



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

MAESTRÍA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Aproximación a la dinámica del atractor de
Chua por medio de un campo vectorial sin
puntos de equilibrio**

Tesis que presenta

Claudio Fidel Martínez Mendoza

Co-Director: Dr. Eric Campos Cantón
Co-Director: Dr. Rodolfo de Jesús Escalante Gonzalez

San Luis Potosí, S.L.P., 14 de noviembre de 2025



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis titulada “**Aproximación a la dinámica del atractor de Chua por medio de un campo vectorial sin puntos de equilibrio**” presentada para obtener el Grado de Maestro en **Control y Sistemas Dinámicos** fue elaborada por **Claudio Fidel Martínez Mendoza** y aprobada por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores del IPICYT.

Dr. Eric Campos Cantón
(Director de tesis)

Dr. Rodolfo de Jesús Escalante Gonzalez
(Co-Director de tesis)

Dr. Haret - Codratian Rosu

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en el Laboratorio de Sistemas no lineales de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Eric Campos Cantón y el Dr. Rodolfo de Jesús Escalante Gonzalez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación en México CVU: 1320975 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

Dedicatoria

A mi familia. Mis padres Delia del Carmen Mendoza Alvarado y José de Jesús Martínez Cardenas que me han apoyado desde niño en esta aventura llamada vida, mi hermana Gabriela Alejandra Martínez Mendoza por estar a mi lado y ser mi consejera, a mi familia en general es por ellos que salgo adelante.

Agradecimientos

Quiero dar un agradecimiento extra a mis directores de tesis el Dr. Eric Campos Cantón y el Dr. Rodolfo de Jesús Escalante Gonzalez, que más que asesores han sido mis mentores de los cuales he aprendido bastante y me han inculcado ese interés por el conocimiento y la investigación. A mi compañera Paulina que mas que compañera mi amiga, a Yujani que me acompañó en desvelos, en casa, en tiempos difíciles y estuvo conmigo durante el proceso de maestría. También agradezco al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) y a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación en México, por darme la oportunidad de ser parte de su comunidad y por brindarme las herramientas necesarias para realizar esta investigación.

Índice general

Constancia de aprobación de tesis	II
Créditos Institucionales	III
Dedicatoria	V
Agradecimientos	VI
Indice	VII
Resumen	IX
Abstract	X
1 Introducción	11
1.1 Campos vectoriales con puntos de equilibrio	13
1.2 Campos vectoriales sin puntos de equilibrio	14
1.3 Atractores ocultos	14
1.4 Técnicas para generar atractores sin puntos de equilibrio	16
1.5 Planteamiento del Problema	18
2 Marco Teórico	19
2.1 Sistemas Dinámicos	19
2.1.1 Modelado de Fenómenos Complejos	20
2.1.2 Estabilidad y Bifurcaciones	21
2.2 Sistemas Caóticos	26
2.2.1 Atractores Extraños	27
2.2.2 Propiedades del Caos	28
2.3 El Sistema de Chua	28
2.3.1 Descripción Matemática	29
2.4 Puntos de Equilibrio en Sistemas Dinámicos	29
2.4.1 Estabilidad de los Puntos de Equilibrio	29
2.5 Sistemas Lineales por Partes (PWL)	29
2.5.1 Planos de Conmutación en Sistemas PWL	30
3 Construcción del sistema de Chua sin puntos de equilibrio.	35
3.1 Planos de Conmutación añadidos	40

3.2	Procedimiento	40
4	Comparación entre el sistema de Chua original y el sistema sin puntos de equilibrio	45
4.1	Puntos de Equilibrio	45
4.2	Exponentes de Lyapunov	46
4.3	Atractor Tipo Chua sin Puntos de Equilibrio	46
4.4	Comparación Planos de Poincaré	49
5	Conclusiones y Trabajos Futuros	53
A	Código de MATLAB	58
A.1	Implementación en MATLAB	58
A.1.1	Código MATLAB	58

Resumen

Esta investigación aborda el estudio de sistemas dinámicos no lineales con énfasis en los atractores caóticos, particularmente aquellos que no requieren de puntos de equilibrio para manifestar su comportamiento complejo. El trabajo se centra en el sistema de Chua, reconocido por su capacidad para generar dinámica caótica, proponiendo una modificación innovadora que preserva sus características fundamentales mientras elimina sus puntos de equilibrio tradicionales.

Se busca diseñar un sistema que presente propiedades caóticas principalmente un atractor, el cual no presente puntos de equilibrio, tomando como base el sistema de Chua.

Mediante un enfoque metodológico que combina análisis teórico y simulaciones numéricas, se desarrolló una versión modificada del sistema de Chua implementando: Una estructura de seis regiones con planos de conmutación adicionales. Puntos de equilibrio virtuales que guían la dinámica en las diferentes regiones. Un cuidadoso balance de parámetros para mantener las propiedades caóticas. Los resultados obtenidos demuestran que este nuevo sistema:

1. Conserva exponentes de Lyapunov característicos del comportamiento caótico.
2. Presenta un atractor similar en al clasico atractor de Chua
3. Presenta mas propiedades similares al sistema original de Chua, que se demuestran con los planos de Póincare, diagramas de bifurcación y cuencas de atracción

Abstract

This research addresses the study of nonlinear dynamical systems with an emphasis on chaotic attractors, particularly those that do not require equilibrium points to manifest their complex behavior. The work focuses on the Chua system, recognized for its ability to generate chaotic dynamics, proposing an innovative modification that preserves its fundamental characteristics while eliminating its traditional equilibrium points.

The objective is to design a system that exhibits chaotic properties, primarily an attractor without equilibrium points, based on the Chua system.

Through a methodological approach combining theoretical analysis and numerical simulations, a modified version of the Chua system was developed implementing: A six-region structure with additional switching planes, virtual equilibrium points that guide the dynamics in different regions, a careful parameter balance to maintain chaotic properties

The obtained results demonstrate that this new system:

1. Maintains Lyapunov exponents characteristic of chaotic behavior
2. Presents an attractor similar to the classic Chua attractor
3. Exhibits more properties similar to the original Chua system, as demonstrated through Poincaré maps, bifurcation diagrams, and basins of attraction

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas caóticos son un subconjunto de los sistemas dinámicos no lineales que presentan un comportamiento altamente impredecible pero determinista [1]. Esta sensibilidad a las condiciones iniciales es una de las características definitorias del caos y se conoce comúnmente como el “efecto mariposa” [2]. podemos utilizar la siguiente definición que deja mas claro y en pocas palabras lo que es el caos: El caos es un comportamiento determinista no periódico, caracterizado por sensibilidad a condiciones iniciales y estructura fractal en su atractor [3]. Uno de los ejemplos mas famosos es el sistema de Lorenz.

Un atractor es un comportamiento que comúnmente presenta un sistema con características caóticas.

Conjunto atractor [4]. Es un conjunto cerrado e invariante $A \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un conjunto atractor si existe algún vecindario U de A tal que:

- $\forall t \geq 0, f(t, U) \subset U$ y
- $\bigcap_{t \geq 0} f(t, U) = A.$

Un atractor es un conjunto atractor topológicamente transitivo.[4]

De acuerdo con [5] no existe una definición universalmente aceptada de un atractor en matemáticas; hay quien no pide la transitividad topológica y por lo tanto llaman al conjunto atractor que lo cumple como un atractor transitivo. Los atractores pueden clasificarse como ocultos o autoexcitados según Gennady Leonov et al. [6].

Los sistemas dinámicos no lineales han sido ampliamente estudiados debido a su capacidad para modelar fenómenos complejos en la naturaleza y en diversas aplicaciones tecnológicas. Dentro de este ámbito, los sistemas caóticos ocupan un lugar destacado por su comportamiento impredecible pero determinista, su sensibilidad a las condiciones iniciales y la riqueza de dinámicas que presentan [1]. Estos sistemas son fundamentales en áreas como la criptografía, el procesamiento de señales y el modelado de sistemas biológicos complejos[7][8].

Uno de los sistemas caóticos más representativos es el sistema de Chua, introducido por Leon Chua en la década de 1980 [9]. Originalmente concebido como un circuito eléctrico donde el modelo matemático es un sistema no lineal, el cual

es capaz de generar comportamientos dinámicos que abarcan, desde atractores periódicos hasta el caos [10]. El atractor de Chua, caracterizado por su estructura de doble enroscado (*double scroll*), ha sido utilizado en numerosas aplicaciones prácticas, como el procesamiento de señales la encriptación entre otras más.

En criptografía y procesamiento de señales, los sistemas caóticos son especialmente valiosos porque son impredecibles y extremadamente sensibles a los cambios más mínimos. Como explica Kocarev (2001), esta sensibilidad a las condiciones iniciales es clave: asegura que el sistema nunca se estanque en patrones repetitivos o valores fijos, lo que lo hace ideal para aplicaciones donde la aleatoriedad y la seguridad son críticas[7].

El sistema de Chua tiene puntos de equilibrio aislados, los cuales influyen en la dinámica del sistema y pueden limitar su aplicabilidad en ciertos contextos. Los puntos de equilibrio son soluciones estacionarias de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema, y su presencia puede afectar la topología local del espacio de fases y la geometría de las cuencas de atracción [11].

El sistema de Chua fue introducido por Leon Chua en la década de 1980 como un circuito electrónico no lineal capaz de exhibir comportamientos caóticos [9]. Este sistema es uno de los ejemplos más simples y conocidos de un sistema caótico, y ha sido ampliamente estudiado tanto por su elegancia matemática como por sus aplicaciones prácticas [10]. Descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en un espacio tridimensional, vamos a trabajar con el modelo adimensional:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(y - x - g(x)), \\ \dot{y}(t) = x - y + z, \\ \dot{z}(t) = -\beta y, \end{cases}$$

donde $g(x)$ es una función no lineal que describe el comportamiento del diodo de Chua. Esta función se define como:

$$g(x) = \begin{cases} bx + (a - b), & \text{si } x \geq 1, \\ ax, & \text{si } |x| \leq 1, \\ bx - (a - b), & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

Los parámetros α , β , a y b determinan la dinámica del sistema y su comportamiento caótico. El sistema de Chua es conocido por su atractor de doble enroscado (*double scroll*), que es una estructura geométrica compleja en el espacio de fases que caracteriza su comportamiento caótico [12].

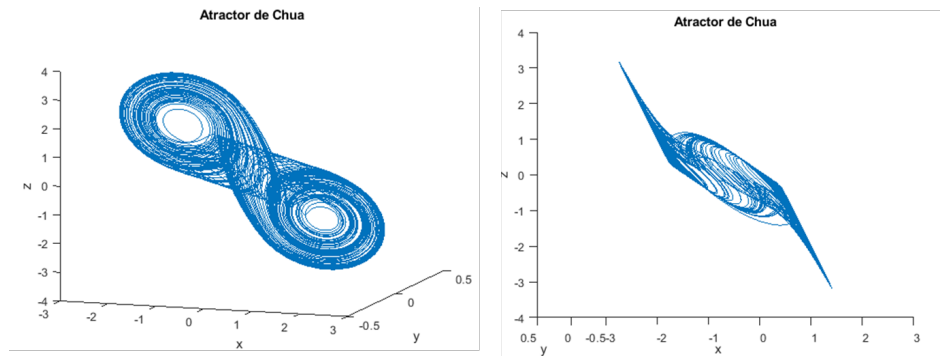


Figura 1.1: Atractor del sistema de Chua.

1.1. Campos vectoriales con puntos de equilibrio

Sea el sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$, donde $f(x)$ es un campo vectorial y dicho campo vectorial posee puntos de equilibrio x^* que satisfacen $f(x^*) = 0$, estos actúan como organizadores locales de la dinámica. Sin embargo, lejos de ser meros puntos de reposo, pueden convertirse en fuentes de inestabilidad cuando presentan propiedades como focos inestables. En sistemas como el circuito de Chua o el atractor de Lorenz, los puntos de equilibrio son inherentes a la estructura del modelo. La interacción entre sus variedades estable e inestable genera una dinámica recurrente pero no periódica: las trayectorias son atraídas y repelidas sucesivamente, tejiendo una estructura fractal en el espacio fase. Así, el caos emerge no a pesar de los equilibrios, sino gracias a su inestabilidad organizada.

Cuando el sistema no tiene puntos de equilibrio:

$$f(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

Ejemplos:

- $\dot{x} = 1$ (flujo uniforme)
- $\dot{x} = e^x$ (siempre positivo)
- $\dot{x} = \sin(x) + 2$ (desplazado fuera del cero)

Condiciones para la No Existencia:

Un sistema $\dot{x} = f(x)$ **no tiene puntos de equilibrio** si:

1. $f(x)$ es siempre positivo: $f(x) > 0$ para todo x
2. $f(x)$ es siempre negativo: $f(x) < 0$ para todo x
3. $f(x)$ está acotado lejos de cero: $|f(x)| \geq \varepsilon > 0$
4. El rango de f no contiene al cero

1.2. Campos vectoriales sin puntos de equilibrio

La ausencia de puntos de equilibrio en sistemas dinámicos podría sugerir la imposibilidad de comportamientos acotados complejos. Sin embargo, como establecen Dudkowski et al. [6]: “Los atractores ocultos son atractores que no se encuentran en la vecindad de un punto de equilibrio”, y su existencia “es importante porque pueden encontrar aplicaciones en diversos campos”.

Algunos mecanismos que posibilitan el caos sin equilibrio, Wiggins [4] añade que “la teoría de sistemas dinámicos se ocupa de la evolución temporal de sistemas [...] y el comportamiento asintótico puede ser muy complejo incluso en sistemas de dimensión baja”.

Algunas evidencias concretas desde la investigación, Jafari et al. [13] presentaron “nuevos ejemplos de atractores ocultos en sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio”, demostrando que “estos sistemas pueden exhibir comportamientos caóticos”.

Campos-Cantón and Escalante [14] probaron analíticamente la existencia de “atractores ocultos en sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio”, específicamente en sistemas con simetrías.

Pham et al. [15] implementaron experimentalmente “un sistema caótico sin equilibrio”, mostrando que “el sistema puede generar caos a pesar de no tener puntos de equilibrio”.

Como perspectiva teórica, Hirsch et al. [5] establecen que “los sistemas dinámicos pueden exhibir comportamiento complejo incluso en ausencia de puntos de equilibrio estables”, destacando el papel de las estructuras globales.

Khalil [16] enfatiza que “la estabilidad de sistemas no lineales debe analizarse considerando el comportamiento global, no solo los puntos de equilibrio”.

1.3. Atractores ocultos

Los **atractores ocultos** representan una fascinante categoría de sistemas dinámicos cuya presencia no puede ser detectada mediante métodos convencionales de localización de equilibrios [17, 18]. A diferencia de los atractores *autoevidentes* (como el atractor de Lorenz o el circuito clásico de Chua), cuyas cuencas de atracción intersectan vecindades de puntos de equilibrio inestables, los atractores ocultos emergen sin una conexión evidente con los equilibrios del sistema. Esta característica los hace particularmente elusivos y desafiantes tanto desde una perspectiva teórica como computacional.

Definición 1 (Tipos de atractores [6]). *Un atractor se llama atractor auto-excitado si su cuenca de atracción se cruza con cualquier vecindario abierto de un punto fijo inestable. De lo contrario, se llama atractor oculto.*

El descubrimiento de atractores ocultos en el sistema de Chua marcó un hito fundamental en la teoría de sistemas dinámicos [17, 19]. Mientras que el circuito

clásico de Chua [9] exhibía atractores caóticos conectados a puntos de equilibrio inestables, versiones modificadas del circuito revelaron comportamientos inesperados:

- **Modificación estructural:** Se introdujeron no linealidades *no polinomiales* (como funciones fraccionales o trigonométricas) que eliminaban los puntos de equilibrio convencionales [20].
- **Análisis de bifurcaciones:** Mediante técnicas de continuación numérica, se identificaron regiones de parámetros donde coexistían múltiples atractores, algunos sin conexión con equilibrios [18].
- **Simulación numérica avanzada:** El uso de métodos de integración especializados y condiciones iniciales específicas permitió revelar estas dinámicas ocultas [19].

Modificación estructural.

El sistema original:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(y - x - g(x)), \\ \dot{y}(t) = x - y + z, \\ \dot{z}(t) = -\beta y, \end{cases}$$

con

$$g(x) = \begin{cases} bx + (a - b), & \text{si } x \geq 1, \\ ax, & \text{si } |x| \leq 1, \\ bx - (a - b), & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio se encuentran resolviendo:

$$0 = y - x - f(x), \quad 0 = x - y + z, \quad 0 = -\beta y$$

lo que da $y = 0$, $z = -x$, y $x + f(x) = 0$, típicamente con 3 soluciones.

Introduciendo no linealidades que eliminan los puntos fijos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha(y - x - f(x)) + \gamma \sin(z) \\ \dot{y}(t) &= x - y + z + \delta e^{-x^2} \\ \dot{z}(t) &= -\beta y + \varepsilon \cos(x) \end{aligned}$$

donde $\gamma, \delta, \varepsilon > 0$ son parámetros de modificación.

Para encontrar puntos de equilibrio, resolvemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(y - x - f(x)) + \gamma \sin(z) \\ 0 &= x - y + z + \delta e^{-x^2} \\ 0 &= -\beta y + \varepsilon \cos(x) \end{aligned}$$

De la tercera ecuación: $y = \frac{\varepsilon}{\beta} \cos(x)$.

Sustituyendo en las demás:

$$0 = \alpha \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \cos(x) - x - f(x) \right) + \gamma \sin(z)$$

$$0 = x - \frac{\varepsilon}{\beta} \cos(x) + z + \delta e^{-x^2}$$

Para valores típicos $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.3$, $\varepsilon = 0.4$:

- La función $g(x) = \alpha \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \cos(x) - x - f(x) \right)$ está acotada pero oscilatoria
- El término $\gamma \sin(z)$ asegura que no haya solución constante
- El sistema resulta en un **atractor oculto** sin puntos de equilibrio en la vecindad
- El flujo nunca se detiene: $\|\dot{\mathbf{x}}\| > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

Propiedades:

1. **Sin puntos de equilibrio:** El sistema no tiene soluciones estacionarias
2. **Atractor oculto:** La cuenca de atracción no intersecta vecindarios de puntos fijos inestables
3. **Comportamiento caótico:** Mantiene dinámicas complejas a pesar de no tener equilibrios
4. **Conservación de estructura:** Preserva la topología del atractor de Chua original

Este descubrimiento demostró que el caos puede emerger desde la nada estructural, sin los puntos fijos que durante décadas se consideraron esenciales para la generación de dinámicas complejas.

1.4. Técnicas para generar atractores sin puntos de equilibrio

La generación de atractores caóticos en ausencia de puntos de equilibrio ha dado lugar a diversas estrategias metodológicas:

A. Modificación de no linealidades

- **Funciones trascendentes:** Empleo de funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas que evitan la anulación del campo vectorial [13].
- **Elementos memristivos:** Introducción de memristores que añaden histéresis y no linealidades dependientes del historial [20].

B. Estructuras jerárquicas y acoplamientos

- **Sistemas conjugados:** Acoplamiento de subsistemas estables que colectivamente generan caos [21].
- **Retroalimentación no lineal:** Implementación de lazos de realimentación que crean dinámicas globales complejas sin equilibrios locales [15].

C. Técnicas computacionales avanzadas

- **Algoritmos de continuación homotópica:** Transformación gradual de sistemas con equilibrios hacia sistemas sin equilibrios, preservando la dinámica caótica [17].
- **Búsqueda en espacios de parámetros:** Exploración sistemática de regiones donde el Jacobiano del sistema es no singular en todo el espacio fase [13].

1.5. Planteamiento del Problema

El sistema de Chua tradicional presenta puntos de equilibrio que influyen en su dinámica. Aunque este sistema ha sido ampliamente utilizado en estudios de caos y en aplicaciones prácticas [9, 10], la presencia de estos puntos de equilibrio puede ser una desventaja en situaciones donde no se requieren estados estacionarios[7].

El principal desafío radica en eliminar los puntos de equilibrio sin alterar las propiedades caóticas del sistema, como la sensibilidad a las condiciones iniciales y la existencia de atractores extraños [1]. Esto implica modificar la estructura del sistema de Chua.

El objetivo principal de este trabajo es Diseñar un sistema dinámico en un campo vectorial sin puntos de equilibrio que presente un atractor caótico que se asemeje al atractor del sistema de Chua, conservando sus propiedades caóticas.

Como hipótesis podemos decir que la implementación de técnicas de análisis vectorial permitirá diseñar efectivamente un sistema dinámico con un atractor caótico en ausencia de puntos de equilibrio. Partiendo de la estructura del sistema de Chua, se obtendrá un sistema análogo que preservará las propiedades caóticas fundamentales.

El resultado esperado es que al concluir el trabajo contribuya al campo de los sistemas dinámicos no lineales al proponer un nuevo diseño del sistema tipo de Chua sin puntos de equilibrio, lo que amplía su aplicabilidad en áreas donde la presencia de estados estacionarios es indeseable. Además, se proporciona una metodología detallada para el diseño e implementación de sistemas lineales por partes (PWL) con propiedades caóticas, lo que puede servir como base para futuras investigaciones en el área.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

- **Capítulo 2: Marco Teórico:** Se presenta una revisión de los conceptos fundamentales relacionados con los sistemas caóticos, el sistema de Chua y los sistemas lineales por partes (PWL).
- **Capítulo 3: Metodología:** Se describe en detalle el diseño del sistema propuesto, incluyendo las modificaciones realizadas al sistema de Chua tradicional y su implementación en MATLAB.
- **Capítulo 4: Resultados:** Se presentan los resultados obtenidos, incluyendo el análisis de los puntos de equilibrio, los exponentes de Lyapunov y los atractores observados.
- **Capítulo 5: Conclusiones y Trabajos Futuros:** Se resumen las conclusiones del trabajo y se proponen posibles líneas de investigación futura.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Sistemas Dinámicos

Los sistemas dinámicos han sido ampliamente estudiados para diferentes trabajos en donde:

Sea X un espacio de estados, es decir, el conjunto de todos los estados posibles en los que puede encontrarse el sistema y el conjunto de tiempo $T \in \mathbb{R}$

Un sistema dinámico en X , algunas veces llamado flujo, es entonces definido por un mapeo continuo

$\varphi : X \times T \rightarrow X$ con las siguientes propiedades:

- (1) $\varphi(x, 0) = x$ para toda $x \in X$ (propiedad de identidad).
- (2) $\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + s)$ para todo $x \in X$ (propiedad de semigrupo).

El espacio de estados X y el mapeo φ describe el cambio temporal del sistema donde el tiempo t transcurre en un semigrupo $T \subset \mathbb{R}$.

Como regla tenemos

$T = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ ó $T = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. En el último caso el sistema dinámico se dice de tiempo discreto.

A todo sistema dinámico continuo en el tiempo se le puede asociar un campo vectorial dado por ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas escrito como

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.2}$$

donde $f(t, x) : T \times X \rightarrow X$.

El objetivo del análisis desde esta perspectiva es estudiar el comportamiento cualitativo a largo plazo de las trayectorias (órbitas), como la existencia y estabilidad de puntos fijos, ciclos límite y otros atractores, mediante herramientas geométricas y topológicas [2].

Un sistema no lineal es un modelo matemático donde la relación entre las entradas y salidas no cumple el principio de superposición, es decir no satisface:

$$\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

Los sistemas dinámicos no lineales son fundamentales para modelar una amplia variedad de fenómenos en la naturaleza y en aplicaciones tecnológicas. A diferencia de los sistemas lineales, los sistemas no lineales pueden presentar comportamientos complejos, como bifurcaciones, caos y atractores extraños [1]. Algunos de estos sistemas se caracterizan por su sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a trayectorias completamente diferentes en el espacio de fases [16]. En particular, los trabajos de [14] demuestran que incluso sistemas sin puntos de equilibrio pueden presentar atractores ocultos, los cuales son particularmente relevantes en aplicaciones de seguridad y comunicaciones.

Los *atractores ocultos* son configuraciones dinámicas que no pueden ser localizadas mediante análisis convencional de puntos de equilibrio. Eric Campos-Cantón y colaboradores [22] demostraron la existencia de un tipo particular llamado:

Atractor oculto de flujo sin equilibrio.

Caracterizado por:

- Ausencia de puntos fijos en el espacio de estados.
- Cuencas de atracción no conectadas a equilibrios.
- Generación de caos mediante mecanismos no convencionales.

Un sistema dinámico no lineal puede describirse mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) o en diferencias, dependiendo de si el tiempo es continuo o discreto. En el caso de sistemas continuos, las EDOs definen la evolución temporal de las variables de estado, mientras que en sistemas discretos, las ecuaciones en diferencias describen cómo el estado del sistema cambia de un paso de tiempo al siguiente [2].

2.1.1. Modelado de Fenómenos Complejos

Los sistemas dinámicos no lineales son especialmente útiles para modelar fenómenos complejos en diversas áreas, como la física, la biología, la química y la ingeniería [1]. Los estudios de [14] amplían este panorama al mostrar que sistemas aparentemente simples sin equilibrios pueden generar dinámicas caóticas ricas, desafiando las expectativas tradicionales.

Un claro ejemplo de fenómeno complejo es el sistema de Lorenz que genera caos y un atractor muy famoso el cual se ilustra en la Figura 2.1, pero revisaremos mas a profundidad el sistema de Lorenz mas adelante.

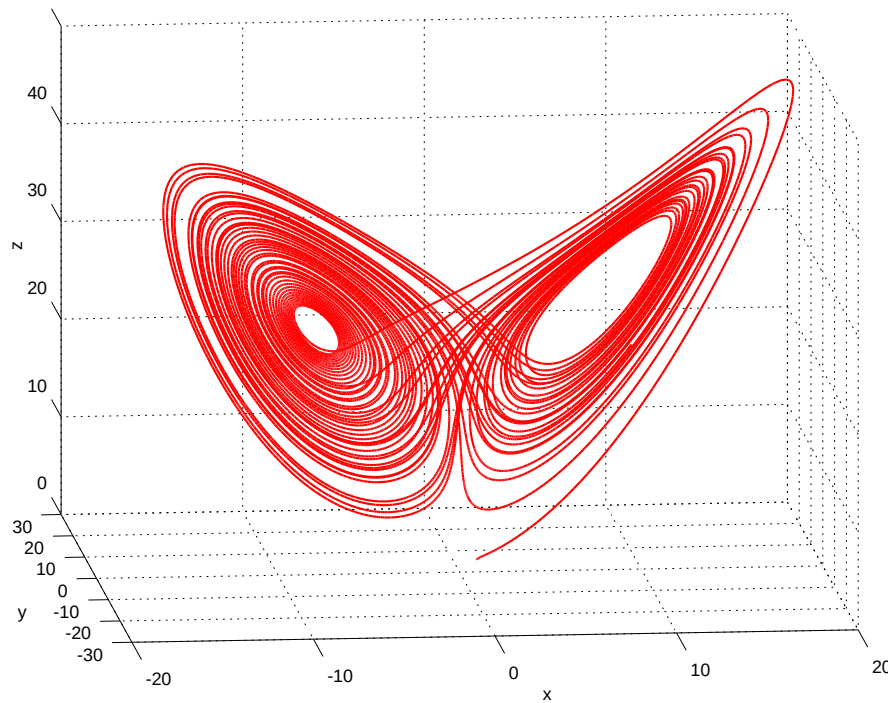


Figura 2.1: Mariposa de Lorenz

2.1.2. Estabilidad y Bifurcaciones

La estabilidad de un sistema dinámico se refiere a cómo responde el sistema a pequeñas perturbaciones. Las soluciones de un sistema son estables si convergen a una vecindad de un punto de equilibrio, e inestable si divergen.

En el estudio de sistemas dinámicos no lineales, la estabilidad de un punto de equilibrio x^* (donde $f(x^*) = 0$) se clasifica según el comportamiento de las trayectorias cerca de él. La definición clásica, como la presenta Khalil, distingue entre estabilidad e inestabilidad:

- **a. Estable:** Si para toda perturbación pequeña $\|x(0) - x^*\| < \delta$, la solución $x(t)$ permanece cerca de x^* ($\|x(t) - x^*\| < \epsilon$) para todo $t \geq 0$ y además

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*,$$

se dice que x^* es **asintóticamente estable**.

- **b. Inestable:** Si existe al menos una trayectoria que se aleja de x^* para cualquier perturbación arbitrariamente pequeña.

Casos generales en sistemas no lineales, es común encontrar múltiples puntos de equilibrio con diferentes propiedades de estabilidad[16]:

- **I. Puntos estables:** Atraen trayectorias cercanas (e.g., nodos o focos estables).

- **II. Puntos inestables:** Repelen trayectorias (e.g., puntos de silla o focos inestables).
- **III. Estabilidad marginal:** Trayectorias permanecen cercanas pero no convergen (e.g., centros en sistemas conservativos).

Otros comportamientos alrededor de puntos de equilibrio en $\mathbb{R}^2$:

a. Punto Foco (Espiral)

Un punto de equilibrio tipo foco es cuando donde las trayectorias giran en espiral alrededor de él.

Estabilidad:

- 1. *Foco estable:* Trayectorias convergen en espiral (eigenvalores complejos con parte real negativa).
- 2. *Foco inestable:* Trayectorias divergen en espiral (parte real positiva).

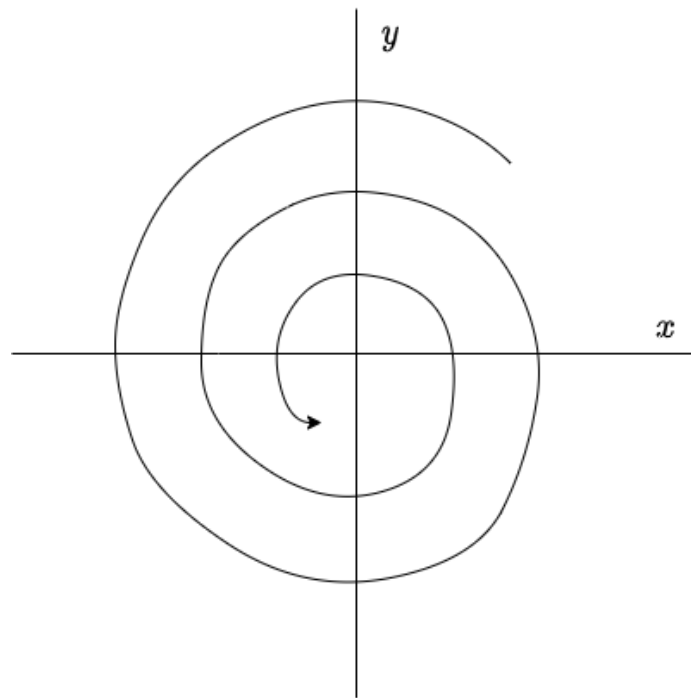


Figura 2.2: Ejemplo del comportamiento de punto Foco, en este caso estable por que vemos como la trayectoria se acerca al punto, si fuese inestable se alejaría.

b. Punto Silla

Punto donde las trayectorias convergen en una dirección y divergen en otra.

Características:

- 1. Eigenvalores reales de signos opuestos (uno positivo, otro negativo).
- 2. Presenta variedades estable e inestable.

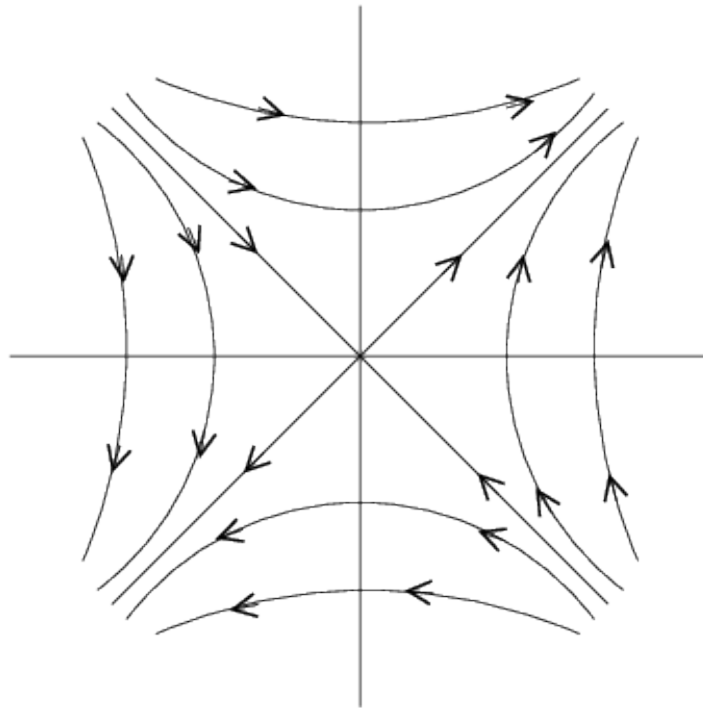


Figura 2.3: Ejemplo del comportamiento de punto silla.

c. Nodo Estable

Propiedades:

- 1. Eigenvalores reales negativos y distintos.
- 2. Tasa de convergencia diferente en cada dirección.
- 3. Caso especial: Nodo impropio (eigenvalores iguales).

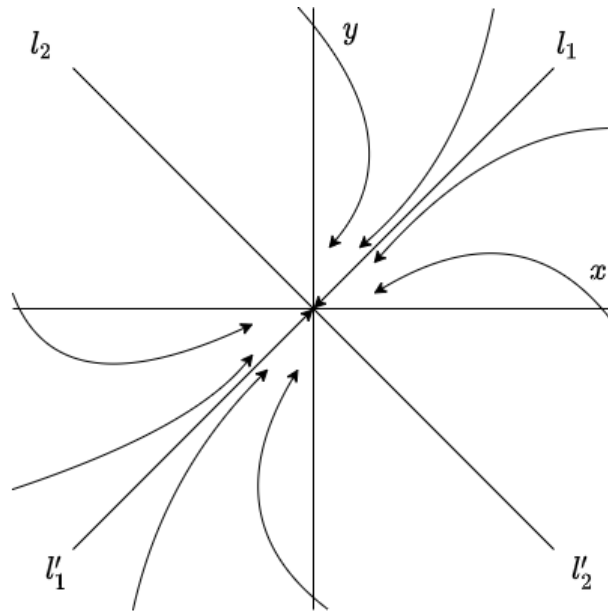


Figura 2.4: Ejemplo del comportamiento de punto nodo estable.

d. Nodo Inestable

Propiedades:

- 1. Eigenvalores reales positivos.
- 2. Comportamiento opuesto al nodo estable.

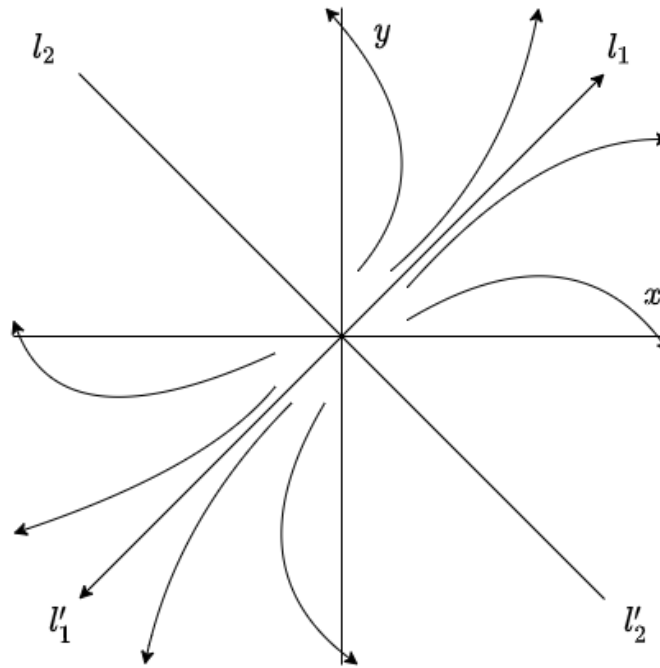


Figura 2.5: Ejemplo del comportamiento de punto nodo inestable

Una **bifurcación** es un cambio cualitativo en el comportamiento de un sistema dinámico cuando se varían sus parámetros. Ocurre cuando pequeñas modificaciones en los parámetros de control provocan una alteración fundamental en la estructura del sistema, como:

- **Cambios en la estabilidad:** Un punto de equilibrio estable puede volverse inestable
- **Nacimiento/desaparición** de puntos de equilibrio u órbitas periódicas
- **Transiciones entre regímenes dinámicos:** Por ejemplo, de comportamiento periódico a caótico

Características clave:

- Ocurren en valores críticos específicos de los parámetros (*puntos de bifurcación*).

- Son **locales** (afectan un punto específico) o **globales** (cambian toda la estructura).
- Se clasifican según cómo cambian los *retratos de fase*.

Trabajos recientes como [14] han explorado cómo estas bifurcaciones pueden revelar la presencia de atractores ocultos en sistemas sin equilibrio.

2.2. Sistemas Caóticos

El caos es un comportamiento determinista con alta sensibilidad a las condiciones iniciales que podemos definir:

Sea $f(t, x)$ un flujo y $L \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto e invariante bajo este flujo para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 2 (Sensibilidad a las condiciones iniciales). [4] *El flujo $f(t, x)$ se dice que es sensible a las condiciones iniciales en L si existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para cualquier $x \in L$ y cualquier vecindad U de x , existe $y \in U$ y $t > 0$ tal que $|f(t, x) - f(t, y)| > \varepsilon$.*

Definición 3 (Conjunto caótico invariante [4]). *L se dice ser caótico si:*

1. *$f(t, x)$ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en L .*
2. *$f(t, x)$ es topológicamente transitiva en L .*

Un ejemplo de sistemas caóticos

Anteriormente hablamos de fenómenos complejos y mencionamos el sistema de Lorenz, fue desarrollado por Edward Lorenz en 1963 como un modelo simplificado de convección atmosférica. Según su artículo fundacional [23]:

“Las ecuaciones estudiadas aquí fueron extremadamente simplificadas [...] para retener algunos de los elementos esenciales que parecen necesarios para convección no periódica.”

El modelo surge al aplicar las siguientes simplificaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes para convección térmica, considera solo tres modos dominantes en la expansión de Fourier y representa un fluido entre dos placas con:

- x : Intensidad del movimiento convectivo.
- y : Diferencia de temperatura entre corrientes.
- z : Distorsión del perfil vertical de temperatura.

Ecuaciones Originales

Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sigma(y - x), \\ \dot{y}(t) &= x(\rho - z) - y, \\ \dot{z}(t) &= xy - \beta z.\end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$,

Donde los parámetros son: $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, \frac{8}{3})$.

2.2.1. Atractores Extraños

Los sistemas caóticos suelen exhibir atractores extraños, que son estructuras geométricas complejas en el espacio de fases [24]. El circuito de Chua, estudiado en [9, 10] y el sistema de Lorenz [23] son ejemplos paradigmáticos que han permitido entender mejor estos fenómenos.

Definición 4 (Conjunto atractor). [4]. *Es un conjunto cerrado e invariante $A \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un conjunto atractor si existe algún vecindario U de A tal que:*

- $\forall t \geq 0, f(t, U) \subset U$ y
- $\bigcap_{t \geq 0} f(t, U) = A$.

Definición 5 (Atractor). *Un atractor es un conjunto atractor topológicamente transitivo.[4]*

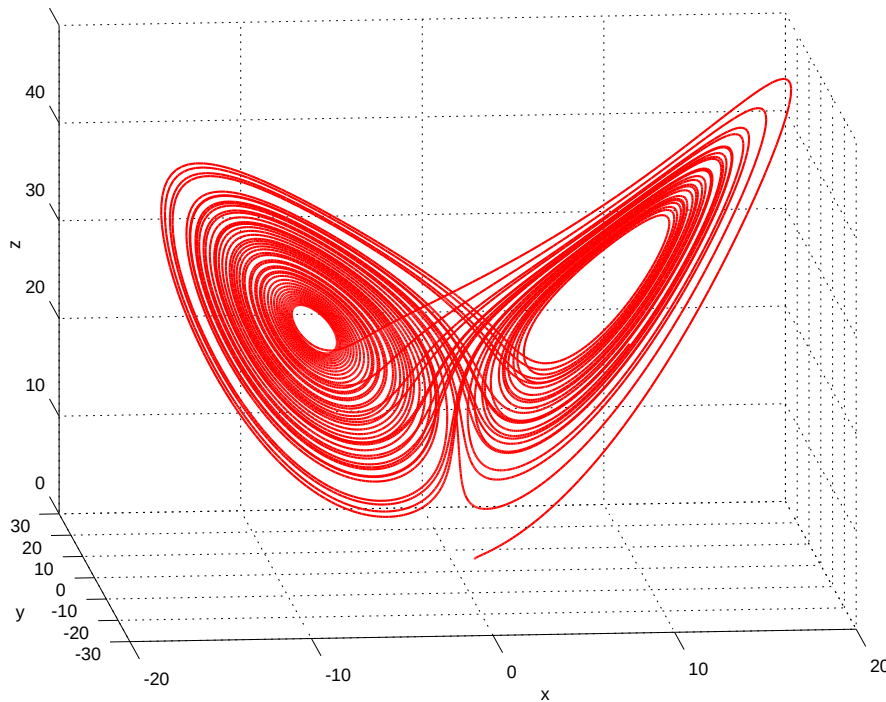


Figura 2.6: Atractor de Lorenz

2.2.2. Propiedades del Caos

Además de la sensibilidad a las condiciones iniciales, los sistemas caóticos presentan otras propiedades importantes, como la mezcla topológica y la densidad de órbitas periódicas [2]. Estas propiedades son cruciales para aplicaciones como la sincronización de caos [25, 26] y el análisis de sistemas complejos [3].

Tipos de atractores

En los sistemas dinámicos no lineales, los atractores pueden clasificarse según su relación con los puntos de equilibrio del sistema. Mientras que los atractores auto-excitados (como los de Lorenz o Rössler) están asociados a equilibrios inestables, existen clases especiales de atractores cuyo comportamiento desafía esta conexión tradicional, como lo vimos en el capítulo 1 sección 1.3 la **Definición 1 que dice un atractor se llama atractor auto-excitado si su cuenca de atracción se cruza con cualquier vecindario abierto de un punto fijo inestable. De lo contrario, se llama atractor oculto.**

Atractores Ocultos

- No tienen conexión con puntos de equilibrio inestables (a diferencia de los atractores como Lorenz o Rössler).
- Su cuenca de atracción no intersecta vecindades pequeñas de equilibrios, lo que los hace difíciles de detectar con métodos numéricos estándar.
- Ejemplos: Sistemas con equilibrios estables o sin equilibrios.

Atractores No Auto-Excitados

- Su dinámica no depende de la inestabilidad local de puntos de equilibrio[3].
- Requieren perturbaciones específicas para ser observados.[3].

2.3. El Sistema de Chua

El sistema de Chua fue introducido por Leon Chua en la década de 1980 como un circuito electrónico no lineal capaz de exhibir comportamientos caóticos [9]. Este sistema es uno de los ejemplos más simples y conocidos de un sistema caótico, y ha sido ampliamente estudiado tanto por su elegancia matemática como por sus aplicaciones prácticas [10].

2.3.1. Descripción Matemática

El sistema de Chua está descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en un espacio tridimensional, vamos a trabajar con el modelo adimensional:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha(y - x - g(x)), \\ \dot{y}(t) = x - y + z, \\ \dot{z}(t) = -\beta y, \end{cases}$$

donde $g(x)$ es una función no lineal que describe el comportamiento del diodo de Chua. Esta función se define como:

$$g(x) = \begin{cases} bx + (a - b), & \text{si } x \geq 1, \\ ax, & \text{si } |x| \leq 1, \\ bx - (a - b), & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

Los parámetros α , β , a y b determinan la dinámica del sistema y su comportamiento caótico. El sistema de Chua es conocido por su atractor de doble enrollado (*double scroll*), que es una estructura geométrica compleja en el espacio de fases que caracteriza su comportamiento caótico [12].

2.4. Puntos de Equilibrio en Sistemas Dinámicos

Los puntos de equilibrio son soluciones estacionarias de las ecuaciones diferenciales que describen un sistema dinámico. En el caso del sistema de Chua, los puntos de equilibrio juegan un papel crucial en la estructura del atractor y en la dinámica global del sistema [11]. Estos puntos se calculan resolviendo las ecuaciones $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ y $\dot{z} = 0$, y su estabilidad se determina mediante el análisis de los eigenvalores de la matriz Jacobiana evaluada en dichos puntos [16].

2.4.1. Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

La estabilidad de un punto de equilibrio se determina analizando los eigenvalores de la matriz Jacobiana del sistema en ese punto. Si todos los eigenvalores tienen parte real negativa, el punto de equilibrio es estable; si alguno tiene parte real positiva, el punto es inestable [16]. En el sistema de Chua, los puntos de equilibrio pueden ser estables o inestables dependiendo de los valores de los parámetros del sistema.

2.5. Sistemas Lineales por Partes (PWL)

Los sistemas lineales por partes son una clase de sistemas dinámicos no lineales que se caracterizan por tener regiones lineales separadas por superficies

de conmutación. Estos sistemas son particularmente útiles para modelar sistemas caóticos, ya que permiten una simplificación matemática sin perder la complejidad dinámica [11].

2.5.1. Planos de Conmutación en Sistemas PWL

Los **planos de conmutación** son superficies (o hiperplanos) en el espacio de estados de un sistema PWL que dividen el dominio en regiones donde el sistema se comporta de manera lineal. En cada región, la dinámica está gobernada por un conjunto diferente de ecuaciones lineales, y los planos de conmutación marcan las fronteras donde ocurren transiciones entre estos comportamientos lineales, son como fronteras invisibles que dividen el comportamiento de un sistema en zonas distintas. En cada zona, el sistema sigue reglas lineales sencillas, pero al cruzar estas fronteras, cambia abruptamente su manera de actuar. Son los puntos donde el sistema toma decisiones para pasar de un comportamiento a otro, permitiendo modelar dinámicas complejas mediante trozos simples.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} A_1\mathbf{x} + B_1 & \text{si } \mathbf{x} \in R_1, \\ A_2\mathbf{x} + B_2 & \text{si } \mathbf{x} \in R_2, \\ \vdots & \\ A_n\mathbf{x} + B_n & \text{si } \mathbf{x} \in R_n, \end{cases}$$

donde R_i son regiones delimitadas por los planos de conmutación. **Representación matemática de los planos:** Un plano de conmutación se define por una ecuación lineal:

$$H_i : \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0,$$

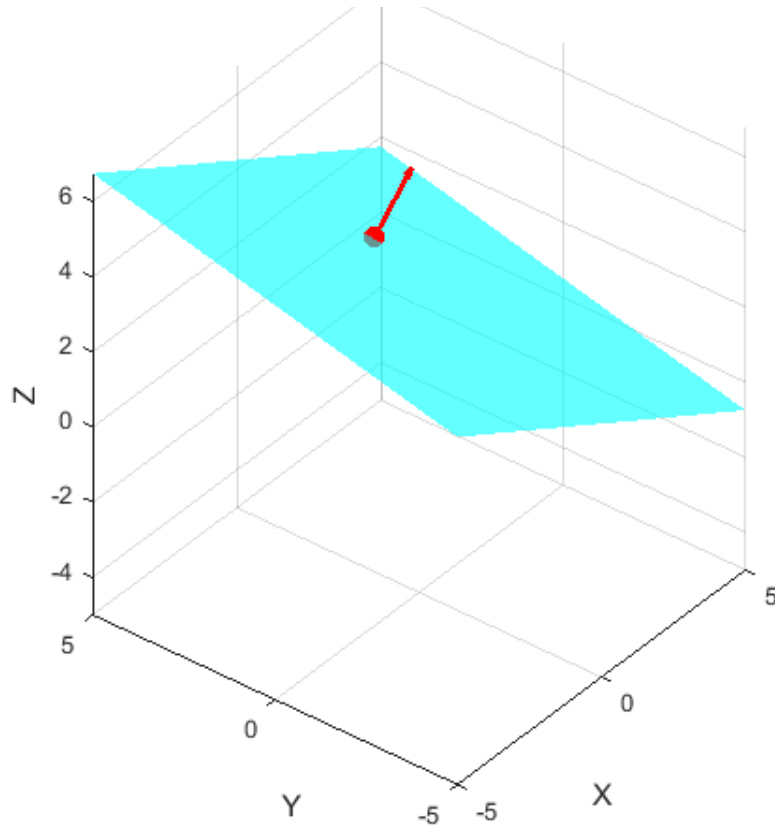


Figura 2.7: Ejemplo de plano con vector normal en un punto del mismo

■ donde:

- $\mathbf{n}_i$ es el vector normal al plano,
- $\mathbf{x}_0$ es un punto de referencia en el plano.

En el caso del sistema de Chua, la función no lineal $g(x)$ se puede aproximar mediante una serie de regiones lineales, lo que facilita el análisis y la implementación numérica [12]. Cada región lineal está definida por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, y las transiciones entre regiones se producen cuando las trayectorias del sistema cruzan las superficies de conmutación.

Los sistemas PWL tienen varias ventajas sobre los sistemas no lineales generales. En primer lugar, son más fáciles de analizar matemáticamente, ya que las soluciones en cada región lineal pueden obtenerse de manera explícita. En segundo lugar, son más eficientes computacionalmente, lo que los hace ideales para simulaciones numéricas y aplicaciones en tiempo real [11].

Los exponentes de Lyapunov son una herramienta fundamental para caracterizar el comportamiento caótico de un sistema dinámico. Estos exponentes miden la tasa de separación exponencial de trayectorias cercanas en el espacio de fases, y un exponente positivo indica la presencia de caos [24]. En el caso del sistema de Chua, el cálculo de los exponentes de Lyapunov permite confirmar la naturaleza

caótica del sistema y evaluar el impacto de las modificaciones realizadas, como la eliminación de los puntos de equilibrio [1].

El cálculo de los exponentes de Lyapunov se realiza mediante el método de Wolf, que utiliza una serie de pasos numéricos para estimar la tasa de separación de trayectorias cercanas en el espacio de fases [24]. Este método es ampliamente utilizado en el análisis de sistemas caóticos debido a su precisión y eficiencia computacional.

Los exponentes de Lyapunov proporcionan información sobre la estabilidad y la predictibilidad de un sistema dinámico. Un exponente positivo indica que las trayectorias cercanas divergen exponencialmente, lo que es característico del comportamiento caótico. Por otro lado, un exponente negativo indica que las trayectorias convergen, lo que sugiere estabilidad [24].

Para un sistema dinámico $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ con $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, los exponentes de Lyapunov $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ caracterizan la evolución de perturbaciones infinitesimales $\delta\mathbf{x}$:

$$\|\delta\mathbf{x}(t)\| \sim \|\delta\mathbf{x}(0)\| e^{\lambda_i t} \quad (2.1)$$

¿Que representa el valor de cada exponente?

1. $\lambda_1 > 0$ (**Expansión**):

- Dinámica: Inestabilidad en una dirección del espacio de fases
- Implicaciones:

$$h_{KS} = \lambda_1 \quad (\text{Entropía de Kolmogorov-Sinai})$$

$$t_{\text{pred}} \sim \lambda_1^{-1} \quad (\text{Horizonte de predictibilidad})$$

2. $\lambda_2 = 0$ (**Neutral**):

- Origen: Invariancia temporal en sistemas autónomos
- Propiedad:

$$\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \|\delta\mathbf{x}_{\parallel}\| = 0 \quad (2.2)$$

donde $\delta\mathbf{x}_{\parallel}$ es paralelo al flujo

3. $\lambda_3 < 0$ (**Contracción**):

- Consecuencias:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0 \quad (\text{Disipatividad})$$

$$\text{Volumen} \sim e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \rightarrow 0$$

Los sistemas caóticos, como el circuito de Chua [9, 10], tienen aplicaciones transversales en ciencia e ingeniería gracias a sus propiedades únicas: sensibilidad

a condiciones iniciales, mezcla topológica y estructura fractal [1], aunque no existe una definición universal de caos cabe mencionar que la característica mas importante es la sensibilidad a las condiciones iniciales.

A continuación, se detallan sus principales aplicaciones:

Criptografía y Seguridad Informática

La naturaleza impredecible pero determinista del caos lo hace ideal para criptografía. [26] demostró cómo implementar circuitos caóticos para encriptar señales en tiempo real, donde pequeñas variaciones en parámetros generan claves prácticamente irrompibles. Técnicas basadas en atractores ocultos [14] amplían estas posibilidades al dificultar la reconstrucción de sistemas por atacantes.

Procesamiento de Señales y Biomédica

En análisis de señales, el caos permite modelar:

- Señales cerebrales (EEG) y cardíacas (ECG), donde [25] aplicó sincronización caótica para filtrar ruido.
- Vibraciones mecánicas en turbinas, usando exponentes de Lyapunov [24] para predecir fallos.

Comunicaciones por Caos

La sincronización de sistemas caóticos [27] permite:

- Transmisión segura de datos mediante masking caótico.
- Diseño de redes neuronales artificiales con dinámicas complejas [12].

Electrónica y Control

- Circuitos caóticos reconfigurables para pruebas de estrés en componentes [10].
- Control de robots usando atractores caóticos para evitar patrones predecibles [11].

La sincronización de sistemas caóticos es un área de investigación activa que busca lograr que dos o más sistemas caóticos evolucionen de manera sincronizada, a pesar de sus condiciones iniciales diferentes [25]. Esta técnica tiene aplicaciones en comunicaciones seguras, donde la sincronización de sistemas caóticos se utiliza para transmitir información de manera cifrada.

En este capítulo se ha presentado una revisión detallada de los conceptos fundamentales relacionados con los sistemas dinámicos no lineales, el sistema de

Chua y los sistemas lineales por partes (PWL). También se han discutido las herramientas matemáticas utilizadas para analizar estos sistemas, como los puntos de equilibrio y los exponentes de Lyapunov. En el siguiente capítulo, se describirá la metodología utilizada para diseñar un sistema de Chua sin puntos de equilibrio, conservando sus propiedades caóticas y explorando su relación con atractores ocultos y no autoexcitados.

Capítulo 3

Construcción del sistema de Chua sin puntos de equilibrio.

En este capítulo se describe la metodología utilizada para diseñar un sistema de Chua sin puntos de equilibrio, conservando sus propiedades caóticas. El enfoque propuesto incluye la modificación del sistema de Chua tradicional mediante la introducción de múltiples superficies de conmutación y el desplazamiento de los puntos de equilibrio fuera de las trayectorias principales del sistema.

Ecuaciones del Sistema de Chua

El sistema de Chua tradicional está descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs):

$$\dot{x}(t) = \alpha(y - x - g(x)), \quad (3.1)$$

$$\dot{y}(t) = x - y + z, \quad (3.2)$$

$$\dot{z}(t) = -\beta y, \quad (3.3)$$

donde $g(x)$ es una función no lineal definida por:

$$g(x) = \begin{cases} bx + (a - b), & \text{si } x \geq 1, \\ ax, & \text{si } |x| \leq 1, \\ bx - (a - b), & \text{si } x \leq -1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Los parámetros α , β , a y b determinan la dinámica del sistema. En este trabajo, se utilizan los siguientes valores para estos parámetros:

$$(\alpha, \beta, a, b) = (9.0, 14.285, -1.143, -0.714). \quad (3.5)$$

Los puntos de equilibrio del sistema de Chua se definen como las soluciones estacionarias de las ecuaciones diferenciales. En este caso, los puntos de equilibrio son:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

De una transformación lineal representada por una matriz, los eigenvalores (o valores propios) son escalares que representan las tasas características de crecimiento o decaimiento en las direcciones definidas por los eigenvectores. En sistemas dinámicos, revelan información crucial sobre:

- **Estabilidad:** Determinan si pequeñas perturbaciones crecerán o desaparecerán.
- **Velocidad de respuesta:** Indican qué tan rápido el sistema responde a cambios.
- **Tipo de dinámica:** Distinguen entre comportamientos oscilatorios, exponenciales o mixtos.

La parte real del eigenvalor indica si una dirección es estable (negativa) o inestable (positiva), parte real cero indica un umbral de estabilidad donde el sistema puede ser marginalmente estable o mostrar comportamientos más complejos. Mientras la parte imaginaria revela componentes oscilatorios.

Mediante una simulación numérica calculamos los eigenvalores del sistema de Chua:

- Para $x \geq 1$:

$$\lambda_1 = -3.9410, \quad \lambda_2 = 0.1855 + 3.0459i, \quad \lambda_3 = 0.1855 - 3.0459i$$

- Para $|x| \leq 1$:

$$\lambda_1 = 2.2107, \quad \lambda_2 = -0.9653 + 2.7086i, \quad \lambda_3 = -0.9653 - 2.7086i$$

- Para $x \leq -1$:

$$\lambda_1 = -3.9410, \quad \lambda_2 = 0.1855 + 3.0459i, \quad \lambda_3 = 0.1855 - 3.0459i$$

Los eigenvectores son direcciones especiales en un sistema dinámico donde el comportamiento es particularmente simple y predecible. Representan ejes privilegiados a lo largo de los cuales el sistema solo se expande o contrae, sin rotaciones ni distorsiones complejas.

En el análisis de estabilidad, estos vectores identifican las direcciones principales de atracción o repulsión cerca de puntos de equilibrio. Su importancia radica

en que permiten descomponer comportamientos complejos en modos simples independientes, facilitando el estudio cualitativo del sistema.

Mediante una simulación numérica calculamos los Eigenvectores del sistema de Chua:

1. Para $x \geq 1$:

$$\begin{bmatrix} -0.8678 & 0.3252 + 0.2600i & 0.3252 - 0.2600i \\ 0.1322 & 0.0116 + 0.1897i & 0.0116 - 0.1897i \\ 0.4790 & -0.8891 + 0.0000i & -0.8891 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

2. Para $|x| \leq 1$:

$$\begin{bmatrix} 0.8285 & 0.4235 - 0.1545i & 0.4235 + 0.1545i \\ 0.0857 & -0.0592 + 0.1660i & -0.0592 - 0.1660i \\ -0.5534 & -0.8751 + 0.0000i & -0.8751 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

3. Para $x \leq -1$:

$$\begin{bmatrix} -0.8678 & 0.3252 + 0.2600i & 0.3252 - 0.2600i \\ 0.1322 & 0.0116 + 0.1897i & 0.0116 - 0.1897i \\ 0.4790 & -0.8891 + 0.0000i & -0.8891 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

Mediante una simulación numérica se puede apreciar el atractor.

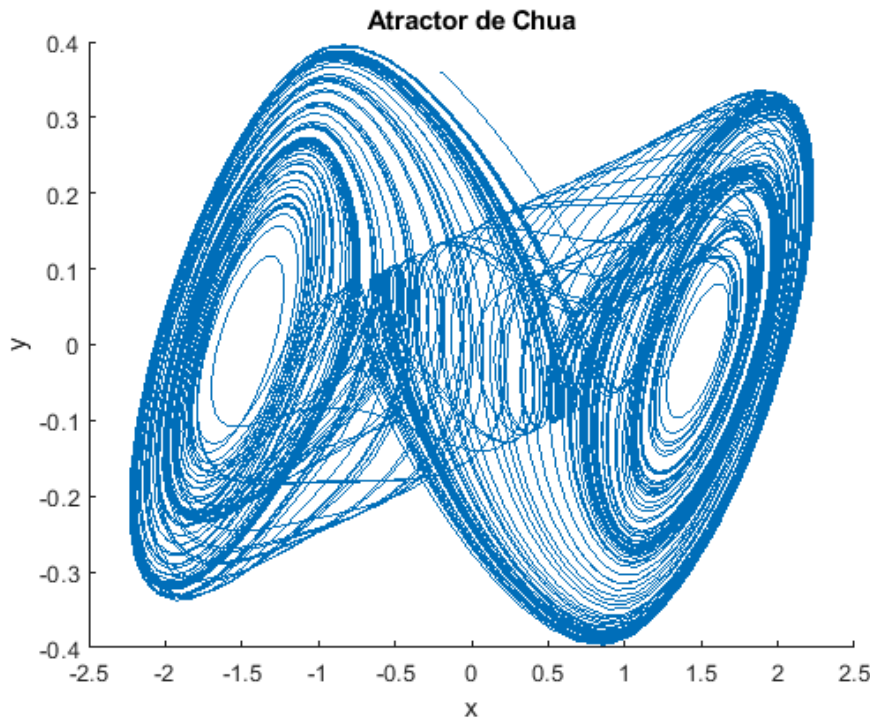


Figura 3.1: Proyección X-Y

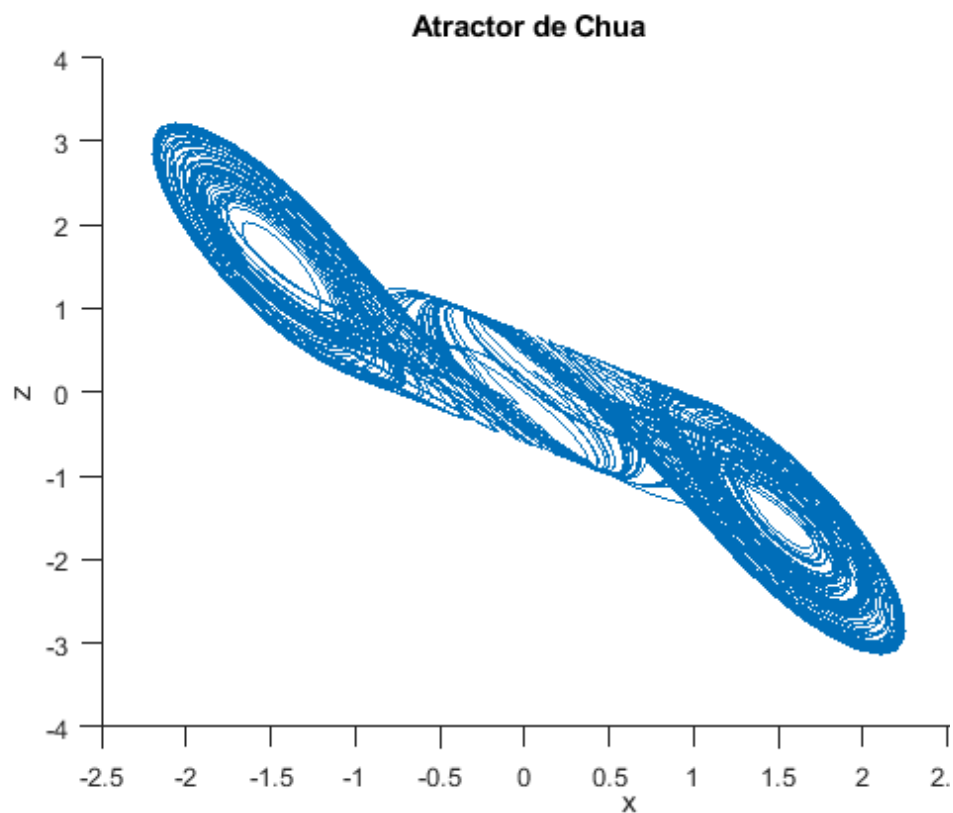


Figura 3.2: Proyección X-Z

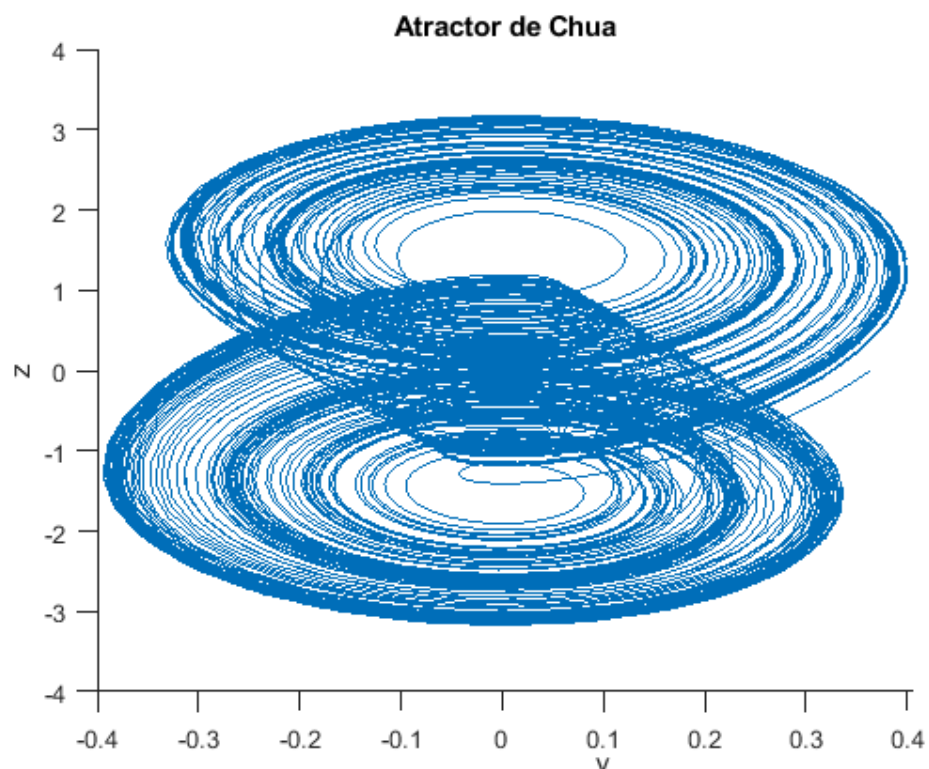


Figura 3.3: Proyección Y-Z

3.1. Planos de Conmutación añadidos

Se introduce un mayor número de superficies de conmutación, esto aumenta el sistema de múltiples regiones de 3 a 6 (Fig: 3.4), y así desplazar el punto de equilibrio fuera del campo donde se desarrolla la trayectoria principal del sistema.

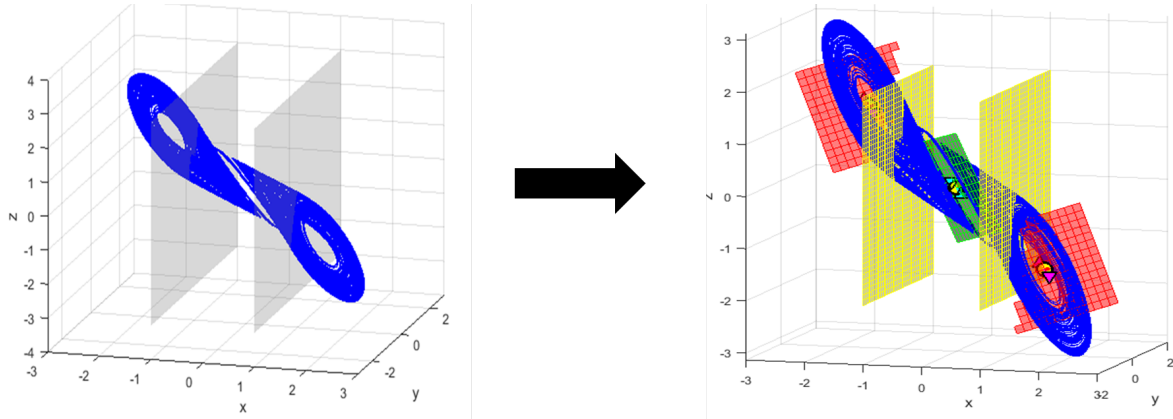


Figura 3.4: Idea de como añadir los nuevos planos de conmutación sobre los puntos de equilibrio originales.

3.2. Procedimiento

Consideremos un sistema lineal por partes en 3 regiones que defininiremos por la letra S.

$$S_i = S_1, S_2, S_3. \quad (3.7)$$

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x + B_1 & \text{si } x \in S_1, \\ A_2x + B_2 & \text{si } x \in S_2, \\ A_3x + B_3 & \text{si } x \in S_3, \end{cases} \quad (3.8)$$

con las condiciones:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_3, \\ B_1 &= -B_3, \\ B_2 &= 0. \end{aligned}$$

Expresión de punto de equilibrio para el sistema dinámico por regiones:

$$0 = A_i x^* + B_i \Rightarrow x^* = -A_i^{-1} B_i, \quad \text{donde } x^* \in S_i$$

Se añade un plano de conmutación H para cada región en el punto de equilibrio, dividiendo cada una de las 3 regiones en 2 de la forma:

- $S_1 = \{S_{11}, S_{12}\}$
- $S_2 = \{S_{21}, S_{22}\}$
- $S_3 = \{S_{31}, S_{32}\}$

Dadas las particiones del sistema S_{ij} , se cumple:

1. Frontera entre S_{11} y S_{12} : $\text{cl}(S_{11}) \cap \text{cl}(S_{12}) = H_1$
2. Frontera entre S_{21} y S_{22} : $\text{cl}(S_{21}) \cap \text{cl}(S_{22}) = H_2$
3. Frontera entre S_{31} y S_{32} : $\text{cl}(S_{31}) \cap \text{cl}(S_{32}) = H_3$

donde los planes de conmutación H_i pertenecen a los planos P_{i1} :

$$H_1 \in P_{11}$$

$$H_2 \in P_{21}$$

$$H_3 \in P_{31}$$

Usando la idea de punto de equilibrio, vamos a agregar un vector para cada caso que desplazará el punto hacia el otro lado del plano de conmutación, definiremos el vector C_{ij} , donde $j \in \{1, 2\}$,

$$C_{i1} = -A_i K N_{i2},$$

$$C_{i2} = -A_i K N_{i1}.$$

Donde:

- N_{i1} es el vector normal al plano de conmutación en dirección a la partición S_{i1} ,
- N_{i2} es el vector normal en el plano de conmutación en dirección a la partición S_{i2} .
- K es un valor real positivo (en este caso usamos como valor de prueba $K=0.15$).
- $C_{i1} = -C_{i2}$.

Partiendo de las ecuaciones del sistema de Chua original, la matriz de dinámica en las regiones a los extremos de la partición que son S_{11} , S_{12} , S_{31} y S_{32} . En estas regiones se generan los enroscados.

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} -\alpha - \alpha b & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz que determina la dinámica en las regiones del centro de la partición, R_{21} y R_{22} , esta dada por:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\alpha - \alpha a & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde:

$$(\alpha, \beta, a, b) = (9, 0, 14, 285, -1, 143, -0, 714).$$

Particularmente con los valores obtenidos calculamos los vectores normales:
Vectores normales en los extremos del enroscado:

$$N_{11} = -N_{12} = N_{31} = -N_{32} = \begin{bmatrix} 0.1687 \\ -0.2312 \\ 0.0587 \end{bmatrix}.$$

Vectores normales en el centro del enroscado:

$$N_{21} = -N_{22} = \begin{bmatrix} 0.1453 \\ 0.1352 \\ 0.0612 \end{bmatrix}.$$

Así, ya con la expresión que define la dinámica del sistema en cada una de las particiones del sistema, ya con el vector C_{ij} :

$$\dot{x} = A_i x + B_i + C_{ij}.$$

Vamos a definir el punto de equilibrio virtual x_{ij}^v :

$$\begin{aligned} 0 &= A_i x_{i1}^v + B_i + C_{i1}, & \Rightarrow & \quad x_{i1}^v = -A_i^{-1}(B_i + C_{i1}) \\ 0 &= A_i x_{i2}^v + B_i + C_{i2}, & \Rightarrow & \quad x_{i2}^v = -A_i^{-1}(B_i + C_{i2}) \end{aligned}$$

■ Donde:

- $x_{i1}^v \in S_{i2}$.
- $x_{i2}^v \in S_{i1}$.

Cuando la trayectoria evoluciona en una de las regiones de la partición, el punto de equilibrio virtual se encuentra cruzando el plano de conmutación, así cuando la trayectoria cruza dicho plano en búsqueda del punto de equilibrio virtual, cambia la dinámica en esa región haciendo que ahora el punto de equilibrio virtual se encuentre del otro lado del plano de conmutación haciendo que la trayectoria siga evolucionando pero en las regiones en las que se encuentra la trayectoria no existe ningún punto de equilibrio

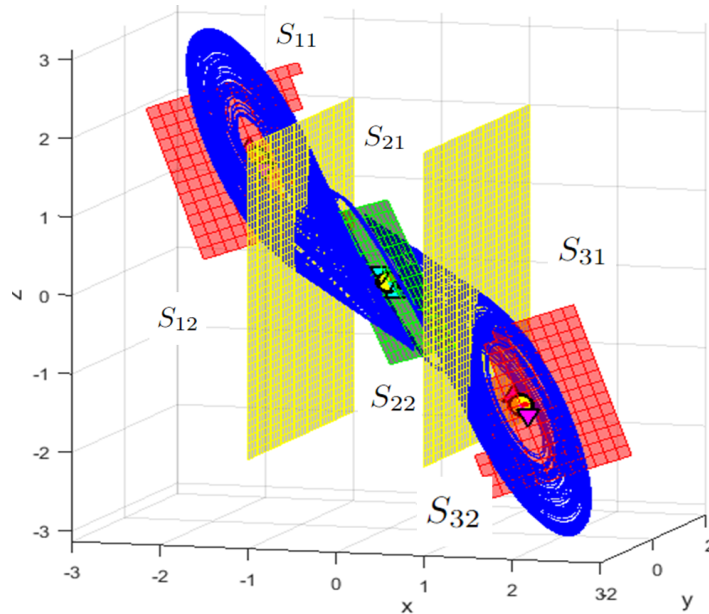


Figura 3.5: Nuevas particiones del sistema, como se aprecia el sistema se divide ahora en 6, los puntos de equilibrio virtuales funcionan de la forma que cuando la trayectoria se encuentra en S_{11} , el punto de equilibrio virtual se encuentra en S_{12} completamente del otro lado de la superficie de conmutación, donde se cumple que en la región S_{11} no existe absolutamente ningún punto de equilibrio, y así funciona con todas las regiones.

El sistema lineal por partes queda de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_1\mathbf{x} + B_1 + C_{11} & \text{si } \mathbf{x} \in S_{11}, \\ A_1\mathbf{x} + B_1 + C_{12} & \text{si } \mathbf{x} \in S_{12}, \\ A_2\mathbf{x} + B_2 + C_{21} & \text{si } \mathbf{x} \in S_{21}, \\ A_2\mathbf{x} + B_2 + C_{22} & \text{si } \mathbf{x} \in S_{22}, \\ A_3\mathbf{x} + B_3 + C_{31} & \text{si } \mathbf{x} \in S_{31}, \\ A_3\mathbf{x} + B_3 + C_{32} & \text{si } \mathbf{x} \in S_{32}. \end{cases}$$

Donde:

$$\begin{aligned} x \in S_{11} &\iff (x - P_1) \cdot N_{11}^T \geq 0. \\ x \in S_{12} &\iff (x - P_1) \cdot N_{12}^T > 0. \\ x \in S_{21} &\iff (x - P_2) \cdot N_{21}^T \geq 0. \\ x \in S_{22} &\iff (x - P_2) \cdot N_{22}^T > 0. \\ x \in S_{31} &\iff (x - P_3) \cdot N_{31}^T \geq 0. \\ x \in S_{32} &\iff (x - P_3) \cdot N_{32}^T > 0. \end{aligned}$$

Mediante lo anterior, las coordenadas de los puntos de equilibrio virtuales:

■ **Región** $x \geq 1$:

- Virtual (+): (1.4097, 0.0165, -1.3814)
- Virtual (-): (1.5903, -0.0165, -1.6186)

■ **Región** $|x| < 1$:

- Virtual (+): (0.0881, 0.0045, -0.1213)
- Virtual (-): (-0.0881, -0.0045, 0.1213)

■ **Región** $x \leq -1$:

- Virtual (+): (-1.5903, 0.0165, 1.6186)
- Virtual (-): (-1.4097, -0.0165, 1.3814)

En este capítulo se ha descrito la metodología y el procedimiento utilizado para diseñar un sistema de Chua sin puntos de equilibrio, conservando sus propiedades caóticas. El enfoque propuesto incluye la modificación del sistema de Chua tradicional mediante la introducción de múltiples superficies de conmutación y el desplazamiento de los puntos de equilibrio fuera de las trayectorias principales. Además, se ha implementado el sistema en MATLAB y se ha validado su comportamiento caótico mediante el análisis dinámico de este.

Capítulo 4

Comparación entre el sistema de Chua original y el sistema sin puntos de equilibrio

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación del sistema de Chua modificado. Se incluyen análisis de los puntos de equilibrio, los exponentes de Lyapunov y las gráficas de los atractores caóticos observados en las simulaciones.

4.1. Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema fueron desplazados fuera de donde la trayectoria se está desarrollando, lo que cumple con el objetivo de eliminar los estados estacionarios, que como se mencionó en el capítulo anterior son:

- **Región $x \geq 1$:**
 - Virtual (+): (1.4097, 0.0165, -1.3814)
 - Virtual (-): (1.5903, -0.0165, -1.6186)
- **Región $|x| < 1$:**
 - Virtual (+): (0.0881, 0.0045, -0.1213)
 - Virtual (-): (-0.0881, -0.0045, 0.1213)
- **Región $x \leq -1$:**
 - Virtual (+): (-1.5903, 0.0165, 1.6186)
 - Virtual (-): (-1.4097, -0.0165, 1.3814)

4.2. Exponentes de Lyapunov

Para validar el comportamiento caótico del sistema, se calcularon los exponentes de Lyapunov en el programa Matlab usando el Jacobiano:

Sistema de Chua Original

$$\lambda_1 = 0.3509, \quad \lambda_2 = -0.0401, \quad \lambda_3 = -2.5022.$$

Nuevo Sistema sin Puntos de Equilibrio

$$\lambda_1 = 0.3410, \quad \lambda_2 = -0.0184, \quad \lambda_3 = -2.5789.$$

El primer exponente positivo indica que el sistema es caótico, lo que se mantiene incluso después de la eliminación de los puntos de equilibrio.

4.3. Atractor Tipo Chua sin Puntos de Equilibrio

Se observaron atractores de tipo Chua con doble enroscado en las simulaciones. Las gráficas muestran que el sistema sin puntos de equilibrio conserva la estructura del sistema de Chua original, incluyendo el comportamiento caótico y los atractores de tipo scroll. En la Figura 1.1 se muestra el atractor de Chua sin puntos de equilibrio.

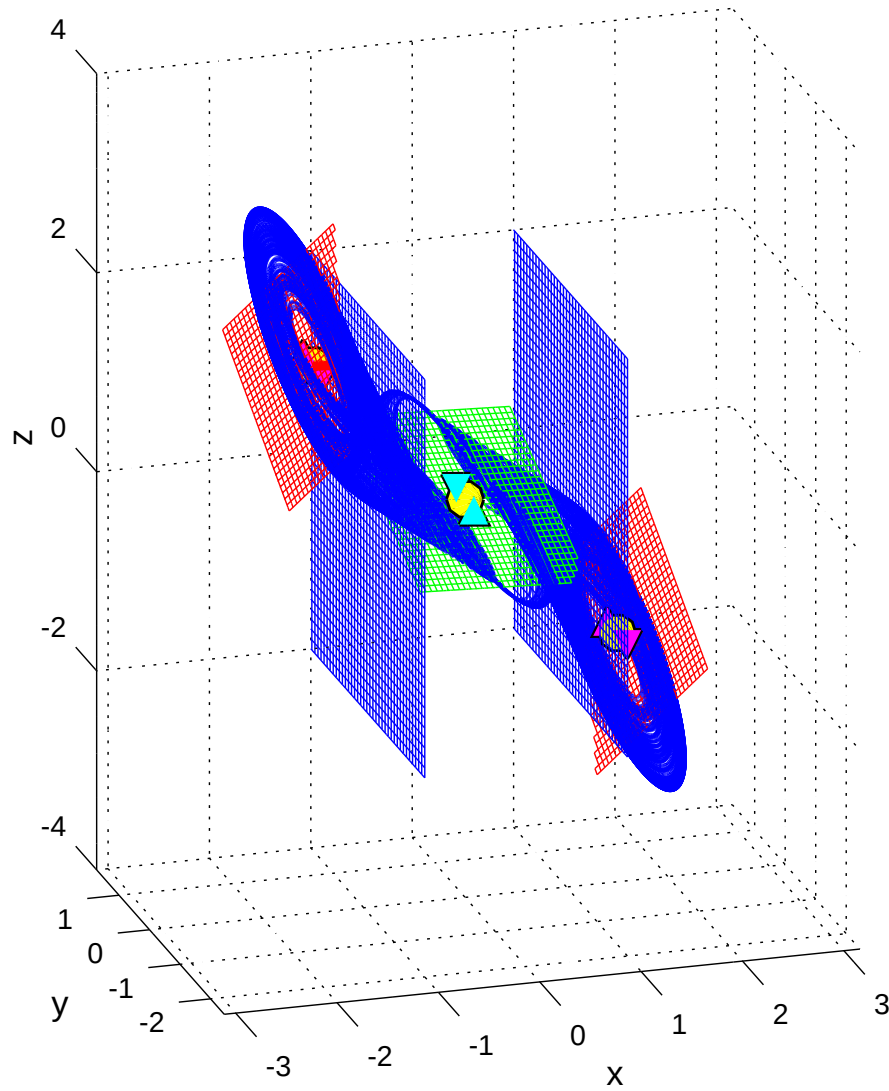


Figura 4.1: Atractor de Chua sin puntos de equilibrio en el que se presenta una gran semejanza al sistema de Chua original.

Se muestra una comparación entre el atractor de Chua original y el atractor modificado sin puntos de equilibrio. Se puede observar que el sistema modificado conserva las propiedades caóticas del sistema original, pero con una estructura ligeramente diferente debido a la eliminación de los puntos de equilibrio.

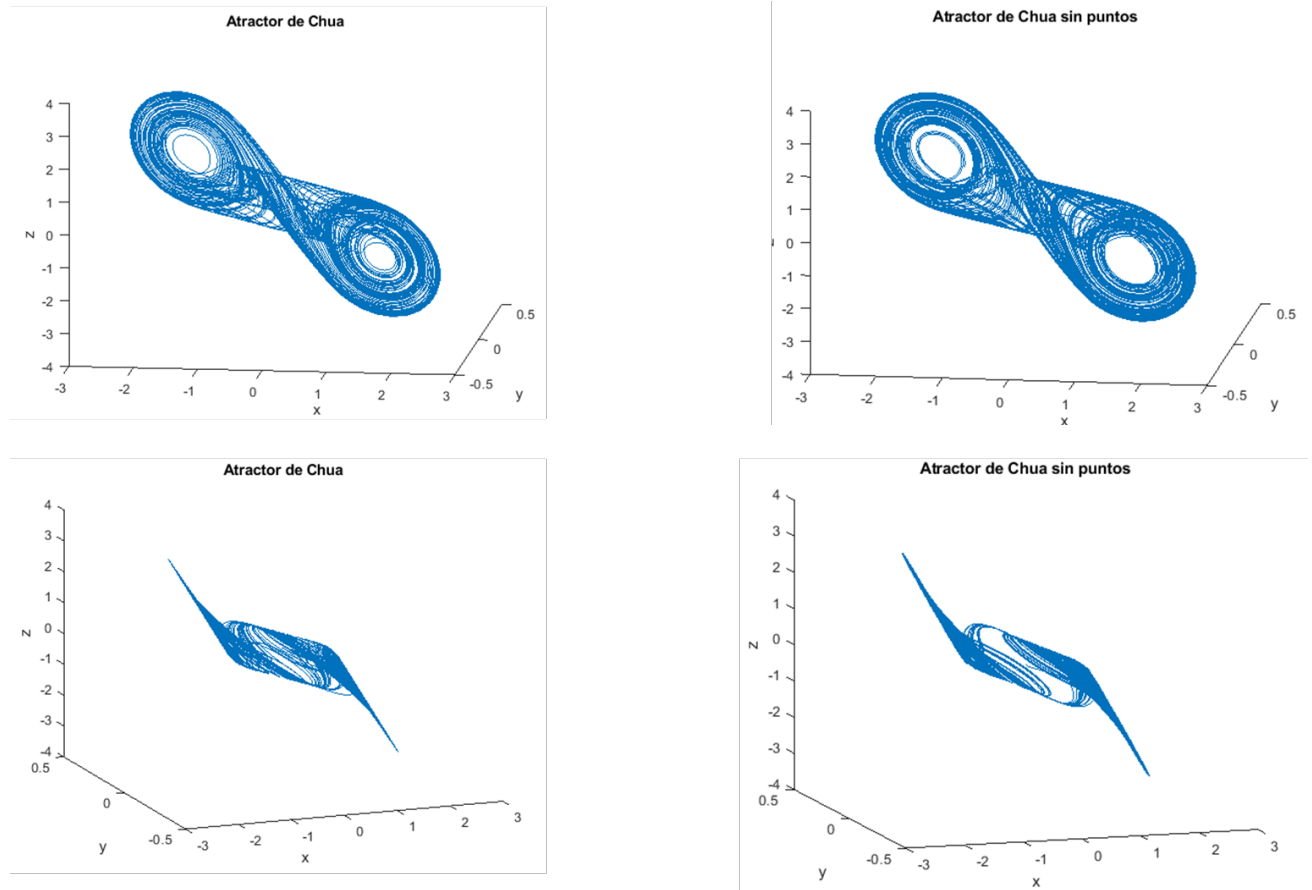


Figura 4.2: Comparación entre el atractor de Chua original y el atractor modificado sin puntos de equilibrio.

4.4. Comparación Planos de Poincaré

Colocamos los planos de Poincaré en donde se ubica el punto de equilibrio original en el sistema de Chua para poder comparar ambos sistemas:

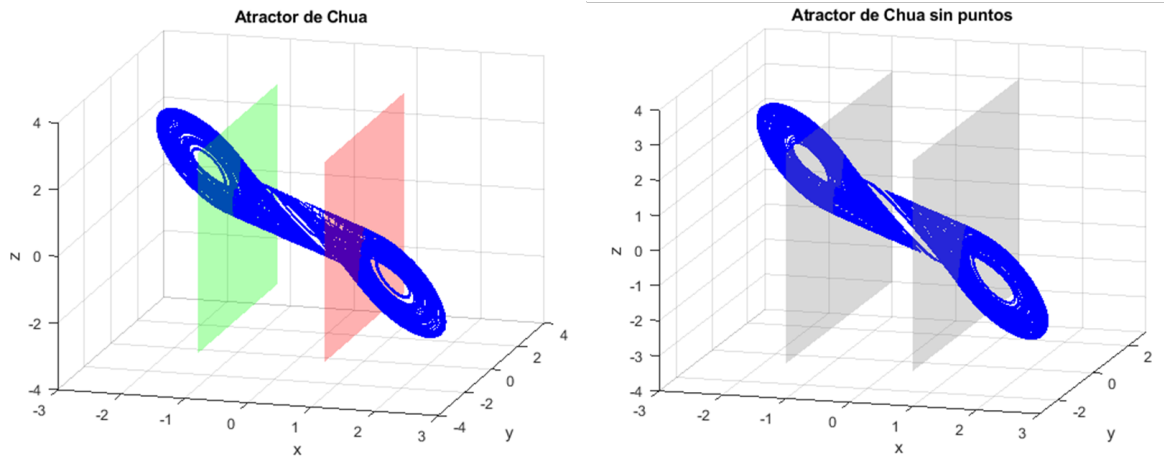


Figura 4.3: Ubicación de los planos de Poincaré en los sistemas para ver su comportamiento.

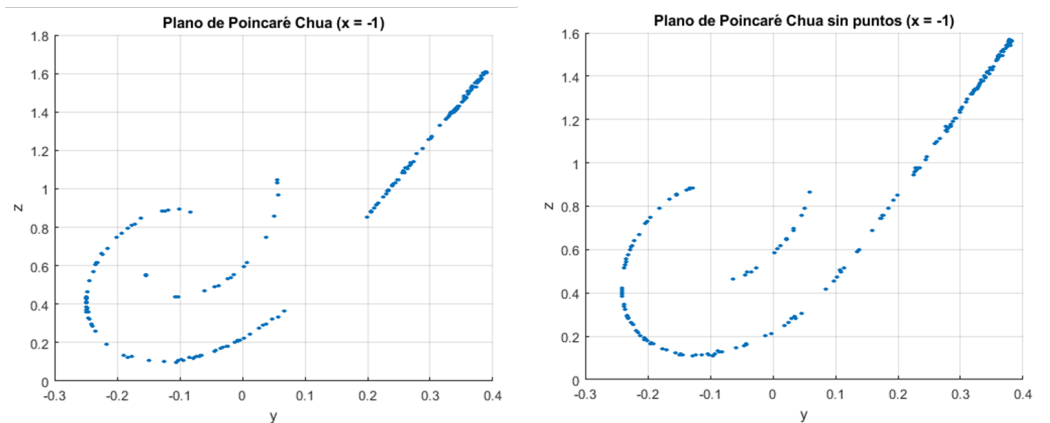


Figura 4.4: Sección de Poincaré en $(-1, 0, 0)^T$

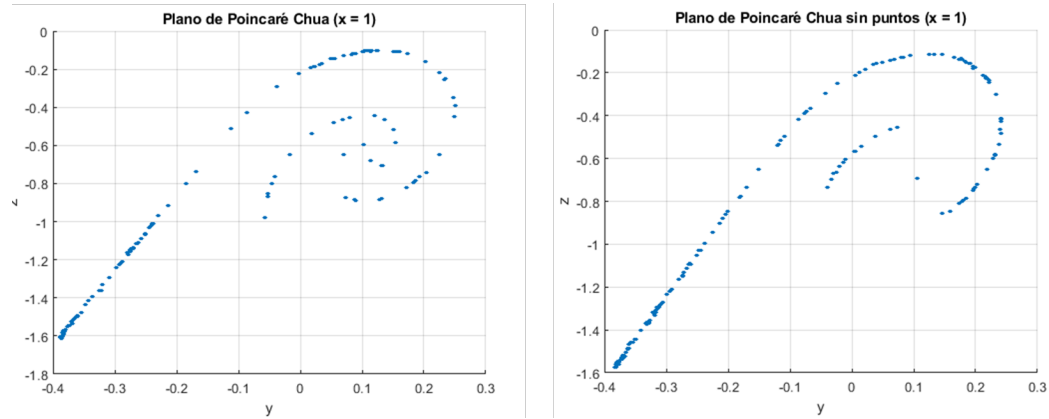


Figura 4.5: Sección de Poincaré en $(1, 0, 0)^T$.

Podemos observar como mantiene un patrón similar al que llamaremos Forma Bastón de Caramelo, las trayectorias del nuevo atractor aunque son un poco menos siguen cruzando el plano en posiciones muy similares al atractor de Chua, existiendo gran similitud en forma.

Bifurcación en el parámetro alfa

Analizamos la bifurcación variando el parametro alfa del sistema.

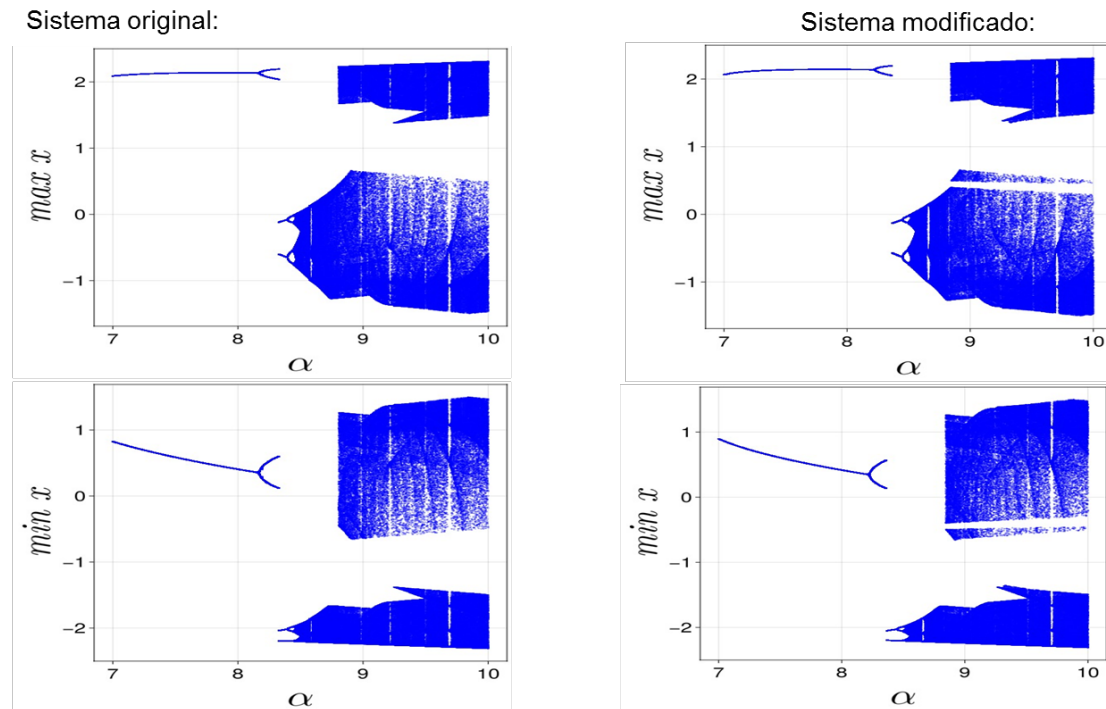


Figura 4.6: Gráficas de bifurcacion en el parametro alfa.

Podemos apreciar bastantes semejanzas, si existen diferencias las cuales son muy pocas como una franja que se aprecia en el sistema modificado pero no representa una diferencia significativa.

Analizamos las cuencas de atracción para identificar qué condiciones iniciales llevan al sistema a converger hacia el enroscado. Usamos simulaciones numéricas para mapear las regiones del espacio de fases que terminan en este atractor, revelando patrones interesantes en su estructura .

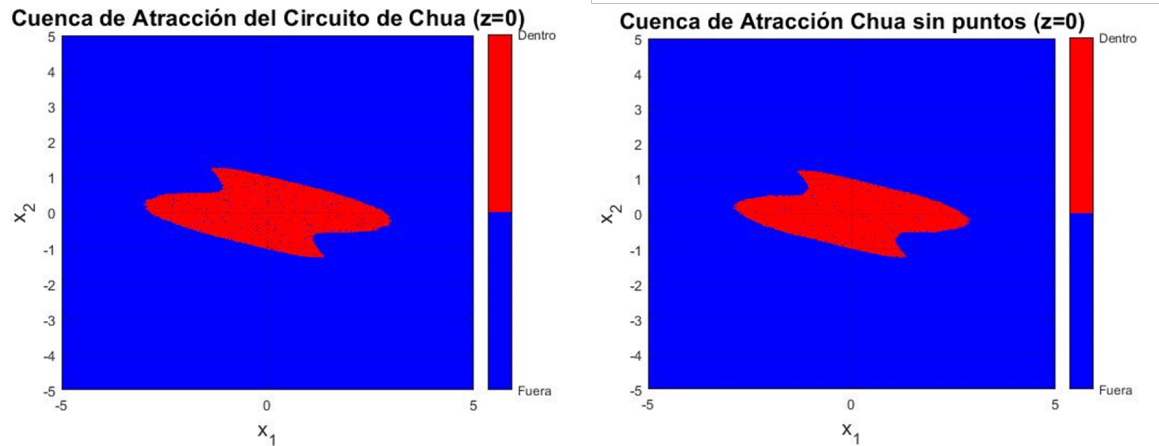


Figura 4.7: Comparación de secciones en las cuencas de atracción dadas por $z=0$, donde apreciamos una gran similitud, en la zona roja existen puntos dispersos azules, pero en la del nuevo sistema existen menos.

En este capítulo se han presentado los resultados obtenidos a partir de la implementación del sistema de Chua modificado. Se ha demostrado que el sistema sin puntos de equilibrio conserva sus propiedades caóticas, lo que se confirma mediante el cálculo de los exponentes de Lyapunov, la observación de los atractores, los planos de Poincaré, las gráficas de bifurcación y la cuenca de atracción.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

La estrategia de puntos de equilibrio virtuales demostró ser efectiva para eliminar los puntos de equilibrio del sistema original, logrando así el objetivo principal de esta modificación estructural. A pesar de esta eliminación, el sistema resultante mantiene un comportamiento dinámico muy similar al sistema original, conservando sus propiedades caóticas.

La validación del comportamiento caótico se realizó mediante el cálculo de exponentes de Lyapunov, donde el nuevo sistema presenta valores muy similares al sistema de Chua original. Adicionalmente, los diagramas de bifurcación obtenidos a partir de la variación del parámetro α confirman la presencia de dinámica caótica con características equivalentes al sistema base.

El análisis comparativo de atractores revela notables similitudes entre ambos sistemas. En particular, se observa que los atractores mantienen la estructura de doble enroscado. Esta similitud se corrobora en los planos de Poincaré, donde emerge la forma típica de bastón de caramelo en ambos casos.

En conclusión, se ha logrado diseñar un nuevo sistema sin puntos de equilibrio que conserva propiedades caóticas similares al sistema de Chua original, manteniendo las características dinámicas fundamentales que definen su comportamiento complejo.

Implicaciones y perspectivas futuras

El estudio de atractores ocultos y sistemas sin equilibrio ha redefinido nuestra comprensión de la génesis del caos. Estas investigaciones tienen implicaciones profundas en:

- **Seguridad informática:** Desarrollo de nuevos esquemas de cifrado basados en la impredecibilidad de sistemas sin equilibrios [15].
- **Modelado biológico:** Representación de sistemas vivos donde la noción de equilibrio es often artificial o inexistente [21].
- **Teoría de control:** Diseño de estrategias de estabilización que no dependen de linearizaciones alrededor de puntos fijos [16].

Los sistemas caóticos sin puntos de equilibrio han demostrado tener ventajas significativas en diversas aplicaciones prácticas, particularmente donde la robustez y la seguridad son prioritarias, dándole ventajas a las aplicaciones en donde los sistemas caóticos con puntos de equilibrio destacan.

Ventajas comparativas

Los sistemas sin puntos de equilibrio ofrecen ventajas prácticas significativas:

- **Mayor robustez:** Menor sensibilidad a variaciones paramétricas y perturbaciones externas.
- **Mejor rendimiento computacional:** Algoritmos de integración numérica más estables al evitar singularidades.
- **Mayor seguridad:** Comportamientos menos predecibles para aplicaciones criptográficas.
- **Modelado más realista:** Mejor representación de sistemas naturales que rara vez alcanzan equilibrios.

Bibliografía

- [1] J. C. Sprott. *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press, 2003.
- [2] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.
- [3] E. Campos Cantón. *Introducción a los sistemas dinámicos y al caos*. Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, 2019.
- [4] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, volume 2 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 2 edition, 2003.
- [5] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press, San Diego, CA, 2 edition, 2004.
- [6] Dawid Dudkowski, Sajad Jafari, Tomasz Kapitaniak, Nikolay V. Kuznetsov, Genady A. Leonov, and Awadhesh Prasad. Hidden attractors in dynamical systems. *Physics Reports*, 637:1–50, 2016. doi: 10.1016/j.physrep.2016.05.002.
- [7] Ljupco Kocarev and Goce Jakimoski. Chaos-based cryptography: A brief overview. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 1(3):6–21, 2001. doi: 10.1109/7384.963463.
- [8] Géza Kolumbán, Michael Peter Kennedy, and Leon O. Chua. Chaos-based digital communication systems. In *Chaos-Based Digital Communication Systems*, pages 1–35. Springer, 2000.
- [9] L. O. Chua. The genesis of Chua’s circuit. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, 46:250–257, 1992.
- [10] T. Matsumoto. A chaotic attractor from Chua’s circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(12):1055–1058, 1984.
- [11] M. Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer, 2008.
- [12] M. P. Kennedy. Three steps to chaos—Part II: A Chua’s circuit primer. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10):657–674, 1993.

- [13] Sajad Jafari, J. C. Sprott, and Fahimeh Nazarimehr. Recent new examples of hidden attractors. *European Physical Journal: Special Topics*, 222(3):927–935, 2013.
- [14] E. Campos-Cantón and R. Escalante. Hidden attractors in dynamical systems with no equilibrium points. *Nonlinear Dynamics*, 85(1):223–234, 2016.
- [15] Viet-Thanh Pham, Sajad Jafari, and Christos Volos. A novel chaotic system without equilibrium: dynamics, synchronization, and circuit realization. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 36(6):2290–2305, 2017.
- [16] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [17] G. A. Leonov and N. V. Kuznetsov. Hidden attractors in dynamical systems: from hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(3):713–746, 2011.
- [18] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, and T. N. Mokaev. Hidden attractors in dynamical systems: models and open problems. *IFAC-PapersOnLine*, 49(18):1–6, 2016.
- [19] Guanrong Chen, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, and T. N. Mokaev. Hidden attractors in dynamical systems: a review. *Physics Reports*, 517(3-4):103–141, 2011.
- [20] Bocheng Bao, Jianping Xu, and Zhong Liu. Initial condition-dependent dynamics and transient period in memristor-based chaotic circuit. *Chinese Physics B*, 19(3):030510, 2010.
- [21] Xiong Wang and Guanrong Chen. A chaotic system with only one stable equilibrium. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(3):1264–1272, 2012.
- [22] E. Campos-Cantón et al. Hidden attractors in dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22):1865–1870, 2012.
- [23] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [24] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317, 1985.
- [25] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8):821–824, 1990.
- [26] K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Physical Review Letters*, 71(1):65–68, 1993.

-
- [27] M. J. Ogorzalek. Taming chaos: Part I—synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10):693–699, 1993.

Apéndice A

Código de MATLAB

A.1. Implementación en MATLAB

El sistema modificado se implementa en MATLAB para realizar simulaciones y observar la formación de atractores de tipo Chua sin puntos de equilibrio. A continuación, se describe el código utilizado para la implementación.

A.1.1. Código MATLAB

El siguiente código define el sistema de Chua modificado en MATLAB:

```
function dx = chua_sinpuntos(~, x)

alpha = 9; beta = 14.28; a = -1.142; b = -0.714;

% Matriz A para los extremos del enroscado
Ae = [-alpha - alpha*b alpha 0;
      1 -1 1;
      0 -beta 0];

% Matriz A para el centro del enroscado
Ac = [-alpha - alpha*a alpha 0;
      1 -1 1;
      0 -beta 0];

Ne = [0.1687; -0.2312; 0.0587]; % vector normal de los extremos
Nc = [0.1453; 0.1352; 0.0612]; % vector normal del centro
Pe1 = [1.5; 0; -1.5];
Pe2 = [-1.5; 0; 1.5];
Ke = 0.15; % constante para alejar el punto de equilibrio
Kc = 0.15; % constante para alejar el punto de equilibrio
Be = Ae * Ne; % vector que mueve el equilibrio en los extremos
Bc = Ac * Nc; % vector que mueve el equilibrio en el centro
```

```
B = -alpha * [a - b; 0; 0]; % vector B del sistema original
Ben = Be / norm(Bc); % Be normalizado
Ben = Be / norm(Bc); % Bc normalizado

if x(1) >= 1
    if dot(Ne, x - Pe1) >= 0
        dx = Ae * x + B + Ke * Ben;
    else
        dx = Ae * x + B - Ke * Ben;
    end
elseif abs(x(1)) < 1
    if dot(Nc, x) >= 0
        dx = Ac * x + Kc * Ben;
    else
        dx = Ac * x - Kc * Ben;
    end
elseif x(1) <= -1
    if dot(Ne, x - Pe2) >= 0
        dx = Ae * x - B + Ke * Ben;
    else
        dx = Ae * x - B - Ke * Ben;
    end
end
```