



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Aportaciones al cálculo de la región de estabilidad
de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo**

Tesis que presenta

Luis Martín Hernández Villa

Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

San Luis Potosí, S.L.P., 25 de Abril del 2025



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Aportaciones al cálculo de la región de estabilidad de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo** presentada para obtener el Grado de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Luis Martín Hernández Villa** y aprobada el **25 de Abril del 2025** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

Director de la tesis

Dr. Gerardo Silva Navarro

Jurado en el examen

Dr. Adrián René Ramírez López

Jurado en el examen

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

Jurado en el examen

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

Jurado en el examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (No. de registro: 862537) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

(Página en Blanco que se va a utilizar para colocar la copia del acta de examen.)

“Primum vivere, deinde philosophari...”

Dedicado a mi familia:

*Mis padres Martín y Ma. Refugio,
mis hermanos Ivan, Adrián, Angel,
Fernanda† y José, por todo lo que son
y lo que siempre serán para mí.*

Agradecimientos

- A mi asesor, el Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar, por su tiempo, dedicación, confianza, sus buenos consejos y sugerencias, así como su paciencia y asesorías. Siempre estaré agradecido por todas esas charlas que contribuyeron a mi formación tanto académica como personal.
- Al Dr. Gerardo Silva Navarro, por la aceptación y todo el apoyo brindado durante la estancia en el CINVESTAV-IPN, por su paciencia, dedicación, por todas las sugerencias y consejos brindados, los cuales contribuyeron significativamente a este trabajo de tesis.
- A los doctores Hugo Cabrera Ibarra, Adrián René Ramírez López y David Antonio Lizárraga Navarro por aceptar ser parte del jurado de tesis, por sus valiosos comentarios, el seguimiento oportuno durante todo este proceso y sus aportaciones, que ayudaron a mejorar este trabajo de tesis.
- Al SECIHTI y al IPICYT por brindarme la oportunidad de desarrollar esta tesis.
- En especial, quiero agradecer a mis padres, a quienes les debo todo lo que soy:
- A mi padre, por enseñarme que los errores que cometemos no nos definen y que uno mismo puede forjar su camino pese a los obstáculos de la vida; por siempre seguir adelante.
- A mi madre, por siempre estar para mí, por apoyarme en todo y ayudarme a construir mis sueños, y sobre todo por no rendirse aunque los obstáculos o problemas parezcan insuperables. Por ser una mujer excepcional.
- A mis hermanos Iván, Adrián, Ángel, Fernanda† y José, por todos los momentos que hemos pasado juntos, porque son un gran ejemplo y siempre me motivan a dar lo mejor de mí.
- Por último, un profundo y sincero agradecimiento a mi novia Paola, por acompañarme en todo este proceso, por apoyarme siempre en todo momento y por todas las situaciones fáciles y difíciles que afrontamos juntos.

Resumen

En este trabajo de tesis se aborda el problema de estabilidad exponencial de ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo. Este tipo de ecuaciones aparecen en una gran cantidad de aplicaciones de distintas ramas de la ciencia y la ingeniería, por ejemplo, desde modelos biológicos, hasta problemas de control de vibraciones mecánicas, por mencionar algunos.

En este trabajo realizamos aportaciones al cálculo de la región de estabilidad de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo, caracterizando analíticamente la geometría de la región de estabilidad en función de sus parámetros para distintos casos de la ecuación: cuando al menos uno de sus parámetros es cero, así como el caso cuando ningún parámetro es cero.

Los resultados obtenidos son aplicados a problemas de ingeniería de control y control de vibraciones. En particular, se presenta la aplicación al problema de diseño de resonadores retardados con retroalimentación de posición y velocidad, el cual se valida experimentalmente para mostrar sus capacidades en la absorción de vibraciones.

Palabras clave: *Ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo, Estabilidad exponencial, Región de estabilidad, Control de vibraciones, Resonador retardado.*

Abstract

In this thesis, the problem of exponential stability in second-order delay differential equations is addressed. These types of equations arise in numerous applications across various branches of science and engineering, ranging from biological models to mechanical vibration control, among others.

In this work, novel contributions are made toward the computation of the stability region for second-order delay differential equations. This is achieved by analytically characterizing the geometrical boundary of the stability region as a function of its intrinsic parameters, considering special cases (where at least one parameter is zero) and the general case (where all parameters are nonzero).

The results obtained are applied to problems in control engineering and vibration control. In particular, an application to the design problem of delayed resonators with position and velocity feedback is presented, which is experimentally validated to demonstrate their capabilities in vibration absorption.

Keywords: *Second-order delay differential equations, Exponential stability, Stability region, Vibration control, Delayed resonator.*

Contenido General

Resumen	XIII
Abstract	XV
Contenido general	XVIII
Lista de figuras	XXII
Notación	XXIII
1 Introducción y planteamiento del problema	1
1.1 Ecuaciones diferenciales con retardo	1
1.2 Ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo	2
1.3 Estructura de la tesis	8
2 Preliminares	11
2.1 Ecuaciones diferenciales en diferencia	11
2.1.1 Sobre la existencia y continuidad de soluciones	12
2.2 Conceptos de estabilidad	15
2.3 Ubicación de los ceros de un cuasipolinomio	17
2.3.1 Curvas logarítmicas y diagrama de potencias	17
2.3.2 Sectores logarítmicos	20
2.3.3 Clasificación de los cuasipolinomios	22
2.3.4 Cuasipolinomios de tipo retardado	22
2.4 Estabilidad de Cuasipolinomios	23
2.4.1 Enfoque frecuencial	24

2.4.2	Criterio de Mikhailov	25
2.4.3	Método de D-Partición	27
3	Regiones de estabilidad de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo	33
3.1	Casos con tres parámetros igual a cero	37
3.2	Casos con dos parámetros iguales a cero	40
3.2.1	Caso $p_2 = 0$ y $q_2 = 0$	41
3.2.2	Caso $q_1 = 0$ y $q_2 = 0$	41
3.2.3	Caso $p_1 = 0$ y $p_2 = 0$	41
3.2.4	Caso $p_1 = 0$ y $q_1 = 0$	44
3.2.5	Caso $p_1 = 0$ y $q_2 = 0$	48
3.2.6	Caso $p_2 = 0$ y $q_1 = 0$	50
3.3	Casos con un parámetro igual a cero	53
3.4	Caso ningún parámetro igual a cero	72
4	Aplicaciones a sistemas de un grado de libertad	79
4.1	Problemas de control y vibraciones	79
4.1.1	Control PD	81
4.1.2	Resonador retardado	83
4.2	Diseño e implementación experimental del DR con retroalimentación de posición y velocidad	89
4.2.1	Plataforma ECP210	89
4.2.1.1	Estimación de los parámetros	90
4.2.2	Diseño e implementación DR	92
4.2.3	Absorción activa de vibraciones usando el DR	96
5	Conclusiones y trabajo a futuro	103
6	Publicaciones	105

Lista de figuras

1.1	Esquema del resonador retardado con retroalimentación de posición.	5
2.1	Representación gráfica del método paso a paso	14
2.2	Representación de una curva logarítmica $c(k, y)$ en el plano complejo.	18
2.3	Diagrama de potencias.	19
2.4	Diagrama de potencias del cuasipolinomio (2.11).	20
2.5	Sectores logarítmicos asociados a cuatro curvas logarítmicas.	21
2.6	Hodógrafo de Mikhailov para el cuasipolinomio (2.20).	26
2.7	Hodógrafo de Mikhailov para el cuasipolinomio (2.21).	27
2.8	Partición del espacio de parámetros (a, b) para (2.19) con $h = 1$	29
2.9	Partición del espacio de parámetros (a, b) para (2.19) con $h = \frac{1}{2}$	29
2.10	Geometría de las curvas $(a(\omega), b(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2$	31
2.11	Partición del espacio de parámetros (a, b) en regiones R_j , $j = 0, 1, \dots$	32
3.1	Región de estabilidad de (3.1) para $p_1 = -8.5$ $q_1 = -12$ y $h = 0.25$	35
3.2	Región de estabilidad de (3.1) para $p_1 = -2.5$ $q_1 = -38$ y $h = 0.5$	36
3.3	Gráfica de la función $\frac{-\omega^2}{\cos(\omega h)}$ para $\omega \in (0, \frac{7\pi}{2h})$	38
3.4	Gráficas de $\tan(\omega h)$ y $\frac{-2}{\omega h}$ para $\omega \in (0, \frac{5\pi}{2h})$	39
3.5	Hodógrafo de Mikhailov para $f(s) = s^2 - q_2 e^{-hs}$, con $q_2 = 2 \leq q_2(\omega_0^*)$ y $h = 1$	40
3.6	Región de estabilidad Γ en el espacio de parámetros (q_2, q_1)	42
3.7	Partición del espacio (q_2, q_1) , en regiones Γ_j , $j = 0, 1, \dots$	43
3.8	Región de estabilidad Ω en el espacio de parámetros (q_2, p_2)	44
3.9	Partición del espacio de parámetros (q_2, p_2) , en regiones Ω_j , $j = 0, 1, \dots$	46
3.10	Región de estabilidad Λ en el espacio de parámetros (p_2, q_1)	48
3.11	Región de estabilidad Y en el espacio de parámetros (q_2, p_1)	51

3.12	Gráfica de $\tan\left(\frac{\omega h}{2}\right)$ y $\frac{-p_1}{\omega}$ con $p_1 < 0$ para $\omega \in \left(0, \frac{5\pi}{h}\right)$	56
3.13	Comportamiento de la curva $(q_2(\omega), p_2(\omega))$, $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right)$, para $p_1 < 0$, $0 < p_1 < \frac{2}{h}$ y $p_1 \geq \frac{2}{h}$	57
3.14	Gráfica de $\tan\left(\frac{\omega h}{2}\right)$, $\frac{-p_1}{\omega}$ y $\frac{\omega}{p_1}$ para $\omega \in \left(0, \frac{5\pi}{h}\right)$, y $p_1 < 0$	58
3.15	Gráfica de $\tan\left(\frac{\omega h}{2}\right)$, $\frac{-p_1}{\omega}$ y $\frac{\omega}{p_1}$ para $\omega \in \left(0, \frac{5\pi}{h}\right)$, y $0 < p_1 < \frac{2}{h}$	58
3.16	Gráfica de $\tan(\omega h)$ y $\frac{\omega h}{p_1 h - 1}$ para $\omega \in \left(0, \frac{5\pi}{2h}\right)$, con $p_1 < 0$, $0 < p_1 < \frac{2}{h}$ y $p_1 \geq \frac{2}{h}$	59
3.17	Gráfica de $r(\omega)$ y su intersección con la función $\frac{2\omega}{p_1}$, para $\left(0, \frac{3\pi}{h}\right)$ con $0 < p_1 < \frac{2}{h}$	61
3.18	Gráfica de $r(\omega)$ y su intersección con la función $\frac{2\omega}{p_1}$, para $\left(0, \frac{3\pi}{h}\right)$ con $p_1 \geq \frac{2}{h}$	61
3.19	Gráfica de $r(\omega)$ y su intersección con la función $\frac{2\omega}{p_1}$, para $\left(0, \frac{3\pi}{h}\right)$ con $p_1 < 0$	62
3.20	Región de estabilidad en el espacio de parámetros (q_2, q_1) para la ecuación (3.34) considerando $p_1 < 0$	63
3.21	Geometría de las curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, con $p_1 < 0$	64
3.22	Función $\alpha(\omega)$ para $\omega \in \left(0, \frac{4\pi}{h}\right)$	64
3.23	Curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}\right)$ y $\omega \in \left(\frac{3\pi}{h}, \frac{4\pi}{h}\right)$. (a) El cruce ocurre para $\omega_{0,1} \in (\omega_1^*, \frac{2\pi}{h})$, (b) El cruce ocurre para $\omega_{0,1} \in (\hat{\omega}_0, \omega_1^*)$	65
3.24	Partición del espacio (q_2, q_1) , en regiones Γ_j , $j = 0, 1, \dots$, para $p_2 = 0$ y $p_1 < 0$	66
3.25	Región de estabilidad en el espacio de parámetros (q_2, q_1) para la ecuación (3.34) considerando $0 < p_1 < \frac{2}{h}$	67
3.26	Geometría de las curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2$, con $0 < p_1 < \frac{2}{h}$	68
3.27	Curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, con $k = 0, 1$	69
3.28	Partición del espacio (q_2, q_1) en regiones $\Psi_{0,j}, \Psi_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$, para $p_2 = 0$ y $0 < p_1 < \frac{2}{h}$	70
3.29	Partición del espacio (q_2, q_1) con $p_1 \geq \frac{2}{h}$	70
3.30	Geometría de las curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, con $p_1 \geq \frac{2}{h}$	71
3.31	Partición del espacio (q_2, q_1) para el caso $p_2 = 0$ con $p_1 \geq \frac{2}{h}$	72
3.32	Gráfica de $\bar{n}(\omega)$ y $\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right)$ para $\omega \in \left(0, \frac{2\pi}{h}\right)$	74
3.33	Región de estabilidad en el espacio de parámetros (q_2, p_2) de la ecuación (3.1) para $p_1 < 0$, $q_1 < 0$ satisfaciendo la condición (3.64).	75
3.34	Grafica de $v(\omega)$	76

3.35	Partición del espacio de parámetros (q_2, p_2) para $p_1 < 0$, $q_1 < 0$ satisfaciendo la condición (3.64).	78
4.1	Región de estabilidad Θ y región D considerando $m = 2$ kg, $c = 10$ N·seg/m, $k = 50$ N/m y $h = 0.034$ seg.	82
4.2	Región $M \subset \Theta$ para $m = 2$ kg, $c = 10$ N·seg/m, $k = 50$ N/m y $h = 0.034$ seg.	83
4.3	Respuesta en el tiempo de (4.1) para los valores de ganancias $g_1 = -40$ N y $g_2 = -10.4$ N.	83
4.4	Respuesta en el tiempo de (4.1) para los valores de ganancias $g_1 = -45.02$ N y $g_2 = -11.56$ N.	85
4.5	Respuesta en el tiempo de (4.11) para los valores de ganancias $g_p = -45.79$ N, $g_v = 10$ N.	86
4.6	Región de estabilidad Θ de (4.1) y los puntos $(b_1(\omega_{d_j}), b_2(\omega_{d_j}))$ para: $\omega_{d_1} = 1.45$, rad/seg $\omega_{d_2} = 15$ rad/seg y $\omega_{d_3} = 49.2$ rad/seg	87
4.7	Respuesta en el tiempo de (4.1) para los valores de ganancias $g_1 = 422.02$ N y $g_2 = 4.42$ N.	88
4.8	Respuesta en el tiempo de (4.1) para los valores de ganancias $g_1 = -72.98$ N y $g_2 = 97.88$ N.	88
4.9	Plataforma experimental ECP 210a.	90
4.10	Validación experimental de los parámetros estimados de la plataforma experimental ECP 210a para el sistema de un grado de libertad.	92
4.11	Configuración de un sistema mecánico de un grado de libertad en la plataforma ECP 210a.	93
4.12	(a) Validación experimental para $\omega_{d1} = 16.52$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 234.2$ N/m y $g_2 = -23.39$ N·seg/m.	95
4.13	(a) Validación experimental para $\omega_{d2} = 18.85$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 406.58$ N/m y $g_2 = -21.43$ N·seg/m.	95
4.14	Esquema de un sistema interconectado de 2 grados de libertad.	96
4.15	Configuración de un sistema de 2 grados de libertad en la plataforma ECP 210a.	97
4.16	(a) Validación experimental del sistema primario perturbado a la frecuencia $\omega = 16.52$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 234.2$ N/m y $g_2 = -23.39$ N·seg/m.	98
4.17	(a) Validación experimental del sistema primario perturbado a la frecuencia $\omega = 18.85$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 406.58$ N/m y $g_2 = -21.43$ N·seg/m.	99

4.18 (a) Validación experimental del sistema primario perturbado a la frecuencia $\omega = 21.99$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 673.01$ N/m y $g_2 = -18.38$ N·seg/m. .	100
4.19 Sistema interconectado en lazo abierto perturbado por $F(t) = 1.5 \sin(\omega t)$, con $\omega = 21.99$ rad/seg.	101
4.20 (a) Validación experimental del sistema primario perturbado a la frecuencia $\omega = 21.99$ rad/seg. (b) Señal de control Señal de control con $g_1 = 673.01$ N/m y $g_2 = -18.38$ N·seg/m aplicada a los 0.1s.	102

Notación

\mathbb{R}	El conjunto de los números reales.
\mathbb{R}_+	El conjunto de los números reales positivos.
\mathbb{R}^n	Espacio euclidiano real n -dimensional.
$\mathbb{R}^{n \times n}$	El espacio de las matrices reales de dimensión $n \times n$.
I	Matriz identidad de dimensión n .
\mathbb{C}	El conjunto de los números complejos.
\mathbb{C}_+	El conjunto de los números complejos con parte real positiva.
$ a $	El valor absoluto de un número real a .
$\ x\ $	Norma euclidiana del vector x .
$\ A\ $	Norma matricial inducida de la matriz A .
$\ \varphi\ _h$	Norma de convergencia uniforme $\ \varphi\ _h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \ \varphi(\theta)\ $.
$\det(A)$	El determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
$\partial\Gamma$	Frontera de un conjunto Γ .
$C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuas que mapean $[-h, 0]$ a \mathbb{R}^n .
$x'(t)$	Primera derivada de $x(t)$.
$x''(t)$	Segunda derivada de $x(t)$.
$\arg q(s)$	Argumento de $q(s)$ con $s \in \mathbb{C}$.
$\Delta \arg q(s) \big _C$	El cambio neto del argumento $q(s)$ a lo largo de un contorno C .

Introducción y planteamiento del problema

En este capítulo se introduce y plantea el problema de investigación de la tesis. Se presentan una breve introducción a los sistemas dinámicos con retardos modelados matemáticamente por ecuaciones diferenciales con retardos, y el problema de estabilidad correspondiente. Se exponen algunas aplicaciones donde el problema de estabilidad de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con retardo es fundamental, para concluir el capítulo planteando el problema del cálculo de la región de estabilidad de clases generales de ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo.

1.1. Ecuaciones diferenciales con retardo

Dentro de los sistemas dinámicos existen una gran cantidad de problemas que pueden ser modelados mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t)), \quad t \geq t_0, \quad (1.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el estado del sistema, y regularmente se supone que $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento. En (1.1) se asume que la razón de cambio del estado presente $x(t)$ no depende de los estados pasados y sólo está definida por el estado presente en t , véase [20].

Sin embargo, existe una clase de sistemas dinámicos en los cuales es necesario incluir información de los estados pasados del sistema. En esta clase de sistemas, la razón de cambio del estado presente del sistema depende tanto del estado presente como de los estados pasados del sistema, véase [6, 21].

Este tipo de sistemas dinámicos pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), x(t-h_1), \dots, x(t-h_r)), \quad t \geq t_0, \quad (1.2)$$

donde $0 < h_1 < \dots < h_r$ son los retardos de tiempo y la función $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n(r+1)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento. A esta clase de sistemas dinámicos se les denomina como sistemas con retardo y a las ecuaciones de la forma (1.2) se les conoce también como ecuaciones diferenciales con retardo. Históricamente, los primeros estudios de sistemas con retardo se remontan a los trabajos de Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace y Poisson, alrededor del siglo XVIII, motivados en su gran mayoría por problemas mecánicos, véase [27]. Por su parte, Volterra a principios de 1900, al estudiar los modelos predador-presa analiza un tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias bastante generales incluyendo retardos de tiempo, véase [21]. En las décadas siguientes diversos problemas sobre sistemas con retardos fueron estudiados; por ejemplo, Minorsky en [30] muestra la importancia de considerar retardos de tiempo en el problema de estabilización de barcos. No obstante, el estudio sistemático de los sistemas con retardo se debe en gran parte a los trabajos realizados por Myshkis [32], Bellman [6, 7] y Hale [21]. En las últimas décadas se han presentado diferentes aportaciones al estudio de los sistemas con retardo, véase [16, 19, 21, 27], por mencionar algunos.

La clase de ecuaciones diferenciales lineales con retardos puede ser descrita por

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_0 y(t) + A_1 y(t-h_1) + \dots + A_r y(t-h_r), \quad (1.3)$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $0 < h_1 < \dots < h_r$ y $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 0, 1, \dots, r$. La clase de ecuaciones lineales (1.3) puede encontrarse en el modelado de ciertos sistemas dinámicos con retardo, o bien, puede ser el resultado de la linealización de ecuaciones lineales de la forma (1.2) alrededor de una solución particular como; por ejemplo, puntos fijos (equilibrios) de (1.2).

1.2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo

Existen una gran cantidad de aplicaciones donde las ecuaciones de la forma (1.2) y (1.3) pueden encontrarse. En nuestro trabajo de tesis nos concentraremos en ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con retardo de la forma siguiente:

$$x''(t) = p_1 x'(t) + p_2 x'(t-h) + q_1 x(t) + q_2 x(t-h), \quad (1.4)$$

donde $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ y $h > 0$ es el retardo del tiempo.

Si bien la ecuación (1.4) puede parecer muy sencilla, esta ecuación aparece en una gran cantidad de aplicaciones de distintas ramas de la ciencia y la ingeniería como mostraremos a continuación.

Por ejemplo, en [13] estudian un modelo bidimensional de la propagación de VIH-1 de célula a célula en cultivos de tejidos, suponiendo que la infección se transmite directamente de las células infectadas a las células sanas y sin considerar los efectos del virus libre, obteniendo el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dC(t)}{dt} &= r_C C(t) \left(1 - \frac{C(t) + I(t)}{C_M}\right) - k_I I(t) C(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= k'_I I(t-h) C(t-h) - \mu_I I(t),\end{aligned}\tag{1.5}$$

donde C representa la concentración de células sanas, I es la concentración de células infectadas, C_M es la capacidad de carga efectiva del sistema, k_I representa la tasa constante de infección de células sanas a células infectadas, r_C es la tasa de reproducción celular saludable, μ_I es la tasa de mortalidad de células infectadas y $k'_I = \frac{k_I}{\mu_I}$ es la fracción de células que sobreviven al período de incubación. En [13] muestran que el sistema (1.5) tiene tres puntos de equilibrios (dos inestables y uno estable), de modo que para el análisis de estabilidad local, se linealiza el sistema (1.5) alrededor del punto de equilibrio estable. Mediante cálculos directos se muestra que el sistema lineal resultante se puede escribir es como una ecuación diferencial de segundo orden con retardo de la forma (1.4), con

$$\begin{aligned}p_1 &= -\frac{\mu_I(k'_I C_M + r_C)}{k_I C_M}, & q_1 &= -\frac{r_C \mu_I^2}{k'_I C_M}, \\ p_2 &= \mu_I, & q_2 &= \frac{r_C \mu_I (2\mu_I - k'_I C_M)}{k'_I C_M}.\end{aligned}$$

Otra aplicación interesante donde surgen ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo de la forma (1.4) es en el estudio de sistemas presa-depredador. Por ejemplo, en [39] se presenta el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) - bx(t)x(t-h) - \alpha x(t)y(t) - H_x, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + \beta x(t)y(t) - H_y,\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde $x(t)$ representa la población de presas, $y(t)$ la población de depredadores, r representa la tasa de crecimiento intrínseca de la presa, c la tasa de mortalidad del depredador sin presa, α mide

la tasa de consumo de presa por el depredador, β la conversión de la presa consumida en la tasa de reproducción del depredador y H_x, H_y son las tasas constantes de erradicación para las poblaciones de depredador y presa, respectivamente. Todos los parámetros de (1.6) son constantes positivos.

En [39] se muestra que (1.6) tiene 2 equilibrios: uno estable y otro inestable. Al linealizar el sistema (1.6) al rededor del punto de equilibrio estable es posible obtener una ecuación diferencial de segundo orden con retardo de la forma (1.4) con

$$\begin{aligned} p_1 &= r - c - b_1x_1 - \beta x_1 - \alpha y_1, & q_1 &= -rc - \alpha\beta x_1 - bcx_1 - b\beta x_1^2 + \alpha cy_1, \\ p_2 &= -bx_1, & q_2 &= -bcx_1 + b\beta x_1^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, existen una gran cantidad de problemas de ingeniería de control donde ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo aparecen de forma natural. Por ejemplo, ecuaciones de la forma (1.4) se encuentran en el problema de supresión de vibraciones en estructuras civiles, véase [1, 2, 29], en el problema de control de la suspensión de las ruedas de un automóvil [35], y en el control de resonancias en sistemas electromecánicos, véase [34].

Adicionalmente, ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo son usadas como un modelo inicial simplificado para el estudio del problema complejo de la caminata humana y su auto-balanceo, así como en el modelado y construcción de robots bípedos, véase; por ejemplo [28, 31]. Explícitamente, estas aplicaciones consideran un modelo linealizado de la forma

$$\theta''(t) + \beta\theta'(t) + \alpha\theta(t) = F(t), \quad (1.7)$$

donde $\theta(t)$ representa el ángulo de la posición (idealizado como un péndulo invertido) y $F(t)$ describe la ley de control, la cual, en el problema de la caminata humana y su autobalanceo, es realizada por el cerebro.

Adicionalmente, debido a que la acción de control realizada por el cerebro no es instantánea (las latencias de las neuronas son de alrededor de 100 a 500 ms), entonces un modelo más realista al problema (1.7) es el siguiente:

$$\theta''(t) + \beta\theta'(t) + \alpha\theta(t) = F(t - \tau)$$

donde $\tau > 0$ es el retardo de tiempo asociado a la acción de control del cerebro.

En [31] se muestra que aunque el retardo de tiempo suele ignorarse en el análisis del problema, este es esencial para la estabilización vertical. La acción de control ejercida por el cerebro involucra el conocimiento o estimación del ángulo y su velocidad. Así, es razonable considerar una acción de control tipo PD de la forma

$$F(t) = k_p\theta(t) + k_d\theta'(t).$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado tiene la forma de la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con retardo

$$\theta''(t) + \beta\theta'(t) + \alpha\theta(t) - k_p\theta(t - \tau) - k_d\theta'(t - \tau) = 0.$$

es decir, una ecuación de la forma (1.4), donde

$$p_1 = -\beta, \quad p_2 = k_d, \quad q_1 = -\alpha, \quad q_2 = k_p.$$

Finalmente, presentamos una aplicación de ingeniería que ha tenido bastante interés recientemente, donde ecuaciones diferenciales de la forma (1.4) desempeñan un papel fundamental. Esta aplicación concierne con el problema de absorción de vibraciones mecánicas, donde el retardo de tiempo es utilizado como un parámetro de control.

En [37] Olgac y Holm-Hansen introducen el concepto de *resonador retardado* (DR por sus siglas en inglés), véase Figura 1.1.

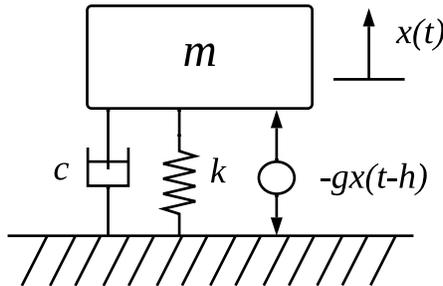


Figura 1.1: Esquema del resonador retardado con retroalimentación de posición.

La idea detrás del DR es introducir intencionalmente el retardo de tiempo $h > 0$ en la retroalimentación estática de posición $u(t) = -gx(t - h)$, para inducir oscilaciones estables en el sistema mecánico de un grado de libertad.

El problema puede ser modelado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con retardo:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = -gx(t - h). \quad (1.8)$$

El problema de diseño del DR consiste en seleccionar la ganancia de retroalimentación g y el retardo h tales que la ecuación (1.8) tenga soluciones oscilatorias a una frecuencia dada ω_d , en presencia de amortiguamiento.

Desde que se introdujo el concepto del DR se han propuesto diversas modificaciones durante las

últimas tres décadas. Así, uno puede encontrar configuraciones DR utilizando retroalimentación de posición, velocidad y/o aceleración, véase por ejemplo el trabajo [40] y las referencias citadas en el mismo, donde los autores realizan una revisión completa y un análisis exhaustivo de las configuraciones DR existentes.

De todo lo mencionado anteriormente, podemos concluir que el estudio de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo (1.4) es de interés en una gran cantidad de aplicaciones y, por lo tanto, ha sido bastante estudiado en la literatura.

Por ejemplo, Minorsky en 1942, véase [30], estudia la ecuación (1.4) para el caso particular cuando $q_2 = 0$. En 1948, Ansoff y Krumhansl [3] usando el criterio de estabilidad de Nyquist, estudian los casos particulares de la ecuación (1.4) cuando $q_2 = 0$ y $p_2 = 0$.

Por su parte, Bhatt y Hsu en 1966, véase [4], estudian los mismos dos casos anteriores estudiados por Ansoff y Krumhansl, pero utilizando el Teorema de Pontryagin para cuasipolinomios. Por ootro lado, Driver en 1978, véase [15], utilizando el enfoque de Lyapunov-Krasovskii presenta condiciones suficientes para la estabilidad dependiente del retardo de la ecuación (1.4) para el caso ningún parámetro igual a cero.

Así mismo, Cooke y Grossman [12], en 1982, investigan la ecuación general (1.4) y sus casos con un parámetro igual a cero ($p_2 = 0$ y $q_2 = 0$).

Kolmanovskii y Nosov, presentan en su libro [27] ciertas regiones de estabilidad de los siguientes tres casos cuando dos parámetros son iguales a cero: (i) $p_1 = 0$ y $q_1 = 0$, (ii) $p_1 = 0$ y $q_2 = 0$, (iii) $q_1 = 0$ y $p_2 = 0$

Un trabajo interesante es presentado por Hu y Wang en [23], donde se estudia el problema de control de un sistema mecánico de un grado de libertad mediante una retroalimentación de posición y velocidad con retardos. Debido a que en un sistema mecánico los coeficientes de amortiguamiento y rigidez son constante positivos, el estudio realizado en [23] corresponde al caso cuando $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$ en la ecuación (1.4). Para este caso se presentan las siguientes condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad exponencial independiente del retardo:

- (i) Si $p_1^2 \leq -2q_1$, entonces la región de estabilidad independiente del retardo en el espacio de parámetros (q_2, p_2) está dada por la siguiente desigualdad

$$4q_2^2 + (p_2^2 - 2q_1 - p_1^2)^2 < 4q_1^2. \quad (1.9)$$

- (ii) Si $-2q_1 < p_1^2 \leq -4q_1$, entonces la región de estabilidad independiente del retardo en el espacio de parámetros (q_2, p_2) está delimitada por la desigualdad (1.9), satisfaciendo además

las siguientes condiciones:

$$q_2^2 < q_1^2 \quad \text{y} \quad p_2^2 \leq p_1^2 + 2q_1. \quad (1.10)$$

(iii) Si $p_1^2 > -4q_1$, entonces la región de estabilidad independiente del retardo en el espacio de parámetros (q_2, p_2) está delimitada nuevamente por las desigualdades (1.9)-(1.10).

Más aún, los mismos autores concluyen que la región de estabilidad independiente del retardo está siempre acotada en el rectángulo definido por:

$$R = \{(q_2, p_2) : |q_2| \leq -q_1, |p_2| \leq -p_1\}.$$

Adicionalmente, los autores de [23] mencionan que determinar la región de estabilidad en este caso particular cuando $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$, en el espacio de parámetros (q_2, p_2) es un problema bastante complicado de resolver.

Finalmente, mencionamos los trabajos más recientes de Cahlon y Schmidt [8, 9] donde los autores realizan un estudio de la ecuación (1.4) utilizando el Teorema de Pontryagin. En estos trabajos se presenta la siguiente condición necesaria para la estabilidad exponencial dependiente del retardo de la ecuación (1.4)

Teorema 1.1 [8]

Si p_1, p_2, q_1 y q_2 son positivos, entonces (1.4) no es exponencialmente estable.

Esta condición necesaria nos indica que tiene sentido investigar la estabilidad exponencial de la ecuación (1.4) bajo la condición de que no todos los coeficientes p_1, p_2, q_1 y q_2 son positivos.

Con base en lo anterior, en [8] se estudian algunos casos satisfaciendo la restricción $p_1 p_2 \geq 0$ y $q_1 q_2 \geq 0$. Por otro lado, en [9] se consideran algunos casos satisfaciendo la restricción $p_1 p_2 \geq 0$ y $q_1 q_2 < 0$.

Es claro que existen casos de la ecuación (1.4) donde no todos los coeficientes son positivos que no satisfacen la restricción $p_1 p_2 \geq 0$ y $q_1 q_2 \geq 0$, así como la restricción $p_1 p_2 \geq 0$ y $q_1 q_2 < 0$.

Más aún, en general, la aplicación de los resultados obtenidos en [8] y [9] demanda el conocimiento de los coeficientes p_1, p_2, q_1, q_2 y el retardo h y, por lo tanto, no proporciona regiones de estabilidad explícitas en el espacio de coeficientes.

Es importante mencionar que la ecuación (1.4) puede escribirse en la forma vectorial

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_0 y(t) + A_1 y(t-h), \quad (1.11)$$

donde $y(t) = (y_1(t) \ y_2(t))^T = (x(t) \ x'(t))^T$ con

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_1 & p_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix},$$

y es bien conocido que existen una gran cantidad de resultados en la literatura para el estudio de estabilidad de ecuaciones de la forma (1.11), establecidos incluso para el caso general de matrices $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, véase por ejemplo [19].

Sin embargo, una vez más, la aplicación de la gran mayoría de estos resultados de estabilidad demanda el conocimiento explícito de las matrices A_0 y A_1 así como el valor del retardo h .

La revisión anterior nos muestra que el problema de determinar la región exacta de estabilidad de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo (1.4) en función de sus coeficientes y el retardo, dista mucho de estar completamente resuelto. De hecho, Hale y Verduyn-Lunel en su libro, [21], mencionan que:

“La región exacta de estabilidad de la ecuación (1.11) como función explícita de A_0, A_1 y h no se conoce y probablemente nunca se conocerá.”

Como bien argumentan Hale y Verduyn-Lunel, la razón detrás de esta aseveración radica en que la función característica asociada a (1.11) es bastante complicada de analizar.

Así, si bien no podemos resolver el problema de determinar la región completa de estabilidad de ecuaciones diferenciales de segundo orden con retardo, si podemos intentar determinar aproximaciones de esta región en función de algunos de sus coeficientes y el retardo.

Lo anterior motiva este trabajo de investigación, en el cual realizamos algunas aportaciones al cálculo de la región de estabilidad de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo (1.4).

1.3. Estructura de la tesis

La tesis está organizada en la forma siguiente: En el Capítulo 2 se presentan algunos resultados preliminares sobre ecuaciones diferenciales con retardo. Se discuten brevemente las soluciones, el concepto de estabilidad, así como algunos criterios para determinar su estabilidad.

En el Capítulo 3 se presentan los resultados principales de la tesis. Se presentan regiones de estabilidad de todos los casos cuando tres parámetros son iguales a cero, así mismo se presentan las regiones de estabilidad cuando dos parámetros son iguales a cero y el análisis completo del caso

cuando $p_2 = 0$. Adicionalmente, consideramos el caso de ningún parámetro cero bajo las restricciones $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$.

El Capítulo 4 está dedicado a mostrar las aplicaciones de algunos de los resultados a los problemas de control y resonadores retardados. Se hace especial énfasis en la aplicación experimental realizada en colaboración con el **Dr. Gerardo Silva Navarro** de la Sección de Mecatrónica del CINVESTAV-IPN. Conclusiones y trabajo futuro se presentan en el Capítulo 5.

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados preliminares necesarios para el desarrollo y alcance de este trabajo de tesis. Se revisan los problemas de existencia y unicidad de soluciones de una clase de ecuaciones diferenciales con retardo. Se aborda el tema de la ubicación de los ceros de los cuasipolinomios y se introduce los conceptos básicos de estabilidad, así como algunos métodos frecuenciales para su análisis.

2.1. Ecuaciones diferenciales en diferencia

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), x(t-h)), \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$ y $g(t, x, y)$ es una función vectorial, es decir, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Adicionalmente, supongamos que la función g es continua para todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a su segundo argumento. Ecuaciones de la forma (2.1) se les conoce como Ecuación Diferencial en Diferencias (EDD) o Ecuaciones Diferenciales con Retardo [6, 21, 19].

Observemos que en el caso de que el retardo de tiempo fuera igual a cero, la ecuación (2.1) se convierte en una EDO de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), x(t)) \triangleq f(t, x(t)),$$

como g es continua para todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a $x(t)$, entonces $f(t, x(t))$ es continua para todos sus argumentos y localmente Lipschitz con respecto a $x(t)$. Luego entonces, de la teoría clásica para EDO's (véase, por ejemplo Teorema 3.1

[20]) sabemos que existe una única solución $x(t, t_0, x_0)$ que pasa por x_0 en el instante t_0 , es decir, $x(t, t_0, x_0) = x_0$. Sin embargo, para el caso de la EDD de la forma (2.1) (cuando el retardo no es cero), no es suficiente conocer el punto inicial x_0 , ya que con esta información no podemos definir la derivada de $x(t)$ en el tiempo t_0 .

Entonces, para definir una solución particular de (2.1) es necesario proporcionar el instante inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que satisfaga la condición

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Nótese que la función φ pertenece a un cierto espacio funcional, el cual dependerá directamente de la aplicación o problema en cuestión a tratar. Es importante resaltar el hecho de que la función inicial pertenezca a un espacio funcional da noción de que los sistemas con retardo pertenecen a una cierta clase de sistemas de dimensión infinita, en contraste con las EDO's donde su dimensión es finita [25].

2.1.1. Sobre la existencia y continuidad de soluciones

El Problema de Valor Inicial (PVI) de la ecuación (2.1) se puede escribir como

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), x(t-h)), & t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0 + \theta) = \varphi_0(\theta), & \theta \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (2.2)$$

donde φ_0 es la función inicial, suponemos que $\varphi_0 \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. El método más conocido para construir soluciones para el problema de valor inicial (2.2) es el método paso a paso o método de integraciones sucesivas, véase [6, 16], el cual se basa en construir soluciones en intervalos de longitud h , como se muestra a continuación:

Primero consideremos el intervalo $t \in [t_0, t_0 + h]$. Entonces, $t - h \in [t_0 - h, t_0]$ y por consiguiente $x(t - h) = \varphi_0(t - h)$. Así, el sistema (2.2) toma la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), \varphi_0(t-h)), \quad t \in [t_0, t_0 + h] \quad (2.3)$$

Al definir $g(t, x(t), \varphi_0(t-h)) \triangleq G_1(t, x(t))$, el sistema (2.3) se reduce a un PVI clásico de las EDO's

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = G_1(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + h] \\ x(t_0) = \varphi_0(t_0). \end{cases} \quad (2.4)$$

Además, como g es continua en todos sus argumentos y localmente Lipschitz con respecto a $x(t)$ entonces G_1 también lo es, por consiguiente, existe una única solución $x(t, t_0, \varphi_0(t_0))$ definida en $t \in [t_0, t_0 + h]$ que pasa por $\varphi_0(t_0)$ en el instante t_0 y satisface a su vez la ecuación (2.6). Definamos $\varphi_1(t) \triangleq x(t, t_0, \varphi_0(t_0))$ para $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Ahora en el segundo paso, consideremos $t \in [t_0 + h, t_0 + 2h]$. Entonces, $t - h \in [t_0, t_0 + h]$ y $x(t - h)$ coincide con la función $\varphi_1(t)$, es decir, $x(t - h) = \varphi_1(t - h)$. Entonces, el sistema (2.2) toma la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), \varphi_1(t - h)), \quad t \in [t_0 + h, t_0 + 2h] \quad (2.5)$$

Definiendo $g(t, x(t), \varphi_1(t - h)) \triangleq G_2(t, x(t))$, podemos escribir nuevamente el sistema (2.5) como un PVI clásico de EDO's

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = G_2(t, x(t)), & t \in [t_0 + h, t_0 + 2h] \\ x(t_0 + h) = \varphi_1(t_0 + h). \end{cases} \quad (2.6)$$

Similarmente, la función G_2 es continua en todos sus argumentos y localmente Lipschitz con respecto a $x(t)$, por lo tanto, existe una única solución $x(t, t_0, \varphi_1(t_0 + h))$ definida en el intervalo $t \in [t_0 + h, t_0 + 2h]$ que pasa por el punto $\varphi_1(t_0 + h)$ y satisface la ecuación (2.6).

Este procedimiento puede repetirse k veces para los intervalos de longitud h . Por lo tanto, se concluye que la función

$$x(t, t_0, \varphi_0) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in [t_0 - h, t_0], \\ \varphi_1(t), & t \in [t_0, t_0 + h], \\ \varphi_2(t), & t \in [t_0 + h, t_0 + 2h], \\ \vdots \\ \varphi_k(t), & t \in [t_0 + (k - 1)h, t_0 + kh], \end{cases}$$

es la única solución del PVI (2.2) si $g(t, x, y)$ es continua en todos sus argumentos y localmente Lipschitz con respecto a x , véase la Figura 2.1, donde se ilustra el método paso a paso.

Es claro que el método paso a paso es bastante útil para mostrar la existencia de soluciones de la ecuación (2.1), además de que es un método constructivo y por ende es posible su implementación computacional. Sin embargo, este método no es universal, ya que existen sistemas dinámicos con retardos para los cuales el método paso a paso es insuficiente para garantizar la existencia de soluciones, véase [16, 25, 27].

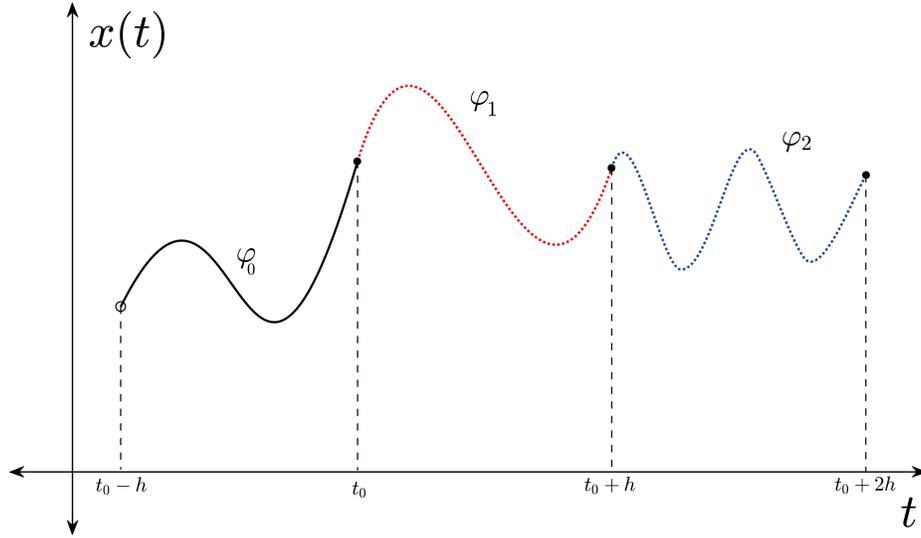


Figura 2.1: Representación gráfica del método paso a paso

Es claro que la solución $x(t, t_0, \varphi)$ es continua para $t \geq t_0$, y es continuamente diferenciable para $t > t_0$. De hecho en $t = t_0$, la derivada en (2.1) representa la derivada por la derecha.

Observemos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx(t, t_0, \varphi)}{dt} \right|_{t=t_0+0} &= g(t_0+0, x(t_0+0, t_0, \varphi), x(t_0+0-h, t_0, \varphi)) \\ &= g(t_0, \varphi(0), \varphi(-h)). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\varphi_0 \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, entonces, en general $\varphi(\theta)$ no es diferenciable en $\theta = 0$. De lo anterior se sigue que $x(t, t_0, \varphi)$ tiene derivada continua en $t = t_0$ si, y sólo sí, $\varphi(\theta)$ es diferenciable en $\theta = 0$ y

$$\left. \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = g(t_0, \varphi(0), \varphi(-h)).$$

Es importante observar que para ecuaciones diferenciales con retardo, las soluciones no pueden extenderse a la izquierda de $t_0 - h$, en contraste con las ecuaciones diferenciales ordinarias, donde las soluciones existen a la izquierda del instante inicial t_0 .

Si requerimos extender soluciones a la izquierda de $t_0 - h$, entonces es necesario requerir diferenciablez de g y también de la función inicial φ , véase [21].

Al igual que en ecuaciones diferenciales ordinarias, las soluciones de ecuaciones diferenciales con retardo satisfacen la propiedad de continuidad con respecto a condiciones iniciales. Explícitamente,

si $x(t, t_0, \varphi)$ y $x(t, t_0, \psi)$ son soluciones de (2.1), ambas definidas para $t \in [t_0, t_0 + T]$, correspondientes a condiciones iniciales φ y ψ respectivamente, entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon, T)$ tal que

$$\|\varphi - \psi\|_h < \delta, \quad \text{implica que} \quad \|x(t, t_0, \varphi) - x(t, t_0, \psi)\| < \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_0 + T$.

2.2. Conceptos de estabilidad

Asumamos que $g(t, 0_h, 0_h) \equiv 0$, para $t \geq 0$, donde 0_h denota el origen del espacio vectorial \mathbb{R}^n . Es decir, la ecuación (2.1) tiene solución trivial $x(t) \equiv 0$, para todo $t \geq t_0$.

Definición 2.1 (Estabilidad) [25]

La solución trivial de (2.1) es estable si para cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que para cualquier $\varphi \in C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, con $\|\varphi\|_h < \delta$, se satisface la siguiente desigualdad:

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si $\delta(t_0, \varepsilon)$ se puede escoger independientemente de t_0 , entonces la solución trivial es **estable uniformemente**.

Definición 2.2 (Estabilidad asintótica) [25]

La solución trivial de (2.1) es asintóticamente estable si para cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\Delta(\varepsilon, t_0)$ tal que para cualquier $\varphi \in C$, con $\|\varphi\|_h < \Delta(\varepsilon, t_0)$, las siguientes condiciones se cumplen:

1. $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$
2. $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$ cuando $t - t_0 \rightarrow \infty.$

Si $\Delta(\varepsilon, t_0)$ se puede escoger independientemente de t_0 y existe $H_1 > 0$ tal que $x(t, t_0, \varphi) \rightarrow 0$, cuando $t - t_0 \rightarrow \infty$, uniformemente con respecto a t_0 y para cualquier $\varphi \in C$, con $\|\varphi\|_h < H_1$. Entonces la solución trivial es **uniformemente asintóticamente estable**.

Definición 2.3 (Estabilidad exponencial)[25]

La solución trivial de (2.1) es exponencialmente estable si existen $\Delta_0 > 0$, $\sigma > 0$ y $\gamma \geq 1$ tales que para cualquier $t_0 > 0$ y cualesquiera $\varphi \in C$, con $\|\varphi\|_h < \Delta_0$, la siguiente desigualdad se mantiene:

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| < \gamma \|\varphi\|_h e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

Ahora consideremos la ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{r=0}^m A_r x(t - h_r), \quad (2.7)$$

donde $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $h_r \in \mathbb{R}_+$ $r = 0, 1, \dots, m$, son los retardos de tiempo, con $h_0 = 0$.

Para (2.7) la estabilidad asintótica uniforme es equivalente a la estabilidad exponencial, véase [25].

Así, para la ecuación (2.7) adoptaremos la siguiente definición:

Definición 2.4 [25]

Se dice que el sistema (2.13) es exponencialmente estable si existen $\mu \geq 1$ y $\sigma > 0$ tales que,

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \mu e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad \forall t \geq 0, \quad \varphi \in C.$$

La estabilidad exponencial de (2.7) está determinado por la ubicación de los ceros de su función característica asociada

$$q(s) = \det \left(sI - \sum_{r=0}^m A_k e^{h_r s} \right). \quad (2.8)$$

La función $q(s)$ es una función entera de variable compleja, es decir, es una función analítica en todo el plano complejo, comúnmente conocida como cuasipolinomio.

Los cuasipolinomios tienen como característica principal que poseen un número infinito de ceros. Esta característica hace que el análisis de la ubicación de los ceros de $q(s)$ sea un problema bastante más complicado que el análisis de ubicación de ceros para las funciones características asociadas a ecuaciones diferenciales ordinarias.

A continuación revisaremos brevemente algunos resultados existentes sobre la ubicación de ceros de cuasipolinomios, para una revisión más detallada revisar los libros [6, 21]

2.3. Ubicación de los ceros de un cuasipolinomio

Teorema 2.1 [19]

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\rho(\varepsilon) > 0$ tal que $q(s)$ no tiene raíces dentro de la región

$$R = \left\{ s \in \mathbb{C} : |s| \geq \rho(\varepsilon), \arg(s) \in \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right] \text{ y } \arg(s) \in \left[-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \right\}.$$

Si bien es cierto que el Teorema 2.1 no nos dice donde existen ceros de $q(s)$, si nos indica en que región del plano complejo es posible encontrarlos, es decir, en la región \bar{R} , véase Figura 2.2, donde

$$\bar{R} = \left\{ s \in \mathbb{C} : |s| > \rho(\varepsilon), \arg(s) \in \left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \text{ y } \arg(s) \in \left[-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \right\},$$

mientras que dentro de la bola $\{s \in \mathbb{C} : |s| < \rho(\varepsilon)\}$ no es posible argumentar sobre la existencia de ceros del cuasipolinomio $q(s)$.

2.3.1. Curvas logarítmicas y diagrama de potencias

Para analizar la existencia de ceros de $q(s)$ en la región \bar{R} consideremos la siguiente función en el plano complejo

$$c(k, y) \triangleq k \ln(y) + iy, \quad y \geq 1, \quad (2.9)$$

donde $c(k, y)$ es conocida como curva logarítmica. Es claro que dados $\varepsilon > 0$ y $k > 0$ existe $y_0 \geq 1$ lo suficientemente grande tal que la curva logarítmica pertenece a la región \bar{R} para $y \geq y_0$, como se ilustra en la Figura 2.2.

Observemos que el cuasipolinomio $q(s)$ puede reescribirse como

$$q(s) = \sum_{v=0}^M a_v s^{j_v} e^{\hat{\beta}_v s}, \quad (2.10)$$

donde $M \leq (n+1)(m+1)$, $a_v \neq 0$ y $\hat{\beta}_v, j_v \in \mathbb{R}$ con $(\hat{\beta}_v, j_v) \neq (\hat{\beta}_\alpha, j_\alpha)$, para todo $\alpha, v \in [0, M]$. A partir del cuasipolinomio (2.10) se muestra que cuando $s \in c(k, y)$, $y \geq 1$ suficientemente grande, se tiene que (véase [19])

$$\left| a_v s^{j_v} e^{\hat{\beta}_v s} \right| \approx |a_v| y^{j_v + k \hat{\beta}_v}.$$

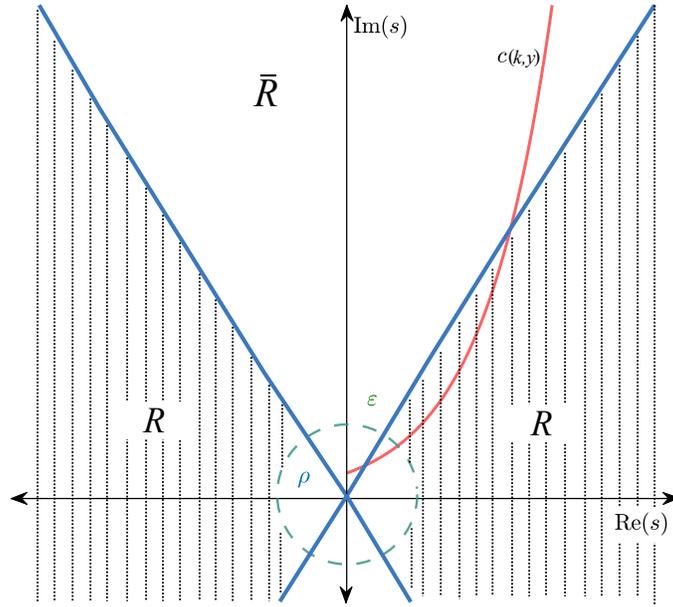


Figura 2.2: Representación de una curva logarítmica $c(k,y)$ en el plano complejo.

Dicho en términos simples, sobre la curva logarítmica los términos del cuasipolinomio $q(s)$ se comportan como potencias de y , donde la potencia está dada por $j_v + \hat{\beta}_v$. De este modo, se define el “peso” del término $a_v s^{j_v} e^{\hat{\beta}_v s}$ a lo largo de una curva logarítmica como

$$p_v \triangleq j_v + k \hat{\beta}_v$$

Es posible mostrar que si el cuasipolinomio $q(s)$ evaluado para $s \in c(k,y)$ tiene un término con mayor peso que los otros términos, entonces $q(s)$ no tiene ceros con magnitud grande.

Así, para la existencia de ceros de $q(s)$ es necesario que existan al menos dos términos con el mismo peso a lo largo de una curva logarítmica dada.

Lo anterior motiva el problema de encontrar valores de k tales que para $s \in c(k,y)$, el cuasipolinomio $q(s)$ tenga al menos dos términos con el mismo peso.

Dados $(\hat{\beta}_v, j_v)$ y $(k, 1)$ el peso del término asociado a $(\hat{\beta}_v, j_v)$ puede ser interpretado como la proyección ortogonal del vector $(\hat{\beta}_v, j_v)$ sobre el vector $(k, 1)$.

Con base en lo anterior, se ubican en el plano $(\hat{\beta}_v, j_v)$ todas las parejas asociadas al cuasipolinomio. Posteriormente se construye el casco convexo (el conjunto convexo más pequeño) que contiene todos los puntos $(\hat{\beta}_v, j_v)$.

El casco convexo es un polígono cuya frontera consiste en un número finito de segmentos, véase Figura 2.3. La parte superior de este polígono es el diagrama de potencias de $q(s)$. Para cada uno de estos segmentos escogemos k tal que el vector $(k, 1)$ es ortogonal al segmento.

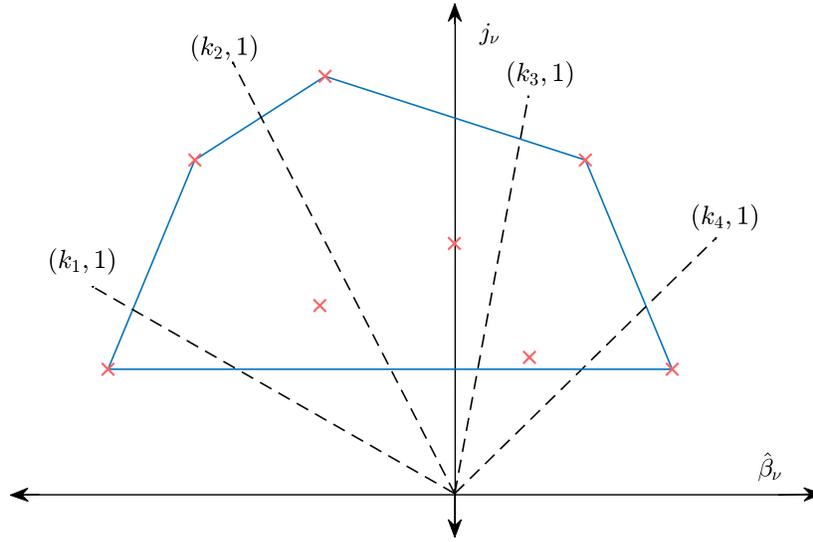


Figura 2.3: Diagrama de potencias.

De esta forma, para cada uno de estos valores de k , resulta que existen al menos dos términos del cuasipolinomio con el mismo peso a lo largo de una curva logarítmica $c(k, y)$ correspondiente.

Para ilustrar lo anterior, consideremos el siguiente cuasipolinomio:

$$q(s) = s^2 + p_1s + q_1 + p_2se^{-hs} + q_2e^{-hs}, \quad (2.11)$$

donde $p_1, p_2, q_1, q_2, \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Reescribiendo el cuasipolinomio de la forma (2.10) se obtienen las parejas de potencias

$$\begin{aligned} (\hat{\beta}_0, j_0) &= (0, 2) & (\hat{\beta}_3, j_3) &= (-h, 1) \\ (\hat{\beta}_1, j_1) &= (0, 1) & (\hat{\beta}_4, j_4) &= (-h, 0) \\ (\hat{\beta}_2, j_2) &= (0, 0) & & \end{aligned}$$

con las cuales construimos el diagrama de potencias como se observa en la Figura 2.4, donde el casco convexo se forma por la unión de estos puntos en el plano $(\hat{\beta}_v, j_v)$. La parte superior del casco está formada sólo por el segmento de recta P , de modo que sólo existe un vector $(k_1, 1)$ ortogonal a esta recta, donde $k_1 = -\frac{1}{h} < 0$, el diagrama de potencias de (2.11) se ilustra en la Figura 2.4.

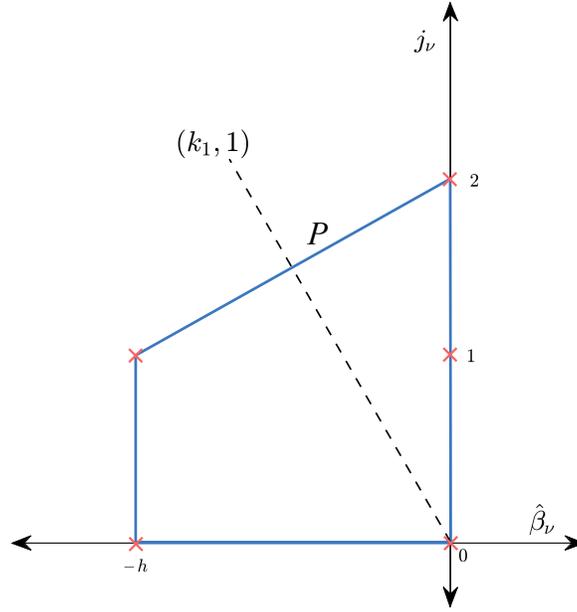


Figura 2.4: Diagrama de potencias del cuasipolinomio (2.11).

2.3.2. Sectores logarítmicos

Para cada valor de k_j , $j = 1, \dots, r$, (asumiendo $k_1 < k_2 < \dots < k_r$) corresponde una curva logarítmica $c(k_j, y) = k_j \ln(y) + iy$ con $y \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$ definimos los sectores logarítmicos de la forma

$$S_j = \{s \in \mathbb{C} : (k_j - \varepsilon) \ln(y) < \text{Re}(s) < (k_j + \varepsilon) \ln(y), \text{Im}(s) = y, y \geq 1\},$$

Adicionalmente, entre cada sector logarítmico definimos las regiones siguientes:

$$V_j = \{s \in \mathbb{C} : (k_j + \varepsilon) \ln(y) < \text{Re}(s) < (k_{j+1} - \varepsilon) \ln(y), \text{Im}(s) = y, y \geq 1\}. \quad (2.12)$$

donde V_0 y V_r están definidas como

$$V_0 = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < (k_1 - \varepsilon) \ln(y), \text{Im}(s) = y, y \geq 1\}.$$

$$V_r = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > (k_r + \varepsilon) \ln(y), \text{Im}(s) = y, y \geq 1\}.$$

Por ejemplo, en la Figura 2.5 trazamos los sectores logarítmicos correspondientes al diagrama de potencias de la Figura 2.3 donde teníamos 4 valores de k_j , $j = 1, 2, 3, 4$.

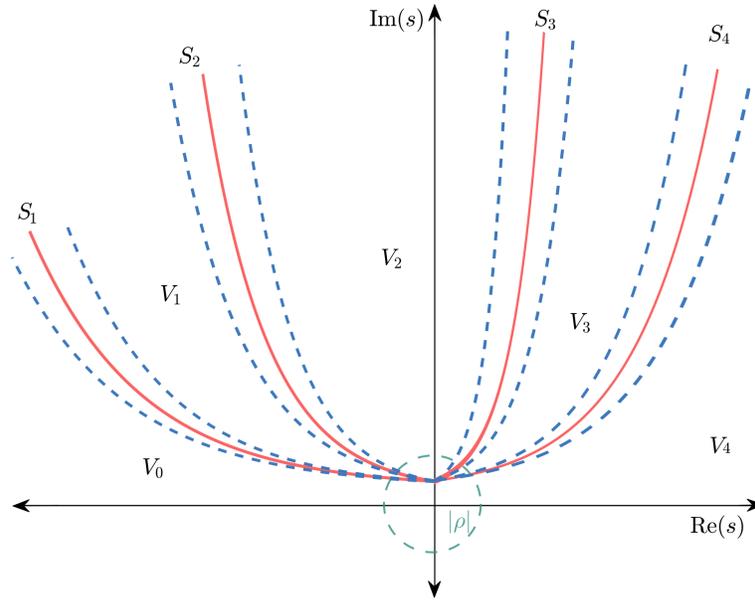


Figura 2.5: Sectores logarítmicos asociados a cuatro curvas logarítmicas.

Teorema 2.2 [19]

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\rho(\varepsilon) > 0$ tal que $q(s)$ no tiene raíces en las regiones V_i definidas en (2.12) para $i = 0, 1, \dots, r$.

La idea detrás de la demostración del Teorema 2.2 nuevamente es verificar que en las regiones V_i existe un sólo término dominante de $q(s)$ y por consiguiente no existen ceros. Ahora sólo nos queda analizar si existen ceros en los sectores S_j , $j = 0, 1, \dots, r$. Para esto, se define un contorno cerrado simple en cada S_j y aplicando el Teorema del principio del argumento (véase [11]), se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3 [19]

Dado $\varepsilon > 0$ existe $R_1(\varepsilon) > 0$ tal que todos los ceros de $q(s)$ en el semiplano complejo con magnitudes mayores que $R_1(\varepsilon)$ se encuentran en la unión de los sectores logarítmicos S_j , $j = 0, 1, \dots, r$.

El Teorema 2.3 muestra que los ceros de $q(s)$ se encuentran ubicados en ciertas regiones del plano complejo. La demostración también muestra que dentro de cada sector logarítmico el número de ceros es infinito contable.

En resumen, los resultados presentados en los Teoremas 2.1 y 2.2 permiten delimitar los sectores del plano complejo donde los ceros de $q(s)$ no pueden estar ubicados, restringiendo así las regiones

donde es posible ubicarlos.

Mientras que el Teorema 2.3 permite determinar la existencia de ceros de $q(s)$ en las regiones delimitadas por los sectores logarítmicos S_j , donde estos sectores están bien definidos y delimitados en el plano complejo, además cada sector se asocia con su respectiva curva logarítmica $c(k_j, y)$ y esta a su vez depende del valor de k_j obtenido del diagrama de potencias.

2.3.3. Clasificación de los cuasipolinomios

Los valores k_j del diagrama de potencias nos proporcionan una clasificación para los cuasipolinomios $q(s)$ de la forma (2.10)

- (i) Si $k_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, r$, entonces $q(s)$ es de tipo retardado.
- (ii) Si existe al menos un $k_j = 0$ y $k_m < 0$, para todo $j \neq m$, entonces $q(s)$ es de tipo neutro.
- (iii) Si existe al menos un $k_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, r$, entonces $q(s)$ es de tipo avanzado.

Del diagrama de potencias mostrado en la Figura 2.4 se obtuvo que $k_1 = \frac{-1}{h} < 0$, por consiguiente el cuasipolinomio (2.11) es de tipo retardado.

2.3.4. Cuasipolinomios de tipo retardado

La clasificación de los cuasipolinomios presentada en la subsección anterior nos permite deducir que el cuasipolinomio $q(s)$ asociado a la ecuación diferencial de segundo orden con retardo dado por (2.11) es de tipo retardado. Este tipo de cuasipolinomios poseen características relevantes mencionadas y utilizadas frecuentemente en la literatura, estas características se resumen en el siguiente enunciado:

En los cuasipolinomios de tipo retardado existe un número finito de ceros a la derecha de cualquier línea vertical en el plano complejo.

El argumento anterior puede deducirse directamente como una conclusión de los resultados presentados sobre la ubicación de los ceros de $q(s)$, ya que en el caso de que $q(s)$ es de tipo retardado (caso $k_j < 0$), conlleva a que su curva logarítmica y por consiguiente sus sectores logarítmicos se extiendan sobre el semiplano izquierdo del plano complejo. Luego entonces, por el Teorema 2.3 la ubicación de los ceros (número infinito contable) se encuentran “cada vez más a la izquierda” del plano complejo. Por consiguiente, al trazar cualquier línea vertical existirá un número finito de

ceros a la derecha de tal línea.

Por último, esta particular ubicación de los ceros en los cuasipolinomios de tipo retardado es bastante práctica desde un enfoque de estabilidad, ya que la línea vertical suele tomarse al eje imaginario como abordaremos en las siguientes secciones.

2.4. Estabilidad de Cuasipolinomios

Una vez que hemos revisado la ubicación de los ceros de cuasipolinomios en el plano complejo, podemos introducir el concepto de estabilidad basado en la ubicación de sus ceros.

Consideremos la ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{r=0}^m A_r x(t - h_r), \quad (2.13)$$

donde $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices del sistema y $h_r \in \mathbb{R}_+$, $r = 0, 1, \dots, m$, son los retardos del sistema, con $h_0 = 0$, y su cuasipolinomio asociado

$$q(s) = \det \left(sI - \sum_{r=0}^m A_r e^{-h_r s} \right). \quad (2.14)$$

Utilizando la clasificación de los cuasipolinomios es posible demostrar que (2.14) es de tipo retardado y por consiguiente la ecuación (2.13) es una ecuación diferencial de tipo retardada.

Teorema 2.4 [21]

El sistema (2.13) es exponencialmente estable si, y sólo si todos los ceros de $q(s)$ tienen parte real estrictamente negativa.

El Teorema 2.4 nos muestra que la condición de estabilidad exponencial de ecuaciones diferenciales lineales de tipo retardado basado en los ceros de cuasipolinomios es la misma que la condición de estabilidad exponencial de EDO lineales, basada en la ubicación de los ceros de polinomios.

Sin embargo, el problema es bastante más complicado ya que como observamos en la sección anterior, los cuasipolinomios tienen un número infinito (contable) de ceros.

Con base en lo anterior es conveniente establecer el siguiente concepto de estabilidad para cuasipolinomios

Definición 2.5 [19]

La función característica o cuasipolinomio $q(s)$ dado por (2.14) se dice estable si

$$q(s) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+ \quad (2.15)$$

Se dice que $q(s)$ es **estable independiente del retardo** si (2.15) se mantiene para todos los valores positivos $h_r, r = 0, 1, \dots, m$. Por otro lado, si (2.15) sólo se mantiene para ciertos valores de los retardos $h_r, r = 0, 1, \dots, m$, decimos que $q(s)$ es estable dependiente de los retardos.

El estudio y análisis de estabilidad de (2.13) se ha abordado desde el enfoque en el dominio de la frecuencia, así como también en el dominio del tiempo. Los enfoques frecuenciales son una extensión de los métodos tradicionales que analizan los ceros de la función característica de los sistemas. Entre estos métodos se encuentran el Teorema de Pontryagin, el criterio de Mikhailov para cuasipolinomios y el método de D-particiones, véase [19, 27], los cuales serán discutidos con detalle más adelante.

2.4.1. Enfoque frecuencial

En el estudio y análisis de los sistemas lineales con retardo de la forma dada en (2.13) existen varios criterios o metodologías para analizar su estabilidad, entre los criterios más comunes o ampliamente conocidos se encuentran las pruebas de estabilidad 2-D, el método del Pseudo-retardo y el método directo, los cuales se basan principalmente en la continuidad del exponente de estabilidad con respecto a los retardos de tiempo, véase [19] además de que resultan ser útiles en sistemas simples de orden pequeño y con poco retardos, sin embargo, estos criterios presentan ciertas desventajas como se enuncian a continuación.

- 1) Las pruebas de estabilidad 2-D consideran principalmente al cuasipolinomio asociado al sistema (2.13) como un polinomio en 2 variables relacionados a sistemas 2-D, estudiados en la teoría de señales, donde se requiere eliminar una variable y por consiguiente generar un polinomio para analizar su estabilidad. Sin embargo, no existe ningún procedimiento sistemático para realizar esto, además de que en sistemas de orden superior lo anterior puede resultar bastante complejo.
- 2) El método del Pseudo-retardo utiliza una transformación bilineal para reducir el problema a un sistema sin retardo y por consiguiente analizar con los métodos clásicos una secuencia de

polinomios de una sola variable el cual cuenta con un parámetro libre, por lo que a la hora de realizar el arreglo de Routh puede conllevar a un procedimiento complejo.

- 3) El método directo de manera similar a los anteriores se basa en la manipulación algebraica de un polinomio realizando un procedimiento iterativo el cual puede ser bastante complicado.

Por consiguiente, tratando de solventar estas limitaciones mencionadas en los métodos anteriores, es que se generaron nuevos métodos y criterio para el análisis de la estabilidad de los sistemas lineales, algunos de estos criterios son los llamados barridos frecuenciales o también los algoritmos de matrices constantes, véase [19]. Más aún, estos métodos han tomado relevancia en las últimas décadas sobre todo por el incremento de “poder computacional” y su utilidad en sistemas de orden superior. Si bien es cierto que estos métodos nos proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de (2.13) (tanto independiente como dependiente del retardo). La aplicación directa de estos resultados demanda el conocimiento de sus parámetros, es decir, es necesario conocer los valores específicos de las matrices A_r , $r = 0, \dots, m$.

Por último, es importante mencionar que todos los métodos mencionados anteriormente se basan en el hecho de que el sistema (2.13) es exponencialmente estable cuando $h = 0$.

En este trabajo de tesis se utilizan métodos basados en el enfoque frecuencial para el estudio de estabilidad de una ecuación diferencial de segundo orden con retardo, por lo tanto, el resto de este capítulo se discuten algunos conceptos esenciales para el desarrollo de este estudio.

2.4.2. Criterio de Mikhailov

Así como los Teoremas de Pontryagin's , Chebotarev-Meiman, entre otros, extienden los resultados de Routh y Hurwitz al proporcionar condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de cuasipolinomios. De manera similar existen trabajos que amplían los resultados de Nyquits y Mikhailov para el análisis de estabilidad de los sistemas con retardo desde el enfoque frecuencial y geométrico utilizando el principio del argumento para funciones analíticas. Primero, reescribamos el cuasipolinomio (2.14) de la forma siguiente

$$q(s) = \sum_{k=0}^m p_k(s)e^{\lambda_k s}, \quad (2.16)$$

donde $p_k(s)$ son polinomios de grado menos o igual a n .

Teorema 2.5 (Criterio de Mikhailov) [27]

El cuasipolinomio de la forma (2.16), es estable si y sólo si

$$\Delta \arg q(i\omega) \Big|_0^{+\infty} = \frac{n\pi}{2}. \quad (2.17)$$

El criterio de Mikhailov nos permite analizar la estabilidad de un cuasipolinomio de manera gráfica al realizar un barrido de frecuencias $\omega \in [0, \infty)$ para (2.16). Graficando $Re(q(i\omega))$ contra $Im(q(i\omega))$ en el plano complejo, cuando ω varia de cero a infinito (positivo) se obtiene una curva en el plano complejo, la cual se le conoce como Hodógrafo de Mikhailov o diagrama de Mikhailov. Para ilustrar el criterio de Mikhailov, consideremos

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t-h), \quad t \geq 0. \quad (2.18)$$

El cuasipolinomio asociado a (2.18) es

$$q(s) = s - a - be^{-hs}. \quad (2.19)$$

Para garantizar que el cuasipolinomio sea estable se debe cumplir la condición (2.17), es decir, $\Delta \arg q(i\omega) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, claramente esto dependerá de los valores de a , b y $h > 0$ dados.

Por ejemplo, consideremos el cuasipolinomio $q(s)$ para los valores $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$ y $h = 1$

$$q(s) = s + \frac{1}{2} + e^{-s}. \quad (2.20)$$

Al graficar la parte real $Re(q(i\omega))$ contra la parte imaginaria $Im(q(i\omega))$ de (2.20) obtenemos el hodógrafo de Mikhailov que se muestra en la Figura 2.6

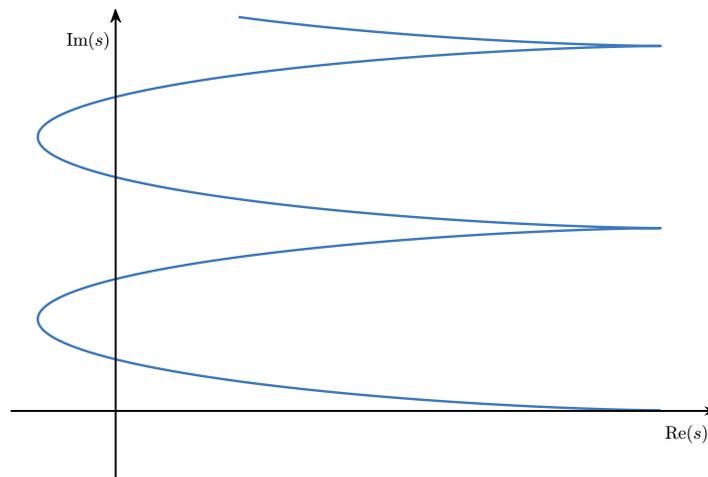


Figura 2.6: Hodógrafo de Mikhailov para el cuasipolinomio (2.20).

De la Figura 2.6 podemos apreciar que la curva de Mikhailov comienza sobre el eje real positivo, exactamente en $(\frac{3}{2}, 0)$ y comienza a crecer en sentido antihorario hasta que cruza el eje imaginario, para posteriormente oscilar en este eje mientras ω incrementa.

De hecho, el Teorema 2.5 demanda verificar el cambio total del argumento de $q(i\omega)$ cuando ω varía de $[0, \infty)$. Sin embargo, como mencionamos la curva presenta un patrón oscilante el cual se repite conforme ω aumenta. Más aún, una vez que la curva cruza el eje imaginario y comienza a oscilar sobre este eje, el cambio del argumento es cero conforme ω aumenta.

Por lo tanto, el cambio total del argumento de (2.20) cuando ω varía de $[0, \infty)$ es $\frac{\pi}{2}$, concluyendo que es un cuasipolinomio estable.

Por otro lado, consideremos ahora el caso del cuasipolinomio $q(s)$ para los valores $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ y $h = 1$

$$q(s) = s - \frac{1}{2} - e^{-s}. \quad (2.21)$$

El hodógrafo de Mikhailov correspondiente que se muestra en la Figura 2.7. De la Figura 2.7 podemos apreciar que la curva comienza en $(-\frac{3}{2}, 0)$ y comienza a crecer ahora en sentido horario hasta que cruza el eje imaginario, para posteriormente oscilar en este eje mientras ω incrementa. Entonces, se concluye que en este caso el cambio total del argumento de (2.21) cuando ω varía de $[0, \infty)$ es $-\frac{\pi}{2}$, concluyendo que es un cuasipolinomio inestable.

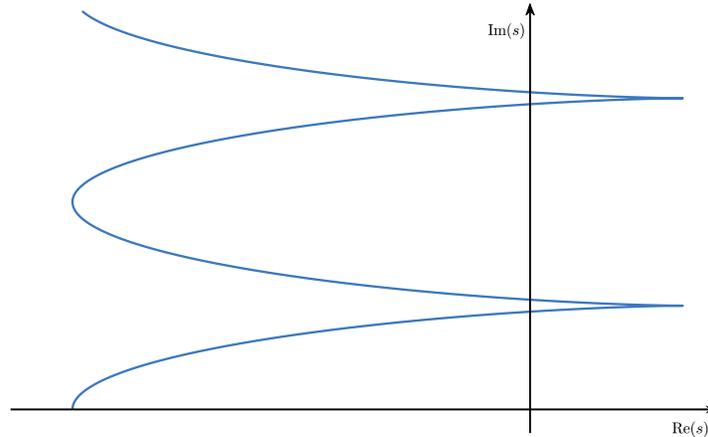


Figura 2.7: Hodógrafo de Mikhailov para el cuasipolinomio (2.21).

2.4.3. Método de D-Partición

El método D-Partición propuesto por Neirmark en [33], es una herramienta fundamental que combinada con la propiedad de continuidad de los ceros de cuasipolinomios con respecto a sus coefi-

cientes, nos permite obtener regiones de estabilidad en un espacio de coeficientes de dimensión 2. La idea del método es dividir el espacio de 2 parámetros en regiones acotadas por hipersuperficies, donde el cuasipolinomio tiene un par de raíces imaginarias puras.

La propiedad de continuidad de los ceros con respecto a los coeficientes garantiza que el cuasipolinomio tiene el mismo número de ceros con parte real positiva en cada una de las regiones acotadas por las hipersuperficies. La región donde no existen ceros con parte real positiva es la región de estabilidad.

Para ilustrar de mejor manera este método consideremos el mismo cuasipolinomio (2.19) de la subsección anterior. Notemos que si $s = 0$ es un cero de $q(s)$, entonces se satisface $a + b = 0$. Ahora supongamos que $a + b = 0$ se satisface, entonces

$$\begin{aligned} q(s) &= s + b - be^{-hs}, \\ &= s \left[1 + b \left(\frac{1 - e^{-hs}}{s} \right) \right], \end{aligned}$$

observemos que la función $\frac{1 - e^{-hs}}{s} \rightarrow h$, cuando $s \rightarrow 0$, es decir, está bien definida para $s = 0$, con lo que se deduce que si $a + b = 0$, entonces $s = 0$ es un cero de $f(s)$.

Así, $s = 0$ es un cero de $q(s)$ si, y sólo si $a + b = 0$. Ahora supongamos que $s = i\omega$, con $\omega > 0$, es un cero de (2.19). Entonces

$$q(i\omega) = (i\omega) - a - be^{-i\omega h} = 0. \quad (2.22)$$

Utilizando la identidad de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ en (2.22) y separando parte real e imaginaria obtenemos las siguientes ecuaciones

$$-a - b \cos(\omega h) = 0, \quad (2.23)$$

$$\omega + b \sin(\omega h) = 0. \quad (2.24)$$

Así, tenemos dos ecuaciones y tres parámetros (los coeficientes de la ecuación (2.19) más el retardo). Por consiguiente, tenemos que escoger dos parámetros para poder resolver y utilizar las únicas dos ecuaciones que tenemos. Esta elección dependerá del problema en cuestión.

Escojamos, en este caso, por ejemplo, los parámetros a y b , entonces de (2.23)-(2.24) tenemos la

siguiente parametrización:

$$a(\omega, h) = \frac{\omega \cos(\omega h)}{\sin(\omega h)}, \quad (2.25)$$

$$b(\omega, h) = \frac{-\omega}{\sin(\omega h)}. \quad (2.26)$$

Para poder obtener las regiones delimitadas por las curvas (hipersuperficies) (2.25)-(2.26) es necesario asignar un valor de retardo $h > 0$. Por ejemplo, para $h = 1$ obtenemos la partición del espacio de parámetros (a, b) que se muestra en la Figura 2.8.

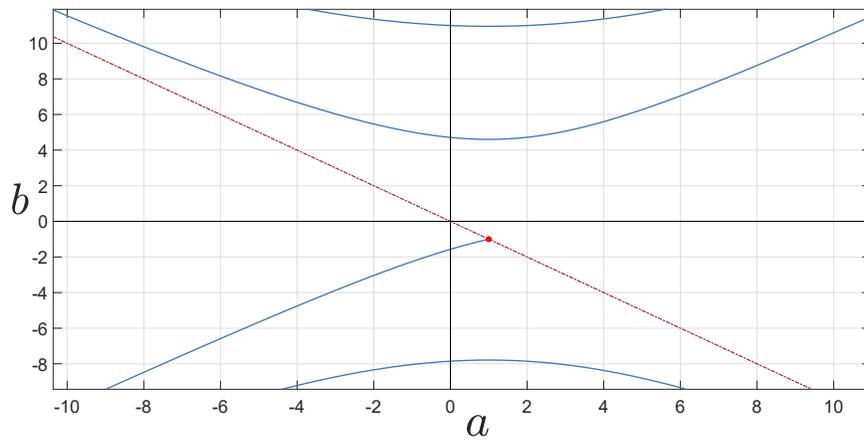


Figura 2.8: Partición del espacio de parámetros (a, b) para (2.19) con $h = 1$.

Mientras que para $h = \frac{1}{2}$, obtenemos la partición del espacio (a, b) que se muestra en la Figura 2.9.

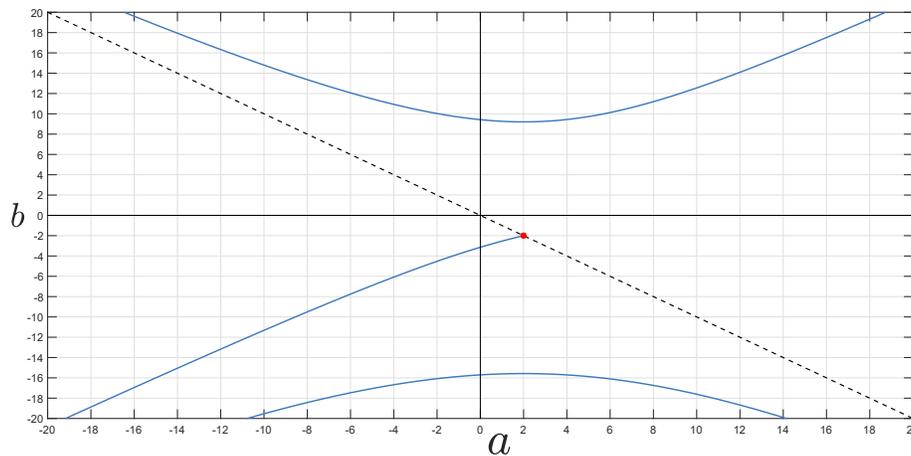


Figura 2.9: Partición del espacio de parámetros (a, b) para (2.19) con $h = \frac{1}{2}$.

En ambos ejemplos se tiene la propiedad de que cualquier par de parámetros (a, b) perteneciente a la misma región, el cuasipolinomio (2.19) tiene el mismo número de ceros con parte real positiva. Entonces, para determinar aquella región que no contienen ceros con parte real positiva, usamos el criterio de estabilidad de Mikhailov mostrado en la sección anterior.

De hecho, el cuasipolinomio (2.20) para el caso con $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$ y $h = 1$ podemos ubicarlo en la Figura 2.8, es decir, corresponde al par de parámetros $(-\frac{1}{2}, -1)$ que pertenece a la región delimitada por la primera curva de (2.25)-(2.26) para $\omega \in (0, \pi)$ y la recta $a + b = 0$, determinando así que esa es la región de estabilidad.

Evidentemente, podemos aplicar el procedimiento anterior para el caso $h = \frac{1}{2}$ mostrado en la Figura 2.9. Sin embargo, las ideas proporcionadas por el método D-Partición no sólo aplican a casos particulares una vez dados los parámetros del cuasipolinomio, es decir, el problema se extiende a determinar la región completa de estabilidad (si es que existe) para cualquier $h > 0$ dado.

Para abordar el problema anterior es necesario analizar la geometría de las curvas dadas por la parametrización (2.25)-(2.26).

Notemos que las curvas están bien definidas para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, \dots$, además de que $(a(\omega), b(\omega)) \rightarrow \left(\frac{1}{h}, \frac{-1}{h}\right)$, cuando $\omega \rightarrow 0$, mientras que $(a(\omega), b(\omega)) \rightarrow (-\infty, \infty)$, cuando $\omega \rightarrow \frac{\pi}{h}^-$.

Mientras que el comportamiento de las curvas en los intervalos $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 1, 2, \dots$, satisface

- Si k es impar

$$\begin{aligned} (a(\omega), b(\omega)) &\rightarrow (\infty, \infty) && \text{cuando } \omega \rightarrow \frac{k\pi}{h}^+, \\ (a(\omega), b(\omega)) &\rightarrow (-\infty, \infty) && \text{cuando } \omega \rightarrow \frac{(k+1)\pi}{h}^-. \end{aligned}$$

- Si k es par

$$\begin{aligned} (a(\omega), b(\omega)) &\rightarrow (\infty, -\infty) && \text{cuando } \omega \rightarrow \frac{k\pi}{h}^+, \\ (a(\omega), b(\omega)) &\rightarrow (-\infty, -\infty) && \text{cuando } \omega \rightarrow \frac{(k+1)\pi}{h}^-. \end{aligned}$$

Para determinar el comportamiento asintótico de las curvas en los intervalos $\left(\frac{(k)\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$

$$\beta(\omega) \triangleq \frac{b(\omega)}{a(\omega)} = -\frac{1}{\cos(\omega h)}.$$

Se tiene que $\beta\left(\frac{k\pi}{h}\right) = (-1)^k$, por consiguiente si k es par, entonces $a(\omega) = b(\omega)$, en otras palabras, la curva $(a(\omega), b(\omega))$ tiende asintóticamente a la recta $a = b$ cuando $\omega \rightarrow \frac{k\pi}{h}$. Análogamente, si k es impar, entonces $a(\omega) = -b(\omega)$, entonces, la curva $(a(\omega), b(\omega))$ tiende asintóticamente a la recta $a = -b$ cuando $\omega \rightarrow \frac{k\pi}{h}$, como se muestra en la Figura 2.10.

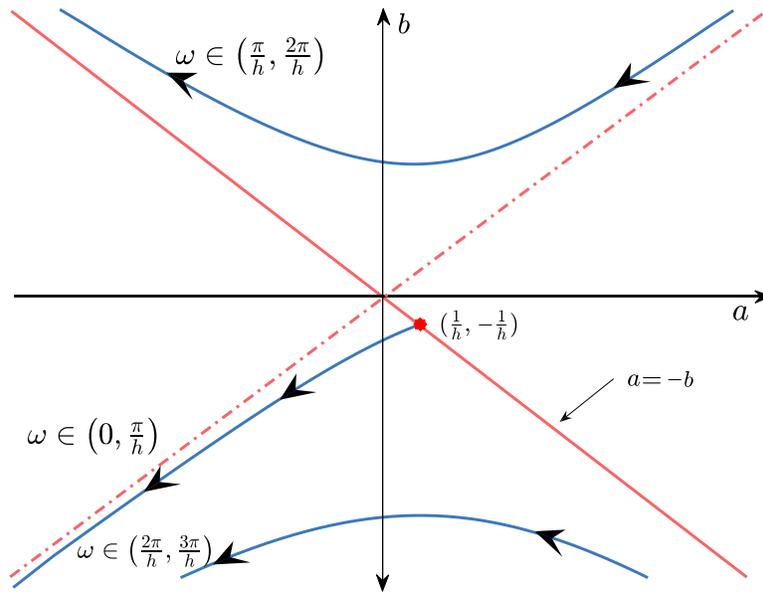


Figura 2.10: Geometría de las curvas $(a(\omega), b(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2$.

En resumen, dado cualquier $h > 0$ las curvas $(a(\omega), b(\omega))$ definidas por la parametrización (2.25)-(2.26) y la recta $a + b = 0$ dividen el espacio de parámetros (a, b) en un conjunto infinito de regiones R_j , $j = 0, 1, \dots$, véase Figura 2.11 donde se tiene la propiedad que para cada par $(a, b) \in R_j$, el cuasipolinomio $q(s)$ tiene el mismo número de ceros con parte real positiva.

Luego, utilizando el criterio de Mikhailov mostramos que cualquier $(a, b) \in R_0$ el cuasipolinomio $q(s)$ no tiene ceros con parte real positiva.

Por último, de la región R_0 se pueden distinguir 2 subregiones: la región de estabilidad independiente del retardo y la región de estabilidad dependiente del retardo (región achurada).

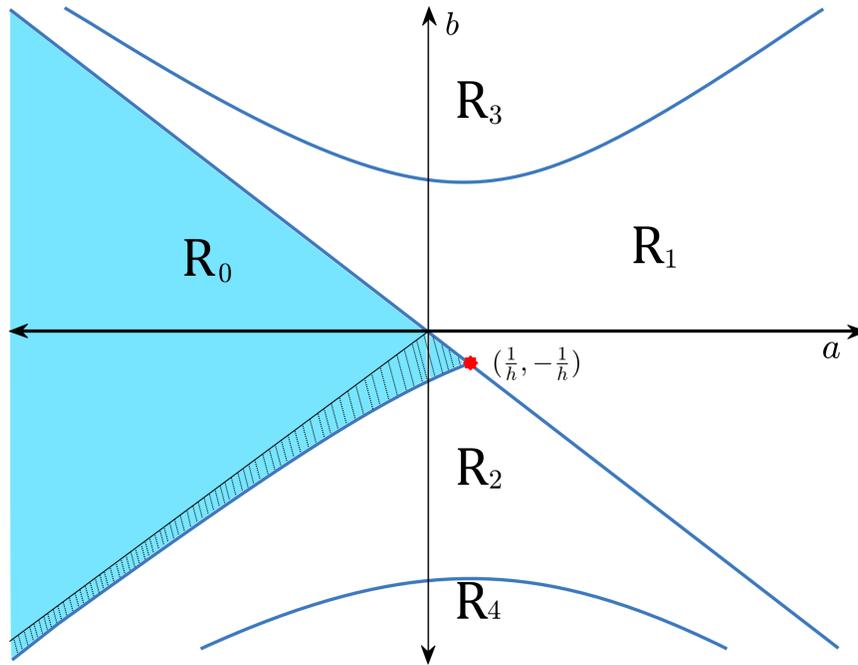


Figura 2.11: Partición del espacio de parámetros (a, b) en regiones R_j , $j = 0, 1, \dots$

Regiones de estabilidad de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo

En este capítulo se presentan los resultados principales de este trabajo de tesis aportando condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad exponencial de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo. Primero, se aborda el análisis de los casos donde al menos uno de los parámetros es igual a cero logrando (casi en todos los casos) caracterizar analíticamente la región de estabilidad. Finalmente, concluimos el capítulo abordando el caso donde ningún parámetro es igual a cero obteniendo resultados analíticos para la caracterización de la región de estabilidad.

Recordemos que en esta propuesta de investigación abordamos el problema del cálculo de regiones de estabilidad exponencial de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo de la forma

$$x''(t) = p_1x'(t) + p_2x'(t-h) + q_1x(t) + q_2x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

donde $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, y $h > 0$ es el retardo del tiempo. Para alcanzar nuestro objetivo utilizaremos las ideas principales del método D-Particiones de Neirmark (véase sección 2.4.3) aplicadas al cuasipolinomio asociado a (3.1) dado por

$$f(s) = s^2 - p_1s - p_2se^{-hs} - q_1 - q_2e^{-hs}. \quad (3.2)$$

También utilizaremos el criterio de estabilidad de Mikhailov para cuasipolinomios, véase sección 2.4.2 para determinar las regiones sin ceros con parte real positiva en el caso que sea requerido.

Recordemos que el objetivo de este trabajo de tesis es caracterizar explícitamente regiones de estabilidad de la ecuación (3.1). No obstante, como mencionamos en los primeros capítulos existen

bastantes resultados para corroborar la estabilidad de (3.1) una vez conocidos los parámetros, y esto aplica igual también para el método D-Particiones. Para ilustrar lo anterior, consideremos el caso donde $p_1 < 0$, $q_1 < 0$ y $h > 0$ son conocidos. Recordemos que este caso particular aparece en problemas de ingeniería de control (véase sección 1.2).

Siguiendo las ideas del método D-Particiones, supongamos que $s = 0$ es un cero de $f(s)$, es decir,

$$f(0) = -q_1 - q_2 = 0,$$

se sigue que si $s = 0$, entonces $q_2 = -q_1$. Ahora, supongamos que $q_2 = -q_1$, entonces

$$\begin{aligned} f(s) &= s^2 - p_1s - p_2se^{-hs} + q_2(1 - e^{-hs}) \\ &= s \left[s - p_1 - p_2e^{-hs} + q_2 \frac{(1 - e^{-hs})}{s} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

observando que la función $\frac{1-e^{-hs}}{s}$ está bien definida para $s = 0$, y de hecho $\frac{1-e^{-hs}}{s} \rightarrow h$, cuando $s \rightarrow 0$, se sigue de (3.3) que, si $q_2 = -q_1$, entonces $s = 0$ es un cero de $f(s)$.

Así, $s = 0$ es un cero de $f(s)$ si, y sólo si $q_2 = -q_1$. Ahora supongamos que $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ es un cero de $f(s)$, es decir

$$f(i\omega) = (i\omega)^2 - p_1(i\omega) - q_1 - p_2(i\omega)e^{-h(i\omega)} - q_2e^{-h(i\omega)} = 0.$$

Utilizando la identidad de Euler $e^{-\omega i} = \cos(\omega) - i \sin(\omega)$ y separando la parte real e imaginaria obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\omega^2 - q_1 - q_2 \cos(\omega h) - p_2 \omega \sin(\omega h) = 0, \quad (3.4)$$

$$-p_1 \omega + q_2 \sin(\omega h) - p_2 \omega \cos(\omega h) = 0. \quad (3.5)$$

Tenemos dos ecuaciones y cinco parámetros (los coeficientes de la ecuación (3.1) más el retardo). Por consiguiente, tenemos que escoger dos parámetros para poder resolver y utilizar las únicas dos ecuaciones que tenemos.

La elección de tales dos parámetros, dependerá de la aplicación bajo estudio o de interés. Por ejemplo, en aplicaciones de control, podemos escoger aquellos parámetros que pueden ser importantes para el comportamiento dinámico en consideración.

Como un ejemplo, escojamos los parámetros q_2 y p_2 . Entonces, de las ecuaciones (3.4) y (3.5) para q_2 y p_2 obtenemos la siguiente parametrización

$$q_2(\omega, p_1, q_1, h) = p_1 \omega \sin(\omega h) - (\omega^2 + q_1) \cos(\omega h), \quad (3.6)$$

$$p_2(\omega, p_1, q_1, h) = -\frac{1}{\omega} [(\omega^2 + q_1) \sin(\omega h) + p_1 \omega \cos(\omega h)], \quad (3.7)$$

Dados cualesquiera $p_1, q_1 \in \mathbb{R}$, $h > 0$, la parametrización (3.6)-(3.7) define una curva continua en el espacio (q_2, p_2) cuando ω varia de cero hasta infinito comenzando en el punto $(q_2(0), p_2(0)) = (-q_1, -q_1 p_1 h)$.

Consideremos por ejemplo $p_1 = -8.5$, $q_1 = -12$ y $h = 0.25$. La curva determinada por la parametrización (3.6)-(3.7) se muestra en la Figura 3.1

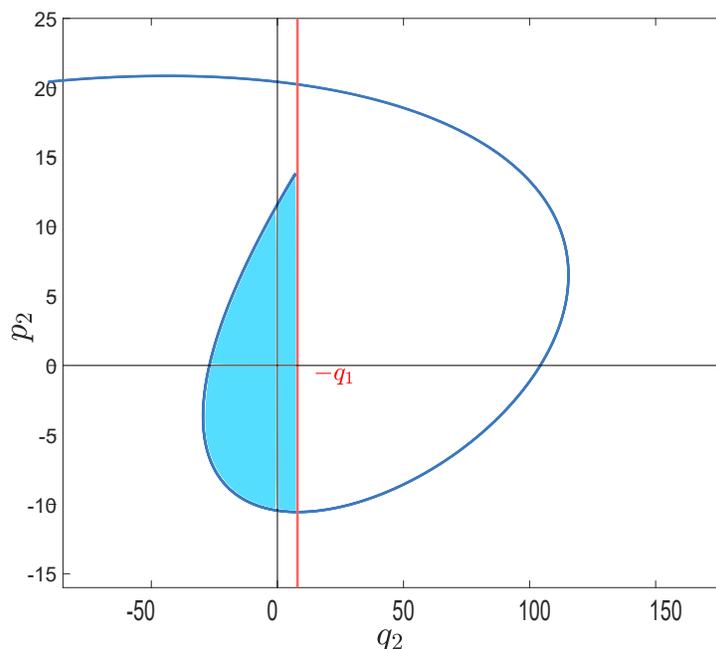


Figura 3.1: Región de estabilidad de (3.1) para $p_1 = -8.5$ $q_1 = -12$ y $h = 0.25$.

Como se puede ver en la Figura 3.1, la curva y la recta $q_2 = -q_1$, particionan el espacio (q_2, p_2) en un conjunto infinito contable de regiones abiertas, en las cuales se tiene la propiedad de que para cualquier punto (q_2, p_2) perteneciente a alguna de las regiones, el cuasipolinomio $f(s)$ tiene el mismo número de ceros con parte real positiva.

Usando el criterio de estabilidad de Mikhailov encontramos que la región sombreada es la región donde $f(s)$ no tiene ceros con parte real positiva y por lo tanto, es la región de estabilidad.

Es claro que este método lo podemos repetir para cualesquiera parámetros p_1, q_1 y h dados. Así, consideremos ahora los parámetros $p_1 = -2.5$ $q_1 = -38$ y $h = 0.5$. Aplicando los mismos argumentos encontramos la región de estabilidad sombreada en la Figura 3.2.

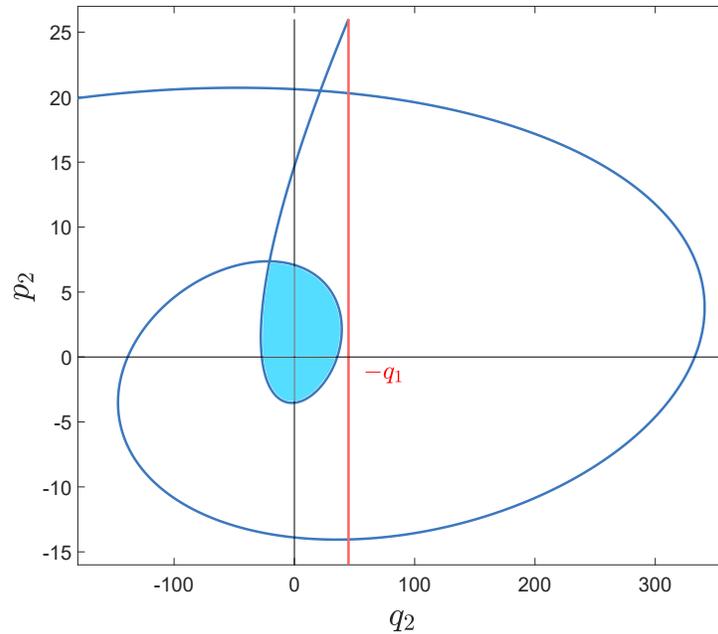


Figura 3.2: Región de estabilidad de (3.1) para $p_1 = -2.5$ $q_1 = -38$ y $h = 0.5$.

Como podemos observar de las Figuras 3.1 y 3.2, aunque en ambos ejemplos tenemos que $p_1 < 0$, $q_1 < 0$ y $h > 0$ la geometría de las curvas cambia notablemente, lo que conlleva a que las regiones de estabilidad tengan geometrías distintas.

Lo anterior muestra que la geometría de las regiones de estabilidad es bastante complicada y difícil de determinar a priori.

Más aún, desde el punto de vista de las aplicaciones es deseable tener una caracterización de la geometría de la región de estabilidad para conjuntos de parámetros satisfaciendo ciertas restricciones, dependiendo el problema en cuestión.

Por ejemplo, en las aplicaciones puede ser preferible tener regiones de estabilidad de la forma de la Figura 3.1, ya que nos puede proporcionar un mayor margen para elegir parámetros de diseño o un mayor rango de frecuencias (aplicaciones de problemas mecánicos).

Así, en estos dos ejemplos, la siguiente pregunta surge naturalmente:

¿Es posible encontrar condiciones sobre los parámetros p_1, q_1 y el retardo $h > 0$, tales que la región de estabilidad tiene la misma geometría para cualesquiera parámetros p_1, q_1 y $h > 0$ satisfaciendo tales condiciones?

La respuesta a la pregunta anterior motiva el presente trabajo de investigación donde caracterizamos

la geometría de las regiones en función de los parámetros.

3.1. Casos con tres parámetros igual a cero

Si tres parámetros de la ecuación (3.1) son iguales a cero, tenemos los siguientes casos:

1) $p_1 = p_2 = q_2 = 0$.

En este caso tenemos que $f(s) = s^2 - q_1$, el cual es un polinomio con dos ceros sobre el eje imaginario y por lo tanto no es exponencialmente estable.

2) $p_1 = q_1 = q_2 = 0$.

En este caso tenemos que $f(s) = s^2 - p_2 s e^{-hs}$, el cual es un cuasipolinomio que no es exponencialmente estable, ya que $s = 0$ es un cero de $f(s)$.

3) $p_2 = q_1 = q_2 = 0$.

En este caso tenemos que $f(s) = s^2 - p_1 s$, el cual es un polinomio que tiene a $s = 0$ como cero y por lo tanto no es exponencialmente estable.

4) $p_1 = p_2 = q_1 = 0$.

En este caso tenemos que $f(s) = s^2 - q_2 e^{-hs}$. Observemos que $s = 0$ es un cero de $f(s)$ si, y sólo si, $q_2 = 0$. Como suponemos que $q_2 \neq 0$, entonces $s = 0$ no es un cero de $f(s)$.

Por otro lado, observemos que si $h = 0$, obtenemos $f(s) = s^2 - q_2$, el cual es un polinomio inestable.

Así, tenemos que analizar si existen $q_2 \neq 0$, y $h > 0$ tales que el cuasipolinomio es estable.

Supongamos que $s = i\omega$, $\omega > 0$, es un cero de $f(s)$, es decir,

$$f(i\omega) = (i\omega)^2 - q_2 e^{-h\omega i} = 0.$$

Si $s = i\omega$ es un cero de $f(s)$, entonces $s = -i\omega$, es también un cero de $f(s)$, es decir,

$$f(-i\omega) = (-i\omega)^2 - q_2 e^{h\omega i} = 0.$$

Por consiguiente, $f(i\omega) + f(-i\omega) = 0$ o, equivalentemente,

$$2\omega^2 + q_2 (e^{h\omega i} + e^{-h\omega i}) = 0.$$

Utilizando el hecho que $e^{h\omega i} + e^{-h\omega i} = 2 \cos(\omega h)$, en la ecuación anterior, obtenemos

$$\omega^2 = -q_2 \cos(\omega h) .$$

De la ecuación anterior, obtenemos la siguiente parametrización:

$$q_2(\omega) = -\frac{\omega^2}{\cos(\omega h)}, \quad (3.8)$$

la cual está bien definida para $\omega \neq \frac{(2k+1)\pi}{2h}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. En la Figura 3.3 mostramos la función $q_2(\omega)$.

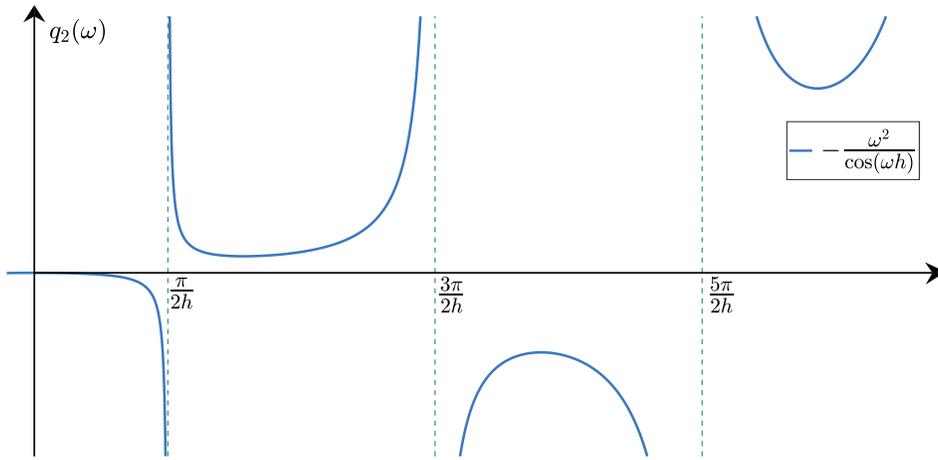


Figura 3.3: Gráfica de la función $\frac{-\omega^2}{\cos(\omega h)}$ para $\omega \in (0, \frac{7\pi}{2h})$.

Se sigue que, dado cualquier $q_2 < 0$ existe $\omega \in (0, \frac{\pi}{2h})$ tal que $q_2 = q_2(\omega)$. Por consiguiente el cuasipolinomio $f(s)$ tiene un par de ceros imaginarios puros $s = \pm i\omega$.

Para analizar el caso cuando $q_2 > 0$ necesitamos calcular los mínimos locales de la función $q_2(\omega)$, en los intervalos $(\frac{(4k+1)\pi}{2h}, \frac{(4k+1)\pi}{2h} + \frac{2\pi}{h})$, $k = 0, 1, \dots$

Tenemos que

$$q_2'(\omega) = -\frac{2\omega \cos(\omega h) + \omega^2 h \sin(\omega h)}{\cos^2(\omega h)} .$$

Se tiene que $q_2'(\omega) = 0$, si y sólo si,

$$2\omega \cos(\omega h) + \omega^2 h \sin(\omega h) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\tan(\omega h) = -\frac{2}{\omega h}. \quad (3.9)$$

La Figura 3.4 muestra el comportamiento de las funciones $\tan(\omega h)$ y $-\frac{2}{\omega h}$.

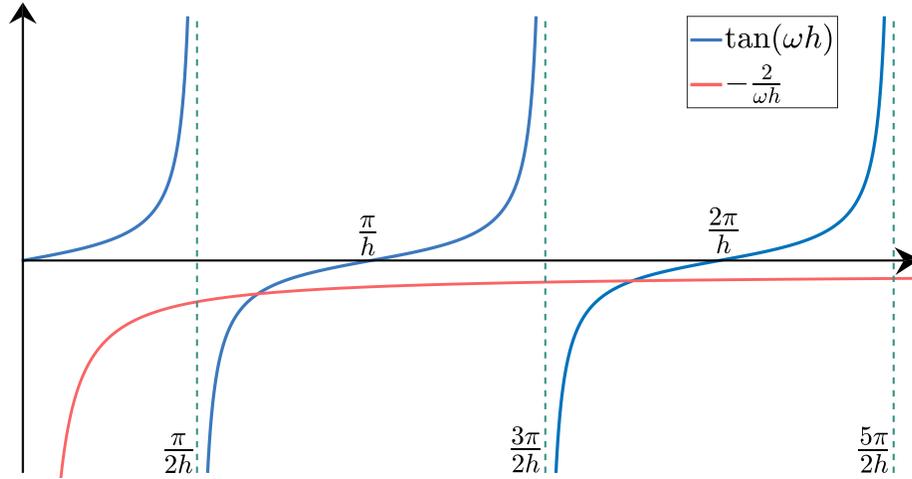


Figura 3.4: Gráficas de $\tan(\omega h)$ y $\frac{-2}{\omega h}$ para $\omega \in (0, \frac{5\pi}{2h})$.

Es claro que existen $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{2h}, \frac{(2k+1)\pi}{2h} + \frac{2\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, \dots$, tales que la ecuación (3.9) se satisface. En particular, consideremos $\omega_k^* \in \left(\frac{(4k+1)\pi}{2h}, \frac{(4k+1)\pi}{2h} + \frac{2\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, \dots$. Así, para estos ω_k^* , tenemos que $q_2(\omega)$ tiene un mínimo local en esos intervalos, satisfaciendo

$$0 < q_2(\omega_k^*) = -\frac{\omega_k^{*2}}{\cos(\omega_k^* h)} < -\frac{\omega_{k+1}^{*2}}{\cos(\omega_{k+1}^* h)} = q_2(\omega_{k+1}^*).$$

Con base en lo anterior, se sigue que dado cualquier $q_2 \geq q_2(\omega_0^*) > 0$, existe $\omega \in (\frac{\pi}{2h}, \frac{3\pi}{2h})$ tal que $q_2 = q_2(\omega)$, lo que implica que el cuasipolinomio $f(s)$ tiene un par de ceros imaginarios puros $s = \pm i\omega$.

Así, sólo nos falta analizar el cuasipolinomio $f(s) = s^2 - q_2 e^{-hs}$ cuando $0 < q_2 \leq q_2(\omega_0^*)$. Considerando el caso con $h = 1$, cálculos simples muestran que $\omega_0^* \approx 2.458$, entonces $q_2(\omega_0^*) \approx 7.792$. Utilizando el criterio de Mikhailov, véase Figura 3.5, concluimos que $f(s) = s^2 - q_2 e^{-hs}$ no es estable para $0 < q_2 \leq q_2(\omega_0^*)$,

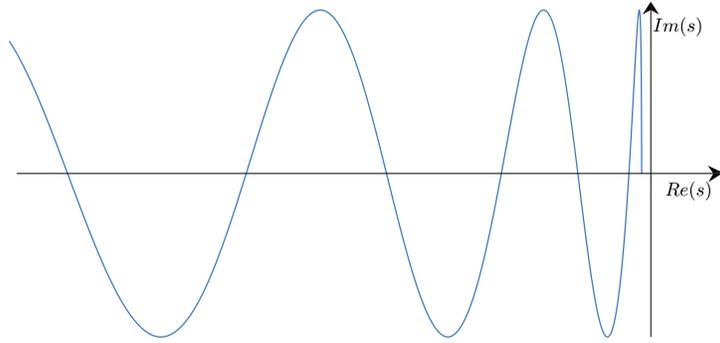


Figura 3.5: Hodógrafo de Mikhailov para $f(s) = s^2 - q_2 e^{-hs}$, con $q_2 = 2 \leq q_2(\omega_0^*)$ y $h = 1$.

Del análisis anterior, podemos concluir que el cuasipolinomio $f(s)$ no es exponencialmente estable para todo $q_2 \in \mathbb{R}$ y $h > 0$.

Resumiendo el análisis anterior podemos enunciar el siguiente resultado, el cual hasta donde sabemos no ha sido reportado en la literatura

Proposición 3.1

Si cualesquiera tres parámetros de la ecuación (3.1) son cero, entonces (3.1) no es exponencialmente estable

3.2. Casos con dos parámetros iguales a cero

En esta sección consideramos todos los posibles casos de la ecuación (3.1) cuando dos de sus parámetros son igual a cero.

Es importante mencionar que todos estos casos fueron estudiados en los trabajos de Cahlon y Schmidt [8] y [9], mediante el Teorema de Pontryagin, y la aplicación de dichos resultados requieren el conocimiento de los parámetros y no proporcionan regiones explícitas de estabilidad.

Por otro lado, algunos de los casos fueron considerados por Kolmanovskii y Nosov [27] utilizando el método de D-Particiones. Sin embargo, las regiones de estabilidad son solamente esbozadas, sin presentar los argumentos analíticos y las expresiones explícitas de las fronteras de estabilidad.

3.2.1. Caso $p_2 = 0$ y $q_2 = 0$.

Cuando $p_2 = q_2 = 0$ la ecuación (3.1) se vuelve una ecuación libre de retardo, es decir, su función característica asociada $f(s)$ toma la siguiente forma:

$$f(s) = s^2 - p_1s - q_1 ,$$

$f(s)$ es un polinomio el cual no tiene ceros con parte real positiva si, y sólo sí,

$$p_1 < 0 \quad \text{y} \quad q_1 < 0.$$

Así, la ecuación (3.1) es exponencialmente estable si, y sólo sí, $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$.

3.2.2. Caso $q_1 = 0$ y $q_2 = 0$.

En el caso cuando $q_1 = q_2 = 0$, el cuasipolinomio $f(s)$ dado por (3.2) toma la forma

$$f(s) = s^2 - p_1s - p_2se^{-hs} .$$

Es claro que, $f(s)$ posee un cero en el origen y por consiguiente es inestable.

3.2.3. Caso $p_1 = 0$ y $p_2 = 0$.

Cuando $p_1 = q_2 = 0$, el cuasipolinomio $f(s)$ dado por (3.2) toma la forma siguiente:

$$f(s) = s^2 - q_1 - q_2e^{-hs} .$$

Observemos que de nuestro análisis de los casos cuando tres parámetros son igual a cero, se sigue que si $q_1 = 0$ o $q_2 = 0$, entonces $f(s)$ es inestable.

Por otro lado, si $h = 0$ entonces $f(s) = s^2 - (q_1 + q_2)$ es inestable.

Proposición 3.2

Supongamos $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ y $h > 0$. Todos los ceros de $f(s)$ dado por (3.2) tienen parte real negativa si, y sólo sí, (q_2, q_1) pertenece a la región Γ , véase Figura 3.6, cuya frontera en el

espacio de parámetros (q_2, q_1) está dada por

$$\partial\Gamma = \left\{ (q_2, q_1) : q_2 = (-1)^{k+1} \left[q_1 + \left(\frac{k\pi}{h} \right)^2 \right], q_1 \in [q_{1,k}, q_{1,k-1}), k = 0, 1, 2, \dots \right\} \cup \{(q_2, q_1) : q_2 = 0\}, \quad (3.10)$$

donde $q_{1,-1} = 0$ y $q_{1,k}$ está dado por

$$q_{1,k} = -\frac{[(k+1)^2 + k^2] \pi^2}{2h^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

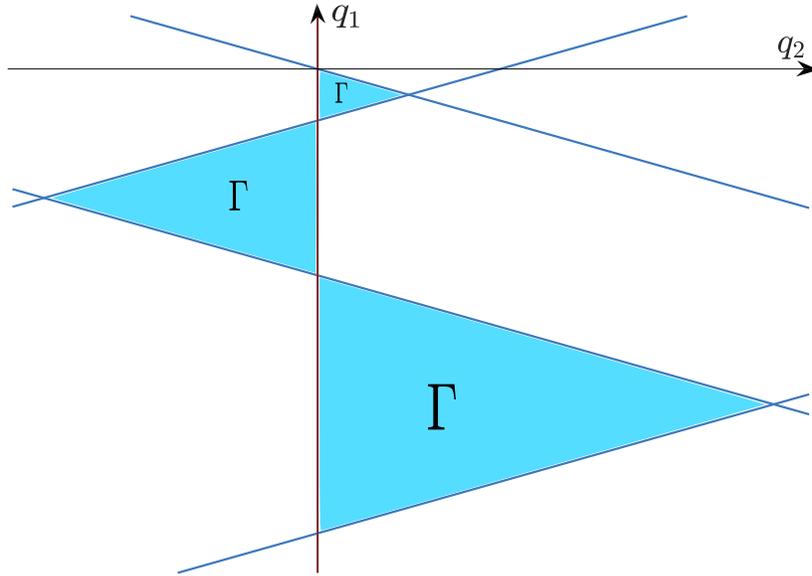


Figura 3.6: Región de estabilidad Γ en el espacio de parámetros (q_2, q_1) .

Demostración. Observemos que $s = 0$ es un cero de $f(s)$ si, y sólo si $q_1 = -q_2$. Ahora, supongamos que $f(s)$ tiene ceros imaginarios puros $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, es decir,

$$f(i\omega) = (i\omega)^2 - q_1 - q_2 e^{-h(i\omega)} = 0.$$

Usando la igualdad de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ y separando parte real e imaginaria en la ecuación anterior se tiene

$$-\omega^2 - q_1 - q_2 \cos(\omega h) = 0, \quad (3.12)$$

$$q_2 \sin(\omega h) = 0. \quad (3.13)$$

Si $q_2 \neq 0$, entonces (3.13) se satisface cuando $\sin(\omega h) = 0$, equivalentemente, $\omega_k = \frac{k\pi}{h}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Sustituyendo estos valores de ω_k en (3.13) tenemos

$$-\left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 - q_1 - (-1)^k q_2 = 0.$$

Entonces,

$$q_2 = (-1)^{k+1} \left[q_1 + \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 \right]. \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) define rectas al variar q_1 , que en conjunto con la recta $q_2 = 0$, dividen el espacio de parámetros (q_2, q_1) en un conjunto infinito de regiones abiertas conexas tales que para cualquier par (q_2, q_1) dentro de cada una de las regiones, el cuasipolinomio $f(s)$ tiene el mismo número de ceros con parte real positiva.

Para caracterizar explícitamente los puntos (cruces) donde se intersecan las rectas, consideremos 2 rectas consecutivas determinadas por (3.14), para k y $k+1$. Cálculos sencillos muestran que los puntos de intersección para q_1 están determinados por (3.11) mientras que para q_2 tenemos

$$q_{2,k} = (-1)^k \left[\frac{(2k+1)\pi^2}{2h^2} \right],$$

donde definimos el punto $(q_{2,-1}, q_{1,-1}) = (0, 0)$. Utilizando el criterio de Mikhailov, mostramos que para cualquier (q_2, q_1) perteneciente a la región Γ_0 , véase Figura 3.7, $f(s)$ no tiene ceros con parte real positiva. Definiendo $\Gamma \triangleq \Gamma_0$, cuya frontera está dada por (3.10), determinamos explícitamente la región de estabilidad. \square

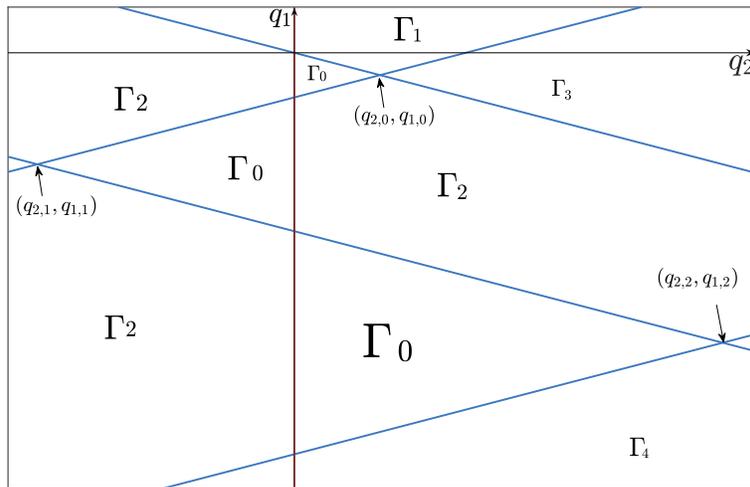


Figura 3.7: Partición del espacio (q_2, q_1) , en regiones Γ_j , $j = 0, 1, \dots$

3.2.4. Caso $p_1 = 0$ y $q_1 = 0$.

Cuando $p_1 = q_1 = 0$, el cuasipolinomio $f(s)$ dado por (3.2) toma la forma

$$f(s) = s^2 - q_2 e^{-hs} - p_2 s e^{-hs}.$$

De nuestro análisis anterior cuando tres parámetros son igual a cero, se sigue que si $q_2 = 0$ o $p_2 = 0$, entonces $f(s)$ es inestable. Por otro lado, si $h = 0$, entonces $f(s) = s^2 - q_2 - p_2 s$ es estable si, y sólo si

$$q_2 < 0 \text{ y } p_2 < 0.$$

Proposición 3.3

Supongamos $p_1 = 0$, $q_1 = 0$ y $h > 0$. Todos los ceros de $f(s)$, dado por (3.2), tienen parte real negativa si, y sólo si, el par (q_2, p_2) pertenece a la región Ω , véase Figura 3.8, cuya frontera en el espacio de parámetros (q_2, p_2) está dada por

$$\partial\Omega = \left\{ (q_2(\omega), p_2(\omega)) : \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2h}\right] \right\} \cup \left\{ (q_2, p_2) = (0, p_2), p_2 \in \left(p_2(0), p_2\left(\frac{\pi}{2h}\right)\right) \right\}, \quad (3.15)$$

donde $q_2(\omega)$ y $p_2(\omega)$ están dadas por

$$q_2(\omega) = -\omega^2 \cos(\omega h), \quad (3.16)$$

$$p_2(\omega) = -\omega \sin(\omega h). \quad (3.17)$$

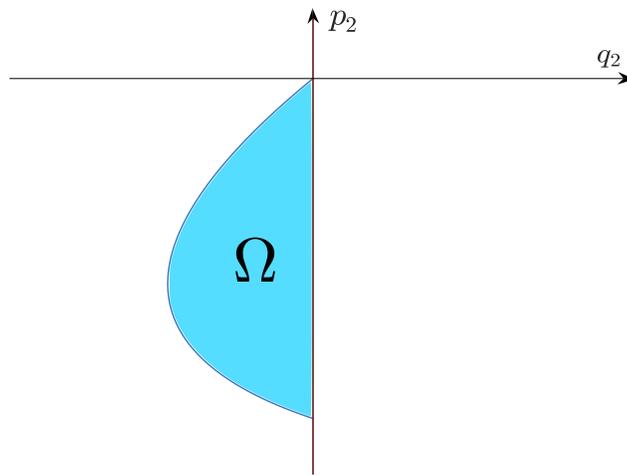


Figura 3.8: Región de estabilidad Ω en el espacio de parámetros (q_2, p_2) .

Demostración. Observemos que $s = 0$ es un cero de $f(s)$ si, y sólo si, $q_2 = 0$. Ahora, suponiendo que $f(s)$ tiene un cero puramente imaginario $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, tenemos

$$f(i\omega) = s^2 - q_2 e^{-h(i\omega)} - p_2(i\omega) e^{-h(i\omega)} = 0.$$

Utilizando la igualdad de Euler y separando la parte real e imaginaria se tiene

$$-\omega^2 - p_2 \omega \sin(\omega h) - q_2 \cos(\omega h) = 0, \quad (3.18)$$

$$-p_2 \omega \cos(\omega h) + q_2 \sin(\omega h) = 0. \quad (3.19)$$

De (3.18) y (3.19) obtenemos la parametrización dada en (3.16)-(3.17), es decir,

$$q_2(\omega) = -\omega^2 \cos(\omega h),$$

$$p_2(\omega) = -\omega \sin(\omega h).$$

Esta parametrización define una curva continua en el espacio (q_2, p_2) cuando ω varía desde cero hasta infinito.

Observemos que la curva comienza en el punto $(q_2(0), p_2(0)) = (0, 0)$. Para determinar analíticamente el comportamiento de la curva cuando ω crece, vamos a determinar si la curva intercepta al eje p_2 del espacio (q_2, p_2) . Estas intersecciones están determinadas por las soluciones de la ecuación

$$q_2(\omega) = -\omega^2 \cos(\omega h) = 0.$$

Las soluciones de la ecuación anterior son

$$\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Para estos ω_k , tenemos que

$$p_2(\omega_k) = (-1)^{k+1} (2k+1) \frac{\pi}{2h}.$$

Para k par se tiene que $p_2(\omega_k) < 0$. Más aún, se satisface que

$$p_2(\omega_k) > p_2(\omega_{k+2}), \quad k = 0, 2, \dots$$

Para k impar se tiene que $p_2(\omega_k) > 0$. Más aún, dados $\omega_k < \omega_{k+2}$, entonces $p_2(\omega_k) < p_2(\omega_{k+2})$, para $k = 1, 3, \dots$

De lo anterior, se sigue que la curva continua describe una espiral creciente orientada en dirección contra reloj, cuando ω crece, véase Figura 3.9.

Así, la curva (3.16)-(3.17) y la recta $q_2 = 0$, dividen el espacio de parámetros (q_2, p_2) en un número infinito contable de regiones Ω_j , $j = 0, 1, \dots$, véase Figura 3.9.

Utilizando el criterio de Mikhailov, encontramos que la región Ω_0 es la región donde $f(s)$ no posee ceros con parte real positiva.

Definiendo $\Omega \triangleq \Omega_0$, cuya frontera está definida por (3.15) concluimos la demostración. \square

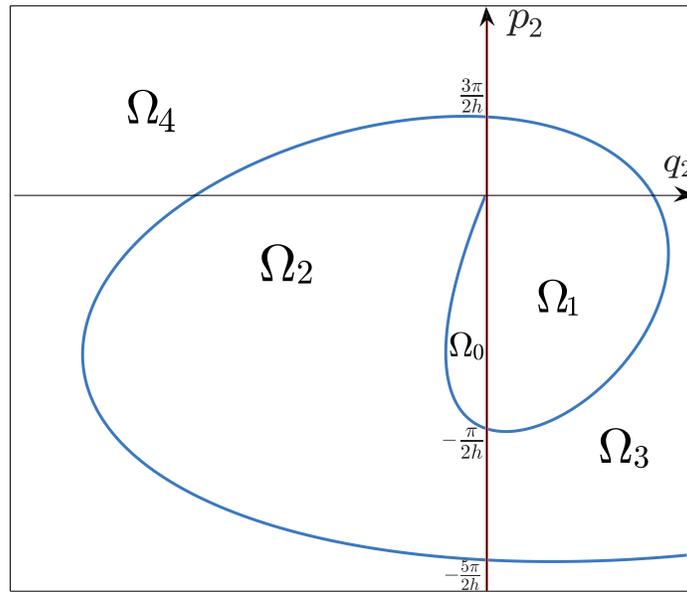


Figura 3.9: Partición del espacio de parámetros (q_2, p_2) , en regiones Ω_j , $j = 0, 1, \dots$

Debido a que en este caso ($p_1 = 0$ y $q_1 = 0$) el cuasipolinomio (3.2) es estable para $h = 0$, si, y sólo si $q_2 < 0$ y $p_2 < 0$, un problema importante en las aplicaciones es el siguiente:

Sean $q_{2_0} < 0$ y $p_{2_0} < 0$ dados, encontrar el valor mínimo del retardo $h_0 > 0$ tal que el sistema (1.4) es inestable.

Este valor $h_0 > 0$ se conoce como el margen de estabilidad de retardo del sistema, ya que para cualquier $h \in [0, h_0)$, el sistema es estable.

Existen varios métodos para resolver este problema, a continuación mostraremos como dicho problema puede resolverse a partir del resultado mostrado de la caracterización analítica de la región de estabilidad dada por Ω en (3.15).

Primero observemos que si $h \rightarrow 0$, entonces Ω tiende al tercer cuadrante del plano (q_2, p_2) , mientras que Ω tiende al origen del plano (q_2, p_2) cuando $h \rightarrow \infty$.

Así, dado el par (q_{2_0}, p_{2_0}) con $q_{2_0} < 0$ y $p_{2_0} < 0$, existe un h_0 tal que $(q_{2_0}, p_{2_0}) \in \partial\Omega$, donde Ω es la región de estabilidad correspondiente a h_0 .

Lo anterior implica que existe $\omega_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2h_0}\right)$ tal que

$$q_{2_0} = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 h_0), \quad (3.20)$$

$$p_{2_0} = -\omega_0 \sin(\omega_0 h_0). \quad (3.21)$$

Se sigue que

$$q_{2_0}^2 + \omega_0^2 p_{2_0}^2 = \omega_0^4 \cos^2(\omega_0 h_0) + \omega_0^4 \sin^2(\omega_0 h_0)$$

o, equivalentemente:

$$\omega_0^4 - \omega_0^2 p_{2_0}^2 - q_{2_0}^2 = 0.$$

Es claro que existe ω_0 tal que la ecuación anterior se satisface.

Por otro lado, de (3.20) y (3.21) se tiene que

$$\tan(\omega_0 h_0) = \frac{\omega_0 p_{2_0}}{q_{2_0}}$$

o, equivalentemente:

$$h_0 = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0 p_{2_0}}{q_{2_0}} \right).$$

Corolario 3.1 Supongamos $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, $q_{2_0} < 0$ y $p_{2_0} < 0$, el sistema (3.1) es exponencialmente para $h \in [0, h_0)$, donde

$$h_0 = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0 p_{2_0}}{q_{2_0}} \right),$$

con $\omega_0 > 0$ la única raíz positiva de la ecuación

$$\omega_0^4 - \omega_0^2 p_{2_0}^2 - q_{2_0}^2 = 0.$$

3.2.5. Caso $p_1 = 0$ y $q_2 = 0$.

Cuando $p_1 = q_2 = 0$, el cuasipolinomio $f(s)$ dado por (3.2) toma la forma

$$f(s) = s^2 - q_1 - p_2 s e^{-hs}.$$

De nuestro análisis cuando tres parámetros son igual a cero, tenemos que si $q_1 = 0$ o $p_2 = 0$, entonces $f(s)$ es inestable. Por otro lado, si $h = 0$, entonces $f(s) = s^2 - q_1 - p_2 s$ es estable si y sólo si

$$q_1 < 0 \text{ y } p_2 < 0.$$

Proposición 3.4

Supongamos $p_1 = 0$, $q_2 = 0$ y $h > 0$. Todos los ceros de $f(s)$ dado por (3.2) tienen parte real negativa si, y sólo si, (p_2, q_1) pertenece a la región Λ , véase Figura 3.10, cuya frontera en el espacio de parámetros (p_2, q_1) está dada por

$$\begin{aligned} \partial\Lambda = & \{(p_2, q_1) : p_2 = 0\} \cup \{(p_2, q_1) : q_1 = 0\} \cup \\ & \cup \left\{ (p_2, q_1) : q_1 = -\frac{(2k+1)\pi}{2h} \left[(-1)^k p_2 + \frac{(2k+1)\pi}{2h} \right], p_2 \in (p_{2,k-1}, p_{2,k}], k = 0, 1, \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $p_{2,-1} = \frac{-\pi}{2h}$ y $p_{2,k}$ está dado por

$$p_{2,k} = (-1)^k \frac{\pi}{h}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.23)$$

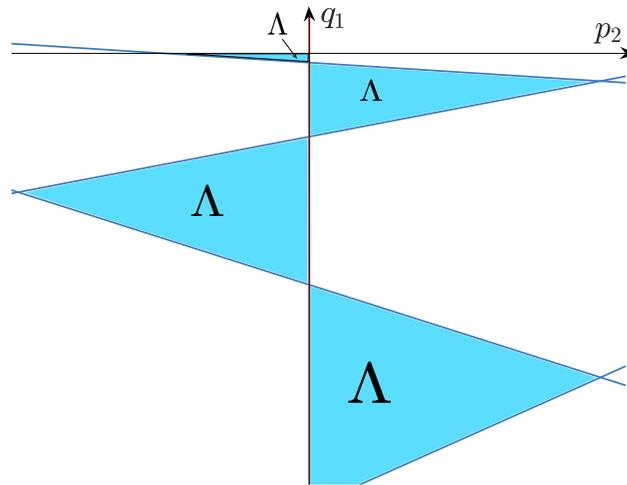


Figura 3.10: Región de estabilidad Λ en el espacio de parámetros (p_2, q_1) .

Demostración. Observemos que $s = 0$ es un cero de $f(s)$ si, y sólo si, $q_1 = 0$. Luego, suponiendo que $f(s)$ tiene un cero imaginario puro $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, tenemos

$$f(i\omega) = (i\omega)^2 - q_1 - p_2(i\omega)e^{-h(i\omega)} = 0 .$$

Usando la igualdad de Euler y separando la parte real e imaginaria

$$-\omega^2 - p_2\omega \sin(\omega h) - q_1 = 0 , \quad (3.24)$$

$$-p_2\omega \cos(\omega h) = 0 . \quad (3.25)$$

Si $p_2 \neq 0$, entonces (3.25) se satisface si, y sólo si, $\cos(\omega h) = 0$, o equivalentemente, $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2h}$, $k = 0, 1, \dots$. Sustituyendo en (3.24) obtenemos

$$q_1 = - \left[\frac{(2k+1)\pi}{2h} \right]^2 - (-1)^k \left[\frac{(2k+1)\pi}{2h} \right] p_2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.26)$$

La ecuación (3.26) define un número infinito contable de rectas en el plano (p_2, q_1) , que en conjunto con las rectas $p_2 = 0$ y $q_1 = 0$ dividen el plano en un conjunto (infinito contable) de regiones, donde para cualquier par (p_2, q_1) dentro de cada región tiene la propiedad de que $f(s)$ tienen el mismo número de ceros con parte real positiva. Similar a la Proposición 3.2, para determinar explícitamente los cruces de las rectas, consideremos dos rectas consecutivas definidas por (3.26), es decir, para k y $k+1$.

Cálculos sencillos demuestran que los puntos de intersección están determinados por (3.23), mientras que para $q_{1,k}$ tenemos

$$q_{1,k} = -(2k+1)(2k+3) \frac{\pi^2}{4h^2}, \quad (3.27)$$

donde definimos el punto $(p_{2,-1}, q_{1,-1}) = \left(\frac{-\pi}{2h}, 0 \right)$.

Utilizando el criterio de Mikhailov, mostramos que para cualquier (q_2, q_1) perteneciente a la región Λ , cuya frontera está dada por (3.22), se tiene que $f(s)$ no tiene ceros con parte real positiva, por consiguiente es la región de estabilidad. \square

Al igual que en el caso anterior de la Proposición 3.4 debido a que en este caso $(p_1 = 0$ y $q_2 = 0)$ se tiene que el sistema es estable para $h = 0$ si, y sólo si $q_1 < 0$ y $p_2 < 0$, tiene sentido analizar el problema del calculo del margen de estabilidad del retardo, es decir, el problema es el siguiente:

Dados $q_{1_0} < 0$ y $p_{2_0} < 0$, encontrar el valor mínimo del retardo $h_0 > 0$ tal que el sistema es inestable.

Primero observemos que es suficiente considerar la primer recta determinada para $k = 0$

$$q_{1_0} = -\frac{\pi}{2h_0} \left(p_{2_0} + \frac{\pi}{2h_0} \right), \quad p_{2_0} \in \left(\frac{-\pi}{2h_0}, 0 \right), \quad (3.28)$$

ya que si $h_0 \rightarrow 0$ entonces Λ tiende al tercer cuadrante del plano (p_2, q_1) y por otro lado, Λ tiende al origen del plano (p_2, q_1) si $h_0 \rightarrow \infty$.

Luego entonces, cálculos sencillos de la ecuación (3.28), muestran que el valor de h_0 se determina mediante la expresión

$$h_0 = -\frac{\pi}{4q_{1_0}} \left(p_{2_0} + \sqrt{p_{2_0}^2 - 4q_{1_0}} \right).$$

Corolario 3.2 Supongamos $p_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_{1_0} < 0$ y $p_{2_0} < 0$. El sistema (3.1) es exponencialmente para $h \in [0, h_0)$, donde

$$h_0 = -\frac{\pi}{4q_{1_0}} \left(p_{2_0} + \sqrt{p_{2_0}^2 - 4q_{1_0}} \right).$$

3.2.6. Caso $p_2 = 0$ y $q_1 = 0$.

Proposición 3.5

Supongamos $p_2 = 0$, $q_1 = 0$ y $h > 0$. Todos los ceros de $f(s)$ dado por (3.2) tienen parte real negativa si, y sólo si, el par (q_2, p_1) pertenece a la región Y, véase Figura 3.11, cuya frontera en el espacio de parámetros (q_2, p_1) está dada por

$$\partial Y = \{(q_2, p_1) : q_2 = 0\} \cup \left\{ (q_2(\omega), p_1(\omega)) : \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2h} \right) \right\}, \quad (3.29)$$

donde $q_2(\omega)$ y $p_1(\omega)$ están dadas por:

$$q_2(\omega) = -\frac{\omega^2}{\cos(\omega h)}, \quad (3.30)$$

$$p_1(\omega) = -\omega \tan(\omega h). \quad (3.31)$$

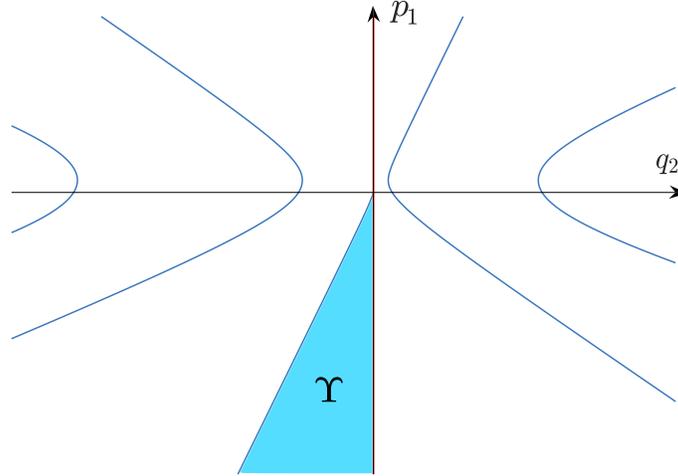


Figura 3.11: Región de estabilidad Υ en el espacio de parámetros (q_2, p_1) .

Demostración. Cuando $p_2 = q_1 = 0$, el cuasipolinomio $f(s)$ dado por (3.2) toma la forma

$$f(s) = s^2 - p_1 s - q_2 e^{-hs}.$$

Observemos que $s = 0$ es un cero de $f(s)$ si, y sólo si, $q_2 = 0$. Por otro lado, $f(s)$ tiene ceros puramente imaginarios, es decir, $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ si

$$f(i\omega) = (i\omega)^2 - p_1(i\omega) - q_2 e^{-h(i\omega)} = 0.$$

Usando la igualdad de Euler y separando las partes real e imaginaria tenemos

$$-\omega^2 - q_2 \cos(\omega h) = 0, \quad (3.32)$$

$$-p_1 \omega + q_2 \sin(\omega h) = 0. \quad (3.33)$$

Resolviendo (3.32) y (3.33) para q_2 y p_1 se obtiene la parametrización dada por (3.30)-(3.31) respectivamente. Esta parametrización define curvas en el plano (q_2, p_1) para $\omega \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{2h}, \frac{(2k+1)\pi}{2h}\right)$ $k = 1, 2, \dots$. En el caso de $k = 0$ la curva está definida para $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2h}\right)$.

Observemos que $(q_2(\omega), p_1(\omega)) \rightarrow (0, 0)$ cuando $\omega \rightarrow 0$ mientras que $(q_2(\omega), p_1(\omega)) \rightarrow (-\infty, -\infty)$ cuando $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2h}^-$.

De (3.30) se deduce que $q_2(\omega) \neq 0$, es decir, las curvas dadas por la parametrización (3.30)-(3.31) no intersectan la recta $q_2 = 0$. Por otro lado, de (3.31) se tiene que las curvas $(q_2(\omega), p_1(\omega))$ intersectan la recta $p_1 = 0$ en $\omega_k = \frac{k\pi}{h}$, para $k = 1, 2, \dots$, mientras que

$$q_2\left(\frac{k\pi}{h}\right) = (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi}{h}\right)^2,$$

determina el valor de $q_2(\omega)$ en el cruce con la recta $p_1 = 0$.

En general, la parametrización (3.30)-(3.31) tiene las siguientes propiedades:

- Para k impar tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \frac{(2k-1)\pi}{2h}^+} (q_2(\omega), p_1(\omega)) &= (\infty, \infty), \\ \lim_{\omega \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2h}^-} (q_2(\omega), p_1(\omega)) &= (\infty, -\infty).\end{aligned}$$

- Para k par tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \frac{(2k-1)\pi}{2h}^+} (q_2(\omega), p_1(\omega)) &= (-\infty, \infty), \\ \lim_{\omega \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2h}^-} (q_2(\omega), p_1(\omega)) &= (-\infty, -\infty).\end{aligned}$$

Por último, usando el criterio de estabilidad de Mikhailov se determina que Y es la región de estabilidad cuya frontera está definida por (3.29). \square

Debido a que cuando $h = 0$, el sistema (3.1) es exponencialmente estable si, y sólo si $p_1 < 0$ y $q_2 < 0$, al igual que los casos anteriores tiene sentido determinar el margen de estabilidad del retardo, es decir, considerar el siguiente problema:

Dados $p_{1_0} < 0$ y $q_{2_0} < 0$, el problema consiste en encontrar $h_0 > 0$ y $\omega_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2h_0}\right)$, tales que

$$q_{2_0} = -\frac{\omega_0^2}{\cos(\omega_0 h_0)} \quad \text{y} \quad p_{1_0} = -\omega_0 \tan(\omega_0 h_0).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}q_{2_0}^2 - p_{1_0}^2 \omega_0^2 &= \frac{\omega_0^4}{\cos^2(\omega_0 h_0)} - \frac{\omega_0^4 \sin^2(\omega_0 h_0)}{\cos^2(\omega_0 h_0)} \\ &= \frac{\omega_0^4}{\cos^2(\omega_0 h_0)} [1 - \sin^2(\omega_0 h_0)] \\ &= \omega_0^4\end{aligned}$$

Entonces, ω_0 satisface la ecuación

$$\omega_0^4 + p_{1_0}^2 \omega_0^2 - q_{2_0}^2 = 0$$

Es claro que la ecuación anterior tiene una solución real $\omega_0 > 0$. Para esta $\omega_0 > 0$ se tiene que

$$\tan(\omega_0 h_0) = -\frac{p_{10}}{\omega_0},$$

o, equivalentemente

$$\omega_0 h_0 = \tan^{-1}\left(-\frac{p_{10}}{\omega_0}\right),$$

y por lo tanto

$$h_0 = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1}\left(-\frac{p_{10}}{\omega_0}\right).$$

Corolario 3.3 Supongamos $p_2 = 0$, $q_1 = 0$, $p_{10} < 0$ y $q_{20} < 0$. El sistema (1.4) es exponencialmente para $h \in [0, h_0)$, donde

$$h_0 = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1}\left(-\frac{p_{10}}{\omega_0}\right),$$

con ω_0 la única raíz positiva de la ecuación

$$\omega_0^4 + p_{10}^2 \omega_0^2 - q_{20}^2 = 0.$$

3.3. Casos con un parámetro igual a cero

En esta sección abordaremos el problema de determinar la región de estabilidad de la ecuación (3.1) en el caso cuando un parámetro es igual a cero.

Consideraremos el caso cuando $p_2 = 0$, es decir, estudiamos la ecuación diferencial de segundo orden con retardo siguiente:

$$x''(t) = p_1 x'(t) + q_1 x(t) + q_2 x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (3.34)$$

La ecuación anterior puede describir el problema de control de un sistema mecánico de un grado de libertad sujeto a una acción de control de tipo proporcional con retardo descrito en la forma siguiente:

$$x''(t) + 2\zeta \omega_n x'(t) + \omega_n^2 x(t) = u(t-h), \quad (3.35)$$

$$u(t) = k_p x(t). \quad (3.36)$$

Claramente, el sistema de control en lazo cerrado (3.35)-(3.36), es un caso particular de la ecuación (3.34) donde

$$p_1 = -2\zeta\omega_n, \quad q_1 = -\omega_n^2 \quad \text{y} \quad q_2 = k_p.$$

Por otro lado, el problema de control (3.35)-(3.36) también puede ser interpretado como el problema de diseño de un resonador retardado mediante una retroalimentación de posición, donde el retardo $h > 0$ es introducido intencionalmente para inducir soluciones oscilatorias al sistema mecánico de un grado de libertad aún en presencia de amortiguamiento.

Para aplicar el método D-partición a la ecuación (3.34), necesitamos seleccionar una combinación de dos parámetros de las 3 posibles combinaciones. Motivado de las anteriores aplicaciones de ingeniería de control escogeremos los parámetros q_2 y q_1 y caracterizaremos las regiones de estabilidad en el plano (q_2, q_1) . Es claro que la caracterización de las regiones de estabilidad dependerá del parámetro p_1 .

Así, el problema que deseamos resolver para la ecuación (3.34) es el siguiente:

Encontrar condiciones analíticas sobre el parámetro p_1 que determinan todas las posibles geometrías de la región de estabilidad en el espacio de parámetros (q_2, q_1) .

Mostraremos que la solución al problema consiste en que existen únicamente dos geometrías posibles de la región de estabilidad en el espacio de parámetros (q_2, q_1) las cuales están determinadas para $p_1 < 0$ y $0 < p_1 < \frac{2}{h}$, respectivamente.

Observemos que cuando $p_1 = 0$, la región de estabilidad es precisamente la región Γ determinada explícitamente en la Proposición 3.2

El cuasipolinomio asociado a la ecuación (3.34) es

$$f(s) = s^2 - q_1 - p_1s - q_2e^{-hs}.$$

Observemos que $s = 0$ es un cero de $f(s)$ si, y sólo si, $q_2 = -q_1$. Por otro lado, si $h = 0$, entonces el polinomio $f(s) = s^2 - q_1 - p_1s - q_2$ es estable, si, y sólo si

$$p_1 < 0 \quad \text{y} \quad q_1 + q_2 < 0.$$

Ahora supongamos que $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, es un cero de $f(s)$, es decir

$$f(i\omega) = (i\omega)^2 - p_1(i\omega) - q_1 - q_2e^{-h(i\omega)} = 0.$$

Usando la igualdad de Euler y separando parte real e imaginaria tenemos

$$-\omega^2 - q_1 - q_2 \cos(\omega h) = 0, \quad (3.37)$$

$$-p_1 \omega + q_2 \sin(\omega h) = 0. \quad (3.38)$$

Resolviendo (3.37) y (3.38) para q_2 y q_1 obtenemos

$$q_2(\omega) = \frac{p_1 \omega}{\sin(\omega h)}. \quad (3.39)$$

$$q_1(\omega) = -\omega \left[\omega + \frac{p_1 \cos(\omega h)}{\sin(\omega h)} \right]. \quad (3.40)$$

La parametrización (3.39)-(3.40) define un número infinito contable de curvas definidas para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h} \right)$, $k = 0, 1, \dots$

Observemos que $(q_2(\omega), p_2(\omega)) \rightarrow \left(\frac{p_1}{h}, \frac{-p_1}{h} \right)$ cuando $\omega \rightarrow 0^+$. Ahora analizaremos la curva $(q_2(\omega), p_2(\omega))$ cuando $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{h} \right)$.

Si $p_1 < 0$, entonces $(q_2(\omega), p_2(\omega)) \rightarrow (-\infty, \infty)$, cuando $\omega \rightarrow \frac{\pi}{h}^-$. Para determinar el comportamiento asintótico, definamos

$$\alpha(\omega) \triangleq \frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)} = -\frac{1}{p_1} [\omega \sin(\omega h) + p_1 \cos(\omega h)], \quad (3.41)$$

Observemos que $\alpha\left(\frac{\pi}{h}\right) = 1$. Luego entonces, la recta $q_1 = q_2$, con $q_2 < 0$, es la asíntota de la curva $(q_2(\omega), p_2(\omega))$ cuando $\omega \rightarrow \frac{\pi}{h}^-$.

Ahora, busquemos soluciones de la ecuación $\alpha(\omega) = 1$, para $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{h} \right)$. Notemos que $\alpha(\omega) = 1$ si, y sólo si

$$\frac{-p_1}{\omega} = \tan\left(\frac{\omega h}{2}\right). \quad (3.42)$$

La Figura 3.12 muestra que existe $\tilde{\omega} \in \left(0, \frac{\pi}{h} \right)$ tal que $\alpha(\tilde{\omega}) = 1$ o, equivalentemente, $q_1(\tilde{\omega}) = q_2(\tilde{\omega})$.

En conclusión: la curva $(q_2(\omega), p_2(\omega))$ definida para $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{h} \right)$, inicia en el punto $\left(\frac{p_1}{h}, \frac{-p_1}{h} \right)$ intercepta la recta $q_1 = q_2$, y posteriormente tiende asintóticamente a la recta $q_1 = q_2$ con $q_2 < 0$, véase Figura 3.13.

Ahora consideremos el caso cuando $p_1 > 0$. En este caso tenemos que $(q_2(\omega), p_2(\omega)) \rightarrow (\infty, \infty)$, cuando $\omega \rightarrow \frac{\pi}{h}^-$. Claramente $\alpha\left(\frac{\pi}{h}\right) = 1$, luego entonces, la recta $q_1 = q_2$ con $q_2 > 0$, es la asíntota de la curva cuando $\omega \rightarrow \frac{\pi}{h}^-$, véase Figura 3.13.

Ahora busquemos soluciones de la ecuación $\alpha\left(\frac{\pi}{h}\right) = -1$ para $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{h} \right)$. Notemos que $\alpha(\omega) = -1$ si, y sólo si

$$\tan\left(\frac{\omega h}{2}\right) = \frac{\omega}{p_1}. \quad (3.43)$$

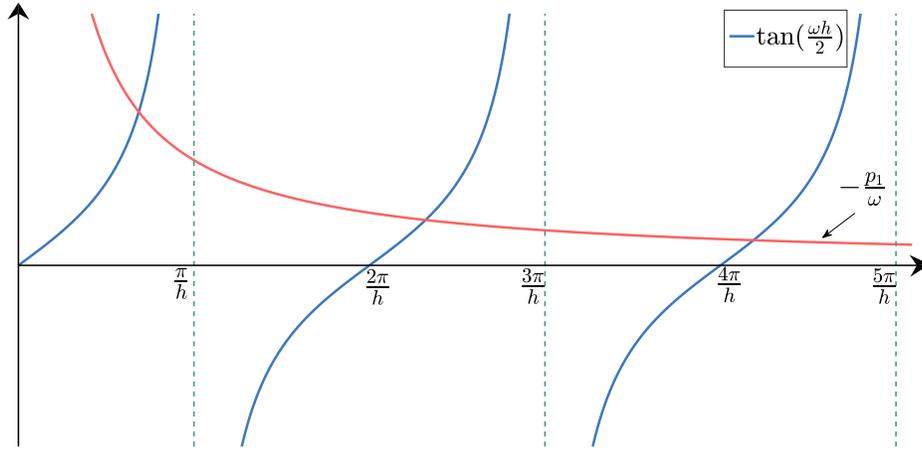


Figura 3.12: Gráfica de $\tan\left(\frac{\omega h}{2}\right)$ y $-\frac{p_1}{\omega}$ con $p_1 < 0$ para $\omega \in (0, \frac{5\pi}{h})$.

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\tan\left(\frac{\omega h}{2}\right) = \left(\frac{\omega h}{2}\right) \left(\frac{2}{p_1 h}\right).$$

Como $\tan(x) = x$ si, y sólo si $x = 0$ y $\tan(x) > x$, para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2h})$, se sigue que:

Si $\frac{2}{p_1 h} \leq 1$, entonces

$$\left(\frac{\omega h}{2}\right) \left(\frac{2}{p_1 h}\right) \leq \left(\frac{\omega h}{2}\right) < \tan\left(\frac{\omega h}{2}\right), \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right),$$

lo que implica que no existe solución de la ecuación (3.43) en el intervalo $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$.

Por otro lado, si $\frac{2}{p_1 h} > 1$, entonces

$$\left(\frac{\omega h}{2}\right) \left(\frac{2}{p_1 h}\right) > \left(\frac{\omega h}{2}\right),$$

lo que implica que debe existir una solución de la ecuación (3.43) en el intervalo $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$. Así, de manera natural, surge que tenemos que considerar por separado los siguientes dos casos cuando $p_1 > 0$:

$$a) \ 0 < p_1 < \frac{2}{h} \quad \text{y} \quad b) \ p_1 \geq \frac{2}{h}.$$

Sí $0 < p_1 < \frac{2}{h}$, entonces existe $\hat{\omega} \in (0, \frac{\pi}{h})$ tal que $\alpha(\hat{\omega}) = 1$ o, equivalentemente, $q_1(\hat{\omega}) = -q_2(\hat{\omega})$. Así, la curva $(q_2(\omega), p_2(\omega))$ definida para $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$, inicia en el punto $(\frac{p_1}{h}, -\frac{p_1}{h})$ intercepta la recta $q_1 = -q_2$, y posteriormente tiende asintóticamente a la recta $q_1 = q_2$ con $q_2 > 0$, cuando $\omega \rightarrow \frac{\pi}{h}^-$, véase Figura 3.13

Por otro lado, si $p_1 \geq \frac{2}{h}$ entonces no existe $\hat{\omega} \in (0, \frac{\pi}{h})$ tal que $\alpha(\hat{\omega}) = 1$ y en consecuencia la curva $(q_2(\omega), p_2(\omega))$ definida para $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$, inicia en el punto $(\frac{p_1}{h}, -\frac{p_1}{h})$ y sólo tiende asintóticamente a la recta $q_1 = q_2$ con $q_2 > 0$, cuando $\omega \rightarrow \frac{\pi}{h}^-$, véase Figura 3.13

De lo anterior se sigue que la primer curva definida por la parametrización (3.39)-(3.40) para $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$ tiene 3 distintas geometrías dependiendo del valor del parámetro p_1 , véase Figura 3.13. Como veremos este hecho genera 3 distintas geometrías de las regiones de estabilidad para la ecuación (3.34).

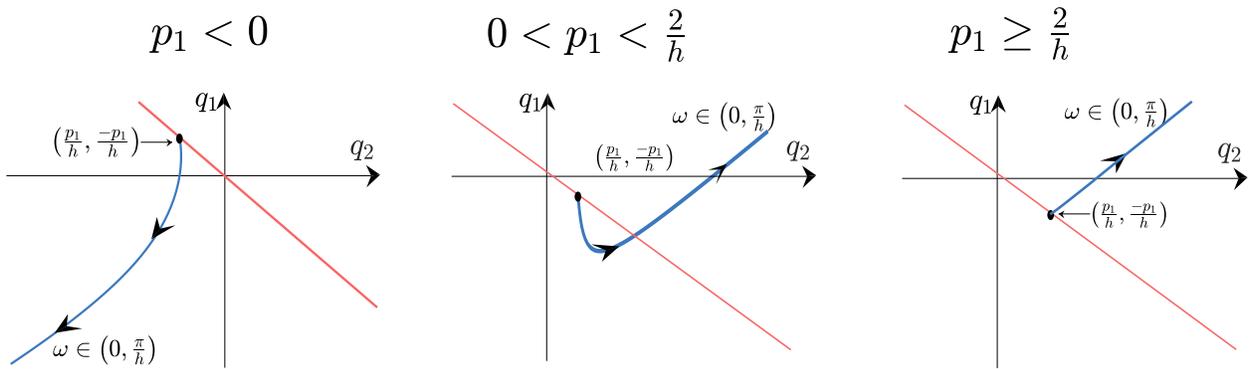


Figura 3.13: Comportamiento de la curva $(q_2(\omega), p_2(\omega))$, $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$, para $p_1 < 0$, $0 < p_1 < \frac{2}{h}$ y $p_1 \geq \frac{2}{h}$.

Ahora analicemos el comportamiento de la función $\alpha(\omega)$ en cada uno de los 3 casos posibles para los intervalos de $\omega \in (\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$. Observemos que $\alpha(\frac{(k+1)\pi}{h}) = (-1)^{k+1}$. Analicemos las soluciones de $\alpha(\omega) = 1$, es decir,

$$\tan\left(\frac{\omega h}{2}\right) = -\frac{p_1}{\omega},$$

y las soluciones de $\alpha(\omega) = -1$, es decir,

$$\tan\left(\frac{\omega h}{2}\right) = \frac{\omega}{p_1}.$$

Si $p_1 < 0$, entonces en cada intervalo $(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$, con k impar, existe $\hat{\omega}_k$ tales que $\alpha(\hat{\omega}_k) = -1$. Así mismo, para cada cada intervalo $(\frac{k+\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$, con k par, existe $\tilde{\omega}_k$ tales que $\alpha(\tilde{\omega}_k) = 1$, véase Figura 3.14.

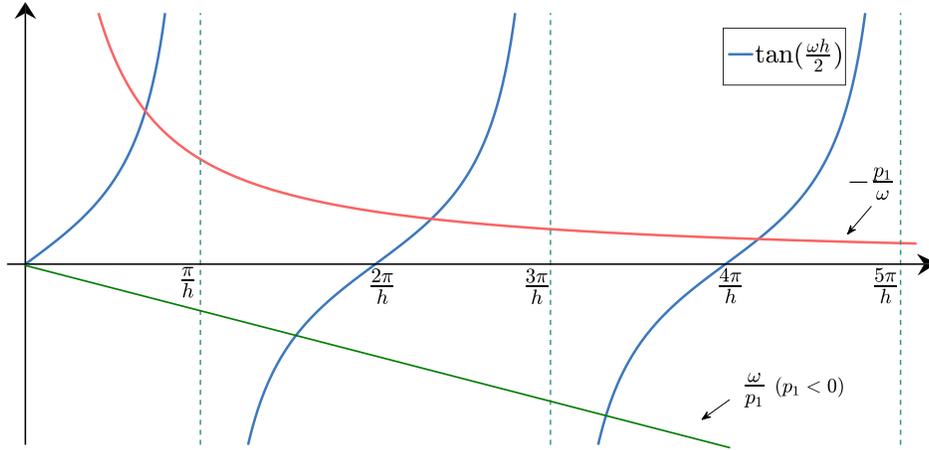


Figura 3.14: Gráfica de $\tan(\frac{\omega h}{2})$, $-\frac{p_1}{\omega}$ y $\frac{\omega}{p_1}$ para $\omega \in (0, \frac{5\pi}{h})$, y $p_1 < 0$.

Ahora, consideremos el caso $0 < p_1 < \frac{2}{h}$, entonces en cada intervalo $(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$, con k impar, existe $\hat{\omega}_k$ tales que $\alpha(\hat{\omega}_k) = 1$. Así mismo, para cada cada intervalo $(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$, con k par, existe $\tilde{\omega}_k$ tales que $\alpha(\tilde{\omega}_k) = -1$, véase Figura 3.15.

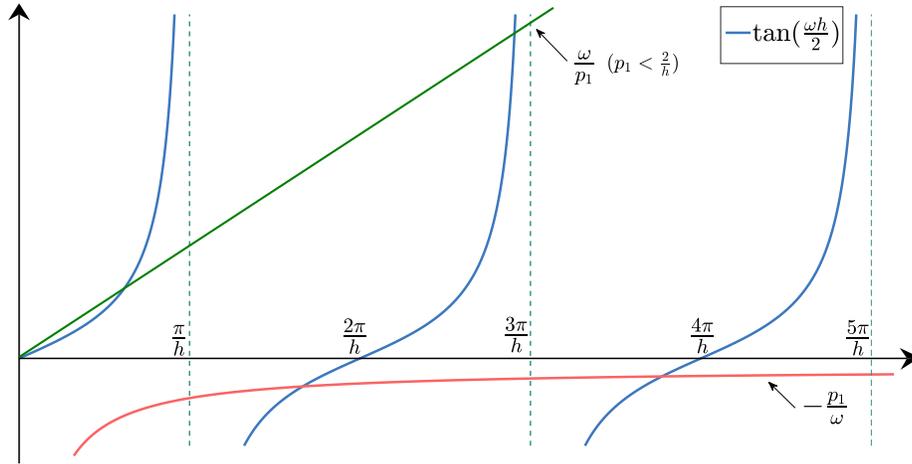


Figura 3.15: Gráfica de $\tan(\frac{\omega h}{2})$, $-\frac{p_1}{\omega}$ y $\frac{\omega}{p_1}$ para $\omega \in (0, \frac{5\pi}{h})$, y $0 < p_1 < \frac{2}{h}$.

Cuando $p_1 \geq \frac{2}{h}$, tenemos el mismo escenario que el caso anterior, con excepción del primer intervalo $(0, \frac{\pi}{h})$, donde no existe solución $\alpha(\omega) = 1$.

Ahora, calculemos la derivada de la función $\alpha(\omega)$

$$\alpha'(\omega) = -\frac{1}{p_1} [m(\omega) - n(\omega)], \quad (3.44)$$

donde $m(\omega) = \omega h \cos(\omega h)$ y $n(\omega) = (p_1 h - 1) \sin(\omega h)$.

De manera que $\alpha'(\omega) = 0$ sí, y sólo si, $m(\omega) = n(\omega)$ o, equivalentemente,

$$\frac{\omega h}{(p_1 h - 1)} = \tan(\omega h), \quad (3.45)$$

La Figura 3.16 ilustra la ecuación anterior para los tres casos posibles de valores para p_1 .

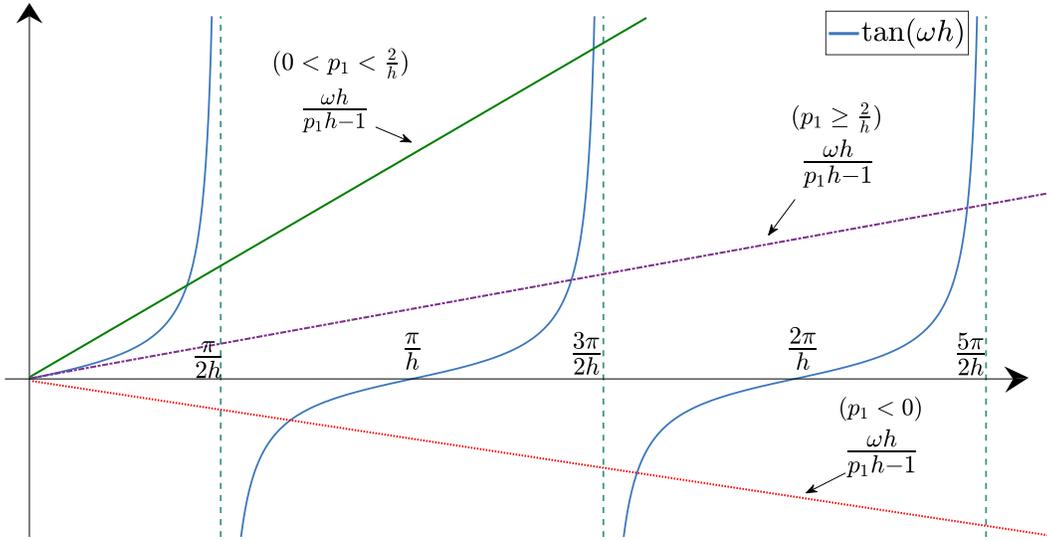


Figura 3.16: Gráfica de $\tan(\omega h)$ y $\frac{\omega h}{p_1 h - 1}$ para $\omega \in (0, \frac{5\pi}{2h})$, con $p_1 < 0$, $0 < p_1 < \frac{2}{h}$ y $p_1 \geq \frac{2}{h}$.

Si $p_1 > 0$, entonces en cada intervalo $(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$, existe ω^* tal que $\alpha'(\omega^*) = 0$. Más aún, $\alpha'(\omega^*)$ es un máximo local para k par y $\alpha'(\omega^*)$ es un mínimo local para k impar.

Si $0 < p_1 < \frac{2}{h}$, entonces en cada intervalo $(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$, existe ω^* tal que $\alpha'(\omega^*) = 0$. Más aún, $\alpha'(\omega^*)$ es un máximo local para k impar y $\alpha'(\omega^*)$ es un mínimo local para k par.

Cuando $p_1 \geq \frac{2}{h}$, tenemos el mismo escenario que en el caso anterior, con excepción del primer intervalo $(0, \frac{\pi}{h})$, donde no existe ω tal que $\alpha'(\omega) = 0$.

Finalmente, observemos los máximos y mínimos de las funciones $q_2(\omega)$ y $q_1(\omega)$ dados por (3.39) y (3.40) respectivamente.

Tenemos que

$$q_2'(\omega) = \frac{p_1 \cos(\omega h)}{\sin^2(\omega h)} [\tan(\omega h) - \omega h], \quad (3.46)$$

Así, $q_2'(\omega) = 0$ si, y sólo si, $\tan(\omega h) = \omega h$, de modo que, en cada intervalo $(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h})$ excepto para $k = 0$, existe ω_k° tales que $q_2'(\omega_k^\circ) = 0$.

Si $p_1 < 0$, entonces $q_2(\omega_k^\circ)$ es un máximo local para k par y un mínimo local para k impar. Mientras

que si $p_1 > 0$, entonces $q_2(\omega_k^\circ)$ es un mínimo local para k par y un máximo local para k impar. Por otro lado, al derivar $q_1(\omega)$ obtenemos

$$q_1'(\omega) = p_1 \left[r(\omega) - \frac{2\omega}{p_1} \right], \quad (3.47)$$

donde la función $r(\omega)$ está definida como:

$$r(\omega) \triangleq \frac{\omega h - \cos(\omega h) \sin(\omega h)}{\sin^2(\omega h)},$$

para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h} \right)$, $k = 0, 1, \dots$. Entonces, si $q_1'(\omega) = 0$ se satisface, es equivalente a analizar las soluciones de la siguiente ecuación:

$$r(\omega) = \frac{2\omega}{p_1}. \quad (3.48)$$

Bajo la hipótesis sobre p_1 analicemos donde se satisface esta igualdad. Primero analicemos la función $r(\omega)$. Usando la igualdad trigonométrica $\sin(2\omega h) = 2\cos(\omega h)\sin(\omega h)$ y el hecho que $2\omega h > \sin(2\omega h)$, para toda $\omega > 0$, se sigue que $r(\omega) > 0$. Además, $r(\omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow 0$ y $r(\omega) \rightarrow \infty$ cuando $\omega \rightarrow \frac{k\pi}{h}$, $k = 1, 2, \dots$. Luego, al derivar $r(\omega)$ tenemos

$$r'(\omega) = \frac{2h\cos(\omega h)}{\sin^3(\omega h)} [\tan(\omega h) - \omega h]. \quad (3.49)$$

Se tiene que, $r'(\omega) = 0$ si, y sólo si, $\tan(\omega h) = \omega h$, de modo que, en cada intervalo $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h} \right)$ excepto para $k = 0$, existe ω_k° tales que $r'(\omega_k^\circ) = 0$. Adicionalmente, se tiene $\omega_k^\circ \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2h}$ conforme k incrementa. Entonces $r(\omega_k^\circ) \rightarrow \omega_k^\circ h$.

Por otro lado, para el caso $0 < p_1 < \frac{2}{h}$, tenemos que $\frac{2\omega}{p_1} > \omega h$ para toda $\omega > 0$, entonces existen $\omega_{0,k}^* \in \left(\frac{k\pi}{h}, \omega_k^\circ \right)$ y $\omega_{1,k}^* \in \left(\omega_k^\circ, \frac{(k+1)\pi}{h} \right)$, véase Figura 3.17.

Estas frecuencias satisfacen la ecuación (3.48), es decir, $r(\omega_{j,k}^*) = \frac{2\omega_{j,k}^*}{p_1}$, por consiguiente $q_1'(\omega_{j,k}^*) = 0$, para $j = 0, 1$ y $k = 1, 2, \dots$. En el caso de $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{h} \right)$ existe ω_0^* tal que satisface la ecuación $r(\omega_0^*) - \frac{2\omega_0^*}{p_1} = 0$ o, equivalentemente, $q_1'(\omega_0^*) = 0$.

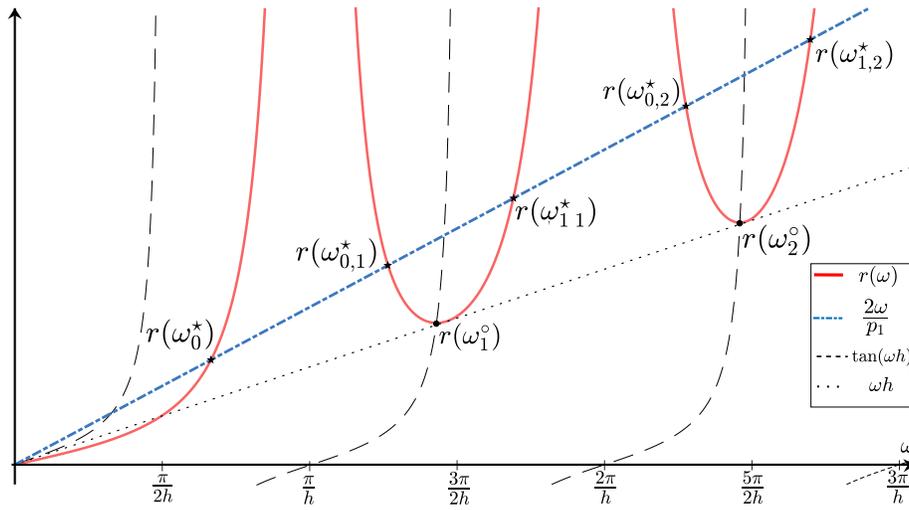


Figura 3.17: Gráfica de $r(\omega)$ y su intersección con la función $\frac{2\omega}{p_1}$, para $(0, \frac{3\pi}{h})$ con $0 < p_1 < \frac{2}{h}$.

Cuando $p_1 \geq \frac{2}{h}$, tenemos el siguiente comportamiento ilustrado en la Figura 3.18

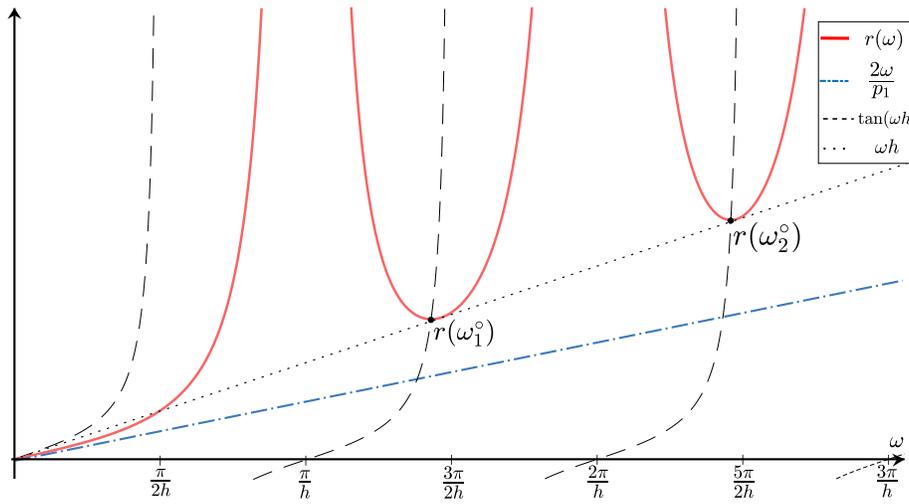


Figura 3.18: Gráfica de $r(\omega)$ y su intersección con la función $\frac{2\omega}{p_1}$, para $(0, \frac{3\pi}{h})$ con $p_1 \geq \frac{2}{h}$.

Cuando $p_1 < 0$, tenemos el siguiente comportamiento ilustrado en la Figura 3.19

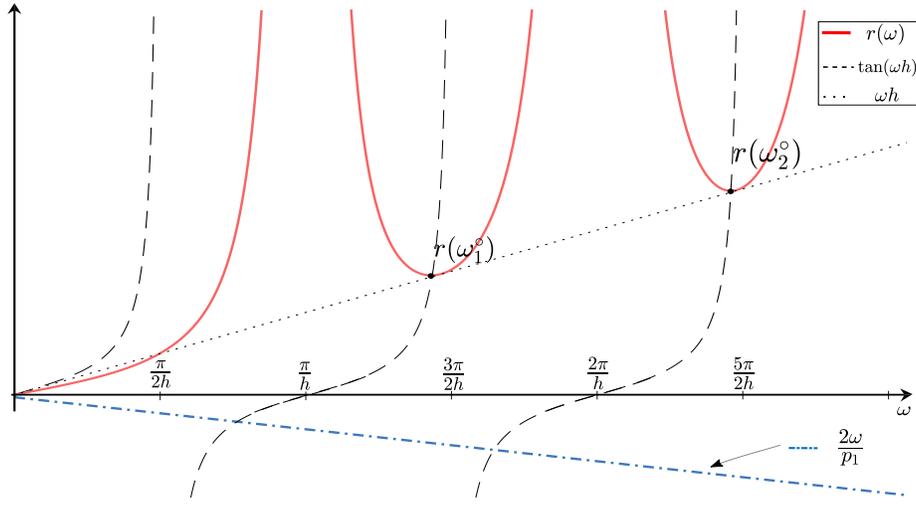


Figura 3.19: Gráfica de $r(\omega)$ y su intersección con la función $\frac{2\omega}{p_1}$, para $(0, \frac{3\pi}{h})$ con $p_1 < 0$.

En ambos casos se tiene $r(\omega) > \frac{2\omega}{p_1}$ lo que implica que:

- $q'(\omega) < 0$, cuando $p_1 < 0$, es decir, la función $q_1(\omega)$ es decreciente
- $q'(\omega) > 0$, cuando $p_1 \geq \frac{2}{h}$, es decir, la función $q_1(\omega)$ es creciente.

Con todo el análisis anterior de las propiedades de las funciones $q_1(\omega)$, $q_2(\omega)$ y $\alpha(\omega)$ podemos ya presentar los resultados sobre la región de estabilidad para el caso de la ecuación diferencial (3.1) cuando $p_2 = 0$.

(i) **Caso** $p_1 < 0$

Proposición 3.6

Supongamos $p_2 = 0$, $h > 0$ y $p_1 < 0$. Entonces, todos los ceros de $f(s)$ dado por (3.2) tienen parte real negativa si, y sólo si, el par (q_2, q_1) pertenece a la región $\bar{\Gamma}$, véase Figura 3.20, cuya frontera en el espacio de parámetros (q_2, q_1) está dada por

$$\begin{aligned} \partial\bar{\Gamma} = & \{(q_2, q_1), q_1 = -q_2, q_2 \in [q_2(0), q_2(\hat{\omega})]\} \cup \\ & \cup \{(q_2(\omega), q_1(\omega)), \omega \in (\hat{\omega}, \omega_{0,1})\} \cup \{(q_2(\omega), q_1(\omega)), \omega \in [0, \omega_{0,0}]\} \cup \\ & \cup \{(q_2(\omega), q_1(\omega)), \omega \in [\omega_{1,k}, \omega_{0,k+2}], k = 0, 1, 2, \dots\}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde $q_2(\omega)$ y $q_1(\omega)$ están dados por (3.39) y (3.40) respectivamente, mientras que $\omega_{0,k} \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$ y $\omega_{1,k} \in \left(\frac{(k+2)\pi}{h}, \frac{(k+3)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, son las soluciones a la ecuación

$$(q_2(\omega_{0,k}), q_1(\omega_{0,k})) = (q_2(\omega_{1,k}), q_1(\omega_{1,k})), \quad (3.51)$$

y $\hat{\omega}$ es la solución a la ecuación

$$\frac{\omega}{p_1} = \tan\left(\frac{\omega h}{2}\right), \quad \omega \in \left(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}\right). \quad (3.52)$$

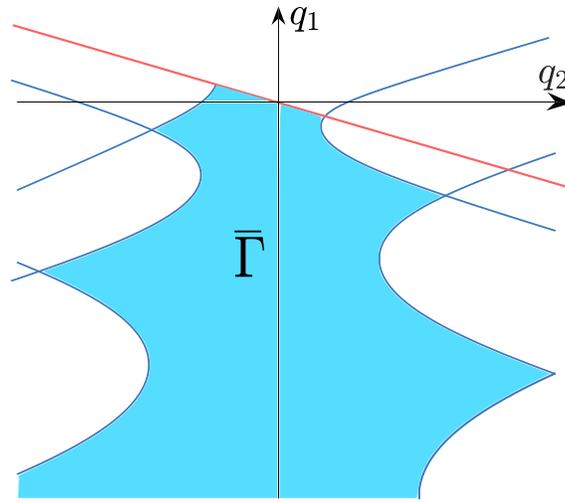


Figura 3.20: Región de estabilidad en el espacio de parámetros (q_2, q_1) para la ecuación (3.34) considerando $p_1 < 0$.

Demostración. Utilizando las propiedades de $q_1(\omega)$, $q_2(\omega)$ y $\alpha(\omega)$ obtenemos el comportamiento de las curvas mostradas en la Figura 3.21

Como se observa en la Figura 3.21, las curvas en los intervalos $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, para k par se encuentran en el semiplano $q_2 < 0$, mientras que para k impar se encuentran en el semiplano $q_2 > 0$. Esto se sigue del hecho de que no existe ω tal que satisfagan la ecuación $q_2(\omega) - \frac{p_1\omega}{\sin(\omega h)} = 0$.

En la Figura 3.21 observamos que cualesquiera dos curvas consecutivas para k par o k impar se intercepta. Este hecho no se sigue directamente de las propiedades de $q_1(\omega)$, $q_2(\omega)$ y $\alpha(\omega)$.

Para mostrar lo anterior, es suficiente corroborar que dos curvas consecutivas se intercepta. Así, consideremos las curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ en los intervalos $\left(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{h}, \frac{4\pi}{h}\right)$, respectivamente.

De las propiedades de $\alpha(\omega)$ sabemos que existen $\omega_k^* \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, tales que $\alpha(\omega_k^*)$ es un mínimo local cuando k es impar. Adicionalmente, se tiene que $\omega_k^* \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2h}$ cuando $k \rightarrow \infty$.

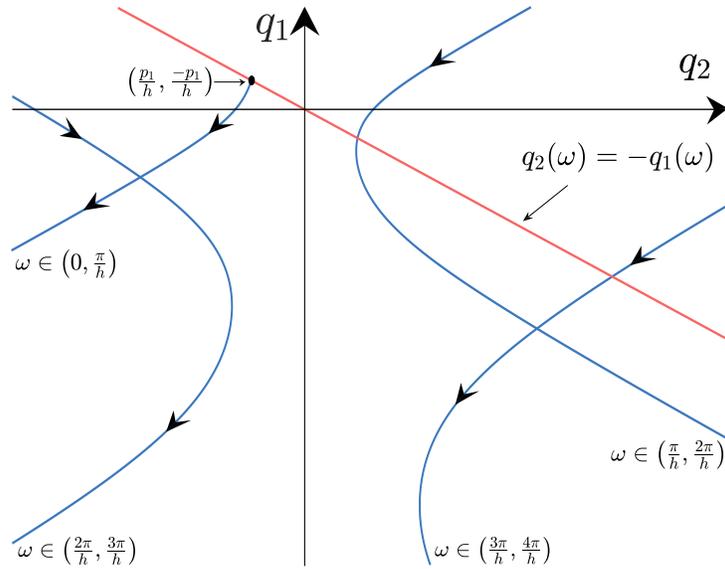


Figura 3.21: Geometría de las curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, con $p_1 < 0$.

Considerando lo anterior y el hecho que

$$\alpha\left(\frac{(2k+1)\pi}{2h}\right) = \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)\pi}{2h},$$

podemos garantizar la siguiente desigualdad

$$-1 > \alpha(\omega_1^*) > \alpha(\omega_3^*).$$

En la Figura 3.22 se representa la función $\alpha(\omega)$ y sus mínimos locales para k impar.

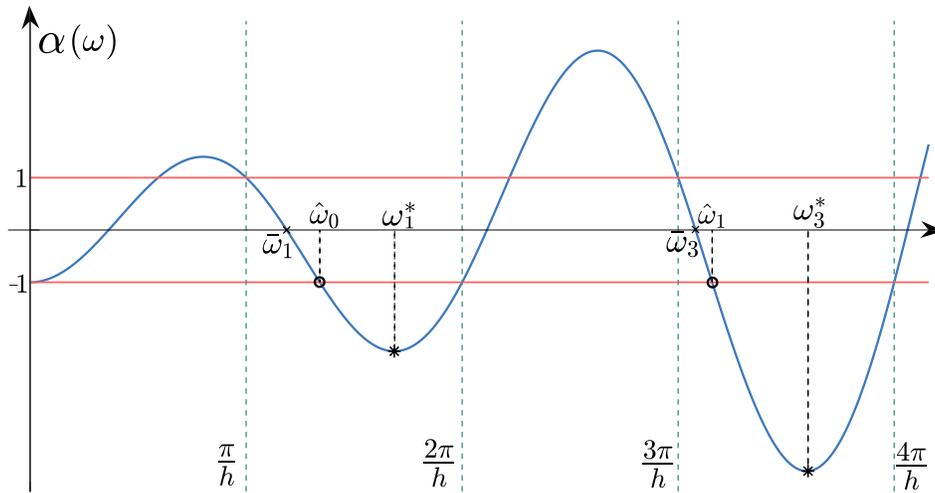


Figura 3.22: Función $\alpha(\omega)$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$.

Luego entonces, la curva definida para $\omega \in (\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h})$ se encuentra en el semiplano

$$S = \{(q_1, q_2) : q_1 \geq \alpha(\omega_1^*) \cdot q_2, q_2 > 0\},$$

mientras que

$$(q_2(\omega_3^*), q_1(\omega_3^*)) \in \{(q_1, q_2) : q_1 < \alpha(\omega_1^*) \cdot q_2, q_2 > 0\}.$$

Entonces, la continuidad de la curva definida para $(\frac{3\pi}{h}, \frac{4\pi}{h})$ implica que existen $\omega_{0,1} \in (\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h})$ y $\omega_{1,1} \in (\frac{3\pi}{h}, \frac{4\pi}{h})$, véase Figura 3.23, tales que satisfacen

$$(q_2(\omega_{0,1}), q_1(\omega_{0,1})) = (q_2(\omega_{1,1}), q_1(\omega_{1,1})).$$

En otras palabras, la curva definida para $(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h})$ intercepta a la curva definida $(\frac{3\pi}{h}, \frac{4\pi}{h})$.

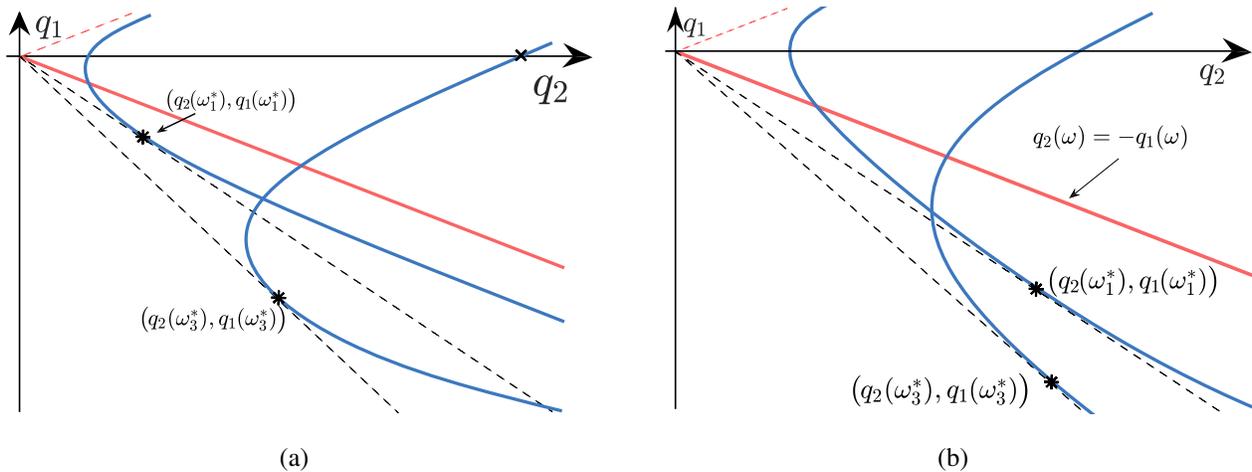


Figura 3.23: Curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in (\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h})$ y $\omega \in (\frac{3\pi}{h}, \frac{4\pi}{h})$. (a) El cruce ocurre para $\omega_{0,1} \in (\omega_1^*, \frac{2\pi}{h})$, (b) El cruce ocurre para $\omega_{0,1} \in (\hat{\omega}_0, \omega_1^*)$.

En resumen, las curvas definidas por la parametrización (3.39)-(3.40), sus intersecciones y la recta $q_1 = -q_2$, dividen el espacio (q_1, q_2) en un conjunto infinito contable de regiones abiertas Γ_j , $j = 0, 1, \dots$, véase Figura 3.24.

Utilizando el criterio de Mikhailov se muestra que para todo punto $(q_2, q_1) \in \Gamma_0$ el cuasipolinomio $f(s)$ no tiene ceros con parte real positiva. Por lo tanto, definiendo $\bar{\Gamma} \triangleq \Gamma_0$ cuya frontera está definida en (3.50) es la región de estabilidad, concluyendo la demostración. \square

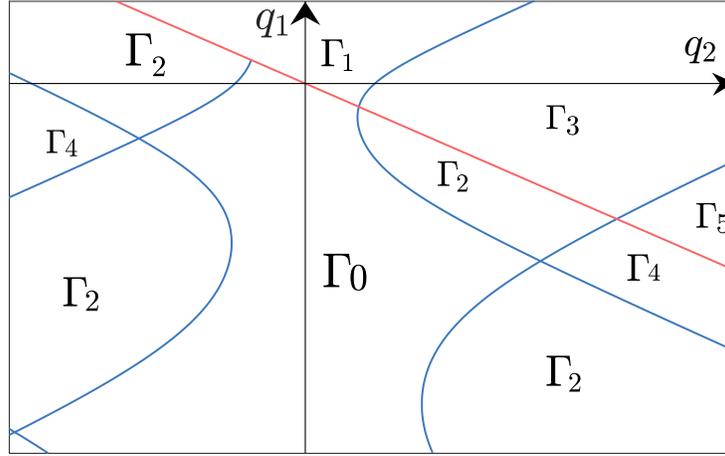


Figura 3.24: Partición del espacio (q_2, q_1) , en regiones Γ_j , $j = 0, 1, \dots$, para $p_2 = 0$ y $p_1 < 0$.

(ii) **Caso** $0 < p_1 < \frac{2}{h}$

Proposición 3.7

Supongamos $p_2 = 0$, $h > 0$ y $0 < p_1 < \frac{2}{h}$. Entonces todos los ceros de $f(s)$ dado por (3.2) tienen parte real negativa si, y sólo si, el par (q_2, q_1) pertenece a la región $\bar{\Psi}$, véase Figura 3.25, cuya frontera en el espacio de parámetros (q_2, q_1) está dada por

$$\begin{aligned} \partial\bar{\Psi} = & \cup \{(q_2, q_1), q_1 = -q_2, q_2 \in [q_2(0), q_2(\check{\omega})]\} \cup \{(q_2(\omega), q_1(\omega)), \omega \in (0, \check{\omega})\} \cup \\ & \cup \{(q_2(\omega), q_1(\omega)), \omega \in [\tilde{\omega}_{0,k}, \tilde{\omega}_{1,k}], k = 1, 2, 3, \dots\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde $q_2(\omega)$ y $q_1(\omega)$ están dados por (3.39) y (3.40) respectivamente, $\tilde{\omega}_{0,k}, \tilde{\omega}_{1,k} \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$ $k = 1, 2, 3, \dots$ son las soluciones a la ecuación

$$(q_2(\tilde{\omega}_{0,k}), q_1(\tilde{\omega}_{0,k})) = (q_2(\tilde{\omega}_{1,k}), q_1(\tilde{\omega}_{1,k})), \quad (3.54)$$

y $\check{\omega}$ es la solución a la ecuación (3.52), para $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$.

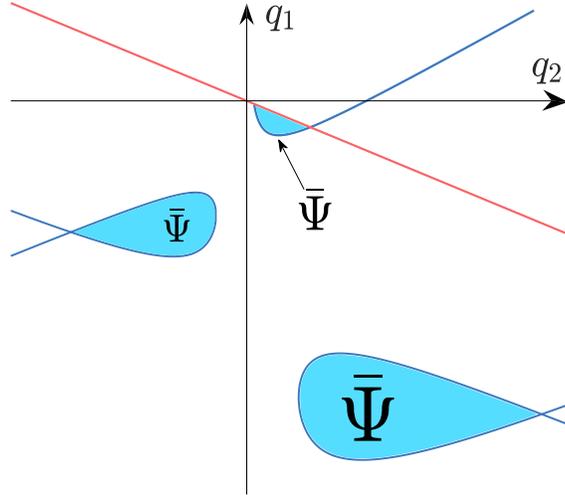


Figura 3.25: Región de estabilidad en el espacio de parámetros (q_2, q_1) para la ecuación (3.34) considerando $0 < p_1 < \frac{2}{h}$.

Demostración. Utilizando las propiedades de $q_1(\omega)$, $q_2(\omega)$ y $\alpha(\omega)$ obtenemos el comportamiento de las curvas mostradas en la Figura 3.26

Como se observa en la Figura 3.26, las curvas en los intervalos $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, para k par se encuentran en el semiplano $q_2 > 0$, mientras que para k impar se encuentran en el semiplano $q_2 < 0$.

En la Figura 3.26 observamos que cualesquiera dos curvas consecutivas para k par o impar no se intersectan, pero cualesquiera de las curvas se intersectan a si mismas en el intervalo $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$ con $k > 0$ ya sea par o impar.

Para mostrar lo anterior, es suficiente mostrar dicha intersección en cualquier intervalo $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$. Así, consideremos el intervalo $\left(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}\right)$. De las propiedades de $q_2(\omega)$ sabemos que existe $\omega_1^\circ \in \left(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}\right)$, tal que $q_2(\omega_1^\circ)$ es un máximo local de $q_2(\omega)$ en ese intervalo.

Por otro lado, sabemos que existen ω_{01}^* , $\omega_{11}^* \in \left(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}\right)$ tales que $q_1(\omega_{01}^*)$ es un máximo local y $q_1(\omega_{11}^*)$ es un mínimo local en el intervalo $\left(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}\right)$.

Adicionalmente, se tiene que

$$\omega_{01}^* < \omega_1^\circ < \omega_{11}^* .$$

Entonces, como $q_1(\omega)$ es decreciente cuando $\omega \in (\omega_{01}^*, \omega_{11}^*)$ se sigue que

$$0 > q_1(\omega_{01}^*) > q_1(\omega_1^\circ) . \quad (3.55)$$

Por otro lado, como $q_2(\omega)$ es creciente cuando $\omega \in \left(\frac{\pi}{h}, \omega_1^\circ\right)$ se sigue que

$$q_2(\omega_{01}^*) < q_2(\omega_1^\circ) < 0 . \quad (3.56)$$

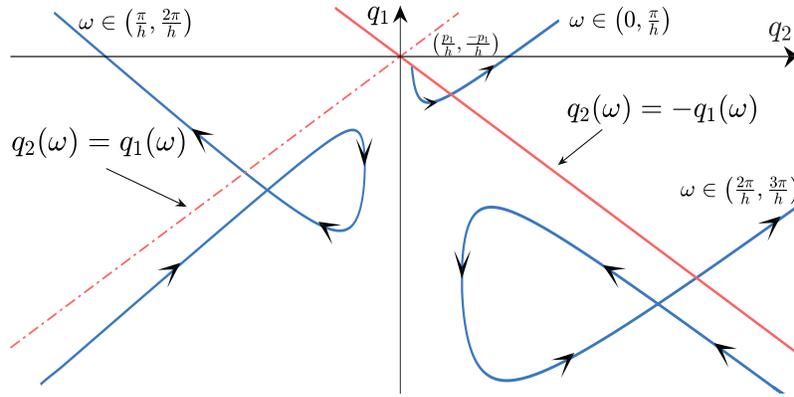


Figura 3.26: Geometría de las curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2$, con $0 < p_1 < \frac{2}{h}$.

De (3.55) y tomando en cuenta que $q_2(\omega_{01}^*) < 0$, obtenemos que

$$\frac{q_1(\omega_{01}^*)}{q_2(\omega_{01}^*)} < \frac{q_1(\omega_1^\circ)}{q_2(\omega_{01}^*)}. \quad (3.57)$$

Por otro lado, de (3.56) tenemos que

$$\frac{1}{q_1(\omega_{01}^*)} > \frac{1}{q_1(\omega_1^\circ)},$$

y tomando en cuenta que $q_1(\omega_1^\circ) < 0$, se obtiene que

$$\frac{q_1(\omega_1^\circ)}{q_2(\omega_{01}^*)} < \frac{q_1(\omega_1^\circ)}{q_2(\omega_1^\circ)}. \quad (3.58)$$

Combinando (3.57) y (3.58) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\alpha(\omega_{01}^*) = \frac{q_1(\omega_{01}^*)}{q_2(\omega_{01}^*)} < \frac{q_1(\omega_1^\circ)}{q_2(\omega_1^\circ)} = \alpha(\omega_1^\circ)$$

En la Figura 3.27 se ilustra lo anterior

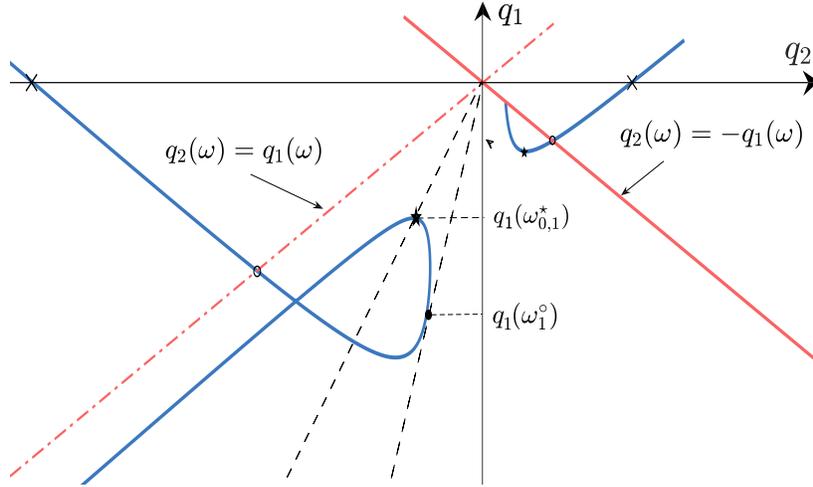


Figura 3.27: Curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, con $k = 0, 1$.

Se sigue que la curva $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{\pi}{h}, \omega_{01}^*\right)$ se encuentra en el semiplano

$$S = \{(q_2, q_1) : q_1 \geq \alpha(\omega_{01}^*) \cdot q_2, q_2 < 0\},$$

mientras que

$$(q_2(\omega_1^o), q_1(\omega_1^o)) \in \{(q_2, q_1) : q_1 < \alpha(\omega_{01}^*) \cdot q_2, q_2 < 0\}.$$

Entonces, tomando en cuenta que $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ tiende asintóticamente a la recta $q_1 = -q_2$, con $q_2 < 0$, cuando $\omega \rightarrow \frac{2\pi}{h}$, y dada la continuidad de la curva para $\omega \in (\omega_1^o, \frac{2\pi}{h})$ se sigue que existen $\tilde{\omega}_0 \in \left(\frac{\pi}{h}, \omega_{01}^*\right)$ y $\tilde{\omega}_1 \in (\omega_1^o, \frac{2\pi}{h})$, tales que

$$(q_2(\tilde{\omega}_0), q_1(\tilde{\omega}_0)) = (q_2(\tilde{\omega}_1), q_1(\tilde{\omega}_1)).$$

Así, hemos mostrado que la curva definida para $\omega \in \left(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}\right)$ se intercepta a si misma y en consecuencia esto sucede para todas las curvas definidas en cada intervalo $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$ con $k \geq 1$.

Se sigue que la curva para $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$, la recta $q_1 = -q_2$ y las curvas y sus intercepciones para $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$ con $k \geq 1$, dividen el espacio (q_1, q_2) en un conjunto infinito contable de regiones abiertas $\Psi_{0,j}$, Ψ_{j+1} , $j = 0, 1, \dots$, véase Figura 3.28.

Utilizando el criterio de Mikhailov se muestra que cualquier par $(q_2, q_1) \in \Psi_{0,j}$ el cuasipolinomio $f(s)$ no tiene ceros con parte real positiva.

Por lo tanto, definiendo $\bar{\Psi} \triangleq \bigcup_j \Psi_{0,j}$, $j = 0, 1, \dots$, es la región de estabilidad, con lo que termina la demostración. \square

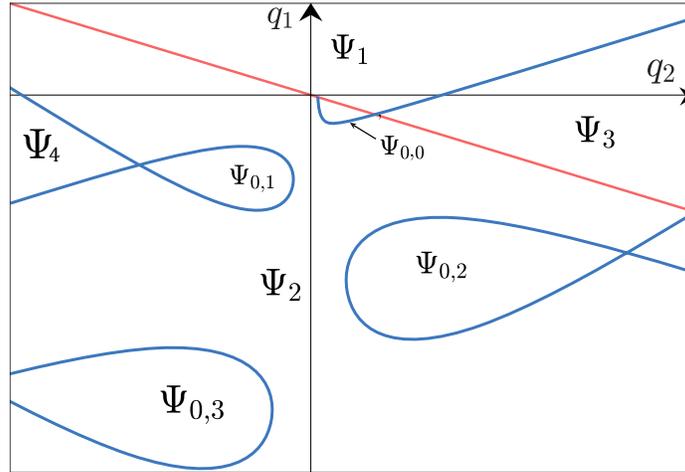


Figura 3.28: Partición del espacio (q_2, q_1) en regiones $\Psi_{0,j}, \Psi_{j+1}, j = 0, 1, \dots$, para $p_2 = 0$ y $0 < p_1 < \frac{2}{h}$.

(iii) **Caso** $p_1 \geq \frac{2}{h}$

Proposición 3.8

Supongamos $p_2 = 0, h > 0$. Dado cualquier $p_1 \geq \frac{2}{h}$ y $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, $f(s)$ tiene al menos un cero con parte real positiva y por lo tanto (3.1) no es exponencialmente estable.

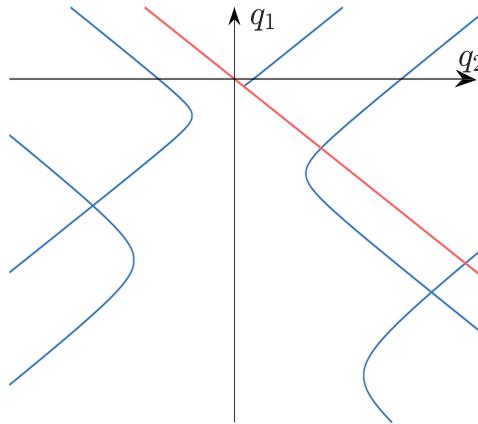


Figura 3.29: Partición del espacio (q_2, q_1) con $p_1 \geq \frac{2}{h}$.

Demostración. Utilizando las propiedades de $q_1(\omega), q_2(\omega)$ y $\alpha(\omega)$ obtenemos el comportamiento de las curvas mostradas en la Figura 3.30

Como se observa en la Figura 3.30, las curvas no se intercepta a si mismas. Lo anterior es consecuencia de que para $p_1 \geq \frac{2}{h}$, la función $q_1(\omega)$ es estrictamente creciente en cada intervalo

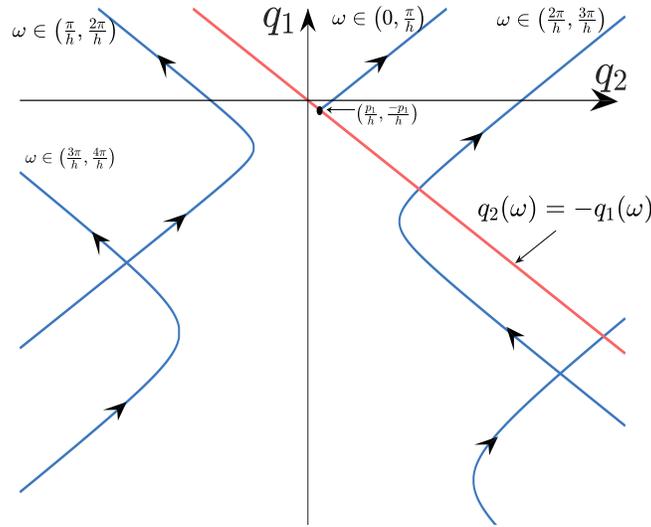


Figura 3.30: Geometría de las curvas $(q_2(\omega), q_1(\omega))$ para $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, con $p_1 \geq \frac{2}{h}$.

$$\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right).$$

Debido a lo anterior, y a las propiedades de $q_2(\omega)$ y $\alpha(\omega)$ se sigue que el comportamiento de las curvas es similar al comportamiento de las curvas para $p_1 < 0$.

Explícitamente, cualesquiera dos curvas consecutivas para k par o k se intercepta.

Las curvas (3.39)-(3.40), sus intercepciones y la recta $q_2 = -q_1$ dividen el espacio (q_2, q_1) en un conjunto infinito contable de regiones abiertas Ψ_j , $j = 1, 2, \dots$, véase Figura 3.31, los cuales contienen un segmento de la recta $q_1 = 0$.

De la Proposición 3.5, en el caso cuando $p_2 = 0$ y $q_1 = 0$, resulta que $f(s)$ tiene al menos un cero con parte real positiva cuando $p_1 > 0$.

Lo anterior implica que para cualesquiera $(q_2, q_1) \in \Psi_j$, para todo $j = 1, 2, \dots$, se tiene que $f(s)$ tiene al menos un cero con parte real positiva. En otras palabras, no existe región de estabilidad lo que concluye la demostración. \square

Observación. Las Proposiciones 3.6, 3.7 y 3.8 caracterizan completamente las regiones de estabilidad, y su geometría, de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo (3.1) cuando $p_2 = 0$. Hasta donde sabemos estos resultados no han sido reportados, en la literatura.

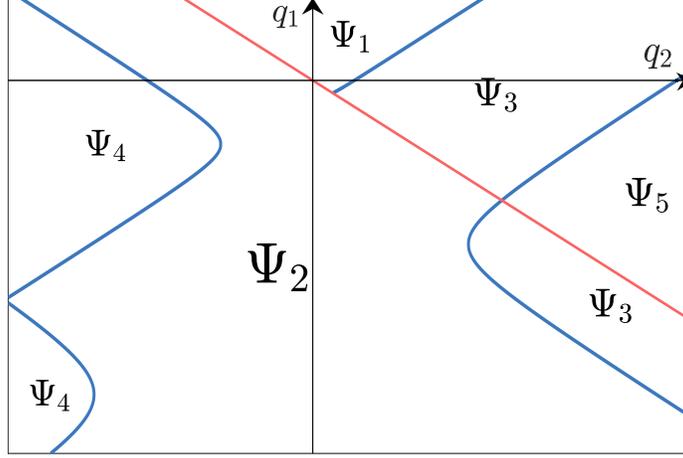


Figura 3.31: Partición del espacio (q_2, q_1) para el caso $p_2 = 0$ con $p_1 \geq \frac{2}{h}$.

3.4. Caso ningún parámetro igual a cero

En esta sección consideramos el caso de la ecuación (3.1) cuando $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$, el cual es de bastante importancia en las aplicaciones de control y diseño de resonadores retardados. De hecho, motivado de las aplicaciones escogemos el plano (q_2, p_2) para determinar la región de estabilidad. El siguiente Lema tiene un papel importante en el resultado principal para la caracterización de la región de estabilidad.

Lema 3.1 Dados cualesquiera $p_1 < 0$ y $0 < h$, la función

$$v(\omega) = \frac{\omega \cos(\omega h) - p_1 \sin(\omega h)}{1 - \cos(\omega h)}, \quad (3.59)$$

tiene un mínimo local en $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, donde ω_k^* , $k = 0, 1, 2, \dots$, son las soluciones a la ecuación

$$\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right) = \bar{n}(\omega), \quad (3.60)$$

para $\omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, donde $\bar{n}(\omega)$ está dado por

$$\bar{n}(\omega) = \frac{p_1 h + \cos(\omega h)}{\omega h}. \quad (3.61)$$

Ahora, dado $q_1 < 0$, satisfaciendo la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{-q_1} \leq -p_1 \leq \frac{3\pi}{2h}, \quad (3.62)$$

entonces $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(4k+3)\pi}{2h} \right)$ y

$$v(\omega_k^*) \leq \frac{q_1}{\omega_k^*}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.63)$$

Demostración. Es claro que, la función $v(\omega)$ y su derivada

$$\frac{d}{d\omega} v(\omega) = \frac{\omega h}{1 - \cos(\omega h)} \left[\bar{n}(\omega) - \cot\left(\frac{\omega h}{2}\right) \right],$$

donde $\bar{n}(\omega)$ está dada en (3.61), están bien definidas para $\omega \neq \frac{2k\pi}{h}$, $k = 0, 1, \dots$. Entonces, $\frac{d}{d\omega} v(\omega) = 0$ si, y sólo si la ecuación $\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right) = \bar{n}(\omega)$ se satisface para algún $\omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

La función $\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right)$ satisface que $\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right) \rightarrow +\infty$ cuando $\omega \rightarrow \frac{2k\pi}{h}^+$ y $\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right) \rightarrow -\infty$ cuando $\omega \rightarrow \frac{2k\pi}{h}^-$. Además, $\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right) = 0$ si, y sólo si, $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{h}$, $k = 0, 1, \dots$, véase Figura 3.32.

Por otro lado, la función $\bar{n}(\omega)$ depende del valor de p_1 , por lo cual consideramos lo siguientes casos:

- (i) $p_1 < -\frac{1}{h}$. En este caso, $p_1 h + \cos(\omega h) < 0$ entonces $\bar{n}(\omega) < 0$ para $\omega > 0$. Más aún, $\bar{n}(\omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$.
- (ii) $p_1 = -\frac{1}{h}$. En este caso $\bar{n}(\omega) = 0$ para $\omega = \frac{2k\pi}{h}$ y $\bar{n}(\omega) < 0$ para $\omega \neq \frac{2k\pi}{h}$, $k = 0, 1, \dots$
- (iii) $p_1 > -\frac{1}{h}$: En este caso $\bar{n}(\omega) \rightarrow -\infty$ cuando $\omega \rightarrow 0^+$. Además existen $\omega_k \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$ tales que $\bar{n}(\omega_k) = 0$, de modo que la función es oscilatoria.

De lo anterior, se concluye que existen $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, véase Figura 3.32, tales que $\bar{n}'(\omega_k^*) = 0$, $k = 0, 1, \dots$. Más aún, como $\bar{n}(\omega) < \cot\left(\frac{\omega h}{2}\right)$, para $\omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \omega_k^*\right)$, entonces $\bar{n}'(\omega) < 0$, mientras que $\bar{n}(\omega) > \cot\left(\frac{\omega h}{2}\right)$ para $\omega \in \left(\omega_k^*, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, implica $\bar{n}'(\omega) > 0$, y, por lo tanto, $v(\omega)$ tiene un mínimo local en ω_k^* , $k = 0, 1, \dots$

Ahora, notemos que $\cot\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right) = -1$, $k = 0, 1, \dots$, mientras que

$$\bar{n}\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right) = \frac{2p_1 h}{(4k+3)\pi} \geq \bar{n}\left(\frac{3\pi}{2h}\right) = \frac{2p_1 h}{3\pi}.$$

Por consiguiente, si la condición (3.62) se mantiene, entonces $\bar{n}\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right) \geq -1$ y como $\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right)$ es decreciente para $\omega \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, se sigue que $\omega_k^* < \frac{(4k+3)\pi}{2h}$.

Cálculos directos de $\cot\left(\frac{\omega_k^* h}{2}\right) = \bar{n}(\omega_k^*)$ conllevan a

$$1 - \cos(\omega_k^* h) = \frac{\omega_k^* h \sin(\omega_k^* h)}{p_1 h + \cos(\omega_k^* h)}.$$

Usando esta igualdad, se puede llegar a la siguiente expresión

$$v(\omega_k^*) = -\frac{p_1^2}{\omega_k^*} + \delta(\omega_k^*),$$

donde

$$\delta(\omega_k^*) = \frac{\cos(\omega_k^* h)}{\omega_k^* h \sin(\omega_k^* h)} [p_1(\omega_k^* h - \sin(\omega_k^* h)) + \omega_k^* \cos(\omega_k^* h)].$$

Como $\omega_k^* h - \sin(\omega_k^* h) < 0$, $\sin(\omega_k^* h) < 0$, $\cos(\omega_k^* h) < 0$ y $p_1 < 0$, entonces $\delta(\omega_k^*) < 0$, lo que implica que

$$v(\omega_k^*) \leq \frac{-p_1^2}{\omega_k^*} \leq \frac{q_1}{\omega_k^*},$$

para $k = 0, 1, \dots$, terminando así la demostración. □

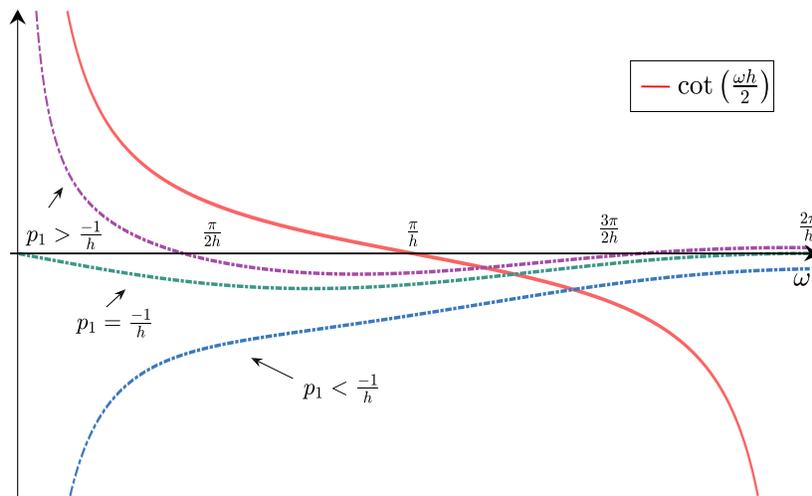


Figura 3.32: Gráfica de $\bar{n}(\omega)$ y $\cot\left(\frac{\omega h}{2}\right)$ para $\omega \in (0, \frac{2\pi}{h})$.

Proposición 3.9

Supongamos $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$ con $h > 0$ satisfaciendo las desigualdades

$$\sqrt{-q_1} \leq -p_1 \leq \frac{3\pi}{2h} \quad \text{y} \quad p_1 < (\sqrt{2} + 1)^2 q_1 h. \quad (3.64)$$

Entonces todos los ceros de $f(s)$, dado por (3.2), tienen parte real negativa, si, y sólo si, el par (q_2, p_2) pertenece a la región Θ , cuya frontera en el espacio de parámetros (q_2, p_2) está dada por

$$\partial\Theta = \{(q_2(\omega), p_2(\omega)) : \omega \in (0, \hat{\omega})\} \cup \{(q_2, p_2) = (q_1, p_2), p_2 \in (p_2(0), p_2(\hat{\omega}))\}, \quad (3.65)$$

donde $q_2(\omega)$ y $p_2(\omega)$ están dadas por

$$q_2(\omega) = p_1 \omega \sin(\omega h) - (\omega^2 + q_1) \cos(\omega h), \quad (3.66)$$

$$p_2(\omega) = -\frac{1}{\omega} [(\omega^2 + q_1) \sin(\omega h) + p_1 \omega \cos(\omega h)], \quad (3.67)$$

y $\hat{\omega}$ es la solución de la ecuación

$$\frac{q_1}{\omega} = \frac{p_1 \sin(\omega h) - \omega \cos(\omega h)}{\cos(\omega h) - 1}, \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right). \quad (3.68)$$

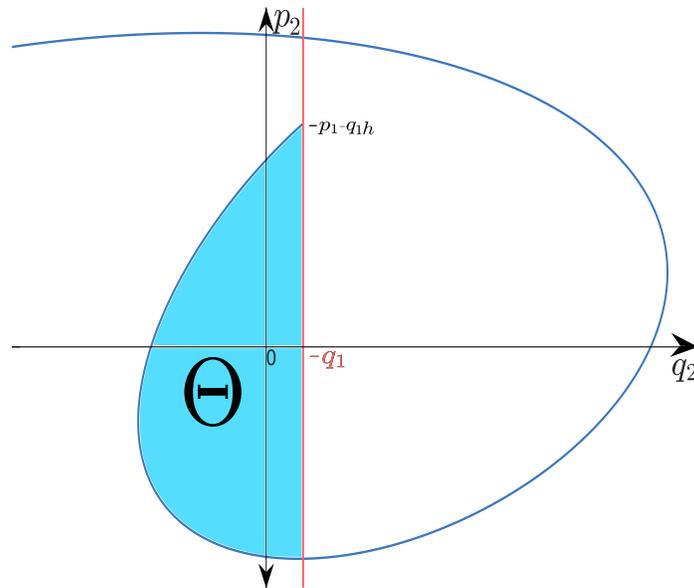


Figura 3.33: Región de estabilidad en el espacio de parámetros (q_2, p_2) de la ecuación (3.1) para $p_1 < 0$, $q_1 < 0$ satisfaciendo la condición (3.64).

Demostración. Observemos que la curva dada por la parametrización (3.66) y (3.67) satisface que $(q_2(\omega), p_2(\omega)) \rightarrow (-q_1, -q_1 h p_1)$, cuando $\omega \rightarrow 0$. Entonces la curva comienza sobre la recta $q_2 = -q_1$.

Para conocer si existen más cruces de la curva con esta recta es necesario analizar cuando $q_2(\omega) = -q_1$, lo cual es equivalente a analizar la ecuación $\bar{r}(\omega) = \nu(\omega)$, donde $\nu(\omega)$ está dada en (3.59) del Lema 3.1 y $\bar{r}(\omega) = \frac{q_1}{\omega}$. Así, bajo la condición $\sqrt{-q_1} \leq -p_1 \leq \frac{3\pi}{2h}$, del Lema 3.1 se tiene que existen $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, tales que $\nu(\omega_k^*) \geq \bar{r}(\omega_k^*)$ para $k = 0, 1, \dots$. Más aún, dado que $\nu(\omega_k^*)$ es un mínimo local de $\nu(\omega)$ para $\omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$ y $\bar{r}(\omega)$ es una función creciente y estrictamente negativa, entonces existen $\hat{\omega}_{k,0}$ y $\hat{\omega}_{k,1}$ satisfaciendo

$$\frac{(4k+1)\pi}{2h} < \hat{\omega}_{k,0} < \frac{(2k+1)\pi}{h} < \omega_k^* < \hat{\omega}_{k,1} < \frac{(2k+2)\pi}{h},$$

tales que $\bar{r}(\hat{\omega}_{k,j}) = \nu(\hat{\omega}_{k,j})$ $k = 0, 1, \dots$, y $j = 0, 1$, véase Figura 3.34

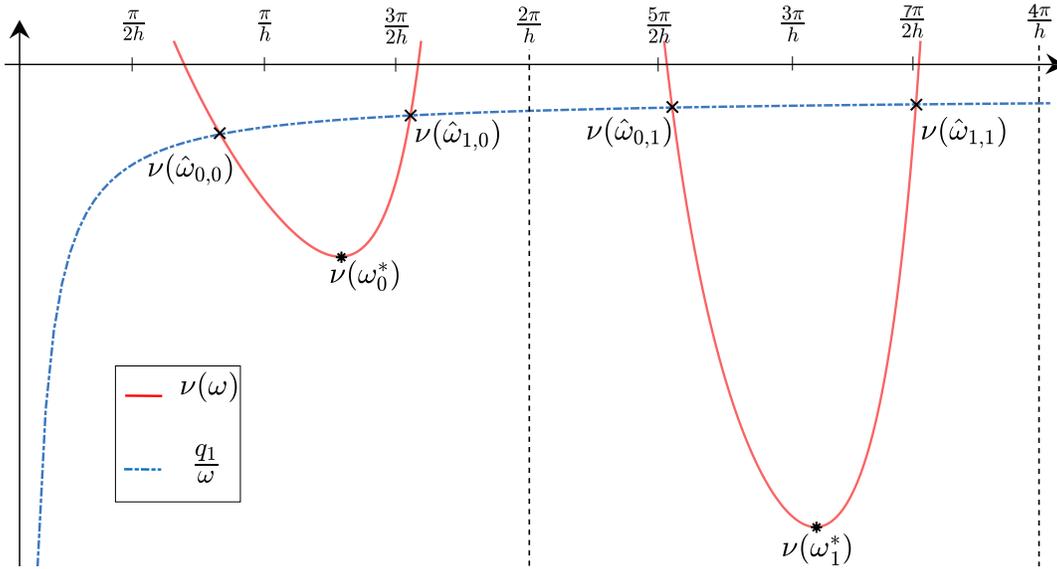


Figura 3.34: Grafica de $\nu(\omega)$

y la función $\frac{q_1}{\omega}$, mostrando la existencia de soluciones $\hat{\omega}_{j,k}$ en el intervalo $(0, \frac{4\pi}{h})$.

En otras palabras, la curva definida por la parametrización (3.6)-(3.7) interseca a la recta $q_2 = -q_1$ un número infinito de ocasiones, donde para estos cruces tenemos los siguientes valores para $p_2(\omega)$

$$p_2(\hat{\omega}_{k,j}) = \frac{-(p_1 \hat{\omega}_{k,j} + q_1 \sin(\hat{\omega}_{k,j} h))}{\hat{\omega}_{k,j} \cos(\hat{\omega}_{k,j} h)}, \quad (3.69)$$

Luego, de la condición $\sqrt{-q_1} \leq -p_1 \leq \frac{3\pi}{2h}$, se mantienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} v\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right) &< r\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right), \\ r\left(\frac{(8k+7)\pi}{4h}\right) &< v\left(\frac{(8k+7)\pi}{4h}\right). \end{aligned}$$

De estas desigualdades y del hecho que $v(\omega)$ y $r(\omega)$ son crecientes para $\omega \in \left(\omega_k^*, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, se tiene que $\hat{\omega}_{k,1} \in \left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}, \frac{(8k+7)\pi}{4h}\right)$, $k = 0, 1, \dots$, por consiguiente $\cos(\hat{\omega}_{k,1}h) \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, para $k = 0, 1, \dots$. Entonces las siguientes desigualdades se satisfacen:

$$p_1 (\cos(\hat{\omega}_{k,1}h) - 1) > p_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right), \quad (3.70)$$

$$q_1 h \left(\frac{\sin(\hat{\omega}_{k,1}h)}{\hat{\omega}_{k,1}h} - \cos(\hat{\omega}_{k,1}h)\right) < -q_1 h \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.71)$$

La condición $p_1 < (\sqrt{2} + 1)^2 q_1 h$ es equivalente a $p_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) > -q_1 h \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Entonces de (3.70) y (3.71) la siguiente desigualdad es válida:

$$p_1 (\cos(\hat{\omega}_{k,1}h) - 1) > q_1 h \left(\frac{\sin(\hat{\omega}_{k,1}h)}{\hat{\omega}_{k,1}h} - \cos(\hat{\omega}_{k,1}h)\right).$$

De la desigualdad anterior y del hecho que $\cos(\omega_{k,1}h) > 0$ se concluye que

$$p_2(\hat{\omega}_{k,1}) = \frac{-(p_1 \hat{\omega}_{k,1} + q_1 \sin(\hat{\omega}_{k,1}h))}{\hat{\omega}_{k,1} \cos(\hat{\omega}_{k,1}h)} > -q_1 h - p_1 = p_2(0).$$

Adicionalmente, del hecho que $\hat{\omega}_{k,j} \rightarrow \frac{(4k+3)\pi}{2h}$ conforme k incrementa, se deduce que $p_2(\hat{\omega}_{k,1}) < p_2(\hat{\omega}_{k+1,1})$ para todo $k = 0, 1, \dots$,

En resumen, de lo anterior se concluye que bajo la condición (3.64) la curva continua dada por (3.6)-(3.7) es una espiral creciente que no se intersecta así misma, véase Figura 3.35.

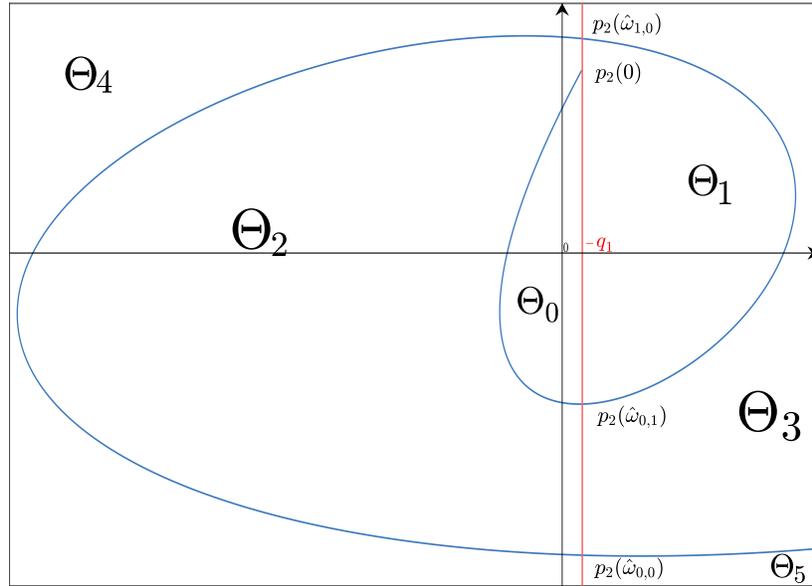


Figura 3.35: Partición del espacio de parámetros (q_2, p_2) para $p_1 < 0$, $q_1 < 0$ satisfaciendo la condición (3.64).

De la Figura 3.35 se observa como la parametrización (3.6)-(3.7) en conjunto con la recta $q_2 = -q_1$ dividen el espacio (q_2, p_2) en un conjunto infinito (contable) de regiones Ψ_j , $j = 0, 1, \dots$. En este caso, la región Ψ_0 contiene el origen, es decir, $(q_2, p_2) = (0, 0) \in \Psi_0$. Además como $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$ entonces $f(s)$ es un polinomio estable. Por lo tanto, definiendo $\Theta = \Psi_0$ es la región de estabilidad, con lo que termina la demostración \square

La Proposición 3.9 caracteriza explícitamente la región de estabilidad de la ecuación (3.1) para el caso $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$ satisfaciendo la condición (3.64). Si bien es cierto que en principio este resultado puede ser un tanto restrictivo, es lo suficientemente general para considerar casos que otros resultados no son posibles, Por ejemplo, en el trabajado por Hu and Wang [23] imponen la restricción adicional $p_2 < -p_1$. De manera similar, existen parámetros (q_2, p_2) en la región de estabilidad Γ satisfaciendo la condición (3.64) los cuales no están consideradas en las restricciones adicionales impuestas por Chalon y Schmidt en [8, 9].

Aplicaciones a sistemas de un grado de libertad

En este capítulo se muestra la aplicación de los resultados obtenidos previamente en el análisis de estabilidad de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo a los problemas de control y control de vibraciones de un sistema de un grado de libertad. Se propone un algoritmo de diseño para un resonador retardado usando retroalimentación de posición y velocidad, mostrando algunos ejemplos y simulaciones. Por último, realizamos la implementación experimental del DR propuesto validando el algoritmo de diseño y evaluando sus capacidades como un absorbedor activo de vibraciones al interconectarlo a un sistema primario sujeto a perturbaciones.

4.1. Problemas de control y vibraciones

Consideremos la ecuación (3.1) para el caso cuando $p_1 = -\frac{c}{m}$, $q_1 = -\frac{k}{m}$, $p_2 = -\frac{g_2}{m}$ y $q_2 = -\frac{g_1}{m}$, es decir

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = -g_1x(t-h) - g_2x'(t-h), \quad (4.1)$$

donde m , c y $k \in \mathbb{R}_+$ son la masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente de un sistema de un grado de libertad (SDOF, por sus siglas en inglés), mientras que g_1 y g_2 son las ganancias de retroalimentación.

Como mostramos en el capítulo 1, la ecuación (4.1) es ampliamente usada en problemas de control y control de vibraciones, dependiendo la fuente del retardo del tiempo. Explícitamente:

- 1) El retardo es inherente en el lazo de control, utilizando un control tipo PD, donde las ganan-

cias de retroalimentación proporcional y derivativa son utilizadas para controlar la dinámica del sistema de un grado de libertad bajo la presencia inevitable del retardo de tiempo en el lazo de retroalimentación debido al tiempo involucrado en la transmisión de datos y señales de los sensores, filtros y actuadores.

- 2) El retardo se introduce intencionalmente como parámetro de control ya sea para estabilizar o modificar la dinámica del sistema de un grado de libertad. El resonador retardado es una aplicación correspondiente a este enfoque.

Entonces, en el contexto de la ecuación (4.1), el problema práctico desde el enfoque de la aplicación al control PD es seleccionar apropiadamente las ganancias proporcional g_1 y derivativa g_2 para garantizar la estabilidad exponencial del sistema (4.1) bajo la presencia de un retardo h dado. Por su parte, el problema práctico desde el punto de vista de la aplicación al resonador retardado consiste en determinar adecuadamente las ganancias de retroalimentación g_1 y g_2 así como también seleccionar el retardo h tal que el sistema (4.1) tenga soluciones oscilatorias estables.

Es importante mencionar que este problema no puede ser resuelto por los métodos comúnmente usados para el diseño de configuraciones DR (posición, velocidad, aceleración) véase [40]. La razón principal es que estas configuraciones DR involucran sólo 2 parámetros de diseño (una ganancia de retroalimentación y el retardo de tiempo) mientras que el caso del DR con retroalimentación de posición y velocidad se involucran 3 parámetros de diseño (las ganancias g_1 y g_2 y el retardo h).

Para ilustrar de mejor manera todo lo mencionado anteriormente reescribamos el sistema (4.1) de la siguiente forma:

$$x''(t) + 2\zeta\omega_n x'(t) + \omega_n^2 x(t) + b_1 x(t-h) + b_2 x'(t-h) = 0, \quad (4.2)$$

donde $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema respectivamente, $b_1 = \frac{g_1}{m}$ y $b_2 = \frac{g_2}{m}$.

Como es bien sabido el sistema (4.2) es exponencialmente estable si, y sólo si, su cuasipolinomio

$$Q(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + b_1 e^{-hs} + b_2 s e^{-hs}, \quad (4.3)$$

no tiene ceros con parte real positiva [19]. De esta manera aplicando el resultado de la Proposición 3.9 al cuasipolinomio $Q(s)$ dado por (4.3) se determina explícitamente la región de estabilidad dependiente del retardo de (4.2) en el espacio de las ganancias (b_1, b_2) como función explícita de los coeficientes y el retardo. Es importante mencionar que dado $b_1 = -q_2$ y $b_2 = -p_2$, entonces

la parametrización $(q_2(\omega), p_2(\omega))$ mostrada en la Proposición 3.9, en este caso tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned} b_1(\omega) &= 2\omega_n \zeta \omega \sin(\omega h) + (\omega^2 - \omega_n^2) \cos(\omega h), \\ b_2(\omega) &= \frac{1}{\omega} ((\omega^2 - \omega_n^2) \sin(\omega h) - 2\omega_n \zeta \omega \cos(\omega h)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

mientras que la condición (3.64) es equivalente a las siguientes desigualdades:

$$0 < h < \min \left\{ \frac{3\pi}{4\omega_n \zeta}, \frac{2\zeta}{(\sqrt{2} + 1)^2 \omega_n} \right\} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \leq \zeta. \quad (4.5)$$

Si bien es cierto que la condición (4.5) impone una cierta restricción sobre la clase de sistemas de un grado de libertad que pueden ser abordados es lo suficientemente general para considerar una subclase de los sistemas subamortiguados $\frac{1}{2} \leq \zeta < 1$, así como también considerar los sistemas críticamente amortiguados $\zeta = 1$ y los sistemas sobreamortiguados $\zeta > 1$. Adicionalmente, la condición (4.5) proporciona una cota superior para el retardo de tiempo h , las cual puede ser un tanto conservativa con respecto al valor crítico del retardo para la estabilidad exponencial del sistema (4.2).

4.1.1. Control PD

Como mencionamos anteriormente, el problema de control consiste en seleccionar adecuadamente las ganancias de retroalimentación g_1 y g_2 asegurando la estabilidad exponencial de (4.1) bajo la presencia inevitable del retardo de tiempo $h > 0$. Por otro lado, notemos que para $h = 0$ la ecuación (4.1) es exponencialmente estable si, y sólo si,

$$b_1 > -\omega_n^2 \quad \text{y} \quad b_2 > -2\zeta \omega_n, \quad (4.6)$$

Varios trabajos abordan el problema fijando o seleccionando primero las ganancias de retroalimentación tales que satisfagan la condición (4.6) y posteriormente calculan el valor del retardo crítico que garantice la estabilidad exponencial de (4.1); véase, por ejemplo [1, 2, 29].

Por otro lado, en los resultados del capítulo anterior (Proposición 3.9) presentamos un enfoque y metodología diferente, ya que en nuestros resultados proporcionamos una manera de seleccionar el valor de los parámetros b_1 y b_2 para cualquier valor del retardo $h > 0$ satisfaciendo la condición (4.5). Por consiguiente existen casos con $h > 0$ tales que (4.1) es exponencialmente estable y la condición (4.6) no se satisface. Para ilustrar lo anterior, consideremos el siguiente ejemplo: sea

$m = 2 \text{ kg}$, $c = 10 \text{ N}\cdot\text{seg/m}$, $k = 50 \text{ N/m}$, entonces $\omega_n = 5 \text{ rad/seg}$ y $\zeta = 0.5$. Así de la condición (4.5) se tiene

$$h < \text{mín} \{ 0.0343, 0.9425 \} \text{ seg.} \quad (4.7)$$

Seleccionando $h = 0.034 \text{ seg}$, se obtiene la región de estabilidad Θ , véase la Figura 4.1. Este ejemplo ilustra nuevamente lo comentado referente a la Proposición 3.9, la cual nos permite determinar la región de estabilidad de (4.2) en el espacio de parámetros (b_1, b_2) para cualquier valor de retardo de tiempo $h > 0$, satisfaciendo la condición (4.7).

De la Figura 4.1 se aprecia como la condición (4.6) determina la región D , es decir, la región de estabilidad para el sistema sin retardo. Por otro lado, existe la región $M \subset \Theta$ tal que, para cualquier par $(b_1, b_2) \in M$ el sistema (4.1) es exponencialmente estable, aunque la condición (4.6) no se satisfaga. Seleccionando $b_1 = -20 \text{ N/m}$ y $b_2 = -5.2 \text{ N}\cdot\text{seg/m}$ ($g_1 = -40\text{N}$ y $g_2 = -10.4\text{N}$) dentro de la región M , véase Figura 4.2, se tiene que el sistema en lazo cerrado (4.1) es exponencialmente estable tal como se observa su comportamiento en la Figura 4.3.

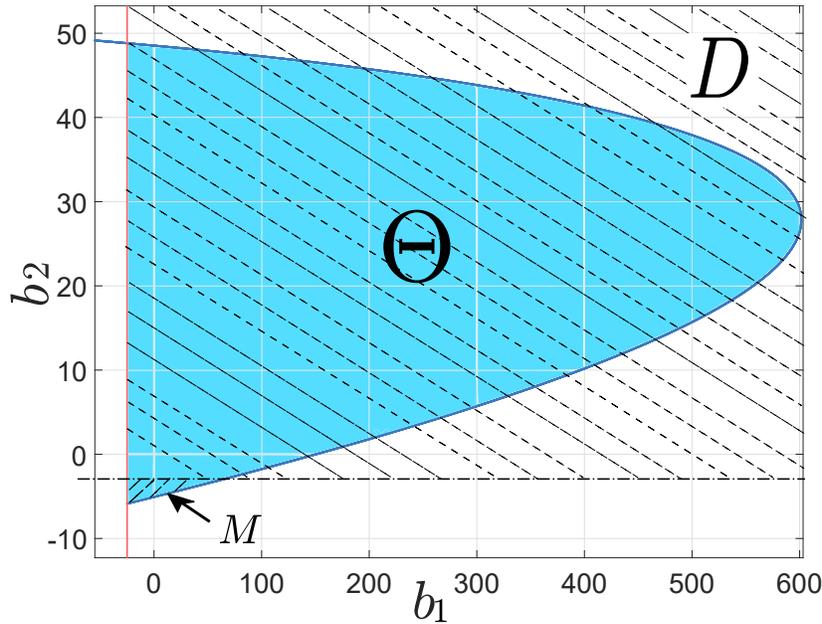


Figura 4.1: Región de estabilidad Θ y región D considerando $m = 2 \text{ kg}$, $c = 10 \text{ N}\cdot\text{seg/m}$, $k = 50 \text{ N/m}$ y $h = 0.034 \text{ seg}$.

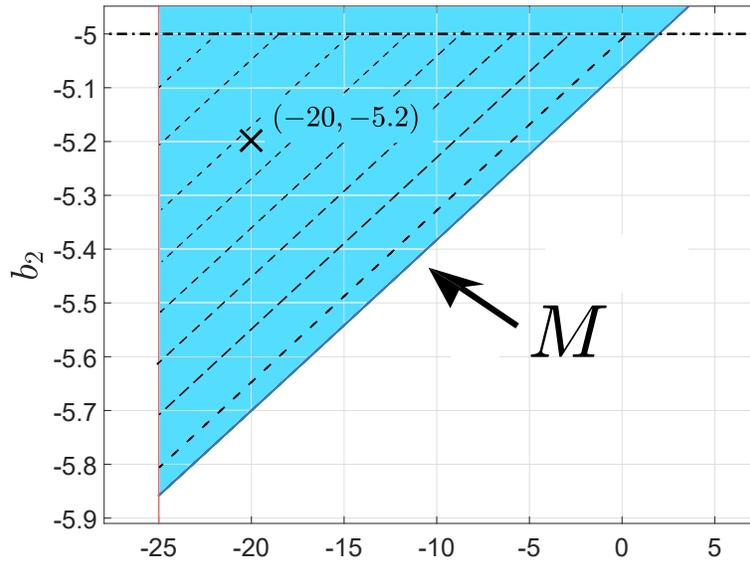


Figura 4.2: Región $M \subset \Theta$ para $m = 2$ kg, $c = 10$ N·seg/m, $k = 50$ N/m y $h = 0.034$ seg.

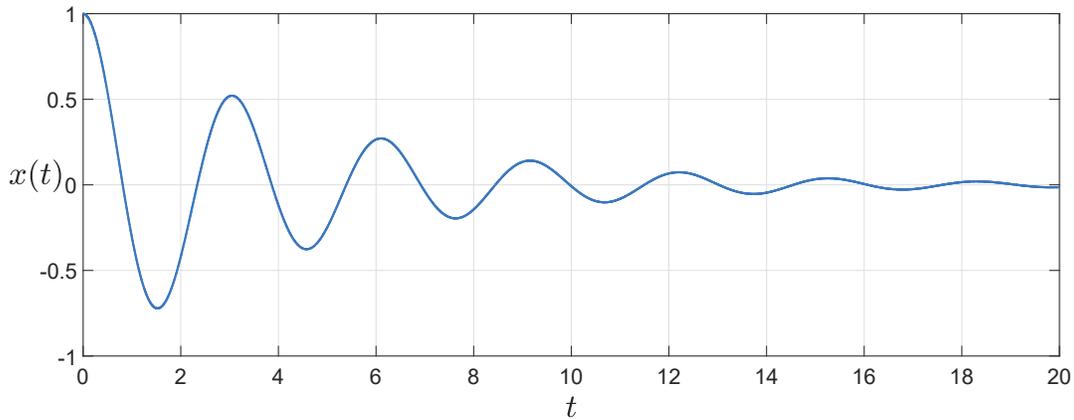


Figura 4.3: Respuesta en el tiempo de (4.1) para los valores de ganancias $g_1 = -40$ N y $g_2 = -10.4$ N.

4.1.2. Resonador retardado

Dado que la Proposición 3.9 caracteriza analíticamente la región de estabilidad de la ecuación (4.1) bajo las condiciones dadas en (4.5), es que ahora proponemos un Resonador Retardado usando retroalimentación de posición y velocidad. Para esta configuración DR, el problema ahora consiste en seleccionar adecuadamente las ganancias g_1 , g_2 y el retardo $h > 0$ tal que el sistema (4.1) tenga

soluciones oscilatorias a la frecuencia deseada. De la demostración en la Proposición 3.9 tenemos que si $(b_1, b_2) \in \partial\Theta$, entonces existe $\omega \in (0, \hat{\omega})$, donde $\hat{\omega}$ es solución de la ecuación

$$\frac{\omega_n}{\omega} = \frac{2\omega_n \zeta \sin(\omega h) - \omega \cos(\omega h)}{\cos(\omega h) - 1}, \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right),$$

tal que $q(s)$ tiene un par de ceros imaginarios puros $s = \pm i\omega$, y todos los demás ceros (un número infinito) se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo. En otras palabras, esta ubicación particular de los ceros del cuasipolinomio implica que el sistema (4.1) tenga soluciones oscilatorias estables a la frecuencia ω .

De acuerdo con lo anterior es que proponemos el siguiente algoritmo para el diseño analítico de un resonador retardado usando retroalimentación de posición y velocidad:

1. Dados m, k y c , calcular $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \geq \frac{1}{2}$.
2. Seleccionar el retardo de tiempo $h > 0$ satisfaciendo la desigualdad:

$$h < \min \left\{ \frac{3\pi}{4\omega_n \zeta}, \frac{2\zeta}{(\sqrt{2} + 1)^2 \omega_n} \right\}. \quad (4.8)$$

3. Calcular $\hat{\omega}$ como solución numérica de la ecuación

$$\frac{\omega_n}{\omega} = \frac{2\omega_n \zeta \sin(\omega h) - \omega \cos(\omega h)}{\cos(\omega h) - 1}, \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right). \quad (4.9)$$

4. Seleccionar la frecuencia de oscilación deseada $\omega_d \in (0, \hat{\omega})$.
5. Calcular los valores $b_1(\omega_d)$ y $b_2(\omega_d)$ de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} b_1(\omega_d) &= 2\omega_n \zeta \omega_d \sin(\omega_d h) + (\omega_d^2 - \omega_n^2) \cos(\omega_d h), \\ b_2(\omega_d) &= \frac{1}{\omega_d} \left((\omega_d^2 - \omega_n^2) \sin(\omega_d h) - 2\omega_n \zeta \omega_d \cos(\omega_d h) \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

6. Finalmente, calcular las ganancias de retroalimentación del controlador $g_1 = b_1 m$ y $g_2 = b_2 m$.

Es claro que el algoritmo propuesto es válido para $\zeta \geq \frac{1}{2}$ y para frecuencias $\omega_d \in (0, \hat{\omega})$. Como ya mencionamos al inicio, existen diversas configuraciones DR propuestas en la literatura, de modo que para establecer una cierta comparación revisemos las conclusiones mencionadas en [40] sobre configuraciones DR para posición, velocidad y aceleración, las cuales son las siguientes:

- a) La retroalimentación de aceleración es válida para $\omega_d > 0.8\omega_n$ y $\zeta < 0.71$.
- b) La retroalimentación de velocidad es válida para todo $\zeta > 0$ pero $\omega_d \in (0.3\omega_n, \omega_n)$.
- c) La retroalimentación de posición es válida para todo $\omega_d > 0$ cuando $\zeta > 0.71$ ó es válida para todo $\zeta > 0$ cuando $\omega_d > 0.63\omega_n$.

Consideremos el mismo ejemplo numérico de la subsección anterior, es decir, sea $m = 2$ kg, $c = 10$ N·seg/m, $k = 50$ N/m. Entonces $\omega_n = 5$ rad/seg y $\zeta = 0.5$. Seleccionando $h = 0.034$ s la condición (4.8) se satisface. Resolviendo numéricamente la ecuación (4.9) obtenemos $\hat{\omega} = 49.0705$ rad/seg. De modo que nuestro rango de oscilación permitido es $(0, 49.0705)$ rad/seg. Seleccionando $\omega_{d1} = 1.45$ rad/seg de la expresión (4.10) obtenemos $b_1 = -22.5086$ N/m y $b_2 = -5.7792$ N/m. Por último calculamos las ganancias del controlador $g_1 = -45.02$ N y $g_2 = -11.56$ N obteniendo el correspondiente comportamiento oscilatorio del sistema (4.1) a la frecuencia deseada ω_{d1} , véase Figura 4.4.

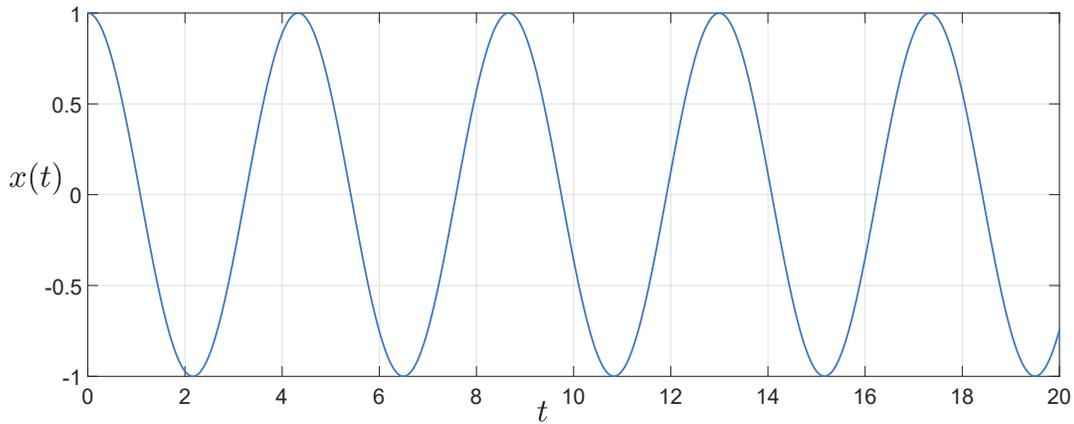


Figura 4.4: Respuesta en el tiempo de (4.1) para los valores de ganancias $g_1 = -45.02$ N y $g_2 = -11.56$ N.

Cabe resaltar que para este ejemplo numérico ninguna de las configuraciones DR mostradas en [40] puede asignar la frecuencia $\omega_d = 1.45$ rad/seg, sin embargo, parece que la configuración DR presentada en [17] si puede. Esta configuración consiste en una retroalimentación de la velocidad retardada y de la posición no retardada, es decir, consideran el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = g_px(t) - g_vx'(t-h), \quad (4.11)$$

donde la ganancia retroalimentada de posición está dada por $g_p = k \left[1 - \alpha \left(\frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2 \right]$, con α siendo un parámetro libre el cual puede ser usado con propósitos de optimización. Así mismo en [17] se presentan las siguientes reglas de sintonización del DR, para la ganancia retroalimentada de velocidad y para el retardo:

$$g_v = \frac{k}{\omega_n^2 \omega_d} \sqrt{[2\omega_n \zeta \omega_d]^2 + [\omega_n^2(1 - k g_p) - \omega_d^2]^2}, \quad (4.12)$$

$$h = \frac{1}{\omega_d} \left\{ \arctan \left[\frac{\omega_n (\omega_n^2(1 - k g_p) - \omega_d^2)}{2\zeta \omega_d} \right] + 2(\ell - 1)\pi \right\}, \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Observemos que el caso computacional más simple, pero aún así general, se obtiene cuando $\alpha = 1$. De este modo, siguiendo las reglas de sintonización (4.12)-(4.13) para la frecuencia $\omega_{d1} = 1.45$ rad/seg, con $\alpha = 1$ y eligiendo $\ell = 2$, se obtienen las ganancias $g_p = 45.79$ N, $g_v = 10$ N y el retardo $h = 4.33$ s. En la Figura 4.5 se gráfica la respuesta del sistema (4.11), donde se aprecia como el comportamiento oscilatorio estable es alcanzado después de los 80 s con una amplitud reducida, el cual no es un comportamiento deseado para un resonador retardado, en contraste con la Figura 4.4 donde el DR con retroalimentación de posición y velocidad se comporta como un oscilador ideal a la frecuencia deseada $\omega_{d1} = 1.45$ rad/seg.

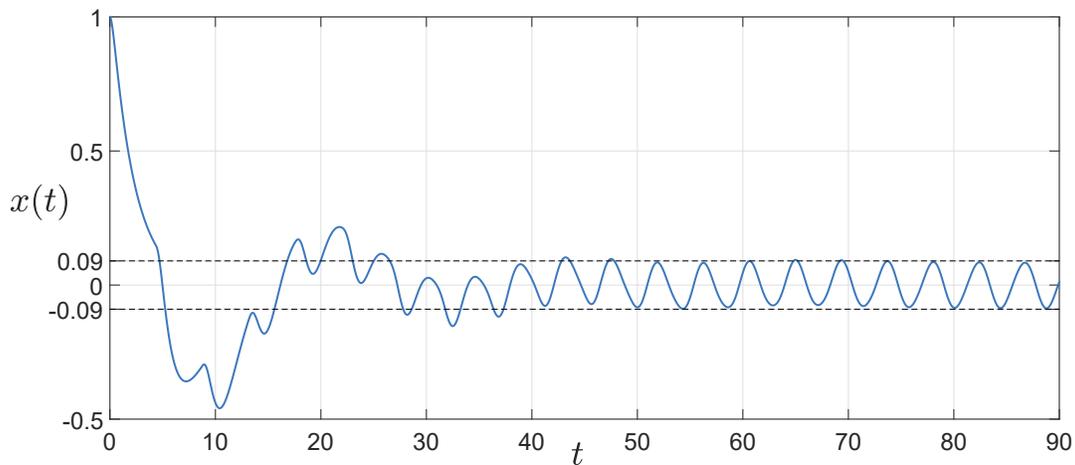


Figura 4.5: Respuesta en el tiempo de (4.11) para los valores de ganancias $g_p = -45.79$ N, $g_v = 10$ N.

Por otro lado, es bien sabido que una de las principales ventajas del resonador retardado como control activo de vibraciones es que su frecuencia de oscilación puede ser modificada mediante la selección de las ganancias de retroalimentación, y claramente este es el caso del resonador retardado de posición y velocidad propuesto. Adicionalmente, es importante resaltar que en contraste con las configuraciones DR existentes tanto las ganancias de retroalimentación como el retardo h deben ser cambiadas para asignar una nueva frecuencia de oscilación, mientras que en nuestro caso es posible asignar una frecuencia de oscilación deseada (en el rango de operación permitido) solamente cambiando las ganancias g_1 y g_2 para el mismo valor del retardo h . Esta característica puede facilitar la implementación física del resonador retardado, ya que no se requiere un cambio en el periodo de muestreo o cálculos adicionales al cambiar la frecuencia de oscilación deseada.

Para ilustrar lo anterior consideremos nuevamente el mismo ejemplo numérico, con el mismo valor de retardo $h = 0.034$ s. Primero consideremos $\omega_{d_2} = 15$ rad/seg, la cual pertenece al rango de operación permitido $\omega_d \in (0, 49.07)$ rad/seg, véase la Figura 4.6, donde se gráfica la región de estabilidad generada en el espacio (b_1, b_2) . Para esta frecuencia obtenemos los valores $b_1 = 211.008$ N/m y $b_2 = 2.2117$ N/m y calculamos las ganancias de retroalimentación $g_1 = 422.02$ N y $g_2 = 4.42$ N. En la Figura 4.7 se gráfica la respuesta en el tiempo de (4.1).

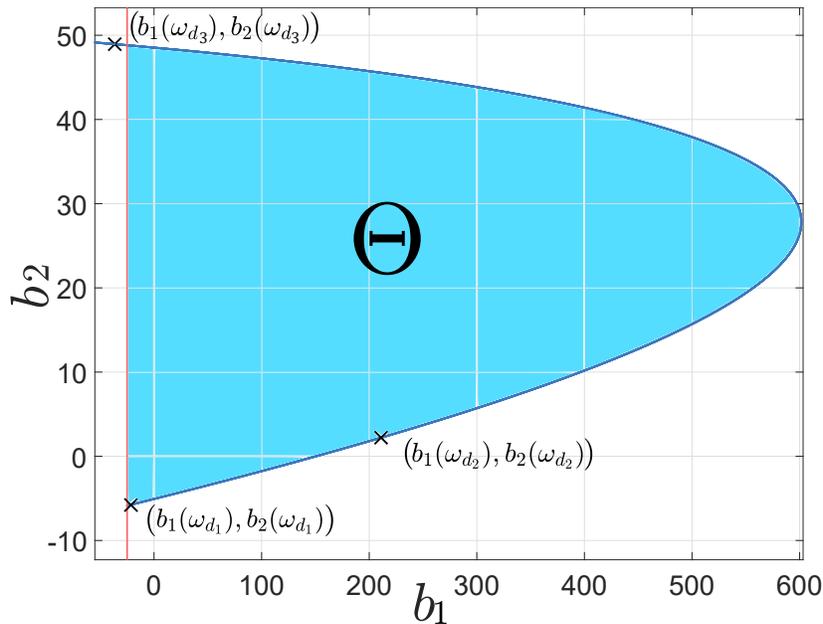


Figura 4.6: Región de estabilidad Θ de (4.1) y los puntos $(b_1(\omega_{d_j}), b_2(\omega_{d_j}))$ para: $\omega_{d_1} = 1.45$, rad/seg $\omega_{d_2} = 15$ rad/seg y $\omega_{d_3} = 49.2$ rad/seg

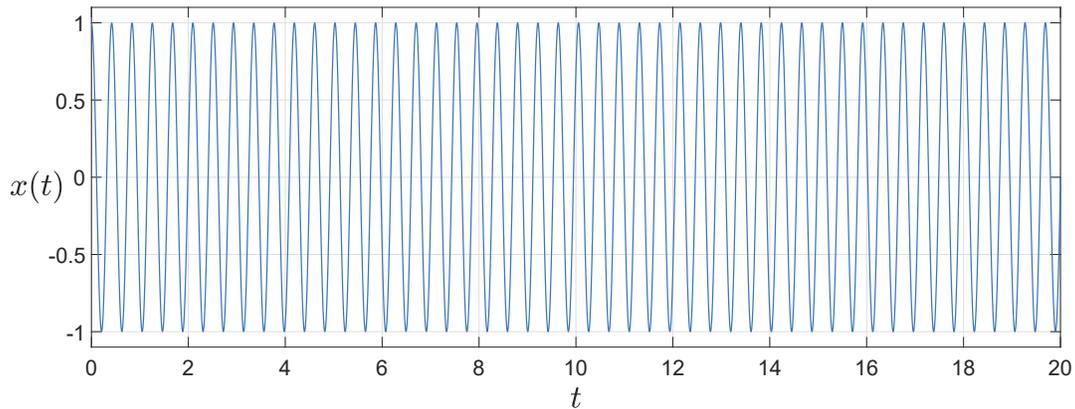


Figura 4.7: Respuesta en el tiempo de (4.1) para los valores de ganancias $g_1 = 422.02$ N y $g_2 = 4.42$ N.

Es claro que si seleccionamos una frecuencia que no está en el rango permitido, es decir, $\omega_d \notin (0, \hat{\omega})$ entonces obtendremos un comportamiento inestable en el sistema (4.1). Tomando $\omega_{d3} = 49.2$ rad/seg ya no estamos en el rango permitido de oscilación, al calcular las ganancias de retroalimentación obtenemos $g_1 = -72.98$ N y $g_2 = 97.88$ N, véase la Figura 4.6, mientras que en la Figura 4.8 se gráfica la respuesta en el tiempo de (4.1) el cual como mencionamos presenta un comportamiento inestable.

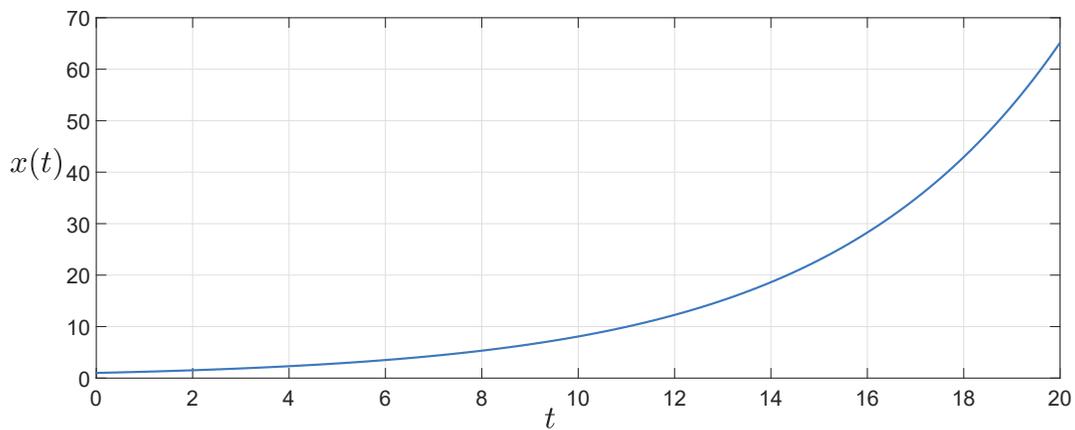


Figura 4.8: Respuesta en el tiempo de (4.1) para los valores de ganancias $g_1 = -72.98$ N y $g_2 = 97.88$ N.

4.2. Diseño e implementación experimental del DR con retroalimentación de posición y velocidad

Recordemos que la idea principal detrás del DR es introducir el retardo para inducir soluciones oscilatorias al sistema de un grado de libertad, en otras palabras hacer que el DR se convierta en un oscilador a pesar del amortiguamiento presente y entonces poder ser utilizado como un absorbedor de vibraciones ideal al interconectarlo a un sistema primario sujeto a perturbaciones (vibraciones). En este contexto, resulta interesante realizar la validación experimental y corroborar como el resonador retardado de posición y velocidad propuesto induce soluciones oscilatorias en un sistema mecánico de un grado de libertad real y por consiguiente evaluar sus capacidades como un absorbedor de vibraciones cuando es interconectado a un sistema primario.

4.2.1. Plataforma ECP210

Para realizar la validación experimental del resonador retardado con retroalimentación de posición y velocidad se utilizó la plataforma experimental *Educational Control Products*® modelo “210a”, véase Figura 4.9.

La plataforma consta de 3 carros de masas interconectados por resortes cilíndricos bidireccionales, donde cada carro posee un sistema de rodamientos de bolas antifricción, de modo que el amortiguamiento viscoso se describe como un amortiguador lineal. La medición de los desplazamientos se logra a partir del uso de codificadores ópticos (rotativos) de alta resolución que cuentan con 4000 RPM en cuadraturas. Estos se conectan a través de mecanismos de cable-polea con el fin de medir con precisión las posiciones reales de los carros. La acción de control (fuerza) es obtenida mediante el uso de un servomotor de tipo sin escobillas conectado a un mecanismo de piñon-cremallera. Mientras que la fuerza de perturbación externa que actúa sobre el sistema primario es generado de un pequeño motor de corriente continua conectado a una placa de aluminio y un arreglo de poleas y cables. Los procesos de medición de la señal y el control se logra mediante el uso de una placa DSP de alta velocidad (frecuencias de muestreo de hasta 1.131 kHz), instalada en una ordenador con el sistema operativo Windows 7® y el software Matlab/Simulink® utilizando la caja de comunicación *Real Time Windows Target*® (RTWT) proporcionada por el fabricante, permitiendo la ejecución en tiempo real con la configuración experimental.

Adicionalmente, la plataforma ECP 210a posee las siguientes características:

- 2 DACs de 16 bits con un rango ± 10 volts (-32768 , $+32768$ cuentas).



(a) Vista frontal



(b) Vista superior

Figura 4.9: Plataforma experimental ECP 210a.

- Capacidad para realizar barridos frecuenciales de hasta 25 Hz.
- Posee un tiempo de muestreo mínimo de 0.000884 s.

Para todos los experimentos y validaciones se eligió una frecuencia de muestreo de 1 kHz para todo el sistema. Adicionalmente, la medición de velocidades se calculan de manera numérica utilizando el software empleando el método de Euler con un intervalo de tiempo constante de 1 ms.

4.2.1.1. Estimación de los parámetros

Como en cualquier diseño e implementación de control, es necesario realizar la estimación de los parámetros reales del sistema a implementar. En este caso procederemos primero a validar experimentalmente si la ley de control con retroalimentación retardada de posición y velocidad induce soluciones oscilatorias en el sistema mecánico de un grado de libertad (sistema masa-resorte-amortiguador).

Con el fin de identificar la constante de rigidez k de la plataforma ECP 210a se realizaron varias

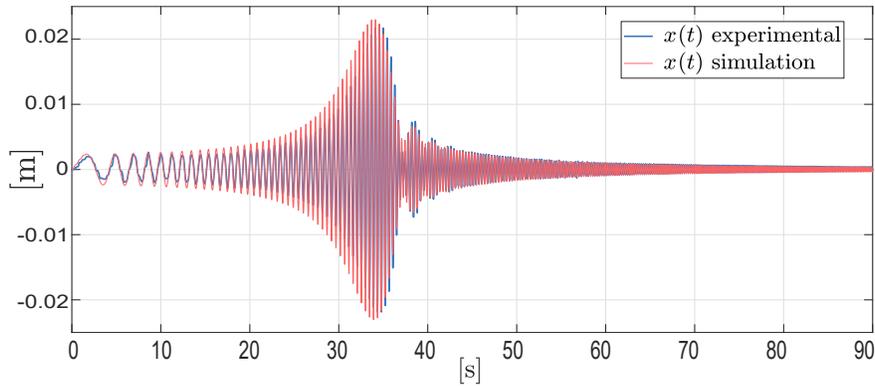
pruebas aplicando como entrada una función escalón cada una de diferente magnitud a través del servomotor registrando los desplazamientos resultantes. Entonces a partir de estos datos estimamos el valor de $k = 355.6 \text{ N/m}$.

Posteriormente, se aplicó al sistema de un grado de libertad una función de tipo sinusoidal como entrada, abarcando un rango de frecuencia desde 0.1 Hz hasta 6 Hz (barrido frecuencial), con una amplitud de 0.77 N, midiendo los desplazamientos del sistema durante un lapso de 90 segundos. Utilizando los datos recopilados, se estimaron los valores de $\omega_n = 13.823 \text{ rad/seg}$ y $\zeta = 0.0485$ mediante el uso del método *Peak Picking* [5, 14]. De estos valores calculamos $m = 1.861 \text{ kg}$ y $c = 2.495 \text{ N}\cdot\text{seg/m}$. Así, en la Tabla 4.2.1.1 se muestran los parámetros estimados de la plataforma ECP 210a para el sistema mecánico de un grado de libertad. Si bien es cierto que existen varias formas para estimar los parámetros de un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador, por ejemplo los métodos de análisis modal “curve fitting” y “circle fit” [5, 14], elegimos el método “peak picking” por su simple y fácil implementación.

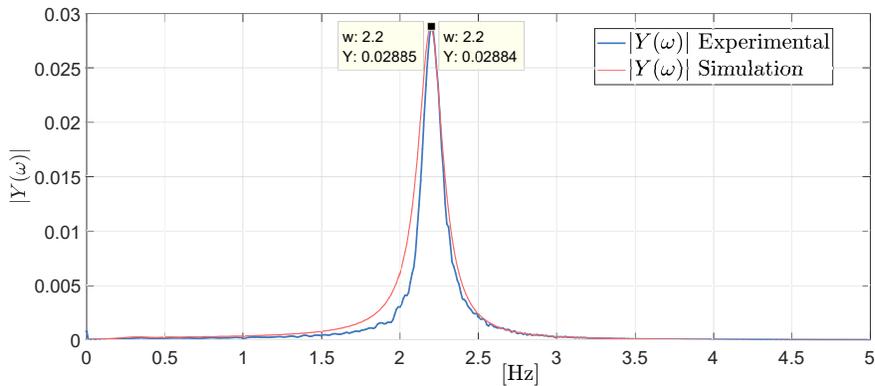
Por último, realizamos una simulación numérica del sistema mecánico masa-resorte-amortiguador comparando con los resultados experimentales obtenidos de la plataforma ECP 210a, primero utilizamos como entrada la misma función de tipo sinusoidal utilizada en los resultados experimentales, de las mediciones obtenidas aplicamos la transformada rápida de Fourier (FFT) obteniendo la amplitud del espectro de ambas señales. En la Figura 4.10 se muestra la comparación de la simulación y los datos experimentales mostrando una validación de los parámetros estimados razonable.

Parámetros	Valores
m	1.861 kg
c	2.495 N·seg/m
k	355.6 N/m

Tabla 4.1: Estimación de parámetros de la Plataforma ECP210a para el sistema de un grado de libertad.



(a)



(b)

Figura 4.10: Validación experimental de los parámetros estimados de la plataforma experimental ECP 210a para el sistema de un grado de libertad.

4.2.2. Diseño e implementación DR

Una vez que se tuvieron los valores estimados realizamos el diseño y la implementación experimental del DR con posición y velocidad retardada en la plataforma experimental ECP 210a, véase Figura 4.11

La configuración experimental de la Figura 4.11 satisface la estructura de un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador de la forma

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = u(t), \quad (4.14)$$

donde $u(t)$ es la ley de control a implementar, en el caso del DR es la retroalimentación retardada de posición y velocidad. La señal de control se realiza utilizando el servomotor principal de la plataforma ECP 210a con la finalidad de evitar limitaciones físicas al momento de validar el DR.



Figura 4.11: Configuración de un sistema mecánico de un grado de libertad en la plataforma ECP 210a.

Es importante notar que el factor de amortiguamiento estimado para el sistema masa-resorte-amortiguador real es de $\zeta = 0.0485$. Por otro lado, el algoritmo propuesto para el DR con posición y velocidad retardado es válido para $\zeta \geq 0.5$, por consiguiente para aplicar el algoritmo correctamente proponemos inyectar amortiguamiento al sistema de manera virtual mediante el uso de una retroalimentación de velocidad adicional, entonces la ley de control está dada por

$$u(t) = -g_1x(t-h) - g_2x'(t-h) - k_d x'(t) . \quad (4.15)$$

donde el término adicional $k_d x'(t)$ corresponde a la ganancia virtual de la inyección de amortiguamiento. Por consiguiente, el sistema en lazo cerrado (4.14)-(4.15) puede reescribirse como

$$x''(t) + 2\bar{\zeta}\omega_n x'(t) + \omega_n^2 x(t) + b_1 x(t-h) + b_2 x'(t-h) = 0 , \quad (4.16)$$

donde $\bar{\zeta} = \zeta + \zeta_d$, con $\zeta_d = \frac{k_d}{2m\omega_n}$. Cálculos sencillos muestran que si

$$k_d \geq (1 - 2\zeta)m\omega_n , \quad (4.17)$$

entonces $\bar{\zeta} \geq 0.5$ se satisface y por consiguiente es posible aplicar el algoritmo DR para el sistema (4.16). De los valores estimados dados en la Tabla 4.2.1.1 se tiene que $k_d \geq 23.23$ N·seg/m, en consecuencia para los experimentos realizados elegimos $k_d = 23.23$ N·seg/m como ganancia de inyección virtual de amortiguamiento. Ahora es factible aplicar el algoritmo de diseño del DR propuesto simplemente cambiando ζ por $\bar{\zeta}$. De los valores $\omega_n = 13.8232$ rad/seg y $\bar{\zeta} = 0.5$ obtenemos el retardo de la desigualdad (4.8)

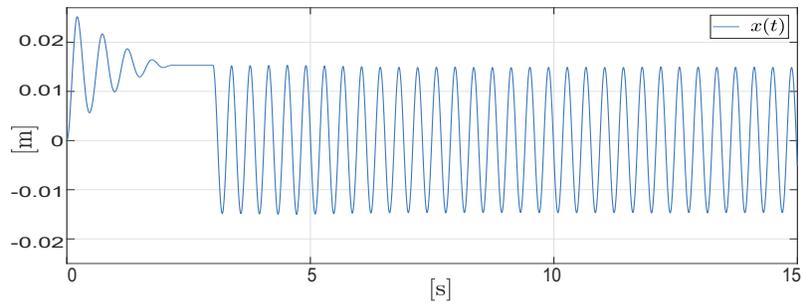
$$h < \text{mín} \{0.3409, 0.0124\} \text{ seg.}$$

Tomando el valor para el retardo $h = 0.012$ seg, luego al resolver numéricamente la ecuación (4.9) se obtiene $\hat{\omega} = 139.998$ rad/seg. Entonces la frecuencia de oscilación deseada $\omega_d \in (0, 139.998)$

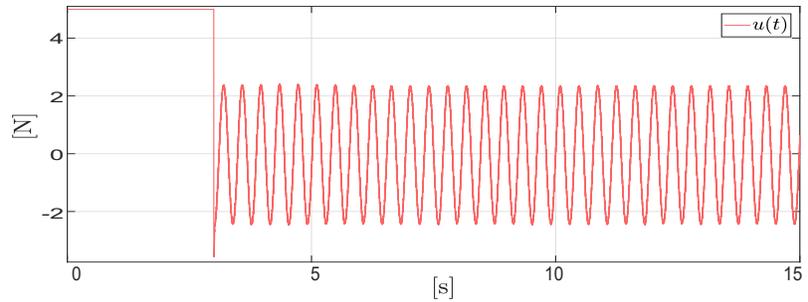
rad/seg. Sin embargo, la plataforma experimental ECP 210a posee un rango de efectivo de operación de 0 a 50.26 rad/seg (0 a 8Hz), de modo que es necesario restringir los experimentos a esas frecuencias de oscilación, es decir, $\omega_d \in (0, 50.26) \subset (0, 139.998)$ rad/seg.

Para la configuración experimental se utilizó un período de muestreo de 1 ms (1 KHz). Inicialmente en los 3 primeros segundos el sistema se encuentra en lazo abierto aplicando como entrada una función tipo escalón unitario de magnitud 5N . Pasados los 3 segundos se aplica la ley de control diseñada. En cuanto a la implementación de la retroalimentación de velocidad, se hizo uso de la aproximación lineal de la derivada, junto con un filtro simple de primer orden (filtro pasa bajas) para eliminar cualquier ruido no deseado que pudiese provenir del codificador óptico utilizado al medir los desplazamientos. Adicionalmente, como es habitual en cualquier implementación experimental se ha realizado un pequeño ajuste de las ganancias de retroalimentación alrededor de los valores calculados previamente.

Para la primera validación experimental consideremos la frecuencia de oscilación $\omega_{d_1} = 16.52$ rad/seg. Entonces calculamos de la ecuación (4.10) los valores de $b_1 = 125.8412$ y $b_2 = -12.5697$. Finalmente calculamos las ganancias de retroalimentación $g_1 = 234.22$ N/m y $g_2 = -23.39$ N·seg/m. En la Figura 4.12 se muestran los resultados experimentales, como se puede apreciar la ley de control induce el comportamiento DR deseado teniendo oscilaciones estables a la frecuencia deseada. Recordemos que una de las ventajas o característica especial del DR de posición y velocidad retardada propuesto es que puede modificarse su frecuencia de oscilación únicamente cambiando las ganancias de retroalimentación, sin necesidad de cambiar el valor del retardo, lo cual en este caso es bastante útil en la implementación del mismo. Para corroborarlo consideremos ahora la frecuencia de oscilación $\omega_{d_2} = 18.85$ rad/seg, al aplicar el algoritmo obtenemos las ganancias de retroalimentación $g_1 = 406.58$ N/m y $g_2 = -21.43$ N·seg/m. En la Figura 4.12 se muestran los resultados experimentales, corroborando nuevamente que se inducen oscilaciones estables a la nueva frecuencia deseada.

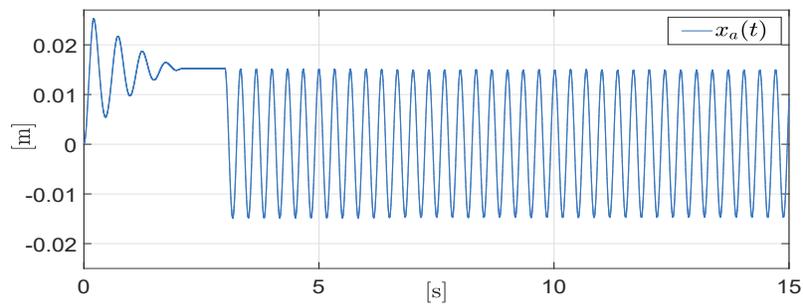


(a)

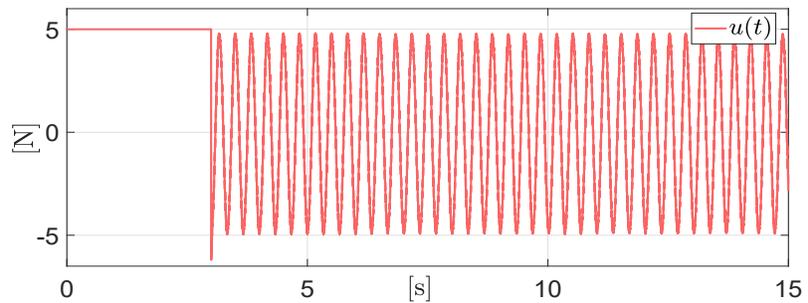


(b)

Figura 4.12: (a) Validación experimental para $\omega_{d1} = 16.52$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 234.2$ N/m y $g_2 = -23.39$ N·seg/m.



(a)



(b)

Figura 4.13: (a) Validación experimental para $\omega_{d2} = 18.85$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 406.58$ N/m y $g_2 = -21.43$ N·seg/m.

4.2.3. Absorción activa de vibraciones usando el DR

Como comentamos anteriormente la idea detrás del DR es introducir el retardo como parámetro de control para hacer que la dinámica del sistema de un grado de libertad se convierta en un oscilador y entonces poder ser utilizado como un absorbedor ideal de vibraciones al interconectarlo a un sistema primario sujeto a perturbaciones (vibraciones), véase Figura 4.14.

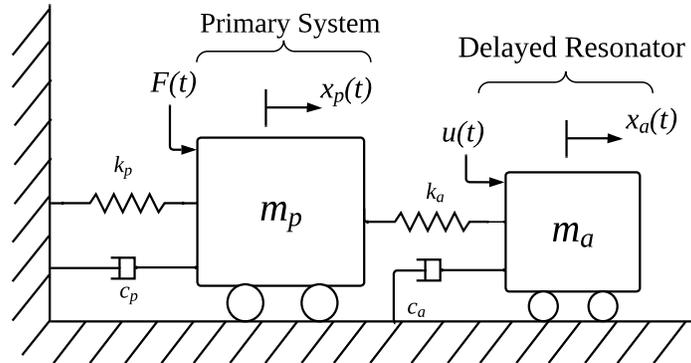


Figura 4.14: Esquema de un sistema interconectado de 2 grados de libertad.

De la Figura 4.14 las ecuaciones de movimiento del sistema interconectado de 2 grados de libertad están dadas por

$$\begin{aligned} m_p x_p''(t) + c_p x_p'(t) + k_p x_p(t) + k_a (x_p(t) - x_a(t)) &= F(t) , \\ m_a x_a''(t) + c_a x_a'(t) - k_a (x_p(t) - x_a(t)) &= u(t) , \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $x_p(t)$, $x_a(t) \in \mathbb{R}$ son los desplazamientos del sistema primario y sistema secundario (resonador retardado) respectivamente. Los parámetros m_p , c_p y k_p representan la masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente del sistema primario, mientras que m_a , c_a y k_a su equivalente en el sistema secundario. En este contexto $F(t)$ representa la fuerza externa que actúa sobre el sistema primario y $u(t)$ es la ley de control basada en el resonador retardado de posición y velocidad, en este caso para la validación experimental la ley de control está dada por (4.15).

Es bien sabido de la teoría clásica de vibraciones, que si la frecuencia de resonancia del sistema secundario coincide con la frecuencia de la fuerza externa de perturbación sobre el sistema primario entonces en principio todas las vibraciones en el sistema primario son idealmente canceladas (por el sistema secundario), por tal motivo suele referirse al sistema secundario como un absorbedor de vibraciones, véase [5, 14].

Es claro que este principio puede ser usado por el resonador retardado de posición y velocidad

propuesto para la absorción activa de vibraciones, en otras palabras, si se diseña el resonador retardado para que oscile a la frecuencia de la fuerza externa de perturbación, entonces, en principio las vibraciones del sistema primario se cancelarían.

Para corroborar experimentalmente las capacidades del resonador retardado de posición y velocidad en la absorción activa de vibraciones añadimos otro sistema masa-resorte-amortiguador como sistema primario por medio del resorte cilíndrico bidireccional al sistema de un grado de libertad anterior en la plataforma ECP 210a, véase Figura 4.15.

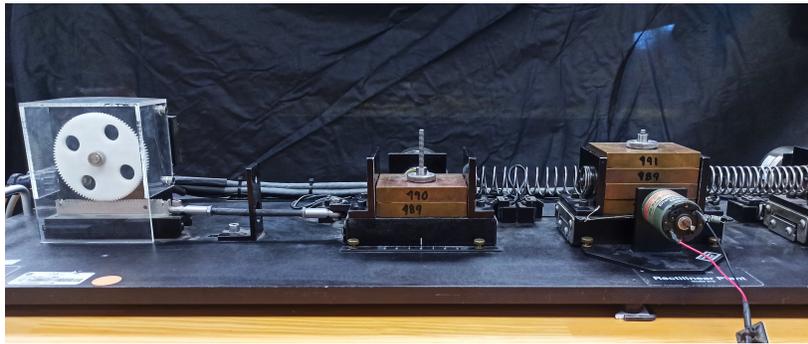


Figura 4.15: Configuración de un sistema de 2 grados de libertad en la plataforma ECP 210a.

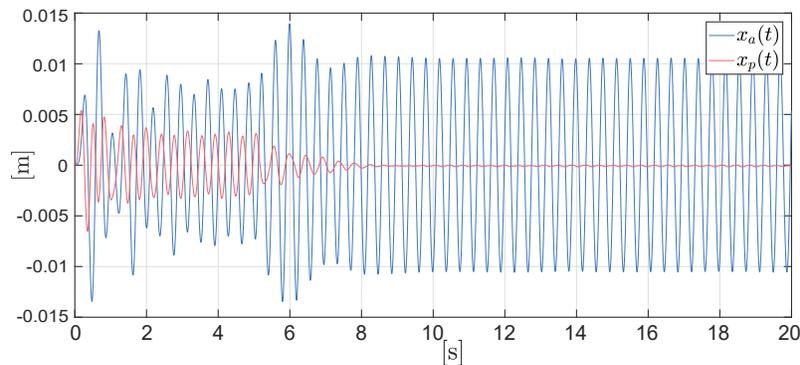
Como se mencionó anteriormente, se utiliza un pequeño motor de corriente directa para generar la fuerza de perturbación externa al sistema primario. Los valores de los parámetros del sistema primario se estimaron siguiendo la misma metodología presentada en la subsección anterior. Los valores de los parámetros estimados del sistema primario se muestran en la Tabla 4.2.3

Parámetros	Valores
m_p	2.793 kg
c_p	6.327 N·seg/m
k_p	763.8 N/m

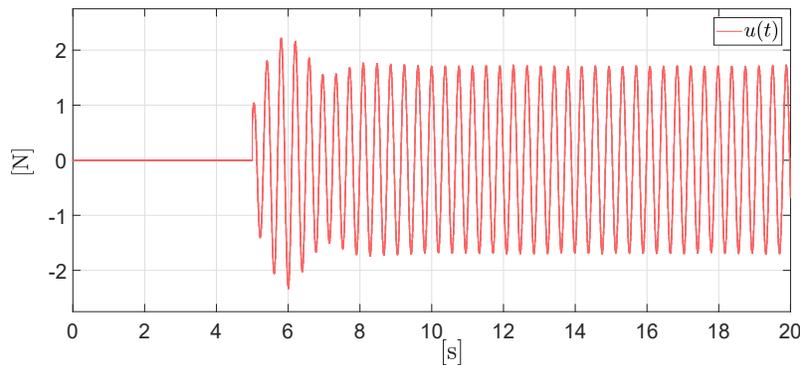
Tabla 4.2: Estimación de parámetros de la Plataforma ECP 210a para el sistema de un grado de libertad.

De modo que, el sistema primario posee una frecuencia natural de $\omega_p = 16.52$ rad/seg y un factor de amortiguamiento $\zeta_p = 0.0685$.

En la configuración experimental, el sistema primario es perturbado por la fuerza externa $F(t) = 4\sin(\omega t)$ N durante 20 s. Inicialmente en los 5 primeros segundos el sistema interconectado se encuentra en lazo abierto, pasados los 5 segundos se aplica la ley de control. Realizamos dos experimentos para dos frecuencias distintas en la fuerza externa de perturbación, en el primer experimento consideramos la frecuencia de perturbación $\omega = 16.52$ rad/seg, mientras que el segundo experimento la frecuencia de perturbación es $\omega = 18.85$ rad/seg. Evidentemente ya hemos diseñado el resonador retardado de posición y velocidad para estas frecuencias en la subsección anterior. Los resultados experimentales del sistema interconectado de 2 grados de libertad se muestran en las Figuras 4.16 y 4.17.

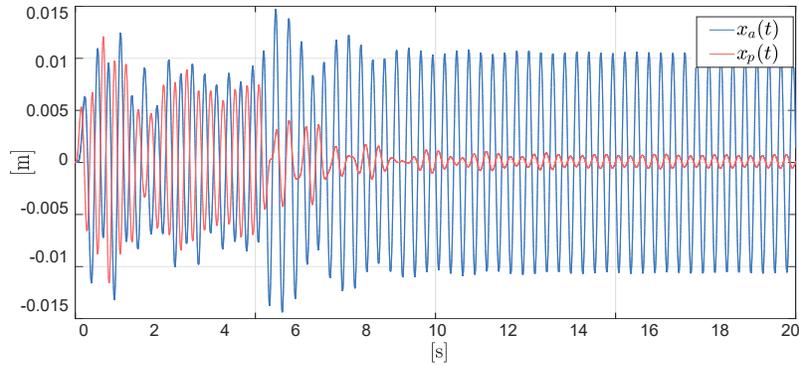


(a)

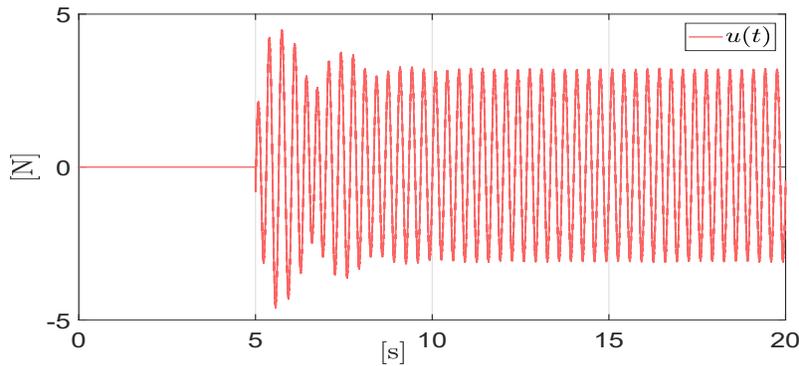


(b)

Figura 4.16: (a) Validación experimental del sistema primario perturbado a la frecuencia $\omega = 16.52$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 234.2$ N/m y $g_2 = -23.39$ N·seg/m.



(a)



(b)

Figura 4.17: (a) Validación experimental del sistema primario perturbado a la frecuencia $\omega = 18.85$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 406.58$ N/m y $g_2 = -21.43$ N·seg/m.

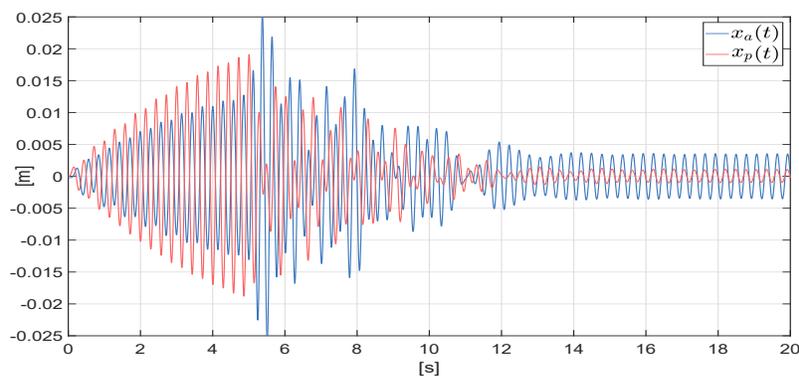
En la Figura 4.16 se aprecia como durante los primeros 5 segundos existe una cierta atenuación en las vibraciones del sistema primario, esto se debe a que el sistema secundario actúa como un absorbedor pasivo de vibraciones, así mismo una vez pasada los 5 segundos se observa una notable disminución, ya que el resonador retardado comienza a actuar como un absorbedor activo de vibraciones diseñado a la frecuencia de la fuerza externa de perturbación sobre el sistema primario.

Por otro lado, en la Figura 4.17 durante los primeros 5 segundos el sistema primario presenta muy poca o nula atenuación de las vibraciones, esto debido a que la frecuencia de perturbación ejercida por la fuerza externa ya no se encuentra en rango de atenuación efectivo del sistema secundario al actuar como un absorbedor pasivo, sin embargo, una vez transcurridos los 5 segundos el resonador retardado comienza a actuar como un absorbedor activo presentando una considerable disminución de las vibraciones en el sistema primario.

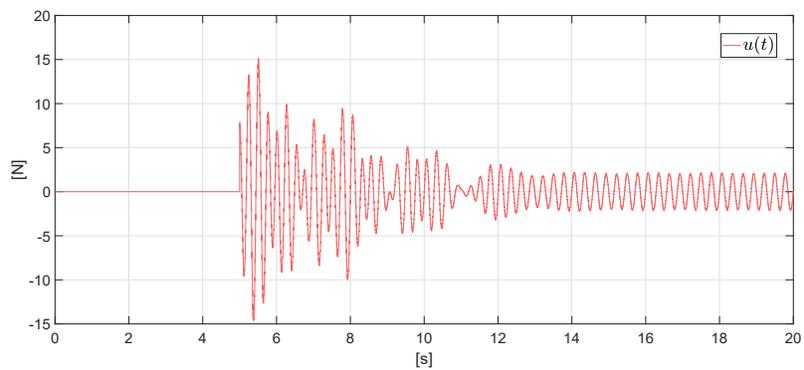
Adicionalmente, realizamos una tercera validación experimental sobre el sistema de 2 grados de libertad, en esta ocasión la fuerza externa de perturbación está dada por $F(t) = 1.5 \sin(\omega t)$, es de-

cir, la misma función sinusoidal pero a una menor amplitud. Para el experimento consideramos la frecuencia $\omega = 21.99$ rad/seg, nuevamente durante los primeros 5 segundos el sistema se encuentra en lazo abierto, posterior a estos 5 segundos la ley de control es aplicada. De los datos estimados aplicamos el algoritmo de diseño DR para que oscile a esta frecuencia, es decir, usando nuevamente el valor del retardo $h = 0.012$ s obtenemos las ganancias de retroalimentación $g_1 = 673.01$ N/m y $g_2 = -18.38$ N·seg/m.

En la Figura 4.18 se muestran los resultados experimental, donde se aprecia como las vibraciones sobre el sistema primario empiezan a aumentar considerablemente durante los primeros 5 segundos cuando el sistema se encuentra en lazo abierto, luego de los 5 segundos el resonador retardado entra en acción como absorbedor activo de vibraciones, si bien este efecto del resonador retardado no es tan notorio o inmediato como en los casos anteriores mostrando un efecto transitorio, sin embargo pasado un breve tiempo se observa como el resonador retardado logra disminuir considerablemente las vibraciones sobre el sistema primario.



(a)



(b)

Figura 4.18: (a) Validación experimental del sistema primario perturbado a la frecuencia $\omega = 21.99$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 673.01$ N/m y $g_2 = -18.38$ N·seg/m.

En el caso anterior observamos como al ejercer la fuerza externa a la frecuencia $\omega = 21.99$ rad/seg el sistema interconectado se ve afectado significativamente al aumentar sus oscilaciones a pesar que la amplitud de la fuerza es considerablemente pequeña, esto se debe en parte a que la frecuencia de la fuerza externa se aproxima a una de las dos frecuencia naturales del sistema interconectado y por consiguiente el sistema entra en resonancia como se aprecia en la Figura 4.19 donde el sistema interconectado es perturbado nuevamente por la fuerza externa $F(t) = 1.5 \sin(\omega t)$, con $\omega = 21.99$ rad/seg en lazo abierto.

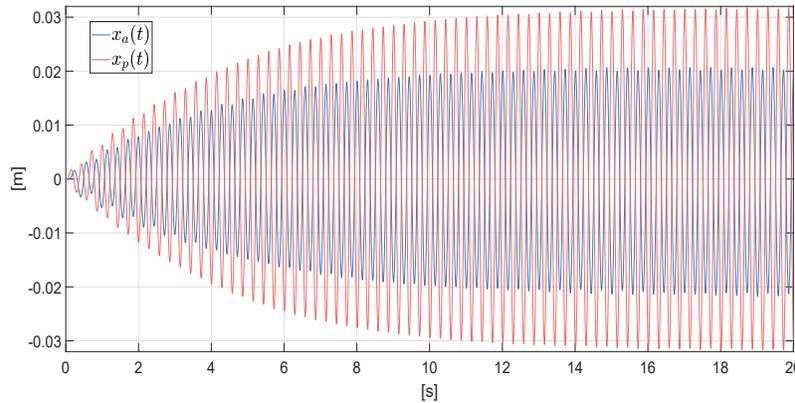
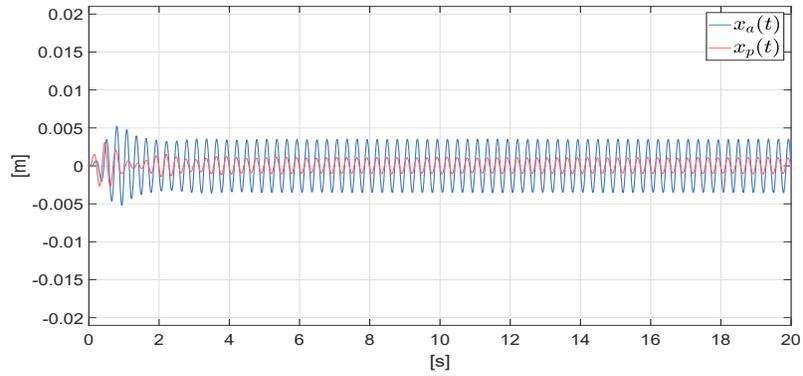


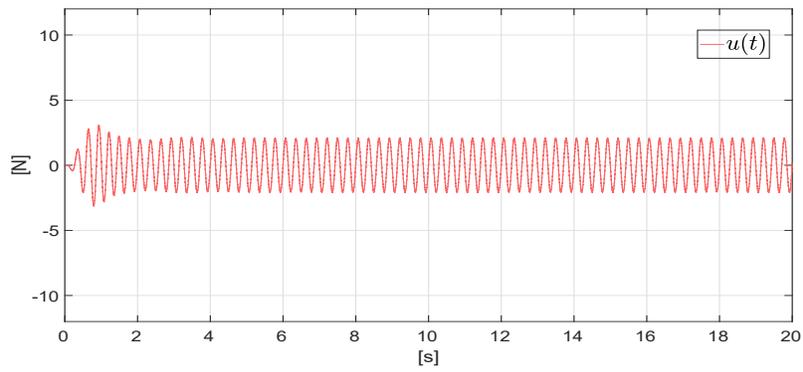
Figura 4.19: Sistema interconectado en lazo abierto perturbado por $F(t) = 1.5 \sin(\omega t)$, con $\omega = 21.99$ rad/seg.

Ahora, consideramos el escenario perturbando el sistema por la misma fuerza externa a la frecuencia $\omega = 21.99$ rad/seg, pero ahora la ley de control basada en el resonador retardado de posición y velocidad se aplica inmediatamente sobre el sistema interconectado (a los 0.1 s). En la Figura 4.20 se muestran los resultados experimentales, donde se aprecia como el sistema primario presenta muy pocas perturbaciones, ya que la ley de control actúa inmediatamente haciendo que el resonador retardado disminuya notoriamente las oscilaciones del sistema primario en contraste con el experimento anterior donde el sistema está en lazo abierto.

En resumen, los experimentos validan correctamente la configuración DR de posición y velocidad retardada propuesta y sus aplicaciones para la absorción activa de vibraciones sobre un sistema de un grado de libertad obteniendo buenos resultados. Cabe mencionar, que en todas las validaciones experimentales del resonador retardado de posición y velocidad se mantuvo el mismo retardo de tiempo, así mismo al usarlo como un absorbedor activo de vibraciones, lo cual facilitó en cierta manera los cálculos y la implementación experimental.



(a)



(b)

Figura 4.20: (a) Validación experimental del sistema primario perturbado a la frecuencia $\omega = 21.99$ rad/seg. (b) Señal de control con $g_1 = 673.01$ N/m y $g_2 = -18.38$ N·seg/m aplicada a los 0.1s.

Conclusiones y trabajo a futuro

Se tienen las siguientes conclusiones principales de este trabajo de investigación:

1. Se estudió y resolvió el problema de la estabilidad exponencial de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo para el caso cuando tres parámetros son iguales a cero, mostrando que para cualesquiera tres parámetros de la ecuación son cero, entonces es inestable. Hasta donde sabemos este análisis no ha sido reportado en la literatura.
2. Para los casos de la ecuación diferencial de segundo orden con retardo cuando dos de sus parámetros son cero se logró analizar y caracterizar analíticamente la frontera de la región de estabilidad. Adicionalmente se mostraron resultados sobre el calculo del margen de estabilidad del retardo (retardo critico). Todos estos resultados, hasta donde sabemos no se han reportado en la literatura.
3. En el caso donde ningún parámetro es cero, a pesar de obtener condiciones necesarias y suficientes sólo para el caso $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$ satisfaciendo la restricción adicional (3.64) es lo bastante general para considerar casos que otros trabajos no pueden analizar.
4. El disponer de la frontera de la región de estabilidad caracterizada analíticamente nos permitió, en términos generales aplicar de manera directa estos resultados a los problemas de control.
5. Se propone un algoritmo para la configuración DR de posición y velocidad retardada, además del hecho de que para que el resonador retardado oscile a una nueva frecuencia sólo se requiere cambiar las ganancias de retroalimentación y no el retardo, resulta bastante útil para

su implementación. En contraste con las configuraciones DR propuestas en la literatura (posición, velocidad o aceleración) donde para modificar la frecuencia de oscilación es necesario cambiar la ganancia de retroalimentación y adicionalmente el retardo de tiempo.

6. La validación experimental del DR y su aplicación para el control activo de vibraciones en un sistema primario se logra con buenos resultados.

Trabajo a Futuro

1. Concluir con el estudio y análisis de estabilidad para los casos restantes donde un parámetro es igual a cero.
2. Relajar la condición (3.64) para el caso donde ningún parámetro es cero con $p_1 < 0$ y $q_1 < 0$, así como también analizar otros casos donde $p_1, q_1 \in \mathbb{R}$.
3. Analizar la ecuación (3.1) considerando dos valores de retardo distintos, es decir

$$x''(t) = p_1 x'(t) + p_2 x'(t - h_1) + q_1 x(t) + q_2 x(t - h_2),$$

donde $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$ con $h_1 \neq h_2$.

4. Realizar un análisis de robustez del DR con retroalimentación retardada de posición y velocidad dado en (4.1).
5. Realizar un análisis de estabilidad del sistema interconectado, DR con sistema primario.
6. Estudiar y analizar las capacidades del resonador retardado como control activo de vibraciones para sistemas de más grados de libertad.

Publicaciones

- HERNANDEZ-VILLA, L. & MELCHOR-AGUILAR, D., (2023). *On stability of SDOF systems with delayed position and velocity feedback*, Journal of Vibration and Control. 29(15-16):3838-3848,

Congresos internacionales

- L. Hernández-Villa, D. Melchor-Aguilar and G. Silva-Navarro, (2022) “On implementation of delayed resonator with position and velocity feedback,” 2022 19th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), México City, México.

Bibliografía

- [1] AGRAWAL, A. K., FUJINO, Y. & BHARTIA, B.K., (1993). *Instability due to time delay and its compensation in active control of structures*, Earthquake engineering and structural dynamics, 22, 221-224.
- [2] AGRAWAL, AK., & YANG, JN., (1997). *Effect of fixed time delay on stability and performance of actively controlled civilengineering structures*. Earthquake engineering and structural dynamics 26: 1169-1185.
- [3] ANSOFF, H. I., & KRUMHANSL, J. (1948). *A general stability criterion for linear oscillating systems with constant time lag*. Quarterly of Applied Mathematics, 6(3), 337-341.
- [4] BHATT, S. J., & HSU, C. S. (1966). *Stability Criteria for Second-Order Dynamical Systems With Time Lag*. ASME, Journal of Applied Mechanics, March; 33(1): 113-118.
- [5] BRAUN S.G., EWINS, D.J. & RAO, S.S., (2001). *Encyclopedia of Vibration*, Vols. 1-3, c, San Diego, CA.
- [6] BELLMAN, R., E. & COOKE, K., L., (1963). *Differential-difference equations*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press. New York,
- [7] BELLMAN, R., E. & DANSKIN, J., M., (1954). *A survey of the mathematical theory of time-lag, retarded control, and hereditary processes*. Rand corporation.
- [8] CAHLON, B. & SCHMIDT, D., (2003). *Stability Criteria for Certain Second Order Delay Differential Equations*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis 10, 593-621.
- [9] CAHLON, B. & SCHMIDT, D., (2004). *Stability criteria for certain secondorder delay differential equations with mixed coefficients*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 170 79-102.

- [10] CHEBOTAREV, NG. & MEIMAN, NN., (1949). *The Routh-Hurwitz problem for polynomials and entire functions*. Trudy Mat. Inst. Steklov., 26, Acad. Sci. USSR, Moscow-Leningrad, 3-331.
- [11] CHURCHILL, R. & BROWN, J., (1992). *Complex Variables and Applications*, five edition ed. McGraw-Hill.
- [12] COOKE K. L. & GROSSMAN Z., (1982). *Discrete delay, distributed delay and stability switches*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 86, Issue 2.
- [13] CULSHAW, R., V., RUAN, S. & G., WEBB, (2003). *A mathematical model of cell-to-cell spread of HIV-1 that includes a time delay*, Journal of Mathematical Biology, 46, 425-444.
- [14] DE SILVA, C.W., (2006). *Vibration: Fundamentals and Practice*, Second Edition CRC Press.
- [15] DRIVER, R. D., (1978). *Exponential decay in some linear delay differential equations*, The American Mathematical Monthly, 85 (9).757-760.
- [16] EL'SGOL'TS, L.E. & NORKIN S.B., (1973). *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*. Academic Press New York.
- [17] ERIS, O., ALIKOC, B. & ERGENC, A. F., (2018). *A new delayed resonator design approach for extended operable frequency range*, Journal of Vibration and Acoustics, 140 (4) 041003.
- [18] FRISCH, R. & HOLME, H., (1935). *The Characteristic Solutions of a Mixed Difference and Differential Equation Occuring in Economic Dynamics*. Econometrica, 3, No. 2, pp. 225-239.
- [19] GU, K., KHARITONOV, V. & CHEN, J., (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: Control engineering. Birkhäuser Boston.
- [20] HALE, J., (1969). *Ordinary Differential Equations*. Wiley-Interscience, New York.
- [21] HALE, J. & VERDUYN-LUNEL, S., (1993) *Introduction to Functional Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York.
- [22] HAYES, N.D., (1950) *Roots of the Transcendental Equation Associated with a Certain Difference-Differential Equation*. Journal of the London Mathematical Society, s1-25: 226-232.
- [23] HU, H.Y. & WANG, Z.H., (1998). *Stability analysis of damped systems with two time delays in state feedback*, Journal of Sound and Vibration, 214 (2), 213-225.
- [24] KALECKI, M., (1935). *A Macrodynamic Theory of Business Cycles*. Econometrica, 3, 3, pp. 327-344.

- [25] KHARITONOV, V., (2013). *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Birkhäuser Boston.
- [26] KRASOVSKII, V., (1956). *On the applications of the second Lyapunov method for equations with delay*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 20, 315-327.
- [27] KOLMANOVSKII, V., B. & NOSOV, V., R., (1986). *Stability of Functional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering 180, AP.
- [28] KOVACS, B., A. & INSPIERGER, T., (2018). *Parametric study of virtual stick balancing based on a delayed PD model*, 14th IFAC Workshop on Time Delays Systems, Budapest, June 28-30.
- [29] LIU, J., LIE, L., DAI, J., et al. (2010). *A single-degree-of-freedom system using a time-delayed control algorithm: principle and experimental study*. Journal of Vibration and Control, 17(12): 1840-1850.
- [30] MINORSKY, N., (1942). *Self-excited oscillations in dynamic systems possessing retarder actions*. Journal of Applied Mechanics. 9, 65-71.
- [31] MILTON, J., & CABRERA, J., L., (2002). *The time-delayed inverted pendulum: Implications for human balance control*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 130, 054502.
- [32] MYSHKIS, A., D., (1949). *General theory of differential equations with retarded arguments*. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 4, 33, 99-141.
- [33] NEIMARK, (1949). *J. D-subdivision and spaces of quasi-polynomials*. Prikladnaya Matematika i Mekhanika, 4, 349-380.
- [34] NGOUABO, UG., TUWA, PR., NOUBISSIE, S., et al. (2021). *Nonlinear analysis of electrostatic micro-electro-mechanical systems resonators subject to delayed proportional-derivative controller*. Journal of Vibration and Control, 27(1-2): 220-23e.
- [35] PALKOVICS, L. & VENHOVENS, PJ., (1992). *Investigation on stability and possible chaotic motions in the controlled wheel suspension system*. Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility, 21(1): 269-296, .
- [36] PONTRYAGIN, L. S., (1955). *On zeros of some transcendental functions*, American Mathematical Society Translations, 1, pp. 95-110.
- [37] OLGAC, N., & HOLM-HANSEN, B., T., (1994). *A novel active vibration absorption technique: delayed resonator*, Journal of Sound and Vibration, 176 (1), 93-104.

- [38] RUAN, S., (2001). *Absolute stability conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator-prey systems with discrete delays*, Quarterly of Applied Mathematics, 59, 159-173.
- [39] TOAHA, S. & HASSAN, M., A., (2008). *Stability Analysis of Predator-Prey Population Model with Time Delay and Constant Rate of Harvesting*, Journal of Mathematics (ISSN 1016-2526) Vol. 40 pp. 37-48.
- [40] VYHÍDAL, T., PILBAUER, D., ALIKOC, B. & MICHIELS, W., (2019). *Analysis and design aspects of delayed resonator absorber with position, velocity or acceleration feedback*, Journal of Sound and Vibration, 459 114831.