1, 33, 12, 3, 40, 16]. Una característica relevante de los controladores por modos deslizantes es que su ac-

¹Comúnmente abreviado como SMC, por sus siglas en inglés.

ción incluye funciones discontinuas de los estados, esta característica puede generar (dependiendo de la técnica de implementación) señales de control conmutadas a altas frecuencias. Sin embargo, es ésta característica la que permite que los controladores por modos deslizantes sean capaces de compensar exactamente perturbaciones acotadas. Específicamente, el controlador lleva a las trayectorias del sistema a una superficie deslizante en tiempo finito y, una vez que llegan ahí, estas son obligadas a permanecer en dicha superficie para todo tiempo futuro, deslizándose sobre ella hacia el punto de equilibrio, eliminando por completo el efecto de la perturbación.

En general, el proceso de diseño de un controlador por modos deslizantes se divide en las siguientes dos etapas [37, 11]:

- A. elección de la superficie de deslizamiento;
- B. diseño de la ley de control.

De estas dos etapas es importante mencionar lo siguiente: la principal restricción para elegir la superficie de deslizamiento es que el origen de la dinámica en el modo deslizante sea asintóticamente estable (en el sentido de Lyapunov); el diseño de la señal de control se realiza a través de una función de tipo Lyapunov de control, usualmente cuadrática, que normalmente produce leyes de control que contienen términos adicionales al término discontinuo. Como ya se mencionó, una de las ventajas del control por modos deslizantes es la robustez, sin embargo, como cualquier otra técnica, presenta ciertas desventajas. En general, se pueden mencionar dos problemas del control por modos deslizantes: el primero, relativo a la implementación, es la presencia del efecto conocido como *chattering*, para el cuál existen algunas técnicas de reducción [18, Cap. 14]; el segundo, relativo al proceso de diseño, es que no hay un método único para la elección de la superficie de deslizamiento. Éste segundo punto es uno de los temas que aborda la presente tesis.

Consideremos el caso en el que se tiene un sistema de segundo orden con un control nominal (previamente diseñado sin considerar incertidumbres ni perturbaciones) y el control por modos deslizantes se utiliza como método de robustificación. Como ya se mencionó, el proceso de diseño del control por modos deslizantes genera términos adicionales al término discontinuo, éstos modifican a los términos del control nominal y, por lo tanto, provocarán que las características de desempeño elegidas previamente (en el caso nominal) también sean modificadas.

Debido a que no se ha encontrado bibliografía que resuelva el problema descrito, la contribución del presente trabajo es la siguiente: en esta tesis se aborda el problema de encontrar un proceso de diseño de un controlador por modos deslizantes, para la robustificación de un sistema de segundo orden controlado linealmente, que permita mantener algunas propiedades de desempeño deseadas del controlador nominal. En este trabajo, nos referimos a *robusticar*, al hecho de que exista algún tiempo finito a partir del cual el sistema se vuelva insensible a las perturbaciones de entrada. Con el fin de dar una solución a este problema, los principales objetivos que se plantean en esta tesis son los siguientes:

- desarrollar un procedimiento sistemático para la elección de la superficie y variable de deslizamiento, utilizando las propiedades de desempeño del controlador nominal y así mantener características que este aporta.
- obtener un control por modos deslizantes que esté constituido solamente por la ley de conmutación (el término discontinuo) y una ganancia K con la que se compensen las perturbaciones.

Para cumplir estos objetivos se diseñan funciones de tipo Lyapunov cuadráticas con ayuda de los espacios propios y el sistema lineal transformado, eligiendo una superficie de deslizamiento a la cual las trayectorias se dirigen de manera natural para posteriormente converger al punto de equilibrio del sistema. Adicionalmente, se estudian propiedades de robustez ante perturbaciones dependientes del estado a través de nuevas funciones de Lyapunov que serán construidas para el sistema de segundo orden con controlador por modos deslizantes de orden reducido. Así, además de las perturbaciones acotadas que el controlador puede compensar, la función verifica estabilidad asintótica del origen en presencia de perturbaciones no acotadas (éstos objetivos se describen detalladamente en el Capítulo 2).

Capítulo 2

Planteamiento del problema y objetivos

La dinámica no lineal es importante porque muchos sistemas en la naturaleza y en la vida cotidiana presentan comportamientos no lineales. También, los avances tecnológicos generan nuevos problemas de carácter no lineal. Estudiar y tratar de comprender como funcionan los sistemas no lineales, puede ayudar a predecir su comportamiento y tomar medidas para controlarlos y aprovecharlos. Sin embargo, las técnicas de análisis y control lineales son bien conocidas y están muy bien desarrolladas. Por esto, ha resultado conveniente utilizarlas para el análisis y el diseño de control de sistemas no lineales. Uno de los métodos de control no lineal para diseñar el controlador de manera más sencilla es la linealización del sistema. El transformar parcial o totalmente la dinámica no lineal del sistema a una lineal, permite la aplicación de las técnicas lineales para obtener el sistema en lazo cerrado deseado, garantizando la estabilidad local o global y haciendo posible establecer parámetros típicos como velocidad de respuesta, amortiguamiento, etcétera.

Considere el sistema no lineal y afín en la entrada de control de la forma

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x) + bU + \delta, \quad (2.1)$$

donde $x = [x_1, x_2]^\top \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, U es una entrada de control escalar y δ denota a una perturbación escalar.

Considere el caso nominal de (2.1), es decir, el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x) + bU, \quad (2.2)$$

donde la función f es exactamente conocida. Usando el método de linealización exacta por realimentación de los estados es posible linealizar (2.2) por medio del controlador

$$U = -b^{-1}(f(x) - v), \quad (2.3)$$

con el que se obtiene el lazo cerrado

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{A}} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B v, \quad (2.4)$$

donde $\bar{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, el par (\bar{A}, B) es controlable. Ahora, para estabilizar (2.4) se diseña el controlador lineal $v = kx$, tal que $A = \bar{A} + Bk$ sea Hurwitz. Así, el control (2.3) es no lineal y el origen del sistema en lazo cerrado $\dot{x} = \bar{A}x + Bv$ es asintóticamente estable. Sin embargo, es bien conocido que esta técnica de control tiene como desventaja la falta de robustez debido a que no considera la incertidumbre del modelo de f ni la perturbación representada por δ , resultando en un lazo cerrado sensible ante las perturbaciones e incertidumbres del modelo [18, 34]. De manera que, si se consideran las perturbaciones δ y la incertidumbre en f , el controlador (2.3) queda como

$$U = -b^{-1}(\bar{f}(x) - kx), \quad (2.5)$$

(donde \bar{f} es un modelo (no exacto) de f) y el lazo cerrado con (2.1) es

$$\dot{x} = Ax + B[(f - \bar{f})(x) + \delta]. \quad (2.6)$$

Desafortunadamente, en este caso ya no se puede garantizar un adecuado comportamiento del lazo cerrado (2.6). Para tratar de solucionar esto, es posible añadir un término adicional u en el control v para tratar de compensar las perturbaciones, a decir,

$$v = kx + u.$$

Con este controlador se obtiene el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = Ax + B[u + d]. \quad (2.7)$$

donde $d = d(t, x)$ agrupa a las perturbaciones externas δ y las incertidumbres del modelo $\delta_1(x) = (f - \bar{f})(x)$, es decir

$$d(t, x) = \delta(t) + \delta_1(x). \quad (2.8)$$

El sistema (2.7) es el que se estudiará a lo largo de esta tesis. En los capítulos 3 y 4, la perturbación d es considerada globalmente acotada para alguna constante conocida $D \geq 0$, esto es

$$|d(t, x)| \leq D, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (2.9)$$

El caso en el que la cota de d depende del estado se considera en el capítulo 5, en particular, se asume que, para constantes conocidas $D, D_1 \geq 0$,

$$|d(t, x)| \leq D + D_1|x|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (2.10)$$

Teniendo presente lo discutido, si consideramos $k = [-k_1 \ -k_2]$, podemos reescribir el sistema (2.7) como sigue

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 + u + d. \quad (2.11)$$

Como se ha mencionado, se asume que la parte lineal del control (kx) se ha diseñado para obtener cierto desempeño deseado en el caso nominal. Entonces, se requiere diseñar un control u que añada robustez al sistema, pero que no modifique (en cierta medida) el desempeño del control lineal previamente diseñado. De manera que, se busca que el control u sea una función signo con ganancia suficiente para compensar la perturbación d descrita y se desarrolle la metodología para el diseño correcto de la superficie de deslizamiento. Esto se puede expresar en los siguientes objetivos:

A. Para la ley de control

$$u = -K\text{sign}(s), \quad (2.12)$$

establecer una metodología de diseño para la variable de deslizamiento s , donde se mantengan ciertas características de diseño proporcionadas por el controlador lineal, tal que el origen aún sea exponencialmente estable, así como mantener el tipo de comportamiento del sistema (oscilatorio o no oscilatorio), la tasa de convergencia de las trayectorias y el tipo de respuesta de las variables de estado. Lo anterior, considerando la perturbación descrita en (2.9), en los siguientes casos:

- a) Para valores propios reales negativos de la matriz A donde la dinámica en modo deslizante sea de orden reducido.
 - b) Para valores propios reales de la matriz A donde la dinámica en modo deslizante sea de orden completo.
 - c) Diseño de un control por modos deslizante integral de orden completo para valores propios complejos de la matriz A .
- B. Estudiar propiedades adicionales de robustez por medio de nuevas funciones de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado en el caso donde se considera la perturbación descrita en (2.10).

Capítulo 3

Marco Teórico

Un modelo matemático es el punto de partida para analizar un sistema de control. La mayoría de estos representan de manera útil el comportamiento de diversos sistemas reales, brindando información importante referente al sistema a ser controlado. El objetivo de un sistema de control es regular el comportamiento dinámico de un sistema físico, satisfaciendo especificaciones de desempeño incluso en presencia de perturbaciones. Por esto, en la teoría de control automático, una de las características más importantes es la robustez, que es la capacidad de una ley de control de asegurar un nivel de invariabilidad en el desempeño de un sistema de control ante las imperfecciones del modelo. Las técnicas de control no lineal fueron desarrolladas para proporcionar robustez en un rango de operación mayor frente a perturbaciones o fallas. El control por modos deslizantes tiene la capacidad de ser una herramienta eficaz en el control de plantas dinámicas no lineales que operan bajo condiciones inciertas. Uno de los pasos importantes para el diseño de los controladores por modos deslizantes es conseguir una superficie deslizante adecuada que permita la estabilidad del origen del sistema. En este capítulo se describe brevemente el diseño de controladores por modos deslizantes.

3.1. Control por modos deslizantes

El control por modos deslizantes es un método de control discontinuo y robusto, cuyo diseño consiste en: 1) elegir una superficie deslizante, definida mediante ecuaciones que combinan los estados y ; 2) diseñar una ley de control que fuerza a las trayectorias a ir desde la condición inicial hasta la superficie de deslizamiento (donde se vuelven insensibles a cierto tipo de perturbaciones) en un tiempo finito, permanecer en ella para todo tiempo futuro y converger al origen. Debido a que las leyes de control por modos deslizantes incluyen términos discontinuos, estrictamente, la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales no se puede utilizar debido que la condición de Lipschitz que garantiza la existencia de una solución única no aplica. De modo que se requiere una teoría adecuada para sistemas con discontinuidades. Un resumen de los fundamentos teóricos de las ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo puede verse en el Apéndice A.

Para explicar el diseño del controlador por modos deslizantes, consideramos el sistema

(2.11), que repetimos aquí por conveniencia, esto es

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 + u + d, \quad (3.1)$$

asumiendo que la perturbación d es tal que (2.9) se satisface.

3.1.1. Controlador por modos deslizantes estándar

En esta sección se presenta el desarrollo del método de diseño de los modos deslizantes estándar. Para diseñar un control por modos deslizantes, consideramos el sistema (3.1). Como ya se mencionó, el diseño se divide en dos pasos, de los cuales, el primero consiste en elegir la superficie de deslizamiento. Existen múltiples propuestas para determinar la superficie de deslizamiento, sin embargo, en general puede ser un conjunto descrito por cualquier función del estado, tal que se asegure el error de regulación o seguimiento tienda a cero en régimen permanente.

Sea $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función lineal representada como (conocida como variable de deslizamiento)

$$s(x) = \bar{S}x, \quad (3.2)$$

donde $\bar{S} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es de rango completo. Así, la superficie de deslizamiento se define como el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}. \quad (3.3)$$

Por ejemplo, si seleccionamos la variable de deslizamiento dada por la función

$$s(x) = ax_1 + x_2, \quad (3.4)$$

con $a > 0$, se garantiza que sobre S (en régimen deslizante) $x(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, esto debido a que si $s(x) = 0$, entonces $x_2 = -ax_1$, y de la primera ecuación de (3.1) obtenemos que $\dot{x}_1 = -ax_1$.

Lo que hace falta es diseñar la ley de control que hará que las trayectorias sean llevadas a la superficie de deslizamiento y se mantengan ahí para todo tiempo futuro. Para esto, se propone la función candidata tipo Lyapunov $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2, \quad (3.5)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (3.1) es

$$\dot{V}(s) = s\dot{s}, \quad (3.6)$$

donde \dot{s} es la derivada de la variable de deslizamiento a lo largo de las trayectorias del sistema, esto es

$$\begin{aligned} \dot{s} &= a\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= ax_2 - k_1x_1 - k_2x_2 + u + d. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De aquí, definimos a la señal de control u como

$$u = -ax_2 + k_1x_1 + k_2x_2 - K\text{sign}(s(x(t))), \quad (3.8)$$

(la cual se propone para que $\dot{V}(s)$ sea definida negativa y así garantizar la convergencia a $s = 0$) donde K es una constante positiva. La razón para utilizar el término discontinuo es claro al sustituir esta u en (3.7), ya que utilizando las propiedades $s = \text{sign}(s)|s|$ y $(\text{sign}(s))^2 = 1$, de (3.6) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= -K|s(x)| + ds(x) \\ &\leq -K|s(x)| + D|s(x)|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde $|s(x(t))|$ denota la norma Euclidiana (que coincide con el valor absoluto en \mathbb{R}). Para lograr que las trayectorias convergen a la superficie de deslizamiento se requiere que,

$$-K|s(x)| + D|s(x)| < 0,$$

eliminando a $|s(x)|$, se obtiene la condición para K , es decir

$$K > D \quad (3.10)$$

y con ella se logra que la expresión del lado derecho de (3.9) sea negativa definida y por lo tanto se garantiza que $s(x(t)) \rightarrow 0$ conforme el tiempo avanza. Además, se puede verificar (vea más abajo) que este análisis con la función tipo Lyapunov (3.5) garantiza la convergencia de las trayectorias a la superficie de deslizamiento en tiempo finito.

Observación 1. *Debe observarse que este proceso de diseño provoca que la señal de control que se muestra en (3.8) (además del término discontinuo) tenga términos que dependen de los estados del sistema, provocando que en el lazo cerrado se eliminen los términos lineales $-k_1x_1 - k_2x_2$ (que se asume conforman un controlador lineal diseñado en el caso nominal), anulando así las características de desempeño para las que fueron diseñados.*

La condición que garantiza el movimiento deslizante ideal y que la superficie de deslizamiento sea atractiva es $s\dot{s} < 0$ y esta se satisface al reescribir la ecuación (3.9) con la condición (3.10). Ahora, dado que $s\dot{s} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2$, entonces:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \leq -K|s| + D|s|. \quad (3.11)$$

Para la estimación del tiempo de convergencia, suponga un tiempo finito t_s , en el que las trayectorias $x(t)$ alcanzan la superficie de deslizamiento ($s(x(t)) = 0$ para todo $t \geq t_s$). De (3.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 &\leq -(K - D)|s|, \\ \frac{s}{|s|}\frac{ds}{dt} &\leq -(K - D). \end{aligned}$$

Utilizando el Lema de Comparación (veáse en [18]), podemos integrar y obtener lo siguiente

$$|s(x(t))|_0^{t_s} \leq -(K - D)t|_0^{t_s},$$

al evaluar de 0 a t_s

$$|s(x(t_s))| - |s(x(0))| \leq -(K - D)t_s,$$

de donde se obtiene una cota para el tiempo finito t_s , que es el tiempo que toma a las trayectorias alcanzar $s(x(t_s)) = 0$,

$$t_s \leq \frac{|s(x(0))|}{K - D}. \quad (3.12)$$

Por otro lado (retomando el análisis de la dinámica en régimen deslizante), la ley de conmutación garantiza que $s(x(t)) = 0$ para todo $t \geq t_s$, lo que implica que $\dot{s}(x(t)) = 0$, para todo $t \geq t_s$, entonces de (3.7) se puede calcular lo que se conoce como *ley de control equivalente* (que puede interpretarse como el control que mantiene el movimiento de las trayectorias en la superficie de deslizamiento):

$$u_{eq} = -ax_2 + k_1x_1 + k_2x_2 - d, \quad t \geq t_s. \quad (3.13)$$

Recordando que ésta no es la señal que realmente se le aplica a la planta, si no una especie de señal de control "promedio", así, el control equivalente se define como la acción de control necesaria para mantener un movimiento deslizante ideal en S , vea [32] para más detalles.

Utilizando este método se puede calcular la dinámica en régimen deslizante, comprobando que las trayectorias convergen al origen del sistema. A decir, sustituyendo (3.13) en (3.1) nos da la dinámica en el modo deslizante $\dot{x}_2 = -ax_2$. Observe que esto se puede verificar también de la siguiente forma. Como se estableció, $s(x(t)) = 0$ para todo $t \geq t_s$, entonces:

$$s(x) = ax_1 + x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -ax_1, \quad (3.14)$$

y reemplazando en la primera ecuación del sistema original (3.1) obtenemos

$$\dot{x}_1 = -ax_1. \quad (3.15)$$

Como a es positiva tenemos que $x_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En particular, el origen de (3.15) es exponencialmente estable, dada la solución

$$x_1(t) = x_1(t_s)e^{-a(t-t_s)}, \quad \forall t \geq t_s. \quad (3.16)$$

Además, tenemos de (3.14) que $x_2(t)$ también tenderá a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Así se asegura que las trayectorias, una vez que alcanzan la superficie de deslizamiento, se dirigen al punto del equilibrio del sistema exponencialmente.

Ejemplo 1. Construyendo el sistema (2.11) en el entorno Simulink con los parámetros $K = 6$, $a = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, se realizan dos simulaciones (con Euler explícito como método de integración, y un paso de 0.01s):

- la primera para una perturbación constante $d = 5$, con la estimación del tiempo de convergencia $t_s \leq 15s$ (estimación calculada con (3.12));
- la segunda para una perturbación sinusoidal, con una frecuencia de 5rad/s y una amplitud de 3, se calcula la estimación del tiempo $t_s \leq 2.53s$.

Para el caso con la perturbación constante, en la Fig. 3.1 está la gráfica x_1 contra x_2 o plano fase, se parte de las condiciones iniciales establecidas (5, 5) y donde la curva converge al punto de equilibrio del sistema. En el tiempo calculado t_s , las trayectorias alcanzan a llegar a la superficie representada por la recta en color rojo (fase de alcance), para posteriormente deslizarse sobre ella y converger al punto de equilibrio (modo deslizante). En la Fig. 3.2 están representadas las señales de las variables de estado x_1, x_2 , donde se puede observar que en un tiempo de convergencia de aproximadamente 15s, se alcanza la superficie de deslizamiento y posteriormente las trayectorias comienzan a converger hacia el punto de equilibrio. En la Fig. 3.3 se muestra la señal de control y la superficie de deslizamiento, con ello podemos comprobar que cuando $t = t_s \approx 15s$, entonces $s(x(t)) = 0$ y cuando se alcanza esta condición, la señal de control comienza a conmutar. Por último en la Fig. 3.4 se observan la perturbación constante y la ganancia K , elegidas con la condición dada en (3.10).

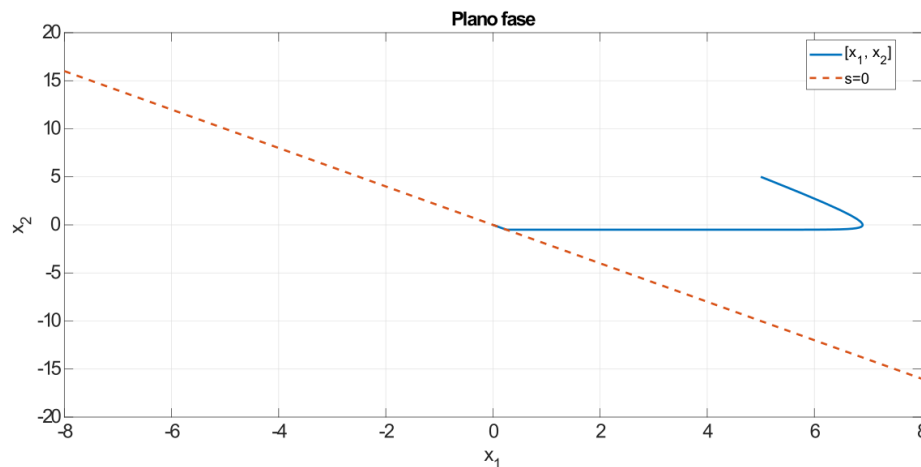


Figura 3.1: Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$.

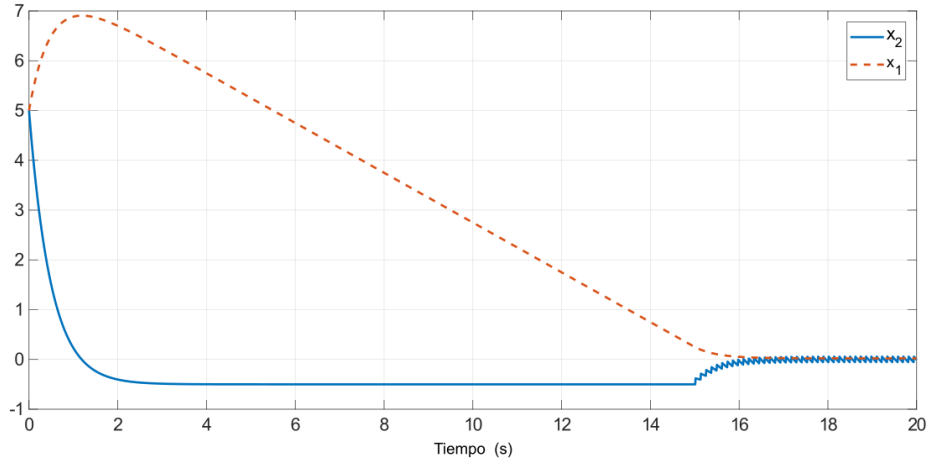


Figura 3.2: Comportamiento de señales en el sistema con SMC.

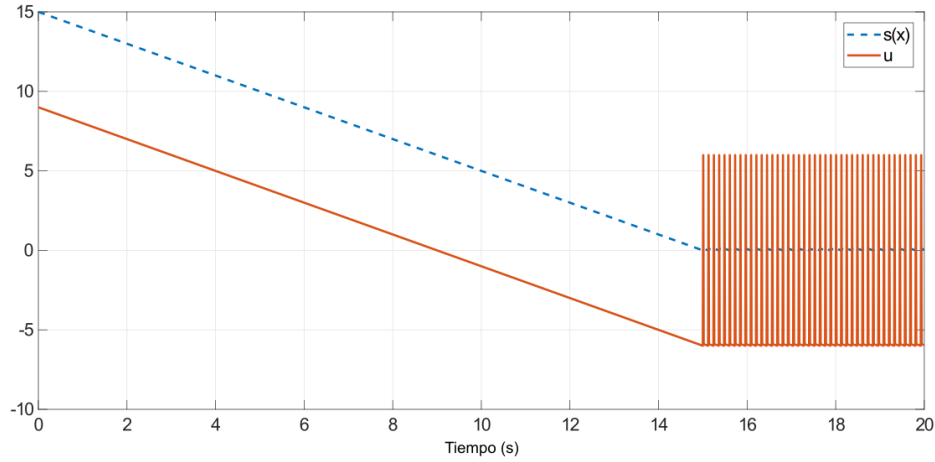


Figura 3.3: Superficie deslizante y señal de control

Para la segunda simulación, las señales muestran el siguiente comportamiento. De manera similar a la simulación anterior, en la Fig. 3.5 se muestra el plano fase, es notorio el efecto que causa la perturbación, presentándose oscilaciones en la trayectoria del sistema durante la fase de alcance, para posteriormente perder efecto alguno ya que el control compensa de manera exacta al llegar a la superficie de deslizamiento. En la Fig. 3.6 se observa que las señales x_1, x_2 convergen con mayor rapidez, teniendo oscilaciones por el efecto de la perturbación sinusoidal y cuando se cumple el tiempo de convergencia $t_s \leq 2.53s$, se alcanza la superficie y comienzan a converger hacia el punto de equilibrio. En la Fig. 3.7 se muestra la señal de control y la superficie de deslizamiento, cuando $t \geq 2.53s$, entonces $s(x(t)) = 0$ y cuando se alcanza esta condición la señal de control comienza a conmutar. Por último en la Fig. 3.8 se observan la perturbación sinusoidal y la ganancia K , elegidas nuevamente con la condición dada en (3.10).

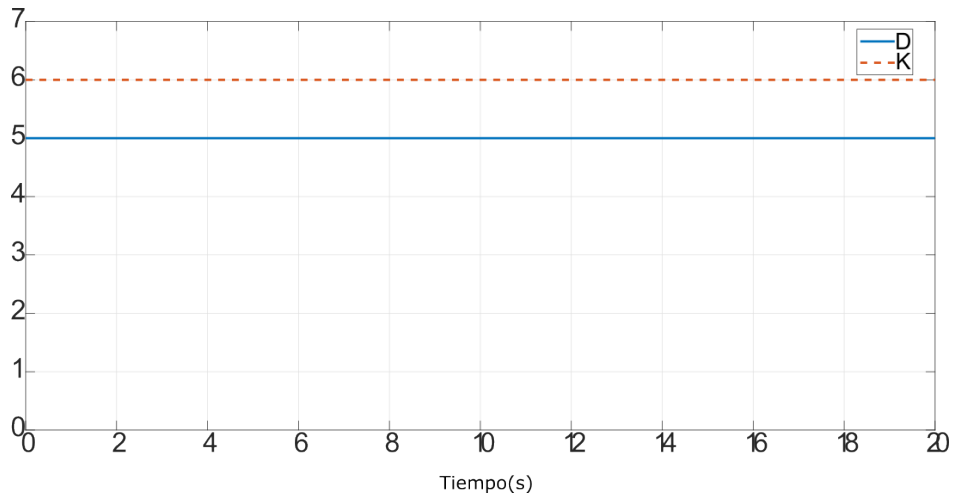


Figura 3.4: Ganancia K y perturbación constante D

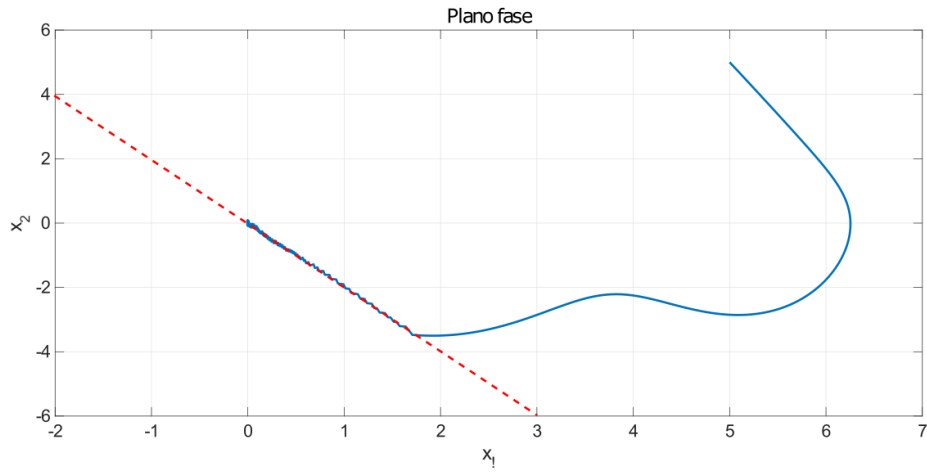


Figura 3.5: Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$.

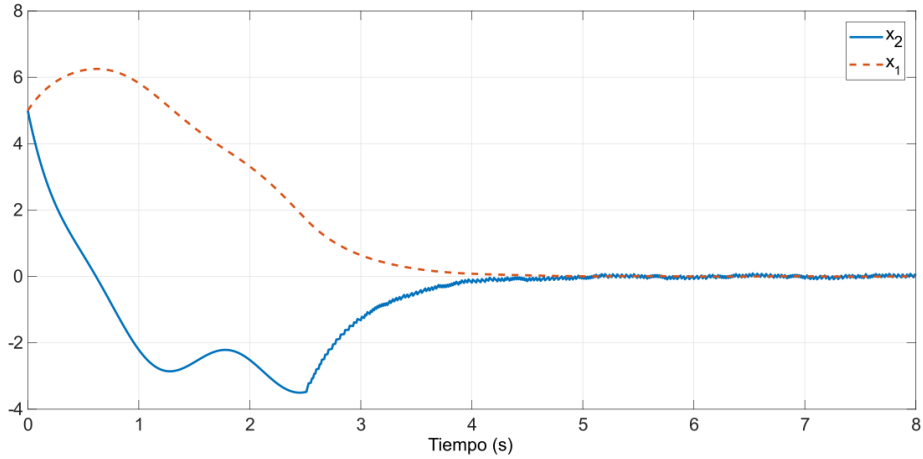


Figura 3.6: Comportamiento de señales en el sistema con SMC

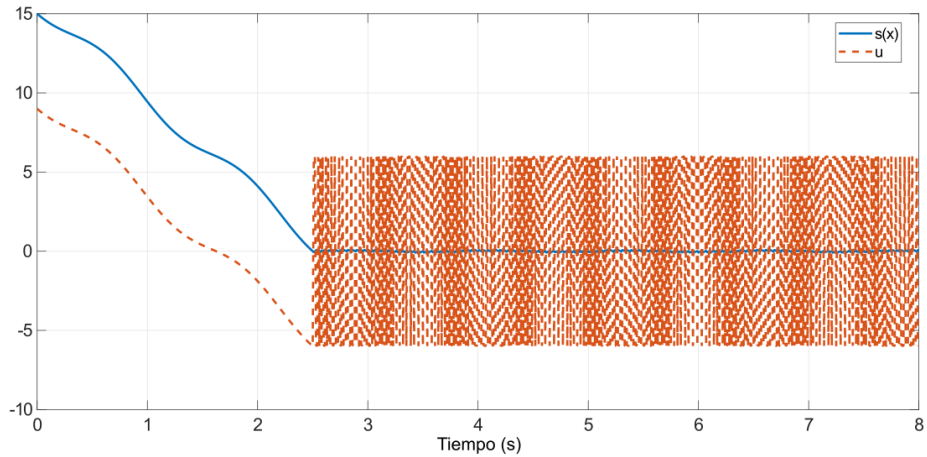


Figura 3.7: Superficie deslizante y señal de control

Hemos visto que el control por modos deslizantes estándar es robusto contra cierta clase de perturbaciones o incertidumbres del modelo, acotadas por alguna constante conocida D , sin embargo, también es interesante enfatizar lo siguiente. Como el controlador es una función de estado escalar y estática, en el modo deslizante el comportamiento del sistema es gobernado por una ecuación diferencial con un orden menor que el orden del sistema original. Si se quiere mantener el orden del sistema, se puede diseñar un controlador por modos deslizantes integral [2]. Como se verá en la siguiente sección, diferente del diseño mostrado en el caso anterior, el orden de la ecuación de movimiento es igual al orden del sistema original.

3.1.2. Control por modos deslizantes integral

En el control por modos deslizantes estándar, la insensibilidad ante la presencia de perturbaciones del sistema solo se garantiza cuando el modo deslizante entra en fun-

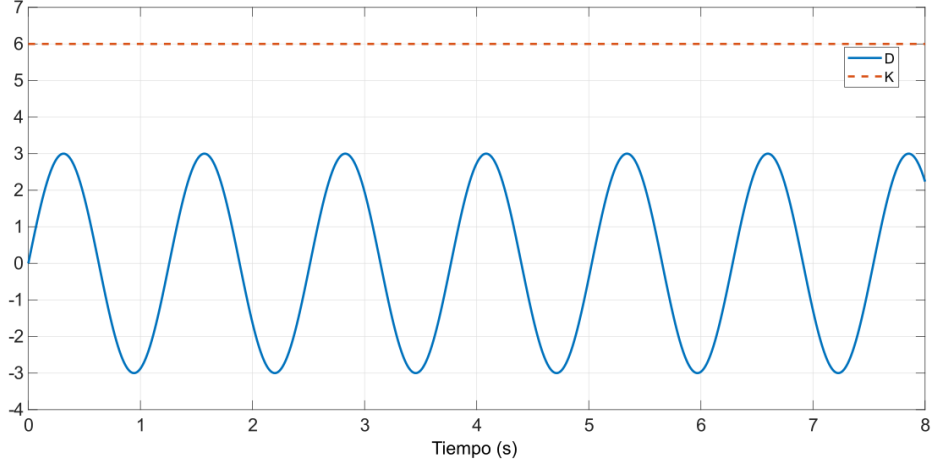


Figura 3.8: Ganancia K y perturbación constante D

cionamiento, es decir, cuando las trayectorias llegan a la superficie de deslizamiento (para todo tiempo mayor a t_s), mientras tanto, en la fase de alcance esta insensibilidad no puede ser garantizada. El modo deslizante integral busca suprimir la fase alcance forzando a las trayectorias del sistema a establecerse en la superficie deslizante desde el primer instante, logrando así la insensibilidad de principio a fin, puesto que las perturbaciones son compensadas desde $t = 0$. Ya que (salvo por la perturbación) el sistema considerado es invariante en el tiempo, se puede utilizar el método de diseño de control por modos deslizantes integral propuesto por Utkin (mostrado en [37]) para este tipo de sistemas.

Consideramos nuevamente (3.1) pero en su descripción dada por (2.7), esto es $\dot{x} = Ax + B(u + d)$, para el diseño del control por modos deslizantes integral, se diseña un controlador de la forma

$$u = u_0 + u_1, \quad (3.17)$$

donde u_0 puede ser diseñado como un control lineal estático realimentado $u_0 = -\Gamma x$ y u_1 se escoge como $u_1 = -K \text{sign}(s)$. Ahora, la variable de deslizamiento se define como

$$s = B^\top x + v$$

donde la nueva variable v está dada por

$$\dot{v} = -B^\top Ax - B^\top Bu_0, \quad v(0) = -B^\top x(0).$$

La derivada de s a lo largo de las trayectorias del sistema será

$$\dot{s} = (B^\top B)(u_1 + d). \quad (3.18)$$

Utilizando la Función candidata de tipo Lyapunov cuadrática y su derivada definidas

en (3.5) y (3.6), respectivamente, tenemos que para este caso

$$\begin{aligned}\dot{V}(s) &= s[-K\text{sign}(s) + d] \\ &= -K|s| + ds \\ &\leq -K|s| + D|s|.\end{aligned}\tag{3.19}$$

donde $K > D$, es la misma condición encontrada en (3.10) para garantizar que las trayectorias alcanzan la superficie de deslizamiento dada por $s(x(t)) = 0$ en un tiempo finito.

Nuevamente, con la función tipo Lyapunov se verifica la convergencia de las trayectorias a la superficie de deslizamiento en un tiempo finito. Para obtener la dinámica en régimen deslizante se utiliza nuevamente el método del control equivalente. Así, de $\dot{s} = 0$ obtenemos

$$u_{eq} = \frac{1}{B^\top B} (B^\top B u_0 - B^\top B d),$$

que sustituido por u en la segunda ecuación del sistema produce

$$\dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - \Gamma x.$$

De aquí es claro ver que la dinámica en régimen deslizante no es de orden reducido puesto que las ecuaciones del sistema no quedan desacopladas. También se puede apreciar que la ganancia Γ no puede ser arbitraria y debe diseñarse adecuadamente para garantizar la estabilidad en el lazo cerrado.

Por otra parte, para verificar que el régimen deslizante se obtiene desde el momento inicial bastaría ver que en $t = 0$ tenemos que $s = B^\top x(0) + v(0)$ que es igual a cero por diseño de la condición inicial de v . Sin embargo, en la práctica no resulta así. Aunque el control por modos deslizantes integral ayuda a reducir la fase de alcance, en general no es posible anularla por completo, esto se explica a continuación. Sabemos que para obtener el régimen deslizante es necesario que $s = 0$ pero esto no es suficiente, también se requiere que $\dot{s} = 0$ desde el tiempo inicial. Esto implica que (ver (3.18)) $u_1(0) = -d(0)$. El problema es que no se conoce la perturbación, por lo que no se inicia en $\dot{s} = 0$, lo que resulta en que, de manera práctica, el modo deslizante integral tiene fase de alcance siempre que no se conozca la condición inicial de la perturbación.

Ejemplo 2. *Se construye el sistema (2.11) en el entorno Simulink con los parámetros $K = 6$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $-\Gamma x = x_1 + 2x_2$ se realizan dos simulaciones (con Euler explícito como método de integración, y un paso de 0.01s):*

- *la primera para una perturbación constante $d = 5$, con la estimación del tiempo de convergencia $t_s \leq 3s$ (estimación calculada con (3.12));*
- *la segunda para una perturbación sinusoidal, con una frecuencia de 5rad/s y una amplitud de 3, se calcula la estimación del tiempo $t_s \leq 0.35s$.*

Para el ejemplo con la perturbación constante, se muestra en la Fig. 3.9 el plano fase, partiendo de las condiciones iniciales establecidas $(2, 2)$, se observa como la curva converge al punto de equilibrio del sistema. En el tiempo calculado t_s , las trayectorias alcanzan a llegar a la superficie de deslizamiento, para posteriormente deslizarse sobre ella y converger al punto de equilibrio del sistema. En la Fig. 3.10 están representadas las señales de las variables de estado de nuestro sistema x_1, x_2 , donde en un tiempo de convergencia de aproximadamente $3s$, estas alcanzan la superficie de deslizamiento y posteriormente las trayectorias comienzan a converger hacia el punto de equilibrio mientras el tiempo tiende a infinito. En la Fig. 3.11 se muestra la señal de control y la superficie de deslizamiento, comprobando nuevamente que cuando $t = t_s \approx 3 s$, entonces $s(x(t)) = 0$, momento en que la señal de control comienza a conmutar. Por último en la Fig. 3.12 se observan la perturbación constante y la ganancia K , elegidas con la condición dada en (3.10).

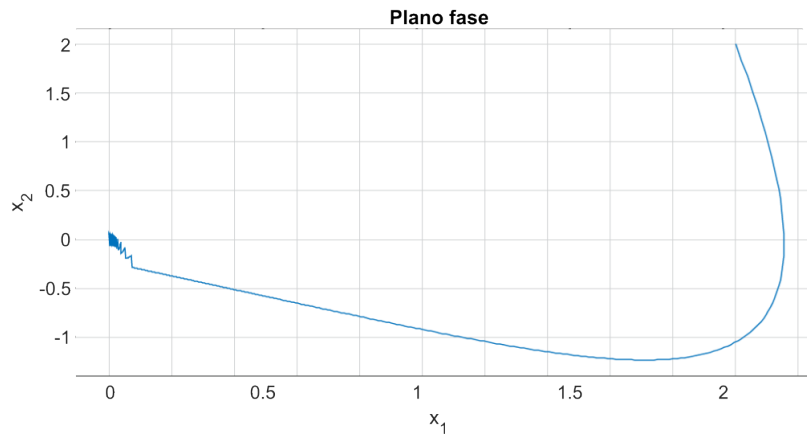


Figura 3.9: Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$.

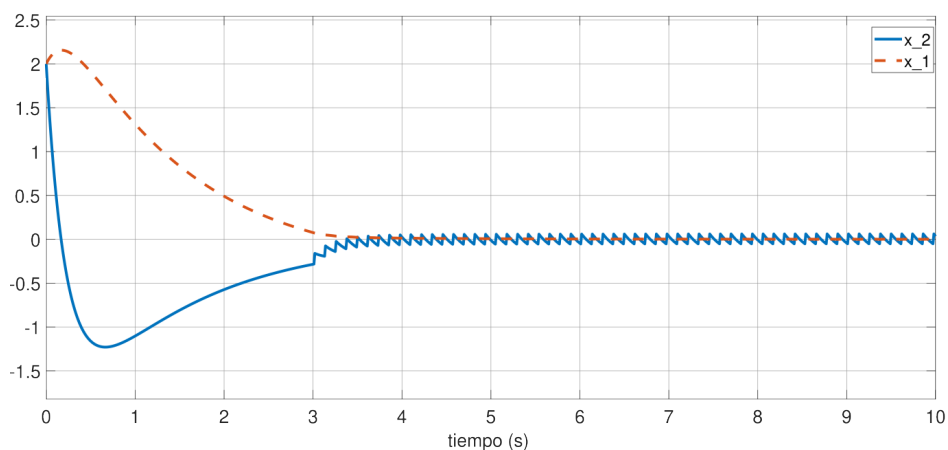


Figura 3.10: Comportamiento de señales en el sistema con SMC.

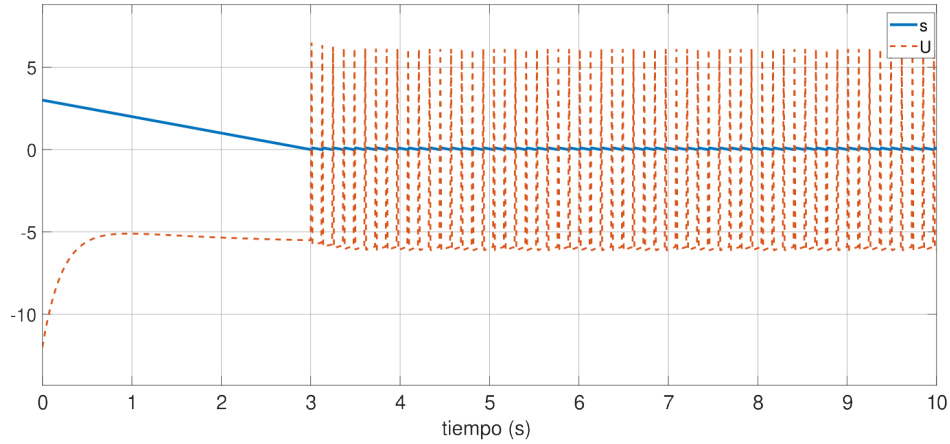


Figura 3.11: Superficie deslizante y señal de control

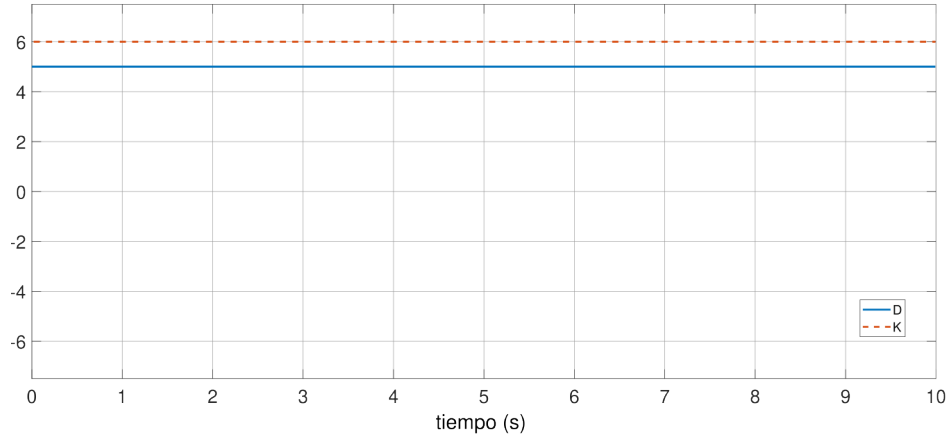


Figura 3.12: Ganancia K y perturbación constante D

Esta vez utilizando una perturbación sinusoidal para la simulación, las señales muestran el siguiente comportamiento. De manera similar, en la Fig. 3.13 se observa el plano fase, se puede observar que las oscilaciones que causaba la perturbación para el mismo caso en el ejemplo anterior en la fase de alcance, no se presentan, puesto que el controlador integral entra en funcionamiento en un tiempo finito pequeño compensando de manera exacta todos los efectos que la perturbación causa, al llegar a la superficie de deslizamiento. En la Fig. 3.14 se observa que las señales x_1, x_2 convergen con mayor rapidez a la superficie de deslizamiento en un tiempo de convergencia $t_s \leq 0.35s$ y posteriormente comienzan a dirigirse hacia el punto de equilibrio para $t \leq t_s$. En la Fig. 3.15 se encuentran la señal de control y la superficie de deslizamiento, a $t \geq 0.35s$, $s(x(t)) = 0$, condición para que la señal de control comience a conmutar. Por último en la Fig. 3.16 se observan la perturbación sinusoidal y la ganancia K , elegidas nuevamente con la condición dada en (3.10).

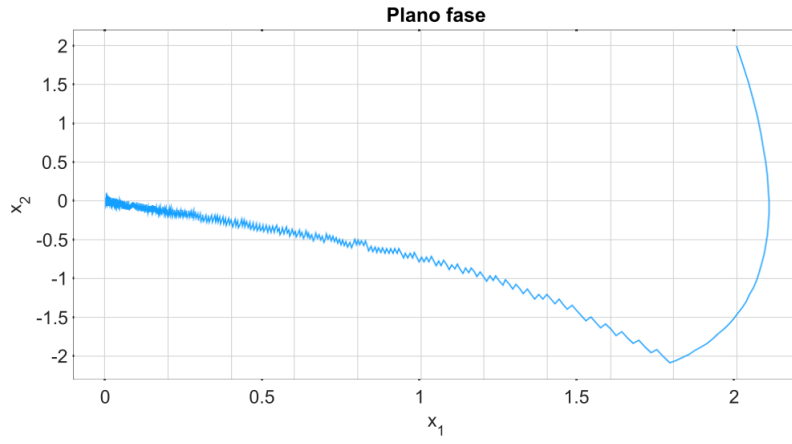


Figura 3.13: Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizando $s = 0$.

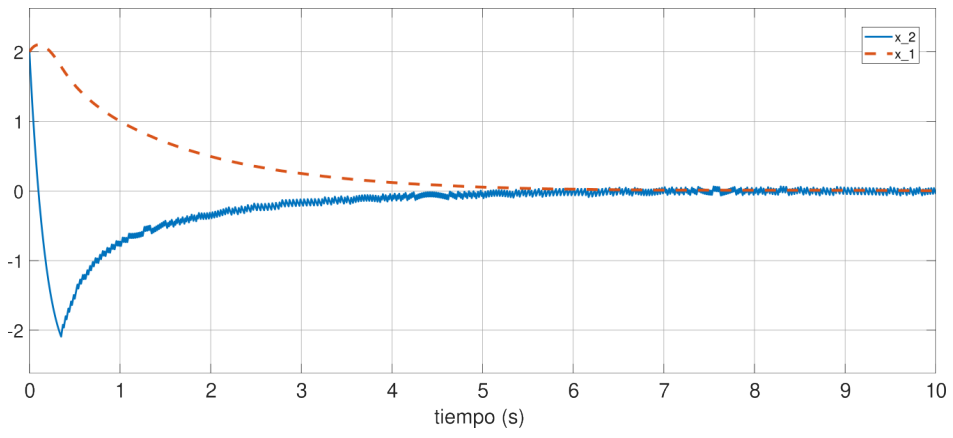


Figura 3.14: Comportamiento de señales en el sistema con SMC

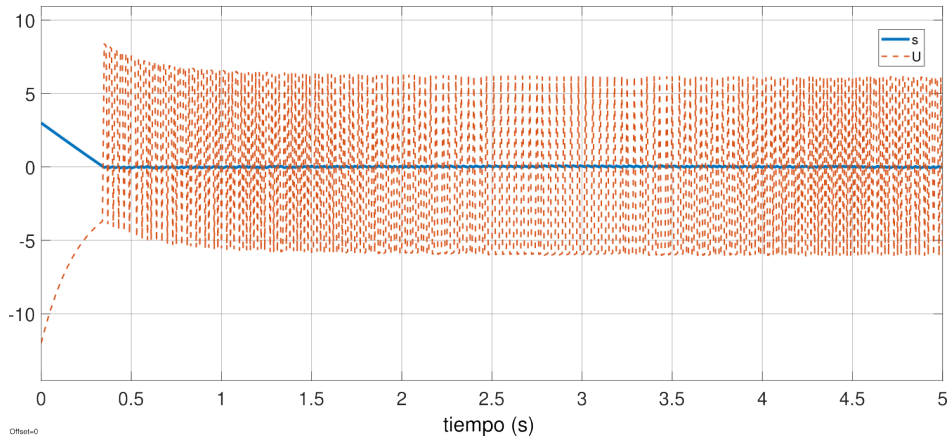


Figura 3.15: Superficie deslizante y señal de control

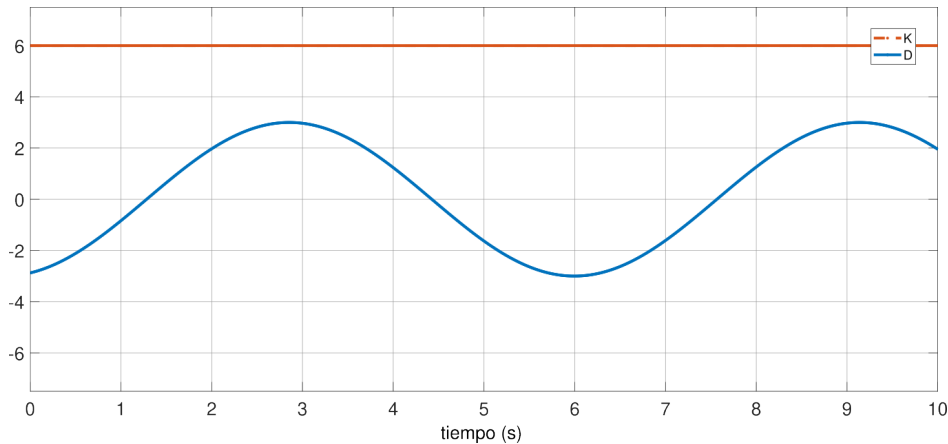


Figura 3.16: Ganancia K y perturbación constante D

Observación 2. *Nuevamente, el control por modos deslizantes integral garantiza la convergencia de las trayectorias a la superficie de deslizamiento en un tiempo finito, para que posteriormente se deslicen sobre ella y se dirijan al origen. Sin embargo, el procedimiento de diseño entrega una ley de control que involucra una retroalimentación de estados que modifica nuevamente los términos del controlador lineal y las características que este proporciona.*

3.1.3. Modos deslizantes en esta tesis

La idea es entonces, especificar una acción de control de realimentación, de naturaleza de estructura variable, la cual garantice el alcance de la superficie prescrita y mantenga los movimientos del sistema en esta superficie, deslizándose sobre ella y permaneciendo insensible a variaciones en los parámetros de la planta y a las perturbaciones externas. Los sistemas de control de estructura variable están diseñados para llevar y restringir a los estados del sistema a mantenerse dentro de una vecindad de la superficie de conmutación [35]. Se estima que el estudio de estos sistemas se inició en los años 60,

pero no se obtuvo la atención deseada debido a la falta de procedimientos de diseño, la existencia de chattering en la señal de control, etc.

El control por modos deslizantes, se puede dividir en dos partes, la elección de la superficie de deslizamiento, y el diseño de la ley de control [10], [33], [3], [40]. Sin embargo no hay restricciones para la elección de la variable de deslizamiento, ni para el diseño de la señal de control, solo se requiere que la dinámica del modo deslizante sea estable, por lo que los métodos existentes para diseñar este tipo de controlador generalmente modifican el controlador lineal previamente diseñado sin considerar las propiedades de desempeño que este proporciona al sistema, como puede verse en los diseños anteriores. Usando este procedimiento para obtener robustez en el sistema, no se garantiza que se mantenga las características de desempeño proporcionadas por el control nominal.

El procedimiento que se describirá a lo largo de este trabajo robustifica sistemas lineales ante perturbaciones acotadas, para añadir robustez sin modificar la dinámica del sistema realimentado. La señal de control está presente con una ley de conmutación sin ningún término adicional y donde la ganancia solo es lo suficientemente grande para compensar la perturbación.

Además, también se presenta la construcción de nuevas funciones de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado, útiles para estudiar propiedades adicionales de robustez ante perturbaciones no acotadas o incertidumbre paramétrica.

En la siguiente sección se recuerdan algunos conceptos importantes que fundamentan los controladores por modos deslizantes.

3.2. Inclusiones Diferenciales

Para ciertas aplicaciones de control, se tiene que recurrir a ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo ya sea con respecto a t [20] como también con respecto a las variables de estado x [13, 25]. De hecho, incluso si el sistema a controlar está modelado por campos vectoriales suaves, las discontinuidades pueden ser inevitables cuando se requieren soluciones de ciertos problemas de control, como en la aplicación de retroalimentación de alta ganancia en un entorno no lineal. [6]. Por ejemplo, con el controlador por modos deslizantes, el sistema (3.1) es discontinuo con respecto a x , por lo que las nociones clásicas de soluciones no aplican a este tipo de sistemas. En esta sección describiremos muy brevemente algunas conceptos relacionados a la teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo aplicados a los sistemas de control por modos deslizantes. Algunos conceptos más generales y detalles adicionales se incluyen en el Apéndice A.

La robustez de los sistemas de control por modos deslizantes está relacionada con la invariabilidad del comportamiento cualitativo del sistema en lazo cerrado frente a perturbaciones acotadas, debida la acción discontinua del control. Éstas características,

tanto de la perturbación como del controlador, obligan a que el análisis del sistema de control se lleve a cabo a través de una inclusión diferencial asociada.

Los sistemas de control por modos deslizantes usualmente tienen la forma

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x), d), \quad (3.20)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $u(t, x) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, y $d(t) \in \mathbb{R}^k$ es el vector de perturbaciones. Se asume que la función $f : \mathbb{R}^{1+n+m+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, la función de control $u : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua por partes (y solo es discontinua en la superficie de deslizamiento, i.e., satisface la Suposición 1, vea el Apéndice A), y la función de perturbación $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_k(t))^\top$ satisface que

$$d_i^{min} \leq d_i(t) \leq d_i^{max},$$

para ciertas constantes $d_i^{min}, d_i^{max} \in \mathbb{R}$. Bajo estas consideraciones se asocia a (3.20) la inclusión diferencial de Filippov extendida (descrita en la Definición 9 en el Apéndice A)

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

3.2.1. Existencia de Soluciones

En el siguiente teorema se dan las condiciones que garantizan la existencia local de las soluciones generalizadas de (3.20), es decir, soluciones que satisfacen la inclusión diferencial asociada (3.21). Se usará la siguiente notación $\rho(x, M) = \inf_{y \in M} |x - y|$, $x \in \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.1 (Filippov [13, 25]). *Sea $F : G \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ una función conjunto valuada, definida y semicontinua por arriba en cada punto del conjunto*

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}, \quad (3.22)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}_+$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Sea $F(t, x)$ no vacío, compacto y convexo para $(t, x) \in G$. Si existe $\kappa > 0$ tal que $\rho(0, F(t, x)) < \kappa$ para $(t, x) \in G$ entonces existe al menos una función absolutamente continua $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en al menos un segmento $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $\alpha = \min\{a, b/\kappa\}$, tal que $x(t_0) = x_0$ y la inclusión $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ se satisface casi en todas partes sobre $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Es importante mencionar que la inclusión diferencial definida en (3.21) (así como las dadas en las definiciones 6 y 8 en el Apéndice A) satisfacen todas las condiciones del Teorema 3.2.1.

3.2.2. Estabilidad

Considere la inclusión diferencial (3.21) para $t > t_0$ con una condición inicial

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.23)$$

para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado. Denotamos como $\Phi(t_0, x_0)$ al conjunto de todas las soluciones del problema de valor inicial (problema de Cauchy) (3.21) con (3.23). Así, $x(t, t_0, x_0) \in \Phi(t_0, x_0)$ denota una solución de (3.21) para (3.23). Asumimos que $0 \in F(t, 0)$ para $t \in \mathbb{R}$, entonces la función $x(t, t_0, 0) = 0$ pertenece al conjunto de soluciones $\Phi(t_0, 0)$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Los conceptos de estabilidad para los sistemas de control lineales y no lineales son muy importantes, y uno de los más relevantes es en el sentido de Lyapunov. Este ha sido extendido para sistemas discontinuos y sus inclusiones diferenciales asociadas. Se usará la notación

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}.$$

Definición 1 (Estabilidad de Lyapunov, [25]). *El origen del sistema (3.21) es Lyapunov estable si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$ y $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) \in \mathbb{R}_+$, tal que $\forall x_0 \in B(\delta)$*

- A. *cualquier solución $x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy (3.21), (3.23) existe para toda $t > t_0$;*
- B. *$x(t, t_0, x_0) \in B(\epsilon)$ para toda $t > t_0$.*

Si la función δ no depende de t_0 , entonces el origen es llamado uniformemente Lyapunov estable. Por ejemplo, si F no depende de t y el origen de (3.21) es Lyapunov estable, entonces es uniformemente Lyapunov estable. Si no se satisface alguna condición de la Definición 1, entonces el origen del sistema es inestable.

Definición 2 (Atractividad asintótica, [25]). *El origen del sistema (3.21) se dice asintóticamente atractivo si para toda $t_0 \in \mathbb{R}$ existe un conjunto $\mathcal{U}(t_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ con $0 \in \text{int}\mathcal{U}(t_0)$ tal que para toda $x_0 \in \mathcal{U}(t_0)$*

- *cualquier solución $x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy existe para $t > t_0$;*
- *$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0$.*

Definición 3 (Estabilidad asintótica, [25]). *El origen del sistema (3.21) es asintóticamente estable si es Lyapunov estable y asintóticamente atractivo.*

Si $\mathcal{U}(t_0) = \mathbb{R}^n$ entonces el origen del sistema es llamado globalmente asintóticamente estable. Al igual que para estabilidad, existe la variante uniforme para estabilidad asintótica. Así, sabemos que si F no depende de t y el origen de (3.21) es asintóticamente estable, entonces es uniformemente asintóticamente estable (vea, por ejemplo, [25]).

3.2.3. Método de la función de Lyapunov

El método de Lyapunov es una herramienta efectiva para el diseño y análisis de sistemas de control lineales y no lineales. En esta sección se recuerda la extensión del teorema de Lyapunov para sistemas discontinuos, las definiciones y resultados han sido tomados de [25].

Definición 4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío tal que $0 \in \text{int}(\Omega)$. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es propia en Ω si

- A. está definida en Ω y es continua en el origen;
- B. existe un función continua definida positiva $\underline{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\underline{V}(x) \leq V(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Definición 5. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice globalmente propia si es propia en \mathbb{R}^n y la función definida positiva $\underline{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es radialmente desacetada.

Teorema 3.2.2. Considere (3.21). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ como en la Definición 4. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función propia en Ω . Si

$$y \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega \setminus \{0\}, \forall y \in D_{F(t,x)}V(x). \quad (3.24)$$

entonces el origen del sistema es Lyapunov estable.

Observación 3. En el teorema, $D_{F(t,x)}V(x)$ es la derivada generalizada de V a lo largo de (3.21), ésta es definida en el Apéndice A. Ésta derivada es generalmente difícil de calcular, sin embargo, con mejores propiedades de suavidad de V se pueden utilizar definiciones de derivadas menos complejas para el análisis [25]. De hecho, en los dominios donde f es continua y V diferenciable se puede utilizar la derivada estándar [13, Sec. 15].

Así como en el caso clásico, una función de Lyapunov es útil para verificar estabilidad asintótica y estimar un conjunto de atracción. Para el siguiente teorema denotamos $\Pi(V, r) = \{x \in \Omega : V(x) < r\}$.

Teorema 3.2.3. Considere (3.21). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ como en la Definición 4. Sean $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función propia en Ω y $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida positiva tales que

$$y \leq -W(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega \setminus \{0\}, \forall y \in D_{F(t,x)}V(x).$$

Entonces el origen del sistema (3.21) es asintóticamente estable con un dominio de atracción \mathcal{U} tal que

$$\Pi(V, \lambda(h)) \cap B(h) \subset \mathcal{U} \quad (3.25)$$

donde $\lambda(h) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n: |x|=h} \underline{V}(x)$ y $h \leq \sup_{r \in \mathbb{R}^+, B(r) \subseteq \Omega} r$. Si V es globalmente propia y $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces el origen del sistema (3.21) es globalmente asintóticamente estable ($\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$).

Los teoremas de Lyapunov establecen estabilidad o estabilidad asintótica del origen, requiriendo la existencia de una función que satisfaga ciertas condiciones, sin embargo generalmente no es sencillo encontrar tal función. Los teoremas conversos confirman que si el origen es asintóticamente estable, entonces existe una función que satisface las condiciones de dichos teoremas y además posee buenas propiedades de suavidad. Aunque el análisis de estabilidad de Lyapunov es muy útil y poderoso para abordar los problemas de estabilidad de los sistemas no lineales, no es sencillo determinar la estabilidad de muchos de ellos, primero porque no se conocen las funciones de Lyapunov e incluso conociendo alguna el análisis de esta puede ser muy complicado.

Capítulo 4

Robustificación ante perturbaciones acotadas

En este capítulo, se resuelven los objetivos planteados en el párrafo A del Capítulo 2, para el sistema (2.11), esto es: escoger una superficie de deslizamiento natural para el sistema; también se diseña el controlador por modos deslizantes el cual cumple con el objetivo de eliminar el efecto de perturbaciones acotadas (como las descritas en (2.9)) presentes en el sistema, llevando las trayectorias a la superficie de deslizamiento y manteniendo características como la estabilidad exponencial del origen, el comportamiento de las trayectorias, la tasa de convergencia y el tipo de respuesta de las variables de estado que proporciona el control lineal diseñado en la Sección 4.1.

4.1. Sistema lineal

El comportamiento dinámico de los sistemas lineales, sin importar del orden que sean, esta gobernando por los valores propios de su matriz de estado. En el caso particular de un sistema de segundo orden con matriz Hurwitz tenemos dos casos, la matriz del sistema posee valores propios reales negativos o valores propios complejos con parte real negativa. Con base en el comportamiento de las trayectorias que generan estos dos casos, se seleccionará más adelante la variable de deslizamiento s y la ley de control por modos deslizantes.

Consideramos el sistema (2.11) sin entradas, es decir, el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2, \quad k_1, k_2 > 0, \quad (4.1)$$

cuya matriz de estados es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

El polinomio característico de la matriz A está dado por

$$f(\lambda) = \lambda^2 + k_2\lambda + k_1, \quad (4.3)$$

cuyas raíces (que son los valores propios de A) están dadas por

$$\lambda_1 = -\frac{k_2}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{k_2}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = k_2^2 - 4k_1. \quad (4.4)$$

Claramente, se tienen las siguientes condiciones que determinan si los valores propios son puramente reales o tienen parte imaginaria:

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad k_2 \geq 2\sqrt{k_1}, \quad (4.5)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad k_2 < 2\sqrt{k_1}. \quad (4.6)$$

También sabemos que las condiciones en (4.5)-(4.6) determinan el tipo de comportamiento de las trayectorias del sistema, esto es, si son oscilatorias o no. Este conocimiento es el que explotaremos para lograr el objetivo de simplificar la selección de la superficie de deslizamiento (en el diseño del controlador por modos deslizantes). Esto ayudará, para cualquiera de los casos de los valores propios mencionados, a mantener las características del controlador lineal descritas al inicio del capítulo, pero añadiendo la robustez deseada.

4.2. Modos deslizantes de orden reducido

Para el diseño del controlador por modos deslizantes iniciaremos considerando el caso en el que ambos valores propios de A son reales negativos, es decir, en el que el punto de equilibrio de (4.1) tiene un comportamiento de nodo estable, así,

$$\lambda_2 \leq \lambda_1, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{1,2} < 0.$$

Las condiciones sobre las ganancias k_1 y k_2 para este caso están dadas por (4.5), con lo cual se garantiza que las trayectorias de (4.1) tienen un comportamiento no oscilatorio (el caso en que $\lambda_1 = \lambda_2$ está descrito en la Sección 4.2.1). Para el diseño de la superficie de deslizamiento utilizaremos los espacios propios del sistema. Una manera de obtenerlos es a través de la diagonalización del sistema nominal. Como se sabe, la diagonalización del sistema implica el estudio de una transformación que mapea el espacio vectorial sobre sí mismo, lo que se obtiene a partir de la ecuación:

$$J = Q^{-1}AQ,$$

donde J es una forma de Jordan y la matriz $Q = (\beta_1 \ \beta_2)$ está formada por alguna base de vectores propios de A (siendo los valores propios reales y distintos, siempre se garantiza la existencia de la matriz Q) [14], [23].

Sea $E_i = N(A - \lambda_i I)$, con $i = 1, 2$, el espacio propio de cada vector propio y donde $N(\cdot)$ denota al espacio nulo, entonces, calculando el espacio nulo de $A - \lambda_i I$ obtenemos que todos los vectores propios del sistema están dados por

$$X_i = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ k_1 \\ 1 \end{pmatrix} \chi_i, \quad X_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ k_1 \\ 1 \end{pmatrix} \chi_i, \quad \chi_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad X_1 \in E_i, \quad i = 1, 2.$$

Así, una base de vectores propios esta dada con $\chi_1 = \chi_2 = 1$ y por lo tanto la matriz de transformación del sistema esta compuesta por

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{k_1} & \frac{\lambda_1}{k_1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} & \frac{\lambda_1}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} & \frac{-\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} \end{pmatrix}.$$

Con lo que obtenemos la matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Por último, las soluciones del sistema (4.1), que están dadas por $x(t) = Qe^{Jr}Q^{-1}x_0$ para un estado inicial $x_0 = (c_1, c_2)^\top$, son

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t})c_1 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})c_2,$$

$$x_2(t) = \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}(-e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t})c_1 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})c_2.$$

Se sabe que el cambio de coordenadas que transforma el sistema a una forma desacoplada esta dado por

$$z = Q^{-1}x.$$

Así, dado un sistema $\dot{x} = Ax + Bu + Dd$, el sistema transformado es

$$\dot{z} = Jz + B_n u + C_n,$$

donde $B_n = Q^{-1}B$ y $C_n = Q^{-1}Dd$. En el caso particular de dimensión dos con la matriz de Jordan diagonal, el sistema se puede reescribir en dos ecuaciones diferenciales

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + B_{n_1} u + C_{n_1}, \quad y \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + B_{n_2} u + C_{n_2}.$$

Dado nuestro sistema original (2.11), tenemos que

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Dd = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d.$$

Así, nuestro sistema transformado queda expresado como

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + B_{n_1}(u + d), \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + B_{n_2}(u + d), \quad (4.7)$$

donde $B_{n_1} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\Delta}}$, $B_{n_2} = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}$ y

$$z_1 = -\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\Delta}}x_2, \quad z_2 = \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2. \quad (4.8)$$

Para algún estado inicial (z_{10}, z_{20}) , las soluciones están dadas por:

$$z_1(t) = z_{10}e^{\lambda_1 t} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} B_{n_1} u(\tau) d\tau + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} C_{n_1} d(\tau) d\tau,$$

$$z_2(t) = z_{20}e^{\lambda_2 t} + \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} B_{n_2} u(\tau) d\tau + \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)} C_{n_2} d(\tau) d\tau. \quad (4.9)$$

De estas ecuaciones, considerando entradas nulas, podemos eliminar el parámetro del tiempo t y obtener la ecuación

$$z_2 = \left(z_{20}/z_{10}^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right) z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

que es la ecuación con la que se genera la familia de curvas del retrato fase del sistema y donde (z_{10}, z_{20}) toman valores arbitrarios en \mathbb{R}^2 . En las figuras 4.1-4.3 se muestran retratos fase para el sistema (4.1) con las rectas de los espacios propios para los valores mostrados en la Tabla 4.1.

Simulación	k_1	k_2	λ_1	λ_2
1	2	3	-1	-2
2	4	8	-0.53	-7.46
3	40	20	-2.25	-17.74

Tabla 4.1: Valores de las ganancias y valores propios del sistema (4.1).

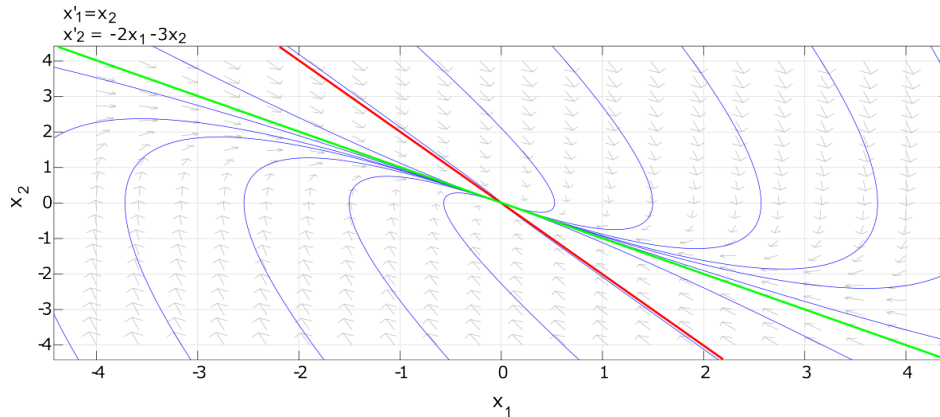


Figura 4.1: Simulación 1. Trayectorias del sistema nominal (4.1) con $k_1 = 2$ y $k_2 = 3$.

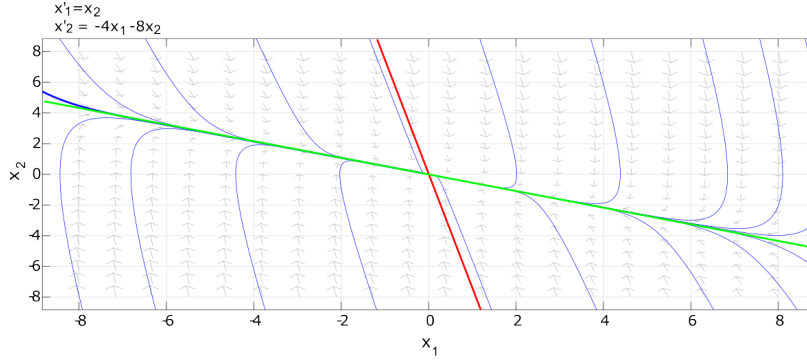


Figura 4.2: Simulación 2. Trayectorias del sistema nominal (4.1) con $k_1 = 4$ y $k_2 = 8$.

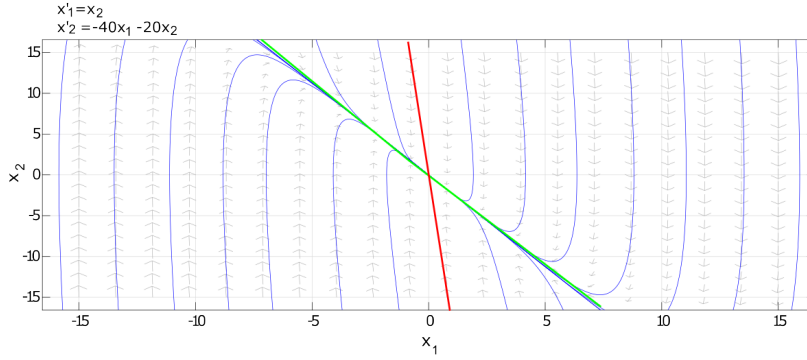


Figura 4.3: Simulación 3. Trayectorias del sistema nominal (4.1) con $k_1 = 40$ y $k_2 = 20$.

En las figuras 4.1-4.3, las líneas en color rojo representan las rectas del espacio propio asociado al valor propio λ_2 y las líneas de color verde lo hacen para λ_1 . En la Figura 4.1 se puede observar que los términos exponenciales $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Dado que (en el caso $\Delta > 0$) $e^{\lambda_2 t} < e^{\lambda_1 t}$, entonces $e^{\lambda_2 t}$ tiende a cero más rápido que el término de lado derecho de esta última desigualdad. Las flechas indican la dirección de las trayectorias, lo que refiere a que el origen sea un nodo estable. La interpretación de los retratos fases en las figuras 4.2 y 4.3 es similar.

Para el sistema diagonalizado (4.7) con entradas nulas, se realizan los retratos fase de las tres simulaciones con los parámetros anteriores, obteniendo los siguientes resultados.

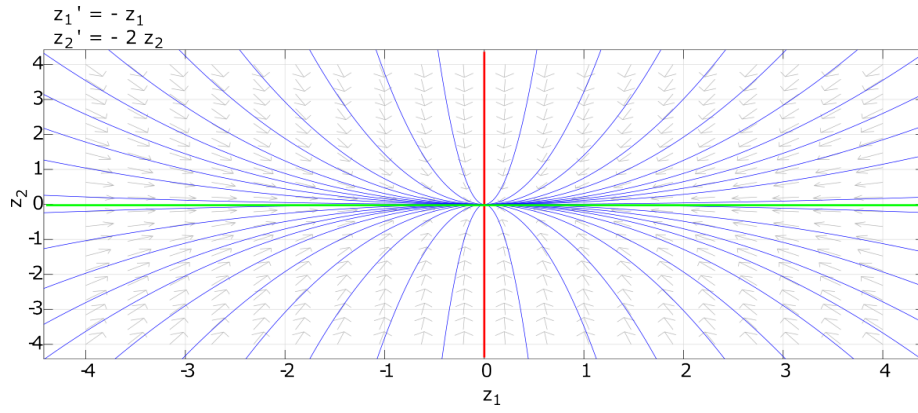


Figura 4.4: Simulación 1. Trayectorias del sistema diagonal (4.7) sin entradas.

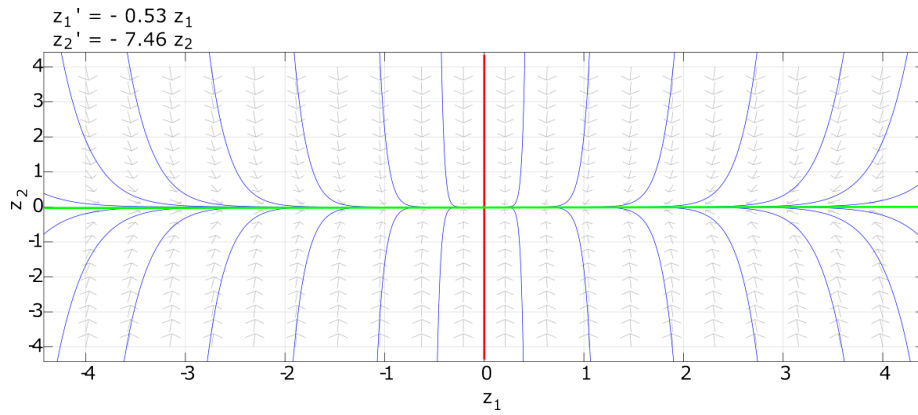


Figura 4.5: Simulación 2. Trayectorias del sistema diagonal (4.7) sin entradas.

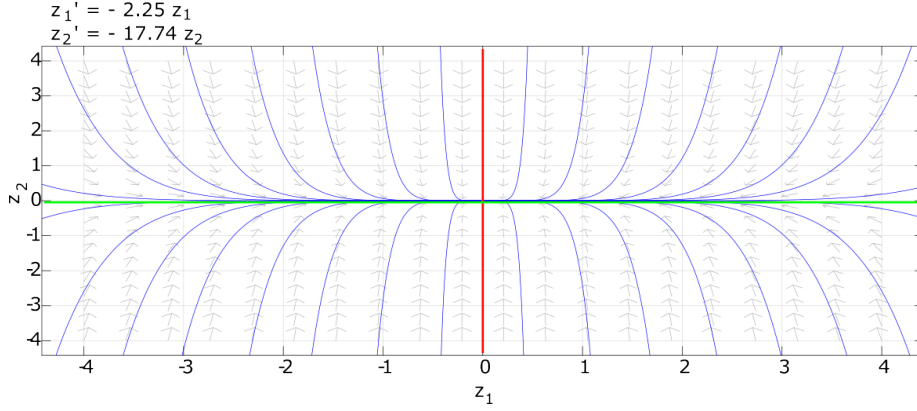


Figura 4.6: Simulación 3. Trayectorias del sistema diagonal (4.7) sin entradas.

En la Figura 4.4 se observa que hacia el infinito las trayectorias tienden a ser paralelas al eje z_1 y cuando se aproximan al origen tienden a ser tangentes al eje z_2 . Comportamientos similares ocurren en las simulaciones mostradas en las figuras 4.5 y 4.6. Estos retratos fase representan el comportamiento del sistema a través de la transformación a coordenadas z . Es importante mencionar que ésta transformación será relevante para el desarrollo de los objetivos planteados.

El desarrollo mostrado en la sección 3.1 para el diseño del controlador por modos deslizantes, modifica o elimina el controlador lineal para poder proporcionar la robustez deseada a través de una señal de control que tiene parámetros adicionales y que además son dependientes de los estados, causando que la ganancia K sea mucho mas grande de lo necesario, para que además de compensar la perturbación se compensen los términos lineales, verificando solo estabilidad local.

Considerando el método propuesto en esta tesis, se impone la ley de control descrita en (2.12). Como observamos en las figuras 4.1-4.3, las trayectorias del sistema convergen a uno de los espacios propios del sistema por sí solas en el caso nominal, por lo cual, la propuesta es utilizar un espacio propio como una superficie deslizante y así en el caso con perturbaciones conservar el controlador lineal previamente diseñado y las propiedades que este aporta al sistema. Ahora, recuerde que se obtuvieron ecuaciones para la transformación del sistema en un sistema diagonalizado, donde el espacio propio asociado a λ_2 en el sistema transformado es el eje z_2 y similarmente para λ_1 . Por lo que ahora se elige a $s = z_2^1$ como variable deslizante. Ya tenemos lo necesario para enunciar el primer resultado de la presente tesis.

Teorema 4.2.1. *Considere el sistema (2.11) en lazo cerrado con el controlador (2.12), asumiendo que los valores propios de (4.1) son reales negativos y distintos. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$ con*

$$s(x) = \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 + B_{n_2} x_2, \quad (4.10)$$

¹La variable de deslizamiento s es elegida como $s = z_2$ dado que $|\lambda_2| > |\lambda_1|$.

donde $B_{n_2} = -\frac{\lambda_2}{\Delta}$ y $\Delta = k_2^2 - 4k_1$. Si (2.9) se satisface y si $K > D$, entonces para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^2$ se establece un modo deslizante sobre S en un tiempo finito t_s , tal que

$$t_s \leq -\ln \left(\frac{\lambda_2 |s(x(0))| + B_{n_2}(-K + D)}{B_{n_2}(-K + D)} \right) \frac{1}{\lambda_2}. \quad (4.11)$$

En el modo deslizante las trayectorias del sistema convergen al origen exponencialmente.

Demostración. Considere la transformación de coordenadas (4.8) y defina $s_z(z) = z_2$. Observe que $s_z(z) = s_z(Q^{-1}x) = s(x)$, por lo que verificar que se establece un modo deslizante sobre S es equivalente a verificar que éste se establece en el sistema transformado sobre el conjunto $\{z \in \mathbb{R}^2 : s_z(z) = 0\}$. Para esto, considere la función tipo Lyapunov $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(s_z) = \frac{1}{2}s_z^2. \quad (4.12)$$

La derivada de (4.12) tomada a lo largo de las trayectorias de (4.7) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_2[\lambda_2 z_2 + B_{n_2}(-K \text{sign}(z_2) + d)], \\ \dot{V} &= \lambda_2 z_2^2 - KB_{n_2}|z_2| + B_{n_2}dz_2, \\ \dot{V} &\leq \lambda_2 z_2^2 + B_{n_2}(-K + D)|z_2|, \end{aligned} \quad (4.13)$$

dado que $\lambda_2 < 0$, $K > D$ (condición encontrada anteriormente en (3.10)) y $B_{n_2} > 0$, entonces \dot{V} en 4.13 es una función definida negativa. Se puede concluir que la superficie de deslizamiento descrita por $s_z(z) = 0$ es atractiva.

Para verificar que las trayectorias del sistema alcanzan la superficie estableciendo un modo deslizante en un tiempo finito t_s , se parte de integrar (4.13) en un intervalo de tiempo de 0 a t_s . Para esto, se encuentra otra manera de expresar a (4.13), quedando como

$$z_2 \frac{dz_2}{dt} \leq |z_2| (\lambda_2 |z_2| + B_{n_2}(-K + D)),$$

Utilizando el Lema de Comparación, se puede integrar y evaluar en los límites, obteniendo la cota del tiempo de convergencia

$$t_s \leq -\ln \left(\frac{\lambda_2 |s(x(0))| + B_{n_2}(-K + D)}{B_{n_2}(-K + D)} \right) \frac{1}{\lambda_2}.$$

recordando que $s = z_2$. (Una forma equivalente de verificar lo anterior es usando la función tipo Lyapunov 4.12, note que $z_2 = (2V)^{1/2}$, por lo tanto

$$\dot{V} \leq 2\lambda_2 V + B_{n_2}(-K + D)(2V)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo que las trayectorias del sistema 2.11 alcanzan la superficie de deslizamiento y se mantiene sobre ella, garantizando el modo deslizante para todo tiempo $t \geq t_s$.

La convergencia exponencial de las trayectorias al origen en el régimen deslizante se verifica de forma estándar (vea la Sección 3.1.1). \square

La función tipo Lyapunov propuesta verifica la alcanzabilidad de la superficie deslizante, por lo que las trayectorias convergen a ella en un tiempo finito, para verificar ésto, realizamos una transformación a coordenadas z . Otra manera es mediante la transformación $z = Q^{-1}x$ para regresar a las coordenadas originales x , llegando nuevamente a las mismas condiciones, sin embargo, el procedimiento es mucho más simple con el sistema transformado. Éste procedimiento puede verse en el Apéndice B.

Observación 4. *Como puede verse en la demostración, el diseñar la superficie deslizante como uno de los espacios propios para el controlador, además de verificar la atractividad de $s(x) = 0$, permite que las trayectorias después de la fase de alcance se deslicen sobre ella para todo $t \geq t_s$. Además, debido a que es la recta de uno de los espacios propios, las trayectorias convergen al origen del sistema, por lo que el controlador por modos deslizantes y el controlador lineal cooperan para lograr las propiedades de desempeño y robustez deseados.*

El tiempo de convergencia t_s se puede estimar de tres maneras distintas, dando la oportunidad de realizar una comparación. Como primer método, se tiene el mostrado en la demostración del Teorema 4.2.1. Un segundo método es obtener una cota mayor para (4.13), se tiene

$$\dot{V} \leq B_{n_2}(-K + D)|z_2|.$$

si se integra la última expresión en un intervalo de tiempo de 0 a $t_s = t_{z_2}$ y podemos obtener

$$t_s \leq \frac{|s(x(0))|}{B_{n_2}(K - D)}. \quad (4.14)$$

Como tercer y último método se utiliza la solución de la ecuación de estado del sistema expresada en (4.9), dado que $z_2(t_s) = 0$, se puede resolver la expresión para t_{z_2} , obteniendo

$$t_s \leq -\ln \left(\frac{\lambda_2 |s(x(0))| + B_{n_2}(-K + D)}{B_{n_2}(-K + D)} \right) \frac{1}{\lambda_2}. \quad (4.15)$$

Método	Tiempo estimado
1. Eqn. (4.22)	0.64 s
2. Eqn. (4.14)	15.30 s
3. Eqn. (4.15)	0.64 s

Tabla 4.2: Cota del tiempo de convergencia t_{z_2} para la simulación.

Ejemplo 3. Se realiza una simulación donde se puede comprobar de manera numérica que se cumple con el tiempo de convergencia estimado para que las trayectorias alcancen la superficie de deslizamiento y que posteriormente se dirigen al punto del equilibrio. Para la simulación se usan los parámetros $k_1 = 4$, $k_2 = 8$, $\lambda_2 = -7.46$, $K = 1$ y una perturbación constante de $d = 0.5$ ($D = 0.5$), con los que se obtienen los tiempos de convergencia estimados expresados en la Tabla 4.2. En las figuras 4.7-4.10 podemos observar todas las respuestas de las señales involucradas en el sistema.

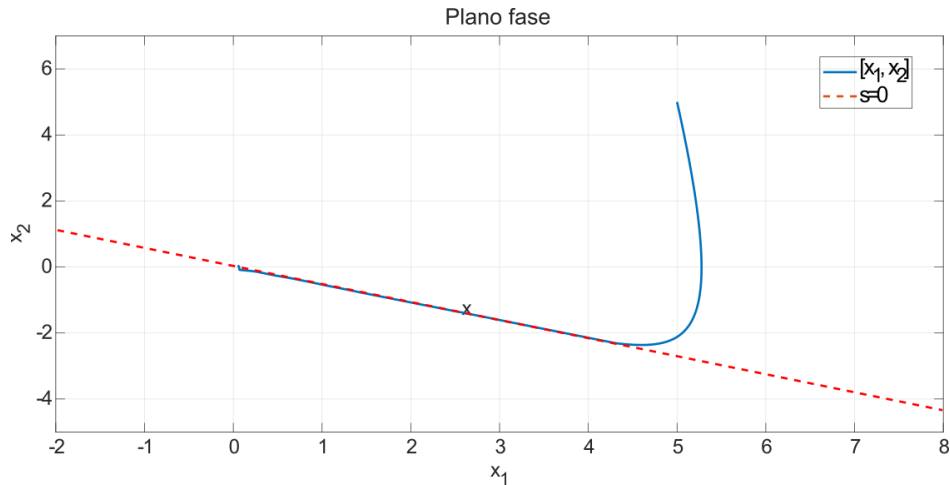


Figura 4.7: Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s(x) = 0$.

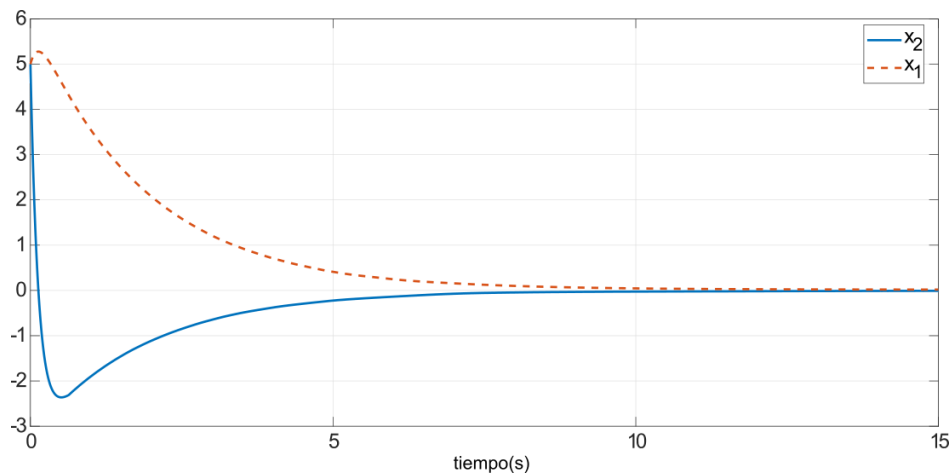


Figura 4.8: Comportamiento de los estados del sistema controlado.

En la Figura 4.7 se puede observar el plano fase donde se encuentra la recta $s(x) = 0$ y la trayectoria del sistema teniendo la fase de alcance ($t < t_s$) y el modo deslizante en el que se dirige al origen para $t \geq t_s$; en la Figura 4.8 se encuentran las respuestas temporales de los estados del sistema, donde en el tiempo de convergencia t_s alcanzan la superficie de deslizamiento y dado que la superficie elegida es uno de los espacios propios, la trayectoria se dirige de manera natural al origen; en la Figura 4.9 se tiene la

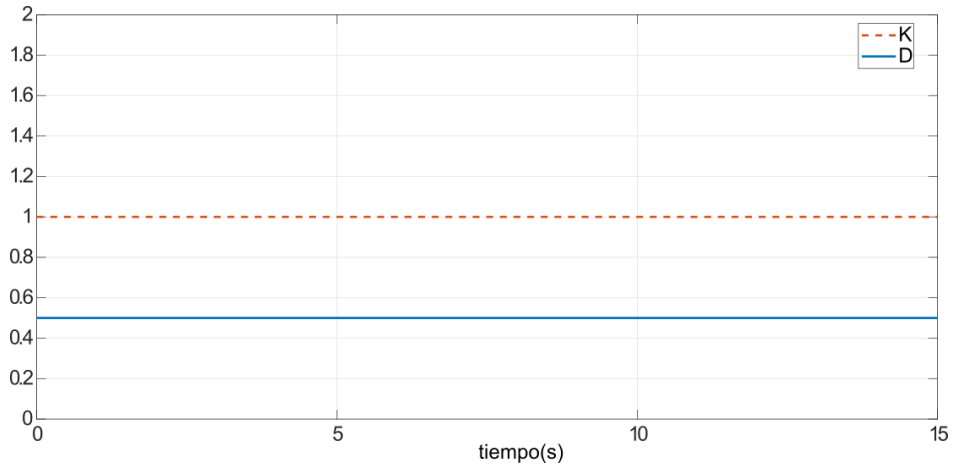


Figura 4.9: Ganancia K y perturbación constante d .

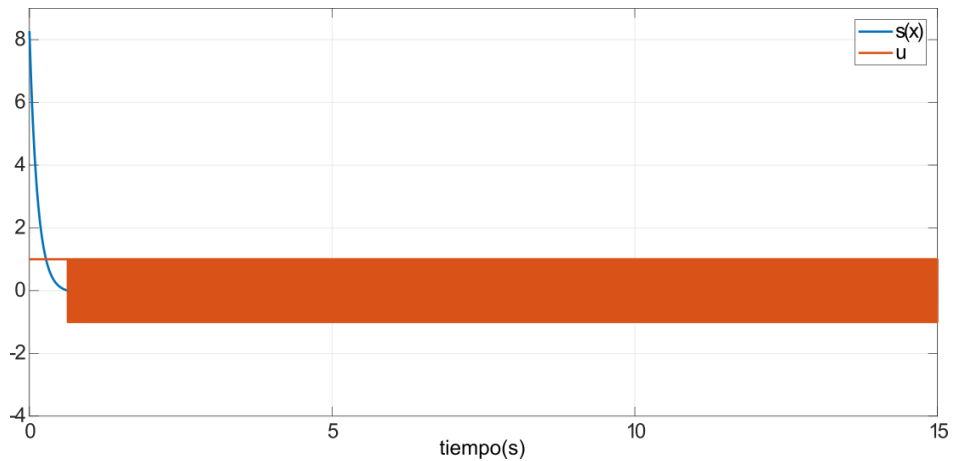


Figura 4.10: Variable deslizante y señal de control.

señal de perturbación constante y la recta de la ganancia K lo suficientemente grande; por último, en la Figura 4.10 se tiene el comportamiento de la variable de deslizamiento $s(x(t))$ cuyo tiempo de convergencia a cero t_s es cercano a la cota de tiempo estimada, así como la señal de control que comienza a conmutar, compensando la perturbación del sistema.

Observación 5. Note que en el sistema con control por modos deslizantes la respuesta de las variables de estado es sobreamortiguada, por lo que se mantiene el comportamiento no oscilatorio establecido a través del diseño del control lineal. Note también que sobre la superficie de deslizamiento también se mantiene la tasa de convergencia exponencial. Así, el controlador por modos deslizantes mantiene estas características de desempeño del controlador lineal.

Algo interesante en esta simulación, son los tiempos de alcance estimados encontrados por los diferentes métodos, que son mostrados en la Tabla 4.2. Como podemos notar, el acotar superiormente a \dot{V} solo por el término discontinuo da una estimación muy

conservadora. Sin embargo, si se quiere tener una aproximación más cercana, los dos métodos restantes son una representación más exacta.

Ejemplo 4. *En este ejemplo se realiza la simulación con los mismos parámetros del ejemplo anterior pero con una ganancia $K = 6$. Los resultados análogos al ejemplo anterior son mostrados en las figuras 4.11-4.14. La descripción del comportamiento de las señales es similar a las figuras anteriores.*

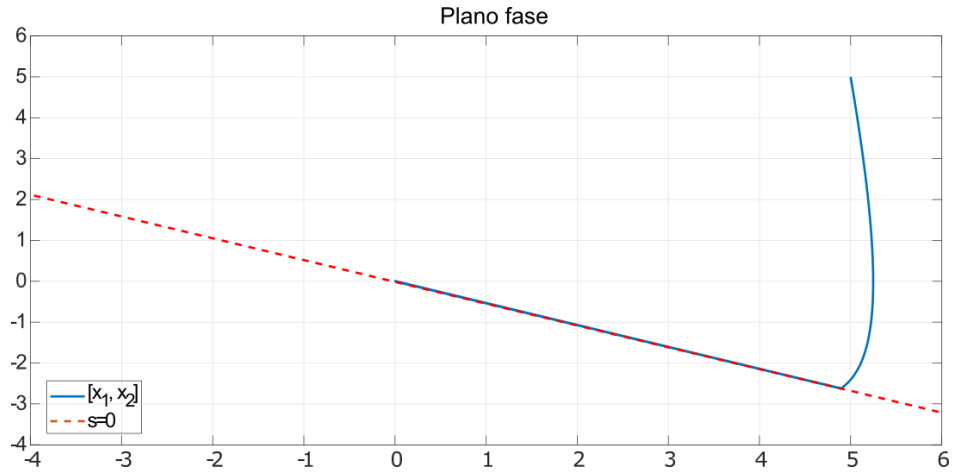


Figura 4.11: Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s(x) = 0$.

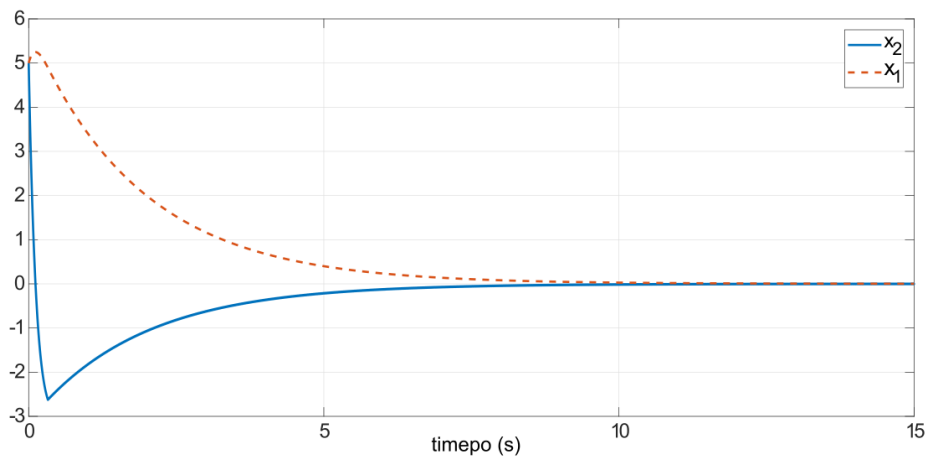


Figura 4.12: Comportamiento de los estados del sistema controlado.

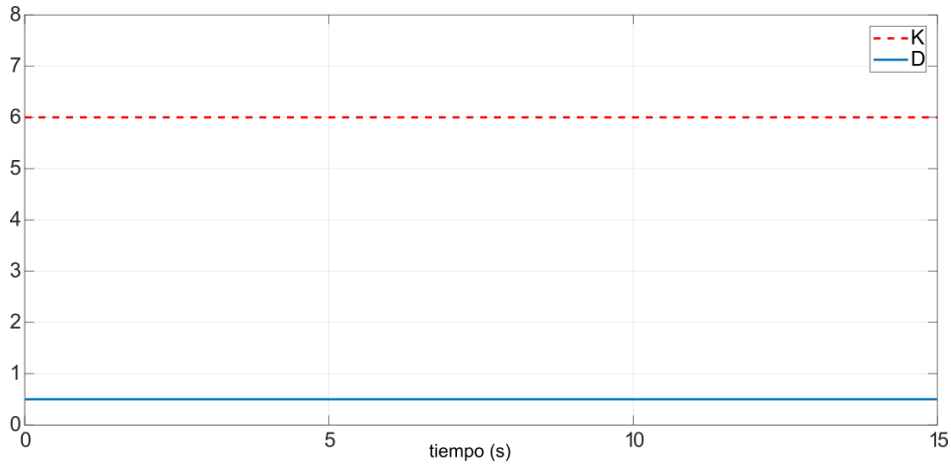


Figura 4.13: Ganancia K y perturbación constante d .

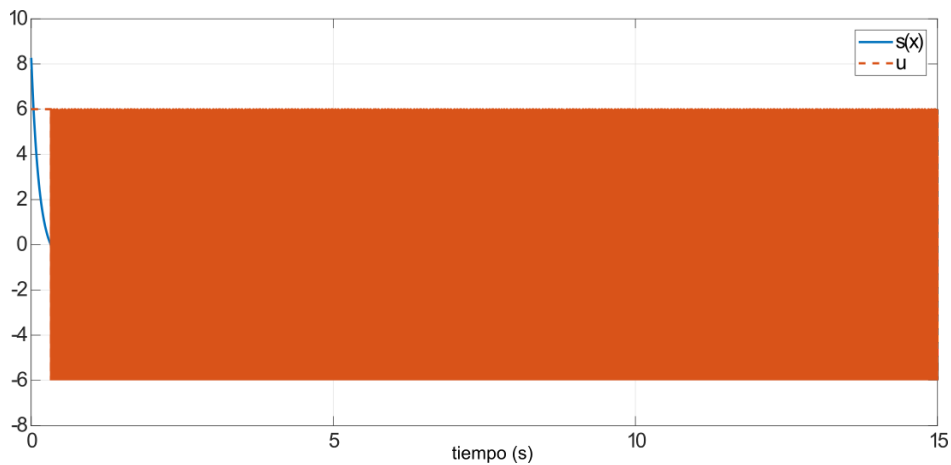


Figura 4.14: Variable deslizante y señal de control.

Ahora la estimación del tiempo de convergencia es $t_s \leq 0.33s$. Con estas dos simulaciones podemos realizar una comparación, la cual se muestra en la Figura 4.15. Se realiza un acercamiento a la superficie de deslizamiento y las trayectorias de las dos simulaciones anteriores. Lo primero que podemos observar en la Figura 4.15 (ampliación de la trayectoria y de la superficie deslizante) es que el tiempo de convergencia a la superficie de deslizamiento es menor en el caso de mayor ganancia. Sin embargo, cuando K es mayor de lo necesario, la vibración (u oscilación) que se presenta en las señales durante el régimen deslizante es de mayor amplitud.

En la teoría de control de sistemas de estructuras variables se asume que la señal de control por modos deslizantes puede ser conmutada de un valor a otro a una velocidad infinitamente rápida, sin embargo, en aplicaciones prácticas esto es imposible de alcanzar debido a las limitaciones de los elementos físicos y las demoras que se producen en el cálculo de control. Esto puede provocar que con ciertas implementaciones del control se presenten fenómenos no deseados de oscilaciones de frecuencia y amplitud finita, definido como *chattering*. Es un fenómeno que en algunos casos resulta dañino porque

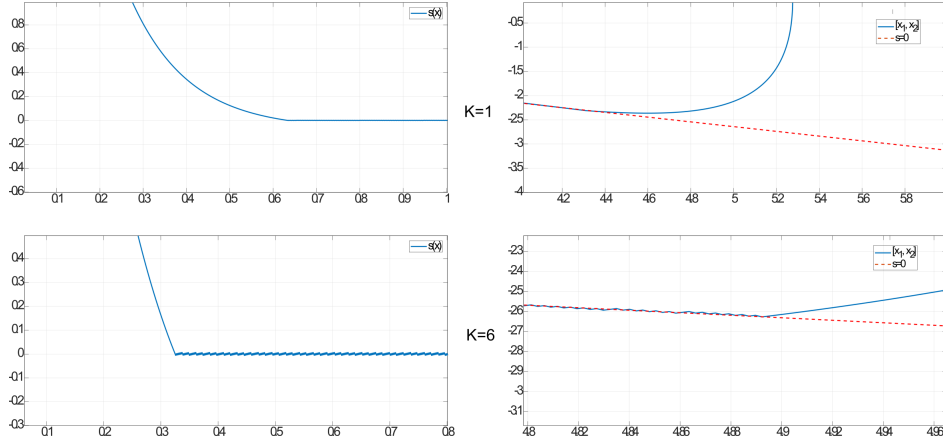


Figura 4.15: Acercamiento de la trayectoria y la superficie deslizante para $K = 1$ y $K = 6$

conduce a una baja precisión de control, un alto desgaste y altas pérdidas por calor. La amplitud del chattering es proporcional a la magnitud del control discontinuo. Por lo tanto, los métodos de supresión de la vibración pueden desarrollarse de manera que la magnitud se reduzca adecuadamente junto con los estados del sistema. El segundo implica que la magnitud es la función de un control equivalente derivado de un filtro de paso bajo u_{eq} ; método que puede aplicarse a las plantas sujetas a perturbaciones desconocidas, sin embargo esta técnica no garantiza las propiedades de robustez de los modos deslizantes. Cabe recalcar que el chattering numérico es provocado por la discretización, entre mas pequeño sea el paso de muestreo, más se aproxima al caso teórico. El encontrar una condición donde K solo tiene que compensar la perturbación d , permite la reducción de estas oscilaciones, justo como la metodología que se está desarrollando en esta tesis.

Ahora, para ejemplificar mejor los resultados teóricos obtenidos, se muestran resultados experimentales. El experimento consiste en emular (con circuitos electrónicos) el comportamiento de un péndulo simple. A este sistema se le diseñará e implementará un control lineal, y se le introducirá una señal de perturbación. Posteriormente se añadirá un control por modos deslizantes, como el diseñado en esta sección, para rechazar los efectos de la perturbación el sistema.

Experimento 1. Considere el modelo de un péndulo simple (veáse [34]), esto es, usando la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento en la dirección tangencial queda expresada como

$$MR^2\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + MgR\sin(\theta) = T \quad (4.16)$$

donde R denota la longitud del péndulo (asumiendo que la varilla es rígida y su masa es igual a 0), M la masa concentrada en el extremo, θ es el ángulo entre la varilla y el eje vertical a través del punto de pivote. La fuerza que actúa sobre la masa suspendida es la gravitacional, esto es Mg , donde g la constante de aceleración gravitacional. Asumimos que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad de la masa con un coeficiente

de fricción k , y T es el par aplicado, el cual agrupa las señales de entrada, es decir, $T = T_c + T_d$ donde T_c es la señal de control y T_d es la señal de perturbación. Utilizando las variables $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$ podemos obtener el modelo de estados para el péndulo

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - bx_2 + c(T_c + T_d), \quad (4.17)$$

donde $a = \frac{g}{R}$, $b = \frac{k}{MR^2}$ y $c = \frac{1}{MR^2}$. Este sistema es emulado con un filtro electrónico analógico de segundo orden, construido con amplificadores operacionales OP77 y realimentado con un microcontrolador ATSAME51J20A, que calcula la no linealidad con un paso de muestreo de 1ms, representado en la Fig. 4.16.

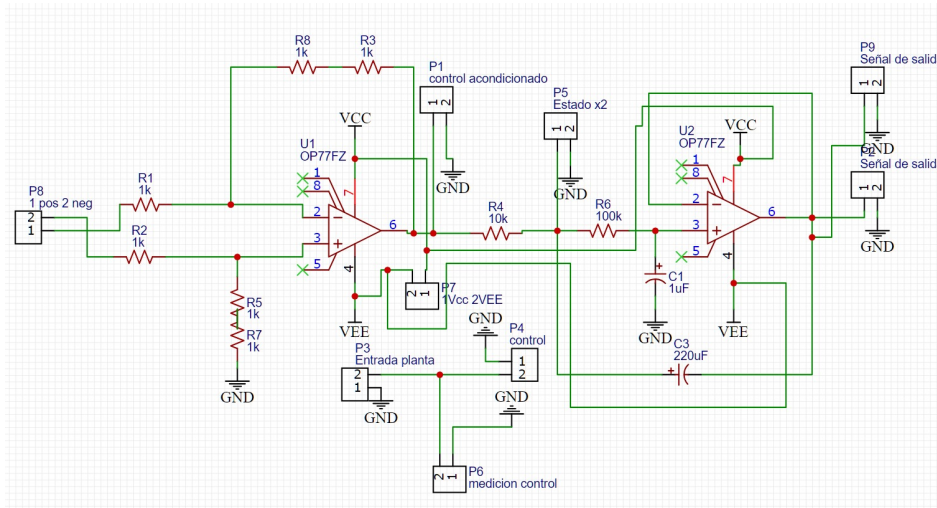


Figura 4.16: Circuito

Los parámetros del sistema son $a = c = 4.545$ y $b = 1/2$.

En la Fig. 4.17 se observa el comportamiento de x_1 de la planta no lineal descrita en (4.17) con una entrada T cuadrada, la cual oscila entre 0.44 y 0.176 con un periodo de 20s.

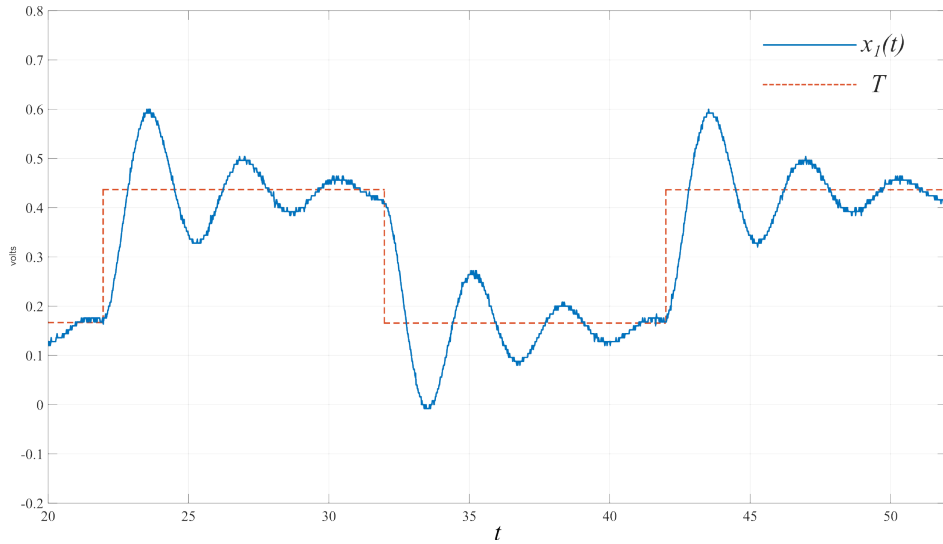


Figura 4.17: Respuesta del péndulo simple a una señal cuadrada

Para controlar al péndulo se utiliza la técnica de linealización exacta por realimentación de estados. Se elige la señal de control como

$$T_c = \frac{1}{c}[a \sin(x_1) + bx_2] + \frac{v}{c},$$

con la que se cancelan los términos tanto lineales como no lineales, lo que resulta en el sistema lineal (asumiendo $T_d = 0$)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v.$$

Entonces el problema de estabilizar el sistema no lineal se reduce a estabilizar un sistema lineal controlable. Por lo que se puede elegir

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2 + u \tag{4.18}$$

para obtener que el origen del siguiente sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable (para $u = 0$)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 + u. \tag{4.19}$$

La señal del control lineal se diseña para garantizar que el origen del sistema sea exponencialmente estable y que las trayectorias son no oscilatorias, por lo que las ganancias se eligen como $k_1 = 4$ y $k_2 = 5$. En la Fig. 4.18 se observa la respuesta escalón de la planta. La respuesta de la salida del sistema dada por la variable de estado x_1 es sobreamortiguada y es llevada hacia la señal de referencia r por el controlador implementado. Como se mencionó en la Capítulo 2, esta técnica de control tiene como desventaja la falta de robustez, por lo que en el lazo cerrado, el sistema es sensible a las perturbaciones e incertidumbres del modelo. Considerando nuevamente la perturbación, el sistema en lazo cerrado queda expresado de la siguiente manera

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 + u + d, \tag{4.20}$$

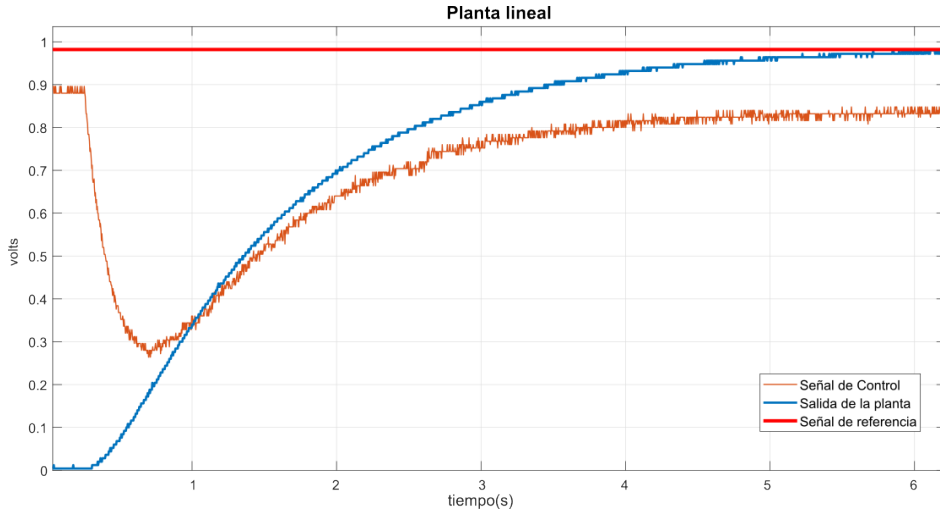


Figura 4.18: Péndulo simple (no perturbado) con controlador lineal kx

que es igual a nuestro sistema (2.11), asumiendo que la perturbación $d = cT_d$ es tal que (2.9) se satisface.

En este experimento, el sistema con el controlador lineal kx es perturbado con una señal sinusoidal $d = \sin(t)$. En la Fig.4.19 se observa la respuesta del péndulo que anteriormente fué estabilizado con el control lineal dado en (4.18), donde se hace evidente que con esta técnica la perturbación no puede ser compensada y la salida de la planta no converge a la referencia, sino que oscila alrededor de ella.

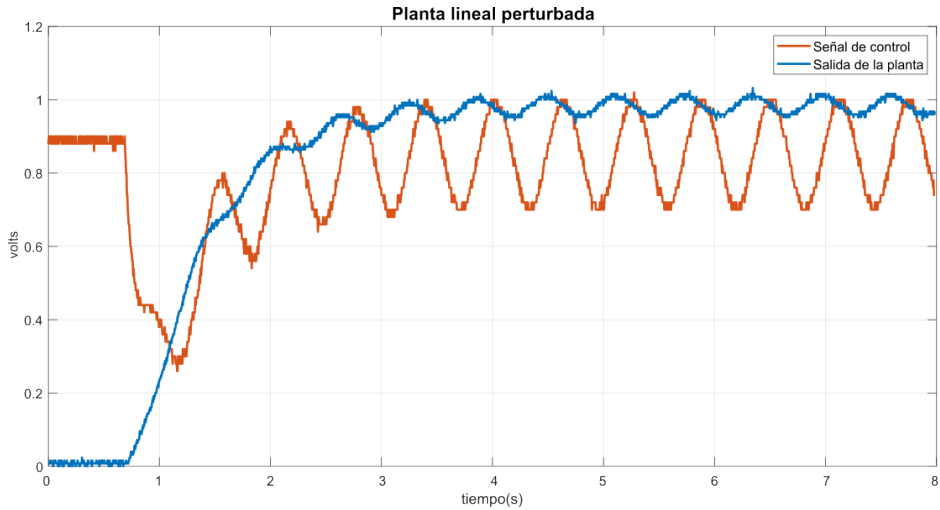


Figura 4.19: Péndulo perturbado con controlador lineal implementado

Para eliminar el efecto de la perturbación y mantener las propiedades de desempeño que el control lineal aporta, se implementa un controlador por modos deslizantes $u = -K \text{sign}(s)$, donde $K = 1.2$ y la variable de deslizamiento s es la descrita en (4.21), enunciada en el resultado principal de esta sección. El cálculo de la estimación del

tiempo de convergencia arroja $t_s \leq 0.79$ s. Se obtienen los siguientes resultados: la trayectoria del sistema alcanza la superficie de deslizamiento al tiempo de convergencia estimado, en ese momento el control comienza a conmutar y el efecto de la perturbación se elimina por completo, esto puede verse en la Fig. 4.20, la salida del sistema nuevamente es llevada hacia la señal de referencia, y manteniendo el comportamiento sobreamortiguado. Con estos resultados se puede concluir que para un sistema con

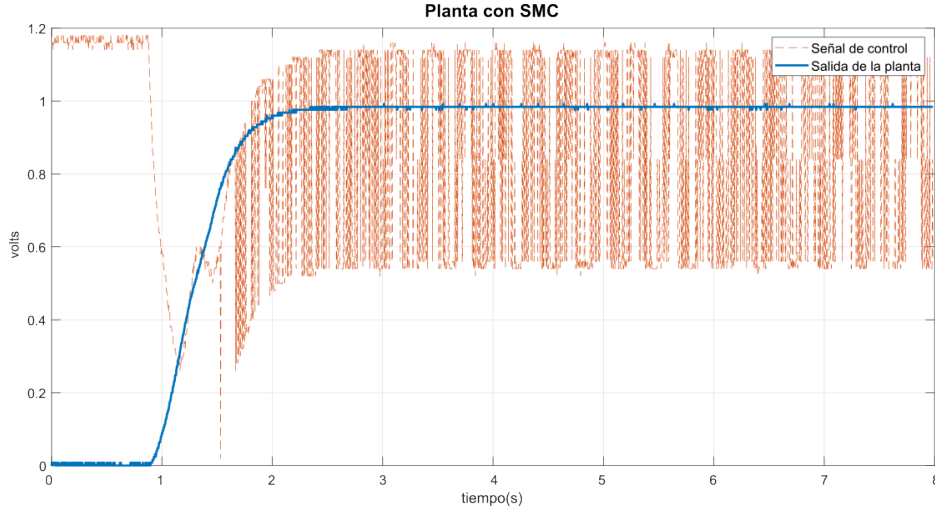


Figura 4.20: Comportamiento de la planta (4.20) con control $u = -K \text{sing}(s)$

valores propios reales negativos y diferentes, el elegir la superficie y variable de deslizamiento como se describe en el Teorema (4.2.1) y cuyo procedimiento sistemático se encuentra extendido en esta sección, no sólo garantiza que el origen del sistema es exponencialmente estable, si no que las propiedades que el control lineal aporta se mantienen, logrando cumplir satisfactoriamente con los objetivos planteados. El controlador por modos deslizantes brinda la robustez necesaria de la que el control lineal carece y con él, el sistema es robusto, es decir, que el sistema se vuelve insensible a perturbaciones en algún tiempo finito.

Ahora, es fundamental mencionar que para el caso en que $\lambda_1 = \lambda_2$, el diseño de la superficie y la variable de deslizamiento, es distinto y se encuentra descrito en la siguiente subsección.

4.2.1. Modo deslizante de orden reducido para $\lambda_1 = \lambda_2$

Considere que $\lambda_1 = \lambda_2$, este caso se cumple si k_1 y k_2 son tales que

$$k_2 = 2\sqrt{k_1},$$

además, los vectores propios del sistema quedan definidos de la siguiente manera

$$X_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \chi_i, \quad \chi_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad X_i \in E_i, \quad i = 1 = 2.$$

Entonces, los espacios propios del sistema son $E_1 = E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\lambda x_1 + x_2 = 0\}$. Dado que la superficie de deslizamiento esta dada por el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$, seleccionamos a la variable de deslizamiento $s(x)$, como $s(x) = -\lambda x_1 + x_2$, y enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 4.2.2. *Considere el sistema (2.11) en lazo cerrado con el controlador (2.12), asumiendo que los valores propios de (4.1) son reales negativos e iguales. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$ con*

$$s(x) = -\lambda x_1 + x_2, \quad (4.21)$$

donde $\lambda = -\frac{k_2}{2}$. Si (2.9) se satisface y si $K > D$, entonces para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^2$ se establece un modo deslizante sobre S en un tiempo finito t_s , tal que

$$t_s \leq -\ln \left(\frac{\lambda |s(x(0))| + (-K + D)}{-K + D} \right) \frac{1}{\lambda}. \quad (4.22)$$

En el modo deslizante las trayectorias del sistema convergen al origen exponencialmente.

La demostración de este teorema es análoga al Teorema 4.2.1 con $\lambda = \lambda_2$ y $B_{n_2} = 1$.

4.3. Modos deslizantes de orden completo

El planteamiento de la sección anterior pertenece al caso en que el sistema nominal tiene valores propios reales negativos, sin embargo, el control por modos deslizantes propuesto no puede utilizarse para el caso en el que se tienen valores propios con parte imaginaria (cuando el punto de equilibrio tiene el comportamiento de un foco estable), ya que las trayectorias oscilan al converger al origen. Para tratar este caso, es necesario recurrir al método de control por modos deslizantes integral.

Consideramos el sistema (2.11) y asumimos que para el sistema nominal (4.1) se tienen valores propios complejos estables. De las ecuaciones para los valores propios dadas por (4.4), tenemos que las condiciones sobre los parámetros k_1 y k_2 son las siguientes

$$k_{1,2} > 0, \quad k_2 < 2\sqrt{k_1}.$$

Se requiere construir un control por modos deslizantes integral para el sistema (2.11), esto con el fin de mantener una dinámica con oscilaciones en el régimen deslizante.

La forma canónica de Jordan del sistema nominal tiene una matriz de estados $J = Q^{-1}AQ$. Dado que ésta forma es compleja no tiene mucho interés para nuestro análisis, por esto, trabajaremos con otra forma canónica real conocida como forma modal [7]. Esta se obtiene a partir de definir a la matriz de cambio de base Q como $Q = [\text{Re}(v) \text{Im}(v)]$ (donde v es un valor propio de A), esto da una forma de matriz real que no es diagonal, pero que sera muy útil más adelante. Los vectores propios del sistema ahora están dados por la siguiente ecuación

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \chi \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \chi. \quad (4.23)$$

donde $\alpha = -\frac{k_2}{2}$ y $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Con $\chi = 1$, podemos formar la matriz Q que queda definida como

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

con

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\beta},$$

por lo tanto, la forma modal $M = Q^{-1}AQ$ es

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

Ahora, con el cambio de coordenadas $z = Q^{-1}x$ dado por

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = \frac{1}{\beta}(-\alpha x_1 + x_2), \quad (4.25)$$

se transforma al sistema (2.11) a la forma

$$\dot{z}_1 = \alpha z_1 + \beta z_2, \quad \dot{z}_2 = -\beta z_1 + \alpha z_2 + \frac{1}{\beta}(u + d). \quad (4.26)$$

En el caso nominal sin entradas, la solución de estas ecuaciones es oscilatoria y puede ser expresada de una forma más conveniente en las coordenadas polares

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{z_2}{z_1} \right),$$

de donde se obtienen dos ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \beta. \quad (4.27)$$

Así, la solución para una condición inicial (r_0, θ_0) está dada por

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} \quad y \quad \theta(t) = \theta_0 + \beta t.$$

Ahora, para el control por modos deslizantes, como se planteó en los objetivos del trabajo, se busca que la señal u no dependa de términos de los estados del sistema adicionales al discontinuo. Como hemos visto, el control u planteado por el método de Utkin, mostrado en la Sección 3.1.2, involucra una realimentación lineal de estados. Entonces, si fijamos nuevamente a $u = -K \text{sign}(s)$, es claro que el procedimiento anterior, no cumple con las características deseadas a simple vista, por lo que tenemos que diseñar de manera diferente la superficie deslizante. Por ello, es que nuevamente la transformación del sistema juega un papel importante.

La idea del diseño es la siguiente. Se diseña una superficie de deslizamiento definida por

$$s(x, v) = s_0(x) - v,$$

donde v está dada por $\dot{v} = f(x, v)$, y f es una función a diseñar. Se eligen s_0 y f tales que en régimen deslizante (cuando $s = 0$ y $\dot{s} = 0$) se recupere la dinámica del sistema nominal. Así, podemos enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.3.1. *Considere el sistema (2.11) asumiendo que los valores propios del sistema nominal son complejos con parte real negativa. Considere el controlador (2.12) con la variable de deslizamiento s dada por*

$$s(x, v) = \frac{1}{\beta}(-\alpha x_1 + x_2) - v, \quad \dot{v} = -\beta x_1 + \alpha v, \quad (4.28)$$

donde $\alpha = -\frac{k_2}{2}$ y $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Si (2.9) se satisface y $K > D$, entonces para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^2$ se establece que $s(x(t), v(t)) = 0$ para todo $t \geq t_s$, con un tiempo finito t_s tal que

$$t_s \leq -\ln \left(\frac{\alpha\beta |s(x(0), v(0))| + D - K}{D - K} \right) \frac{1}{\alpha}. \quad (4.29)$$

Además, la dinámica en régimen deslizante está dada por (4.1).

Demostración. Considere la transformación de coordenadas (4.25) y defina $s_z(z, v) = z_2 - v$. Observe que $s_z(z, v) = s_z(Q^{-1}x, v) = s(x, v)$ y que $\dot{v} = -\beta z_1 + \alpha v$. De manera que, verificar que $s(x(t), v(t))$ se establece en cero en tiempo finito es equivalente a mostrar que $s_z(z(t), v(t))$ se establece en cero en tiempo finito. Para esto, considere la función tipo Lyapunov $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(s_z) = \frac{1}{2}s_z^2. \quad (4.30)$$

Tomando la derivada de (4.30) a lo largo de (4.26) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s_z[\dot{z}_2 - (-\beta z_1 + \alpha v)], \\ \dot{V} &= s_z[-\beta z_1 + \alpha z_2 + \frac{1}{\beta}(u + d) - (-\beta z_1 + \alpha v)], \\ \dot{V} &= s_z[\alpha(z_2 - v) + \frac{1}{\beta}(u + d)], \\ \dot{V} &= s_z[\alpha s_z + \frac{1}{\beta}(-K \text{sign} s_z + d)], \\ \dot{V} &\leq \alpha s_z^2 + \frac{1}{\beta}(-K + D)|s_z|. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Como $K > D$, se garantiza que el conjunto descrito por $s_z(z, v) = 0$ es atractivo. Para demostrar la convergencia de las trayectorias del sistema hacia este conjunto en un tiempo finito reescribimos la expresión para la derivada de la función tipo Lyapunov 4.31 como sigue

$$\dot{V} \leq 2\alpha V + \frac{1}{\beta}(-K + D)\sqrt{2V},$$

se integra y evalúa esta expresión de 0 a t_s , obteniendo la estimación del tiempo de convergencia t_s , dado por (4.29) (procedimiento análogo al de la prueba del Teorema 4.2.1).

Para encontrar la dinámica en régimen deslizante basta con ver que con $s_z = 0$ obtenemos que $v = z_2$, por lo tanto $\dot{v} = -\beta z_1 + \alpha z_2$ (igualmente, $\dot{v} = \dot{z}_2$). Como ésta dinámica depende de z_1 tenemos que considerar la dinámica de z_1 (dada en (4.26)), así la dinámica en régimen deslizante está dada por

$$\dot{z}_1 = \alpha z_1 + \beta z_2, \quad \dot{z}_2 = -\beta z_1 + \alpha z_2,$$

que se transforma en (4.1) a través de (4.25) y cuyas trayectorias convergen exponencialmente al origen por hipótesis. \square

Como se mencionó, el principal objetivo del modo deslizante integral es que no exista la fase de alcance, dicho de otra manera, que las trayectorias estén en la superficie de deslizamiento desde la condición inicial, lo que al parecer se logra si

$$v(x(0)) = \frac{1}{\beta}(-\alpha x_1(0) + x_2(0)),$$

sin embargo, esto no es suficiente, puesto que si consideramos $s_z(z, v) = 0$ tenemos que

$$\dot{s}_z = u + d,$$

lo que demuestra que existirá una fase de alcance si se desconoce la condición inicial de la perturbación.

Ejemplo 5. *En este ejemplo, realizamos algunas simulaciones del sistema (2.11), en el entorno Simulink de Matlab, con $k_1 = 4$, $k_2 = 2$, $K = 6$ y una perturbación constante $d = 5$, se calcula la estimación del tiempo de convergencia $t_s \leq 2.05$ s con ayuda de (4.29). Para la simulación se usa un método de integración Euler, obteniendo los siguientes resultados. Como se puede observar en las figuras 4.21-4.24, las respuestas de ambos estados alcanzan a la superficie deslizante en un tiempo t_s . La superficie de deslizamiento llega a ser cero $s(x, v) = 0$, en un tiempo aproximado a la estimación que se realizó previamente para los parámetros asignados a la simulación. Nuevamente, cuando la superficie es cero, la ley de control empieza a conmutar y el modo deslizante ocurre mitigando la perturbación. Cuando las trayectorias llegan a alcanzar la superficie deslizante en t_s , empiezan a converger al punto de equilibrio. La ganancia K , solo es lo suficientemente grande para compensar la perturbación D cuando la trayectoria empieza a deslizarse sobre la superficie.*

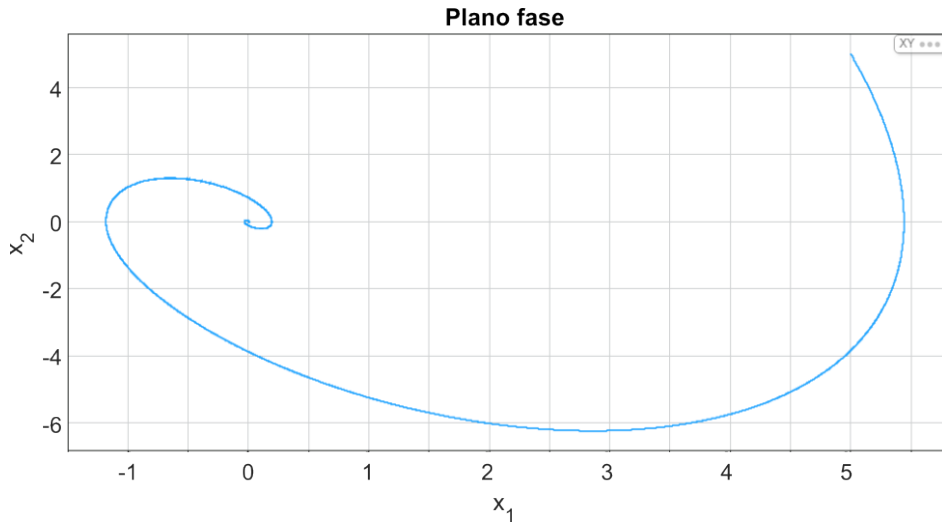


Figura 4.21: Trayectoria del sistema controlado.

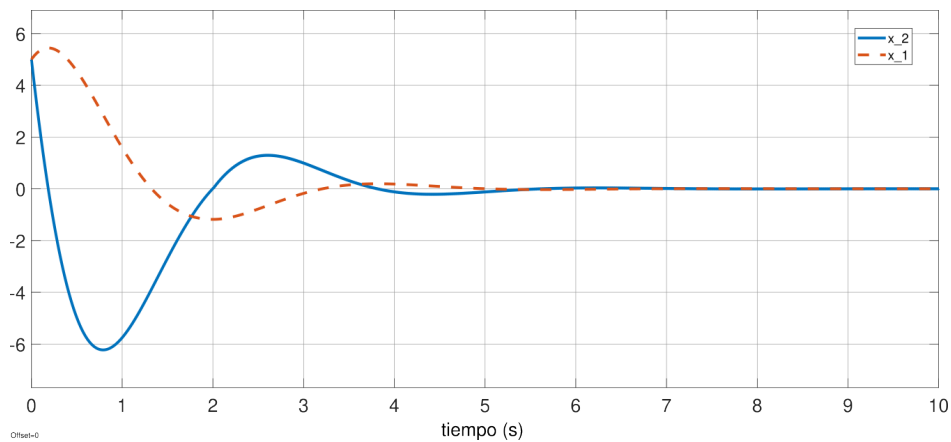


Figura 4.22: Comportamiento temporal de los estados del sistema.

Realizando una segunda simulación, ahora con una perturbación sinusoidal, obtenemos nuevos resultados. La estimación del tiempo de convergencia que se obtiene a partir de la expresión (4.29) es $t_s \leq 0.98s$. Los resultados se muestran en las figuras 4.25-4.28. Podemos ver que el control por modos deslizantes cumple con los objetivos, teniendo resultados satisfactorios en el sistema, el tiempo de convergencia estimado, es muy aproximado al de la simulación. La trayectoria alcanza la superficie deslizante en dicho tiempo, para posteriormente empezar con el modo deslizante, donde la función signo comienza a conmutar, por lo que se compensa la perturbación de manera exacta y la trayectoria es obligada a permanecer ahí para todo tiempo futuro para converger al origen del sistema.

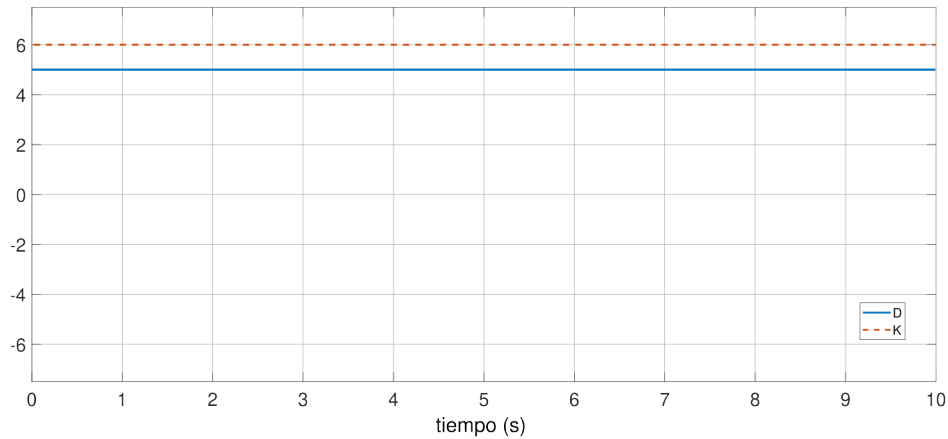


Figura 4.23: Ganancia K y perturbación constante d .

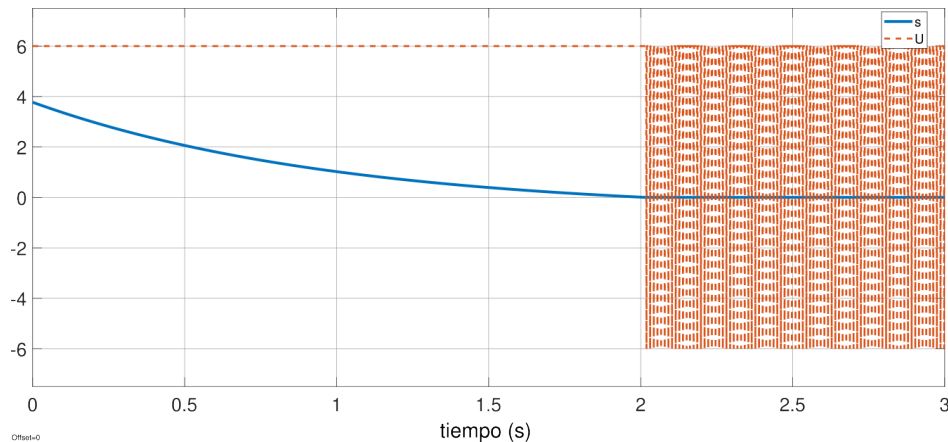


Figura 4.24: Variable deslizante y señal de control.

Observación 6. *El sistema con controlador por modos deslizantes de orden completo para valores propios complejos y estables, conserva la respuesta subamortiguada de las variables de estado, es decir que las trayectorias siguen oscilando alrededor del punto de equilibrio y convergen exponencialmente a él, además de mantener la tasa de convergencia, características de desempeño que se añaden al sistema por el controlador lineal previamente diseñado.*

Nuevamente se puede realizar la transformación para obtener la Función de Lyapunov en coordenadas originales, dicho procedimiento puede verse en Apéndice B.

4.3.1. Modo deslizante integral para sistemas con valores propios reales

El control por modos deslizantes que ya fue diseñado para el caso de valores propios reales, tiene la característica de reducir el orden en el régimen deslizante, sin embargo, podemos diseñar un control por modos deslizantes integral, en el cual el orden del sistema se conserve. Nuevamente utilizaremos el sistema transformado a coordenadas

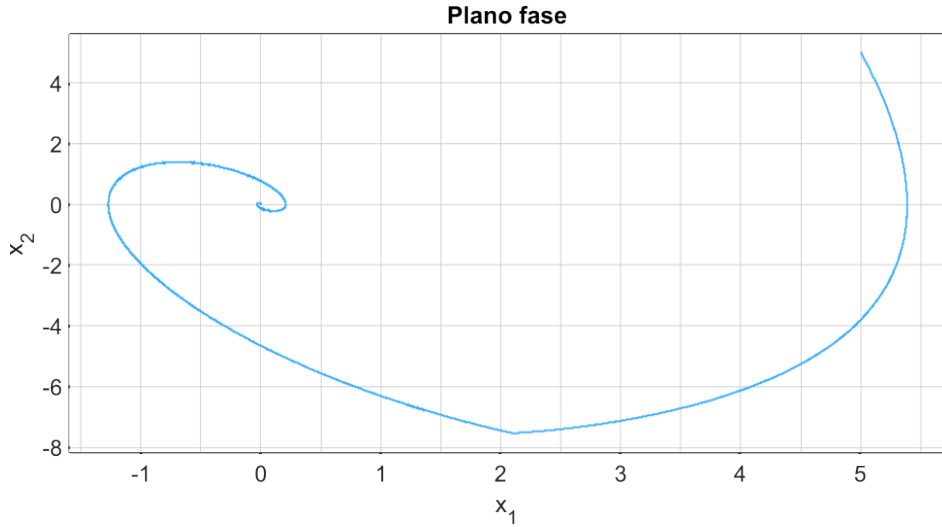


Figura 4.25: Trayectoria del sistema controlado.

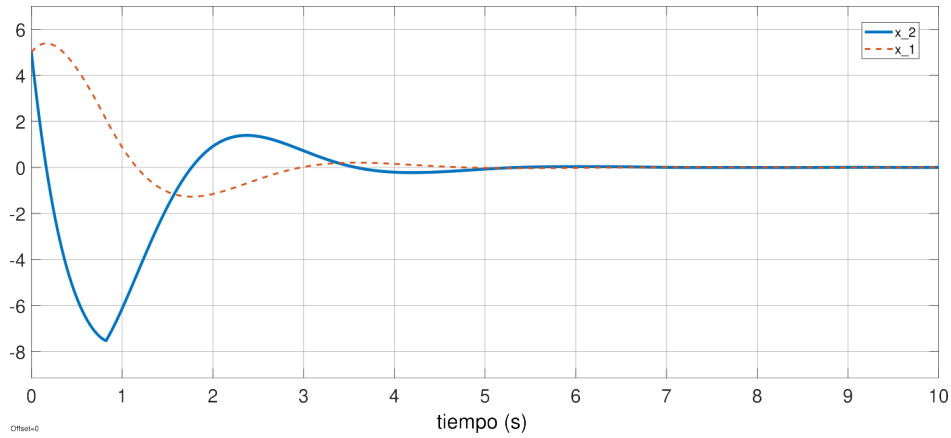


Figura 4.26: Comportamiento temporal de los estados del sistema.

z , a través del cual se diseña el control con un procedimiento similar al de un sistema con valores propios complejos.

Teorema 4.3.2. *Considere el sistema (2.11) en lazo cerrado con el controlador (2.12). Asuma que los valores propios (4.4) del sistema nominal son reales negativos. Considere la variable de deslizamiento*

$$s(x, v) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(k_1 x_1 - \lambda_2 x_2) - v, \quad \dot{v} = \lambda_2 v, \quad v(0) \neq 0. \quad (4.32)$$

Si (2.9) se satisface y si $K > D$, entonces para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^2$ se establece un modo deslizante sobre $s(x, v) = 0$ en un tiempo finito t_s que satisface

$$t_s \leq -\ln \left(\frac{\alpha \beta |s(x(0), v(0))| + D - K}{D - K} \right) \frac{1}{\alpha}. \quad (4.33)$$

Además, la dinámica en régimen deslizante está dada por (4.1).

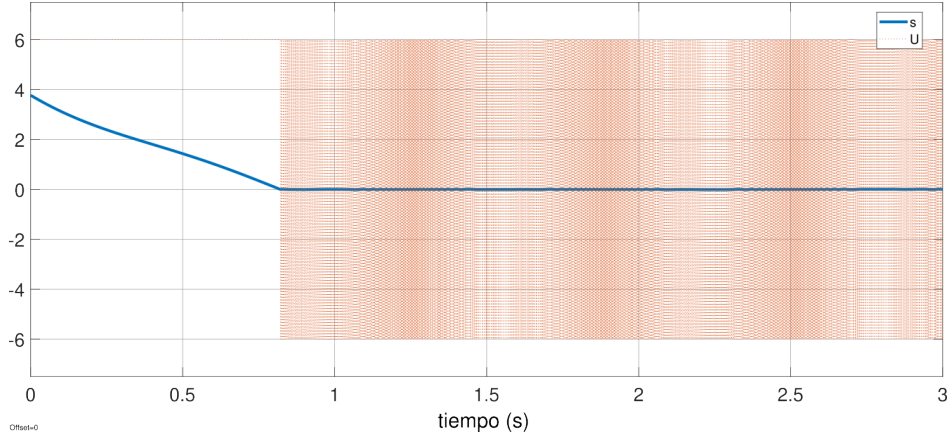


Figura 4.27: Superficie deslizante y señal de control.

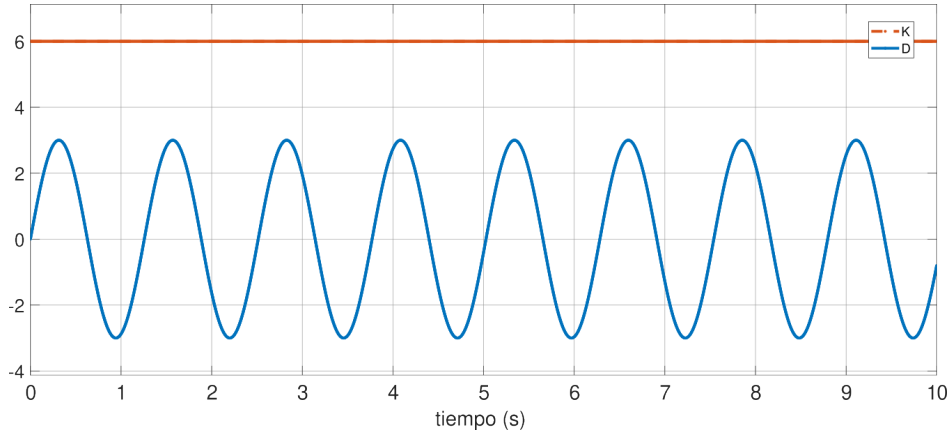


Figura 4.28: Ganancia K y perturbación constante D.

Demostración. Recordando la transformación ya hecha en (4.8) (de manera similar que en el caso complejo) definimos

$$s_z(z, v) = z_2 - v, \quad \dot{v} = \lambda_2 v.$$

Observe que $s_z(z, v) = s_z(Q^{-1}x, v) = s(x, v)$. Es importante ver que si $v(0) = 0$, entonces la superficie de deslizamiento es el eje z_2 del sistema transformado, regresando al caso de orden reducido. Por lo que para exista una dinámica de orden completo, v tiene que ser iniciada en una condición diferente a 0.

Para verificar que $s(x(t), v(t))$ se establece en cero en tiempo finito mostraremos que $s_z(z(t), v(t))$ se establece en cero en tiempo finito. Para esto, considere la función tipo Lyapunov $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(s_z) = \frac{1}{2} s_z^2. \quad (4.34)$$

Tomando la derivada de (4.34) a lo largo de (4.7) obtenemos

$$\dot{V} = s_z[\dot{z}_2 - \lambda_2 v], \quad (4.35)$$

sustituyendo las derivadas

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s_z[\lambda_2 z_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}(u+d) - \lambda_2 v] = s_z[\lambda_2(z_2 - v) - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}(u+d)], \\ \dot{V} &= s_z[\lambda_2 s_z - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}(u+d)] = \lambda_2 s_z^2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}(-K|s_z| + ds_z),\end{aligned}$$

y acotando superiormente obtenemos

$$\dot{V} \leq \lambda_2 s_z^2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}(-K + D)|s_z|.$$

Como $K > D$ y $\lambda_2 < 0$, se garantiza que la variable de deslizamiento $s_z(z(t), v(t)) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. La prueba de que las trayectorias convergen a la superficie de deslizamiento en un tiempo finito t_s y la obtención de la cota (4.33) son análogas a las del Teorema (4.3.1).

Para obtener la dinámica en régimen deslizante basta con ver que con $s_z = 0$ obtenemos que $v = z_2$, por lo tanto $\dot{v} = \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$. Ésta dinámica solo depende de z_2 pero en coordenadas originales depende tanto de x_1 como de x_2 , por lo tanto se debe considerar la dinámica de z_1 (dada en (4.7)). Así, considerando el control equivalente $u_{eq} = d$, la dinámica en régimen deslizante está dada por

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2,$$

que se transforma en (4.1) a través de (4.8) y cuyas trayectorias convergen exponencialmente al origen por hipótesis. \square

Ejemplo 6. *En este ejemplo, realizamos una simulación del sistema (2.11) con el controlador del Teorema 4.3.2 en el entorno Simulink, con $k_1 = 4$ y $k_2 = 8$ ($\lambda_2 = -7.46$). La perturbación es constante $d = 2$ y la ganancia del término discontinuo es $K = 3$. El tiempo de convergencia estimado es $t_s \leq 0.51s$. Se obtienen los resultados mostrados en las figuras 4.29-4.32. El diseño de la ley de control y la implementación del controlador para el sistema compensa las perturbaciones presentes en el sistema, lleva a las trayectorias desde una condición inicial hasta la superficie, para después empezar a converger al punto de equilibrio. La cota teórica para el tiempo de convergencia es muy aproximada a los resultados de las simulaciones y cabe recalcar, que el controlador por modos deslizantes dinámico a diferencia del de orden reducido, comienza a conmutar antes de que z_2 llegue a 0 gracias al término integral.*

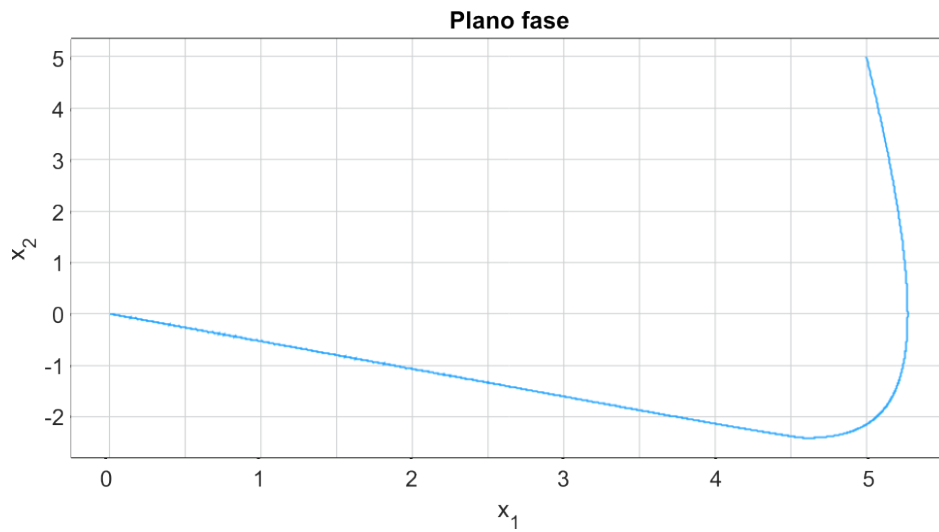


Figura 4.29: Trayectoria del sistema controlado y variable deslizando $s(x, v)$

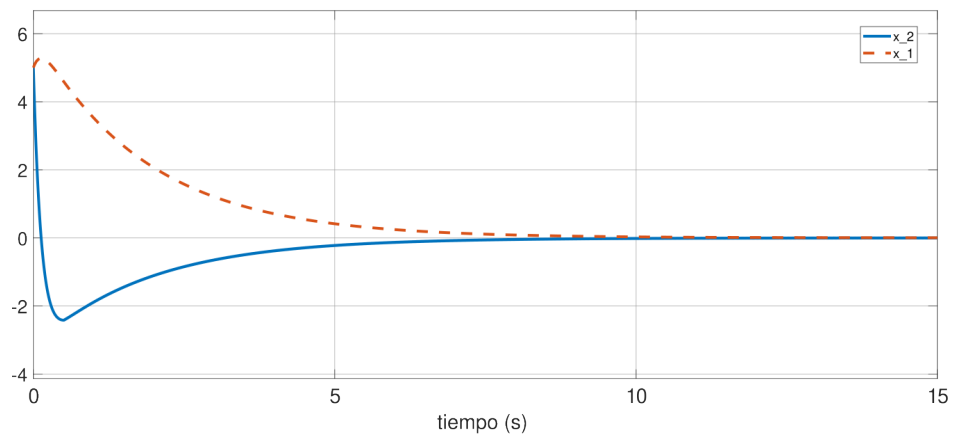


Figura 4.30: Comportamiento temporal de los estados del sistema.

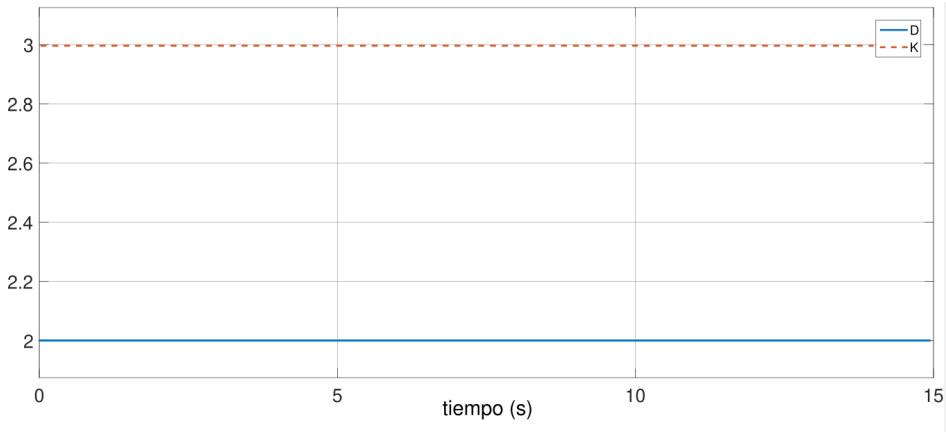


Figura 4.31: Ganancia K y perturbación constante d .

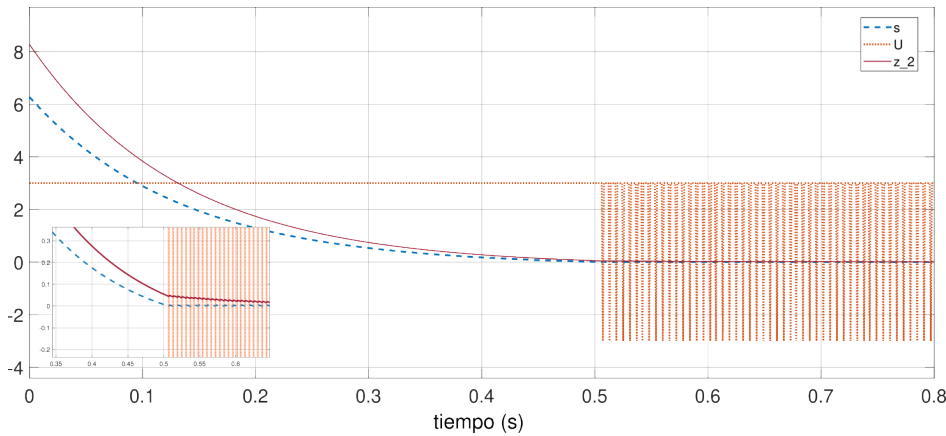


Figura 4.32: Variable deslizante y señal de control.

Observación 7. *El sistema con controlador por modos deslizantes integral o de orden completo, ahora para valores propios reales negativos, conserva la respuesta sobreamortiguada, es decir, se mantiene el comportamiento no oscilatorio de las trayectorias. Además, se mantiene la tasa de convergencia y la estabilidad exponencial del origen (sobre la superficie de deslizamiento), características de desempeño que se añaden al sistema por el controlador lineal diseñado previamente.*

El modo deslizante integral, para ambos casos expuestos, utiliza los espacios propios como base para las superficies deslizantes (la parte real), logrando cumplir con las propiedades deseadas: el control lineal no se modifica, y al igual que en el caso de orden reducido, trabaja junto con el controlador por modos deslizantes para conseguir las propiedades de desempeño y robustez deseadas ante las perturbaciones acotadas. En todos los casos, la superficie deslizante es atractiva, las trayectorias alcanzan la superficie y se garantiza que se establece un modo deslizante para todo $t \geq t_s$, para que sobre él las trayectorias converjan al punto de equilibrio conforme $t \rightarrow \infty$.

A manera de conclusión de la investigación desarrollada en el capítulo, se resalta el uso de una ley de control que consiste en una función de conmutación con ganancia y el uso superficies de deslizamiento adecuadas para diseñar un controlador por modos deslizantes tanto de dinámica reducida como de orden completo para los casos propuestos. El plantearlo así permite no tener términos adicionales en el control y nos permite saber que tan grande debe de ser la constante K , además el que solo sea lo suficientemente grande para compensar a la perturbación ayuda para reducir el chattering en el sistema. El uso de una Función de tipo Lyapunov cuadrática es suficiente para garantizar que las trayectorias convergen a la superficie deslizante ante perturbaciones acotadas. Sin embargo si se diseña una función de Lyapunov para todo el sistema, se puede llegar a obtener propiedades adicionales de robustez ante alguna clase de perturbación desacotada, aún considerando que la ley de control siga sin tener términos adicionales, dicho planteamiento se analiza en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Robustez ante perturbaciones no acotadas

Una de las propiedades más importantes de los sistemas de control es la estabilidad. Una de las aproximaciones más utilizadas para estudiar la estabilidad de los sistemas de control no lineales es la teoría introducida por Alexander Lyapunov. Las funciones de Lyapunov son una herramienta muy útil para demostrar la estabilidad del origen del sistema, lamentablemente, no es fácil construir dichas funciones, y el hecho de no poder obtener una función de Lyapunov no implica la inestabilidad. En la literatura, existen tres importantes métodos para la obtención de funciones de Lyapunov: el método del Gradiente Variable, el método de Zubov y el método de Krasovskii, sin embargo, en muchos casos de sistemas no lineales no es posible aplicarlos. Para los sistemas lineales existen diversos resultados que pueden indicar de manera sencilla la estabilidad, sin embargo la mayoría no se pueden usar para sistemas no lineales.

Por otro lado, el análisis de los sistemas con modos deslizantes (como vimos en capítulos anteriores) no requiere de funciones de Lyapunov para demostrar la estabilidad del origen del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, para otro tipo de desarrollos (como análisis adicionales de robustez), las funciones de Lyapunov son de mucha utilidad. Como ya hemos visto, el controlador por modos deslizantes utiliza discontinuidades, lo que plantea algunas dificultades teóricas y prácticas, como la existencia y unicidad de las soluciones o la inaplicabilidad de la teoría estándar de Lyapunov. En este contexto, la teoría sobre inclusiones diferenciales descrita en el Capítulo 3 y en el Apéndice A es sumamente importante.

En el presente capítulo presentamos la construcción de una función de Lyapunov para el análisis de robustez (ante una clase de perturbaciones no acotadas) de un sistema con control por modos deslizantes.

5.1. Planteamiento del problema

Considere el sistema (2.11), esto es

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 + u + d, \quad (5.1)$$

con las siguientes suposiciones:

- A. los valores propios de la versión nominal de (5.1) (esto es el sistema (4.1)) son reales negativos;
- B. el control u es como en (2.12) con la variable de deslizamiento s dada por (4.21);
- C. la perturbación d es tal que (2.10) se satisface, esto es

$$|d(t, x)| \leq D + D_1|x|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

El problema es determinar, si dada la cota D , existe una ganancia K y una cota D_1 tales que las trayectorias de (5.1) convergen al origen, esto además de verificar si se establece un modo deslizante en $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : s(x) = 0\}$ a pesar de la perturbación no acotada d .

Como ya mencionamos, la idea es realizar un análisis con ayuda de una función de Lyapunov. Para esto, iniciamos utilizando la transformación de coordenadas $z = Q^{-1}x$, dada en (4.8), que nos entrega el sistema transformado

$$\dot{z}_1 = z_1\lambda_1 - K\text{sign}(z_2) + d, \quad \dot{z}_2 = z_2\lambda_2 - K\text{sign}(z_2) + d. \quad (5.2)$$

Éste sistema será el utilizado para el estudio en éste capítulo, considerando la perturbación descrita en 2.10. Para este sistema, elegimos una función candidata $V_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuadrática para verificar la estabilidad en el sentido de Lyapunov, esto es

$$V_0(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2). \quad (5.3)$$

La derivada de (5.3) a lo largo de las trayectorias del sistema (5.2) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(z) &= z_1^2\lambda_1 - K\text{sign}(z_2)z_1 + dz_1 + z_2^2\lambda_2 - K|z_2| + dz_2, \\ \dot{V}_0(z) &\leq z_1^2\lambda_1 + z_2^2\lambda_2 - K|z_2| - K\text{sign}(z_2)z_1 + (|z_1| + |z_2|)(D + \bar{D}_1|z|), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $\bar{D}_1 = D_1\|Q\|$, y $\|Q\|$ denota la norma inducida Euclidiana de la matriz Q . Con lo cual no podemos asegurar que (5.4) sea negativa fuera del origen, ya que existen términos dentro de ella que no tienen un signo definido ($K\text{sign}(z_2)z_1$) o que no pueden ser dominados por algún otro término ($D|z_1|$), por lo cual no se obtienen las condiciones suficientes para asegurar la estabilidad del origen de sistema.

Por lo que una opción para construir una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado (5.2) (que verifique estabilidad del origen y valide la clase de perturbaciones que pueden ser soportadas, esto es, las propiedades adicionales de robustez del controlador por modos deslizantes que se construyó en 4) es modificar V_0 para compensar con algún término adicional los términos ya mencionados.

5.2. Construcción de la función de Lyapunov

Para obtener una versión modificada de V_0 que cumpla con la tarea de verificar la estabilidad, se añade un término V_a a V_0 , obteniendo la función candidata de Lyapunov $V_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V_z(z) = \beta V_0(z) + V_a(z), \quad (5.5)$$

donde β es una constante positiva con condiciones que se discutirán en el análisis. La derivada de (5.5) a lo largo de las trayectorias del sistema (5.2) es

$$\dot{V}_z = \beta(z_1^2 \lambda_1 - K \text{sign}(z_2) z_1 + dz_1 + z_2^2 \lambda_2 - K|z_2| + dz_2) + \dot{V}_a \quad (5.6)$$

Ahora para la construcción de V_a , sabemos que se puede obtener una función de Lyapunov integrando una función definida positiva a lo largo de las trayectorias, metodología presentada en [30]. Siguiendo esta idea y debido a que requerimos que la derivada de la función V_a proporcione términos que nos ayuden a dominar a los términos de signo indefinido en (5.6), podemos expresarla como

$$\dot{V}_a = -W(z),$$

donde $W(z)$ tiene que ser una función no negativa. Así, integrando de 0 a ∞ obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_a(z(t)) - V_a(z(0)) = - \int_0^\infty W(z(\tau)) d\tau. \quad (5.7)$$

Como queremos, z tiene que converger a cero cuando el tiempo tiende hacia infinito, entonces $V_a(z(t)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que podemos reescribir a (5.7) de la siguiente manera

$$V_a(z(0)) = \int_0^\infty W(z(\tau)) d\tau.$$

Si $\phi = \phi(t; z)$ denota la solución del sistema (5.2) para una condición inicial z , entonces V_a se puede escribirse como

$$V_a(z) = \int_0^\infty W(\phi(\tau; z)) d\tau. \quad (5.8)$$

La prueba de Masera del teorema converso de Lyapunov construye la función W tal que la integral converja y se obtenga la función de Lyapunov. En general, el problema es que no conocemos a W ni a ϕ . Sin embargo, W puede ser propuesta ya que se sabe que debe ser definida positiva (no negativa en nuestro caso). Por otro lado, la ventaja del sistema transformado (5.2) es que se encuentra desacoplado, por lo que para $d \equiv 0$ conocemos las soluciones explícitas y entonces podemos proponer una función $W(\phi(\tau; z))$.

Las soluciones del sistema desacoplado, pueden ser calculadas en diferentes regiones que dependen de la variable de deslizamiento, esto es para valores de la variable de

deslizamiento z_2 mayores, menores e iguales a cero, dado que el controlador (2.12) es constante en cada caso. Así, para $d \equiv 0$, tenemos que

$$\phi_i(\tau; z) = \begin{cases} z_i e^{\lambda_i \tau} - \frac{K e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_i} + \frac{K}{\lambda_i} = \left(z_i - \frac{K}{\lambda_i}\right) e^{\lambda_i \tau} + \frac{K}{\lambda_i}, & \text{si } z_2 > 0; \\ z_i e^{\lambda_i \tau} + \frac{K e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_i} - \frac{K}{\lambda_i} = \left(z_i + \frac{K}{\lambda_i}\right) e^{\lambda_i \tau} - \frac{K}{\lambda_i}, & \text{si } z_2 < 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

donde $i = 1, 2$. Dado que, en ausencia de perturbación, la variable de deslizamiento z_2 se hace cero en un tiempo finito, entonces $\phi_2(\tau_1; z) = 0$ para algún tiempo finito τ_1 . Así, de (5.9),

$$\phi_2(\tau_1; z) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda_2 \tau_1} \left(\frac{z_2 \lambda_2 - K}{\lambda_2} \right) = -\frac{K}{\lambda_2},$$

si $z_2 > 0$, y de manera similar

$$\phi_2(\tau_1; z) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda_2 \tau_1} \left(\frac{z_2 \lambda_2 + K}{\lambda_2} \right) = \frac{K}{\lambda_2}.$$

si $z_2 < 0$, por lo que despejando a τ_1 encontramos el tiempo finito en el que z_2 llega a cero, es decir

$$\tau_1 = \begin{cases} -\ln \left(\frac{-z_2 \lambda_2 + K}{K} \right) \frac{1}{\lambda_2}, & \text{si } z_2 > 0, \\ -\ln \left(\frac{z_2 \lambda_2 + K}{K} \right) \frac{1}{\lambda_2}, & \text{si } z_2 < 0, \end{cases}$$

por lo que τ_1 para todo el dominio es

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{-|z_2| \lambda_2 + K}{K} \right). \quad (5.10)$$

De (5.4) podemos ver que requerimos un término negativo en z_1 para compensar los términos $-K \text{sign}(z_2) z_1 + D|z_1| = (-K \text{sign}(z_1 z_2) + D)|z_1|$, por lo que proponemos a $\dot{V}_a = -\gamma|z_1|$ con $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Con esto, tenemos (de (5.8)) que

$$V_a(z) = \gamma \int_0^t |\phi_1(\tau; z)| d\tau, \quad (5.11)$$

donde ϕ_1 es la solución de la ecuación del sistema nominal, y la integral es evaluada hasta el tiempo de convergencia $t = \tau_1$ dado en (5.10). Esta integral tiene que ser calculada en todo \mathbb{R}^2 que dividiremos en los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} Z^0 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \zeta(z) z_1 < 0\} \\ Z^+ &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \zeta(z) \geq 0, z_1 \geq 0\} \\ Z^- &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \zeta(z) \leq 0, z_1 \leq 0\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde $\zeta(z) = z_1 + \frac{K|z_2|^0}{\lambda_1} \left(\frac{1}{v} - 1\right)$. La razón de las regiones Z^+ y Z^- es el cambio de signo de z_1 y la de la región Z^0 es explicada en el Apéndice C, esto se puede observar mejor en la Fig. 5.1.

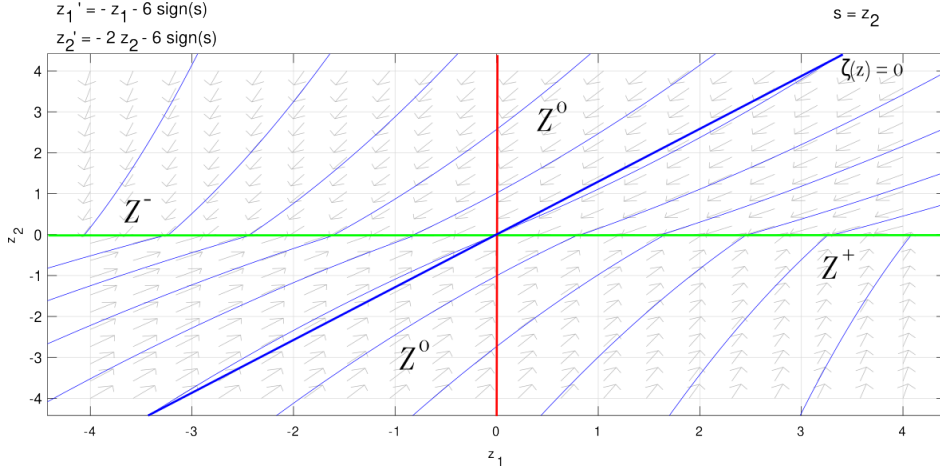


Figura 5.1: Regiones en \mathbb{R}^2 .

Así, (usando la notación $\text{sign}(z) = [z]^0$) tenemos que para $z \in Z^+$,

$$\begin{aligned} V_a(z) &= \gamma \int_0^{\tau_1} \left| \left(z_1 - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \right) e^{\lambda_1 \tau} + \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \right| d\tau \\ &= \gamma \left[\frac{1}{\lambda_1} \left(z_1 - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \right) (e^{\lambda_1 \tau_1} - 1) + \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \tau_1 \right]. \end{aligned}$$

De manera similar se puede realizar la integral para $z \in Z^-$, por lo que la función complementaria V_a que se obtiene al sustituir τ_1 es

$$V_a(z) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\lambda_1} \left[\left(z_1 - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \right) \left[\left(\frac{K}{-|z_2|\lambda_2 + K} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} - 1 \right] - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_2} \ln \left(\frac{-|z_2|\lambda_2 + K}{K} \right) \right], & z \in Z^+, \\ \frac{-\gamma}{\lambda_1} \left[\left(z_1 - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \right) \left[\left(\frac{K}{-|z_2|\lambda_2 + K} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} - 1 \right] - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_2} \ln \left(\frac{-|z_2|\lambda_2 + K}{K} \right) \right], & z \in Z^-. \end{cases}$$

El cálculo de la función en el conjunto Z^0 es análogo. Si definimos

$$v = \left(\frac{K}{K - \lambda_2 |z_2|} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad v_1 = \frac{K}{K - \lambda_1 [z_2]^0 z_1},$$

entonces podemos reescribir a V_a como sigue

$$V_a(z) = \begin{cases} \frac{\gamma K [z_2]^0}{\lambda_1^2} \left[\frac{1-v}{v_1} + \ln(v) \right], & \text{si } z \in Z^+, \\ -\frac{\gamma K [z_2]^0}{\lambda_1^2} \left[\frac{1-v}{v_1} + \ln(v) \right], & \text{si } z \in Z^-, \\ \frac{\gamma K}{\lambda_1^2} \left[\frac{v-2v_1+1}{v_1} + \ln \left(\frac{v_1^2}{v} \right) \right], & \text{si } z \in Z^0, \end{cases} \quad (5.13)$$

Es importante notar que $v_1 = \frac{K}{K - \lambda_1 |z_1|}$ para toda $z \in Z^0$. Observe que, de acuerdo con [30], por construcción V_a es una función no negativa, además de continua. Una gráfica de ejemplo se puede ver en la Figura 5.2.

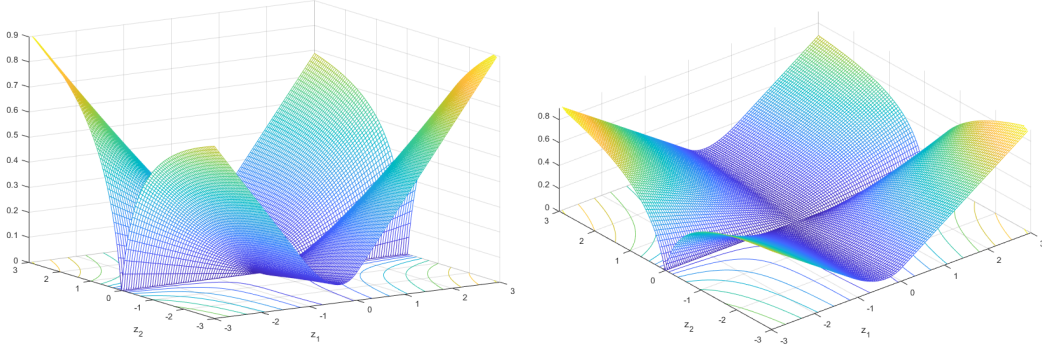


Figura 5.2: Función V_a .

5.3. Análisis de robustez

Una vez calculado el término V_a para la nueva función candidata de Lyapunov V_z dada en (5.5), se puede proceder a tomar su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado y verificar si ésta es negativa fuera del origen a pesar de las perturbaciones. Así, el resultado que se verifica en esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1. *Considere el sistema (5.2) en lazo cerrado con el controlador (2.12). Suponga que los valores propios de (5.1) son reales, negativos y distintos, y que la variable de deslizamiento es*

$$s = \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2 - 4k_1}}x_1 + \frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_1}}{2\sqrt{k_2^2 - 4k_1}}x_2. \quad (5.14)$$

Si

$$K > D \left(2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 + 4\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right),$$

entonces existe D_1 suficientemente pequeña tal que el origen del sistema es asintóticamente estable. Además, si

$$\gamma \in \left[\frac{K\beta(K+D)}{K-3D}, \frac{K\beta(K-D)\lambda_1}{2\lambda_2 D} \right],$$

entonces para toda $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ (5.5) es una función de Lyapunov que verifica estabilidad asintótica del origen de (5.2).

Demostración. El teorema se demuestra utilizando el sistema transformado a las coordenadas z . Para encontrar las condiciones de robustez, que brinda la función candidata de Lyapunov, primero tomamos la derivada¹ de V_a a lo largo de las trayectorias de

¹Vea la Observación 8 respecto a la diferenciabilidad de V_a en la Página 59.

(5.2) (se presenta el caso para $z \in Z^+$, el resto de los casos es análogo), así,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_a &= \gamma \left[(v-1)\dot{z}_1 + \left(z_1 - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{K}{K-|z_2|\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1} \frac{K\lambda_2}{(K-|z_2|\lambda_2)^2} \dot{z}_2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_2} \left(\frac{-\lambda_2}{K-|z_2|\lambda_2} \right) \dot{z}_2 \right] \\
&= \gamma \left[-z_1 - \frac{d}{\lambda_1}(v-1) + \left(z_1 - \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \right) \frac{d}{K-|z_2|\lambda_2} v + \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \frac{d}{K-|z_2|\lambda_2} \right] \\
&= \gamma \left[-z_1 + \frac{d}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} |z_2|\lambda_2(1-v)[z_1]^0 + \frac{d}{K-|z_2|\lambda_2} v z_1 [z_2]^0 \right].
\end{aligned}$$

De manera análoga se realiza el procedimiento para $z \in Z^-$ y $z \in Z^0$, con lo que obtenemos

$$\dot{V}_a = \begin{cases} \gamma \left[-z_1 + \frac{d}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} [|z_2|\lambda_2(1-v)[z_1]^0 + \lambda_1[z_2]^0 z_1 v] \right], & z \in Z^+, \\ \gamma \left[z_1 - \frac{d}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} [|z_2|\lambda_2(1-v)[z_1]^0 + \lambda_1[z_2]^0 z_1 v] \right], & z \in Z^-, \\ \gamma \left[-|z_1| - \frac{d(K-\lambda_1|z_1|)}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} (v_1 - v) + \frac{d}{\lambda_1} (2v_1 - v - 1) \right], & z \in Z^0. \end{cases}$$

Note que para $z \in Z^- \cup Z^+$ podemos reescribir

$$\dot{V}_a = -\gamma|z_1| + \frac{\gamma(|z_2|\lambda_2(1-v) + \lambda_1[z_2]^0 z_1 v)}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} [z_1]^0 d,$$

por lo que, para $z \in Z^- \cup Z^+$, la derivada de la función candidata de Lyapunov V_z está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_z(z) &= \beta(z_1^2 \lambda_1 - K[z_2]^0 z_1 + dz_1 + z_2^2 \lambda_2 - K|z_2| + dz_2) - \gamma|z_1| \\
&\quad + \frac{\gamma(|z_2|\lambda_2(1-v) + \lambda_1[z_2]^0 z_1 v)}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} [z_1]^0 d.
\end{aligned}$$

Si se considera la perturbacion descrita en (2.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}_z(z) &= \beta(z_1^2 \lambda_1 - K[z_2]^0 z_1 + d(t, Qz) z_1 + z_2^2 \lambda_2 - K|z_2| + d(t, Qz) z_2) - \gamma|z_1| \\
&\quad + \frac{\gamma(|z_2|\lambda_2(1-v) + \lambda_1[z_2]^0 z_1 v)}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} [z_1]^0 d(t, Qz), \\
&\leq \beta(z_1^2 \lambda_1 + K|z_1| + (D + \bar{D}_1|z|)|z_1| + z_2^2 \lambda_2 - K|z_2| + (D + \bar{D}_1|z|)|z_2|) + \\
&\quad - \gamma|z_1| + \frac{\gamma(|z_2|\lambda_2(1-v) + \lambda_1|z_1|v)}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} (D + \bar{D}_1|z|), \\
&\leq \beta(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2) + \left[\beta(|z_1| + |z_2|) + \frac{\gamma\lambda_2(1-v)|z_2|}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} + \frac{\gamma v|z_1|}{K-|z_2|\lambda_2} \right] \bar{D}_1|z| + \\
&\quad + \bar{\rho}_1|z_2| + \bar{\rho}_2|z_1|,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_1 &= \left[-\beta K + \beta D + \frac{\lambda_2(1-v)\gamma}{\lambda_1(K-|z_2|\lambda_2)} D \right] \\
\bar{\rho}_2 &= \left[\beta K + \beta D - \gamma + \frac{v\gamma}{K-|z_2|\lambda_2} D \right].
\end{aligned}$$

Utilizando el Lema 1 tenemos que

$$\dot{V}_z(z) \leq \beta(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2) + \left[\beta(|z_1| + |z_2|) + \frac{\gamma \lambda_2}{\lambda_1 K} |z_2| + \frac{\gamma}{K} |z_1| \right] \bar{D}_1 |z| + \rho_1 |z_2| + \rho_2 |z_1|,$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\beta K + \beta D + \frac{\lambda_2 \gamma}{\lambda_1 K} D \\ \rho_2 &= -\gamma + \beta K + \beta D + \frac{\gamma}{K} D. \end{aligned}$$

Ahora, para $z \in Z^0$ obtenemos de manera análoga que

$$\begin{aligned} \dot{V}_z(z) &\leq \beta(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2) + \bar{\eta}_1 |z_1| + \bar{\eta}_2 |z_2| + \\ &+ \left[\beta(|z_1| + |z_2|) + \frac{\gamma}{\lambda_1} \left(2v_1 - v - 1 + \frac{v - v_1}{v_1} \frac{K}{K - |z_2| \lambda_2} \right) \right] \bar{D}_1 |z|, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= -\gamma + \beta K + \left(\beta + \frac{\gamma}{\lambda_1} \left(2v_1 - v - 1 + \frac{v - v_1}{v_1} \frac{K}{K - |z_2| \lambda_2} \right) \right) D, \\ \bar{\eta}_2 &= -\beta K + \left(\beta + \frac{\gamma}{\lambda_1} \left(2v_1 - v - 1 + \frac{v - v_1}{v_1} \frac{K}{K - |z_2| \lambda_2} \right) \right) D. \end{aligned}$$

Nuevamente utilizando el Lema 1 tenemos que

$$\dot{V}_z(z) \leq \beta(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2) + \left[\beta(|z_1| + |z_2|) + \frac{\gamma}{\lambda_1 K} (3\lambda_1 |z_1| + 2\lambda_2 |z_2|) \right] \bar{D}_1 |z| + \eta_1 |z_1| + \eta_2 |z_2|,$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\gamma + \beta K + \left(\beta + \frac{\gamma}{K} 3 \right) D \\ \eta_2 &= -\beta K + \left(\beta + \frac{\gamma}{\lambda_1 K} 2\lambda_2 \right) D. \end{aligned}$$

Nos interesa verificar que ρ_1 , ρ_2 , η_1 y η_2 son negativas. Note que es suficiente verificar que η_1 y η_2 son negativas, esto es equivalente a

$$\gamma > \frac{K\beta(K + D)}{K - 3D}, \quad \frac{K\beta(K - D)\lambda_1}{2\lambda_2 D} > \gamma,$$

de donde podemos resolver para K obteniendo que

$$K > D \left(2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 + 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right).$$

Así, si K satisface esta desigualdad y γ es tal que

$$\gamma \in \left[\frac{K\beta(K + D)}{K - 3D}, \frac{K\beta(K - D)\lambda_1}{2\lambda_2 D} \right],$$

se garantiza que ρ_1 , ρ_2 , η_1 y η_2 son negativas.

Ahora analizaremos la expresión $\beta(|z_1| + |z_2|) + \frac{\gamma}{\lambda_1 K} (3\lambda_1|z_1| + 2\lambda_2|z_2|)$. Observe que

$$\beta(|z_1| + |z_2|) + \frac{\gamma}{\lambda_1 K} (3\lambda_1|z_1| + 2\lambda_2|z_2|) \leq \sqrt{2}\beta|z| + 3\sqrt{2}\frac{\lambda_2\gamma}{\lambda_1 K}|z|,$$

por lo tanto

$$\dot{V}_z(z) \leq \beta(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2) + \left[\sqrt{2}\beta|z| + 3\sqrt{2}\frac{\lambda_2\gamma}{\lambda_1 K}|z| \right] \bar{D}_1|z| + \eta_1|z_1| + \eta_2|z_2|,$$

$$\dot{V}_z(z) \leq \beta\lambda_1|z|^2 + \sqrt{2} \left[\beta + 3\frac{\lambda_2\gamma}{\lambda_1 K} \right] \bar{D}_1|z|^2 + \eta_1|z_1| + \eta_2|z_2|,$$

$$\dot{V}_z(z) \leq \left(\beta\lambda_1 + \sqrt{2} \left[\beta + 3\frac{\lambda_2\gamma}{\lambda_1 K} \right] \bar{D}_1 \right) |z|^2 + \eta_1|z_1| + \eta_2|z_2|.$$

Dado que $\lambda_1 < 0$ y $\eta_i < 0$ con $i = 1, 2$, es claro que existe \bar{D}_1 suficientemente pequeña tal que $\dot{V}_z(z)$ es negativa definida. Una estimación para esta perturbación es la siguiente (sin embargo, no sabemos que tan conservadora puede ser):

$$\bar{D}_1 < \frac{\lambda_1^2 \beta K}{\sqrt{2}(\beta K|\lambda_1| + 3\gamma|\lambda_2|)}.$$

Un ejemplo de la Función de Lyapunov construida se puede observar en la Fig. 5.3.

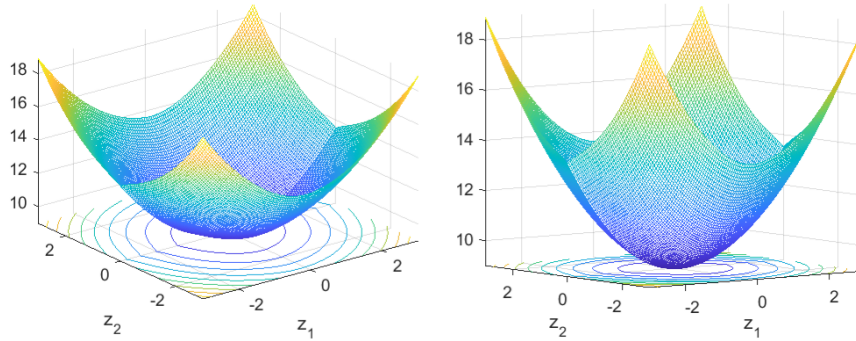


Figura 5.3: Gráfica de la Función de Lyapunov V_z .

Observación 8. Si $\dot{z} \in F(t, z)$ denota la inclusión diferencial asociada a (5.2) (que denotamos con $\dot{z} = f(t, z)$), entonces para usar el Teorema 3.2.3 en la demostración del Teorema 5.3.1 se tiene que calcular $D_{F(t,z)}V_z(z)$. Sin embargo, note que la función V_0 es diferenciable en todo el dominio y que V_a es diferenciable excepto en el conjunto $\{z \in \mathbb{R}^2 : z_2 = 0\}$ (que coincide con el conjunto de discontinuidad del control u). Así, de acuerdo con la Observación 3, $D_{F(t,z)}V_z(z) = \left\{ \frac{\partial V_z(z)}{\partial z} f(t, z) \right\}$ para toda z tal que $z_2 \neq 0$, esto implica que $D_{F(t,z)}V_z(z)$ y la derivada contingente de $V_z(z(t))$ coinciden en este dominio. De este razonamiento, de acuerdo con [26], tenemos que para el caso $z_2 = 0$,

$$\sup\{D_{F(t,z)}V_z(z)\} = \max \left\{ \sup_d \lim_{t \downarrow T} \dot{V}_z(z(t)), \sup_d \lim_{t \uparrow T} \dot{V}_z(z(t)) \right\},$$

donde T es tal que $z_2(T) = 0$. Note que las trayectorias del sistema solo pueden converger al conjunto dado por $z_2 = 0$ a través del conjunto $Z^- \cup Z^+$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow T} \dot{V}_z(z(t)) &= \beta(\bar{z}_1^2 \lambda_1 - K[z_2]^0 \bar{z}_1 + \bar{d} \bar{z}_1) - \gamma |\bar{z}_1| + \frac{\gamma(\lambda_1 [z_2]^0 \bar{z}_1)}{\lambda_1 K} [\bar{z}_1]^0 \bar{d}, \\ &= \beta(\bar{z}_1^2 \lambda_1 - K[z_2]^0 \bar{z}_1 + \bar{d} \bar{z}_1) - \gamma |\bar{z}_1| + \frac{\gamma}{K} [z_2]^0 |\bar{z}_1| \bar{d},\end{aligned}$$

donde $\bar{z}_1 = \lim_{t \rightarrow T} z_1(t)$ y $\bar{d} = \lim_{t \rightarrow T} d(t, z(t))$. Además,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow T} \dot{V}_z(z(t)) &\leq \beta(\bar{z}_1^2 \lambda_1 + K |\bar{z}_1| + |\bar{d}| |\bar{z}_1|) - \gamma |\bar{z}_1| + \frac{\gamma}{K} |\bar{z}_1| |\bar{d}|, \\ &\leq (\beta \lambda_1 + \beta \bar{D}_1 + \frac{\gamma}{K} \bar{D}_1) \bar{z}_1^2 + (\beta K + \beta \bar{D}_1 - \frac{\gamma}{K} (K - D)) |\bar{z}_1|, \\ &\leq (\beta \lambda_1 + \beta D + \frac{\gamma}{K} \bar{D}_1) \bar{z}_1^2 + \rho_2 |\bar{z}_1|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $z_2 = 0$, $\sup\{D_{F(t,z)} V_z(z)\}$ está acotado por la expresión $(\beta \lambda_1 + \beta D + \frac{\gamma}{K} \bar{D}_1) \bar{z}_1^2 + \rho_2 |\bar{z}_1|$ que (de acuerdo con las suposiciones del teorema) es negativa para toda $\bar{z}_1 \neq 0$. □

Dadas todas las condiciones encontradas, se verifica la estabilidad asintótica del origen de nuestro sistema, donde las trayectorias convergen al punto de equilibrio. Adicionalmente se puede comprobar que las trayectorias del sistema entran en régimen deslizante.

Teorema 5.3.2. *Considere el sistema (5.2) con las suposiciones del Teorema 5.3.1. Existe un tiempo finito $T \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que se establece un régimen deslizante sobre la superficie dada por $s = 0$.*

Demostración. Para demostrar el teorema se propone utilizar la función candidata tipo Lyapunov cuadrática dependiente de s (donde $s = z_2$, recordando que es el subespacio propio rápido del sistema en cuestión). Sea $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática dada por

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2. \tag{5.15}$$

Derivando a lo largo de las trayectorias del sistema

$$\begin{aligned}\dot{V} &= z_2 \dot{z}_2, \\ &= z_2(\lambda_2 z_2 - K[z_2]^0 + d), \\ &= \lambda_2 z_2^2 - K|z_2| + dz_2, \\ &\leq \lambda_2 z_2^2 - (K - |d|)|z_2|.\end{aligned}$$

Como sabemos λ_2 es uno de los valores propios que pertenece a los reales negativos, además, gracias a la función de Lyapunov 5.5, sabemos $|z(t)| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Así, existe T suficientemente grande tal que las perturbaciones d quedan acotadas por K . De modo que existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para todo $t \geq T$ se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{V}_z &\leq (-K + |d|)|z_2|, \\ &\leq -c|z_2|, \\ &\leq -cV^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De donde se deduce (como en los capítulos anteriores) la existencia del régimen deslizante. \square

Ejemplo 7. Construyendo el sistema (5.1) en el entorno Simulink con los parámetros $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, obtenemos los valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$ y una perturbación dependientes de los estados $D_1 = x_1 + 2x_2$ se realizan dos simulaciones (con Euler explícito como método de integración, y un paso de 0.01s),

- la primera para una perturbación constante $D = 5$, con la estimación del tiempo de convergencia $t_s \leq 0.55s$ (estimación calculada con (3.12));
- la segunda para una perturbación sinusoidal, con una frecuencia de 5rad/s y una amplitud de 3, se calcula la estimación del tiempo $t_s \leq 0.5s$,

se elige $K = 17.84$ considerando la condición dada en 5.3.1.

Para el caso con la perturbación constante, en la Fig. 5.4 está la gráfica x_1 contra x_2 o plano fase, se parte de las condiciones iniciales establecidas (5, 5) y donde la curva converge al punto de equilibrio del sistema. En el tiempo calculado t_s , las trayectorias alcanzan a llegar a la superficie y converger al punto de equilibrio. En la Fig. 5.5 están representada la respuesta de las variables de estado x_1, x_2 , en un tiempo de convergencia de aproximadamente 0.55s, se alcanza la superficie de deslizamiento y posteriormente las trayectorias comienzan a converger hacia el punto de equilibrio. En la Fig. 5.6 se muestra la señal de control y la superficie de deslizamiento, donde una vez mas podemos observar que cuando $t = t_s \approx 0.55 s$, entonces $s(t) = 0$ y cuando se alcanza esta condición, la señal de control comienza a conmutar. Por último se observa la perturbación y la ganancia K en la Fig. 5.7, que satisfacen el Teorema 5.3.1 .

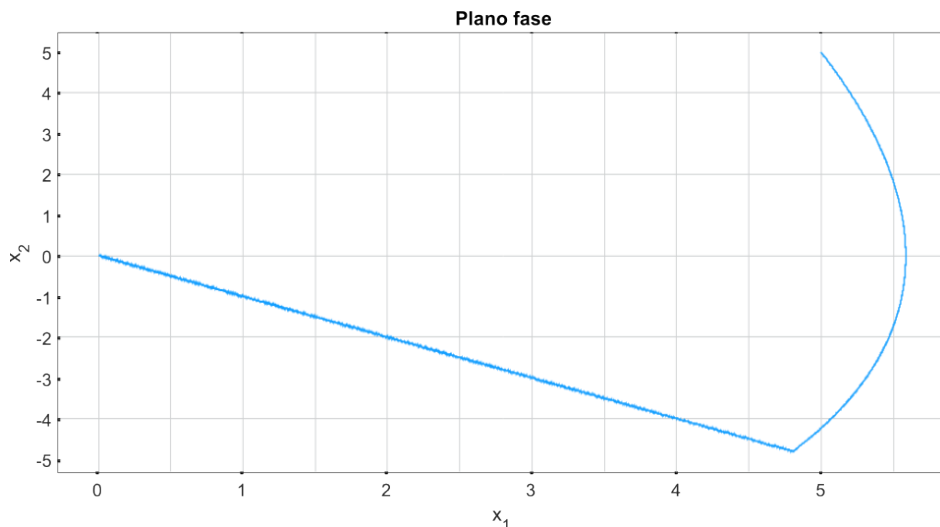


Figura 5.4: Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$.

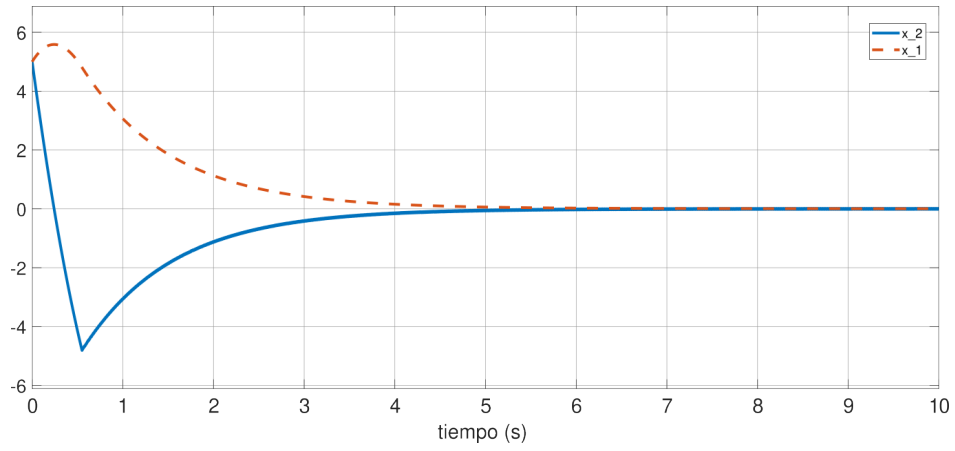


Figura 5.5: Comportamiento de señales en el sistema con SMC.

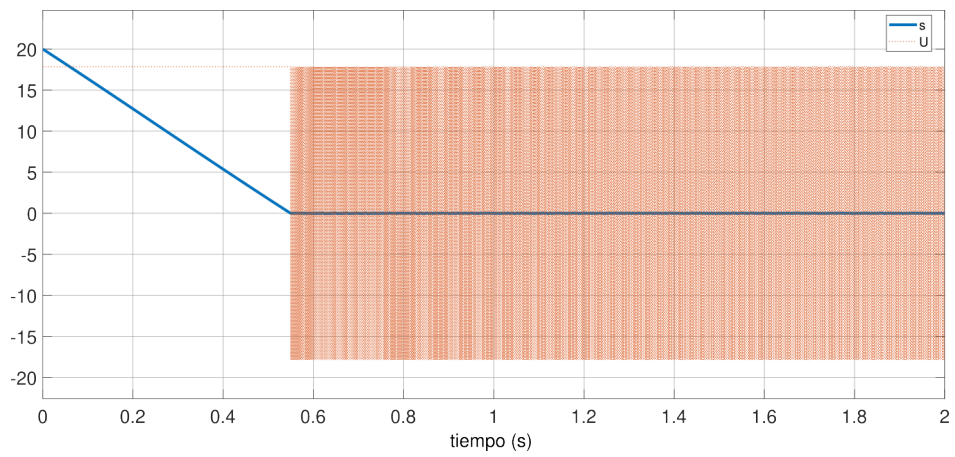


Figura 5.6: Superficie deslizando y señal de control

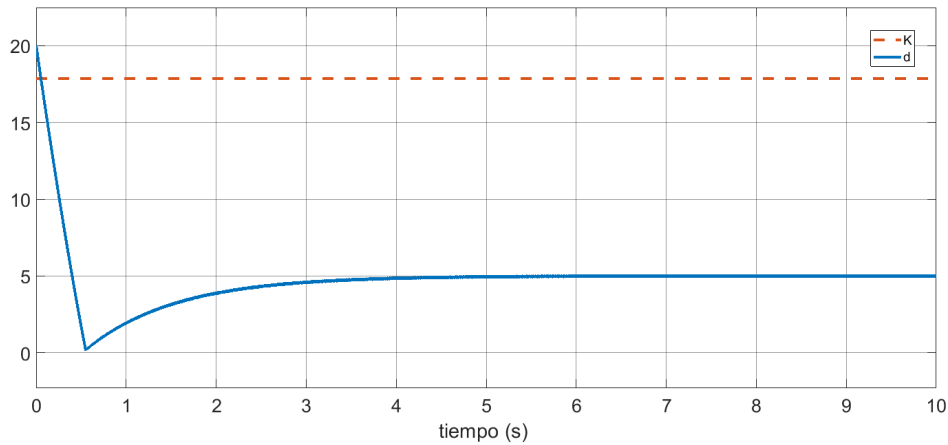


Figura 5.7: Ganancia K y perturbación presente en el sistema

Para la segunda simulación, las señales muestran el siguiente comportamiento. De manera similar a los resultados mostrados anteriormente, en la Fig. 5.8 se muestra el plano fase, donde se observa que las trayectorias alcanzan la superficie, se deslizan sobre ella y posteriormente convergen al punto de equilibrio. En la Fig. 5.9 se observa que las señales x_1, x_2 convergen con un poco más de rapidez, cuando se cumple el tiempo de convergencia $t_s \leq 0.5s$, se alcanza la superficie y comienzan a converger hacia el punto de equilibrio. En la Fig. 5.10 se muestra la señal de control y la superficie de deslizamiento, cuando $t \geq 0.5s$, entonces $s(t) = 0$ y cuando se alcanza esta condición la señal de control comienza a conmutar, razón por la cual el efecto de la perturbación sinusoidal no es notorio en las trayectorias del sistema (como en el caso de ejemplos anteriores para este tipo de perturbación), ya que el controlador compensa de manera exacta, instantes antes que D comience a oscilar, por lo que se elimina todo el efecto que esta cause. Por último en la Fig. 5.9 se observan la perturbación y la ganancia K , elegidas nuevamente con las condiciones dadas en 5.3.1.

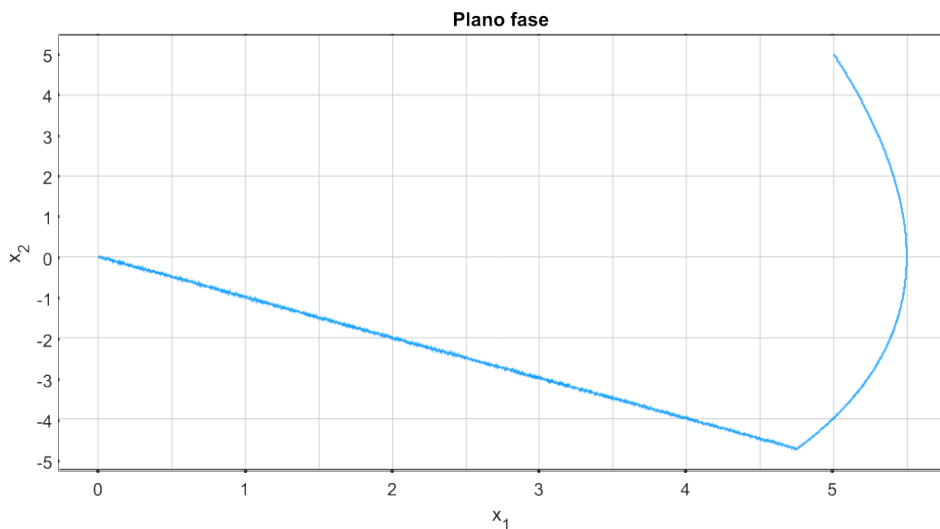


Figura 5.8: Trayectoria del sistema controlado y superficie deslizante $s = 0$.

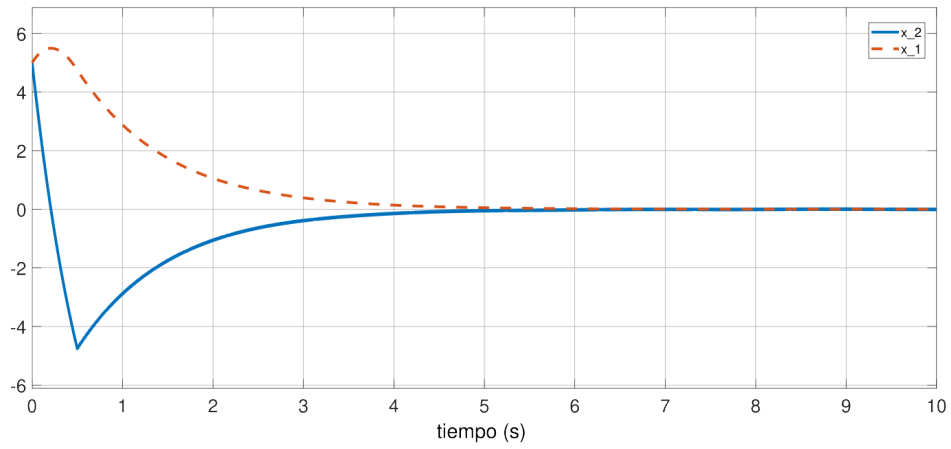


Figura 5.9: Comportamiento de señales en el sistema con SMC

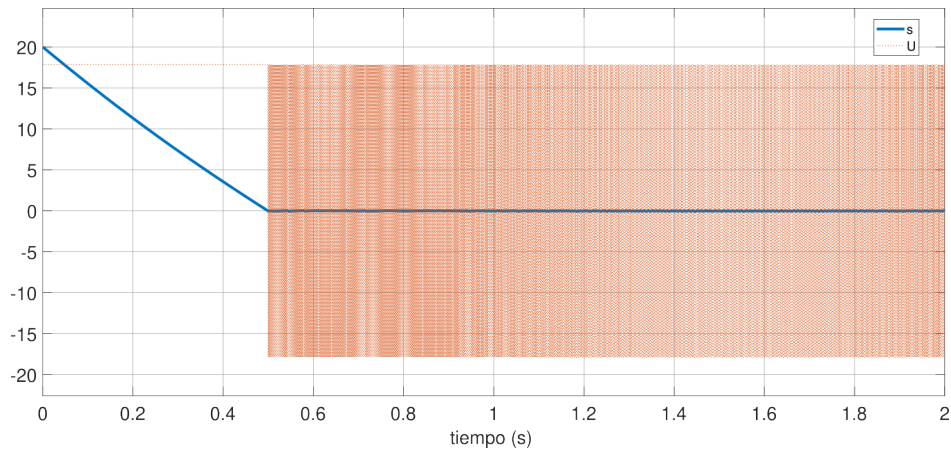


Figura 5.10: Superficie deslizante y señal de control

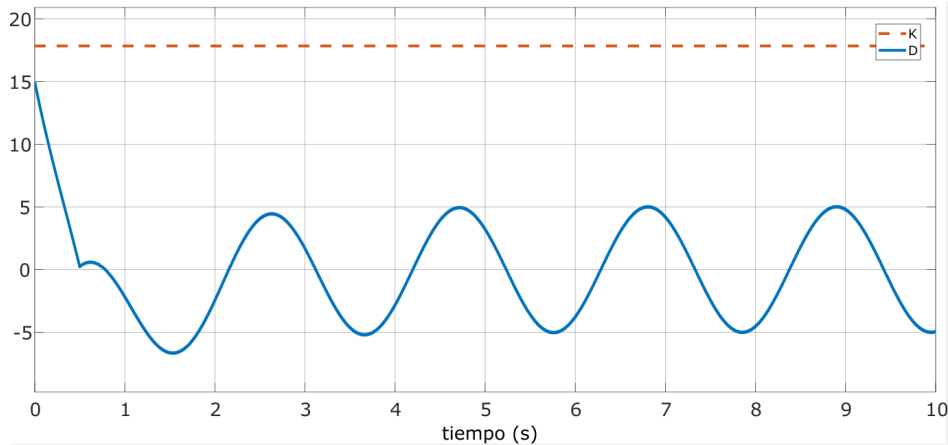


Figura 5.11: Ganancia K y perturbación presente en el sistema

A diferencia de los controladores y los casos presentados para sistemas con comportamiento de nodo estable en su origen, en el Capítulo 4, la función de Lyapunov V_z verifica estabilidad asintótica del punto de equilibrio ante perturbaciones que dependen linealmente de ambos estados, además podemos verificar que las trayectorias entran en modo deslizante, para que después converjan al origen. Dado que para este caso, el controlador por modos deslizantes es de orden reducido, es suficiente diseñar el término V_a solo con una de las soluciones del sistema (como se muestra en la demostración) y se siga cumpliendo con la función de compensar las perturbaciones exactamente una vez que las trayectorias alcancen a $s = 0$ y el sistema entre en régimen deslizante.

Recordemos que el sistema transformado es una manera más sencilla de realizar el análisis e implementar el controlador, sin embargo, nuestro sistema original no sufre modificaciones, por lo que las propiedades del controlador lineal que éste posee también se mantienen y trabaja junto con el controlador por modos deslizantes diseñado encontrando propiedades adicionales de robustez y el cual también conserva las propiedades y ventajas encontradas del control lineal, esto está implícito debido al diseño del controlador por modos deslizantes de orden reducido que puede verse en la Sección 4.2).

Capítulo 6

Conclusiones

El controlador por modos deslizantes resulta ser una herramienta muy útil cuando se requiere añadir robustez a algún tipo de sistema ante cierta clase de perturbaciones e incertidumbre, pero como ya se mencionó a lo largo del trabajo, también tiene ciertas desventajas. El poder implementar un controlador lineal a un sistema dinámico añade características muy ventajosas, ya que podemos diseñar los parámetros lineales tal que el origen sea estable y las trayectorias tengan un comportamiento deseado. Sin embargo, el control lineal no garantiza insensibilidad ante perturbaciones, por lo que en este trabajo, consideramos un sistema con un controlador lineal para seguir explotando o aprovechando algunas de las ventajas que nos da, pero volviéndolo insensible ante perturbaciones acotadas e incertidumbre del modelo en algún tiempo finito con la ayuda de un controlador por modos deslizantes.

Como ya se mencionó, uno de los mayores retos es diseñar la ley de control discontinua y la variable de deslizamiento cuando el sistema ya tiene algún controlador con un tipo de comportamiento deseado, pues éste puede ser modificado o eliminado con el control por modos deslizantes. En este trabajo, nos dimos a la tarea de diseñar una ley de control y una superficie de deslizamiento que mantuviera ciertas características del controlador lineal. Se utilizan los espacios propios del sistema lineal (de cada caso en el que el origen es exponencialmente estable) para ayudarnos a diseñar la superficie. Si el punto de equilibrio del sistema es un nodo estable, la superficie de deslizamiento para un controlador por modos deslizantes de orden reducido se elige como el subespacio propio dominante del caso nominal, por lo cual, la variable de deslizamiento dependerá del valor propio rápido del sistema, debido a que su dinámica se reduce rápidamente; mientras que, para un modo deslizante de orden completo, además de la variable de deslizamiento, la nueva función v se diseñan con éste mismo valor propio. En éste último caso, como se explicó, el no conocer la condición inicial de la perturbación provoca que el controlador por modos deslizantes integral tenga una fase de alcance. Por otro lado, si el punto de equilibrio del sistema, tiene el comportamiento de un foco estable, es necesario diseñar un controlador por modos deslizante de orden completo, para mantener las oscilaciones de las trayectorias, aquí la variable de deslizamiento y la función v , se diseñan considerando la parte real del subespacio propio correspondiente al valor propio rápido.

Adicionalmente, restringimos la ley de control por modos deslizantes a una función de conmutación con ganancia K , y utilizando una función de tipo Lyapunov cuadrática $V = \frac{1}{2}s^2$, encontramos condiciones suficientes con las que podemos asegurar que las trayectorias alcanzan a la superficie de deslizamiento en tiempo finito eliminando por completo el efecto de las perturbaciones acotadas. Con esto, no solo se mantuvieron características proporcionadas por el controlador lineal (como la convergencia exponencial al origen y el tipo de respuesta de las variables de estado), sino que se añadió robustez permitiendo elegir K tal que solo sea lo suficientemente grande para compensar a la perturbación en cada uno de los casos estudiados. Ésto último, ayuda a que se disminuya la amplitud del chattering en la implementación, que es uno de los mayores problemas en esta clase de controladores (recordemos que el chattering está en función de la magnitud de la acción discontinua). Finalmente, el que las superficies de deslizamiento se elijan como espacios propios, da como resultado inmediato que una vez que las trayectorias alcanzan la superficie en tiempo finito y se establezca el régimen deslizante, éstas convergerán al origen exponencialmente.

En la segunda parte del trabajo, se diseñó una Función de Lyapunov que verificó la estabilidad asintótica del origen del sistema ante perturbaciones dependientes de los estados, las cuales no podían ser estudiadas con la técnica de análisis del control por modos deslizantes de los capítulos previos. Uno de los mayores retos, es que la señal de control del modo deslizante no es continua, teniendo una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo, por lo que no se podía utilizar la teoría estándar de ecuaciones diferenciales y el uso de la teoría de inclusiones diferenciales fue necesaria. Con esa teoría, fue posible el análisis utilizando una función de Lyapunov que se diseñó como la suma de dos funciones, una de ellas es diferenciable en todo el dominio y la segunda diferenciable excepto en el conjunto de discontinuidad del controlador. Con la función de Lyapunov se verifica la estabilidad asintótica del origen, y adicionalmente se aseguró que se establece un régimen deslizante sobre la superficie elegida (al igual que en los casos anteriores). En este caso (con valores propios reales negativos y distintos), la señal de control sigue siendo solo una función de conmutación y la superficie de deslizamiento el espacio propio dominante, respetando así el principal objetivo del trabajo de mantener las características del controlador lineal. El análisis de Lyapunov permitió encontrar una condición para K , cotas para D y D_1 y un intervalo para γ tal que el sistema controlado por modos deslizantes presenta robustez y la estabilidad deseada.

Se cumplió con diseñar un controlador por modos deslizantes para sistemas de segundo orden con un controlador lineal diseñado previamente, aprovechando las características proporcionadas por el controlador lineal. Con este diseño se obtuvo un mejor desempeño del sistema ante ciertas perturbaciones que el control lineal no puede compensar. Se hizo la contribución de realizar un proceso sistemático para la elección de la superficie y la variable de deslizamiento y encontrar cotas para los dos tipos de perturbaciones consideradas a lo largo del trabajo. Otra contribución relevante fue el diseño de una función de Lyapunov para el análisis del sistema con modos deslizantes.

Apéndice A

Teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo

En la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales ordinarias se introduce el concepto de una solución de la ecuación

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.1})$$

como una función $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la cual es diferenciable y satisface (A.1) para todo t en algún segmento o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ [13]. Como se ha mencionado, la teoría de control moderna trata con frecuencia con sistemas dinámicos que son modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias con lados derechos discontinuos, por lo que la definición clásica no es aplicable y se requiere un concepto generalizado [13, 25].

Concepto generalizado de solución

En este apéndice, consideramos que la función f en (A.1) es continua por partes. El tratado se hace en su mayoría siguiendo [25] y menormente [13, 15].

Recuerde que la función $f : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua por partes si y solo si \mathbb{R}^{1+n} consiste en un número finito de dominios (conjuntos abiertos conexos)

$G_j \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $j = 1, 2, \dots, N$; $G_i \cap G_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y un conjunto de frontera $S = \bigcup_{i=1}^N \partial G_j$

de medida cero tal que $f(t, x)$ es continua en cada G_j y para cada $(t^*, x^*) \in \partial G_j$ existe un vector $f^j(t^*, x^*)$, que posiblemente depende de j , tal que para alguna secuencia $(t^k, x^k) \in G_j : (t^k, x^k) \rightarrow (t^*, x^*)$ tenemos $f(t^k, x^k) \rightarrow f^j(t^*, x^*)$. De acuerdo con este proceso de límite se pueden definir las funciones $f^j : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas en ∂G_j , es decir,

$$f^j(t, x) = \lim_{(t^k, x^k) \rightarrow (t, x)} f(t^k, x^k), \quad (t^k, x^k) \in G_j, \quad (t, x) \in \partial G_j.$$

En la literatura se han propuesto distintas definiciones de solución para sistemas con lado derecho discontinuo. En esta sección mostramos las más usuales, que además son útiles para la teoría de control por modos deslizantes.

El concepto de solución, que fue propuesto por Filippov para la ecuación diferencial con lados derechos discontinuos, construye una solución que se puede interpretar como el “promedio” obtenido a partir de las soluciones al acercarse al punto de discontinuidad desde diferentes direcciones.

Definición 6 (Filippov [13, 25]). *Una función absolutamente continua $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es llamada solución de (A.1) si ésta satisface la inclusión diferencial,*

$$\dot{x} \in K[f](t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.2})$$

casi en todas partes de I , donde

$$K[f](t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{si } (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus S, \\ \text{co} \left(\bigcup_{j \in N(t, x)} \{f^j(t, x)\} \right) & \text{si } (t, x) \in S, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

co(M) es la cerradura convexa del conjunto M y la función índice conjunto valuada $\mathcal{N} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow 2^{\{1, 2, \dots, N\}}$ definida en S indica los dominios G_j que tienen algún punto común $(t, x) \in S$, es decir

$$\mathcal{N}(t, x) = \{j \in \{1, 2, \dots, N\} : (t, x) \in \partial G_j\}. \quad (\text{A.4})$$

Observe que para $(t, x) \in S$ el conjunto $K[f](t, x)$ es un poliedro convexo.

Con la finalidad de clarificar la definición, considere el caso más simple en el que la función $f(t, x)$ solo es discontinua en una superficie suave $S = [x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0]$ que divide a \mathbb{R}^n en dos dominios $G^+ = [x \in \mathbb{R}^n : s(x) > 0]$ y $G^- = [x \in \mathbb{R}^n : s(x) < 0]$. Sea $P(x)$ un plano tangencial a la superficie S en el punto $x \in S$ y

$$f^+(t, x) = \lim_{x_i \rightarrow x, x_i \in G^+} f(t, x_i), \quad f^-(t, x) = \lim_{x_i \rightarrow x, x_i \in G^-} f(t, x_i).$$

Para $x \in S$ el conjunto $K[f](t, x)$ define un conjunto que conecta a los vectores $f^+(t, x)$ y $f^-(t, x)$. Si este segmento cruza $P(x)$ entonces el punto de cruce es el final del vector de velocidad el cual define el movimiento del sistema sobre la superficie S . En este caso, las trayectorias del sistema (A.1) comienzan a *deslizarse* sobre la superficie S , de acuerdo con la ecuación de movimiento

$$\dot{x} = f_0(t, x), \quad (\text{A.5})$$

donde la función f_0 , dada por

$$f_0(t, x) = \frac{\langle \nabla s(x), f^-(t, x) \rangle f^+(t, x) + \langle \nabla s(x), f^+(t, x) \rangle f^-(t, x)}{\langle \nabla s(x), f^+(t, x) - f^-(t, x) \rangle}, \quad (\text{A.6})$$

es el vector de velocidad definido por el punto de cruce del segmento y del plano $P(x)$, es decir $f_0(t, x) = \mu f^+(t, x) + (1 - \mu) f^-(t, x)$ con $\mu \in [0, 1]$ tal que $\langle \nabla s(x), \mu f^+(t, x) + (1 - \mu) f^-(t, x) \rangle = 0$. Si $\nabla s(x)$ no es ortogonal a $\mu f^-(t, x) + (1 - \mu) f^+(t, x)$ para cada $\mu \in [0, 1]$ entonces toda trayectoria de A.2 pasa a través de la superficie lo que da lugar

a una conmutación aislada en lado derecho de la ecuación A.1. La regularización de Filippov para discontinuidades más generales de f se puede ver en [13, 25].

Debido a que la definición de Filippov no es adecuada para ciertos modelos discontinuos, se han hecho ciertas modificaciones a dicha definición. La modificación a la definición de Filippov, que tiene un impacto importante en la teoría de control por modos deslizantes, es la conocida como el *método de control equivalente* propuesto por Utkin. Considere el sistema

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.7})$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y la entrada de control

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_m(t, x))^T. \quad (\text{A.8})$$

es una función continua por partes que satisface la siguiente suposición.

Suposición 1. *Cada componente u_i es discontinuo solo sobre una superficie $S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : s_i(t, x) = 0\}$ donde todas las funciones $s_i : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que $s_i \in C^1(\mathbb{R}^{1+n})$.*

Definición 7 (Utkin [25]). *Una función absolutamente continua $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es solución de (A.7) si existe una función medible $u_{eq} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $u_{eq}(t) \in K[u(t, x(t))]$ y $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_{eq}(t))$ casi en todas partes de I , donde*

$$K[u](t, x) = (K[u_1](t, x), \dots, K[u_m](t, x))^T, \quad (\text{A.9})$$

$$K[u_i](t, x) = \begin{cases} \{u_i(t, x)\}, & s_i(t, x) \neq 0, \\ \text{co} \left(\begin{array}{cc} \lim_{\substack{(t_j, x_j) \rightarrow (t, x) \\ s_i(t_j, x_j) > 0}} u_i(t, x), & \lim_{\substack{(t_j, x_j) \rightarrow (t, x) \\ s_i(t_j, x_j) < 0}} u_i(t, x) \end{array} \right), & s_i(t, x) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

La definición dada introduce una solución de la ecuación diferencial A.7 conocida como solución de Utkin. Obviamente para cada $(t, x(t)) \notin S$, tenemos $u_{eq}(t) = u(t, x(t))$. Para encontrar la solución sobre S , la metodología se basa en resolver (algebraicamente) para u_{eq} la ecuación $\dot{s}(t, x) = \partial s / \partial t + \nabla^\top s(x) f(t, x, u_{eq}) = 0$, obteniendo la solución $u_{eq}(t, x)$ llamada control equivalente.

Para clarificar la definición, considere el sistema A.7 con $u \in \mathbb{R}$ (i.e., $m = 1$) y una superficie de conmutación invariante en el tiempo $S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$, denote

$$u^+(t, x) = \lim_{x_j \rightarrow x, s(x_j) > 0} u(t, x_j), \quad u^-(t, x) = \lim_{x_j \rightarrow x, s(x_j) < 0} u(t, x_j),$$

$$f^+(t, x) = f(t, x, u^+(t, x)), \quad f^-(t, x) = f(t, x, u^-(t, x)).$$

Así, la condición para la existencia del modo deslizante es que exista $\mu \in [0, 1]$ tal que $\nabla s(x)$ y $\mu f^-(t, x) + (1 - \mu)f^+(t, x)$ sean ortogonales, la cual coincide con la condición de Filippov. La definición de Utkin considera un conjunto $K[u](t, x)$ el cual es una cerradura convexa de un conjunto de valores límites de una función de control discontinua $u(t, x)$. Para diferentes $u_1, u_2, u_3, \dots \in K[u](t, x)$ los vectores $f(t, x, u_1), f(t, x, u_2), f(t, x, u_3)$ terminan en un arco que conecta los extremos de los vectores $f^+(t, x)$ y $f^-(t, x)$. En este caso, los vectores $f(t, x, u_{eq})$ que definen el lado derecho de la ecuación de movimiento deslizante se obtienen del punto de cruce de dicho arco y el plano tangencial en el punto $x \in S$, es decir

$$\dot{x} = f(t, x, u_{eq}(t, x)), x \in S, \quad (\text{A.11})$$

donde $u_{eq}(t, x) \in K[u](t, x)$ tal que $\nabla s(x)$ y $\mu f^-(t, x) + (1 - \mu)f^+(t, x)$ sean ortogonales.

Por último, recordaremos la definición de Aizerman-Pyatnickii para el sistema A.7, que puede entenderse como la agrupación de las definiciones de Filippov y de Utkin, esto mediante la inclusión

$$\dot{x} \in \text{co}(f(t, x, K[u](t, x))), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.12})$$

Definición 8 (Aizerman-Pyatnickii [13, 25]). *Una función absolutamente continua $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en algún intervalo I , es solución de A.7 si satisface la inclusión diferencial A.12 casi en todas partes de I .*

Una crítica a la definición de Aizerman-Pyatnickii está relacionada con la falta de unicidad de las soluciones incluso en casos no lineales simples. Sin embargo, si alguna propiedad de estabilidad está probada para la definición de Aizerman-Pyatnickii, entonces la misma propiedad se mantiene para las definiciones de Filippov y de Utkin. Interesantemente, el caso que se está estudiando en este trabajo de tesis es un caso particular donde las tres definiciones pueden coincidir, esto es explicado por el siguiente teorema.

Teorema A.0.1 (Zolezzi, [25]). *Sea el sistema (A.1) con el lado derecho afín respecto al control, esto es*

$$f(t, x) = a(t, x) + b(t, x)u(t, x),$$

donde $a : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, $b : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ es una función continua y $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisface la Suposición 1 con S invariante en el tiempo. Las definiciones de Filippov, Utkin y Aizerman-Pyatnickii son equivalentes si y solo si

$$\det(\nabla^\top s(x)b(t, x)) \neq 0 \text{ si } (t, x) \in S.$$

Sistemas perturbados

Es frecuente que los modelos de los sistemas de control tomen en cuenta perturbaciones, de manera que la teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo ha sido

extendida para cubrir estos casos. Consideramos en particular un sistema de control perturbado de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x), d), \quad (\text{A.13})$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t, x) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, y $d(t) \in \mathbb{R}^k$ es el vector de perturbaciones. Se asume que la función $f : \mathbb{R}^{1+n+m+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, la función de control $u : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua por partes y satisface la Suposición 1, y la función de perturbación $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_k(t))^\top$ satisface que

$$d_i^{\min} \leq d_i(t) \leq d_i^{\max},$$

para ciertas constantes $d_i^{\min}, d_i^{\max} \in \mathbb{R}$.

Bajo estas consideraciones tenemos las siguientes definiciones.

Definición 9 (Inclusión diferencial de Filippov extendida [15, 25]). *La inclusión diferencial asociada a (3.20) dada por*

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.14})$$

es una inclusión diferencial de Filippov extendida si la función conjunto valuada F está dada por $F(t, x) = \text{co} \{f(t, x, K[u](t, x), D)\}$, donde $K[u](t, x)$ es la regularización de Utkin dada en la Definición 7, y

$$D = \{(d_1, d_2, \dots, d_k)^T \in \mathbb{R}^k : d_i \in [d_i^{\min}, d_i^{\max}], i = 1, 2, \dots, k\}. \quad (\text{A.15})$$

Definición 10 (Solución de Filippov extendida [15]). *Una función $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es llamada solución extendida de Filippov de (A.13) para d , si es absolutamente continua y satisface la inclusión diferencial (A.14) para casi todo $t \in I$.*

Derivadas generalizadas

El análisis de estabilidad de Lyapunov requiere calcular derivadas de funciones a lo largo de las soluciones del sistema, sin embargo, en ocasiones las funciones candidatas no son diferenciables en todas partes. Por esto, se requiere de conceptos generalizados de derivadas.

Sea $M^n(d)$ el conjunto de todas las sucesiones de vectores reales que convergen a $d \in \mathbb{R}^n$, esto es

$$\{v_n\} \in M^n(d) \quad \Leftrightarrow \quad v_n \rightarrow d, \quad v_n \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 11. *Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto no vacío de \mathbb{R}^n y $d \in \mathbb{R}^n$. Para $\{h_n\} \in M^1(0)$ y $\{v_n\} \in M^n(d)$ tales que $x + h_n v_n \in \Omega$, el número*

$$D_{\{h_n\}, \{v_n\}} V(x, d) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(x + h_n v_n) - V(x)}{h_n} \quad (\text{A.16})$$

es llamado número derivada direccional de la función V en el punto $x \in \Omega$ en la dirección $d \in \mathbb{R}^n$, si el límite existe ya sea finito o infinito.

Definición 12. El conjunto de todas los números derivada direccional de la función V en el punto $x \in \Omega$ en la dirección $d \in \mathbb{R}^n$, esto es

$$D_{M^1(0), M^n(d)}V(x) = \bigcup_{\{h_n\} \in M^1(0), \{v_n\} \in M^n(d)} \{D_{\{h_n\}, \{v_n\}}V(x, d)\} \quad (\text{A.17})$$

es llamado derivada direccional contingente de V en el punto $x \in \Omega$ en la dirección $d \in \mathbb{R}^n$.

Finalmente, la derivada generalizada de V a lo largo de la inclusión diferencial (A.14) es denotada y definida como

$$D_{F(t,x)}V(x) = \bigcup_{d \in F(t,x)} D_{M^1(0), M^n(d)}V(x).$$

Apéndice B

Función tipo Lyapunov para controlador por modos deslizantes en coordenadas originales

La superficie de deslizamiento y la variable de deslizamiento se diseñaron con ayuda de los espacios propios al que las trayectorias convergen de manera natural y mediante la transformación de coordenadas $z = Q^{-1}x$, este procedimiento resulta muy útil puesto que el sistema transformado se encuentra desacoplado, por lo cual se puede trabajar con el espacio o en su caso la parte real del espacio propio en el que las trayectorias se encuentran. Sin embargo, utilizando esta misma herramienta, podemos regresar a las variables originales del sistema, obteniendo la función tipo Lyapunov en función de los estados.

Considere el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 + u + d, \quad k_1, k_2 > 0, \quad (\text{B.1})$$

y dada la función tipo Lyapunov

$$V(s_z) = \frac{1}{2}s_z^2 \quad (\text{B.2})$$

se realiza la transformación para cada caso presentado en 4.

B.1. Modos deslizantes de orden reducido

Considerando que $z_2 = s$, entonces

$$z_2 = \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2, \quad \dot{z}_2 = \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}\dot{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}\dot{x}_2.$$

La función tipo Lyapunov en coordenadas x , es

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right)^2, \quad (\text{B.3})$$

y su derivada a lo largo de las trayectorias queda definida como

$$\dot{V} = \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right) \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}\dot{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}\dot{x}_2 \right). \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo en la función tipo Lyapunov el sistema B.1, se obtiene

$$\dot{V} = \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right) \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}(-k_1x_1 - k_2x_2 + u + d) \right],$$

realizando las multiplicaciones correspondientes y agrupando los términos multiplicados por x_1 y x_2

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[-k_1x_1 - k_2x_2] \right] \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ &= \frac{k_1^2}{\Delta}x_1x_2 - \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2^2 - \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[-k_1x_1 - k_2x_2]x_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} \right)^2 [-k_1x_1 - k_2x_2]x_2 \\ &\quad - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ &= \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] x_2 + \left[-\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} \right)^2 x_2 \right] [-k_1x_1 - k_2x_2] \\ &\quad - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ &= \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] [-k_1x_1 - k_2x_2] - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_2 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[k_1x_1] + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[k_2x_2] \right] - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] \left[\lambda_2 \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}k_2 + \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} \right) x_2 \right] - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] \left[\lambda_2 \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \lambda_2 \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] \left[\lambda_2 \frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right] - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ &= \lambda_2 \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}}x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}x_2 \right]^2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \lambda_2 z_2^2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}[u + d], \\ \dot{V} &\leq \lambda_2 |z_2^2| - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}(-K + D)|z_2| \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

llegando a la misma expresión en (4.13), por lo que bajo las mismas condiciones, se asegura que las trayectorias convergen a la superficie de deslizamiento $s(x) = 0$ diseñada para el sistema.

B.2. Modos deslizantes de orden completo

Dado nuestro sistema original y la transformación de coordenadas, consideramos la superficie deslizante definida en (4.28), por lo que la Función tipo Lyapunov queda expresada como

$$V(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right]^2, \quad (\text{B.6})$$

por lo que la derivada de la Función tipo Lyapunov en coordenadas originales del sistema x es

$$\dot{V}(x) = \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha \dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \dot{v} \right], \quad (\text{B.7})$$

recordando que $\dot{v} = -\beta x_2 + \alpha v$, entonces resolviendo algebraicamente

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_2) + (-k_1 x_1 - k_2 x_2 + u + d) - \dot{v} \right], \\ &= \left[\frac{1}{\beta^2} (-\alpha x_1 + x_2) - \frac{v}{\beta} \right] (u + d) + \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \left[\frac{1}{\beta} (-k_1 x_1 - k_2 x_2 + \alpha x_2) \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] [\beta x_1 + \alpha v], \\ &= \left[\frac{1}{\beta^2} (-\alpha x_1 + x_2) - \frac{v}{\beta} \right] (u + d) + \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \left[\frac{1}{\beta} (-k_1 x_1 - \alpha x_2) + \beta x_1 + \alpha v \right], \\ &= \left[\frac{1}{\beta^2} (-\alpha x_1 + x_2) - \frac{v}{\beta} \right] (u + d) + \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \left[\frac{\alpha}{\beta} x_2 - \alpha v - \left(\frac{k_1}{\beta} + \beta \right) x_1 \right] \\ &= \left[\frac{1}{\beta^2} (-\alpha x_1 + x_2) - \frac{v}{\beta} \right] (u + d) + \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \left[\frac{\alpha}{\beta} x_2 - \alpha v + \frac{1}{\beta} \left(-\frac{k_2^2}{4} \right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{\beta^2} (-\alpha x_1 + x_2) - \frac{v}{\beta} \right] (u + d) + \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \left[\frac{\alpha}{\beta} x_2 - \alpha v - \frac{\alpha^2}{\beta} x_1 \right] \\ &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] (u + d) + \alpha \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] \\ &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right] (u + d) + \alpha \left[\frac{1}{\beta} (-\alpha x_1 + x_2) - v \right]^2 \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \alpha s_z^2 + \frac{1}{\beta} (u + d) s_z \\ \dot{V} &\leq \alpha s_z^2 + \frac{1}{\beta} (-K \text{sign} s_z + d) s_z \end{aligned}$$

llegando nuevamente a

$$\dot{V} \leq \alpha s_z^2 + \frac{1}{\beta} (-K + D) |s_z|. \quad (\text{B.8})$$

Si $K > D$ y $\alpha < 0$, se puede concluir que las trayectorias alcanzan la superficie deslizante $s(x) = 0$ seleccionada para el sistema en un tiempo finito.

B.2.1. Modo integral para valores propios reales

Realizando la transformación de la Función tipo Lyapunov a coordenadas originales, dada la superficie descrita en 4.32.

$$V(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right]^2, \quad (\text{B.9})$$

por lo que la derivada de la Función tipo Lyapunov a lo largo de las trayectorias

$$\dot{V}(x) = \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} \dot{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} \dot{x}_2 - \dot{v} \right]. \quad (\text{B.10})$$

Considerando el sistema descrito en B.1, entonces

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (-k_1 x_1 - k_2 x_2 + u + d) - \lambda_2 v \right] \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_2 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} k_1 x_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} k_2 x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (u + d) - \lambda_2 v \right] \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\lambda_2 \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - v \right) + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (k_1 + \lambda_2 k_2) x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (u + d) \right] \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\lambda_2 \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - v \right) + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(k_1 - \frac{k_2^2}{2} - \frac{k_2 \sqrt{\Delta}}{2} \right) x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (u + d) \right] \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\lambda_2 \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - v \right) + \left(\frac{2k_1}{\sqrt{\Delta}} - \frac{k_2^2}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{k_2}{2} \right) x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (u + d) \right] \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\lambda_2 \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - v \right) + \left(\frac{4k_1}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{k_2^2}{2} - \frac{k_2}{2} \right) x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (u + d) \right] \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\lambda_2 \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - v \right) + \left(-\frac{k_2}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (u + d) \right] \\ &= \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \left[\lambda_2 \left(\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - v \right) + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (u + d) \right] \\ &= \lambda_2 \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right]^2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (u + d) \left[\frac{k_1}{\sqrt{\Delta}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} x_2 - v \right] \end{aligned}$$

y dada la superficie de deslizamiento, se realiza el análisis de estabilidad, con lo que se obtiene

$$\dot{V} \leq \lambda_2 s_x^2 - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}} (-K + D) |s_x|,$$

función encontrada para este caso en 4, por lo que siguiendo el procedimiento que ahí se muestra, llegamos a la misma conclusión y condiciones.

Apéndice C

Sobre la función de Lyapunov

Consideramos el sistema (5.2) en su versión nominal, esto es

$$\dot{z}_1 = z_1 \lambda_1 - K \text{sign}(z_2), \quad \dot{z}_2 = z_2 \lambda_2 - K \text{sign}(z_2). \quad (\text{C.1})$$

Las soluciones de este sistema están dadas por (5.9), es decir

$$\phi_i(\tau; z) = \begin{cases} z_i e^{\lambda_i \tau} - \frac{K e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_i} + \frac{K}{\lambda_i} = \left(z_i - \frac{K}{\lambda_i} \right) e^{\lambda_i \tau} + \frac{K}{\lambda_i}, & \text{si } z_2 > 0; \\ z_i e^{\lambda_i \tau} + \frac{K e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_i} - \frac{K}{\lambda_i} = \left(z_i + \frac{K}{\lambda_i} \right) e^{\lambda_i \tau} - \frac{K}{\lambda_i}, & \text{si } z_2 < 0, \end{cases}$$

De estas soluciones se puede encontrar el conjunto de condiciones iniciales tales que las trayectorias de (C.1) cruzan el eje z_2 antes de llegar al conjunto $\{z \in \mathbb{R}^2 : z_2 = 0\}$. Para esto, basta encontrar el conjunto de condiciones iniciales tales que $\phi_1(T; z) = \phi_2(T; z) = 0$. Resolviendo esta ecuación se encuentra el conjunto $\{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 = -\frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \left(\frac{1}{v} - 1\right)\}$ el cuál es equivalente al conjunto $\{z \in \mathbb{R}^2 : \zeta(z) = 0\}$ con $\zeta(z) = z_1 + \frac{K[z_2]^0}{\lambda_1} \left(\frac{1}{v} - 1\right)$.

Lema 1. *Considere la familia de funciones $v : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$v(x) = \left(\frac{k}{k - \lambda x} \right)^p.$$

Para toda $p \in (0, 1]$, toda $k \in \mathbb{R}_{>0}$, toda $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$ y toda $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ se cumplen las siguientes desigualdades

$$1 - v(x) \leq 1, \quad 1 - v(x) \leq \frac{-\lambda}{k} x.$$

Demostración. Note que $\frac{k - \lambda x}{k} \geq 1$ por lo tanto $\frac{k}{k - \lambda x} \leq 1$ (de donde la primera desigualdad es obvia), y $\left(\frac{k - \lambda x}{k}\right)^p \leq \frac{k - \lambda x}{k}$. Así,

$$1 - v = \frac{(k - \lambda x)^p - k^p}{(k - \lambda x)^p} = k^p \frac{\left(\frac{k - \lambda x}{k}\right)^p - 1}{(k - \lambda x)^p} \leq k^p \frac{\frac{k - \lambda x}{k} - 1}{(k - \lambda x)^p} = \frac{k^p}{k} \frac{k - \lambda x - k}{(k - \lambda x)^p} = \frac{-\lambda x}{k} v(x).$$

□

Bibliografía

- [1] N. Abdelfatah, H. Abdeldjebar, I. K. Bousserhan, S. Hadjeri, and P. Sicard. Two wheel speed robust sliding mode control for electric vehicle drive. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, 2008.
- [2] J. Ackermann and V. Utkin. Sliding mode control design based on Ackermann's formula. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998.
- [3] M. Asad, A. Bhatti, and S. Iqbal. Smooth integral sliding mode controller for the position control of stewart platform. *Int. Journal Control Autom. Syst.s*, 2015.
- [4] K. Åström and R. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, 01 2008.
- [5] A. Bachiller Soler and R. Cano González. *Circuitos eléctricos en regimen transitorio. Volumen I: Teoría y problemas resueltos*. Ediciones Diaz de Santos S.A., 2020.
- [6] R. W. Brockett. *Differential Geometric Control Theory*, chapter Asymptotic stability and feedback stabilization, page 181–191. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [7] C. Chen. *Linear System Theory and Desing*. Oxford University Press, 3rd. edition, 1999.
- [8] W. H. Chen, J. Yang, L. Guo, and S. Li. Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods – An Overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(2):1083–1095, 2016.
- [9] A. Chouza, O. Barambones, I. Calvo, J. Velasco, J. Sánchez, and I. Ocariz. Sliding mode control con estimación de perturbaciones y superficie deslizante PID para control de actuador piezoeléctrico. *Actas de las XXXIX Jornadas de Automática*, pages 466–474, 03 2020.
- [10] J. Dávila and A. Poznyak. Dynamic sliding mode control design using attracting ellipsoid method. *Automatica*, 2011.
- [11] C. Edwards and S. K. Spurgeon. *Sliding Mode Control, theory and applications*. Taylor y Francis Group, 1998.

- [12] Y. Feng, X. Yu, and Z. Man. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38(12):2159–2167, 2002.
- [13] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [14] S. H. Friedberg, J. A. Insel, and E. L. Spence. *Álgebra Lineal*. Springer, 1990.
- [15] W. P. M. H. Heemels and S. Weiland. Input-to-state stability and interconnections of discontinuous dynamical systems. *Automatica*, 44(12):3079–3086, 2008.
- [16] H. Huerta, R. Osorio, and N. Vázquez. Control no lineal robusto de una máquina para fabricación de películas delgadas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 14(3):246–255, 2017.
- [17] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, 1999.
- [18] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [19] K. R. Kumar and S. Jeevananthan. Sliding mode control for current distribution control in paralleled positive output elementary super lift luo converters. *Journal of Power Electronics*, 2011.
- [20] Y. Lin, E. D. Sontag, and Y. Wang. A Smooth Converse Lyapunov theorem for Robust Stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(1):124–160, 1996.
- [21] H. Nijmeijer and A. V. D. Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, 1990.
- [22] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [23] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1999.
- [24] J. Pliego, M. Arteaga, and P. Sánchez. Dexterous robotic manipulation via a dynamic sliding mode force/position control with bounded inputs. *IET Control Theory & Applications*, 13(6):832–840, 2019.
- [25] A. Polyakov and L. Fridman. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2014.
- [26] A. Polyakov and A. Poznyak. Unified Lyapunov function for a finite-time stability analysis of relay second-order sliding mode control systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 29(4):529–550, 2012.
- [27] H. S. Ramírez and R. S. Ortigoza. *Control Design Techniques in Power Electronics Devices*. Springer-Verlag, London, 2006.
- [28] V. Rao and D. Bernstein. Naive control of the double integrator. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(5):86–97, 2001.

- [29] R. Rascón, J. Álvarez, and L. Aguilar. Regulation and force control using sliding modes to reduce rebounds in a mechanical system subject to a unilateral constraint. *IET Control Theory and Applications*, 2012.
- [30] T. Sanchez and J. A. Moreno. Construction of Lyapunov functions for a class of higher order sliding modes algorithms. *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2012.
- [31] R. Sepulchre, M. Janković, and P. V. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag, London, 1997.
- [32] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, 2014.
- [33] P. Skruch and M. Dlugosz. Design of terminal sliding mode controllers for disturbed non-linear systems described by matrix differential equations of the second and first orders. *Applied Sciences*, 2019.
- [34] J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [35] S. Spurgeon. Sliding mode control: a tutorial. *2014 European Control Conference, ECC 2014*, 06 2014.
- [36] V. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [37] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. CRC Press, 2009.
- [38] J. Velasco, I. Calvo, O. Barambones, P. Venegas, and C. Napole. Experimental validation of a sliding mode control for a stewart platform used in aerospace inspection applications. *Mathematics*, 8(11), 2020.
- [39] M. D. S. y I. Banfield. Control deslizante de un robot paralelo de tres grados de libertad para realizar actividades de mantenimiento naval. *IDT*, julio 2020.
- [40] X. Zheng, X. Jian, D. Wenzheng, and C. Hongjie. Nonlinear integral sliding mode control for a second order nonlinear system. *Journal of Control Science and Engineering*, 2015.