



INSTITUTO POTOSINO
DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

POSGRADO EN CONTROL
Y SISTEMAS DINÁMICOS

Análisis de sistemas dinámicos
con trayectorias anudadas

Tesis que presenta

Daniel Andrés Lozoya Ponce

Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de tesis:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

San Luis Potosí, S.L.P., noviembre 2025.



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Análisis de sistemas dinámicos con trayectorias anudadas**” presentada para obtener el Grado de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Daniel Andres Lozoya Ponce** y aprobada el **07 de noviembre de 2025** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Director de la tesis

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
Sinodal

Dra. Oyuki Hayde Hermosillo Reyes
Sinodal

Dr. Juan Gonzalo Barajas
Sinodal

Dr. David Antonio Lizarraga Navarro
Sinodal



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Hugo Cabrera Ibarra.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 253242 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

Agradecimientos

- Quiero agradecer al **Dr. Hugo Cabrera Ibarra** por motivarme a continuar con mis estudios realizando este doctorado.
- Además agradezco al **IPICYT** por permitirme completar mis estudios para realizar este doctorado.
- Al igual que agradezco mucho a mi familia por siempre apoyarme, en especial a mi papá que me sigue cuidando y apoyando desde el cielo, a mi mamá que siempre ha luchado por que nada nos falte, a mis hermanos que siempre han creído en mí y a mi esposo que ha sido mi apoyo incondicional en los momentos más difíciles que he enfrentado estos últimos años.

Índice general

Constancia de aprobación de la tesis	3
Créditos Institucionales	6
Acta de examen	8
Agradecimientos	9
Resumen	13
Abstract	17
1. Conceptos fundamentales	19
1.1. Teoría de nudos	19
1.2. Polinomio de Jones	26
1.3. Sistemas Dinámicos	32
2. Trayectorias en el sistema de Lorenz	37
3. Métodos existentes para generar trayectorias anudadas	45
3.1. Sistemas dinámicos de revolución	45
3.2. Sistemas dinámicos que generan trenzas como solución.	48
4. Sistema dinámico anudado propuesto	53
4.1. Nuevo sistema dinámico de revolución	53
4.2. Un nuevo sistema dinámico con todos los nudos toroidales como solución	55
4.3. Nudos cable	57
4.4. Nudos cable de otros nudos	59
5. Conclusiones	61
Apéndice	63

Resumen.

La aparición de nudos en sistemas dinámicos ha sido estudiada en artículos como *Chen y Banks* [2], *Song, Banks y Díaz* [3], *Birman y Williams* [4], *Williams* [5] y *Teschl* [6], en donde se determinan los tipos de nudos que ocurren como solución. La teoría de nudos es un fascinante campo de la topología que estudia las propiedades y las estructuras de curvas cerradas en el espacio tridimensional. Desde sus raíces en la geometría clásica hasta las aplicaciones contemporáneas en la física teórica y la biología molecular, los nudos han capturado la atención de científicos y filósofos por igual debido a su rica complejidad y las profundas conexiones que revelan sobre la estructura del espacio y la forma. Desde una perspectiva dinámica, los nudos no solo son objetos estáticos, sino que también pueden entenderse como configuraciones que evolucionan y cambian bajo influencias externas, análogas a las fuerzas y campos que actúan sobre sistemas dinámicos. Esta analogía permite aplicar herramientas y conceptos de los sistemas dinámicos para estudiar las propiedades de estabilidad y las características de movimiento de los nudos en el espacio tridimensional. Una pregunta que surge es si es posible obtener diferentes familias de nudos como soluciones de un sistema dinámico, para resolver esta pregunta es necesario conocer los tipos de familias de nudos que existen, una de éstas familias es la conformada por los nudos satélite, los cuales se obtendrán en este trabajo, por métodos aprendidos en diferentes artículos estudiados.

En este trabajo se exponen algunos métodos que ya existen, los cuales tienen trayectorias anudadas como soluciones de sistemas dinámicos, estos métodos son descritos en *Chen y Banks* [2] y *Song, Banks y Díaz* [3], en el primer método se genera el sistema dinámico revolucionado para obtener nudos toroidales como soluciones del sistema; En el otro método, se plantea la construcción de un sistema dinámico de tal manera que dicho sistema tiene como solución una trenza, y utilizando el Teorema de Alexander, se obtiene como tal la cerradura de dicha trenza, lo cual es un nudo. Además, se proporcionan algunos conceptos y definiciones tanto de teoría de nudos como de sistemas dinámicos que serán de ayuda para el estudio y aplicación de estos métodos.

Otro aspecto a analizar es el comportamiento caótico del conocido sistema de Lorenz, respecto a las trayectorias generadas como solución de éste. En general, el análisis de sistemas caóticos como el de Lorenz ofrece perspectivas sobre la complejidad y la imprevisibilidad inherentes a ciertas configuraciones dinámicas, destacando cómo los sistemas pueden exhibir comportamientos inesperados y difíciles de modelar bajo ciertas condiciones. En este caso, la forma de realizar el análisis es de forma numérica, es decir, realizando las simulaciones en un software en particular, para generar estas trayectorias al variar algunos parámetros en las ecuaciones que definen el sistema.

La motivación de estudiar el comportamiento de las trayectorias generadas al hacer dichas variaciones en los parámetros, es evocada de la cuestión que se produce al tener la trayectoria que se muestra como solución al realizar la revolución del sistema dinámico de Volterra-Lotka cuando no se tiene una trayectoria periódica. En el caso en que se tiene una trayectoria periódica como solución del sistema en el espacio fase, hay un círculo como solución, y dicho círculo está anudado.

También describe cómo obtener un nuevo sistema dinámico cuyas órbitas generan nudos toroidales y muestra la forma correcta de obtenerlos. Para ello se estudia el mismo método que en *Chen y Banks* [2] aplicado a un sistema dinámico de dos variables cuya función delimita la trayectoria de éste al primer cuadrante del plano cartesiano, luego de obtenido el sistema se mostrarán algunos ejemplos de las trayectorias anudadas obtenidas como solución y se define un invariante denominado polinomio de Jones para determinar qué nudo toroidal se tiene. Finalmente se construye un sistema dinámico donde las soluciones de este son trayectorias que deben ser nudos satélite. Cabe mencionar que todos los gráficos de nudos presentados en esta tesis se realizaron utilizando el software GNU Octave (ver. 2021).

El capítulo 1 consiste de conceptos fundamentales para la elaboración de esta tesis. En la Sección 1.1 se abordan conceptos fundamentales respecto a la teoría de nudos que necesitaremos para el desarrollo de esta tesis, desde la definición de nudo, hasta los diferentes tipos de nudos que analizamos a saber, nudos toroidales, nudos satélite, nudos iterados. Así mismo, se plantea la definición de trenza y de cerradura de una trenza.

En la Sección 1.2 se habla de uno de los invariantes que más se utilizan para caracterizar un nudo de forma algebraica, el polinomio de Jones, se establecen los movimientos de Reidemeister, el corchete de Kauffman y un ejemplo de como calcular el corchete de Kauffman de un nudo, para después definir el Polinomio de Jones con base en este corchete.

En la Sección 1.3 se muestran algunos conceptos de sistemas dinámicos que necesitamos también para el desarrollo de esta tesis, se menciona lo que es un espacio topológico, un espacio métrico y un sistema dinámico como tal. En particular se considera la definición de trayectoria periódica, ya que este tipo de trayectorias son con las que representamos como nudos en el espacio fase de un sistema dinámico. También se menciona el concepto de sistema dinámico caótico, ya que este tipo de sistemas dinámicos se analiza en el capítulo 2.

En el capítulo 2, se desarrolla el análisis de las trayectorias que se obtienen de un sistema dinámico caótico, el sistema de Lorenz, como soluciones de este. El análisis consiste en variar ciertos parámetros del sistema para obtener diferentes trayectorias como soluciones, y se comparan los resultados obtenidos en un rectángulo que representa la variación de cierto par de parámetros.

En el capítulo 3 se abordan los métodos existentes para generar trayectorias anudadas como soluciones de sistemas dinámicos estudiados durante el doctorado.

En la Sección 3.1, el método de revolución de sistemas dinámicos, el cual es de utilidad para la construcción de nuestro propio sistema dinámico expuesto en esta tesis, con este método en particular existe un sistema dinámico en el cual se pueden obtener todos los nudos toroidales como soluciones de éste al variar la condición inicial.

Posteriormente, en la Sección 3.2, con el método de construcción de un sistema dinámico para obtener una trenza como solución de éste, al usar el Teorema de Alexander, se obtiene la cerradura de ésta trenza, lo cual es un nudo, como solución de este sistema dinámico en una condición inicial. Entonces, es importante que con este método, se puede obtener cualquier nudo como solución del sistema dinámico. En el capítulo 4 se construye un nuevo sistema dinámico con el cual el objetivo es tener una nueva familia de nudos como soluciones de dicho sistema.

En la Sección 4.1 se propone un sistema dinámico de dos variables, para aplicar el método de revolución visto en la Sección 3.1, y así poder tener un sistema que tiene todos los nudos toroidales como soluciones de este. También se muestran algunos ejemplos de nudos obtenidos como solución del sistema con ciertas condiciones iniciales.

En la Sección 4.2 se establece una función que nos ayuda a delimitar las trayectorias del sistema dinámico las cuales existen en un toro en $\mathbb{R}^3$.

En la Sección 4.3 se habla de la construcción de los nudos iterados con el sistema dinámico de esta sección, para esto se propone un difeomorfismo el cual nos ayuda a anudar en forma de nudo trébol el toro en el que existen los nudos toroidales obtenidos como solución del sistema dinámico que estamos proponiendo en esta sección, en el cual, los nudos toroidales se pueden obtener como solución. De esta forma, proponemos un nuevo sistema dinámico en el cual todos los nudos iterados de la forma del toro anudado en forma de trébol, son soluciones de dicho sistema dinámico.

En la Sección 4.4 se plantea extender el concepto de nudos iterados a otros toros con diferente forma anudada, siempre y cuando se tenga la parametrización correspondiente. Se muestran ejemplos de nudos iterados en el toro con forma del nudo ocho.

Las conclusiones obtenidas en esta tesis se recopilan en el capítulo 5, éstas deducen el trabajo realizado durante los años que ha se ha realizado este doctorado.

En el apéndice se muestran los códigos utilizados en octave para poder generar las simulaciones presentadas en esta tesis.

Abstract.

Analysis of dynamical systems with knotted trajectories. The appearance of knots as solutions of dynamical systems has been widely studied. In particular, several articles have presented some ways of determining knot families as solutions. Following these ideas, we pose the question: can we generate a dynamical system which has a different knot family as a solution? To the best of our knowledge, a dynamical system where an infinite number of torus cable knots, i.e. iterated torus knots, are solutions, has not been previously reported.

In this thesis, the existing methods which knotted trajectories are obtained as solutions of dynamic systems is analyzed. In particular, the first method that is analyzed in this thesis consists of spinning a dynamical system, which has closed trajectories in $\mathbb{R}^2$ around a hyperplane as solutions in order to have, in the spun system, that the trajectories now become torus knots that are represented in $\mathbb{R}^3$, in particular with this method there is a dynamical system such that the family of torus knots can be obtained as solutions of this dynamical system.

The second method is about to construct a dynamical system for which its solution is represented as the closed of a braid that is equivalent to a knot K . This is achieved by Alexander's Theorem to construct a dynamical system whose solution in an initial condition is the closed of one braid. Unlike the first method studied, with this second method you can only have one knot as a solution for each dynamical system built with this method.

In the previous methods, only the closed trajectories obtained as solutions are analyzed. From here the question that emerges is to what happens to trajectories that are not closed. Considering this, a well-known dynamical system is analyzed, the Lorenz system, in which it is known that this is a chaotic dynamical system, where there are trajectories, obtained as solutions, that are not closed. In this thesis the variation of certain parameters in this system to obtain different trajectories as its solution are analyzed in order to expose different trajectories.

Finally, in this thesis an infinite family of dynamical systems is built based on the torus knots, where a family of different knots, the iterated torus knots, are obtained as solutions. The construction of one of these dynamical systems is shown, based on the trefoil knot, although the method can be applied to any other torus knot, or any other knot, as long as the corresponding parameterization is provided. The latter is shown in the case of the figure-eight knot, which is not a torus knot. Actually, as long as you have the parameterization of the knot you want as a iterated knot pattern, you can apply this same method to another system of equations that represents different knots in order to have a new family of knots as solutions.

KEY WORDS: dynamical systems; knots; iterated torus knots; cable knots.

Capítulo 1

Conceptos fundamentales

1.1. Teoría de nudos

Desde hace tiempo la humanidad ha utilizado los nudos, trenzas y enlaces para diversas actividades. Por ejemplo, en la antigüedad nuestros antepasados llegaron a usar los nudos para poder atar una piedra a un trozo de madera para formar armas y herramientas. También se ha necesitado el trenzar cuerdas de diferentes hilos para crear textiles como ropa, accesorios y demás. Los nudos también aparecen en textos antiguos, esculturas, pinturas, estructuras y demás representaciones artísticas por el mundo. De igual forma se sabe de la existencia de un lenguaje llamado “Quipu”, escrito a base de nudos que llegó a utilizar la antigua civilización Inca.

Uno de los más grandes logros de la topología ha sido el descubrimiento del polinomio de Alexander de un nudo o enlace en 1928. Este ha sido uno de los invariantes más utilizados para clasificar nudos en la teoría de nudos. Posteriormente se propuso el famoso polinomio de Jones en 1984, el cual es otro invariante polinomial de nudos y enlaces.

Tras varios años, se han encontrado aplicaciones de los nudos en otras disciplinas como la química, la mecánica cuántica, la biología molecular, los sistemas dinámicos y demás.

Dado que el objetivo de esta tesis depende de las trayectorias anudadas se va a comenzar con plantear lo que es un *nudo*. En un aspecto más intuitivo, se puede decir que un *nudo* es una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$ sin autointersecciones. A continuación se exhiben algunos conceptos que se encuentran en *Murasugi* [1] y *Crowell y Fox* [9].

A continuación se define formalmente lo que es un *nudo*:

Definición 1.1.1 (Murasugi [1]). *El conjunto $N \subset \mathbb{R}^3$, es un **nudo** si existe un homeomorfismo del círculo unitario $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ cuya imagen es N . Donde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.*

Ahora, se exhiben dos ejemplos de nudos gráficamente:

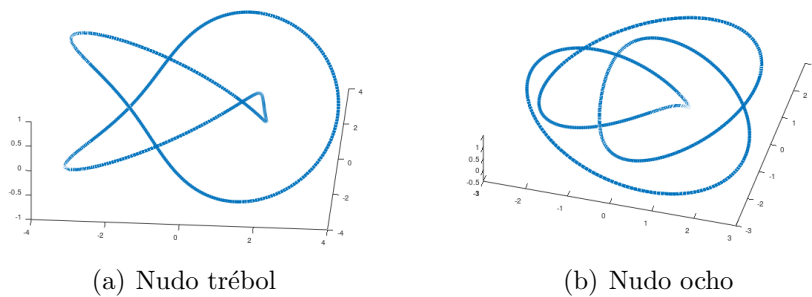


Figura 1.1: Ejemplos de diagramas de nudos.

Definición 1.1.2 (Murasugi [1]). Un **nudo poligonal** es la unión de un número finito de segmentos cerrados de línea recta llamados aristas, cuyos puntos finales son los vértices del nudo. Un nudo es **manso** si este es equivalente a un nudo poligonal, si no, se dice que es un **nudo salvaje**.

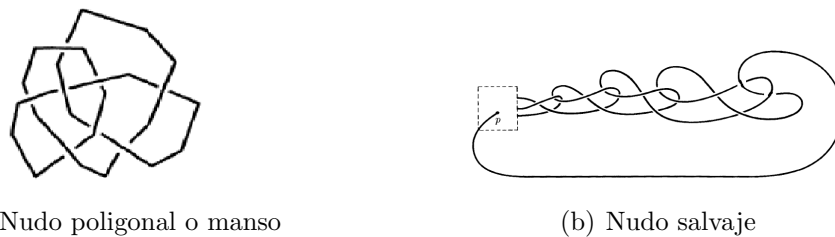


Figura 1.2: Ejemplos de nudo poligonal (a) y nudo salvaje (b) (imágenes tomadas de Murasugi [1]).

En este trabajo sólo se tomarán en cuenta a los nudos mansos, no se incluirá en ningún momento algún nudo salvajes.

Los nudos se representan de forma gráfica mediante proyecciones sobre un plano a las cuales se les llama *diagramas*. En estas proyecciones no se consideran puntos encima de otros y cuando llega a pasar esto, el trozo de línea que pasa por debajo se le dibuja cortado. Todas las componentes conexas del diagrama serán llamadas *arcos* y a los puntos donde se cortan las líneas del diagrama, *cruces*.

Nota 1.1.3. Todos los dibujos se realizarán con curvas en vez de segmentos rectos, dado que toda curva puede ser descrita de forma aproximada por segmentos poligonales muy cortos, además esto facilita los dibujos de los diagramas.

La siguiente definición se utiliza para poder diferenciar un nudo de otro.

Definición 1.1.4 (Murasugi [1]). Dos nudos N_1 y N_2 son **equivalentes** si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserve la orientación tal que $h(N_1) = N_2$. La equivalencia de nudos se denota por $N_1 \cong N_2$.

Otro concepto que se usa con gran frecuencia en ésta y las siguientes secciones es la familia de **nudos toroidales**, que en particular un nudo toroidal es el que se

construye sobre una superficie T^2 llamada **toro**:

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

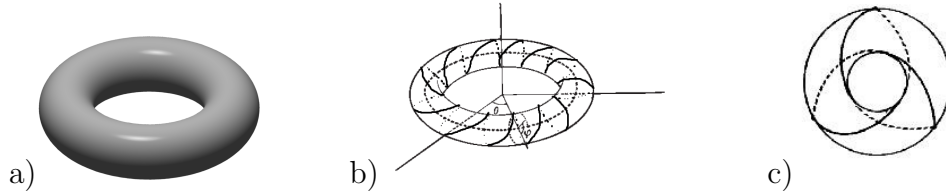


Figura 1.3: Toro (a) y ejemplos de nudos toroidales (b) y (c).

A los nudos toroidales se les identifica por la cantidad de giros en las direcciones meridional y longitudinal. Un nudo toroidal descrito por $T(p, q)$, donde $p, q \in \mathbb{N}$ son primos relativos, es una curva cerrada simple en T^2 que gira p veces en dirección longitudinal y q veces en dirección meridional. Retomando el ejemplo del nudo trébol (Figura 4.4(a)) éste se dice que es el nudo toroidal $T(2, 3)$ (Figura 1.3 (c)). Es muy conocido que los nudos $T(p, q)$ y $T(q, p)$ son equivalentes, ver por ejemplo el trabajo de Rolfsen [12]. Por lo mismo, se trabajará únicamente con *pares adecuados* de números (p, q) tales que el $\text{mcd}(p, q) = 1$ y $\frac{p}{q} < 1$; a menos que se especifique lo contrario.

Aparte de nudos, también se contemplan los enlaces, donde un **enlace** es una colección finita y ordenada de nudos $\{N_i\}$ los cuales no tienen ninguna intersección entre sí. En particular, cada nudo N_i se dice que es una componente del enlace. En la Figura 1.4 se presentan un ejemplo de ello, los Anillos de Borromeo, los cuales son un enlace de tres componentes $\{N_1, N_2, N_3\}$, y dichas componentes son cada una el nudo trivial.

Análogamente a los nudos, se puede determinar cuándo dos enlaces son equivalentes. Se dice que dos enlaces son equivalentes si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Ambos enlaces tienen el mismo número de componentes.
2. Existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo que preserva la orientación y que manda la colección de componentes del primer enlace en la colección de componentes del segundo enlace.

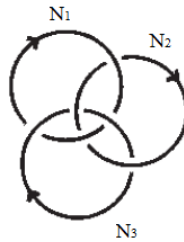


Figura 1.4: Anillos de Borromeo.

Dados dos nudos, hay ciertas construcciones para crear un nuevo nudo, a continuación se muestran dos:

Definición 1.1.5 (suma conexas). Sea P un punto en un nudo N_1 en S^3 . Al considerar a P como el centro de una bola B^3 con un radio muy pequeño, se cumplirá lo siguiente:

1. N interseca a B^3 exactamente en dos puntos, el segmento entre estos dos puntos lo llamaremos α .

2. En el interior de B^3 , α es isomorfo a Ov donde Ov se muestra en la Figura 1.5 (a).

De igual forma, para algún otro nudo N_2 en otra esfera tridimensional S^3 , se considera un punto P' , e igual que antes, se obtiene de N_2 a β , que es el segmento entre los dos puntos que intersecan en otra bola B'^3 tal que β es isomorfo a Ov también. Ahora, sea $\tilde{B}^3$ la bola que se obtiene al quitar de S^3 los puntos dentro de B^3 . De manera similar, sea $\tilde{B}'^3$ la bola que se obtiene al quitar de S^3 los puntos dentro de B'^3 . La superficie de cada una de estas bolas, es decir, $\tilde{B}^3$ y $\tilde{B}'^3$, es una esfera (bi-dimensional). Si ahora se pegan estas dos bolas a lo largo de la esfera, aplicando un homeomorfismo, se obtiene una esfera tridimensional, S^3 . En el proceso de pegado, se unen el punto final (inicial) de α y el punto inicial (final) de β . Por lo tanto, en esta esfera tridimensional, S^3 , se forma un nuevo nudo único, $\hat{N}$, Figura 1.5(d). El nudo $\hat{N}$ que se forma en el proceso anterior se dice que es la **suma** de N y N' (o la **suma conexas**), y se denota por $N \# N'$. Además, el nudo $N \# N'$ es independiente de los puntos P y P' que se eligieron originalmente. Por lo tanto, se puede decir que $N \# N'$ está determinada únicamente por N y N' .

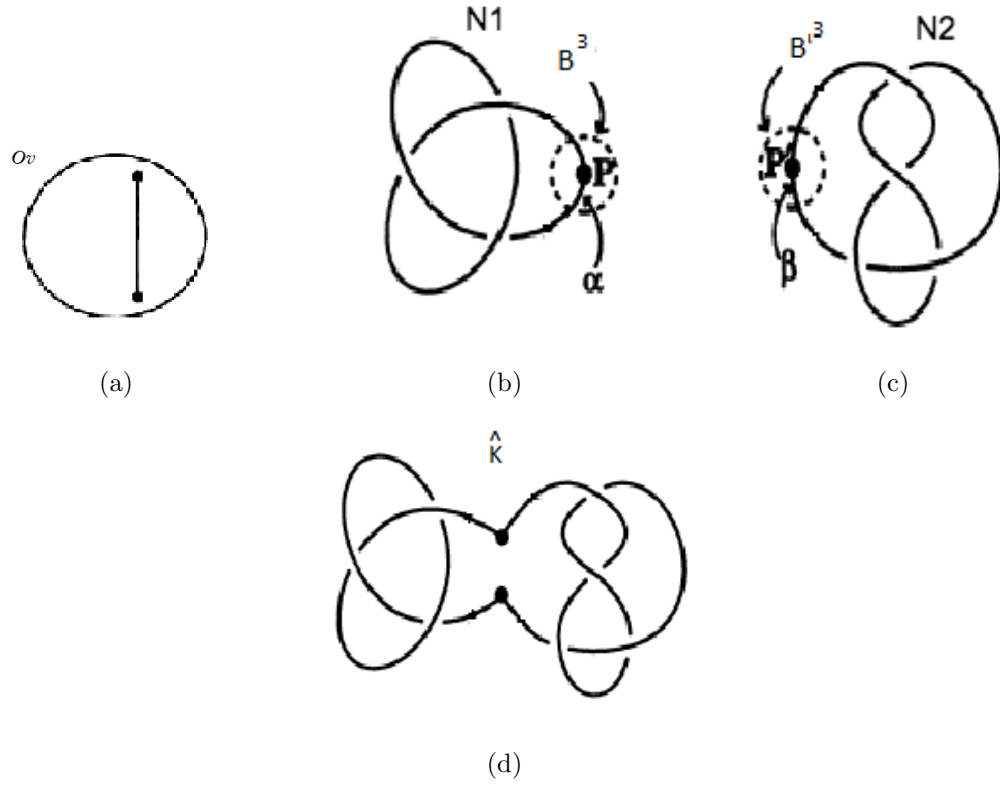


Figura 1.5: Suma conexa de dos nudos (imágenes tomadas de Murasugi [1]).

Definición 1.1.6. El *cable*-(r, s) de un nudo N , denotado $N_{(r,s)}$, es el nudo obtenido al tomar $T(r, s)$ en la frontera de una vecindad tubular de N . Cuando $N = T(p, q)$ el cable- (r, s) de N es llamado el **nudo toroidal iterado de la forma** (p, q, r, s), el cual denotaremos por $\mathcal{N}_{(p,q,r,s)}$.

Un ejemplo de la construcción de un nudo toroidal iterado está en la Figura 1.6.

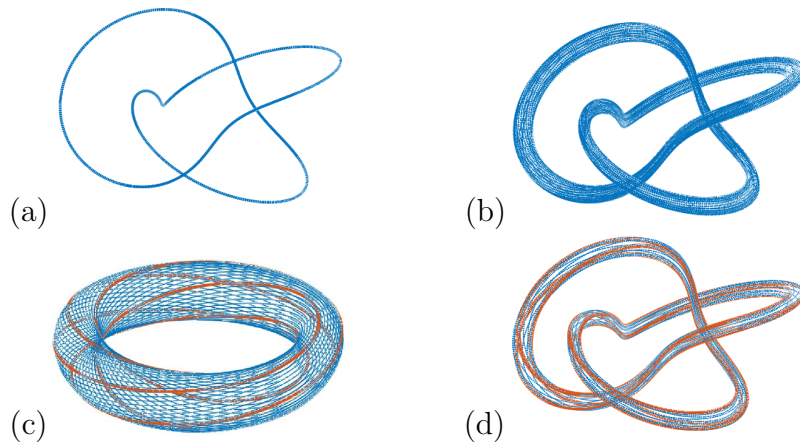


Figura 1.6: Nudo $N = T(2, 3)$ (a) y una vecindad tubular N (b). El nudo toroidal $T(3, 5)$ en color rojo dentro de un toro (c) y el cable $\mathcal{K}_{(2,3,3,5)}$ en color rojo dentro del toro anudado en forma de nudo trébol (d).

Una vez que se habló de lo que son los nudos, ahora se definirán las trenzas, las cuales serán de utilidad en la Sección 3.2.

Definición 1.1.7 (Murasugi [1]). *En la parte superior y en la base de un cubo C :*

$$C = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\},$$

se fijan $2n$ puntos, ver Figura 1.7, de la siguiente manera:

$$A_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{n}{n+1}\right), \dots, A_n = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{n+1}\right)$$

$$A'_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{n}{n+1}\right), \dots, A'_n = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{n+1}\right)$$

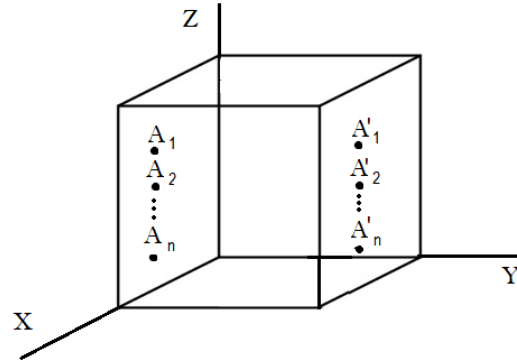


Figura 1.7: Construcción del cubo C .

Ahora, se unen los puntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ con los puntos $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ por medio de n curvas hacia la derecha en C de forma que estas curvas no se intersecan entre sí. A estas curvas se les llamará **cuerdas**. Si se divide el cubo por un plano arbitrario P , paralelo a la cara de la izquierda del cubo C , si P corta cada cuerda en únicamente un punto, se dice que las n cuerdas en C son una **n -trenza**.

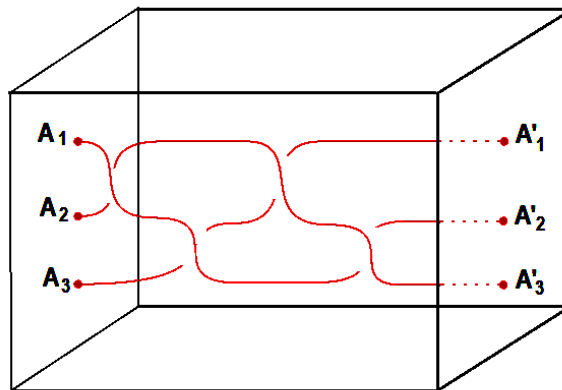


Figura 1.8: Ejemplo de una 3-trenza.

Definición 1.1.8. La **cerradura de una trenza** es la unión de los extremos de las cuerdas, de manera correspondiente, mediante una curva suave sin generar intersecciones; tal y como se muestra en la Figura 1.9.

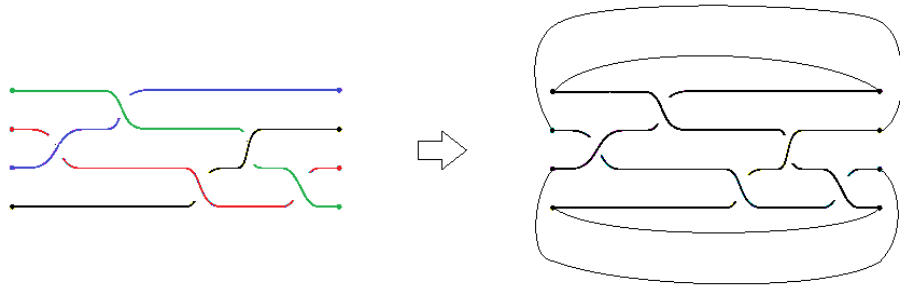


Figura 1.9: Ejemplo de la cerradura de una trenza.

Note que la cerradura de una trenza siempre produce un nudo o un enlace.

Dado un nudo, se puede generar un sistema dinámico al cual se le asocie este nudo dado. Para ello se necesitará expresar el nudo en la forma de la cerradura de una trenza. Esto siempre es posible hacerlo, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1.9. [7](de Alexander) *Cada enlace se puede representar como la cerradura de una trenza.*

Una consecuencia del teorema es la siguiente.

Corolario 1.1.10. [7] *Cada nudo se puede representar como la cerradura de una trenza.*

Ejemplo 1.1.11. *La imagen siguiente representa los pasos a seguir para construir una trenza a partir de un nudo.*

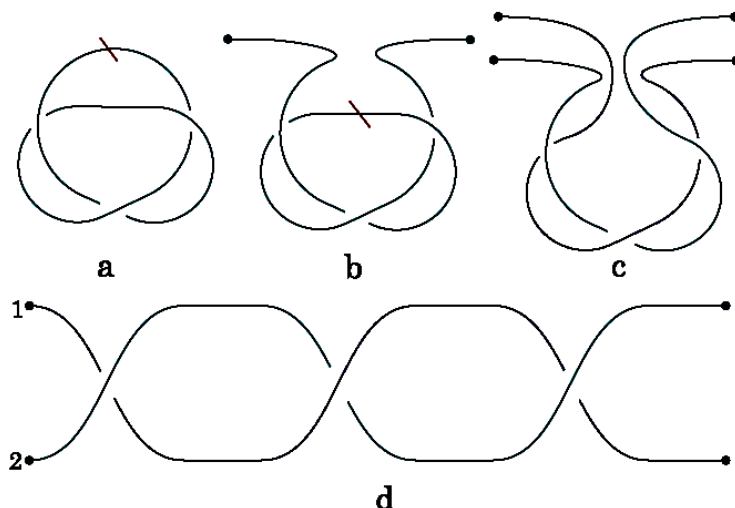


Figura 1.10: Construcción de una trenza a partir de un nudo (imágenes obtenidas de Song, Banks y Díaz [3]).

Uno de los principales objetivos en la teoría de nudos es poder determinar la equivalencia entre dos nudos. Para resolver esta tarea se utilizan los llamados invariantes de nudos, los cuales son funciones que le asignan a cada elemento de una misma clase el mismo resultado algebraico. Para los nudos clásicos existen varios invariantes y en la siguiente sección se presenta uno de ellos: El *Polinomio de Jones*.

1.2. Polinomio de Jones

Usualmente los nudos están definidos como inserciones de S^1 en el espacio $\mathbb{R}^3$, donde estas pueden ser representadas de diferentes maneras. La primera que se puede mencionar son los diagramas, esto nos da una idea general de lo que es un nudo y así se puede definir los conocidos movimientos de Reidemeister. Estos nos ayudan a determinar cómo un diagrama puede ser equivalente a otro.

Una de las cosas que más ayudan a la clasificación de nudos es el poder determinar si dos nudos son equivalentes. Teniendo esto como objetivo es que surge la necesidad de utilizar los invariantes de nudos, que son funciones que asignan un polinomio a cada clase de diagramas. Para los nudos clásicos existen varios invariantes entre ellos está el *Polinomio de Jones*.

Las clases de equivalencia se pueden ver plasmadas en los diagramas que representan los llamados *movimientos de Reidemeister* (ver Figura 1.11). Dichos movimientos se consideran sólo en un pequeño segmento del diagrama ya que fuera de éste el diagrama no se deforma.

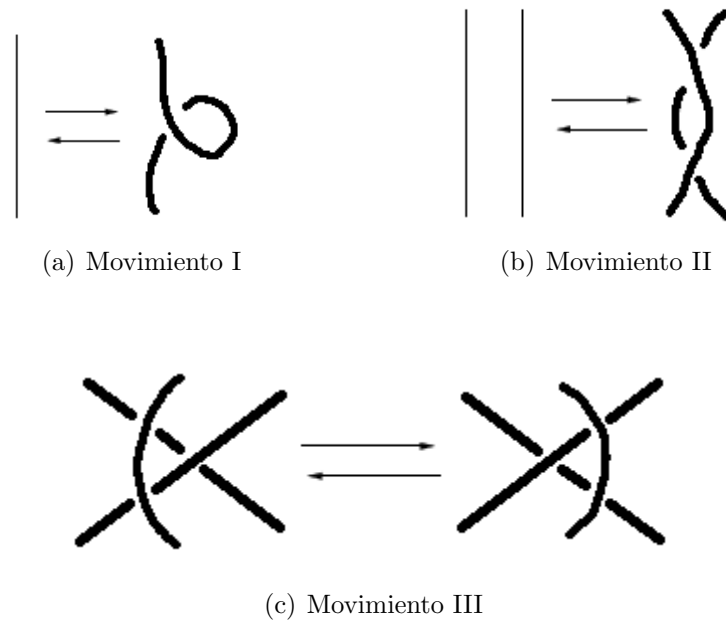


Figura 1.11: Movimientos de Reidemeister.

Teorema 1.2.1 (Reidemeister). *Dos diagramas son equivalentes si, y sólo si, uno es obtenido a partir del otro por una secuencia finita de movimientos de Reidemeister y de isotopías de diagramas.*

La isotopía de dos diagramas D y D' se refiere a una isotopía lineal a trozos $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ en la cual $H(D, 0) = D$ y $H(D, 1) = D'$. En la Figura 1.12 se muestran dos nudos equivalentes así como las isotopías y movimientos de Reidemeister usados.

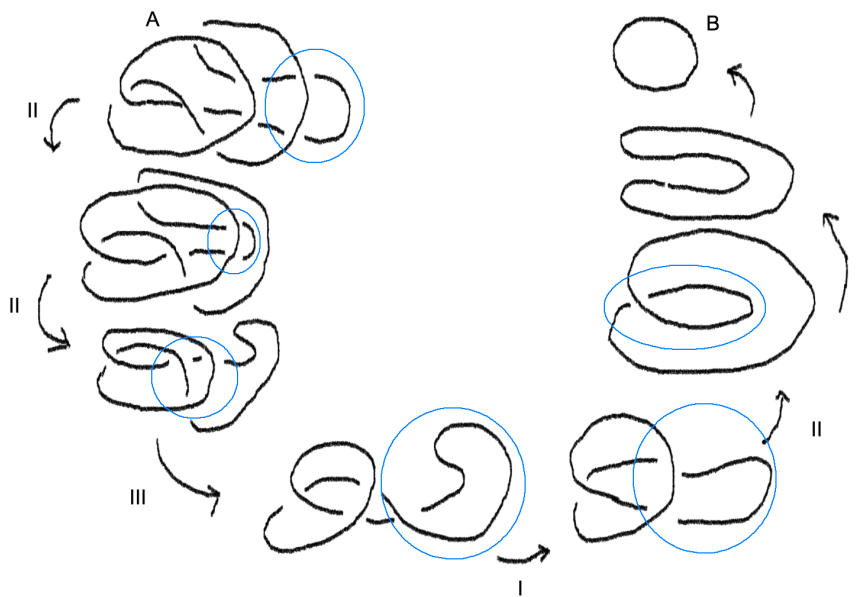


Figura 1.12: Nudos equivalentes.

Utilizando el polinomio conocido como el *Corchete de Kauffman* se puede calcular de forma simple el polinomio de Jones.

Definición 1.2.2. *El Corchete de Kauffman es una función que tiene como dominio el espacio de diagramas no orientados y tiene como rango al anillo de polinomios de Laurent con coeficientes enteros en una variable. Esta función le asigna a cada diagrama D un polinomio: $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{-1}, A]$ utilizando las siguientes reglas:*

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$.
2. $\langle D \cup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$
3. $\langle D \rangle = A \langle D_1 \rangle + A^{-1} \langle D_2 \rangle$

En donde $\bigcirc$ representa al nudo trivial mientras D_1 y D_2 representan respectivamente al diagrama principal D después de que sus cruces se deshicieron como se exhibe en la Figura 1.13.

$$\langle \text{Crossing } D \rangle = A \langle D_1 \rangle + A^{-1} \langle D_2 \rangle$$

Figura 1.13: Aplicación de la regla 3 de la Definición 1.2.2

Dado que la propiedad 3 genera dos diagramas nuevos al deshacer un cruce, para un nudo de n cruces se puede calcular el corchete de Kauffman como la suma de $2n$ diagramas triviales. En particular para un enlace de m componentes sin cruces, las propiedades 1 y 2 definen el corchete de Kauffman como:

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= (-A^{-2} - A^2) \langle \bigcirc \rangle = -A^{-2} - A^2 \\ \langle \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rangle &= (-A^{-2} - A^2) \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2)^2 \\ \underbrace{\langle \bigcirc \bigcirc \cdots \bigcirc \rangle}_m &= (-A^{-2} - A^2)^{m-1}. \end{aligned}$$

Ahora, se verá que aplicando el corchete de Kauffman a los movimientos de Reidemeister I, II y III, se tiene que el corchete permanece invariante bajo los movimientos II y III. Aunque no ocurre así para el movimiento I:

$$\begin{aligned}
\langle \delta \rangle &= A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \smile \rangle \\
&= (A(-A^2 - A^2) + A^{-1}) \langle \smile \rangle = -A^3 \langle \smile \rangle \\
\langle \bar{\delta} \rangle &= A \langle \smile \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle \\
&= (A + A^{-1}(-A^2 - A^2)) \langle \smile \rangle = -A^3 \langle \smile \rangle
\end{aligned}$$

Figura 1.14: Corchete de Kauffman del movimiento I

$$\begin{aligned}
\langle \bowtie \rangle &= A \langle \infty \rangle + A^{-1} \langle \smile \smile \rangle \\
&= A(-A^3) \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1}(A \langle \smile \smile \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle) \\
&= (-A^2 + A^{-2}) \langle \rangle \langle \rangle + I \langle \smile \smile \rangle = \langle \smile \smile \rangle
\end{aligned}$$

Figura 1.15: Corchete de Kauffman del movimiento II

Cuando sólo se utilizan el segundo y el tercer movimiento de Reidemeister para determinar la equivalencia de un diagrama con otro se dice que es una **isotopía regular**. Por esto se dice que el polinomio corchete de Kauffman es un invariante bajo isotopía regular.

Ejemplo 1.2.3. A continuación se calcula el corchete de Kauffman para el nudo trébol:

$$\begin{aligned}
\langle \bigcirc \rangle &= A \langle \infty \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle \\
&= A(-A^3) \langle \infty \rangle + A^{-1}(A \langle \infty \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle) \\
&= [-A^4(-A^3) + (-A^3) + A^{-2}(-A^3)] \langle \bigcirc \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}
\end{aligned}$$

Ahora se plantea que a partir del corchete de Kauffman se puede obtener un invariante de nudos. Consecuentemente se consideran nudos orientados, los cuales, para cada cruce del nudo tienen definido un signo que se mantiene bajo la siguiente convención: Considerando que el arco superior debe estar apuntando siempre hacia arriba, cuando el arco inferior cruza de derecha a izquierda el cruce será positivo y cuando cruza de izquierda a derecha será negativo (Figura 1.16), nótese que sin importar la orientación de un nudo, el signo de los cruces es el mismo, en cambio en los enlaces esto sí afecta ya que se tienen múltiples componentes.

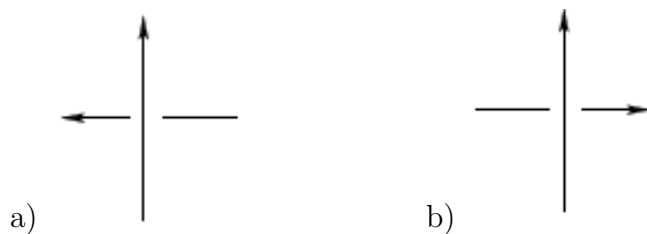


Figura 1.16: Cruce positivo (a) y cruce negativo (b)

Definición 1.2.4. En un diagrama de un nudo orientado D se le llama **writhe**, denotado como $w(D)$, al resultado de la suma de los signos de sus cruces (considerando que cuando el cruce es positivo es igual a 1 y cuando el cruce es negativo es igual a -1).

Es fácil verificar que el writhe también es un invariante bajo isotopía regular. Usando el writhe podemos obtener un invariante de nudos, tal como lo establece el siguiente resultado.

$$f_D(A) = (-A)^{-3w(D)} < D >$$

Al cual se le conoce como el **polinomio de Kauffman**.

Teorema 1.2.5. El polinomio de Kauffman es un invariante de nudos orientados.

La demostración de este teorema se puede encontrar en Murasugi [1].

Ejemplo 1.2.6. En el ejemplo 1.2.3, para el nudo trébol T con cruces negativos, se calculó el corchete de Kauffman, este resultado se usará para calcular ahora su polinomio $f_T(A)$. El corchete de Kauffman de T es $< T > = A^7 - A^3 - A^{-5}$ y en este caso $w(T) = -3$. Entonces se tiene que el polinomio de Kauffman es:

$$f_T(A) = (-A)^9(A^7 - A^3 - A^{-5}) = -A^{16} + A^{12} + A^4.$$

Hasta ahora se ha calculado el polinomio de Kauffman de un nudo. El siguiente resultado conocido muestra la relación entre el polinomio de Jones y el de Kauffman.

Teorema 1.2.7. El polinomio de Jones de un nudo orientado K es el polinomio en $t^{-\frac{1}{4}}$ con coeficientes enteros dado por:

$$V_K(t) = f_D(t^{-\frac{1}{4}}),$$

donde D es algún diagrama orientado del nudo K .

Finalmente, el polinomio de Jones para el nudo trébol T con cruces negativos se calcula como:

$$\begin{aligned}V_T(t) &= f_D(t^{-\frac{1}{4}}) \\V_T(t) &= -(t^{-\frac{1}{4}})^{16} + (t^{-\frac{1}{4}})^{12} + (t^{-\frac{1}{4}})^4 \\V_T(t) &= -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}\end{aligned}$$

Una vez que se han visto los conceptos necesarios de teoría de nudos, es necesario conocer también los conceptos de sistemas dinámicos, para esto en la siguiente sección se hablará de las definiciones correspondientes.

1.3. Sistemas Dinámicos

En esta parte se dan los conceptos que se requieren para las siguientes secciones. Algunos de estos conceptos se obtuvieron de *Teshcl* [6] y *Perko* [10]. Antes que nada se necesita establecer lo que es un espacio métrico y un espacio topológico, luego se da la definición de lo que es un sistema dinámico. Además de que se define lo que es el espacio fase, en el cual se representan las trayectorias de un sistema dinámico, las cuales son de interés para analizar su comportamiento y determinar si son un nudo.

Definición 1.3.1. *Un **espacio topológico** es un par (X, τ) , donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X que verifica las siguientes condiciones:*

1. $X \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$,
2. Dada una familia de conjuntos abiertos $\{A_i \in \tau, i \in I\}$ de elementos de τ , su unión $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$ también está en τ ,
3. Si $A_1, A_2 \in \tau$ entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$ (la intersección de dos elementos de la familia τ también es un elemento de la familia).

Se dice entonces, que la familia τ es una topología sobre X , y a sus elementos se les llama conjuntos **abiertos** de (X, τ) .

Otro concepto importante en sistemas dinámicos es el de espacio métrico.

Definición 1.3.2. *Sea X un conjunto. Se dice que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ define una **distancia** (o **métrica**) en X si se cumplen las propiedades siguientes:*

1. $d(x, y) \geq 0$ con igualdad si y sólo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad del triángulo).

Si el par (X, d) cumple 1, 2 y 3 se dice que es un **espacio métrico**.

Uno de los conceptos más usuales en espacios métricos es el de bola abierta.

Definición 1.3.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y x_0 un punto en X , la **bola abierta** con centro en x_0 y radio $r > 0$, es el conjunto:*

$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}.$$

Todo espacio métrico (X, d) tiene asociado un espacio topológico (X, τ_d) al tomar que los subconjuntos A de X son **abiertos** si, y sólo si, para cada x en A hay una bola abierta con centro en x contenida en A .

En lo siguiente se tomará como espacio métrico (X, d) al espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica d como la distancia usual, por ejemplo, la distancia usual en $\mathbb{R}$ es la definida por $d(x, y) = |x - y|$.

Definición 1.3.4. Sea E subespacio de $\mathbb{R}^n$ un espacio topológico (métrico) y T subespacio de $\mathbb{R}$. Un **sistema dinámico** sobre E es una aplicación C^1 , $\rho : E \times T \rightarrow E$, que satisface:

1. $\rho(x, 0) = x$, para todo $x \in E$.
2. $\rho(\rho(x, t), s) = \rho(x, t + s)$, para todo $x \in E$, y todo $t, s \in T$.

El espacio topológico E recibe el nombre de **espacio de fase** y T es el **conjunto temporal**, mientras que a la función $\rho(x, t)$ se le llama **flujo del sistema**.

En un sistema dinámico la función $\rho(x, t)$, que está definida para todo $t \in T$ y $x \in E$, describe cómo los puntos $x \in E$ evolucionan con el tiempo.

En un sistema dinámico se proporciona un proceso determinista que viene caracterizado por un número finito de variables que evolucionan según una función diferenciable. Se supondrá que dicho proceso está definido por variables $x_1, \dots, x_n$ las cuales evolucionan con el tiempo de manera: $\dot{x}_i = x_i(t)$.

Si M es una matriz de $n \times n$, entonces la función $\rho(x, t) = e^{Mt}x$ define un sistema dinámico en $\mathbb{R}^n$ y, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\rho(x_0, t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = Mx$, donde $x(0) = x_0$.

En las siguientes secciones se utilizarán sistemas dinámicos de este estilo, es decir, representados por ecuaciones diferenciales. Dada una ecuación diferencial de la forma anterior existe algo de sumo interés, las trayectorias periódicas.

Definición 1.3.5. Tomando $x_0 \in E$, se define la **trayectoria** de x_0 como el conjunto de puntos $\gamma(x_0) = \{\rho(x_0, t) | t \in \mathbb{R}\}$, el cual es el conjunto de valores que toma la función ρ en x_0 variando t .

Las trayectorias se suelen denotar por $x(t)$ o, si se quiere especificar la condición inicial, será $x(t, x_0)$. Como se mencionó anteriormente, es de gran interés estudiar las trayectorias periódicas de un sistema dinámico, pues éstas representan a los nudos que se mencionaron anteriormente.

Definición 1.3.6. Sea $x \in E$, se dice que x es un **punto periódico** si para algún $t \in \mathbb{R}$ mayor que cero, tal que $\rho(x, t) = x$.

Definición 1.3.7. Una trayectoria $\gamma(x_0) = \{\rho(x_0, t)\}$ se llama **periódica** si existe un $\delta \neq 0$ tal que $\rho(x_0, t + \delta) = \rho(x_0, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. El δ más pequeño que cumpla esto, se llamará **periodo** de la trayectoria.

Lema 1.3.8. $\rho(x_0, t)$ es periódica si, y sólo si, $\rho(x_0, \lambda) = x_0$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

En la Figura 1.17 se muestran ejemplos de trayectorias periódicas del sistema dinámico dado por las siguientes ecuaciones con $a = b = c = d = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (cx_1 - d)x_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Este es el sistema dinámico conocido como Lotka-Volterra, en este sistema todas las trayectorias son periódicas y en particular este sistema linealizado es matemáticamente equivalente al de un oscilador armónico. Por ejemplo, tomando la condición inicial x_0 en el punto $(0.5, 0.4)$, dado que la frecuencia $\omega = \sqrt{a/c} = 1$ y el período es $T = \frac{2\pi}{\omega}$ entonces el período de su trayectoria es 2π .

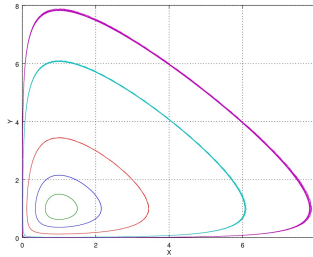


Figura 1.17: Ejemplo de trayectorias periódicas de 1.1.

Estos conceptos son básicos cuando se habla de sistemas dinámicos, ahora se hablará del concepto de atractor, el cual será de utilidad en secciones posteriores.

Definición 1.3.9. *Todo punto que cumple que $\rho(x_0, t) = x_0$ para todo $t \in T$, se le llama **punto fijo**.*

Definición 1.3.10. *Un **ciclo límite** es una trayectoria periódica aislada, es decir, no existen otras trayectorias periódicas en una vecindad de ésta. Más aún, las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose a lo que se le dice que es estable, o alejándose del ciclo límite lo cual se dice que es inestable.*

Como se puede ver, el ejemplo mostrado en la Figura 1.17 no cumple ser un ciclo límite. Esto debido a que todas sus trayectorias son periódicas

Un **atractor** es un conjunto al que convergen todas las trayectorias vecinas. Los puntos fijos estables y los ciclos límite estables son ejemplos de conjuntos atractores. Más precisamente, definimos un **atractor** como un conjunto cerrado Λ de E con las siguientes propiedades:

- Λ es un conjunto invariante: Cualquier trayectoria $x(t)$ que comienza en Λ permanece en Λ para todo $t \in T$ a través del sistema dinámico.
- Λ atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales: hay un conjunto abierto U que contiene a Λ tal que si $x(0) \in U$, entonces la distancia de $x(t)$ a Λ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Esto significa que Λ atrae a todas las trayectorias que comienzan lo suficientemente cerca de ella. La U más grande se llama **cuenca de atracción** de Λ .
- Λ es mínimo: no hay un subconjunto propio de Λ que satisfaga las condiciones anteriores.

Entre los tipos de atractores que se presentan en los sistemas dinámicos están también los atractores cuyo comportamiento es caótico, lo cual se verá posteriormente.

A continuación se enuncian los conceptos necesarios para saber lo que es un comportamiento caótico (estos se obtuvieron de *Strogatz* [8]), los cuales son de interés en este artículo ya que cuando las trayectorias de un sistema dinámico no son periódicas (es decir, no se obtienen nudos como soluciones del sistema) se desearía conocer qué tipo de comportamiento es entonces. En el siguiente capítulo se realiza un análisis de la variación de ciertos parámetros de un sistema dinámico que tiene un comportamiento caótico, esto con el propósito de observar las trayectorias generadas como solución del sistema al hacer esta variación.

Para poder hablar de algunos tipo de sistemas dinámicos, tendremos las siguientes definiciones:

Definición 1.3.11. *El sistema dinámico $\rho : E \times T \rightarrow E$ se llama **topológicamente transitivo** si, para cualquier par U, V de subconjuntos abiertos no vacíos de E , existe $n \geq 0$ tal que la intersección entre $\rho^n(U)$ y V es distinta del vacío.*

Definición 1.3.12. *El sistema dinámico $\rho : E \times T \rightarrow E$ se dice que tiene **dependencia sensitiva a condiciones iniciales** si existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, existe algún $y \in E$ con $d(x, y) < \varepsilon$ tal que, para un $n > 0$, $d(\rho^n(x), \rho^n(y)) > \delta$. El número δ se llama **constante de sensibilidad** para T .*

Una vez teniendo estos conceptos definidos, se puede dar una definición de un sistema dinámico con un comportamiento caótico.

Definición 1.3.13 (Devaney [17]). *El sistema dinámico $\rho : E \times T \rightarrow E$ se dice ser **caótico** si se verifican que: el conjunto de puntos periódicos de la función ρ es denso en E , ρ es topológicamente transitiva y ρ tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales.*

Como se mencionó, el concepto de un atractor de comportamiento caótico será de utilidad en el Capítulo 2, donde se presentan los resultados de variar ciertos parámetros en el sistema de Lorenz.

A continuación se exhibirán las trayectorias obtenidas al realizar variaciones en las ecuaciones que definen el sistema de Lorenz, en donde se obtienen desde puntos fijos, ciclos límites y trayectorias diversas.

Capítulo 2

Trayectorias en el sistema de Lorenz

Para esta tesis, se ha estudiado los conceptos fundamentales en el área de sistemas dinámicos, y se analizó de manera numérica dichos sistemas, realizando las simulaciones correspondientes de las soluciones del sistema de Lorenz al variar dos de sus coeficientes. Además se busca identificar los diferentes comportamientos que se obtienen al realizar estos cambios en dichos parámetros.

En artículos como *Chen y Banks* [2] y *Birman* [4] se ha reportado que el sistema dinámico de Lorenz, presenta un comportamiento caótico, en este trabajo se plantea la cuestión de qué tipo de comportamiento se presenta en este sistema al variar ciertos parámetros.

En *Williams* [5] se estudian las trayectorias periódicas de un flujo en una 3-variedad que forman nudos, se muestra que estos nudos y cómo están enlazados, pueden ser estudiados con la ayuda de *plantillas* o *sujetadores de nudos*.

Definición 2.0.1. Las **plantillas** $L(m, n)$ consisten en un semiflujo que desciende de la línea β en la Figura 2.1, formando dos ramales, el ramal X tiene m giros, mientras que el ramal Y tiene n . La convención del signo para los giros es que los giros a la izquierda son positivos y a la derecha son negativos. Los dos ramales se conectan tangencialmente en β .

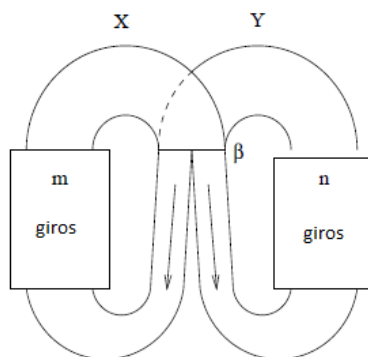


Figura 2.1: Plantilla tipo Lorenz.

A la plantilla $L(0, 0)$ se le conoce como la **plantilla Lorenz**.

Como se mencionó en la Sección 1.1, también es de interés analizar el comportamiento de las trayectorias que no son periódicas, es decir, que no representan a un nudo en los sistemas dinámicos que se han mencionado. Para esto se realizaron variaciones de dos de los coeficientes del sistema de Lorenz y se obtuvieron las simulaciones correspondientes.

En artículos como *Chen y Banks* [2] y *Birman* [4] se ha reportado que el sistema dinámico de Lorenz, el cual consiste de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 10(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= (a - x_3)x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{2.1}$$

presenta un comportamiento caótico. En este trabajo se plantea la cuestión de qué tipo de comportamiento se presenta en este sistema al variar ciertos parámetros.

En *Chen y Banks* [2] se analiza el sistema de Lorenz con los valores de $a = 24$ y $b = 8/3$ y en *Birman* [4] con los valores $a = 25$ y $b = 2$,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 10(x_2 - x_1), & \dot{x}_1 &= 10(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= (24 - x_3)x_1 - x_2, & \dot{x}_2 &= (25 - x_3)x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3, & \dot{x}_3 &= x_1x_2 - 2x_3.\end{aligned}$$

En estos artículos se ha reportado que este sistema tiene un comportamiento caótico con estos parámetros. Cuando a y b se varían en los rangos de $[0, 60]$ y $[0, 11]$ respectivamente, se obtiene que al hacer estas variaciones se genera, para algunos pares, a, b , el mismo comportamiento caótico observado con $a = 24$ y $b = 8/3$ como se muestra en la Figura 2.2. Aunque en otros casos se presentan ciclos límite, atractores estables y otros comportamientos. Para los sistemas mencionados anteriormente se obtienen las siguientes simulaciones de sus soluciones:

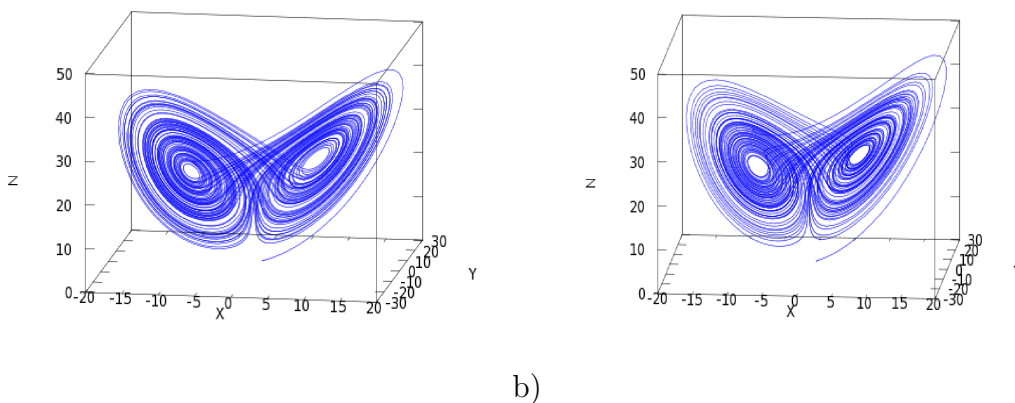


Figura 2.2: Simulaciones de la solución del sistema de Lorenz con $a = 24$ y $b = \frac{8}{3}$ (a) y $a = 25$ y $b = 2$ (b).

A continuación se muestra una imagen con los comportamientos encontrados de sus soluciones al variar los parámetros a y b :

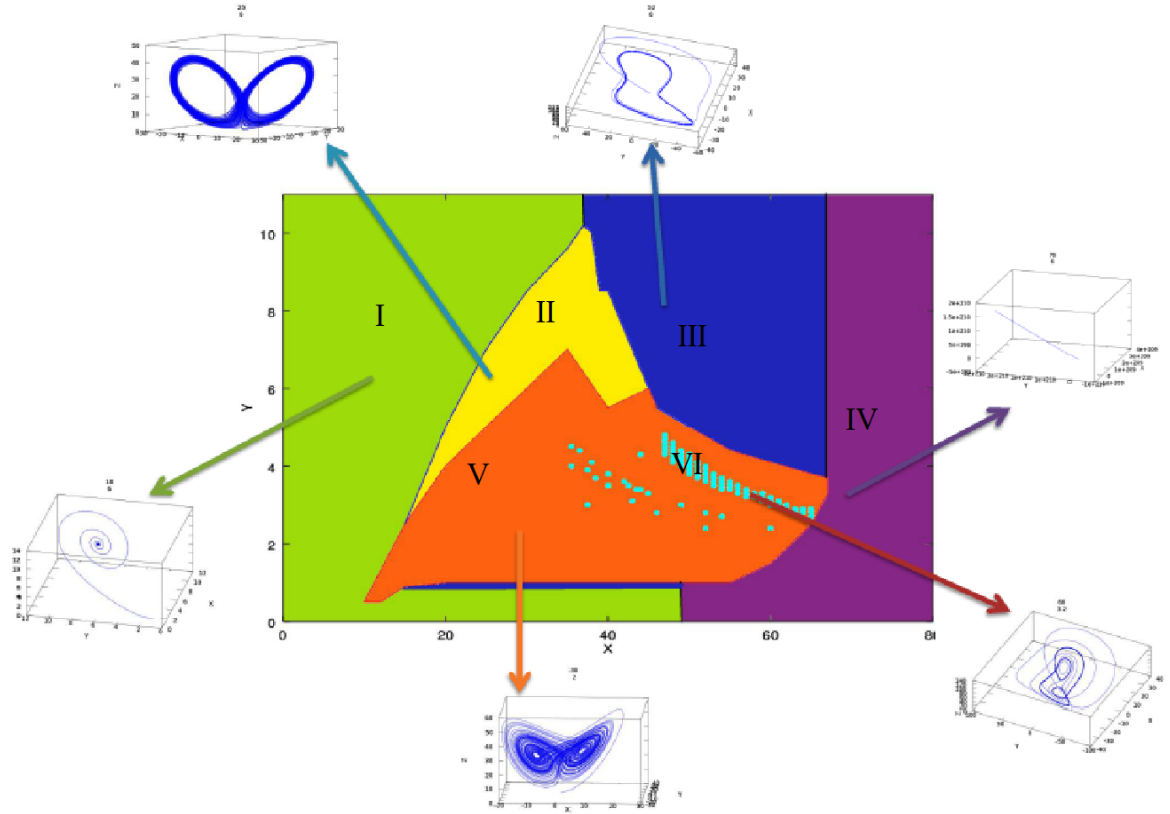


Figura 2.3: Áreas en las que se preserva el comportamiento de las soluciones del sistema de Lorenz al variar los parámetros a y b .

En la Figura 2.3 se presenta un ejemplo de cómo son las simulaciones en cada área delimitada con colores enumeradas respectivamente, por ejemplo en *II* y *V* se preserva el comportamiento caótico, mientras que en *III* se presentan ciclos límite, en *I* y *IV* el sistema no es estable y en los casos aislados de *VI* se muestra un comportamiento distinto ya que se muestran dos puntos de estabilidad pero las trayectorias también se mantienen semejantes a una sola órbita.

Los valores que se consideran en el eje X son los que toma el parámetro a en el sistema dinámico, mientras que en el eje Y son los que se toman en el parámetro b , de esta forma se obtiene que en las diferentes áreas mostradas en la imagen anterior, ya no se presenta un comportamiento similar al reportado con los parámetros anteriores, pero en el área de color naranja sí se aprecia una similitud con dicho comportamiento caótico.

Las simulaciones de las trayectorias obtenidas al variar los parámetros, mostradas en la Figura 2.3 se obtuvieron realizando un muestreo con la variación en sus paráme-

tros de la forma siguiente: desde $a = 0$ hasta $a = 30$ se varia en 0.5 este parámetro y desde $a = 30.01$ hasta $a = 80$ se varia en 0.01, de $b = 0$ hasta $b = 11$ se varía en 0.01, se toma esta variación de los parámetros con el objetivo de analizar una mayor parte de los valores posibles de a y b , ya que estos tienen una infinidad de opciones. Se puede decir que los resultados obtenidos han sido calculados de manera discreta. Fuera del área analizada también se hicieron algunas simulaciones y se encuentra que en algunos casos, para $a = 300, b = 160$, se tiene un comportamiento caótico. Esto da pie a que se analicen áreas mayores. Haciendo uso de la plantilla de Lorenz, en trabajos futuros también se pueden determinar qué tipo de nudos se obtienen como soluciones en estas trayectorias cuando sean periódicas.

De la Figura 2.5 a la Figura 2.8 se muestran algunas de las simulaciones obtenidas al variar los parámetros, los valores que se estuvieron variando se representan en las rectas de la Figura 2.4.

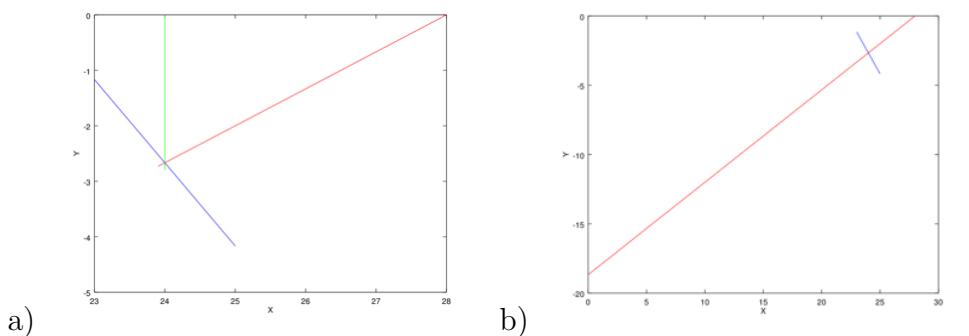


Figura 2.4: Recta azul con valores de $(23, -7/6)$ a $(25, -25/6)$, recta roja con valores de $(23.9036, -2.73094)$ a $(28, 0)$, recta verde con valores de $(24, 0)$ a $(24, -2.8)$ (a), recta azul con valores de $(23, -7/6)$ a $(25, -25/6)$ y recta roja con valores de $(0, -56/3)$ a $(28, 0)$

- En la Figura 2.5 se muestran las simulaciones del sistema de Lorenz 2 con variación de parámetros con valores de $(23, -7/6)$ a $(25, -25/6)$, en la recta azul de la Figura 2.4 (a).

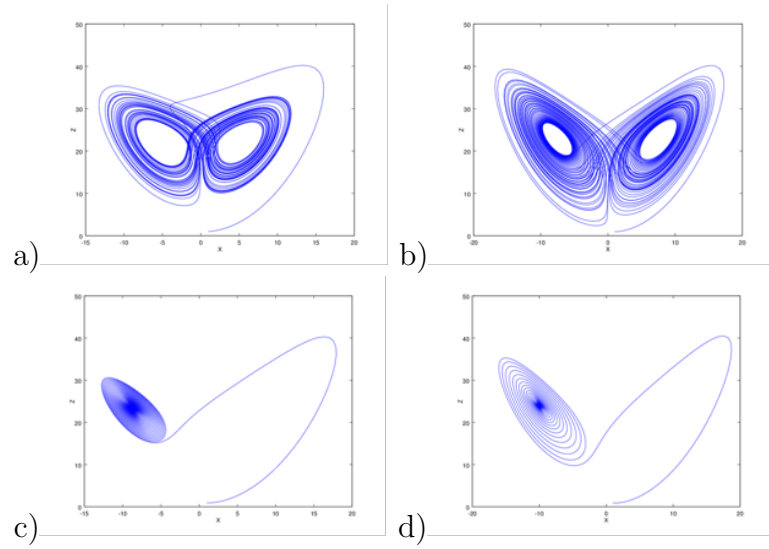


Figura 2.5: Simulaciones de la solución del sistema de Lorenz con $a = 23$ y $b = -1,1667$ (a), $a = 23$ y $b = -2,5167$ (b), $a = 24,4$ y $b = -3,2667$ (c), $a = 25$ y $b = -4,1667$ (d).

- Ahora, en la Figura 2.6 se muestran las simulaciones del sistema de Lorenz 2 con variación de parámetros con valores de $(23.9036, -2.73094)$ a $(28, 0)$, en la recta roja de la Figura 2.4 (a).

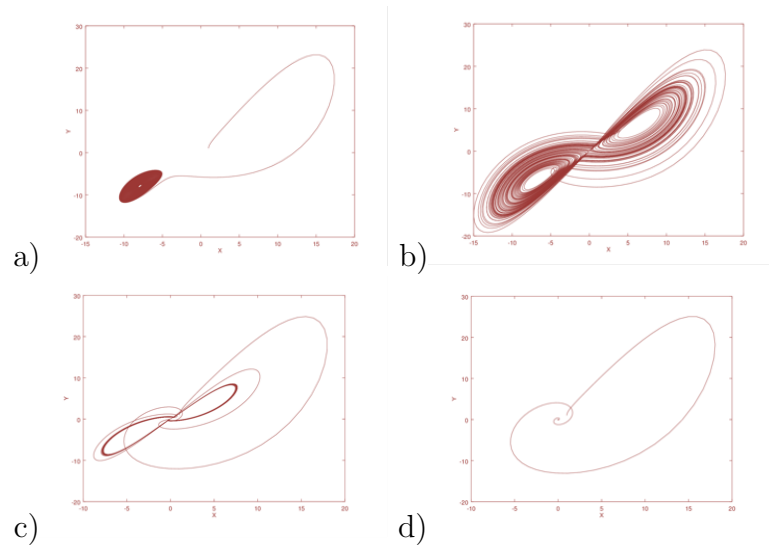


Figura 2.6: Simulaciones de la solución del sistema de Lorenz con $a = 23,90360$ y $b = -2,73094$ (a), $a = 25,33734$ y $b = -1,77511$ (b), $a = 27,38554$ y $b = -0,40964$ (c), $a = 28$ y $b = 0$ (d).

- Ahora, en la Figura 2.7 se muestran las simulaciones del sistema de Lorenz 2 con variación de parámetros con valores de $(24, 0)$ a $(24, -2.8)$, en la recta verde de la Figura 2.4 (a).

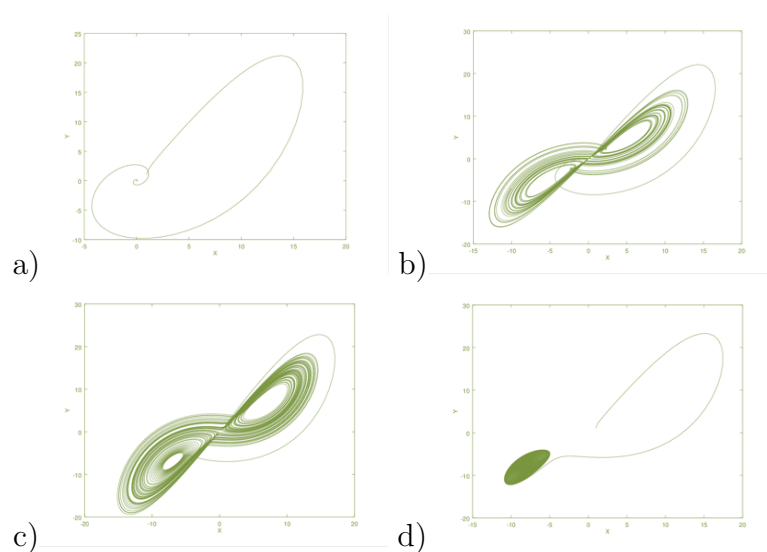


Figura 2.7: Simulaciones de la solución del sistema de Lorenz con $a = 24$ y $b = 0$ (a), $a = 24$ y $b = -1,12$ (b), $a = 24$ y $b = -2,1$ (c), $a = 24$ y $b = -2,8$ (d).

- Ahora, en la Figura 2.8 se muestran las simulaciones del sistema de Lorenz 2 con variación de parámetros con valores de $(0, -56/3)$ a $(28, 0)$ en la recta roja de la Figura 2.4 (b).

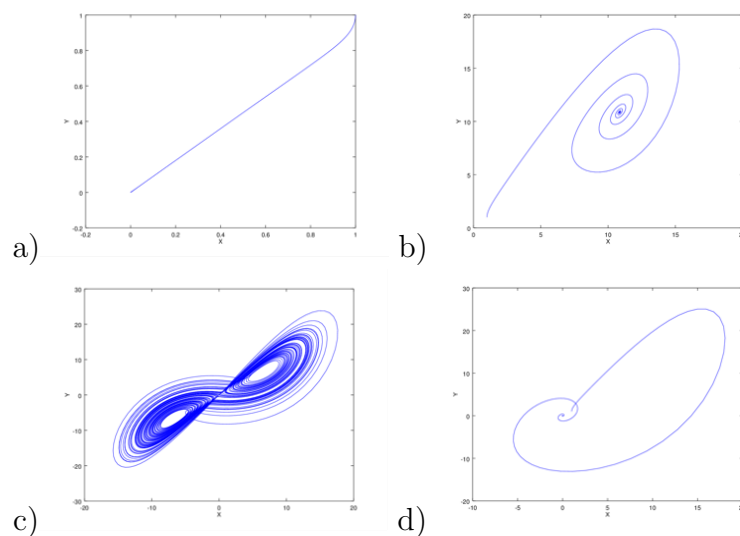


Figura 2.8: Simulaciones de la solución del sistema de Lorenz con $a = 0$ y $b = -18,66667$ (a), $a = 16,8$ y $b = -7,46667$ (b), $a = 25,2$ y $b = -1,86667$ (c), $a = 28$ y $b = 0$ (d).

Con este análisis, se concluye que existen valores de los parámetros a y b para los cuales el comportamiento ya no es caótico e incluso en algunos se tiene un solo atractor. En algunos otros se puede visualizar trayectorias anudadas, pero ese no es el objetivo de esta tesis.

Una vez que se han definido los conceptos necesarios de sistemas dinámicos y que se ha hablado de trayectorias obtenidas en un sistema dinámico en particular, se procede con la exhibición del primer método analizado en *Chen y Banks* [2] el cual consiste en revolucionar un sistema dinámico y así obtener una familia de nudos.

Capítulo 3

Métodos existentes para generar trayectorias anudadas

3.1. Sistemas dinámicos de revolución

En *Chen y Banks* [2] se discute el efecto de revolucionar sistemas dinámicos y se muestra que hay un sistema cuyas soluciones contienen todos los nudos toroidales. La construcción del sistema dinámico que representa la revolución de un sistema es por medio de un cambio a coordenadas polares para tomar en cuenta la elevación de la curva en un nuevo eje y posteriormente hacer la conversión en coordenadas rectangulares.

Retomando los sistemas dinámicos que son soluciones de ecuaciones diferenciales del tipo $\dot{x} = f(x)$ que se mencionaron en la sección anterior, se considera el caso de un sistema dinámico de una dimensión, descrito por la siguiente ecuación diferencial.

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Es una ecuación diferencial escalar tal que $f(0) = 0$. Usando coordenadas polares $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ se define un nuevo sistema a partir de (3.1) al cual llamaremos el **sistema de revolución**.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r), \\ \dot{\theta} &= c, \end{aligned} \quad \text{donde } c \text{ es una constante.}$$

A partir de las ecuaciones de conversión entre coordenadas rectangulares y polares:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\theta), \\ x_2 &= r \sin(\theta), \\ r^2 &= x_1^2 + x_2^2, \end{aligned}$$

y tomando sus derivadas parciales se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta}, \\ \dot{x}_2 &= \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Ahora, al sustituir en las ecuaciones anteriores los valores de $\sin(\theta) = \frac{x_2}{r}$, $\cos(\theta) = \frac{x_1}{r}$, $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$, éstas se reescriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(r) \left(\frac{x_1}{r} \right) - r \left(\frac{x_2}{r} \right) c, \\ \dot{x}_2 &= f(r) \left(\frac{x_2}{r} \right) + r \left(\frac{x_1}{r} \right) c.\end{aligned}$$

La constante c puede ser reemplazada por cualquier función continua de x_1, x_2 que sea distinta de cero en todas partes. Esto simplemente significa que la revolución se realiza a diferentes velocidades locales. En general, si c es una función del estado x , se le llama a $c(x)$ la *función de giro*. Por último, en términos de coordenadas rectangulares se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - cx_2, \\ \dot{x}_2 &= f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + cx_1.\end{aligned}$$

Para el caso general, se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

El sistema de revolución se construye considerando que para poder rotarlo se necesita satisfacer la siguiente condición:

$$f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0 \text{ para todo } x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R},$$

lo cual implica que el sistema deberá girar alrededor del hiperplano $x_n = 0$ con una función de giro $c(x) = c(x_1, \dots, x_n)$, obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{x_n^2 + x_{n+1}^2}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{x_n^2 + x_{n+1}^2}), \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{x_n^2 + x_{n+1}^2}) \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + x_{n+1}^2}} - c(x)x_{n+1}, \\ \dot{x}_{n+1} &= f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{x_n^2 + x_{n+1}^2}) \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n+1}^2}} + c(x)x_n.\end{aligned}$$

En *Chen y Banks* [2] se considera el sistema de **Volterra-Lotka** para hacerlo girar con el método anterior. Como resultado de esta revolución se obtiene un sistema que contiene una infinidad de trayectorias periódicas anudadas.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1 - x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (x_1 - 1)x_2.\end{aligned}$$

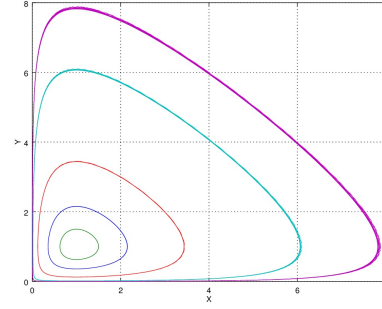


Figura 3.1: Representación gráfica de trayectorias del sistema Volterra-Lotka.

Después de aplicar el método anterior, se tiene que el sistema dinámico de revolución asociado es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1 - \sqrt{x_2^2 + x_3^2})x_1, \\ \dot{x}_2 &= (x_1 - 1)x_2 - c(x)x_3, \\ \dot{x}_3 &= (x_1 - 1)x_3 + c(x)x_2.\end{aligned}$$

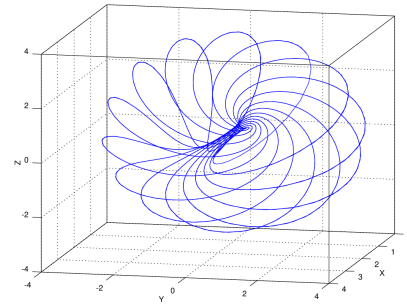


Figura 3.2: Representación gráfica de la solución del sistema Volterra-Lotka de revolución.

En éste sistema dinámico se observa que la solución del sistema en algunas condiciones iniciales es un nudo toroidal (un bosquejo de la prueba de esto se encuentra en *Chen y Banks* [2]). Dada una condición inicial existe una única trayectoria que pasa por dicha condición inicial.

Existen casos en que la trayectoria no es periódica para ciertas condiciones iniciales (esto se analiza más adelante), en las cuales la trayectoria no forma un nudo, por lo cual también se puede analizar qué tipo de comportamiento se presenta en este sistema dinámico en estas condiciones iniciales, una idea es que se presente un comportamiento caótico, pero esto aún no está demostrado.

En esta sección se exploró un sistema dinámico cuya solución puede ser una familia de nudos. En la siguiente sección se presentará el método existente para tener cualquier nudo como solución a partir de la construcción de un sistema dinámico.

3.2. Sistemas dinámicos que generan trenzas como solución.

Ahora se analizará la forma de obtener nudos a partir de la construcción de una trenza la cual representa la solución de un sistema dinámico, y así utilizar el teorema de Alexander para obtener el nudo deseado. Para construir el sistema dinámico cuya solución representa a una trenza utilizamos las funciones f , F y φ , las cuales se describen y se muestran sus representaciones gráficas a continuación:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)} & \text{si } a < x < b, \\ 0 & \text{si } x < a \text{ o } x > b. \end{cases}$$

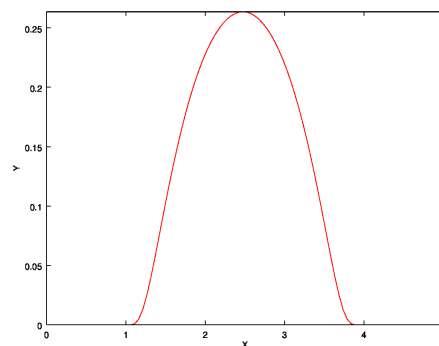


Figura 3.3: Gráfica de f .

$$F(x) = \frac{\int_x^b f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}.$$

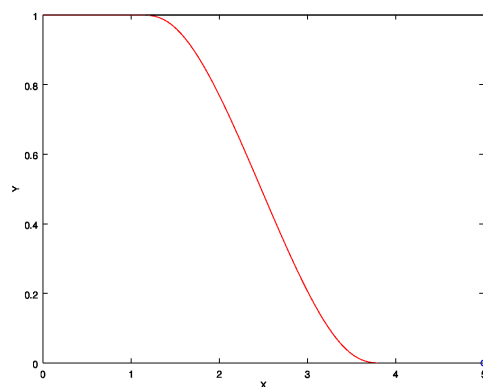
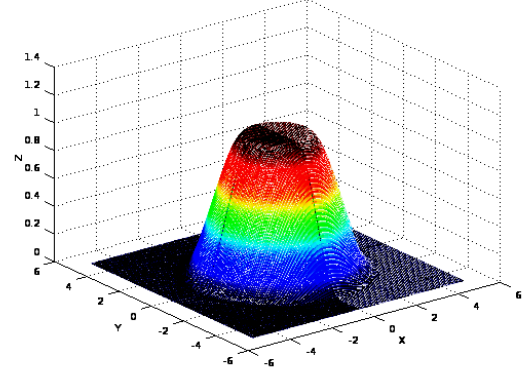


Figura 3.4: Gráfica de F .

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = F(x_1^2 + \dots + x_m^2).$$


Figura 3.5: Gráfica de φ .

Ahora, a partir de un nudo, se construye una trenza cuya cerradura sea dicho nudo. Así, al encontrar un sistema dinámico cuya solución genera un giro entre dos cuerdas de una trenza, sólo se debe iterar el proceso para dar el número apropiado de giros y posteriormente repetirlo para la cantidad de cuerdas que tenga dicha trenza.

En el plano XZ se obtienen las siguientes ecuaciones para una cuerda de una trenza

$$\dot{x} = \pm(\varphi(t; a, b) - \varphi(t; b, c)), \quad \text{donde } a < b < c,$$

cuando la cuerda es ascendente, como se muestra en la figura 17, se considera el signo $+$ y cuando es descendente, como se muestra en la figura 18, el signo $-$.

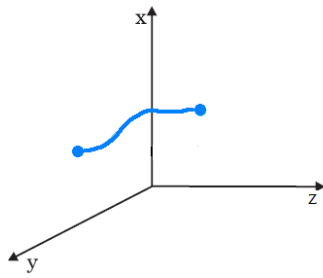


Figura 3.6: Cuerda ascendente.

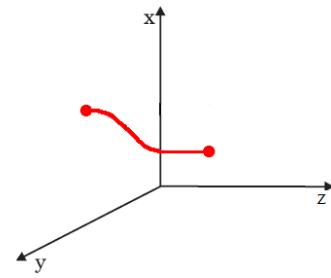


Figura 3.7: Cuerda descendente.

Para un cruce se tiene:

$$\dot{y} = \pm(\varphi(t; b, c) - \varphi(t; a, b) + \varphi(t; c, d) - \varphi(t; d, e)), \quad \text{donde } a < b < c < d < e,$$

para un cruce por arriba se usa el signo $+$, y para un cruce por abajo el signo $-$. Asumiendo que $\dot{z}$ es una constante y que $z = t$; entonces el sistema dinámico cuya

solución es el giro de una cuerda es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=1}^p \pm(\varphi(t; a_i, b_i) - \varphi(t; b_i, c_i)), \quad \text{con } a_i < b_i < c_i, \\ \dot{y} &= \sum_{i=1}^p \pm(\varphi(t; a_i, b_i) - \varphi(t; b_i, c_i) + \varphi(t; d_i, e_i) - \varphi(t; c_i, d_i)), \quad \text{con } a_i < b_i < c_i < d_i < e_i, \\ \dot{z} &= c \text{ con } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Donde p es el número total de giros en esta cuerda, el signo $\pm$ se toma dependiendo del correspondiente cruce i , si es ascendente, descendente, cruce por debajo o por arriba.

Al tener tres cuerdas, se tendrán tres sistemas similares a (3.2), pero al final sólo se quiere tener un sólo sistema dinámico, para lo cual se utiliza una función “tubo” cuyo radio será $\sqrt{b}$, la función C^∞ es la siguiente:

$$\psi = \varphi((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2; a, b),$$

la cual sirve para que la cuerda que se genera en los parámetros definidos siga la trayectoria delimitada por la región que define esta función.

Mientras el radio sea suficientemente pequeño, existe una vecindad alrededor de cada cuerda que no tiene intersección con otras vecindades, el interior de este “tubo” que representa dicha vecindad, todas las trayectorias siguen la cuerda de en medio, mientras que afuera todo queda anulado, lo que significa que tanto $\dot{x}$, $\dot{y}$ como $\dot{z}$ son 0.

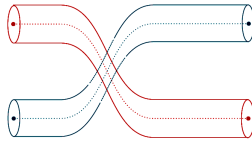


Figura 3.8: Un tubo alrededor de cada cuerda existente.

Estas funciones representan los tubos, donde (x_1, y_1) son las coordenadas de la cuerda de en medio con respecto a diferentes valores de t y parámetros a y b tales que no se intersecan los tubos. Consecuentemente, el sistema dinámico cuya solución es la trenza es:

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^q \psi_j \cdot \dot{x}_j, \quad \dot{y} = \sum_{j=1}^q \psi_j \cdot \dot{y}_j, \quad \dot{z} = \psi_j \cdot c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.\tag{3.3}$$

Donde q es el número total de cuerdas en la trenza, ψ_j es la función tubo para la j -ésima cuerda, y $\dot{x}_j$ y $\dot{y}_j$ son los sistemas dinámicos para la j -ésima cuerda obtenida de (3.2).

A continuación se muestra un ejemplo de cómo obtener el sistema dinámico al que se le asocia una trenza como solución.

Ejemplo 3.2.1. Se considera el nudo trébol, el cual, por el Teorema de Alexander, se puede representar como una trenza.

El sistema dinámico que tiene como solución una de sus cuerdas con los parámetros siguientes: $a=1$, $b=1.5$, $c=2$, $d=2.5$, $e=3$, $f=3.5$, $g=4$, $h=4.5$, $i=5$, es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varphi(t; a, b) - \varphi(t; b, c) + \varphi(t; e, f) - \varphi(t; d, e) + \varphi(t; g, h) - \varphi(t; h, i), \\ \dot{y} &= \varphi(t; a, \frac{a+b}{2}) - \varphi(t; \frac{a+b}{2}, b) + \varphi(t; \frac{b+c}{2}, c) - \varphi(t; b, \frac{b+c}{2}) + \varphi(t; \frac{d+e}{2}, e) \\ &\quad - \varphi(t; d, \frac{d+e}{2}) + \varphi(t; \frac{e+f}{2}, f) - \varphi(t; e, \frac{e+f}{2}) + \varphi(t; g, \frac{g+h}{2}) - \varphi(t; \frac{g+h}{2}, h) \\ &\quad + \varphi(t; \frac{h+i}{2}, i) - \varphi(t; h, \frac{h+i}{2}), \\ \dot{z} &= 1.\end{aligned}$$

Para la otra cuerda de la trenza las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\varphi(t; a, b) + \varphi(t; b, c) - \varphi(t; e, f) + \varphi(t; d, e) - \varphi(t; g, h) + \varphi(t; h, i), \\ \dot{y} &= -\varphi(t; a, \frac{a+b}{2}) + \varphi(t; \frac{a+b}{2}, b) - \varphi(t; \frac{b+c}{2}, c) + \varphi(t; b, \frac{b+c}{2}) - \varphi(t; \frac{d+e}{2}, e) \\ &\quad + \varphi(t; d, \frac{d+e}{2}) - \varphi(t; \frac{e+f}{2}, f) + \varphi(t; e, \frac{e+f}{2}) - \varphi(t; g, \frac{g+h}{2}) + \varphi(t; \frac{g+h}{2}, h) \\ &\quad - \varphi(t; \frac{h+i}{2}, i) + \varphi(t; h, \frac{h+i}{2}), \\ \dot{z} &= 1.\end{aligned}$$

Al considerar una función ψ que se aplica a cada una de las cuerdas, se obtiene un sistema como en (3.3), el cual es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \psi_1 \cdot (\varphi(t; a, b) - \varphi(t; b, c) + \varphi(t; e, f) - \varphi(t; d, e) + \varphi(t; g, h) - \varphi(t; h, i)) \\ &\quad + \psi_2 \cdot (-\varphi(t; a, b) + \varphi(t; b, c) - \varphi(t; e, f) + \varphi(t; d, e) - \varphi(t; g, h) + \varphi(t; h, i)), \\ \dot{y} &= \psi_1 \cdot (\varphi(t; a, \frac{a+b}{2}) - \varphi(t; \frac{a+b}{2}, b) + \varphi(t; \frac{b+c}{2}, c) - \varphi(t; b, \frac{b+c}{2}) + \varphi(t; \frac{d+e}{2}, e) \\ &\quad - \varphi(t; d, \frac{d+e}{2}) + \varphi(t; \frac{e+f}{2}, f) - \varphi(t; e, \frac{e+f}{2}) + \varphi(t; g, \frac{g+h}{2}) - \varphi(t; \frac{g+h}{2}, h) \\ &\quad + \varphi(t; \frac{h+i}{2}, i) - \varphi(t; h, \frac{h+i}{2})) \\ &\quad + \psi_2 \cdot (-\varphi(t; a, \frac{a+b}{2}) + \varphi(t; \frac{a+b}{2}, b) - \varphi(t; \frac{b+c}{2}, c) + \varphi(t; b, \frac{b+c}{2}) - \varphi(t; \frac{d+e}{2}, e) \\ &\quad + \varphi(t; d, \frac{d+e}{2}) - \varphi(t; \frac{e+f}{2}, f) + \varphi(t; e, \frac{e+f}{2}) - \varphi(t; g, \frac{g+h}{2}) + \varphi(t; \frac{g+h}{2}, h) \\ &\quad - \varphi(t; \frac{h+i}{2}, i) + \varphi(t; h, \frac{h+i}{2})), \\ \dot{z} &= \psi_1 + \psi_2.\end{aligned}$$

Al hacer la simulación de la solución del sistema (3.4) en los valores iniciales $[0.1, 0 \ 0]$ y $[1, 0, 0]$, se obtiene:

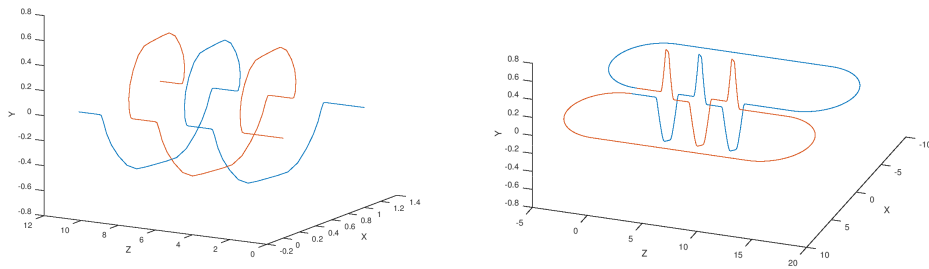


Figura 3.9: Simulación de la 2-trenza y del nudo que se obtiene como solución del sistema dinámico (3.4).

En la Figura 3.9 se muestran las trayectorias en que pasan dos condiciones iniciales en el sistema de la 2-trenza, así como la cerradura de esta misma y se observa que al cerrarse tenemos un sólo sistema dinámico cuya trayectoria es cerrada y se da a partir de una sola condición inicial en el sistema correspondiente a la 2-trenza que se utilizó (las ecuaciones que definen dicha cerradura se pueden encontrar en el [Código 4] del Apéndice).

Hasta ahora, se ha exhibido un método para obtener cualquier nudo a partir de la construcción de un sistema dinámico cuya cerradura de la trenza que este genera como su trayectoria en el espacio fase.

A continuación se planteará cómo obtener, a diferencia de este primer método, toda una familia de nudos con un sólo sistema dinámico variando la condición inicial de la trayectoria.

Capítulo 4

Sistema dinámico anudado propuesto

4.1. Nuevo sistema dinámico de revolución

En este capítulo se aplicará el método en *Chen y Banks* [2] a otro sistema dinámico en el que las trayectorias que se obtienen como solución son circulares.

Dado $a_0 > 0$ se considera el siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = y - a_0, \quad \dot{y} = -x + a_0, \quad (4.1)$$

para asegurarse de que sólo se van a considerar las trayectorias en el primer cuadrante del plano cartesiano, a este sistema se la aplica una función “radio” muy similar a la función “tubo” antes vista. Para esto primero se considera la siguiente función:

$$h(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x-n} - \frac{1}{x-m}\right)} & \text{si } m < x < n, \\ 0 & \text{si } x \leq m \text{ o } x \geq n. \end{cases}$$

donde m y n representan los radios para los cuales se van a delimitar las trayectorias del sistema, a partir de m estas empiezan a desvanecerse de tal manera que para n ya no se tiene ninguna de ellas. Luego, la función radio es la siguiente:

$$\rho(x, y) = \frac{\int_m^n \frac{h(r) dr}{\sqrt{(x-a_0)^2 + (y-a_0)^2}}}{\int_m^n h(r) dr}, \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \text{ y con } m, n \text{ parámetros definidos.}$$

Aplicando la función ρ al sistema (4.1), se obtiene un nuevo sistema que tiene delimitadas sus trayectorias al primer cuadrante del plano cartesiano.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho(x, y)[y - a_0], \\ \dot{y} &= \rho(x, y)[-x + a_0]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Después, a (4.2), se le aplica el método de revolución obteniendo el nuevo sistema dinámico de tres variables:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \rho(x, \sqrt{y^2 + z^2}) \left(\sqrt{y^2 + z^2} - a_0 \right), \\
\dot{y} &= \rho(x, \sqrt{y^2 + z^2}) \left([-x + a_0] \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) - c(x, y, z)z \right), \\
\dot{z} &= \rho(x, \sqrt{y^2 + z^2}) \left([-x + a_0] \left(\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) + c(x, y, z)y \right).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Nótese que dada una condición inicial (x_0, y_0, z_0) fuera del toro T_1 , generado por la revolución del sistema y mostrado en la Figura 4.1, se tiene que $\rho(x_0, \sqrt{y_0^2 + z_0^2}) = 0$. Por lo cual ésta condición es un punto fijo para el sistema dinámico (4.3); lo mismo se aplica si la condición inicial se encuentra en la frontera $\partial(T_1)$ ya que en este caso el numerador del cociente definido por $\rho(x, y)$ será igual a cero.

Por otro lado, en el caso de que $m = 0.4$, $n = 0.5$, $a_0 = 3$ y $c(x, y, z) = 5/7$ es una función constante; para la condición inicial $(3, 2, 3, 2, 0, 3) \in T_1$ la solución es el nudo toroidal $T(5, 7)$, como se observa en la Figura 4.1 (b). Aunque como c es constante, cualquier condición inicial dentro de T_1 dará lugar al nudo toroidal $T(5, 7)$ como solución. Además, si $c(x, y, z) = p/q$ con $0 < p/q < 1$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$, entonces nos dará el nudo toroidal $T(p, q)$ como solución para (4.3). Por lo tanto, para obtener todos los nudos toroidales $T(p, q)$, en lugar de una función constante se va a utilizar una función c adecuada, con dominio en $\mathbb{R}^3$, que incluya el intervalo $(0, 1)$ en su rango; y así obtener todos los nudos toroidales $T(p, q)$.

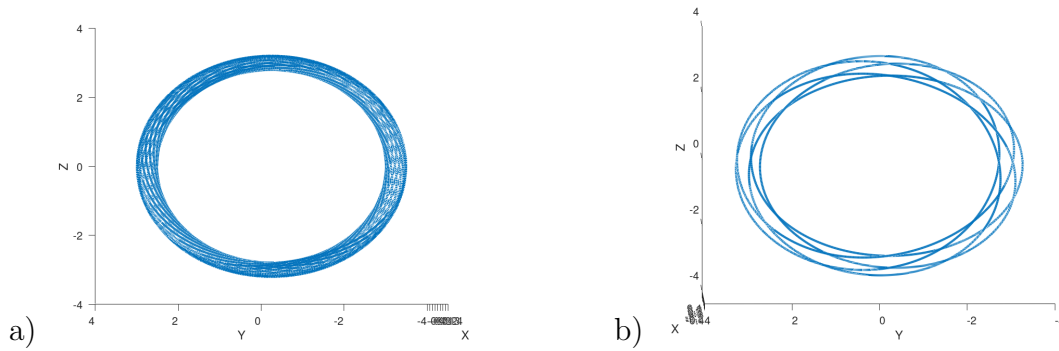


Figura 4.1: Toro T_1 generado por el método de revolución (a) y el nudo $T(5, 7)$ en este (b).

Para definir la función c , dado $0 \leq \lambda \leq n$, sea Γ_λ el círculo:

$$\Gamma_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_0)^2 + (y - a_0)^2 = \lambda^2\},$$

y sea T_λ el toro generado al rotar el conjunto Γ_λ alrededor del eje y . Hay que tener en cuenta que ρ es constante a lo largo de T_λ y $\bigcup_{0 \leq \lambda \leq n} T_\lambda$ es el toro sólido T_1 . Entonces c estará definido por:

$$c(x, y, z) = \frac{5}{2}\lambda, \quad \text{donde } (x, y, z) \in T_\lambda.$$

4.2. UN NUEVO SISTEMA DINÁMICO CON TODOS LOS NUDOS TOROIDALES COMO SOL

Tenga en cuenta que c es constante a lo largo de cada T_λ , también se tiene que $(0, 1) \subset c([0, m])$ y si $\lambda = \frac{2p}{5q}$ entonces $c(x, y, z) = \frac{p}{q}$ y el nudo obtenido es $T(p, q)$. Otra forma de definir c es:

$$c(x, y, z) = \frac{5}{2} \sqrt{(a_0 - \sqrt{x^2 + z^2})^2 + (a_0 - y)^2}. \quad (4.4)$$

Teorema 4.1.1. *Dado el sistema dinámico (4.3), donde c se define como en (4.4), este contiene todos los nudos toroidales como solución.*

Demostración. Consideremos que para la condición inicial $(r, r, 0)$, se tiene $c(r, r, 0) = \frac{5}{2}\lambda_r$, donde $(r, r, 0)$ pertenece a T_{λ_r} y $\lambda_r = (a_0 - r)\sqrt{2}$ es la distancia entre $(r, r, 0)$ y $(a_0, a_0, 0)$. Esto implica que para obtener $T(p, q)$ como solución debemos tener $r = a_0 - \frac{p}{q} \frac{2}{5\sqrt{2}}$ y por lo tanto $c(r, r, 0) = \frac{p}{q}$. De ello se deduce que, si $0 < \lambda_r < 0.4$ entonces $0 < \frac{5}{2}\lambda_r < 1$ y, por lo tanto, ese sistema (4.6) tiene todos los nudos toroidales como soluciones. $\square$

Ejemplo 4.1.2. Si $r' = a_0 - \frac{2}{3} \frac{2}{5\sqrt{2}}$ entonces $c(r', r', 0) = \frac{2}{3}$ y la trayectoria del sistema (4.6) con condición inicial $(r', r', 0)$ es el nudo trébol $T(2, 3)$, mostrado en la Figura 4.2 (a). Mientras que para $r'' = a_0 - \frac{5}{7} \frac{2}{5\sqrt{2}}$ obtenemos el nudo $T(5, 7)$, como se muestra en la Figura 4.2 (b).

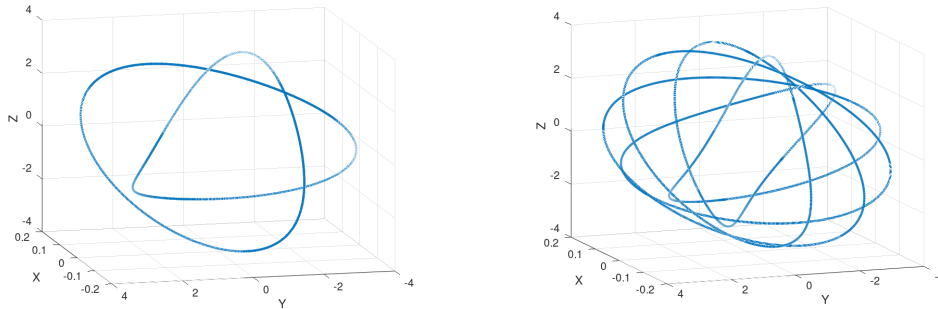


Figura 4.2: Los nudos $T(2, 3)$ en (a) y $T(5, 7)$ en (b) como soluciones de (4.6).

4.2. Un nuevo sistema dinámico con todos los nudos toroidales como solución

En esta sección, primeramente, mostraremos cómo obtener un sistema dinámico que contenga todos los nudos toroidales como soluciones. Por lo tanto, siguiendo las ideas de *Chen y Banks* [2], comenzaremos con el sistema dinámico (4.5):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - a_0, \\ \dot{y} &= -x + a_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

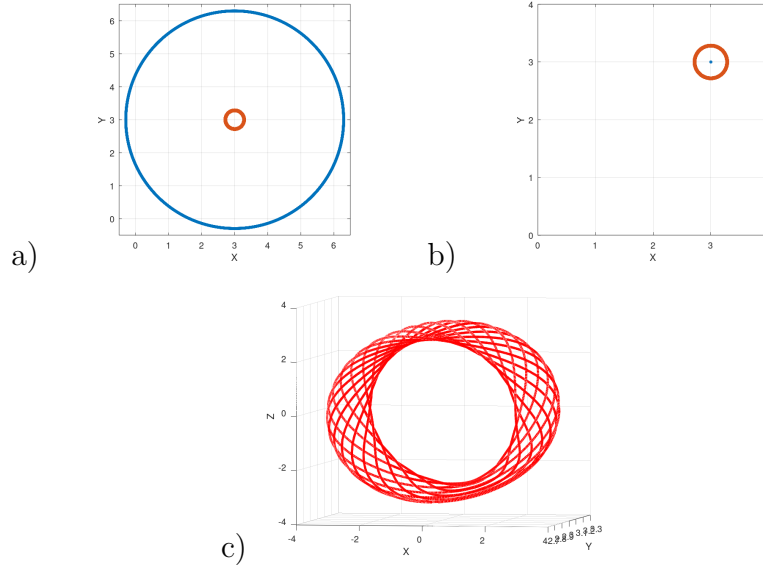


Figura 4.3: (a) Dos trayectorias como soluciones del sistema (4.5) con $a_0 = 3$. (b) una órbita periódica circular del sistema (4.2). (c) Una órbita periódica anudada asociada del sistema (4.3) generado por el método de revolución.

Dado que el sistema (4.3) posee todos los nudos toroidales como soluciones, nos gustaría tener un difeomorfismo de T_1 a un toro sólido anudado T_2 . Usando este difeomorfismo definiremos un nuevo sistema cuya dinámica será cero en el complemento de T_2 y una conjugación en T_2 .

Dados $r, s \in \mathbb{Z}$, tal que (r, s) sea un par adecuado, existe una parametrización $h_r^s : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para la familia de nudos toroidales:

$$h_r^s(x, y) = (a_r^s(x, y), b_r^s(x, y), \text{sen}(s \cdot \theta(x, y))).$$

Donde

$$\begin{aligned} a_r^s(x, y) &= (2 + \cos(s \cdot \theta(x, y))) \cos(r \cdot \theta(x, y)), \\ b_r^s(x, y) &= -(2 + \cos(s \cdot \theta(x, y))) \text{sen}(r \cdot \theta(x, y)), \end{aligned}$$

y $\theta(x, y)$ es la función ángulo mostrada en 4.4 (a). El nudo obtenido con esta función es $h_r^s(S^1) = T(r, s)$. Es importante hacer notar que, ya que las funciones $a_r^s(x, y)$ y $b_r^s(x, y)$ son composiciones de difeomorfismos, cualquier función h_r^s es un difeomorfismo entre S^1 y su imagen: El nudo $T(r, s)$.

En la Figura 4.4 hay dos ejemplos de nudos, (b) y (c), contruidos con diferentes pares de números adecuados.

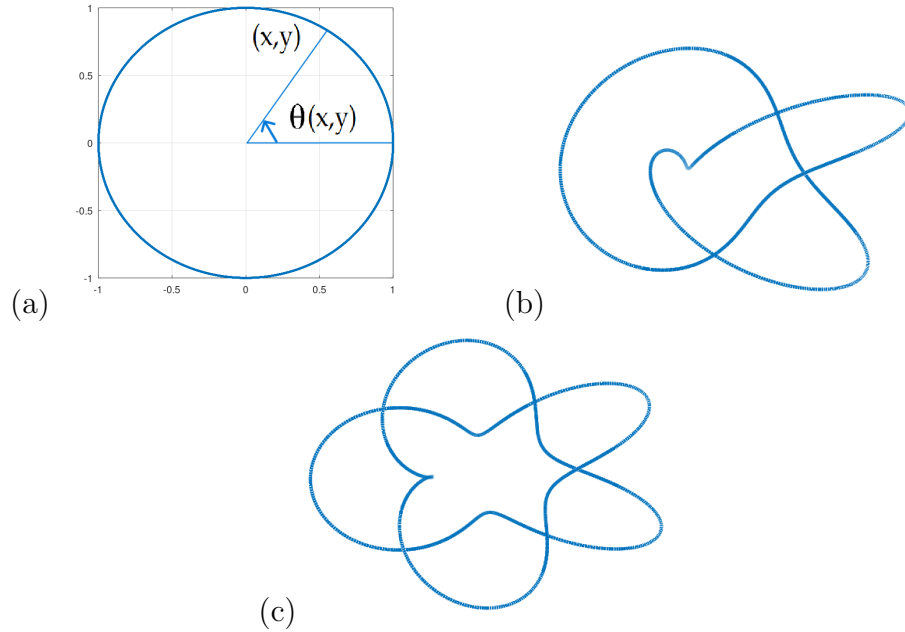


Figura 4.4: La función ángulo (a), $T(2,3)$ nudo obtenido con h_2^3 (b), $T(2,5)$ nudo obtenido con h_2^5 (c).

4.3. Nudos cable

Ahora empezaremos a trabajar con nudos toroidales iterados, los cuales se definieron en 1.1. Como para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho(x, \sqrt{y^2 + z^2}) \left(\sqrt{y^2 + z^2} - a_0 \right), \\ \dot{y} &= \rho(x, \sqrt{y^2 + z^2}) \left([-x + a_0] \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) - c(x, y, z)z \right), \\ \dot{z} &= \rho(x, \sqrt{y^2 + z^2}) \left([-x + a_0] \left(\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) + c(x, y, z)y \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

todos los nudos toroidales son solución, queremos tener un difeomorfismo de T_1 a un toro sólido anudado T_2 . Usando este difeomorfismo definiremos un nuevo sistema cuya dinámica será cero en el complemento de T_2 y una conjugación en T_2 . Para eso consideramos lo siguiente: Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el difeomorfismo dado por $F(x, y, z) = (x - a_0, y, z)$. Y $H_2^3 : F(T_1) \rightarrow T_2$ el difeomorfismo dado por:

$$H_2^3(x, y, z) = (k(x, y) \cdot a_2^3(x, y), k(x, y) \cdot b_2^3(x, y), k(x, y) \cdot \sin(3\theta(x, y)) + z).$$

Donde $k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $T_2 = (H_2^3 \circ F)(T_1)$. Como caso particular estamos usando H_2^3 , claramente basado en h_2^3 , para obtener el nudo trébol $T(2,3)$. Por lo cual tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1. *Dado el sistema dinámico:*

$$\dot{X} = \begin{cases} (H_2^3 \circ F) \circ G \circ (H_2^3 \circ F)^{-1}(X), & \text{para } X \in T_2 \\ 0, & \text{para } X \notin T_2; \end{cases} \quad (4.7)$$

donde G es de la forma del sistema (4.6), H_2^3 y F son los difeomorfismos previamente definidos y $T_2 = (H_2^3 \circ F)(T_1)$. Entonces todos los nudos iterados de la forma $\mathcal{K}_{(2, 3, r, s)}$ son soluciones del sistema.

Demostración. Considerando que F y H_2^3 son difeomorfismos, entonces $F \circ H_2^3 : T_1 \rightarrow T_2$ también es un difeomorfismo. Ahora, se define

$$\Theta = F \circ H_2^3 \quad \text{y} \quad \Phi = (H_2^3 \circ F) \circ G \circ (H_2^3 \circ F)^{-1}.$$

Por lo cual, es claro que

$$\Phi = \Theta \circ G \circ \Theta^{-1} \quad \text{y entonces} \quad \Phi \circ \Theta = \Theta \circ G.$$

Por lo tanto $\dot{X} = G(X)$ y $\dot{X} = \Phi(X)$ son sistemas dinámicos topológicamente conjugados definidos sobre T_1 y T_2 , respectivamente. Además, dado que la función ρ está implícita en G , entonces $\Phi(x, y, z) = 0$ para cualquier $(x, y, z) \in \partial(T_2)$. Ya que el sistema (4.7) está definido como 0 siempre que $X \notin T_2$, se puede concluir que es diferenciable. Es bien sabido que el ser topológicamente conjugados implica que cualquier nudo toroidal $T(r, s)$ como solución del sistema $\dot{X} = G(X)$ es llevado, bajo la función Θ , a una solución periódica del sistema $\dot{X} = \Phi(X)$, el cual está sobre el toro T_2 anudado. Generando de este modo nudos toroidales iterados $\mathcal{K}_{(2, 3, r, s)}$ como soluciones. $\square$

En 4.5 se muestran ejemplos obtenidos al aplicar el teorema 4.3.1.

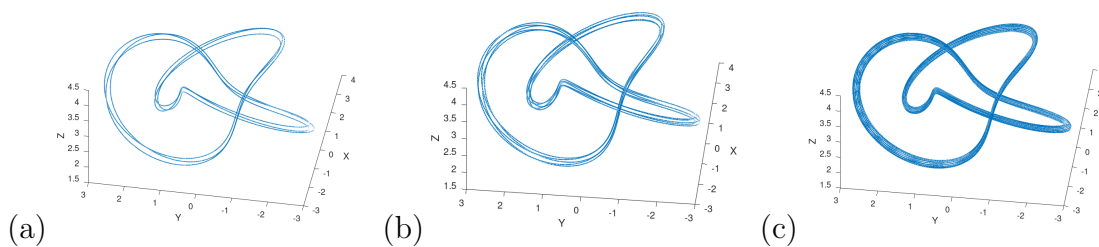


Figura 4.5: Cable $\mathcal{K}_{(2,3,3,5)}$ (a), Cable $\mathcal{K}_{(2,3,5,7)}$ (b) y Cable $\mathcal{K}_{(2,3,15,17)}$ (c) como soluciones del sistema (4.7).

De la misma forma, en lugar de h_2^3 podríamos usar cualquier h_p^q para obtener cualquier cable $\mathcal{K}_{(p,q,r,s)}$ haciendo el ajuste necesario del radio interior n para así evitar autointersecciones en el toro T_2 . En la figura 4.6 se muestra el cable $\mathcal{K}_{(5,9,15,31)}$ como solución del sistema (4.7) que se obtiene al usar varios radios interiores.

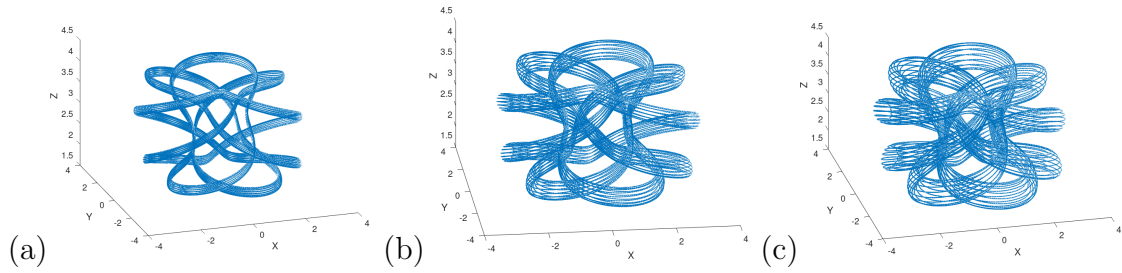


Figura 4.6: Cable $\mathcal{K}_{(5,9,15,31)}$ con radio interior $n = 0.5$ (a), $n = 1.0$ (b) y $n = 1.5$ (c) como soluciones del sistema (4.7) respectivamente.

4.4. Nudos cable de otros nudos

Los resultados previos también se pueden aplicar para obtener nudos cable de otros nudos además de los nudos toroidales, siempre y cuando se tenga su parametrización. Por ejemplo tenemos la siguiente familia de difeomorfismos, cada uno define un nudo.

$$g_p^q(x, y) = (a_p^q(x, y), b_p^q(x, y), \sin(4\theta(x, y))).$$

Donde $\text{mcd}(p, q) = 1$ y, para esta familia, $\frac{p}{q} > 1$. Observemos que g_3^2 da lugar a la figura del nudo ocho, K_1 , el cual no es un nudo toroidal. Se muestran algunos ejemplos de nudos cable usando esta familia en la figura 4.7, donde el nudo $T(5, 11)$ está en la figura del nudo ocho, (a), y también en el nudo K_2 asociado a g_5^3 , (b).

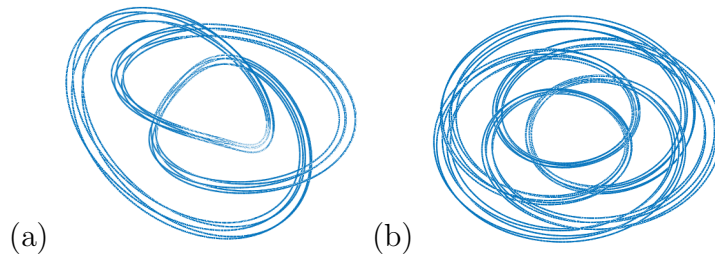


Figura 4.7: Nudos cable $K_{1(5,11)}$ (a) y $K_{2(5,11)}$ (b).

Entonces, se han exhibido varios métodos para generar trayectorias anudadas como soluciones de sistemas dinámicos, así como se ha generado el método de obtener una infinidad numerable de sistemas dinámicos cuyas trayectorias son familias de nudos diferentes a las reportadas en otras bibliografías previas. Ahora se exponen las conclusiones obtenidas a través de esta tesis doctoral.

Capítulo 5

Conclusiones

Finalmente, se han presentado en esta tesis dos métodos existentes para obtener trayectorias periódicas como soluciones de un sistema dinámico, es decir, nudos. Se observa que en el primer método con un mismo sistema dinámico pero usando diferentes condiciones iniciales se tiene una familia de nudos en sus trayectorias como soluciones, en particular, se tienen nudos toroidales al revolucionar el sistema de Volterra-Lotka. En cambio, en el segundo método se tiene que para obtener cualquier nudo se debe construir expresamente un sistema dinámico, usando para ello el Teorema de Alexander para obtener la cerradura de una trenza y así obtener el nudo deseado como solución.

Por otra parte, cuando las trayectorias no son periódicas, hay un tipo de comportamiento que se presenta, el cual, se asemeja al comportamiento caótico, se presenta el análisis que se realizó en las trayectorias con la variación de parámetros de un sistema que ya se conoce que es caótico, el sistema de Lorenz, concluyendo que en este sistema se presentan trayectorias que se asemejan a nudos al tener ciertos parámetros, pero en su mayoría de las variaciones se seguía teniendo el mismo comportamiento, lo cual sugiere un análisis de otro tipo, lo cual se deja como trabajo a futuro.

En esta tesis, al variar $p, q \in \mathbb{N}$, también hemos dado explícitamente una manera de construir un número infinito de sistemas dinámicos en los que las trayectorias anudadas, que pertenecen a la familia de nudos toroidales iterados, aparecen como soluciones. Esta forma de obtener nudos toroidales iterados como solución, hasta ahora, no se ha reportado previamente en alguna bibliografía o artículo científico. También se ha demostrado que las ideas expuestas se pueden extender fácilmente a otros nudos parametrizados, por ejemplo el nudo en forma de ocho, el cual no es un nudo toroidal, aunque hay que modificar el radio interior si es necesario.

Apéndice

En esta sección se muestran los códigos utilizados para generar las simulaciones vistas en este trabajo:

Código 1. Comenzamos con el código para generar las simulaciones de los toros sólidos y los nudos iterados obtenidos.

```
%Funciones para modificar los toros
function Ftr1a=f1a(x,y,z)
    Ftr1a=[ (0.5/3).*(x-3)+3, (0.5/3).*(y- 3.*y./sqrt(y.^2+z.^2))+
    3.*y./sqrt(y.^2+z.^2), (0.5/3).*(z- 3.*z./sqrt(y.^2+z.^2))+
    3.*z./sqrt(y.^2+z.^2)];
endfunction

function Ftr1b=f1b(x,y,z)
    Ftr1b=[ (.5/3).*(x-3)+3, (.5/3).*(y), (.5/3).*(z-3.*abs(z)./z)+3.*abs(z)./z
endfunction

function Ftr2=f2(x,y,z)
    Ftr2=[x-3,y,z];
endfunction

function Ftr3a=f3a(x,y,z)
    Ftr3a=[ (3.5/3).*(x), (3.5/3).*(y-3.*y./sqrt(y.^2+z.^2))+
    3.*y./sqrt(y.^2+z.^2), (3.5/3).*(z-3.*abs(z).*z./(z.*sqrt(y.^2+z.^2)))+
    3.*abs(z).*z./(z.*sqrt(y.^2+z.^2))];
endfunction

function Ftr3b=f3b(x,y,z)
    Ftr3b=[ (3.5/3).*(x), (3.5/3).*(y), (3.5/3).*(z-3.*abs(z)./z)+3.*abs(z)./z
endfunction
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funciones para generar el toro solido anudado

function P=p(x,y)
    P=sqrt(x.^2+y.^2);
endfunction

function N=nn(x,y,z)
    N=sqrt(x.^2+y.^2+z.^2);
endfunction

function Th=th(x,y)
    Th=acosd(x./sqrt(x.^2+y.^2));
endfunction

function A=aa(t)
    A=(3+cosd(3.*t)).*cosd(2.*t);
endfunction
```

```

function B=b(t)
    B=-(3+cosd(3 .*t)).*sind(2 .*t);
endfunction

function C=c(t)
    C=-sind(3 .*t);
endfunction

function K=k(x,y,z)
    K=(p(x,y)-3.5+nn(aa(th(x,y)),b(th(x,y)),c(th(x,y))))/nn(aa(th(x,y)),
    b(th(x,y)),c(th(x,y)));
endfunction

function H=ache(x,y,z)
    H=[k(x,y,z)*aa(th(x,y)),-k(x,y,z)*b(th(x,y)),-k(x,y,z)*c(th(x,y))+z];
endfunction

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funciones, constantes y sistema dinámico para generar el nudo (p,q)

n=3;    %radio superior
w=3;    %centro de la circunferencia
p2=41;  %numerador de la fracción para obtener el nudo toroidal
q=31;   %denominador de la fracción para obtener el nudo toroidal

C=p2/q;
a=p2/(q.*sqrt(2));
r0=[a a 0];

tau=2*p2*pi/C;
t=[0:0.03:tau+.1];

h=@(x) exp(1./(x-n)-1./(x-m)).*((x>m)&(x<n))+0.*((x<=m)&(x>=n));
v=sqrt((r0(1)-w).^2+(sqrt(r0(2).^2+r0(3).^2)-w).^2);
dv=quadcc(h,m,n);
tb=quadcc(h,v,n)/dv; %función tubo

xdot=@(r,t)[tb.*(sqrt(r(2).^2+r(3).^2)-3);...
tb*(-r(1)+3).*((r(2)/sqrt(r(2)^2+r(3)^2))-C*r(3));...
tb*(-r(1)+3).*((r(3)/sqrt(r(2)^2+r(3)^2))+C*r(2))]; % Sistema dinámico %
%%de revolución %%%

```

```

r=lsode(xdot,r0,t);% solución del sistema dinámico que es el nudo (p,q)
r2=f1a(r(:,1),r(:,2),r(:,3));% aplicación de f1 para llevar hacia T2
r3=f2(r2(:,1),r2(:,2),r2(:,3));% aplicación de f2 para llevar a T3
r4=f3a(r3(:,1),r3(:,2),r3(:,3));% aplicación de f3 para llevar a T4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

p3=5;%numerador de la fracción para obtener el nudo toroidal
q2=3;%denominador de la fracción para obtener el nudo toroidal

C2=p3/q2;
a2=p3/(q2.*sqrt(2));
r02=[a a 0];

tau2=2*p3*pi/C2;
t2=[0:0.03:tau2+.1];

h=@(x) exp(1./(x-n)-1./(x-m)).*((x>m)&(x<n))+0.*((x<=m)&(x>=n));
v2=sqrt((r02(1)-w).^2+(sqrt(r02(2).^2+r02(3).^2)-w).^2);
dv=quadcc(h,m,n);
tb2=quadcc(h,v2,n)/dv;%función tubo

xdot=@(r,t)[tb.*(sqrt(r(2).^2+r(3).^2)-3);...
tb*((-r(1)+3).*(r(2)/sqrt(r(2)^2+r(3)^2))-C*r(3));...
tb*((-r(1)+3).*(r(3)/sqrt(r(2)^2+r(3)^2))+C*r(2)]]; % Sistema dinámico %
%%de revolución %%

r=lsode(xdot,r0,t);% solución del sistema dinámico que es el nudo (p,q)
r2=f1a(r(:,1),r(:,2),r(:,3));% aplicación de f1 para llevar hacia T2
r3=f2(r2(:,1),r2(:,2),r2(:,3));% aplicación de f2 para llevar a T3
r4=f3a(r3(:,1),r3(:,2),r3(:,3));% aplicación de f3 para llevar a T4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

p3=5;%numerador de la fracción para obtener el nudo toroidal
q2=3;%denominador de la fracción para obtener el nudo toroidal

C2=p3/q2;
a2=p3/(q2.*sqrt(2));
r02=[a a 0];

tau2=2*p3*pi/C2;
t2=[0:0.03:tau2+.1];

h=@(x) exp(1./(x-n)-1./(x-m)).*((x>m)&(x<n))+0.*((x<=m)&(x>=n));
v2=sqrt((r02(1)-w).^2+(sqrt(r02(2).^2+r02(3).^2)-w).^2);
dv=quadcc(h,m,n);
tb2=quadcc(h,v2,n)/dv;%función tubo

xdot2=@(rb,t2)[tb2.*(sqrt(rb(2).^2+rb(3).^2)-3);...
tb2*((-rb(1)+3).*(rb(2)/sqrt(rb(2)^2+rb(3)^2))-C2*rb(3));...
tb2*((-rb(1)+3).*(rb(3)/sqrt(rb(2)^2+rb(3)^2))+C2*rb(2)]];
% Sistema dinámico de revolución %%

rb=lsode(xdot2,r02,t2);% solución del sistema dinámico que es el nudo (p,q)
rb2=f1a(rb(:,1),rb(:,2),rb(:,3));% aplicación de f1 para llevar hacia T2
rb3=f2(rb2(:,1),rb2(:,2),rb2(:,3));% aplicación de f2 para llevar a T3
rb4=f3a(rb3(:,1),rb3(:,2),rb3(:,3));% aplicación de f3 para llevar a T4

```

```
% Gráficas
figure(1)
plot3(r(:,1),r(:,2),r(:,3),'linewidth',1);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
hold on
plot3(rb(:,1),rb(:,2),rb(:,3),'linewidth',3);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');

figure(2)
plot3(r2(:,1),r2(:,2),r2(:,3),'linewidth',1);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
hold on
plot3(rb2(:,1),rb2(:,2),rb2(:,3),'linewidth',3);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
figure(3)
plot3(r3(:,1),r3(:,2),r3(:,3),'linewidth',1);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
hold on
plot3(rb3(:,1),rb3(:,2),rb3(:,3),'linewidth',3);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');

figure(4)
plot3(r4(:,1),r4(:,2),r4(:,3),'linewidth',1);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
hold on
plot3(rb4(:,1),rb4(:,2),rb4(:,3),'linewidth',3);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
```

```

xx=transpose(r4(:,3));
yy=transpose(r4(:,2));
zz=transpose(r4(:,1));

sy=asin(yy./sqrt(xx.^2+yy.^2));
th=acos(xx./sqrt(xx.^2+yy.^2));
ran=length(sy);
th1=[];

for i=1:ran,
    if sy(i)<0,
        th1=[th1,2*pi-th(i)];
    else;
        th1=[th1,th(i)];
    endif;
end;

a = (3 + cos(3*th1)).*cos(2*th1);
b = -(3 + cos(3*th1)).*sin(2*th1);
c = -sin(3*th1);
factor=.5
p = sqrt(xx.^2 + yy.^2);
n = sqrt(a.^2 + b.^2+ c.^2);
k=[factor*(p-3.5)+n] ./ n;

%k=[(p-3.5)/.2+n] ./ n;

figure (6)
plot3(k.*a,k.*b,k.*c+factor*zz,'linewidth',2)
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');

%plot(k.*b,k.*c+zz)
%plot(k.*a,k.*c+zz)
%plot(k.*a,k.*b)

```

Código 2. A continuación se muestra el código para generar las parametrizaciones del nudo trébol y el nudo ocho.

```
th1=0:0.01:2*pi;
p=2;
q=5;
%%%% Nudo trebol %%%%%%%%%
a = (2 + cos(p*th1)).*cos(q*th1);
b = -(2 + cos(p*th1)).*sin(q*th1);
c = sin(p*th1);

figure(1)
plot3(a,b,c,'linewidth',3)
%hold on

%%%% Nudo 8 %%%%%%%%%
a2=(2+cos(2*th1)).*cos(3*th1);
b2=(2+cos(2*th1)).*sin(3*th1);
c2= sin(4*th1);
figure(2)
plot3(a2,b2,c2,'linewidth',3)
```

Código 3. A continuación se muestra el código para generar el sistema de Lorenz.

```
function xdot=f(y,t)
xdot(1)=10*(y(2)-y(1));
xdot(2)=(28-y(3))*y(1)-y(2);
xdot(3)=y(1)*y(2)-8*y(3)/3;
endfunction
y0=input('Inserta la condicion inicial [x y z]: ');
tmax=input('Inserta el tiempo maximo: ');
%tmax=100
t=[0:0.01:tmax];
y=lsode("f",y0,t);

figure(1)
hold on
%comet3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),0.00001);
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),0.00001);
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
hold off
```

Código 4. Ahora se muestra el código de las funciones utilizadas para la cerradura de una trenza.

```
function xdot=h1(k,t)

a=2;
b=3;
c=4;

f1=@(x) exp(1./(x-b)-1./(x-a)).*(x>a)&(x<b))+0.*(x<=a)&(x>=b);
f2=@(x) exp(1./(x-c)-1./(x-b)).*(x>b)&(x<c))+0.*(x<=b)&(x>=c);
f1a=@(x) exp(1./(x-(a+b)/2)-1./(x-a)).*(x>a)&(x<(a+b)/2))+0.*(x<=a)&(x>=(a+b)/2));
f1b=@(x) exp(1./(x-b)-1./(x-(a+b)/2)).*(x>(a+b)/2)&(x<b))+0.*(x<=(a+b)/2)&(x>=b));
f2a=@(x) exp(1./(x-(b+c)/2)-1./(x-b)).*(x>b)&(x<(b+c)/2))+0.*(x<=b)&(x>=(b+c)/2));
f2b=@(x) exp(1./(x-c)-1./(x-(b+c)/2)).*(x>(b+c)/2)&(x<c))+0.*(x<=(b+c)/2)&(x>=c));

d1=quadcc(f1,a,b);
d2=quadcc(f2,b,c);
d1a=quadcc(f1a,a,(a+b)/2);
d1b=quadcc(f1b,(a+b)/2,b);
d2a=quadcc(f2a,b,(b+c)/2);
d2b=quadcc(f2b,(b+c)/2,c);

op1=@(x) quadcc(f1,x,b)./d1;
op2=@(x) quadcc(f2,x,c)./d2;
op1a=@(x) quadcc(f1a,x,(a+b)/2)./d1a;
op1b=@(x) quadcc(f1b,x,b)./d1b;
op2a=@(x) quadcc(f2a,x,(b+c)/2)./d2a;
op2b=@(x) quadcc(f2b,x,c)./d2b;

xdot(1)=op1(t)-op2(t)+4*cos(t).*((t>2*pi+pi/2)&(t<2*pi+3*pi/2))+4*sin(t).*((t>6*pi)&(t<7*pi));
xdot(2)=op1a(t)-op1b(t)+op2b(t)-op2a(t);
xdot(3)=1.*(t<=2*pi+pi/2)+4*sin(t).*((t>2*pi+pi/2)&(t<2*pi+3*pi/2))-1.*(t>=2*pi+3*pi/2)&(t<6*pi))-4*cos(t).*((t>=6*pi)&(t<7*pi));
endfunction

%k0=input('Inserta la condicion inicial [x y z]: ');
k0=[1 0 0];
%tmax1=input('Inserta el tiempo maximo: ');
t=[0:0.005:12*pi];
k=lsode("h1",k0,t);

figure(1)
hold on
plot3(k(:,1),k(:,3),k(:,2));
xlabel('X');
ylabel('Z');
zlabel('Y');
```

```

function xdot=h2(k,t)

a=2;
b=3;
c=4;

f1=@(x) exp(1./(x-b)-1./(x-a)).*(x>a)&(x<b))+0.*(x<=a)&(x>=b);
f2=@(x) exp(1./(x-c)-1./(x-b)).*(x>b)&(x<c))+0.*(x<=b)&(x>=c);
f1a=@(x) exp(1./(x-(a+b)/2)-1./(x-a)).*(x>a)&(x<(a+b)/2))+0.*(x<=a)&(x>=(a+b)/2);
f1b=@(x) exp(1./(x-b)-1./(x-(a+b)/2)).*(x>(a+b)/2)&(x<b))+0.*(x<=(a+b)/2)&(x>=b);
f2a=@(x) exp(1./(x-(b+c)/2)-1./(x-b)).*(x>b)&(x<(b+c)/2))+0.*(x<=b)&(x>=(b+c)/2);
f2b=@(x) exp(1./(x-c)-1./(x-(b+c)/2)).*(x>(b+c)/2)&(x<c))+0.*(x<=(b+c)/2)&(x>=c);

d1=quadcc(f1,a,b);
d2=quadcc(f2,b,c);
d1a=quadcc(f1a,a,(a+b)/2);
d1b=quadcc(f1b,(a+b)/2,b);
d2a=quadcc(f2a,b,(b+c)/2);
d2b=quadcc(f2b,(b+c)/2,c);

op1=@(x) quadcc(f1,x,b)./d1;
op2=@(x) quadcc(f2,x,c)./d2;
op1a=@(x) quadcc(f1a,x,(a+b)/2)./d1a;
op1b=@(x) quadcc(f1b,x,b)./d1b;
op2a=@(x) quadcc(f2a,x,(b+c)/2)./d2a;
op2b=@(x) quadcc(f2b,x,c)./d2b;

xdot(1)=-1*(op1(t)-op2(t)+4*cos(t).*((t>2*pi+pi/2)&(t<2*pi+3*pi/2))+4*sin(t).*((t>6*pi)&(t<7*pi)));
xdot(2)=-1*(op1a(t)-op1b(t)+op2b(t)-op2a(t));
xdot(3)=1.*(t<=2*pi+pi/2)+4*sin(t).*((t>2*pi+pi/2)&(t<2*pi+3*pi/2))-1.*(t>=2*pi+3*pi/2)&(t<6*pi))-4*cos(t).*((t>=6*pi)&(t<7*pi));
endfunction

%k0=input('Inserta la condicion inicial [x y z]: ');
k0=[0 0 0];
%tmax1=input('Inserta el tiempo maximo: ');
t=[0:0.005:12*pi];
k=lsode("h2",k0,t);

figure(1)
hold on
plot3(k(:,1),k(:,3),k(:,2));
xlabel('X');
ylabel('Z');
zlabel('Y');

```

Bibliografía

- [1] K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhauser, (1996).
- [2] W. Chen and S.P. Banks, *Knots, Links and Spun Dynamical Systems*, Int. J. Bif. and Chaos, Vol.20, No. 4 (2010) 1041-1048.
- [3] Y. Song, S.P. Banks and David Díaz, *Dynamical Systems on Three Manifolds Part I: Knots, Links and Chaos*. Int. J. Bif. and Chaos 17, 2073–2084 (2007)
- [4] Birman, J and R. F. Williams, *Knotted Periodic Orbits in Dynamical Systems-I: Lorenz Equations*. Topology,22. 1983.
- [5] R. F. Williams, *Lorenz Knots are Prime*. Mathematics Department, Northwestern University, Evanston, IL 60201, USA.
- [6] Gerald Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society Providence, Rhode Island 2010.
- [7] J. W. Alexander, *A Lemma on Systems of Knotted Curves*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 9:93-95, 1923.
- [8] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [9] Richard H. Crowell Ralph H. Fox, *Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag I New York Ikiddhcrgr Berlin.
- [10] Lawrence Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. 2001, 1996, 1991 Springer-Verlag, New York. Inc.
- [11] Andrei V Malyutin, *On The Question Of Genericity Of Hyperbolic Knots*. International Mathematics Research Notices, Volume 2020, Issue 21, November 2020, Pages 7792-7828.
- [12] Dale Rolfsen, *Knots and Links*. AMS Chelsea, United States of America. (2003)
- [13] Silver, D.S., Williams, S.G., *Knot invariants from symbolic dynamical systems*. Trans. Am. Math. Soc. 351, 3243–3265 (1999) [https://doi.org/0002-9947\(99\)02167-4](https://doi.org/0002-9947(99)02167-4)
- [14] Pinsky, T., *On the topology of the lorenz system*. Proc. R. Soc. A 473 (2017) <https://doi.org/20170374>

- [15] Bonatti, C., Pinsky, T., *Lorenz attractors and the modular surface*. Nonlinearity 34, 4315–4331 (2021) <https://doi.org/10.1088/1361-6544/abf8fa>
- [16] Ghrist, R.W., Holmes, P.J., *An ode whose solutions contain all knots and links*. Int. J. Bif. and Chaos 06, 779–800 (1996) <https://doi.org/10.1142/S0218127496000448>
- [17] Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Department of Mathematics Boston University (2021) <https://doi.org/10.1201/9780429280801>