



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Identificación en lazo cerrado de una clase de sistemas
lineales con retardo incierto en la entrada**

Tesis que presenta

José Javier Reyes

Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Adrián René Ramírez López

San Luis Potosí, S.L.P., Junio de 2024



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Identificación en Lazo Cerrado de una Clase de Sistemas Lineales con Retardo Incierto en la Entrada** presentada para obtener el Grado de de Maestro(a) en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **José Javier Reyes** y aprobada el **11 de 06 de 2024** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Adrián René Ramírez López
(Director de la tesis)

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez
(Asesor de la tesis)

Dr. Arturo Zavala Río
(Asesor de la tesis)

Dr. César Octavio Maldonado Ahumada
(Asesor de la tesis)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Adrián René Ramírez López.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (1151877) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

(Página en Blanco que se va a utilizar para colocar la copia del acta de examen.)

Dedicado a mis padres y a mis hermanitas.

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Adrián René Ramírez López, mi director de tesis, por otorgarme la oportunidad y depositar su confianza en mí para llevar a cabo esta investigación. Su invaluable orientación, guía, apoyo y paciencia fueron fundamentales en cada etapa de este proyecto. Siempre estaré agradecido por la oportunidad que me brindó.

También expreso mi profundo agradecimiento a los revisores de este trabajo de tesis, así como a mi comité tutorial compuesto por el Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez y el Dr. Hugo Cabrera Ibarra. También deseo reconocer y agradecer a los distinguidos miembros de mi jurado, el Dr. Arturo Zavala Río y el Dr. César Octavio Maldonado Ahumada, por su generosidad al dedicar tiempo a este proyecto y por brindarme sus valiosos comentarios, los cuales han contribuido de manera significativa a mi desarrollo académico.

Asimismo, quiero expresar mi sincero agradecimiento a los investigadores que forman parte de la división de Control y Sistemas Dinámicos. En especial, agradezco a aquellos que fueron mis profesores durante mi periodo de maestría. También quiero extender mi gratitud a mis apreciados compañeros Luis, Ramón y Arturo, con quienes compartí momentos en el aula. Aunque fueron breves, considero que estos momentos fueron sumamente valiosos para mi experiencia académica y personal.

No puedo dejar pasar la oportunidad de agradecer a mi familia por siempre estar ahí para mí y darme su apoyo incondicional y el impulso necesario para alcanzar todos mis sueños. Es por ustedes que estoy aquí y doy gracias a Dios por sus vidas.

Por último agradezco al CONAHCYT por haberme brindado esta oportunidad.

Resumen

En este trabajo de tesis se propone un esquema de control diseñado para una clase de sistemas lineales con retardo pequeño e incierto en la entrada. En particular, se combina un algoritmo de identificación de retardo con un controlador por retroalimentación de estado, evitando así el uso de controladores predictivos. La contribución principal de este trabajo radica en la introducción de una metodología sistemática para identificar el valor del retardo considerando que el sistema bajo estudio es potencialmente inestable en lazo abierto. Con el objetivo de garantizar la estabilidad de las soluciones del sistema en lazo cerrado, considerando tanto el controlador estabilizante como el algoritmo de identificación, se realiza un estudio exhaustivo utilizando un enfoque de tipo Lyapunov-Krasovskii. Finalmente, se emplea el Lema de Barbalat para asegurar regulación al origen.

La estructura del trabajo se divide en dos:

- En la primera parte, se realiza un estudio de estabilidad suponiendo que el retardo en la entrada es conocido. Este análisis establece las bases metodológicas utilizadas en el caso de retardo incierto. Específicamente, se reformula el sistema como una ecuación diferencial parcial de primer orden en cascada con una ecuación diferencial ordinaria, y se emplea una técnica tipo “backstepping” que hace posible encontrar condiciones suficientes de estabilidad en forma de desigualdades matricial lineales sencillas.
- En la segunda parte, se aborda el caso con retardo incierto y, empleando las herramientas desarrolladas en la primera parte, se deriva una ley de adaptación para el retardo al mismo tiempo que se proponen condiciones bajo las cuales las soluciones del sistema son estables, lo que resulta en última instancia en la identificación del retardo y la regulación al origen de las señales de interés.

Abstract

This thesis work proposes a control scheme for a class of linear systems with short and uncertain input delay. Particularly, it combines a delay identification algorithm with a state feedback controller, by-passing the need for predictive controllers. The main contribution of this work lies in introducing a systematic methodology to identify the delay value in a class of linear systems that may potentially be unstable in open-loop. To ensure the stability of the closed-loop system solutions, considering both the stabilizing controller and the identification algorithm, a comprehensive study is conducted using a Lyapunov-Krasovskii approach. Finally, Barbalat's Lemma is incorporated to ensure regulation to the origin.

The structure of the work is as follows:

- In the first part, a stability study is conducted assuming that the input delay is known. This analysis establishes the methodological foundations used in the case of uncertain delay. Specifically, the system is reformulated as a first-order partial differential equation cascaded with an ordinary differential equation. Then, a “backstepping” approach is employed to establish sufficient stability conditions, which are expressed in the form of simple linear matrix inequalities.
- In the second part, the scenario with uncertain delay is addressed, and using the tools developed in the first part, an adaptation law for the delay is derived. Simultaneously, sufficient stability conditions are obtained, which ultimately lead to the identification of the delay and the regulation of the signals of interest to the origin.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Ejemplo de motivación	3
1.3. Planteamiento del problema	5
1.4. Objetivos	6
1.5. Estructura de la tesis	6
2. Estabilización	9
2.1. Preliminares	9
2.1.1. Representación en cascada	10
2.1.2. Transformación backstepping	10
2.1.3. Transformación backstepping inversa	12
2.2. Análisis de estabilidad	14
2.2.1. Cotas y derivada del funcional	15
2.2.2. Resultado principal: Caso con retardo conocido	19
2.3. Caso de estudio	22
3. Identificación	25
3.1. Preliminares	25
3.1.1. Representación en cascada	26
3.1.2. Transformación backstepping	26
3.1.3. Transformación backstepping inversa	29
3.2. Análisis de estabilidad	31
3.2.1. Cotas y derivada del funcional	32
3.2.2. Resultado principal: Caso con retardo incierto	36
3.3. Caso de estudio	42

4. Conclusiones	45
4.1. Trabajo a futuro	46
A. Máximo decaimiento exponencial	49
B. Función de proyección	51

Nomenclatura

$\mathcal{L}_2[a, b]$	Espacio de funciones cuadrado integrables en el intervalo $[a, b]$
$PC([-nD, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones continuas por partes con la norma $\ \phi\ _{nD} = \sup_{\tau \in [-nD, 0]} \phi(\tau) $.
$A < 0$ ($A \leq 0$)	Matriz definida negativa (semidefinida negativa).
$A > 0$ ($A \geq 0$)	Matriz definida positiva (semidefinida positiva).
$ A $	Norma inducida (por la norma euclidiana) de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
$\ \kappa(t)\ _{nD^+}$	Norma $\mathcal{L}_2[0, nD]$ (en el espacio) de $\kappa(x, t)$; es decir, $\left(\int_0^{nD} \kappa(x, t)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
$\ \kappa(t)\ _{nD^-}$	Norma $\mathcal{L}_2[-nD, 0]$ (en el espacio) de $\kappa(x, t)$; es decir, $\left(\int_{-nD}^0 \kappa(x, t)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
$\ \kappa(t)\ $	Norma $\mathcal{L}_2[-D, D]$ (en el espacio) de $\kappa(x, t)$; es decir, $\left(\int_{-D}^D \kappa(x, t)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Capítulo 1

Introducción

El uso de controladores predictivos adaptables ha probado su efectividad para compensar retardos desconocidos en la entrada de ciertas clases de sistemas dinámicos. Sin embargo, este tipo de controladores resulta innecesario cuando el retardo es pequeño en comparación con el modo más lento del sistema, ya que en este caso la contribución de la parte distribuida del predictor se vuelve despreciable. En este trabajo de tesis, presentamos un esquema de control de dimensión finita diseñado específicamente para una clase de sistemas lineales con retardo pequeño y desconocido en la entrada. Este esquema combina un algoritmo de identificación de retardo y un controlador por retroalimentación del estado completo del sistema, lo que elimina la necesidad de algoritmos de control predictivo y simplifica la implementación del controlador.

La principal contribución de este trabajo de tesis es una metodología que garantiza de manera sistemática la identificación en lazo cerrado del retardo en una clase general de sistemas lineales potencialmente inestables y con retardo desconocido en la entrada. Con este fin, se propone un controlador estabilizante y se lleva a cabo un estudio exhaustivo, utilizando un enfoque de tipo Lyapunov-Krasovskii para garantizar estabilidad de las soluciones del sistema y, posteriormente, aplicando el Lema de Barbalat para asegurar regulación de las señales de interés.

1.1. Estado del arte

Un objetivo importante en el campo de la ingeniería es el de mejorar la respuesta dinámica de los sistemas mediante acciones de control y, en este contexto, se han desarrollado diferentes técnicas para lograrlo. Una de estas técnicas es la de implementar algoritmos

de control con retardos intencionales. Esta clase de algoritmos ha ganado popularidad en los últimos años debido al potencial que tienen de mejorar el desempeño de los sistemas usando poca información de los mismos y por su capacidad de tolerar el ruido en las mediciones [4, 23, 25, 26, 27, 29]. Sin embargo, la introducción de retardos intencionales incrementa la complejidad en el diseño del controlador, pues se induce una dimensionalidad infinita al sistema, lo que puede disuadir al practicante de control de elegir este tipo de algoritmos, haciendo preferible la elección de un controlador clásico. Para hacer atractivo el control basado en retardos, técnicas recientes emplean geometría algebraica [16, 25], teoría de la eliminación [26, 27], y propiedades de dominancia inducida por multiplicidad de raíces [4, 12], para proporcionar reglas de sintonización simples que solo requieren el conocimiento de los parámetros del sistema para colocar un grupo de raíces dominantes en un lugar óptimo en el plano complejo [7, 23, 25, 26, 28, 30, 35].

Las técnicas descritas en el párrafo anterior para sistemas con *retardos intencionales*, también se han extendido para el diseño y sintonización de controladores PI, PD y PID en sistemas con *retardos inherentes*; es decir, para sistemas en donde los retardos son propios de la dinámica del sistema o del actuador. En esta línea de investigación, se han obtenido fórmulas analíticas expresadas en función del retardo, las cuales permiten asignar el espectro infinito del sistema de manera óptima [1, 22, 33, 40, 37]. No obstante, esta metodología de diseño genera controladores sensibles al retardo, lo que puede comprometer la estabilidad del sistema si no se cuenta con una estimado preciso del retardo, como se muestra en el ejemplo de motivación en la Sección 1.2. En consecuencia, es necesario emplear algoritmos de identificación del retardo con los que se pueda asegurar que el diseño del controlador se mantenga válido.

Si bien la estimación precisa del retardo es de gran relevancia, como queda demostrado por la abundante literatura que existe en el tema –ver, por ejemplo [6] y [3] para estudios exhaustivos–, es igual de importante el diseño de controladores adaptables que garanticen un desempeño deseado aún en presencia de retardos desconocidos. Este es un problema de relevancia práctica, dado que, como se reconoce en [39], los enfoques convencionales de control adaptable habitualmente tratan al retardo como una perturbación. Lo anterior motiva al diseño de controladores adaptables en los que el retardo es tratado como una incertidumbre paramétrica en lugar de una simple perturbación. Por un lado, cuando el retardo es *relativamente grande*, el uso de predictores adaptables ha demostrado su efectividad para compensar retardos inciertos en una amplia variedad de aplicaciones, ver [2, 9, 10, 11, 20, 21, 36] y sus referencias. Sin embargo, implementar estos controladores es un reto en sí mismo [18, 24, 31, 32]. Por otro lado, si el retardo es *relativamente pequeño*, no es necesario recurrir al uso de predictores y es suficiente usar un controlador de dimensión finita [8, 39]. En lo que concierne a este aspecto, no tenemos conocimiento de algún enfoque en el que se combine el uso de un algoritmo de identificación del retardo y un controlador de dimensión

finita capaz de ajustar sus ganancias. En esta tesis, presentamos un marco de trabajo que establece los cimientos para la resolución de estos requerimientos.

1.2. Ejemplo de motivación

Para motivar el problema en esta tesis, considere el siguiente sistema inestable de primer orden con retardo incierto, $D > 0$, en la entrada

$$T\dot{Y}(t) + Y(t) = \kappa U(t - D), \quad (1.1)$$

donde $T < 0$, y $Y \in \mathbb{R}$ y $\kappa \neq 0$ son la salida y la ganancia en lazo abierto del sistema, respectivamente. Como el sistema (1.1) es inestable sin retroalimentación, leyes adaptables para el retardo como la introducida en [34] no son aplicables. Por lo tanto, es necesario construir una ley de adaptación para D alrededor de un controlador estabilizante.

Por otro lado, se sabe que un controlador PI clásico de la forma

$$U(t) = -k_p Y(t) - k_i \int_0^t Y(s) ds, \quad (1.2)$$

en donde k_p y k_i son, respectivamente, las ganancias proporcional e integral, puede estabilizar al sistema (1.1) siempre que D sea relativamente más pequeño que $|T|$. Más aún, una sintonización apropiada de los parámetros del controlador pueden proporcionar un desempeño óptimo del sistema en términos de velocidad de respuesta. Por ejemplo, la reglas de sintonización

$$k_p = -\frac{1 - D\sigma_m - 2T\sigma_m + DT\sigma_m^2}{\kappa e^{D\sigma_m}}, \quad (1.3)$$

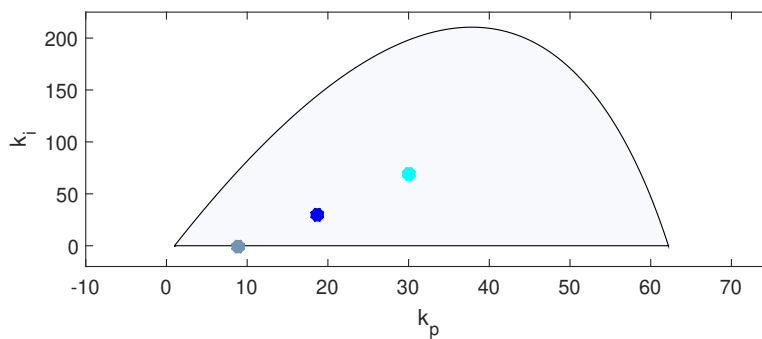
$$k_i = -\frac{\sigma_m^2(-D - T + DT\sigma_m)}{\kappa e^{D\sigma_m}}, \quad (1.4)$$

en donde

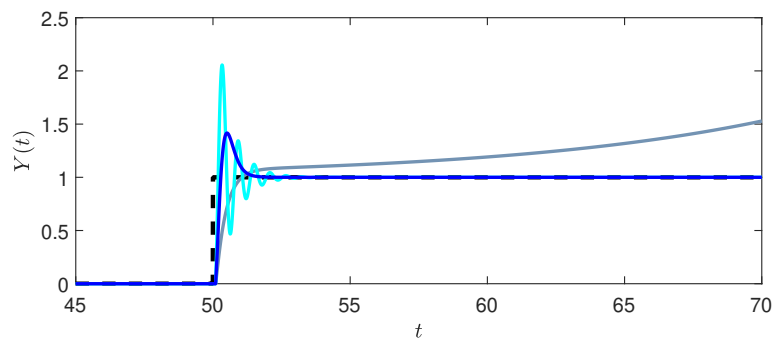
$$\sigma_m = \frac{D + 4T + \sqrt{D^2 + 8T^2}}{2DT}, \quad T < 0, \quad (1.5)$$

minimizan la abscisa espectral, σ , de (1.1)-(1.2). En donde el valor mínimo de σ se puede calcular analíticamente como $\bar{\sigma} = -\sigma_m$, en donde σ_m en (1.5) aproxima el decaimiento exponencial de la solución del sistema. En consecuencia, la velocidad de respuesta del sistema bajo la sintonización en (1.3)-(1.5) es máxima (ver Apéndice A para más detalles). Sin embargo, estas fórmulas requieren conocer el valor exacto del retardo y una mala aproximación de este valor es perjudicial para el desempeño del sistema y puede incluso destruir la estabilidad de las soluciones como se explica en el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo numérico: Considere el sistema (1.1) en lazo cerrado con el controlador PI (1.2) y con los parámetros $\kappa = -1$, $T = -4$ y $D = 0.1$. La Figura 1.1a muestra el espacio de parámetros asociados al controlador. En la figura, la región rellena en color gris claro es una región estable; i.e., si se eligen k_p y k_i dentro de esta región se asegura una respuesta estable. Cuando el retardo es exactamente conocido; es decir, $D = 0.1$, obtenemos de (1.5) que $\sigma_m = 5.7323$. El par $(k_p, k_i) = (18.6819, 29.7677)$ asociado a este valor de σ_m se obtiene de (1.3) y (1.4) y se muestra con un punto en color azul en la Figura 1.1a. La respuesta del sistema en este caso se muestra en la Figura 1.1b con el mismo código de color. Note que la velocidad de respuesta del sistema es la más rápida. Cuando el retardo es desconocido, es necesario aproximarlos, por ejemplo, con $D = 0.05$ obtenemos de (1.3) y (1.4) que $(k_p, k_i) = (30.032, 69.1656)$ como se muestra con un punto en color cian en la Figura 1.1a. Observe en la Figura 1.1b que la velocidad de respuesta en este caso es subóptima. Finalmente con $D = 0.17$, tenemos que las ganancias $(k_p, k_i) = (8.8835, -0.8429)$ destruyen la estabilidad de la solución como se observa en la Figura 1.1b en la señal $Y(t)$ en color gris.



(a) Descomposición del espacio de parámetros (k_p, k_i) .



(b) Respuesta del sistema para diferentes valores de las ganancias del controlador PI.

Figura 1.1: Respuesta del sistema (1.1)-(1.2) con tres diferentes valores para (k_p, k_i) obtenidos con la sintonización en (1.3)-(1.4). En color gris se muestra un caso inestable con $(k_p, k_i) = (8.8835, -0.8429)$; en color cian, un caso estable subóptimo con $(k_p, k_i) = (30.0320, 69.1656)$; y con color azul, el caso óptimo con $(k_p, k_i) = (18.6819, 29.7677)$.

Con base en la revision bibliográfica y en el ejemplo de motivación descrito en los párrafos anteriores, podemos concluir que un método para identificar retardos en lazo cerrado es de interés. En esta tesis presentamos un enfoque para la solución de dicho problema. De manera más precisa, introducimos una ley adaptable capaz de resolver el problema de identificación del retardo en una clase general de sistemas lineales potencialmente inestables y con retardo incierto en la entrada. Con este fin, la ley de adaptación propuesta es complementada con un controlador estabilizante de dimensión finita. Finalmente ilustramos la efectividad de nuestro método en un caso de estudio que consiste en un sistema de primer orden con retardo desconocido en la entrada sujeta a un controlador PI diseñado para garantizar un desempeño óptimo en lazo cerrado.

1.3. Planteamiento del problema

En este trabajo de tesis se considera el sistema lineal, potencialmente inestable en lazo abierto, y con un retardo incierto en la entrada, dado por

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t - D), \quad (1.6)$$

en donde $X \in \mathbb{R}^n$ es el estado instantáneo, U es la entrada de control y $D > 0$ es el retardo. La matriz A y el vector B son conocidos y de dimensiones apropiadas. Notamos que la solución del sistema esta definida por las condiciones iniciales $X(0) = X_0$ y $U(t) = \psi(t)$, $t \in [-D, 0]$ con $\psi \in PC([-D, 0], \mathbb{R})$, y consideramos que D satisface la siguiente suposición:

Suposición 1.3.1. *El retardo en la entrada es pequeño con respecto a la escala de tiempo del sistema.*¹

Este tipo de sistemas describe una amplia variedad de aplicaciones prácticas en la industria así como procesos biológicos y fenómenos físicos [5], en donde la presencia del retardo se debe a las características físicas propias del sistema, al procesamiento de los datos o a la medición de los mismos [13]. Si bien esta clase de sistemas han sido ampliamente estudiados en la literatura en el contexto de controladores predictivos [21], en esta tesis abordamos un enfoque distinto con controladores de dimensión finita. Por lo tanto, bajo la Suposición 1.3.1, proponemos usar una ley de control dada por una retroalimentación de estado completo de la forma

$$U(t) = KX(t), \quad (1.7)$$

¹De acuerdo con [38], para un sistema lineal con retardo en la entrada, la Suposición 1.3.1 garantiza que un controlador por retroalimentación de dimensión finita es capaz de proporcionar estabilidad gracias al margen de retardo que todo sistema lineal posee.

en donde $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es la ganancia de retroalimentación. A diferencia de métodos convencionales para sistemas con retardo en la entrada que requieren del uso de predictores, el controlador (1.7) ofrece una estructura simple y fácil de implementar. Sin embargo, es necesario que D satisfaga la Suposición 1.3.1 para garantizar la funcionalidad de (1.7); ver [38] para más detalles.

De acuerdo a lo mencionado previamente, el problema de identificación del retardo para sistemas de la forma (1.6) esta resuelto en el contexto de esquemas de control con predictores. Por otro lado, cuando el retardo es relativamente pequeño con respecto a la escala de tiempo del sistema, el uso de un controlador de dimensión finita como el presentado en (1.7) es preferible. Sin embargo, no existe un análisis riguroso que permita garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado y la identificación del retardo de manera concurrente.

1.4. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es presentar un método sistemático de identificación de retardo para el sistema potencialmente inestable (1.6) en lazo cerrado con el controlador por retroalimentación de estado completo (1.7).

Objetivos particulares

- Estabilización: Considerando que el retardo D es conocido, realizar un análisis de estabilidad del sistema (1.6) en lazo cerrado con (1.7)
- Identificación: Considerando que el retardo D es incierto, proponer una ley adaptable para identificar el retardo en lazo cerrado y realizar el análisis de estabilidad correspondiente.
- Confirmación numérica: Usando simulaciones numéricas, mostrar la efectividad del enfoque propuesto en términos de estabilización e identificación, así como las implicaciones en el contexto de control adaptable.

1.5. Estructura de la tesis

El resto de la tesis se organiza de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se presenta una prueba de estabilidad para sistemas con retardo en la entrada considerando un controlador por

retroalimentación de estado completo. En este capítulo, se asume que el retardo es conocido con el objetivo de introducir las principales herramientas y conceptos que serán empleados en este trabajo de tesis. En el Capítulo 3, se considera ahora que el retardo es desconocido, y empleando las herramientas introducidas en el Capítulo 2, se propone un algoritmo de identificación en lazo cerrado. A pesar de que no se garantiza convergencia, el valor del retardo identificado es suficientemente exacto como se muestra mediante simulaciones numéricas. Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Estabilización

En este capítulo se introducen de forma concisa las herramientas empleadas para obtener los resultados principales en este trabajo de tesis. Con este fin, suponemos que el retardo en la entrada es conocido (dicha suposición se removera en el siguiente capítulo). De manera más precisa, consideramos un enfoque “backstepping”, el cual se usa de manera convencional en esquemas de control con predictores [21], y lo empleamos más allá de su uso tradicional para encontrar condiciones bajo las cuales una clase general de sistemas lineales con retardo en la entrada puede ser estabilizado usando un controlador de dimensión finita. Por lo tanto, el enfoque propuesto aquí se adapta solo para sistemas con retardo relativamente pequeño y no requiere de predictores, simplificando la estructura e implementación del controlador.

2.1. Preliminares

En este capítulo nos enfocamos en sistemas potencialmente inestables de la forma

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t - D), \quad (2.1)$$

en donde $X \in \mathbb{R}^n$ es el estado instantáneo, U es la entrada de control, y la matriz A y el vector B son de dimensiones apropiadas. El retardo $D > 0$ se considera constante y satisface la siguiente suposición:

Suposición 2.1.1. *El retardo en la entrada es tal que $D < 1$.*

El sistema (2.1) está sujeto al controlador

$$U(t) = KX(t), \quad (2.2)$$

en donde $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es una ganancia de retroalimentación tal que $A + BK$ es Hurwitz estable.

2.1.1. Representación en cascada

A continuación, abordamos el problema de estabilización usando un modelo para el retardo que consiste en una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) de primer orden acoplada en cascada con una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO); es decir, consideramos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(0, t), \\ u_t(x, t) &= u_x(x, t), \\ u(D, t) &= U(t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Decimos que $u(x, t)$ es el estado del actuador, el cual se define a través de la entrada de control como

$$u(x, t) = U(t + x - D),\tag{2.4}$$

en donde $x \in [0, D]$. Nótese que cuando $x = 0$, obtenemos $u(0, t) = U(t - D)$ y con $x = D$, $u(D, t) = U(t)$. Estas relaciones se utilizarán a continuación para definir una transformación backstepping apropiada.

Observación 2.1.1. *En las coordenadas del sistema (2.3), el estado (X, u) es de dimensión infinita. Dicha dimensionalidad infinita es asociada al estado de la EDP, $u(x, t)$.*

Observación 2.1.2. *Cuando se conoce el retardo en la entrada, utilizar una Ecuación Diferencial en Diferencias (EDD) para representar al sistema o tratar al retardo en la entrada como una EDP es una cuestión de elección. El análisis de estabilidad puede llevarse a cabo con cualquiera de estos dos enfoques. No obstante, las ventajas de usar la representación en cascada en (2.3) se hace evidente en problemas en donde el retardo es incierto, como se mostrara más adelante en el Capítulo 3.*

2.1.2. Transformación backstepping

Suponiendo que el estado del actuador está disponible para medición, consideramos la siguiente transformación backstepping para el estado del actuador

$$w(x, t) = u(x, t) - KX(t + x - D),\tag{2.5}$$

escrita de manera explícita como

$$w(x, t) = u(x, t) + \int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)} Bu(y, t) dy - Ke^{A(x-D)} X(t),\tag{2.6}$$

en donde $X(t+x-D)$ se obtiene de (2.1) usando la formula de variación-de-constantes en un horizonte de integración desde $x-D$ hasta t .

Proposición 2.1.1. *Bajo la transformación backstepping (2.6), el sistema (2.3) se puede escribir como*

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + A_1X(t-D) + Bw(0,t), \\ w_x(x,t) &= w_t(x,t), \\ w(D,t) &= 0,\end{aligned}\tag{2.7}$$

en donde $A_1 = BK$.

Demostración. Se sigue directamente de (2.6) que

$$w_x(x,t) = u_x(x,t) - KBu(x-D,t) + \int_{x-D}^0 KAe^{A(x-y-D)}Bu(y,t)dy - KAe^{A(x-D)}X(t),\tag{2.8}$$

en donde $w_x(x,t)$ denota la derivada parcial de $w(x,t)$ con respecto a x . Más aún, también de (2.6), tenemos que

$$w_t(x,t) = u_t(x,t) + \int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)}Bu_t(y,t)dy - Ke^{A(x-D)}\dot{X}(t),$$

en donde $w_t(x,t)$ es la derivada parcial de $w(x,t)$ con respecto a t . Usando integración por partes en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}w_t(x,t) &= u_t(x,t) + Ke^{A(x-D)}Bu(0,t) - KBu(x-D,t) \\ &\quad + \int_{x-D}^0 KAe^{A(x-y-D)}Bu(y,t)dy - Ke^{A(x-D)}\dot{X}(t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Sustituyendo $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(0,t)$ y $u_t(x,t) = u_x(x,t)$ en (2.9) implica que

$$w_x(x,t) = w_t(x,t).$$

Ahora, con $x = D$ en (2.6), se sigue que

$$w(D,t) = u(D,t) - KX(t) = 0,$$

ya que $u(D,t) = U(t) = KX(t)$.

Por otro lado, sumando y restando el término $BKX(t-D)$ en la EDO del sistema en cascada (2.3) obtenemos

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BKX(t-D) + B(u(0,t) - KX(t-D)).$$

La prueba concluye notando que $w(0,t) = u(0,t) - KX(t-D)$ cuando se evalúa (2.6) en $x = 0$. \square

Observación 2.1.3. El sistema (2.7) exhibe la estructura de una EDP no-forzada en cascada con una EDD exponencialmente estable.

Lema 2.1.1. La transformación backstepping en (2.7) admite el siguiente estimado

$$\|w(t)\| \leq 3\|u(t)\|^2 + 24D^3\eta_w^3|K|^2|A_1|^2\|X_t\|_{3D}^2 + 6D|K|^2\eta_w^2|X(t)|^2 \quad (2.10)$$

en donde $\eta_w = \max_{x \in [-D, D]} e^{|A(x-D)|}$.

Demostración. Elevando al cuadrado ambos lados de (2.6) e integrando desde $-D$ hasta D con respecto a x , se tiene que

$$\int_{-D}^D w(x, t)^2 dx = \int_{-D}^D \left(u(x, t) + \int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)} Bu(y, t) dy - Ke^{A(x-D)} X(t) \right)^2 dx.$$

De donde obtenemos la siguiente mayorización

$$\begin{aligned} \|w(t)\|^2 &\leq 3\|u(t)\|^2 + 3 \int_{-D}^D \left(Ke^{A(x-D)} X(t) \right)^2 dx \\ &\quad + 3 \int_{-D}^D \left(\int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)} Bu(y, t) dy \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

El estimado en (2.10) se sigue de la relación anterior con $\eta_w = \max_{x \in [-D, D]} e^{|A(x-D)|}$. \square

2.1.3. Transformación backstepping inversa

De manera similar a como está definida la transformación (2.6), la transformada inversa de $w(x, t)$ es de la forma:

$$u(x, t) = w(x, t) + KX(t + x - D).$$

escrita de manera explícita como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= w(x, t) + Ke^{A(x-D)} X(t) \\ &\quad - \int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)} A_1 X(t + y - D) dy - \int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)} Bw(y, t) dy, \end{aligned} \quad (2.12)$$

en donde $X(t + x - D)$ se obtiene ahora a partir de la EDD en (2.7) usando la formula de variación-de-constantes en un horizonte de integración desde $t + x - D$ hasta t .

Proposición 2.1.2. Bajo la transformación backstepping inversa (2.6), el sistema (2.7) se puede escribir en sus coordenadas originales en (2.3).

Demostración. Se sigue directamente de (2.12) que:

$$u_x(x,t) = w_x(x,t) + KAe^{A(x-D)}X(t) + KA_1X(t+x-2D) + A_1w(x-D,t) \\ - \int_{x-D}^0 KAe^{A(x-y-D)}A_1X(t+y-D)dy - \int_{x-D}^0 KAe^{A(x-y-D)}Bw(y,t)dy$$

en donde $u_x(x,t)$ denota la derivada parcial de $u(x,t)$ con respecto a x . Más aún, también de (2.12), tenemos que

$$u_t(x,t) = w_t(x,t) + Ke^{A(x-D)}\dot{X}(t) \\ - \int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)}A_1\dot{X}(t+y-D)dy - \int_{x-D}^0 Ke^{x-y-D}Bw_t(y,t)dy \quad (2.13)$$

en donde $u_t(x,t)$ es la derivada parcial de $u(x,t)$ con respecto a t . Sustituyendo $\dot{X}(t) = AX(t) + A_1X(t-D) + Bw(0,t)$ y usando integración por partes en el último término, obtenemos que

$$u_x(x,t) = u_t(x,t).$$

Ahora, con $x = D$ en (2.12), se sigue que

$$u(D,t) = w(D,t) + KX(t) = KX(t) = U(t),$$

ya que $w(D,t) = 0$.

Por otro lado, recordando que $A_1 = BK$ en la EDD del sistema en cascada (2.7) obtenemos

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(w(0,t) + KX(t-D)).$$

La prueba concluye notando que $u(0,t) = w(0,t) + KX(t-D)$ cuando se evalúa (2.12) en $x = 0$. \square

Lema 2.1.2. *La transformación backstepping inversa en (2.12) admite el siguiente estimado*

$$\|u(t)\|^2 \leq 4\|w(t)\|_{D^+}^2 + 4D\eta_u^2|K|^2|X(t)|^2 \\ + 4D^3\eta_u^2|K|^2|A_1|^2\|X_t\|_{2D}^2 + 4D^2\eta_u^2|K|^2|B|^2\|w(t)\|_{-D}^2, \quad (2.14)$$

en donde $\eta_u = \max_{x \in [0,D]} e^{|A(x-D)|}$.

Demostración. Elevando al cuadrado ambos lados de (2.12) e integrando de 0 hasta D con respecto a x , se tiene que

$$\int_0^D u(x,t)^2 dx = \int_0^D \left(w(x,t) + Ke^{A(x-D)}X(t) - \int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)}A_1X(t+y-D)dy \right. \\ \left. - \int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)}Bw(y,t)dy \right)^2 dx.$$

De donde obtenemos la siguiente mayorización

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{D^+}^2 &\leq 4\|w(t)\|_{D^+}^2 + 4 \int_0^D (Ke^{A(x-D)}X(t))^2 dx \\ &\quad + 4 \int_0^D \left(\int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)}Bw(y,t)dy \right)^2 dx \\ &\quad + 4 \int_0^D \left(\int_{x-D}^0 Ke^{A(x-y-D)}A_1X(t+y-D)dy \right)^2 dx. \end{aligned}$$

El estimado en (2.14) se sigue de la relación anterior con $\eta_u = \max_{x \in [0, D]} e^{|A(x-D)|}$. \square

2.2. Análisis de estabilidad

En esta sección abordamos el problema de estabilidad planteado en este capítulo en el sentido de la norma del estado completo, (X, u) ; es decir, empleamos la norma

$$\left(|X(t)|^2 + \int_0^D u(x,t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Para hacer posible el análisis, consideramos el funcional de tipo Lyapunov-Krasovskii^{1,2}

$$V(t) = V_0(t) + V_1(t) + D(V_2(t) + V_3(t) + V_4(t)), \quad (2.16)$$

con los siguientes términos individuales

$$\begin{aligned} V_0(t) &= X(t)^\top P X(t), \\ V_1(t) &= \frac{a}{2} \int_{-D}^D (1+x)w(x,t)^2 dx + \frac{a}{2} \int_0^D (1+x)w(x,t)^2 dx, \\ V_2(t) &= \int_0^D \int_{t-x}^t X(s)^\top A^\top S_0 A X(s) ds dx, \\ V_3(t) &= \int_0^D \int_{t-D-x}^t X(s)^\top A_1^\top S_1 A_1 X(s) ds dx, \\ V_4(t) &= \int_0^D \int_{t-x}^t w(0,s)^\top B^\top S_2 B w(0,s) ds dx, \end{aligned}$$

en donde P , S_0 , S_1 y S_2 son matrices simétricas y positivas definidas, y $a > 0$ es una constante a diseñar. También empleamos una *transformación de primer orden del modelo* como la

¹Note que la dependencia del funcional (2.16) en las variables (X, w) ocurre de manera “diagonal”. Es decir, no existen términos cruzados que involucren a X y a w .

²A pesar que V toma funciones como argumentos, para mantener la notación simple, solo usamos $V(t)$.

propuesta en [14]. Para ello, con base en la formula de Leibniz-Newton, podemos emplear la siguiente relación:

$$X(t-D) = X(t) - \int_{t-D}^t \dot{X}(\theta) d\theta,$$

con la cual, la EDD en (2.7) se puede escribir como

$$\dot{X}(t) = (A + A_1)X(t) + Bw(0,t) - A_1 \int_{t-D}^t (AX(s) + A_1X(s-D) + Bw(0,s)) ds, \quad (2.17)$$

con función inicial $\varphi : [-2D, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\varphi \in PC([-2D, 0], \mathbb{R}^n)$.

Observación 2.2.1. [15] Sabemos que bajo la transformación de primer orden, el modelo obtenido no es equivalente al original debido a la introducción de dinámicas adicionales. Sin embargo, garantizar la estabilidad de las soluciones del sistema transformado (2.17) implica la estabilidad de las soluciones del sistema original.

Tomando en cuenta la Observación 2.2.1, para asegurar consistencia, consideramos los siguientes conjuntos de condiciones iniciales

$$\mathcal{S}_\varphi = \{\varphi : |\varphi(\theta)| \leq |X_0|, \theta < 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{u_0} = \{u_0 : \|u(0)\|_\theta \leq \|u_0\|_{D^+}, \theta < 0\},$$

en donde $X_0 = X(0)$ y $u_0 = u(x, 0)$, $x \in [0, D]$.

Antes de presentar el resultado principal de este capítulo, presentamos los siguientes lemas con la finalidad de mantener la presentación compacta.

2.2.1. Cotas y derivada del funcional

Lema 2.2.1. El funcional $V(t)$ en (2.16) admite las siguientes cotas:

$$\beta_V \left(|X(t)|^2 + \|X_t\|_{2D}^2 + \|w(t)\|^2 \right) \leq V(t) \leq \alpha_V \left(|X(t)|^2 + \|X_t\|_{2D}^2 + \|w(t)\|^2 \right), \quad (2.18)$$

en donde

$$\alpha_V = \max \left\{ \lambda_{\max}(P), \frac{D^3}{2} \left(\lambda_{\max}(A^\top S_0 A) + 3\lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1) \right), a(1+D), \frac{a}{2}(1+D) + D^2 |B^\top S_2 B| \right\}, \quad (2.19)$$

$$\beta_V = \min \left\{ \lambda_{\min}(P), \frac{a}{2}(1-D), \frac{3}{2} D^3 \lambda_{\min}(A^\top S_0 A) \right\}. \quad (2.20)$$

Demostración. Comenzamos obteniendo la **cota superior**. Para ello, mayorizamos cada uno de los términos que conforman el funcional $V(t)$ en (2.16) de forma independiente. Entonces, usando la desigualdad de Rayleigh, tenemos de $V_0(t)$ que

$$V_0(t) \leq \lambda_{\max}(P)|X(t)|^2.$$

Usando integración por partes en $V_1(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} V_1(t) &\leq \frac{a}{2}(1+D) \int_{-D}^D w(x,t)^2 dx + \frac{a}{2}(1+D) \int_0^D w(x,t)^2 dx \\ &\leq \frac{a}{2}(1+D) \|w(t)\|^2 + \frac{a}{2}(1+D) \|w(t)\|_{D^+}^2 \\ &\leq \frac{a}{2}(1+D) \|w(t)\|_{D^-}^2 + a(1+D) \|w(t)\|_{D^+}^2. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de Rayleigh, ahora en el término $V_2(t)$:

$$\begin{aligned} V_2(t) &\leq \lambda_{\max}(A^\top S_0 A) \int_0^D \int_{t-x}^t \sup_{s \in [t-x, t]} |X(s)|^2 ds dx \\ &\leq \lambda_{\max}(A^\top S_0 A) \int_0^D \int_{t-x}^t ds dx \cdot \|X(t)\|_D^2 \\ &\leq \frac{D^2}{2} \lambda_{\max}(A^\top S_0 A) \|X(t)\|_D^2. \end{aligned}$$

De manera similar, encontramos de $V_3(t)$:

$$\begin{aligned} V_3(t) &\leq \lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1) \int_0^D \int_{t-D-x}^t \sup_{s \in [t-D-x, t]} |X(s)|^2 ds dx \\ &\leq \lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1) \int_0^D \int_{t-D-x}^t ds dx \cdot \|X(s)\|_{2D}^2 \\ &\leq \frac{3}{2} D^2 \lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1) \|X(t)\|_{2D}^2. \end{aligned}$$

Para el último término del funcional, primero usamos el cambio de variable $s = t + y$ en la integral interna, entonces

$$V_4(t) = \int_0^D \int_{-y}^0 w(0, t+y)^\top B^\top S_2 B w(0, t+y) dy dx.$$

Al evaluar $w(x, t)$ en (2.5) con $x = 0$ y $t = t + y$, tenemos que

$$w(0, t+y) = u(0, t+y) - KX(t+y-D) = U(t+y-D) - KX(t+y-D) = w(y, t).$$

Usando la igualdad anterior e invirtiendo el orden de integración, encontramos que

$$\begin{aligned} V_4(t) &= \int_{-D}^0 \int_{-y}^D w(y, t)^\top B^\top S_2 B w(y, t) dx dy \\ &\leq D \|B^\top S_2 B\| \|w(t)\|_{D^-}^2 \end{aligned}$$

Recolectando lo anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned}
V(t) &\leq \lambda_{\max}(P)|X(t)|^2 + \frac{a}{2}(1+D)\|w(t)\|_{D^-}^2 + a(1+D)\|w(t)\|_{D^+}^2 \\
&\quad + D\left(\frac{D^2}{2}\lambda_{\max}(A^\top S_0 A)\|X(t)\|_D^2 + \frac{3}{2}D^2\lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1)\|X(t)\|_{2D}^2 + D|B^\top S_2 B|\|w(t)\|_{D^-}^2\right) \\
&\leq \lambda_{\max}(P)|X(t)|^2 + \frac{D^3}{2}\left(\lambda_{\max}(A^\top S_0 A) + 3\lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1)\right)\|X(t)\|_{2D}^2 + a(1+D)\|w(t)\|_{D^+}^2 \\
&\quad + \left(D^2|B^\top S_2 B| + \frac{a}{2}(1+D)\right)\|w(t)\|_{D^-}^2.
\end{aligned}$$

La cota superior de $V(t)$ en (2.18) se sigue directamente de la mayorización anterior al definir α_V como en (2.19).

Para obtener la **cota inferior** primero notamos que

$$V(t) \geq V_0(t) + V_1(t) + D \cdot V_3(t).$$

Siguiendo los desarrollos presentados para obtener la cota superior, obtenemos las siguientes mayorizaciones

$$\begin{aligned}
V_0(t) &\geq \lambda_{\min}(P)|X(t)|^2 \\
V_1(t) &\geq \frac{a}{2}(1-D)\left(\|w(t)\|_{D^+}^2 + \|w(t)\|_{D^-}^2\right), \\
V_3(t) &\geq \frac{3}{2}D^2\lambda_{\min}(A^\top S_0 A)\|X(s)\|_{2D}^2.
\end{aligned}$$

Recolectando lo anterior, podemos escribir

$$V(t) \geq \lambda_{\min}(P)|X(t)|^2 + \frac{a}{2}(1-D)\left(\|w(t)\|_{D^+}^2 + \|w(t)\|_{D^-}^2\right) + \frac{3}{2}D^2\lambda_{\min}(A^\top S_0 A)\|X(s)\|_{2D}^2.$$

La cota inferior de $V(t)$ en (2.18) se sigue directamente de la mayorización anterior al definir β_V como en (2.20). \square

Antes de continuar, considere los siguientes lemas auxiliares tomados de [19].

Lema 2.2.2 ([19]). *Sea*

$$w(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \int_{t-\theta}^t f(s) ds d\theta$$

Entonces,

$$\frac{d}{dt}w(t) = (b-a)f(t) - (1-b) \int_{t-a}^b f(s) ds + (b-a) \int_{t-a}^t f(s) ds.$$

Demostración. La prueba es una consecuencia inmediata de la regla de Newton-Leibniz. \square

Lema 2.2.3 ([19]). *Sea $a(t) \leq b(t)$, entonces se cumple que:*

$$\left| \int_a^b f(s) ds \right|^2 \leq (b-a) \int_a^b |f(s)|^2 ds.$$

Demostración. La prueba se sigue de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(s) ds \right|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(s) ds \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b 1^2 ds \right) \left(\int_a^b f_i^2(s) ds \right) \\ &= \left(\int_a^b ds \right) \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i^2(s) ds = (b-a) \int_a^b |f_i(s) ds|^2 \end{aligned}$$

\square

A continuación obtenemos la derivada de $V(t)$ en (2.16) con respecto al tiempo y a lo largo de las trayectorias de la EDD en (2.17). Para simplificar la presentación, derivamos de manera independiente cada uno de los términos de $V(t)$.

Comenzamos entonces con la derivada de $V_0(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(t) &= X(t)^\top \left[(A + A_1)^\top P + P(A + A_1) \right] X(t) \\ &\quad + 2X(t)^\top PBw(0,t) - 2X(t)^\top PA_1 \int_{t-D}^t AX(s) ds \\ &\quad - 2X(t)^\top PA_1 \int_{t-D}^t A_1 X(s-D) ds - 2X(t)^\top PA_1 \int_{t-D}^t Bw(0,s) ds, \end{aligned}$$

empleando el Lema 2.2.3, obtenemos de la ecuación anterior que

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(t) &\leq X(t)^\top \left[(A + A_1)^\top P + P(A + A_1) \right] X(t) + 2X(t)^\top PBw(0,t) \\ &\quad + 2 \left| X(t)^\top PA_1 S_0^{-\frac{1}{2}} \right| \left| \int_{t-D}^t S_0^{\frac{1}{2}} AX(s) ds \right| + 2 \left| X(t)^\top PA_1 S_1^{-\frac{1}{2}} \right| \\ &\quad \times \left| \int_{t-D}^t S_1^{\frac{1}{2}} A_1 X(s-D) ds \right| + 2 \left| X(t)^\top PA_1 S_2^{-\frac{1}{2}} \right| \left| \int_{t-D}^t S_2^{\frac{1}{2}} Bw(0,s) ds \right| \\ &\leq X(t)^\top \left[(A + A_1)^\top P + P(A + A_1) \right] X(t) + 2X(t)^\top PBw(0,t) \\ &\quad + X(t)^\top PA_1 S_0^{-1} A_1 P X(t) + X(t)^\top PA_1 S_1^{-1} A_1^\top P X(t) \\ &\quad + X(t)^\top PA_1 S_2^{-1} A_1 P X(t) + D \int_{t-D}^t X(s)^\top A^\top S_0 A X(s) ds \\ &\quad + D \int_{t-2D}^{t-D} X(s)^\top A_1^\top S_1 A_1 X(s) ds + D \int_{t-D}^t w(0,s)^\top B^\top S_2 B w(0,s) ds. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Siguiendo con la derivada de $V_1(t)$, tenemos que

$$\dot{V}_1(t) = \frac{a}{2} \int_{-D}^D (1+x) \cdot 2w(x,t)w_t(x,t)dx + \frac{a}{2} \int_0^D (1+x) \cdot 2w(x,t)w_t(x,t)dx.$$

Recordando de (2.7) que $w_t(x,t) = w_x(x,t)$ y usando integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \frac{a}{2}(1+x)w(x,t)^2 \Big|_{-D}^D - \frac{a}{2} \int_{-D}^D w(x,t)^2 dx + \frac{a}{2}(1+x)w(x,t)^2 \Big|_0^D - \frac{a}{2} \int_0^D w(x,t)^2 dx \\ &= -\frac{a}{2}(1-D)w(-D,t)^2 - \frac{a}{2}w(0,t)^2 - \frac{a}{2}\|w(t)\|_{D^-}^2 - a\|w(t)\|_{D^+}^2. \end{aligned}$$

De la Suposición 2.1.1, sabemos que $D < 1$. Por lo tanto, se cumple que

$$\dot{V}_1(t) \leq -\frac{a}{2}w(0,t)^2 - \frac{a}{2}\|w(t)\|_{D^-}^2 - a\|w(t)\|_{D^+}^2. \quad (2.22)$$

Para obtener las derivadas de los términos $V_2(t)$, $V_3(t)$ y $V_4(t)$ empleamos directamente el Lema 2.2.2. Entonces

$$\dot{V}_2(t) = DX(t)^\top A^\top S_0 AX(t) - \int_{t-D}^t X(s)^\top A^\top S_0 AX(s)ds, \quad (2.23)$$

$$\dot{V}_3(t) = DX(t)^\top A_1^\top S_1 A_1 X(t) - \int_{t-2D}^{t-D} X(\xi)^\top A_1^\top S_1 A_1 X(\xi)d\xi, \quad (2.24)$$

$$\dot{V}_4(t) = Dw(0,t)^\top B^\top S_2 Bw(0,t) - \int_{t-D}^t w(0,s)^\top B^\top S_2 Bw(0,s)ds, \quad (2.25)$$

en donde, para $\dot{V}_3(t)$ y $\dot{V}_4(t)$, empleamos los cambio de variable $\xi = t - D - s$ y $s = t - x$, respectivamente y subsecuentemente, invertimos el orden de integración.

Finalmente, definiendo $Q = Q_1 - PA_1 S_0^{-1} A_1^\top P - PA_1 S_1^{-1} A_1^\top P - PA_1 S_2^{-1} A_1^\top P$ en donde

$$Q_1 = -(A + A_1)^\top P - P(A + A_1) - D^2 A^\top S_0 A - D^2 A_1^\top S_1 A_1, \quad (2.26)$$

y usando (2.21)-(2.25), obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{V}_0(t) + \dot{V}_1(t) + D(\dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t)) \\ &\leq -X(t)^\top QX(t) + 2X(t)^\top PBw(0,t) \\ &\quad + D^2 |B^\top S_2 B| w(0,t)^2 - \frac{a}{2}w(0,t)^2 - \frac{a}{2}\|w(t)\|_{D^-}^2 - a\|w(t)\|_{D^+}^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2.2. Resultado principal: Caso con retardo conocido

Estamos listos para enunciar el resultado principal de esta capítulo, el cual formulamos en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1. *Considere el sistema (2.3) en lazo cerrado con el controlador (2.2) con ganancia de retroalimentación K dada. Bajo la Suposición 2.1.1, si existen matrices positivas definidas P , S_0 , S_1 y S_2 tales que*

$$\begin{pmatrix} Q_1 & PA_1 & PA_1 & PA_1 \\ A_1^\top P & S_0 & 0 & 0 \\ A_1^\top P & 0 & S_1 & 0 \\ A_1^\top P & 0 & 0 & S_2 \end{pmatrix} > 0, \quad (2.28)$$

en donde Q_1 esta dada en (2.26). Entonces, la solución del sistema en lazo cerrado, (X, u) , es estable en el sentido de que existe una constante positiva μ tal que para todas las condiciones iniciales $(X_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times L_2(0, D)$ se cumple lo siguiente:

$$|X(t)|^2 + \int_0^D u(x, t)^2 dx \leq \mu (|X_0|^2 + \|u_0\|). \quad (2.29)$$

Además $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \rightarrow 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) \rightarrow 0$.

Demostración. La derivada del funcional a lo largo de las trayectorias del sistema (2.17) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -X(t)^\top QX(t) + 2X(t)^\top PBw(0, t) \\ &\quad + D^2|B^\top S_2 B|w(0, t)^2 - \frac{a}{2}w(0, t)^2 - \frac{a}{2}\|w(t)\|_{D^-}^2 - a\|w(t)\|_{D^+}^2. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Young, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -X(t)^\top \left(Q - \frac{1}{b}PBB^\top P\right)X(t) + bw(0, t)^2 \\ &\quad + D^2|B^\top S_2 B|w(0, t)^2 - \frac{a}{2}w(0, t)^2 - \frac{a}{2}\|w(t)\|_{D^-}^2 - a\|w(t)\|_{D^+}^2 \end{aligned}$$

Usando complementos de Schur en (2.28) se sigue que $Q > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\left(\lambda_{\min}(Q) - \frac{|PB|^2}{b}\right)|X(t)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(a - 2b - 2D^2)|B^\top S_2 B|w(0, t)^2 - \frac{a}{2}\|w(t)\|_{D^-}^2 - a\|w(t)\|_{D^+}^2 \end{aligned}$$

Eligiendo

$$b = \frac{2|PB|^2}{\lambda_{\min}(Q)} \quad \text{y} \quad a = 2b + 2D^2|B^\top S_2 B|.$$

resulta en

$$\dot{V}(t) \leq -\mu_V (|X(t)|^2 + w(0, t)^2), \quad (2.30)$$

en donde

$$\mu_V = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2}, \frac{2|PB|^2}{\lambda_{\min}(Q)} + D^2|B^\top S_2 B| \right\}.$$

Lo anterior garantiza que la derivada del funcional es negativa semidefinida por lo que

$$V(t) \leq V(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.31)$$

Para obtener un estimado de estabilidad, primero notamos de (2.10) que

$$\begin{aligned} \|w(t)\|^2 + |X(t)|^2 + \|X_t\|_{3D}^2 &\leq 3\|u(t)\|^2 + (6D|K|^2\eta_w^2 + 1)|X(t)|^2 \\ &\quad + (24D^3\eta_w^3|K|^2|A_1|^2 + 1)\|X_t\|_{3D}^2 \end{aligned}$$

y de (2.14) que

$$\begin{aligned} |X(t)|^2 + \|u(t)\|_{D^+}^2 &\leq 4\|w(t)\|_{D^+}^2 + (4D|K|^2\eta_u^2 + 1)|X(t)|^2 \\ &\quad + 4D^3\eta_u^2|K|^2|A_1|^2\|X_t\|_{2D}^2 + 4D^2\eta_u^2|K|^2|B|^2\|w(t)\|_{-D}^2 \end{aligned}$$

Combinando las desigualdades anteriores con las cotas del funcional en (2.18) y notando que $\|X_t\|_{2D} \leq \|X_t\|_{3D}$ por definición, se obtiene:

$$\frac{\beta_V}{\alpha_u} (|X(t)|^2 + \|u(t)\|_{D^+}^2) \leq V(t) \leq \alpha_V \alpha_w (|X(t)|^2 + \|X_t\|_{3D}^2 + \|u(t)\|^2),$$

en donde

$$\begin{aligned} \alpha_u &= \max \left\{ 4D^3\eta_u^2|K|^2|A_1|^2, 4D|K|^2\eta_u^2 + 1, 4D^2\eta_u^2|K|^2|B|^2, 4 \right\}, \\ \alpha_w &= \max \left\{ 6D|K|^2\eta_w^2 + 1, 24D^3\eta_w^3|K|^2|A_1|^2 + 1, 3 \right\}. \end{aligned}$$

El resultado anterior, junto con (2.31), implica que

$$|X(t)|^2 + \|u(t)\|_{D^+}^2 \leq \frac{\alpha_u \alpha_w \alpha_V}{\beta_V} (|X(0)|^2 + \|X_0\|_{3D}^2 + \|u(0)\|^2).$$

Con $\varphi \in \mathcal{S}_\varphi$ y $u_0 \in \mathcal{S}_{u_0}$, obtenemos el estimado de estabilidad (2.29) con $\mu = 2\alpha_u \alpha_w \alpha_V / \beta_V$.

Finalmente, verificamos el resultado de regulación. Por un lado, integrando (2.30) para t desde 0 hasta ∞ , notamos que $X(t)$ y $w(t)$ son uniformemente acotadas, lo que nos permite deducir que $u(t)$ también es acotada uniformemente por la desigualdad (2.14); al igual que $U(t)$, por la desigualdad en (2.2). De (2.4), obtenemos que $u(x, t)$ es acotada uniformemente y, por lo tanto, $u(0, t)$ es también uniformemente acotada para todo $t \geq D$. Usando (2.7), se obtiene que $d|X(t)|/dt$ para $t \geq 0$ es uniformemente acotada. De (2.30), $|X(t)|$ es cuadrado integrable, por lo que, de acuerdo al lema de Barbalat [17], se concluye que $X(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Por otro lado, (2.30) implica que $\|w(t)\|$ es cuadrado integrable y de (2.14) obtenemos que $\|u(t)\|_{D^+}$ es también cuadrado integrable y además, la señal $U(t)$ es cuadrado integrable por (2.2). Ahora, la derivada de $U(t)^2$ con respecto al tiempo es

$$\frac{d}{dt}U(t)^2 = 2U(t)\dot{X}(t).$$

El hecho que $\dot{X}(t)$ y $U(t)$ son uniformemente acotadas, implica que $dU(t)^2/dt$ también lo es, y por lo tanto, de acuerdo al lema de Barbalat, $U(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

2.3. Caso de estudio

Considere el sistema de primer orden con retardo en la entrada en (1.1) en lazo cerrado con el controlador PI en (1.2). Definiendo

$$X(t) = \begin{pmatrix} Y(t) \\ \int_0^t Y(s)ds \end{pmatrix},$$

Podemos expresar al sistema (1.1)-(1.2) como:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t - D), \\ U(t) &= KX(t), \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -1/T & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\kappa/T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_p & k_i \end{pmatrix}.$$

Tomando como condiciones iniciales $X_0 = [0.6, 0.2]^\top$ y $\psi(t) = 0$, $t \in [-D, 0]$. Con $D = 0.2$, $\kappa = -4$, $T = -4$, $k_p = 2.36$ y $k_i = 1.75$, las condiciones en el Teorema 2.2.1 se cumplen con

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 0.1145 & 0.0263 \\ 0.0263 & 0.1132 \end{pmatrix} & S_0 &= \begin{pmatrix} 1.6963 & 0.4126 \\ 0.4126 & 0.8961 \end{pmatrix} \\ S_1 &= \begin{pmatrix} 0.4941 & 0.2838 \\ 0.2838 & 1.1931 \end{pmatrix} & S_2 &= \begin{pmatrix} 1.9430 & 0.6961 \\ 0.6961 & 1.5139 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo que el controlador (1.2) estabiliza al sistema (1.1), como se confirma en la Figura (2.1), en donde los estados y la señal de control convergen a 0.

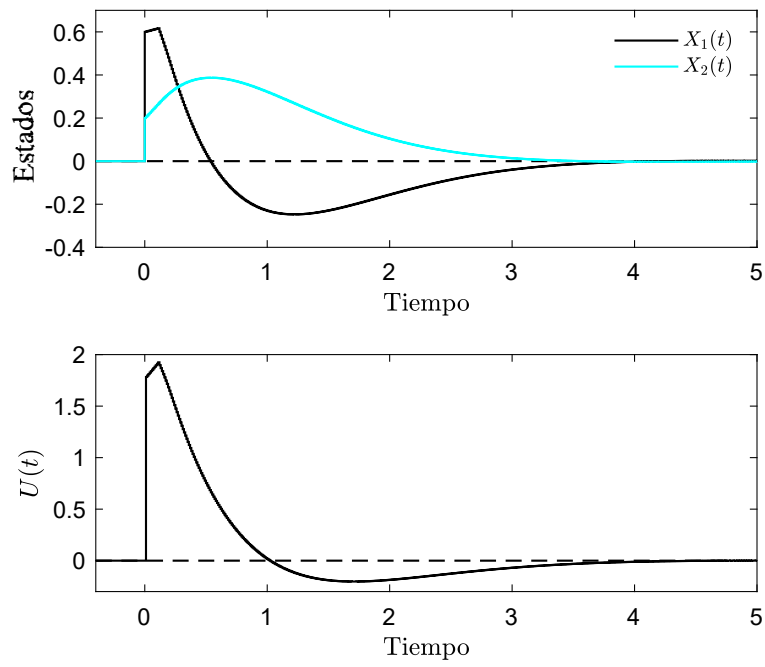


Figura 2.1: Respuesta del sistema (1.1) en lazo cerrado con el controlador PI (1.2). (Panel superior) Estados del sistema. (Panel inferior) señal de control $U(t)$.

Capítulo 3

Identificación

En este capítulo consideramos que el retardo en la entrada del sistema bajo estudio es incierto. Por lo tanto, utilizando las herramientas desarrolladas en el Capítulo 2, proponemos un método de identificación para el retardo. Dado que el tipo de sistemas considerados en este trabajo son potencialmente inestables en lazo abierto, es necesario construir una ley de adaptación para el retardo alrededor de un controlador estabilizante que no requiera de esquemas de predicción. Con este fin, proponemos usar un controlador por retroalimentación completa de estado y verificamos la estabilidad del sistema en lazo cerrado con el controlador de dimensión finita y la ley de adaptación para el retardo.

3.1. Preliminares

Partiendo de un sistema potencialmente inestable y con retardo desconocido de la forma

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t - D), \quad (3.1)$$

en donde $X \in \mathbb{R}^n$ es el estado instantáneo, U es la entrada de control, y la matriz A y el vector B son de dimensiones apropiadas. El retardo $D > 0$ se considera constante, aunque desconocido.

Suposición 3.1.1. *El retardo en la entrada es tal que $D < D_{\text{máx}} < 1$*

El sistema (3.1) está sujeto al controlador

$$U(t) = KX(t), \quad (3.2)$$

en donde K es la ganancia de retroalimentación tal que $A + BK$ es Hurwitz.

3.1.1. Representación en cascada

La representación en cascada, considerando un retardo incierto, consiste en una EDP en cascada con una EDO:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(0,t) \\ Du_t(x,t) &= u_x(x,t) \\ u(1,t) &= U(t).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Donde $u(x,t)$ representa el estado del actuador definido a través de la entrada de control como

$$u(x,t) = U(t + D(x - 1)).\tag{3.4}$$

Note en (3.3) que la velocidad de propagación $1/D$ es desconocida, pero la longitud del dominio, x , es conocida. Más aún, al evaluar (3.4) en $x = 1$ se obtiene que $u(1,t) = U(t) = KX(t)$. Similarmente, para $x = 0$, se obtiene que $u(0,t) = U(t - D) = KX(t - D)$. Estas relaciones serán usadas más adelante para definir la transformación backstepping apropiada.

Observación 3.1.1. *En las coordenadas del sistema (3.3), observe que el estado (X, u) es de dimensión infinita. Dicha dimensionalidad infinita es asociada al estado de la EDP $u(x, t)$.*

Observación 3.1.2. *Aunque la entrada de control $U(t)$ es completamente conocida, no es posible deducir el valor de $u(x, t)$ para cada $x \in [0, 1]$ ya que no se conoce la velocidad de propagación $1/D$, por lo que es necesario un estimado $\hat{u}(x, t) = U(t - \hat{D}(x - 1))$, en donde $\hat{D} = \hat{D}(t)$ es un estimado de D . En este trabajo, sin embargo, asumimos que la entrada distribuida esta disponible para su medición, por lo que no es necesario un estimado del estado $u(x, t)$.*

3.1.2. Transformación backstepping

Bajo la Observación 3.1.2, consideramos la siguiente transformación backstepping:

$$w(x,t) = u(x,t) - KX(t + D(x - 1)),\tag{3.5}$$

En donde $X(t + (x - 1)D)$ se obtiene por medio de la fórmula de variación-de-constantes a partir de (3.1), integrando en un intervalo de tiempo de $y = t + (x - 1)D$ a $y = t$, y subsecuentemente reemplazando D por el estimado $\hat{D}(t)$.

Suposición 3.1.2. *El estimado del retardo $\hat{D}(t)$ es tal que*

$$0 < D_{\min} \leq \hat{D}(t) \leq D_{\max} < 1$$

La expresión (3.5) se puede escribir de explícita como:

$$w(x, t) = u(x, t) + \hat{D}(t) \int_{x-1}^0 K e^{A\hat{D}(t)(x-y-1)} B u(y, t) dy - K e^{A\hat{D}(t)(x-1)} X(t). \quad (3.6)$$

Considerando la Observación 3.1.2, tenemos de (3.5) que

$$w(x, t) = u(x, t) - KX(t + \hat{D}(x-1)) \quad (3.7)$$

Proposición 3.1.1. *Bajo la transformación backstepping (3.6), el sistema (3.3) se puede escribir como:*

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + A_1 X(t - \hat{D}(t)) + Bw(0, t) \\ Dw_t(x, t) &= w_x(x, t) - \tilde{D}(t)p(x, t) - D\dot{\hat{D}}(t)q(x, t) \\ w(1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

en donde $\tilde{D}(t) = D - \hat{D}(t)$ es el error de estimación del retardo, $A_1 = BK$ y

$$p(x, t) = K e^{A\hat{D}(t)(x-1)} (AX(t) + Bu(0, t)), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} q(x, t) &= KA(x-1) e^{A\hat{D}(t)(x-1)} X(t) \\ &\quad - \int_{x-1}^0 K(I + A\hat{D}(t)(x-y-1)) e^{A\hat{D}(t)(x-y-1)} B u(y, t) dy. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Demostración. Por simplicidad, se omitirá la dependencia de $\hat{D}(t)$ respecto a t en los siguientes cálculos. Tomando en cuenta el hecho que $u_x(x, t) = Du_t(x, t)$, a partir de (3.6), obtenemos que

$$\begin{aligned} w_x(x, t) &= Du_t(x, t) - \hat{D}KBu(x-1, t) \\ &\quad + \hat{D}^2 \int_{x-1}^0 KA e^{A\hat{D}(x-y-1)} Bu(y, t) dt - KA\hat{D}e^{A\hat{D}(x-1)} X(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

en donde $w_x(x, t)$ denota la derivada parcial de $w(x, t)$ con respecto a x . También de (3.6), obtenemos que

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= u_t(x, t) + \hat{D} \int_{x-1}^0 KA e^{A\hat{D}(x-y-1)} Bu_t(y, t) dt \\ &\quad - K e^{A\hat{D}(x-1)} \dot{X}(t) - \dot{\hat{D}} \left\{ KA(x-1) e^{A\hat{D}(x-1)} X(t) \right. \\ &\quad \left. - \int_{x-1}^0 K[I + \hat{D}A(x-y-1)] e^{A\hat{D}(x-y-1)} Bu(y, t) dy \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

en donde $w_t(x, t)$ representa la derivada parcial de $w(x, t)$ con respecto a t .

Sumando y restando los términos $w_x(x,t)$ y $\hat{D}p(x,t)$, con $p(x,t)$ en (3.9), a la ecuación anterior y manipulando algebraicamente, podemos llegar a que:

$$Dw_t(x,t) = w_x(x,t) - \tilde{D}(t)p(x,t) - D\hat{D}q(x,t) + r(x,t),$$

con $q(x,t)$ en (3.10) y

$$r(x,t) = -w_x(x,t) - \hat{D}p(x,t) + Du_t(x,t) + D\hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)} Bu_t(y,t) dy. \quad (3.13)$$

Sustituyendo ahora (3.11) en (3.13) se puede llegar a:

$$\begin{aligned} r(x,t) = & -\hat{D}Ke^{A\hat{D}(x-1)} Bu(0,t) + D\hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)} Bu_t(y,t) dy \\ & + \hat{D}KBu(x-1,t) - \hat{D}^2 Ke^{A\hat{D}(x-1)} \int_{x-1}^0 e^{-A\hat{D}y} Bu(y,t) dy. \end{aligned}$$

Usando integración por partes en el último término de la expresión anterior, concluimos que $r(x,t) = 0$, por lo que:

$$Dw_t(x,t) = w_x(x,t) - \tilde{D}(t)p(x,t) - D\hat{D}(t)q(x,t). \quad (3.14)$$

Por otro lado, de (3.4) sabemos que $u(1,t) = U(t) = KX(t)$, por lo que, de (3.7) con $x = 1$ se sigue que

$$w(1,t) = u(1,t) - KX(t) = 0.$$

Finalmente, sumando y restando el término $BKX(t - \hat{D})$ en la EDO que forma parte de (3.3), obtenemos:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BKX(t - \hat{D}) + B(u(0,t) - KX(t - \hat{D}))$$

La prueba concluye notando que $w(0,t) = u(0,t) - KX(t - \hat{D})$ cuando se evalúa $x = 0$ en (3.7). \square

Lema 3.1.1. *La transformación backstepping en (3.6) admite el siguiente estimado*

$$\|w(t)\|^2 \leq 6\eta_w^2 |K|^2 |X(t)|^2 + 24D_{\max}^2 \eta_w^2 |K|^2 |A_1|^2 \|X_t\|_{3D_{\max}}^2 + 3\|u(t)\|^2, \quad (3.15)$$

en donde $\eta_w = \max_{x \in [-1,1]} e^{|AD_{\max}(x-1)|}$.

Demostración. Elevando al cuadrado ambos lados de (3.6) e integrando desde $x = -1$ hasta $x = 1$.

$$\int_{-1}^1 w(x,t)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(u(x,t) + \hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)} Bu(y,t) dy - Ke^{A\hat{D}(x-1)} X(t) \right)^2 dx,$$

de donde obtenemos la siguiente mayorización:

$$\begin{aligned} \|w(t)\|^2 &\leq 3\|u(t)\|^2 + 3 \int_{-1}^1 \left(Ke^{A\hat{D}(x-1)}X(t) \right)^2 dx \\ &\quad + 3D_{\max}^2 \int_{-1}^1 \left(\int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}Bu(y,t)dy \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|w(t)\|^2 &\leq 3\|u(t)\|^2 + 3 \int_{-1}^1 \left(Ke^{A\hat{D}(x-1)}X(t) \right)^2 dx \\ &\quad + 3D_{\max}^2 \int_{-1}^1 \left(\int_{x-1}^0 |Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}|^2 dy \int_{x-1}^0 |A_1X(t + D(y-1))|^2 dy \right)^2 dx. \end{aligned}$$

El estimado en (3.15) se sigue de la relación anterior con $\eta_w = \max_{x \in [-1,1]} e^{|AD_{\max}(x-1)|}$. \square

3.1.3. Transformación backstepping inversa

De manera similar a como se ha definido la transformación (3.5), la transformada inversa de $w(x,t)$ es de la forma:

$$u(x,t) = w(x,t) + KX(t + D(x-1)). \quad (3.16)$$

La expresión anterior puede reescribirse de manera explícita como:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= w(x,t) + Ke^{A\hat{D}(x-1)}X(t) - \hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}Bw(y,t)dy \\ &\quad - \hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}A_1X(t + \hat{D}(y-1))dy, \end{aligned} \quad (3.17)$$

en donde $X(t + \hat{D}(x-1))$ se obtiene a partir de la EDD en (3.8) mediante la fórmula de variación-de-constantes, integrando en una ventana de tiempo desde $x-1$ hasta 0. Recordando que el retardo D es desconocido, lo reemplazamos por su estimación $\hat{D}(t)$, bajo la suposición que $w(x,t)$ está disponible para medición y puede ser deducido para toda $x \in [0, 1]$. Entonces, la transformada inversa (3.16) puede escribirse como:

$$u(x,t) = w(x,t) + KX(t + \hat{D}(x-1)). \quad (3.18)$$

Proposición 3.1.2. *Bajo la transformación backstepping inversa (3.17), el sistema (3.8) se puede escribir en sus coordenadas originales en (3.3).*

Demostración. Se sigue directamente de (3.17) que:

$$u_x(x,t) = w_x(x,t) + KA\hat{D}e^{A\hat{D}(x-1)}X(t) + \hat{D}KBu(x-1,t) - \hat{D}^2 \int_{x-1}^0 KAe^{A\hat{D}(x-y-1)}Bu(y,t)dy,$$

en donde $u_x(x,t)$ denota a la derivada parcial de $u(x,t)$ con respecto a x . Empleando integración por partes en el último término de la expresión anterior, obtenemos:

$$u_x(x,t) = w_x(x,t) + \hat{D}p(x,t) - D\hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}Bu_t(y,t)dy. \quad (3.19)$$

donde $p(x,t)$ está descrita en (3.9). Por otro lado, también de (3.17), obtenemos que:

$$u_t(x,t) = w_t(x,t) - \hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}Bu_t(y,t)dy + Ke^{A\hat{D}(x-1)}\dot{X}(t) + \hat{D} \left\{ KA(x-1)e^{A\hat{D}(x-1)}X(t) - \int_{x-1}^0 K[I + \hat{D}A(x-y-1)]e^{A\hat{D}(x-y-1)}Bu(y,t)dy \right\},$$

donde $u_t(x,t)$ denota la derivada parcial de $u(x,t)$ con respecto a t . Sumando y restando los términos $u_x(x,t)$ y $\hat{D}Ke^{A\hat{D}(x-1)}\dot{X}(t)$ en la expresión anterior, y después de manipulación algebraica, se puede llegar a que:

$$Du_t(x,t) - u_x(x,t) = \tilde{D}(t)Ke^{A\hat{D}(x-1)}\dot{X}(t) + \hat{D}(t)Ke^{A\hat{D}(x-1)}\dot{X}(t) + D\hat{D}(t)q(x,t) + Dw_t(x,t) - u_x(x,t) - D\hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}Bu_t(y,t)dy. \quad (3.20)$$

Sustituyendo $Dw_t(x,t)$, como está descrito en (3.14) en la expresión anterior y tras un largo desarrollo algebraico, se puede concluir que el lado derecho de la igualdad en (3.20) es nulo, por lo que:

$$Du_t(x,t) = u_x(x,t)$$

Además, al evaluar a $u(x,t)$ en $x = 1$, obtenemos

$$u(1,t) = w(1,t) + KX(t) = KX(t) = U(t).$$

Finalmente, de la EDD del sistema (3.8), se tiene que:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(KX(t-D) + w(0,t)),$$

y la prueba concluye notando que $u(0,t) = KX(t-D) + w(0,t)$. \square

Lema 3.1.2. *La transformación backstepping inversa en (3.17) admite el siguiente estimado:*

$$\|u(t)\|_{1+}^2 \leq 4\eta_u^2|K|^2|X(t)|^2 + 4D_{\max}^2\eta_u^2|K|^2|A_1|^2\|X_t\|_{2D_{\max}}^2 + 4\|w(t)\|_{1+}^2 + 4D_{\max}^2\eta_u^2|K|^2|B|^2\|w(t)\|_{1-}^2 \quad (3.21)$$

donde $\eta_u = \max_{x \in [0,1]} e^{|AD_{\max}(x-1)|}$.

Demostración. Elevando al cuadrado ambos lados de (3.17) e integrando de 0 a 1 respecto a x , se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x,t)^2 = \int_0^1 & \left(w(x,t) + Ke^{A\hat{D}(x-1)}X(t) \right. \\ & - \hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}Bw(y,t)dy \\ & \left. - \hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}A_1X(t + \hat{D}(y-1))dy \right)^2 dx, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente mayorización:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{1+}^2 \leq & 4\|w(t)\|_{1+}^2 + 4 \int_0^1 (Ke^{A\hat{D}(x-1)}X(t))^2 dx \\ & + 4 \int_0^1 \left(\hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}Bw(y,t)dy \right)^2 dx \\ & + 4 \int_0^1 \left(\hat{D} \int_{x-1}^0 Ke^{A\hat{D}(x-y-1)}A_1X(t + \hat{D}(y-1))dy \right)^2 dx. \end{aligned}$$

El estimado (3.21) se sigue de la relación anterior con $\eta_u = \max_{x \in [0,1]} e^{|AD_{\max}(x-1)|}$. \square

3.2. Análisis de estabilidad

En esta sección se abordará el problema de estabilidad planteado en el sentido de la norma del estado completa, (X, u, \tilde{D}) ; es decir, emplearemos la norma

$$\left(|X(t)|^2 + \int_0^D u(x,t)^2 dx + \tilde{D}(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.22)$$

Además, se obtendrá el estimado del retardo $\hat{D}(t)$. Para llevar a cabo este análisis de estabilidad, consideraremos el siguiente funcional de tipo Lyapunov-Krasovskii^{1,2}:

$$V(t) = D \log(N(t)) + \frac{a}{2\gamma} \tilde{D}(t)^2, \quad (3.23)$$

en donde

$$N(t) = 1 + N_0(t) + N_1(t) + D_{\max}N_2(t) + \frac{D_{\max}}{(1-d)^2}N_3(t) + \frac{D_{\max}^2}{1-d}N_4(t),$$

¹Note que la dependencia del funcional (3.23) en las variables (X, w) ocurre de manera “diagonal”. Es decir, no existen términos cruzados que involucren a X y a w .

²A pesar que V toma funciones como argumentos, para mantener la notación simple, solo usamos $V(t)$.

que consta de los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
N_0(t) &= X(t)^\top P X(t), \\
N_1(t) &= \frac{a}{2} \int_{-1}^1 (1 + \theta) w(\theta, t)^2 dx + \frac{a}{2} \int_0^1 (1 + \theta) w(\theta, t)^2 d\theta \\
N_2(t) &= \int_0^{D_{\max}} \int_{t-\theta}^t X(s)^\top A^\top S_0 A X(s) ds d\theta, \\
N_3(t) &= \int_0^{D_{\max}} \int_{t-\hat{D}(t)-2\theta}^t X(s)^\top A_1^\top S_1 A_1 X(s) ds d\theta, \\
N_4(t) &= \int_0^1 \int_{t-\hat{D}(t)\theta}^t w(0, s)^\top B^\top S_2 B w(0, s) ds d\theta,
\end{aligned}$$

donde P , S_0 , S_1 y S_2 son matrices simétricas y definidas positivas y a es una constante real positiva. A continuación empleamos nuevamente una transformación de primer orden para la DDE del sistema (3.8), obteniendo

$$\dot{X}(t) = (A + A_1)X(t) + Bw(0, t) - A_1 \int_{t-\hat{D}(t)}^t (AX(s) + A_1 X(s - \hat{D}(s)) + Bw(0, s)) ds, \quad (3.24)$$

con función inicial $\varphi = [-2D, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\varphi \in PC([-2D, 0], \mathbb{R}^n)$

Observación 3.2.1 ([15]). *La transformación introduce dinámicas adicionales. Sin embargo, la estabilidad de las soluciones del sistema transformado (3.24) implica la estabilidad de las soluciones del sistema original.*

Tomando en cuenta la Observación 3.2.1, para asegurar consistencia, consideramos los siguientes conjuntos de condiciones iniciales

$$\mathcal{S}_\varphi = \{\varphi : |\varphi(\theta)| \leq |X_0|, \theta < 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{u_0} = \{u_0 : \|u(0)\|_\theta \leq \|u_0\|_{D^+}, \theta < 0\},$$

en donde $X_0 = X(0)$ y $u_0 = u(x, 0)$, $x \in [0, D]$.

A continuación se presentan los siguientes lemas que serán de utilidad para mostrar el resultado principal de este capítulo.

3.2.1. Cotas y derivada del funcional

Lema 3.2.1. *El funcional $V(t)$ en (3.23) admite la siguiente cota superior:*

$$\begin{aligned}
V(t) &\leq D \lambda_{\max}(P) |X(t)|^2 + D \left(2a + \frac{D^3_{\max}}{1-d} |B^\top S_2 B| \right) \|w(t)\|^2 \\
&\quad D \left(\frac{D^3_{\max}}{2} \lambda_{\max}(A^\top S_0 A) + \frac{2D^3_{\max}}{(1-d)^2} \lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1) \right) \|X_t\|_{3D_{\max}}^2 + \frac{a}{2\gamma} \tilde{D}(t)^2. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Demostración. Partiendo del hecho que $\log(1+x) \leq x$, se sigue que

$$V(t) \leq D(N(t) - 1) + \frac{a}{2\gamma} \tilde{D}(t)^2 \quad (3.26)$$

Ahora procederemos a analizar cada uno de los términos que conforman el funcional (3.23) de manera independiente. Comenzamos con el término $N_0(t)$, empleando la desigualdad de Rayleigh, tenemos que:

$$N_0(t) \leq \lambda_{\max}(P) |X(t)|^2.$$

Usando integración por partes en $N_1(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} N_1(t) &\leq a(\|w(t)\|_{1-}^2 + \|w(t)\|_{1+}^2) + a\|w(t)\|_{1+}^2 \\ &= a\|w(t)\|_{1-}^2 + 2a\|w(t)\|_{1+}^2 \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de Rayleigh, obtenemos de $N_2(t)$ que

$$\begin{aligned} N_2(t) &\leq \int_0^{D_{\max}} \int_{t-\theta}^t \lambda_{\max}(A^\top S_0 A) \sup_{s \in [t-\theta, t]} |X(s)|^2 ds d\theta \\ &\leq \frac{D_{\max}^2}{2} \lambda_{\max}(A^\top S_0 A) \|X_t\|_{D_{\max}}^2, \end{aligned}$$

y de igual manera para $N_3(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} N_3(t) &\leq \int_0^{2D_{\max}} \int_{t-2\theta}^t \lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1) \sup_{s \in [t-2\theta, t]} |X(s)|^2 ds d\theta \\ &\leq 2D_{\max}^2 \lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1) \|X_t\|_{3D_{\max}}^2. \end{aligned}$$

Para obtener una cota superior para $N_4(t)$, realizamos el cambio de variable $s = t + \hat{D}y$, obteniendo:

$$N_4(t) = \hat{D} \int_0^1 \int_{-\theta}^0 w(0, t + \hat{D}y)^\top B^\top S_2 B w(0, t + \hat{D}y) dy d\theta.$$

Observe que $w(0, t + \hat{D}y) = w(y, t)$. Empleando esta igualdad e invirtiendo el orden de integración, tenemos que:

$$\begin{aligned} N_4(t) &= \hat{D} \int_{-D}^0 \int_{-y}^0 w(y, t)^\top B^\top S_2 B w(y, t) d\theta dy \\ &\leq D_{\max} |B^\top S_2 B| \|w(t)\|_{1-}^2. \end{aligned}$$

Agrupando los cálculos anteriores, entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} N(t) - 1 &\leq \lambda_{\max}(P) |X(t)|^2 + a\|w(t)\|_{1-}^2 \\ &\quad + 2a\|w(t)\|_{1+}^2 + D_{\max} \left(\frac{D_{\max}^2}{2} \lambda_{\max}(A^\top S_0 A) \|X_t\|_{D_{\max}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2D_{\max}^2}{(1-d)^2} \lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1) \|X_t\|_{3D_{\max}}^2 + \frac{D_{\max}^2}{1-d} |B^\top S_2 B| \|w(t)\|_{1-}^2 \right). \end{aligned}$$

Notando que $\|X_t\|_{D_{\max}} < \|X_t\|_{3D_{\max}}$, la prueba concluye combinando la desigualdad anterior con la expresión en (3.26). \square

A continuación obtenemos la derivada del funcioanl $V(t)$ en (3.23) a lo largo de las traectorias de la EDD en (3.8). Se revisará cada término del funcional de forma independiente por simplicidad.

Comenzando con la derivada del término $N_0(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{N}_0(t) &= X(t)^\top \left[(A + A_1)^\top P + P(A + A_1) \right] X(t) \\ &\quad + 2X(t)^\top PBw(0, t) - 2X(t)^\top PA_1 \int_{t-\hat{D}(t)}^t AX(s) ds \\ &\quad - 2X(t)^\top PA_1 \int_{t-\hat{D}(t)}^t A_1 X(s - \hat{D}(s)) ds - 2X(t)^\top PA_1 \int_{t-\hat{D}(t)}^t Bw(0, s) ds.\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Young y el Lema 2.2.3 en la igualdad anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{N}_0(t) &\leq X(t)^\top \left[(A + A_1)^\top P + P(A + A_1) \right] X(t) + 2X(t)^\top PBw(0, t) \\ &\quad + 2 \left| X(t)^\top PA_1 S_0^{-\frac{1}{2}} \right| \left| \int_{t-\hat{D}(t)}^t S_0^{\frac{1}{2}} AX(s) ds \right| + 2 \left| X(t)^\top PA_1 (S_1 c)^{-\frac{1}{2}} \right| \\ &\quad \times \left| \int_{t-\hat{D}(t)}^t (c S_1)^{\frac{1}{2}} A_1 X(s - \hat{D}(s)) ds \right| + 2 \left| X(t)^\top PA_1 S_2^{-\frac{1}{2}} \right| \left| \int_{t-\hat{D}(t)}^t S_2^{\frac{1}{2}} Bw(0, s) ds \right|.\end{aligned}$$

Considerando que $2ab \leq a^2 + b^2$, podemos realizar el cambio de variable $\xi = s - \hat{D}(s)$ en la integral asociada con S_1 y elegir $c = 1/2$ para llegar a:

$$\begin{aligned}\dot{N}_0(t) &\leq X(t)^\top \left[(A + A_1)^\top P + P(A + A_1) \right] X(t) + 2X(t)^\top PBw(0, t) \\ &\quad + X(t)^\top PA_1 S_0^{-1} A_1 P X(t) + D_{\max} \int_{t-D_{\max}}^t X(s)^\top A^\top S_0 A X(s) ds \\ &\quad + X(t)^\top PA_1 S_2^{-1} A_1^\top P X(t) + D_{\max} \int_{t-D_{\max}}^t w(0, s)^\top B^\top S_2 B w(0, s) ds \\ &\quad + 2X(t)^\top PA_1 S_1^{-1} A_1 P X(t) + \frac{D_{\max}}{2(1-d)} \int_{t-\hat{D}(t)-2D_{\max}}^{t-\hat{D}(t)} X(s)^\top A_1^\top S_1 A_1 X(s) ds.\end{aligned}$$

En donde es necesario que $\dot{\hat{D}}(t)$ satisfaga $\dot{\hat{D}}(t) \leq d < 1$.

Siguiendo con la derivada del término $N_1(t)$:

$$\dot{N}_1(t) = a \int_{-1}^1 (1+x) w(x, t) w_t(x, t) dx + a \int_0^1 (1+x) w(x, t) w_t(x, t) dx.$$

Multiplicando y dividiendo la igualdad anterior por D , y subsecuentemente sustituyendo la

EDP de (3.8), obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= a \int_{-1}^1 (1+x)w(x,t)(w_t(x,t) - \tilde{D}(t)p(x,t) - D\dot{D}(t)q(x,t))dx \\ &\quad + a \int_0^1 (1+x)w(x,t)(w_t(x,t) - \tilde{D}(t)p(x,t) - D\dot{D}(t)q(x,t))dx.\end{aligned}$$

Al realizar integración por partes en el término que contiene a $w_x(x,t)$ podemos llegar a:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= -\frac{a}{2D}w(0,t)^2 - \frac{a}{D}\|w(t)\|_{1+}^2 - \frac{a}{2D}\|w(t)\|_{1-}^2 \\ &\quad - \frac{2a}{D}\tilde{D}(t) \int_0^1 (1+x)w(x,t)p(x,t)dx - 2a\dot{D}(t) \int_0^1 (1+x)w(x,t)q(x,t)dx \\ &\quad - \frac{a}{D}\tilde{D}(t) \int_{-1}^0 (1+x)w(x,t)p(x,t)dx - a\dot{D}(t) \int_{-1}^0 (1+x)w(x,t)q(x,t)dx.\end{aligned}$$

Para obtener la derivada de $N_2(t)$, empleamos el Lema 2.2.2 de forma directa, por lo que:

$$\dot{N}_2(t) = D_{\max}X(t)^\top A^\top S_0AX(t) - \int_{t-D_{\max}}^t X(s)^\top A^\top S_1AX(s)ds.$$

De forma similar para $N_3(t)$, haciendo el cambio de variable $s = t - \hat{D}(t) - 2\theta$, invirtiendo el orden de integración, obtenemos:

$$\dot{N}_3(t) \leq D_{\max}X(t)^\top A_1^\top S_1A_1X(t) - \frac{1-d}{2} \int_{t-\hat{D}-2D_{\max}}^{t-\hat{D}} X(s)^\top A_1^\top S_1A_1X(s)ds,$$

en donde es necesario que $\hat{D}(t)$ satisfaga $\dot{D}(t) \leq d < 1$.

Finalmente, para $N_4(t)$:

$$\dot{N}_4(t) \leq w(0,t)^\top B^\top S_2Bw(0,t) - \frac{1-d}{D_{\max}} \int_{t-D_{\max}}^t w(0,s)^\top B^\top S_2Bw(0,s)ds.$$

Definiendo entonces

$$R \triangleq R_1 - PA_1S_0^{-1}A_1^\top P - 2PA_1S_1^{-1}A_1^\top P - PA_1S_2^{-1}A_1^\top P,$$

con

$$R_1 = -(A+A_1)^\top P - P(A+A_1) - D_{\max}^2A^\top S_0A - \frac{D_{\max}^2}{(1-d)^2}A_1^\top S_1A_1 \quad (3.27)$$

y agrupando las mayorizaciones anteriores, obtenemos, después de eliminar términos semejantes, que:

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &\leq -X(t)^\top RX(t) + 2X(t)^\top PBw(0,t) \\ &\quad + \frac{D_{\max}^2}{1-d}B^\top S_2Bw(0,t)^2 - \frac{a}{2D}w(0,t)^2 - \frac{a}{D}\|w(t)\|_{1+}^2 - \frac{a}{2D}\|w(t)\|_{1-}^2 \\ &\quad - \frac{2a\tilde{D}}{D} \int_0^1 (1+x)w(x,t)p(x,t)dx - 2a\dot{D}(t) \int_0^1 (1+x)w(x,t)q(x,t)dx \\ &\quad - \frac{a\tilde{D}}{D} \int_{-1}^0 (1+x)w(x,t)p(x,t)dx - a\dot{D}(t) \int_{-1}^0 (1+x)w(x,t)q(x,t)dx.\end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \tau(t) = & -\frac{2}{N(t)} \int_0^1 (1+x)w(x,t)Ke^{A\hat{D}(x-1)}dx(A\dot{X}(t) + Bu(0,t)) \\ & - \frac{1}{N(t)} \int_{-1}^0 (1+x)w(x,t)Ke^{A\hat{D}(x-1)}dx(A\dot{X}(t) + Bu(0,t)), \end{aligned} \quad (3.28)$$

entonces la derivada del funcional $V(t)$ a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & D\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} - \frac{a}{\gamma}\dot{D}(t)\dot{D}(t) \\ \leq & -\frac{a}{\gamma}\dot{D}(t)(\dot{D}(t) - \gamma\tau(t)) + \frac{D}{N(t)} \left[-X(t)^\top RX(t) \right. \\ & + 2X(t)^\top PBw(0,t) + \frac{D_{\max}^2}{1-d}B^\top S_2Bw(0,t)^2 - \frac{a}{2D}\|w(t)\|^2 - \frac{a}{2D}w(0,t)^2 \\ & \left. - 2a\dot{D}(t) \int_0^1 (1+x)w(x,t)q(x,t)dx - a\dot{D}(t) \int_{-1}^0 (1+x)w(x,t)q(x,t)dx \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.2.2. Resultado principal: Caso con retardo incierto

Observe que, hasta este punto, hemos supuesto que $\hat{D}(t)$ es acotado por D_{\min} and D_{\max} , Suposición 3.1.2. Sin embargo, $\hat{D}(t)$ se obtiene, en general, como la solución de una ley de adaptación dinámica. Por lo tanto, es necesario asegurar que $\hat{D}(t)$, en efecto, satisface la Suposición 3.1.2. Con este fin, consideramos la siguiente ley adaptable:

$$\dot{\hat{D}}(t) = \gamma \text{proj}(\tau) \quad (3.30)$$

en donde τ está dado en (3.28) y el operador proyección, denotado como $\text{proj}(\cdot)$ y descrito en el Apéndice B, asegura que $\hat{D}(t) \in [D_{\min}, D_{\max}]$. Estamos listos para enunciar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 3.2.1. *Considere el sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (3.2) con ganancia de retroalimentación K dada y con la ley adaptable en (3.30). Bajo las Suposiciones 3.1.1 y 3.1.2, si existe una constante $\gamma > 0$ y matrices positivas definidas P , S_0 , S_1 y S_2 , tales que :*

$$\begin{pmatrix} R_1 & PA_1 & PA_1 & PA_1 \\ A_1^\top P & S_0 & 0 & 0 \\ A_1^\top P & 0 & S_1/2 & 0 \\ A_1^\top P & 0 & 0 & S_2 \end{pmatrix} > 0, \quad (3.31)$$

con R_1 en (3.27). Entonces, la solución del sistema en lazo cerrado, (X, u, \hat{D}) , es estable en el sentido de que existen constantes positivas μ y σ tales que para todas las condiciones

iniciales $(X_0, u_0, \hat{D}_0) \in \mathbb{R}^n \times L_2(0, 1) \times [D_{\min}, D_{\max}]$ se cumple lo siguiente:

$$|X(t)|^2 + \int_0^1 u(x, t)^2 dx + \tilde{D}(t)^2 \leq \mu \left(e^{\sigma(|X_0|^2 + \|u_0\|^2 + \tilde{D}_0^2)} - 1 \right) \quad (3.32)$$

Además $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = 0$.

Demostración. Usando la desigualdad de Young en el término cruzado $2X(t)^\top PBw(0, t)$ junto con la ley adaptable en (3.30) y las propiedades del operador $\text{proj}(\cdot)$ descritas en el Anexo B, obtenemos de (3.29) que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \frac{D}{N(t)} \left[-X(t)^\top \left(R - \frac{1}{b} PBB^\top P \right) X(t) + bw(0, t)^2 \right. \\ & + \frac{D_{\max}^2}{1-d} B^\top S_2 B w(0, t)^2 - \frac{a}{2D} w(0, t)^2 - \frac{a}{2D} \|w(t)\|^2 \\ & \left. - 2a\dot{D}(t) \int_0^1 (1+x)w(x, t)q(x, t)dx - a\dot{D}(t) \int_{-1}^0 (1+x)w(x, t)q(x, t)dx \right]. \end{aligned}$$

Usando el complemento de Schur en (3.31) y escogiendo

$$b = \frac{2|PB|^2}{\lambda_{\min}(R)} \quad \text{y} \quad a \geq \frac{8D_{\max}|PB|^2}{\lambda_{\min}(R)} + \frac{4D_{\max}^3}{1-d} |B^\top S_2 B|,$$

con $d < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{D}{2N(t)} \left(\lambda_{\min}(R) |X(t)|^2 + \frac{a}{2D_{\max}} w(0, t)^2 + \frac{a}{D_{\max}} \|w(t)\|^2 \right) \\ & + 4a\dot{D}(t) \int_0^1 (1+x)w(x, t)q(x, t)dx + 2a\dot{D}(t) \int_{-1}^0 (1+x)w(x, t)q(x, t)dx. \end{aligned}$$

Sustituyendo la ley adaptable (3.30) y empleando las propiedades del operador $\text{Proj}(\cdot)$ descritas en el Apéndice B, se sigue que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{D}{2N(t)} \left(\lambda_{\min}(R) |X(t)|^2 + \frac{a}{2D_{\max}} w(0, t)^2 + \frac{a}{D_{\max}} \|w(t)\|^2 \right) \\ & + \frac{\alpha\gamma D}{N(t)^2} \left(2 \int_0^1 (1+x)w(x, t)p(x, t)dx + \int_{-1}^0 (1+x)w(x, t)p(x, t)dx \right) \\ & \times \left(2 \int_0^1 (1+x)w(x, t)q(x, t)dx + \int_{-1}^0 (1+x)w(x, t)q(x, t)dx \right) \\ \leq & -\frac{D}{2N(t)} \left(\lambda_{\min}(R) |X(t)|^2 + \frac{a}{2D_{\max}} w(0, t)^2 + \frac{a}{D_{\max}} \|w(t)\|^2 \right) \\ & + \frac{4\alpha\gamma D}{N(t)^2} \int_{-1}^1 (1+x)|w(x, t)||p(x, t)|dx \int_{-1}^1 (1+x)|w(x, t)||q(x, t)|dx. \quad (3.33) \end{aligned}$$

Observemos ahora las siguientes mayorizaciones, en donde sustituimos a $p(x, t)$ y $q(x, t)$ por sus equivalencias descritas en (3.9) y (3.10), respectivamente:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1+x)|w(x, t)||p(x, t)|dx &\leq \eta_w \int_{-1}^1 2|w(x, t)||K| |AX(t) + A_1X(t - \hat{D}) + Bw(0, t)| dx \\ &\leq \eta_w (\|w(t)\|^2 + 6|K|^2|A|^2|X(t)|^2 \\ &\quad + 6|K|^2|A_1|^2|X(t - \hat{D})|^2 + 6|K|^2|B|^2w(0, t)^2), \end{aligned} \quad (3.34)$$

y también

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1+x)|w(x, t)||q(x, t)|dx &\leq \eta_w \int_{-1}^1 2|w(x, t)||K| |AX(t) \\ &\quad - \int_{x-1}^0 [I + 2\hat{D}A]A_1X(t + \hat{D}(y-1))dy| dx \\ &\leq \eta_w (\|w(t)\|^2 + 24|K|^2|A|^2|X(t)|^2 \\ &\quad + 6|K|^2(1 + 2D_{\max}|A|^2)|A_1|^2\|X_t\|_{3D_{\max}}^2). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Del hecho que $u(0, t)^2 + |K|^2|X(t - \bar{D})|^2 \leq w(0, t)^2 \leq 2u(0, t)^2 + 2|K|^2|X(t - \bar{D})|^2$, y combinando (3.34) y (3.35) en (3.33), se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{D}{2} \cdot \frac{\alpha_1 (\|w(t)\|^2 + |X(t)|^2 + |X(t - \hat{D})|^2 + |X(t - D)|^2)}{N(t)} \\ &\quad + 4aD\eta_w^2 \cdot \frac{\alpha_2 (\|w(t)\|^2 + |X(t)|^2 + |X(t - \hat{D})|^2 + |X(t - D)|^2)}{N(t)} \\ &\quad \times \frac{\alpha_2 (\|w(t)\|^2 + |X(t)|^2 + \|X_t\|_{3D_{\max}}^2)}{N(t)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

en donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min \left\{ \lambda_{\min}(R), \frac{a|K|^2}{2D_{\max}}, \frac{a}{D_{\max}} \right\} \\ \alpha_2 &= \max \left\{ 1, 24|K|^2|A|^2, 6|K|^2 \left(1 + 2D_{\max}|A| \right)^2 |A_1|^2, 6|K|^2 \left(|A_1|^2 + 2|B|^2|K|^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Directamente del funcional, en (3.23), tenemos que:

$$N(t) \geq N_0(t) + N_1(t) + \frac{D_{\max}}{(1-d)^2} N_3(t) \quad (3.37)$$

De donde procedemos a mayorizar cada uno de sus términos como sigue. Para $N_0(t)$ tenemos que:

$$N_0(t) \geq \lambda_{\min}(P)|X(t)|^2.$$

Para $N_1(t)$, obtenemos

$$N_2(t) \geq \frac{a}{2} \|w(t)\|_{1-}^2 + a \|w(t)\|_{1+}^2 \geq \frac{a}{2} \|w(t)\|^2.$$

Y para $N_3(t)$:

$$\begin{aligned} N_3(t) &\geq \int_0^{D_{\max}} \int_{t-3x}^t \lambda_{\min}(A_1^\top S_1 A_1) \sup_{s \in [t-3x, t]} |X(s)|^2 ds dx \\ &\geq D_{\max}^2 \lambda_{\min}(A_1^\top S_1 A_1) \|X_t\|_{3D_{\max}}^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (3.37), obtenemos:

$$\begin{aligned} N(t) &\geq \lambda_{\min}(P) |X(t)|^2 + \frac{a}{2} \|w(t)\|^2 + D_{\max}^2 \lambda_{\min}(A_1^\top S_1 A_1) \|X_t\|_{3D_{\max}}^2 \\ &\geq \alpha_3 \left(|X(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + \|X_t\|_{3D_{\max}}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde

$$\alpha_3 = \min \left\{ \lambda_{\min}(P), \frac{a}{2}, D_{\max}^2 \lambda_{\min}(A_1^\top S_1 A_1) \right\}.$$

Por lo que (3.36) resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{D\alpha_1}{2N(t)} \left(\|w(t)\|^2 + |X(t)|^2 + |X(t-\hat{D})|^2 + |X(t-D)|^2 \right) \\ &\quad + \gamma \frac{4aD\eta_w^2 \alpha_2^2}{\alpha_3 N(t)} \left(\|w(t)\|^2 + |X(t)|^2 + |X(t-\hat{D})|^2 + |X(t-D)|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

de donde es claro que existe $\gamma > 0$ tal que $\dot{V}(t)$ es negativa semidefinida, por lo que

$$V(t) \leq V(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.40)$$

A continuación procederemos a calcular un estimado de estabilidad. Partiendo de la definición del funcional $V(t)$ en (3.23), se tiene que:

$$e^{V(t)/D} \geq N(t).$$

De lo anterior, y tomando en cuenta la mayorización obtenida en (3.37)

$$|X(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(e^{V(t)/D} - 1 \right), \quad (3.41)$$

$$\|w(t)\|^2 \leq \frac{2}{a} \left(e^{V(t)/D} - 1 \right), \quad (3.42)$$

$$\|X_t\|_{3D_{\max}}^2 \leq \frac{(1-d)^2}{D_{\max}^3 \lambda_{\min}(A_1^\top S_1 A_1)} \left(e^{V(t)/D} - 1 \right), \quad (3.43)$$

y también, directamente de (3.23), considerando la siguiente desigualdad exponencial $e^x \geq 1 + x$ con $x = V(t)/D$, entonces:

$$\tilde{D}(t)^2 \leq \frac{2\gamma D}{a} \left(e^{V(t)/D} - 1 \right). \quad (3.44)$$

De (3.44) y (3.40), podemos concluir que existe $\gamma > 0$ tal que $|\dot{D}| < d$. Continuamos ahora con las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} r_1 &= 6\eta_w^2 |K|^2, \\ r_2 &= 24D_{\max}^2 \eta_w^2 |K|^2 |A_1|^2, \\ s_1 &= 4\eta_u^2 |K|^2, \\ s_2 &= 4D_{\max}^2 \eta_u^2 |K|^2 |A_1|^2, \\ s_3 &= 4 + 4D_{\max}^2 \eta_u^2 |K|^2 |B|^2. \end{aligned}$$

De las cotas para la transformación backstepping y backstepping inversa, descritas en los Lemas 3.1.1 y 3.1.2, respectivamente, obtenemos:

$$\|w(t)\|^2 \leq r_1 |X(t)|^2 + r_2 \|X_t\|_{3D_{\max}}^2 + 3\|u(t)\|^2 \quad (3.45)$$

$$\|u(t)\|_{1+}^2 \leq s_1 |X(t)|^2 + s_2 \|X_t\|_{2D_{\max}}^2 + s_3 \|w(t)\|^2 \quad (3.46)$$

Combinando (3.46) con (3.41)-(3.44), llegamos a:

$$\|u(t)\|_{1+}^2 \leq \left(\frac{s_1}{\lambda_{\min}(P)} + \frac{(1-d)^2 s_2}{D_{\max}^3 \lambda_{\min}(A_1^\top S_1 A_1)} + \frac{2s_3}{a} \right) (e^{V(t)/D} - 1)$$

Si definimos

$$\Gamma = |X(t)|^2 + \int_0^1 u(x,t)^2 dx + \tilde{D}(t)^2 \quad (3.47)$$

Entonces Γ queda acotado en términos del funcional $V(t)$ de la siguiente manera:

$$\Gamma \leq \mu (e^{V(t)/D} - 1), \quad (3.48)$$

donde

$$\mu = \left(\frac{1+s_1}{\lambda_{\min}(P)} + \frac{(1-d^2)s_2}{D_{\max}^3 \lambda_{\min}(A_1^\top S_1 A_1)} + \frac{2s_3 + 2\gamma D_{\max}}{a} \right).$$

Combinando (3.45) con la cota del funcional en el Lema 3.2.1, obtenemos:

$$V(t) \leq D \left[(\lambda_{\max}(P) + c_2 r_1) |X(t)|^2 + (c_1 + c_2 r_2) \|X_t\|_{3D_{\max}}^2 + 3c_2 \|u(t)\|^2 \right] + \frac{a}{2\gamma} \tilde{D}(t)^2. \quad (3.49)$$

en donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} D_{\max}^3 \lambda_{\max}(A^\top S_0 A) + \frac{2}{(1-d)^2} D_{\max}^3 \lambda_{\max}(A_1^\top S_1 A_1), \\ c_2 &= 2a + \frac{1}{1-d} D_{\max}^3 |B^\top S_2 B|. \end{aligned}$$

Considerando lo anterior, junto con $\varphi(\theta) \in \mathcal{S}_\varphi$ y $u_0 \in \mathcal{S}_{u_0}$, entonces se satisface que:

$$\begin{aligned} V(0) &\leq D \left[(\lambda_{\max}(P) + c_2 r_1) |X(0)|^2 + (c_1 + c_2 r_2) \|X_0\|_{3D_{\max}}^2 + 3c_2 \|u(0)\|^2 \right] + \frac{a}{2\gamma} \tilde{D}(0)^2 \\ &\leq D \left[\lambda_{\max}(P) + c_1 + c_2(r_1 + r_2 + 6) + \frac{a}{2D_{\min}\gamma} \right] \Gamma(0). \end{aligned}$$

Por lo que, escogiendo:

$$\sigma = \lambda_{\max}(P) + c_1 + c_2(r_1 + r_2 + 6) + \frac{a}{2D_{\min}\gamma},$$

podemos expresar el estimado de estabilidad de la forma

$$\Gamma(t) \leq \mu(e^{\sigma\Gamma(0)} - 1),$$

que es el estimado de estabilidad descrito en (3.32).

Para la verificación de regulación comenzaremos integrando a (3.39) con respecto a t desde 0 a ∞ , de donde obtenemos que tanto $|X(t)|$ como $\|w(t)\|$ se encuentran uniformemente acotadas respecto al tiempo, lo que implica, por (3.21) que $\|u(t)\|_{1+}$ también esta acotada uniformemente y, a su vez, por (3.2), $U(t)$ también está uniformemente acotada en t al igual que $u(0, t)$ lo está para $t \geq D$ por (3.4). A partir de (3.39), podemos concluir que $|X(t)|$ es una función cuadrado integrable y además, por (3.3), su derivada respecto al tiempo, también lo es. Esto implica, por el lema de Barbalat, que $X(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. En cuanto a $U(t)$, siguiendo el mismo razonamiento, podemos obtener que $\|w(t)\|$ es cuadrado integrable por (3.39), y por (3.21) obtenemos que $\|u(t)\|_{1+}$ también es cuadrado integrable. De igual forma, por (3.3) la función $U(t)$ lo es también. Para poder aplicar el lema de Barbalat y concluir regulación para $U(t)$, obtenemos que $dU(t)^2/dt = 2U(t)K\dot{X}(t)$, de donde se ha establecido ya que tanto $U(t)$ como $\dot{X}(t)$ son uniformemente acotados, lo que implica que $dU(t)^2/dt$ también lo es, por lo que $U(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Observación 3.2.2. *En el resultado mostrado en el Teorema 3.2.1, se utiliza la ley adaptable descrita en (3.30) para identificar el retardo desconocido D . Sin embargo, esta estimación no afecta al controlador $U(t)$ en el análisis de estabilidad. Lo anterior es debido a que este enfoque se utiliza como una preparación para el caso de un controlador adaptable, en el cual, la ganancia del controlador K se actualiza según el valor estimado del retardo \hat{D} . Este caso adaptable está considerado para trabajo futuro y el Teorema 3.2.1, junto con su prueba, proporcionan las bases para formalizar el análisis de estabilidad en este caso.*

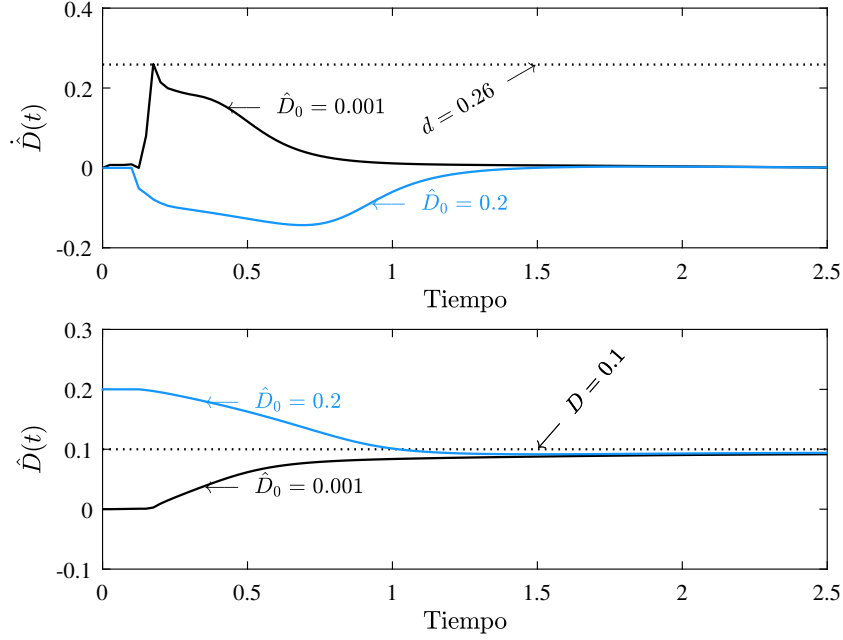


Figura 3.1: Respuesta del algoritmo de identificación (3.30) considerando estimaciones iniciales para \hat{D}_0 iguales a $D_{\min} = 0.001$ y $D_{\max} = 0.2$.

3.3. Caso de estudio

Retomando el caso de estudio en el capítulo anterior; es decir, consideramos ahora el sistema en lazo cerrado formado por el sistema inestable (1.1), la ley de control (1.2) y el algoritmo de identificación (3.30) con $D = 0.1$, $\kappa = -4$, $T = -4$, y suponiendo que el retardo es desconocido, entonces usaremos una mala estimación inicial de $D = 0.3$. Las ganancias del controlador estarán dadas por $k_p = 1.59$ y $k_i = 0.72$, calculadas de acuerdo al método del máximo decaimiento exponencial, descrito en la Proposición 1. Considerando $D_{\min} = 0.001$, $D_{\max} = 0.2$ y $d = 0.26$. El Teorema 3.2.1 se cumple con $\gamma = 10$ y las siguientes matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7782 & 0.1071 \\ 0.1071 & 0.2673 \end{pmatrix} \times 10^3, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 0.9191 & -0.2235 \\ -0.2235 & 0.0587 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0.0035 & 0.0016 \\ 0.0016 & 1.2891 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 4.3558 & 1.5266 \\ 1.5266 & 1.6944 \end{pmatrix}.$$

Considerando condiciones iniciales $X_0 = (0.6, 0.2)^\top$ y $\psi(t) = 0$, $t \in [-D, 0]$ y con estimaciones iniciales $\hat{D}_0 = 0.001$ y $\hat{D}_0 = 0.2$ obtenemos, respectivamente, las respuestas mostradas en línea negra y azul en la Figura 3.1, note que $\hat{D}(t) \leq d$ para todo $t \geq 0$. Observe que la convergencia exacta no se alcanza en ninguno de estos casos debido a la ausencia

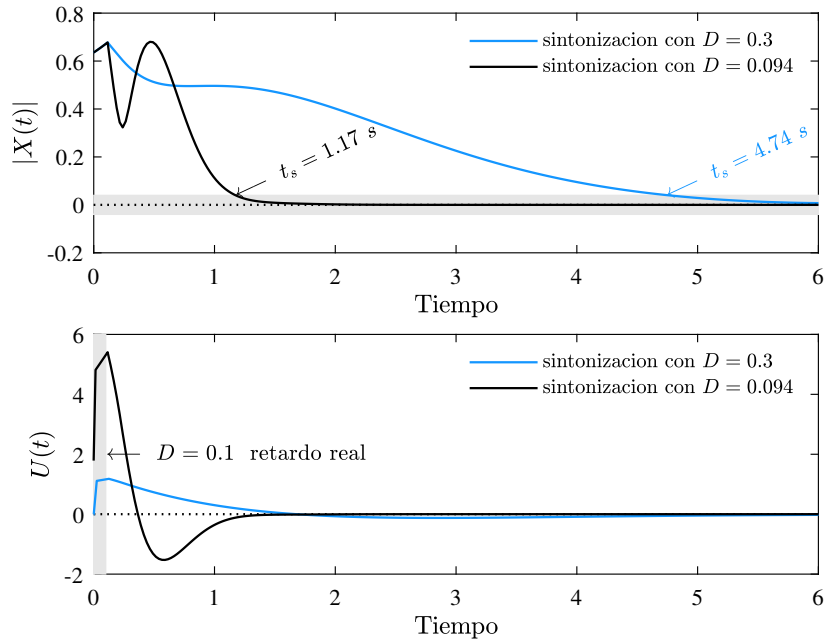


Figura 3.2: Mejora en la velocidad de respuesta del sistema (1.1)-(1.2) con base en el algoritmo de identificación (3.30).

de una señal de excitación persistente. La Figura 3.2 muestra en línea azul la regulación de $U(t)$ y $|X(t)|$ para ambas condiciones iniciales consideradas para \hat{D}_0 . Finalmente, usando el retardo estimado $\hat{D}(t) = 0.094$ junto con la Proposición 1, recalculamos las ganancias del controlador como $k_p = 4.96$ y $k_i = 8.45$. Note que al usar el valor estimado del retardo para hacer una sintonización *fina* de los parámetros del controlador resulta en una mejora en la velocidad de respuesta del sistema, como se cuantifica usando el tiempo de asentamiento, t_s , especificado por un criterio del 5% en el desplazamiento total de $X(t)$.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo estudiamos una clase de sistemas lineales potencialmente inestables en lazo abierto y con un retardo en la entrada. Además, consideramos que dicho retardo es de naturaleza incierta y pequeño en comparación con la escala de tiempo del sistema. Por lo que identificarlo es nuestro interés principal. En este contexto, el problema de identificación se dificulta debido a que el modelo del sistema no permite una parametrización lineal del retardo. Más aún, el sistema es inestable sin retroalimentación. Por lo tanto, los principales retos consisten en obtener una parametrización adecuada y diseñar un controlador estabilizante para cumplir el objetivo de identificar el retardo.

Como un primer paso para abordar el problema planteado, llevamos a cabo un análisis de estabilidad de tipo Lyapunov-Krasovskii bajo la suposición de que el retardo es conocido. En concreto, reformulamos el sistema como una ecuación diferencial parcial de primer orden en cascada con una ecuación diferencial ordinaria y propusimos un controlador por retroalimentación de estados. Luego, empleando un enfoque tipo “backstepping”, establecimos condiciones suficientes de estabilidad para las soluciones del sistema en lazo cerrado.

Los resultados obtenidos en el análisis descrito en el párrafo anterior sirvieron como fundamento para abordar el caso con retardo incierto. En este escenario, la reformulación del sistema como una conexión en cascada permitió la parametrización lineal del retardo y, a su vez, la obtención de un algoritmo de identificación en lazo cerrado. Finalmente, validamos los resultados a través de simulaciones numéricas en un caso de estudio específico.

4.1. Trabajo a futuro

Algunas observaciones adicionales que merecen ser mencionadas y que constituyen el punto de partida para trabajo futuro son las siguientes:

1. El marco establecido proporciona condiciones suficientes de estabilidad mediante desigualdades lineales matriciales. Dichas condiciones añaden conservativismo, por lo que enfoques alternativos que no requieran la factibilidad de desigualdades lineales matriciales son de interés en futuras investigaciones.
2. En este trabajo, se considera un retardo incierto pero fijo. No obstante, la metodología propuesta podría extenderse a casos donde el valor del retardo es variable en el tiempo.
3. El enfoque de estimación del retardo en línea puede ser usado con plantas estables o inestables. Esta característica es importante en control adaptable. Efectivamente, con base en el principio de equivalencia cierta, el resultado principal de este trabajo, enunciado en el Teorema 3.2.1, puede ser escrito en términos de un esquema de control adaptable considerando que

$$U(t) = K(\hat{D})X(t),$$

en donde $\hat{D} = \hat{D}(t)$ se obtiene del algoritmo de identificación y la ganancia de retroalimentación $K(\hat{D})$ se actualiza en línea conforme \hat{D} se aproxima al valor real de D . A la fecha, no contamos con una prueba formal de estabilidad pero los resultados numéricos que presentamos en el siguiente ejemplo indican que el enfoque de control adaptable es factible.

Ejemplo de control adaptable al retardo:

Para este ejemplo, retomamos el sistema de primer orden con un controlador PI descrito en Capítulo 3, Sección 3.3 en donde la ganancia K del controlador se reemplaza por su versión adaptable $K(\hat{D}) = (k_p(\hat{D}), k_i(\hat{D}))$ en donde k_p y k_i se diseñan de acuerdo al método del máximo decaimiento exponencial, descrito en la Proposición 1 en el Apéndice A y se actualizan en cada instante de tiempo.

El panel superior derecho de la Figura 4.1 muestra la regulación de $|X(t)|$ y $U(t)$ en 2.3 s. El panel superior izquierdo muestra como las ganancias de control se adaptan y convergen eventualmente a sus valores finales en $k_p = 4.81$ (negro) y $k_i = 7.93$ (azul). Cabe mencionar que los valores óptimos, calculados con el valor exacto del retardo son $k_p = 4.67$ y $k_i = 7.44$. El panel inferior derecho muestra el espectro óptimo del sistema con marcador * (en color azul) y el espectro alcanzado con el controlador adaptable con marcador + (en color rojo). Observe que los resultados obtenidos mediante este

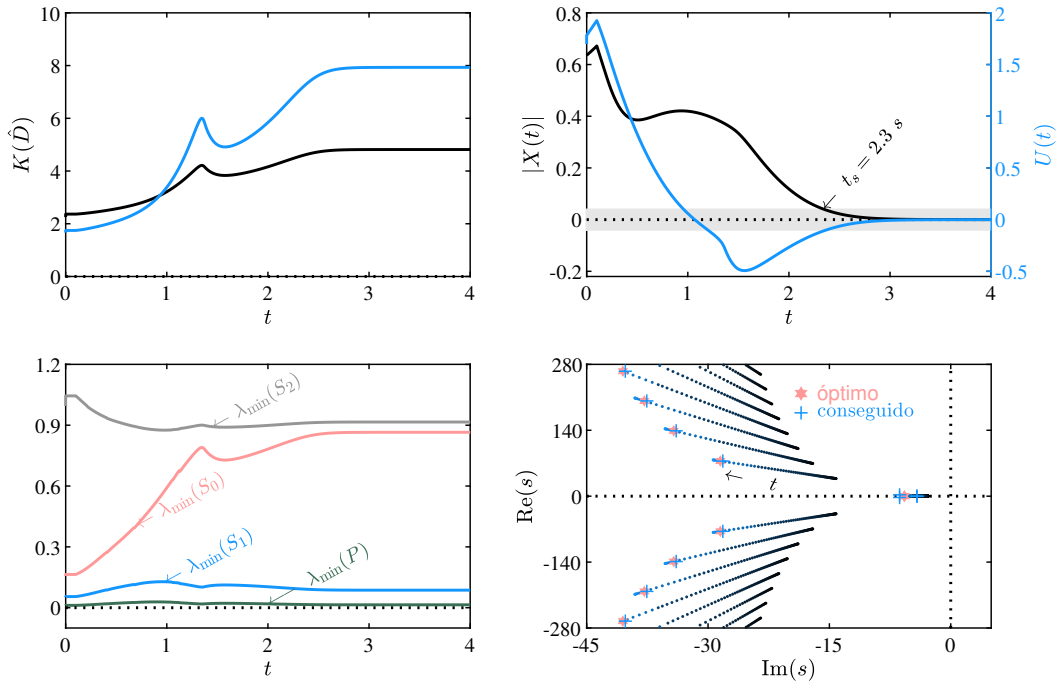


Figura 4.1: Resultados numéricos obtenidos para el sistema (1.1) al aplicar una ley adaptable en línea con el controlador (1.2). Las ganancias del controlador se sintonizaron para cada instante de tiempo mediante el método del máximo decaimiento exponencial.

método son muy cercanos a los resultados óptimos. Finalmente, en el panel inferior izquierdo se muestran los valores propios más pequeños de las matrices P (verde), S_0 (rojo), S_1 (azul) y S_2 (gris) para cada instante de tiempo, los cuales se mantienen positivos para todo t , por lo que las condiciones de estabilidad en el Teorema 3.2.1 se cumplen para cada instante.

Apéndice A

Máximo decaimiento exponencial

El diseño de controladores para sistemas con retardos es complejo debido a que la presencia de un retardo induce una infinidad de raíces características en el sistema. Cuando el valor de este retardo es conocido, existen diferentes técnicas de diseño. Por ejemplo, el método de colocación *parcial* de polos en [27, 22], busca un desplazamiento de los polos dominantes lo más hacia la izquierda posible en el plano complejo con el objetivo de optimizar la respuesta del sistema.

El siguiente método de sintonización garantiza el máximo decaimiento exponencial para las soluciones del sistema (1.1) en lazo cerrado con (1.2) cuando el retardo D es conocido. Para ello se requiere de la función característica:

$$P(s, k_p, k_i) := (k_p s + k_i) \kappa e^{-Ds} + (Ts + 1)s = 0$$

Proposición 1 ([33]). *El máximo decaimiento exponencial para las soluciones del sistema (1.1) en lazo cerrado con (1.2) está caracterizado por una triple raíz real (dominante) ubicada en $s = -\sigma_m$ en el plano complejo, donde σ_m está dado por:*

$$\sigma_m = \frac{D + 4T - \sqrt{D^2 + 8T^2}}{2DT}, \quad T > 0. \quad (\text{A.1})$$

Entonces, las ganancias del controlador PI en (1.2) satisfacen

$$k_p = -\frac{1 - D\sigma_m - 2T\sigma_m + DT\sigma_m^2}{\kappa e^{D\sigma_m}}, \quad (\text{A.2})$$

$$k_i = -\frac{\sigma_m^2(-D - T + DT\sigma_m)}{\kappa e^{D\sigma_m}}. \quad (\text{A.3})$$

Bosquejo de la prueba. *La prueba tiene como sustento los siguientes tres hechos:*

1. *Decrecimiento monotónico del ángulo de fase de la curva de estabilidad, C , que está formada por el conjunto de puntos $(k_p, k_i \in \mathbb{R}^2)$ tales que por lo menos un cero de la ecuación característica del sistema se encuentre en el eje imaginario $s = j\omega$, es decir:*

$$P(j\omega, k_p, k_i) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

2. *El radio de intersección entre C y los ejes coordenados del espacio de parámetros $\mathcal{D} = \{(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2\}$ presentan un incremento sostenido a medida que ω incrementa.*
3. *La dirección de movimiento de C es invariante respecto a desplazamientos horizontales del eje imaginario del plano complejo.*

Con $s = j\omega - \sigma$ podemos escribir a $P(s, k_p, k_i)$ como una función analítica de $j\omega$, σ , k_p , y k_i ; es decir, $P = P(j\omega, \sigma, k_p, k_i)$. Si existe una raíz triple en $\omega = 0$ y $\sigma = \sigma_m$, entonces el polinomio característico, y su primera y segunda derivada respecto a σ se desvanecen. Es decir,

$$P = T\sigma_m^2 - \sigma_m + (D(k_i - k_p\sigma_m) - k_p)ke^{\sigma_m D} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = 2T\sigma_m - 1 + ke^{\sigma_m D}(D(k_i - k_p\sigma_m) - k_p) = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} = 2T + Dke^{\sigma_m D}(D(k_i - k_p\sigma_m) - 2k_p) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Con manipulación algebraica de (A.4) y (A.5) es posible obtener (A.2) y (A.3), y al sustituirlos en (A.6) se obtiene (A.1). □

Apéndice B

Función de proyección

Considere el siguiente conjunto convexo:

$$\Pi = \{\hat{\theta} \in \mathbb{R}^p | g(\hat{\theta}) \leq 0\}$$

en donde $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave tal que la frontera, $\partial\Pi$, de Π es suave. Denotamos al interior del conjunto Π con $\overset{\circ}{\Pi}$ y al gradiente de la función g respecto a $\hat{\theta}$ con $\nabla_{\hat{\theta}}g$. Más aún, $\nabla_{\hat{\theta}}g$ es un vector normal apuntando hacia afuera de $\hat{\theta} \in \partial\Pi$. El operador de proyección estándar es el siguiente:

$$\text{proj}(\tau) = \begin{cases} \tau & \hat{\theta} \in \overset{\circ}{\Pi} \text{ o } \nabla_{\hat{\theta}}g^\top \tau \leq 0, \\ \left(I - \Gamma \frac{\nabla_{\hat{\theta}}g \nabla_{\hat{\theta}}g^\top}{\nabla_{\hat{\theta}}g^\top \Gamma \nabla_{\hat{\theta}}g} \right) \tau, & \hat{\theta} \in \partial\Pi \text{ y } \nabla_{\hat{\theta}}g^\top \tau > 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde Γ pertenece al espacio de las matrices simétricas $p \times p$ positivas definidas denotado como \mathcal{G} . Nótese que el operador $\text{proj}(\cdot)$ es una función de tres variables: τ , Γ y $\hat{\theta}$, pero, por simplicidad, será expresado únicamente como $\text{proj}(\tau)$.

El significado de (B.1) es que cuando $\hat{\theta}$ está en el interior de Π , o en su frontera pero con τ apuntando hacia el interior, entonces la proyección esta “inactiva”. Cuando $\hat{\theta}$ está en la frontera y τ apunta hacia fuera, entonces el operador proyecta a τ en el hiper-plano tangente a $\partial\Pi$ en $\hat{\theta}$. El problema de este tipo de funciones es que son generalmente discontinuas, e.g. (B.1), lo cuál va en contra de la condición de Lipschitz para la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales. Como (B.1) es discontinuo, es necesario suavizarlo. Para ello, considere el siguiente conjunto convexo:

$$\Pi_\varepsilon = \{\hat{\theta} \in \mathbb{R}^p | g(\hat{\theta}) \leq \varepsilon\} \quad (\text{B.2})$$

el cual es la unión de Π y de una bola de radio ε al rededor de la frontera del mismo; y

hacemos la siguiente modificación al operador (B.1):

$$\text{proj}(\tau) = \begin{cases} \tau & \hat{\theta} \in \overset{\circ}{\Pi} \text{ o } \nabla_{\hat{\theta}} g^\top \tau \leq 0, \\ \left(I - c(\hat{\theta}) \Gamma \frac{\nabla_{\hat{\theta}} g \nabla_{\hat{\theta}} g^\top}{\nabla_{\hat{\theta}} g^\top \Gamma \nabla_{\hat{\theta}} g} \right) \tau, & \hat{\theta} \in \Pi_\varepsilon \setminus \overset{\circ}{\Pi} \text{ y } \nabla_{\hat{\theta}} g^\top \tau > 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

en donde $c(\hat{\theta}) = \min \{1, g(\hat{\theta})/\varepsilon\}$, con

$$g(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta}^\top \hat{\theta} - \theta_0^2}{\varepsilon + 2\theta_0},$$

en donde θ_0 es una constante positiva conocida y ε es una constante positiva arbitraria. Nótese que $c(\partial\Pi) = 0$ y $c(\partial\Pi_\varepsilon) = 1$. El operador descrito en (B.3) cumple las siguientes propiedades [21]:

1. El mapa $\text{proj} : \mathbb{R}^p \times \Pi_\varepsilon \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^p$ es localmente Lipschitz en los argumentos τ , $\hat{\theta}$ y Γ .
2. $\text{proj}(\tau)^\top \Gamma^{-1} \text{proj}(\tau) \leq \tau^\top \Gamma^{-1} \tau, \forall \hat{\theta} \in \Pi_\varepsilon$.
3. Sean $\Gamma(t)$ y $\tau(t)$ continuamente diferenciables y $\hat{\theta} = \text{proj}(\tau)$ y $\hat{\theta}(0) \in \Pi_\varepsilon$. Entonces, en su dominio de definición, la solución $\hat{\theta}(t)$ permanece en Π_ε .
4. Con $\tilde{\theta} := \theta - \hat{\theta}$, el error de estimación. Entonces, $-\tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \text{proj}(\tau) \leq -\tilde{\theta}^\top \Gamma^{-1} \tau, \forall \hat{\theta} \in \Pi_\varepsilon, \theta \in \Pi$

Con el operador “suavizado” en (B.3) logramos una transición suave del campo τ sobre la frontera de Π al campo $\left(I - \Gamma \frac{\nabla_{\hat{\theta}} g \nabla_{\hat{\theta}} g^\top}{\nabla_{\hat{\theta}} g^\top \Gamma \nabla_{\hat{\theta}} g} \right) \tau$ sobre la frontera de Π_ε . Concluimos que las discontinuidades no son de ninguna preocupación en el análisis de estabilidad realizado en el Capítulo 3.

Bibliografía

- [1] S. K. Armah and S. Yi. Analysis of time delays in quadrotor systems and design of control. In T. Insperger, T. Ersal, and G. Orosz, editors, *Time Delay Systems: Theory, Numerics, Applications, and Experiments*, pages 299–313. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [2] J. Auriol, S. Kong, and D. Bresch-Pietri. Explicit prediction-based control for linear difference equations with distributed delays. *IEEE Control Syst. Lett.*, 6:2864–2869, 2022.
- [3] A. Bayrak and E. Tatlicioglu. A novel adaptive time delay identification technique. *ISA Trans.*, 139:156–166, 2023.
- [4] A. Benarab, I. Boussaada, S.-I. Niculescu, and K. L. Trabelsi. Multiplicity-induced-dominancy for delay systems: Comprehensive examples in the scalar neutral case. *Eur. J. Control*, page 100835, 2023.
- [5] S. P. Bhattacharyya. *PID controllers for time delay systems*. Springer, 2005.
- [6] S. Björklund. *A survey and comparison of time-delay estimation methods in linear systems*. PhD thesis, Linköpings Universitet, 2003.
- [7] I. Boussaada, G. Mazanti, and S.-I. Niculescu. The generic multiplicity-induced-dominancy property from retarded to neutral delay-differential equations: When delay-systems characteristics meet the zeros of Kummer functions. *Comptes Rendus. Mathématique*, 360:349–369, 2022.
- [8] D. Bresch-Pietri. *Robust control of variable time-delay systems: Theoretical contributions and applications to engine control*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012.
- [9] D. Bresch-Pietri, J. Chauvin, and N. Petit. Adaptive control scheme for uncertain time-delay systems. *Automatica*, 48(8):1536–1552, 2012.

- [10] D. Bresch-Pietri and M. Krstic. Adaptive trajectory tracking despite unknown input delay and plant parameters. *Automatica*, 45(9):2074–2081, 2009.
- [11] D. Bresch-Pietri and M. Krstic. Delay-adaptive predictor feedback for systems with unknown long actuator delay. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55(9):2106–2112, 2010.
- [12] J. J. Castillo-Zamora, I. Boussaada, A. Benarab, and J. Escareno. Time-delay control of quadrotor unmanned aerial vehicles: a multiplicity-induced-dominancy-based approach. *J. Vib. Control*, 29(11-12):2593–2608, 2023.
- [13] E. Fridman. *Introduction to Time Delay Systems, 1st Edition*. Springer, 2014.
- [14] E. Fridman and U. Shaked. Delay-dependent stability and H_∞ control: Constant and time-varying delays. *Int. J. Control*, 76:48–60, 2010.
- [15] K. Gu and S.-I. Niculescu. Additional dynamics in transformed time-delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 45(3):572–575, 2000.
- [16] J.-E. Hernández-Díez, C.-F. Méndez-Barrios, S. Mondié, S.-I. Niculescu, and E. J. González-Galván. Proportional-delayed controllers design for LTI-systems: A geometric approach. *Int. J. Control*, 91(4):907–925, 2018.
- [17] P. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control, 1st Edition*. Dover, 2012.
- [18] V. L. Kharitonov. Predictor-based controls: The implementation problem. *Differ. Equations*, 51:1675–1682, 2015.
- [19] J.-H. Kim. Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 46(5):789–792, 2001.
- [20] S. Kong and D. Bresch-Pietri. Prediction-based controller for linear systems with stochastic input delay. *Automatica*, 138:110149, 2022.
- [21] M. Krstic. *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Springer, 2009.
- [22] D. Ma, I. Boussaada, J. Chen, C. Bonnet, S.-I. Niculescu, and J. Chen. PID control design for first-order delay systems via MID pole placement: Performance vs. robustness. *Automatica*, 137:110102, 2022.
- [23] A. D. Mammadov, E. Dincel, and M. T. Söylemez. Analytical design of discrete PI–PR controllers via dominant pole assignment. *ISA Trans.*, 123:312–322, 2022.
- [24] S. Mondié and W. Michiels. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Trans. Autom. Control*, 48(12):2207–2212, 2003.

- [25] G. Oaxaca-Adams and R. Villafuerte-Segura. On controllers performance for a class of time-delay systems: Maximum decay rate. *Automatica*, 147:110669, 2023.
- [26] A. Ramírez. Performance and robustness trade-offs in PIR control of uncertain second-order systems with input disturbances. *Int. J. Control*, pages 1–12, 2023.
- [27] A. Ramírez, S. Mondié, R. Garrido, and R. Sipahi. Design of proportional-integral-retarded (PIR) controllers for second-order LTI systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 61(6):1688–1693, 2016.
- [28] A. Ramírez and R. Sipahi. Multiple intentional delays can facilitate fast consensus and noise reduction in a multiagent system. *IEEE Trans. Cyber.*, 49(4):1224–1235, 2018.
- [29] A. Ramírez and R. Sipahi. Single-delay and multiple-delay proportional-retarded (PR) protocols for fast consensus in a large-scale network. *IEEE Trans. Autom. Control*, 64(5):2142–2149, 2018.
- [30] A. Ramirez, R. Sipahi, S. Mondié, and R. Garrido. An analytical approach to tuning of delay-based controllers for lti-siso systems. *SIAM J. Control Optim.*, 55(1):397–412, 2017.
- [31] L. Rodríguez-Guerrero, V. L. Kharitonov, and S. Mondié. Robust stability of dynamic predictor based control laws for input and state delay systems. *Syst. Control Lett.*, 96:95–102, 2016.
- [32] B. Rojas-Ricca, F. Castaños, and S. Mondié. Dominant-pole placement for predictor synthesis. *arXiv preprint arXiv:2306.13828*, 2023.
- [33] D. Torres-García, F. Méndez-Barrios, and A. Ramírez. Maximum exponential decay rate for first-order time-delay systems with PI controllers. In *Advances in Automation and Robotics Research: Proceedings of the 3rd Latin American Congress on Automation and Robotics, Monterrey, Mexico 2021*, pages 34–42. Springer, 2022.
- [34] J. Tuch, A. Feuer, and Z. J. Palmor. Time delay estimation in continuous linear time-invariant systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 39(4):823–827, 1994.
- [35] R. Villafuerte-Segura. Delayed controllers for time-delay systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 117:106934, 2023.
- [36] L. Vite, L. Juárez, M. A. Gomez, and S. Mondié. Dynamic predictor-based adaptive cruise control. *J. Franklin Inst.*, 359(12):6123–6141, 2022.
- [37] A. Yuce. Analytical design of PI controller for first order transfer function plus time delay: Stability triangle approach. *IEEE Access*, 2023.

- [38] B. Zhou. *Truncated predictor feedback for time-delay systems*. Springer, 2014.
- [39] Y. Zhu and M. Krstic. *Delay-adaptive linear control*. Princeton University Press, 2020.
- [40] P. Zítek, J. Fišer, and T. Vyhlídal. Dimensional analysis approach to dominant three-pole placement in delayed PID control loops. *J. Process Control*, 23(8):1063–1074, 2013.