



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Análisis de robustez y experimentación de un
controlador no lineal homogéneo**

Tesis que presenta

Javier Alejandro Qui Martin

Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2025



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Análisis de robustez y experimentación de un controlador no lineal homogéneo** presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Javier Alejandro Qui Martin** y aprobada el **22 de Mayo de 2025** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez
(Director)

Dr. Adrián René Ramírez López
(Sinodal de la tesis)

Dr. Arturo Zavala Rio
(Sinodal de la tesis)

Dr. David Antonio Lizarraga Navarro
(Sinodal de la tesis)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez.

Durante la realización de trabajo el autor recibió una beca académica por parte de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), No.1205859 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

(Página en Blanco que se va a utilizar para colocar la copia del acta de examen.)

Hoja sin título para dedicar la tesis a las personas e instituciones deseadas.(opcional)

Agradecimientos

En este apartado quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia por el apoyo incondicional que me han brindado.

De la misma manera, al Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez por ser la guía para realizar este trabajo de investigación, por la energía y entusiasmo con la que comparte sus conocimientos, por el tiempo y apoyo que me ha brindado.

Agradezco enormemente al Dr. Crescencio Hernández Rosales por ayudarme en el diseño y desarrollo de la placa electrónica, y por siempre tener la disposición de apoyar.

Agradezco a los profesores que me impartieron las asignaturas durante mi estadía en el centro de investigación, ya que gracias a ellos pude entender las bases de mi tema de investigación.

También quiero agradecer a mis compañeros estudiantes de la división de Control y Sistemas Dinámicos del posgrado y doctorado, por los momentos amenos que pasamos durante esta etapa y les deseo mucho éxito en todos sus proyectos que se propongan.

Por último, agradezco el apoyo brindado por el IPICYT y CONAHCYT para el desarrollo de la presente tesis.

Resumen

Este trabajo se divide en dos partes, en la primera se presenta el análisis de estabilidad para una clase de sistemas no lineales en conexión con un controlador homogéneo no lineal por retroalimentación de salidas basado en un observador no lineal de tipo Luenberger que cuenta con la propiedad de robustez ante errores de aproximación en el modelo que denominaremos incertidumbre. El análisis se basa en probar estabilidad en el sentido de Lyapunov para el caso particular sin incertidumbre, luego se muestra estabilidad del caso del sistema controlado con incertidumbre. Gracias a las propiedades de homogeneidad del campo, se utiliza la idea de la existencia de funciones estrictas de Lyapunov homogéneas para la prueba de estabilidad del sistema con incertidumbre. La prueba de estabilidad del sistema con incertidumbre muestra la existencia de ganancias tales que sin importar el tamaño de la incertidumbre el sistema controlado es capaz de llevar los estados controlados a la referencia.

En la segunda parte se presenta un ejemplo de implementación, en particular, se describe la aplicación de algunos métodos numéricos para la discretización del algoritmo de control, se mencionan los periféricos del microcontrolador digital que se utilizó para la implementación del control por retroalimentación de salidas y se describe la planta sobre la cual se hicieron los experimentos para probar los resultados teóricos obtenidos.

Abstract

This work is divided into two parts. In the first part, we present the stability analysis for a class of nonlinear systems in connection with a nonlinear homogeneous controller based on output feedback using a nonlinear Luenberger-type observer, which has robustness properties against approximation errors in the model, here referred to as uncertainty. The analysis is based on proving stability in the sense of Lyapunov for the particular case without uncertainty; subsequently, the stability of the controlled system with uncertainty is shown. Thanks to the homogeneity properties of the field, the existence of strict homogeneous Lyapunov functions is utilized for the stability proof of the system with uncertainty. This proof demonstrates the existence of gains such that, regardless of the uncertainty magnitude, the controlled system can drive the controlled states to the reference.

In the second part an implementation example is described. In particular, some numerical methods for discretizing the control algorithm are presented, the peripherals of the digital microcontroller used for implementing the output feedback control are mentioned, and the plant on which the experiments were conducted to validate the theoretical results obtained is then described.

Notación

- $\mathbb{R}$ Conjunto de los números reales.
- $\mathbb{R}^n$ Espacio Cartesiano n-dimensional.
- $\mathbb{N}$ Conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
- C^p Conjunto de funciones $p \in \mathbb{N}$ veces diferenciables con continuidad.
- $|\cdot|$ denota el valor absoluto en $\mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_{r,p}$ ó $\|\cdot\|_r$ denotan alguna norma homogénea en $\mathbb{R}^n$.
- $[\cdot]^p = \text{sign}(\cdot)|\cdot|^p$, donde sign es la función signo. Por ejemplo $[x]^2 = x^2 \text{sign}(x)$
- $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ denota una bola abierta de radio $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Homogeneidad ponderada	4
2.2. Estabilidad en sistemas homogéneos	5
2.3. Ejemplos de sistemas homogéneos	7
3. Descripción del sistema y problemática	13
3.1. Descripción del sistema y del esquema de control	13
3.2. Planteamiento del problema	15
4. Análisis de estabilidad y diseño de parámetros del controlador	17
4.1. Análisis del sistema sin incertidumbre	18
4.2. Análisis del sistema con incertidumbre	25
4.3. Diseño de ganancias del controlador	30
5. Implementación del controlador	36
5.1. Métodos de discretización de sistemas dinámicos	36
5.2. Descripción de la planta electrónica	40
5.3. Resultados experimentales	44
6. Conclusiones y trabajo futuro	54
7. Apéndice	56

Capítulo 1

Introducción

Un enfoque usado frecuentemente para el diseño de controladores para sistemas no lineales es linealizar el sistema para solucionar el problema de las no linealidades y, de esta manera, se pueda abordar el diseño utilizando técnicas de control lineal [12]. Estas aproximaciones pierden cierta fiabilidad debido a que muchas veces no se toman en cuenta o no se conocen todos los términos o parámetros del sistema no lineal estudiado, además, la linealización del sistema no siempre se puede utilizar. Por esto, es importante estudiar técnicas de análisis y diseño no lineal. Sin embargo, el problema de la falta de conocimiento exacto del modelo del sistema persiste en el caso no lineal, esto debido a que generalmente los modelos son aproximaciones de fenómenos reales, por lo que existe un cierto desconocimiento del campo vectorial del sistema. Así, resulta relevante el desarrollo de métodos para analizar y controlar clases de sistemas no lineales en los cuales se desconoce el modelo exacto del sistema.

En la disciplina de la teoría de control de sistemas dinámicos existen varias técnicas que se enfocan en propiedades de robustez (ante cierto desconocimiento exacto del modelo del sistema) tales como el rediseño de Lyapunov, control por modos deslizantes, control basado en observación de perturbaciones, y H-infinito (para estas técnicas, vea, por ejemplo, [23, 26, 12, 9]). Estas técnicas presentan ciertas ventajas y desventajas, por ejemplo, el control por modos deslizantes es muy efectivo en presencia de perturbaciones no desvanecientes [23], pero puede presentar ciertas dificultades en la implementación. En el caso de la técnica H-infinito, una desventaja son las dificultades asociadas con el alto orden de los controladores [26], y en el caso no lineal se requiere un nivel de complejidad muy alto en el diseño de controladores no lineales debido a la complejidad matemática y la necesidad de una elección precisa de funciones de ponderación. En otras técnicas, es necesario contar con una función de Lyapunov, la cual muchas veces no es trivial hallar.

Por otra parte, la homogeneidad está ampliamente estudiada para el diseño de control en los sistemas dinámicos no lineales debido a sus interesantes características tanto para el análisis como para el diseño. Se ha demostrado, por ejemplo, que podemos tener con-

vergencia al origen en tiempo finito si el grado de homogeneidad del campo del sistema es negativo [3]. Una característica importante de los sistemas de control homogéneos es que estos cuentan con propiedades de estabilidad y robustez muy buenas como la propiedad de Estabilidad de Entrada al Estado [5] y de estabilidad en el sentido de Lyapunov aún cuando el modelo del sistema controlado no es exacto. Nos referiremos a este desconocimiento exacto del modelo del sistema como *incertidumbre* [20].

En el tema a desarrollar en esta tesis, se consideran sistemas no lineales de segundo orden con incertidumbre en el modelo. Se utiliza un enfoque de homogeneidad para el diseño del controlador con el fin de verificar las buenas propiedades de robustez que se pueden obtener. Debido a que se supone que no se dispone de todos los estados del sistema para el control, se necesita estimar los estados que no se pueden medir directamente. Así, se propone la técnica de control por retroalimentación de salidas mediante un observador no lineal de tipo Luenberger. En particular, se verifica teóricamente que el esquema de control propuesto en lazo cerrado con el sistema produce un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen a pesar de la incertidumbre. Además de tener la propiedad de robustez ante incertidumbre, se prueba de manera teórica que la familia de controladores homogéneos no lineales usados aseguran convergencia en tiempo finito de las trayectorias para cualquier grado de homogeneidad negativo. También se presenta un procedimiento para la configuración de las ganancias tal que ayuda a obtener algún tipo deseado de respuesta transitoria del sistema no lineal.

Otro aspecto importante en la ingeniería de control son las pruebas experimentales. Para esto, los circuitos electrónicos son una opción viable para emular sistemas dinámicos debido a su bajo costo y a su versatilidad para representar diferentes tipos de sistemas, ya sean eléctricos, mecánicos o hidráulicos, entre otros [8], así como la posibilidad de incorporar no linealidades a través de electrónica digital. En este proyecto de tesis se utiliza un emulador electrónico para la verificación experimental de los resultados teóricos. Por otro lado, actualmente en muchos sistemas de control se utilizan dispositivos digitales (por ejemplo, microcontroladores) para programar los algoritmos de control, por lo que es necesario utilizar métodos de discretización para la implementación de los controladores diseñados analógicamente. En esta investigación, para las pruebas experimentales, se utilizan diferentes métodos numéricos explícitos para la discretización del algoritmo de control con el fin de poder llevar a cabo su implementación en el emulador electrónico y así observar de manera empírica la forma en que cada método de implementación de un mismo controlador afecta el desempeño del sistema controlado.

Organización de la tesis

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presentan las definiciones y resultados preliminares necesarios que servirán como base para el desarrollo de los capítulos siguientes. En el Capítulo 3 se describe la clase de sistemas no lineales

que se abordará en esta tesis, se expone el esquema de control por retroalimentación de salida y se plantea el problema de control de estos sistemas mediante dicho esquema. En el Capítulo 4 se presentan las primeras contribuciones de este trabajo, ofreciendo una solución teórica a la problemática planteada. Continuando, en el Capítulo 5, se muestran los resultados experimentales obtenidos bajo diferentes discretizaciones aplicadas al controlador. Finalmente, en el Capítulo 6 se discuten las conclusiones del trabajo y se sugieren posibles líneas de investigación futuras.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo se centra en la exposición de la teoría y los resultados esenciales para llevar a cabo el desarrollo de este proyecto. En la primera sección, se aborda la conceptualización de la homogeneidad ponderada en funciones y campos vectoriales, así como en sistemas dinámicos denominados como δ^r -homogéneos. En la segunda sección se recuerda el concepto de función de Lyapunov junto con los resultados asociados a la estabilidad de sistemas homogéneos, así como con el tipo de convergencia que puede ser alcanzado en función del grado de homogeneidad presente en el campo vectorial de un sistema dinámico δ^r -homogéneo. Finalmente, se presentan ejemplos relacionados con la teoría revisada.

2.1. Homogeneidad ponderada

La homogeneidad es una propiedad de escalamiento de funciones y campos vectoriales. Se puede describir intuitivamente como la equivalencia entre la multiplicación de una constante (que se puede denominar como factor de dilatación) por el argumento de una función y la multiplicación del factor de dilatación por la imagen de la función. Se define formalmente homogeneidad ponderada a continuación.

Definición 1 ([3]). *Dado un conjunto de coordenadas $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sea $r = [r_1, \dots, r_n]$ una n -tupla de números reales positivos.*

- *La familia de dilataciones de un solo parámetro $(\delta_\epsilon^r)_{\epsilon > 0}$ (asociada a r) esta definida por*

$$\delta_\epsilon^r(x) := (\epsilon^{r_1}x_1, \dots, \epsilon^{r_n}x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0,$$

los números r_i son los pesos de las coordenadas.

- *Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es δ^r -homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si*

$$V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^m V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0.$$

- Un campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se dice que es δ^r -homogéneo de grado μ si la componente f_i es δ^r -homogénea de grado $\mu + r_i$ para cada i , esto es

$$f_i(\epsilon^{r_1}x_1, \dots, \epsilon^{r_n}x_n) = \epsilon^{\mu+r_i}f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Considerando un sistema $\dot{x} = f(x)$, si el campo vectorial f es δ^r -homogéneo de grado μ , entonces se dice que el sistema dinámico es δ^r -homogéneo de grado μ .

2.2. Estabilidad en sistemas homogéneos

Los métodos de Lyapunov son herramientas que sirven para analizar la estabilidad de los sistemas no lineales. Utilizando esta teoría, podemos mostrar que el origen de un sistema dinámico no lineal es asintóticamente estable. Además, se puede verificar el acotamiento de las soluciones, incluso sin que exista un punto de equilibrio.

En sistemas homogéneos existe teoría que relaciona la estabilidad de Lyapunov con funciones homogéneas de manera que si el origen del sistema dinámico homogéneo es asintóticamente estable esto implica que existe una función estricta de Lyapunov homogénea para el sistema estudiado. Por otra parte, en sistemas homogéneos, se pueden tener tres diferentes tipos de convergencia al origen y esto solo depende del grado de homogeneidad μ del campo vectorial del sistema [3].

A continuación recordamos algunos conceptos sobre funciones de Lyapunov¹ considerando, para esto, el sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo continuo definido sobre el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen y tal que $f(0) = 0$. Iniciamos recordando el concepto de función de Lyapunov débil.

Definición 2 ([3]). *Una función de Lyapunov débil es una función $V : B_r \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que está definida sobre la bola $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ para algún $r > 0$, y que cumple las siguientes propiedades:*

- I. $V(0) = 0$.
- II. $V(x) > 0$ para $x \neq 0$.
- III. $V(x)$ es de clase C^1 sobre B_r .
- IV. $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) \leq 0$ para cada $x \in B_r$.

¹Para revisar el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov y los teoremas relacionados puede consultarse [3].

Si existe una función de Lyapunov débil para (2.1) se puede concluir que el origen del sistema es estable. Sin embargo, esto no es suficiente para afirmar que el origen del sistema posee estabilidad asintótica. Para poder afirmarlo es necesario exigir una propiedad adicional, que se describe a continuación.

Definición 3 ([3]). *Una función de Lyapunov estricta es una función $V : B_r \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las propiedades I, II y III de la Definición 2 y la propiedad:*

$$\text{I. } \dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) < 0 \text{ para cada } x \in B_r \setminus \{0\}.$$

Una función definida para toda $x \in \mathbb{R}^n$, que sea radialmente desacotada y cumpla con las propiedades de la Definición 3 con B_r reemplazado por $\mathbb{R}^n$, se conoce como una función de Lyapunov estricta global. Si existe una función estricta de Lyapunov para (2.1), entonces el origen del sistema es asintóticamente estable.

Debido a que en general no es trivial encontrar una función de Lyapunov estricta para cualquier sistema, pero suele ser menos complicado hallar funciones de Lyapunov débiles, existen resultados que permiten afirmar estabilidad asintótica aún cuando solo se tiene una función de Lyapunov débil, esto se conoce como el principio de invariancia de LaSalle. A continuación se proporciona una versión para campos continuos de dicho principio.

Teorema 1 (Corolario 7.2.1 en [16]). *Suponga que existe una función de Lyapunov débil $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para el sistema (2.1), tal que es radialmente no acotada y $\frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) \leq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\{x = 0\}$ es el único conjunto invariante con respecto a (2.1) en el conjunto*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\},$$

entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio de (2.1) globalmente asintóticamente estable.

El resultado anterior es una herramienta muy útil para poder concluir estabilidad asintótica en el origen de un sistema dinámico no lineal cuando tenemos una función de Lyapunov débil, obsérvese que es una versión del principio de invariancia de LaSalle para campos continuos.

El siguiente resultado confirma la existencia de funciones homogéneas de Lyapunov para cualquier sistema homogéneo continuo cuyo origen es asintóticamente estable; esto facilita mucho el análisis de estabilidad.

Teorema 2 ([3]). *Sea (2.1), donde f un campo vectorial continuo sobre $\mathbb{R}^n$ tal que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si f es δ^r -homogéneo de grado μ para algún $r \in \mathbb{R}_{>0}^n$, entonces, para cualquier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y cualquier $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$, existe una función de Lyapunov V para $\dot{x} = f(x)$, la cual es δ^r -homogénea de grado m y de clase C^p . Como consecuencia directa, la derivada con respecto del tiempo $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x)$ es δ^r -homogénea de grado $m + \mu$.*

El siguiente corolario demuestra que el tipo de convergencia de las trayectorias para un sistema asintóticamente estable y homogéneo está completamente caracterizada por el grado del campo.

Corolario 1 (Corolario 5.4 en [3]). *Sea f como en el Teorema 2, y sea $\|\cdot\|_{r,p}$ cualquier norma δ^r -homogénea.*

- Si $\mu > 0$ (μ es el grado de homogeneidad de f), entonces existen constantes $M_1, M_2 > 0$ tales que, para cualquier trayectoria $x(\cdot)$ de $\dot{x} = f(x)$, para toda $t \geq 0$,

$$M_1(1 + \|x(0)\|_{r,p}^\mu t)^{-\frac{1}{\mu}} \|x(0)\|_{r,p} \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2(1 + \|x(0)\|_{r,p}^\mu t)^{-\frac{1}{\mu}} \|x(0)\|_{r,p}.$$

- Si $\mu = 0$, entonces existen constantes M_1, M_2 y $D > 0$ tales que, para toda $t \geq 0$,

$$M_1 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p} \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p} \quad \forall t \geq 0.$$

- Si $\mu < 0$ entonces existe una constante $M > 0$ tal que $\|x(t)\|_{r,p} \leq F(x(0), t)$ donde

$$F(x(0), t) = \begin{cases} \left(\|x(0)\|_{r,p}^{\frac{1}{-\mu}} - Mt \right)^{\frac{1}{-\mu}}, & t < \frac{1}{M} \|x(0)\|_{r,p}^{\frac{1}{-\mu}} \\ 0, & t \geq \frac{1}{M} \|x(0)\|_{r,p}^{\frac{1}{-\mu}} \end{cases}.$$

Básicamente, el tipo de convergencia al origen de las trayectorias de un sistema δ^r -homogéneo se puede determinar basándose en el grado de homogeneidad μ del campo vectorial siempre que el origen sea asintóticamente estable. Note en el corolario anterior que en el caso $\mu < 0$ la convergencia al origen es en tiempo finito.

2.3. Ejemplos de sistemas homogéneos

En esta sección, se presenta de manera ilustrativa la teoría mostrada anteriormente mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 1. En este ejemplo de un sistema δ^r -homogéneo, se muestra que se pueden tener distintos tipos de convergencia dependiendo del valor con el que se selecciona el parámetro p . Además de que, en el caso $p \in (0, 1)$, se puede calcular el tiempo que tardan las trayectorias en llegar exactamente al origen.

El sistema a estudiar es el siguiente

$$\dot{x} = -k[x]^p, \quad p, k > 0. \quad (2.2)$$

Este sistema es δ^r -homogéneo de grado $\mu = (p - 1)r$. Se analiza el tipo de solución que tiene (2.2) y se observa que el tipo de solución se ve determinado por p . Así, se obtienen 3 casos:

1. Caso $p \in (0, 1)$. Para toda condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ la solución del sistema esta dada por la siguiente expresión

$$x(t; x_0) = \text{sign}(x_0)(|x_0|^{1-p} - k(1-p)t)^{\frac{1}{1-p}},$$

de esta expresión (sabiendo que el punto de equilibrio es $x = 0$) se puede calcular el tiempo de convergencia al equilibrio con la expresión $x(T(x_0); x_0) = 0$, así

$$T(x_0) = \frac{|x_0|^{1-p}}{-k_1(1-p)}.$$

2. Caso $p = 1$. En este caso el sistema se vuelve lineal, lo que implica que la solución esta dada por

$$x(t; x_0) = x_0 e^{-kt},$$

por lo tanto, el origen del sistema es un punto de equilibrio exponencialmente estable.

3. Caso $p > 1$. Para este caso, la solución del sistema esta dada por

$$x(t; x_0) = \text{sign}(x_0)(|x_0|^{1-p} - k(1-p)t)^{\frac{1}{1-p}},$$

obsérvese que para cualquier condición inicial $x_0 \neq 0$, $(x_0, t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

De los casos analizados de (2.2) se puede concluir lo siguiente : cuando $p \in (0, 1)$ se puede calcular el tiempo que tardarán en converger las trayectorias al origen, cuando $p = 1$ coincide con el caso lineal, esto implica convergencia exponencial de las trayectorias y, por último, cuando $p > 1$ las trayectorias convergen de manera *racional*, lo que va de acuerdo con el resultado que establece del Corolario 1.

Ejemplo 2. En este ejemplo se muestra la existencia de una función de Lyapunov homogénea para el sistema escalar δ^r -homogéneo dado por

$$\dot{x}_1 = -[x]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.3)$$

donde el único punto de equilibrio es $x = 0$. Se propone la función candidata de Lyapunov $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Esta función es δ^r -homogénea de grado $m = 2r$. Derivando la función candidata a lo largo de las trayectorias de (2.3) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -x[x]^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{V}(x) &= -|x|^{\frac{1}{3}}\text{sign}(x) = -|x|^{\frac{4}{3}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

nótese que V es una función de Lyapunov estricta, por lo tanto se concluye estabilidad asintótica en el origen.

Ejemplo 3. En este ejercicio se verifican las condiciones sobre unos parámetros para que un sistema de segundo orden sea δ^r -homogéneo; además, se muestran por simulación los diferentes tipos de convergencia al origen que (al garantizar estabilidad asintótica) se pueden tener dependiendo del grado de homogeneidad μ . Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 \lceil x_1 \rceil^p - k_2 \lceil x_2 \rceil^q,\end{aligned}\tag{2.5}$$

con $k_1, k_2 > 0$. La intención de este ejercicio es encontrar las condiciones de los exponentes p y q , tales que el sistema sea δ^r -homogéneo. De acuerdo con la Definición 1, se aplica la dilatación al argumento del campo vectorial de (2.5), la representación que se obtiene es la siguiente

$$f(\delta_\epsilon^r(x)) = \begin{bmatrix} \epsilon^{r_2} x_2 \\ -k_1 \epsilon^{r_1 p} \lceil x_1 \rceil^p - k_2 \epsilon^{r_2 q} \lceil x_2 \rceil^q \end{bmatrix}.$$

Siguiendo la Definición 1, se debe cumplir que $f(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^\mu \delta_\epsilon^r(f(x))$. De la representación anterior, se encuentra que el vector de pesos $r = [r_1, r_2]$ debe cumplir las siguientes expresiones

$$r_2 = \mu + r_1, \quad r_2 q = r_1 p, \quad r_2 q = \mu + r_2.\tag{2.6}$$

Así, de (2.6) se obtienen las condiciones que aseguran que el campo vectorial es δ^r -homogéneo de algún grado μ en función del exponente p : el vector de pesos se expresa como $r = [2, p+1]^\top$; con el vector de pesos encontrado, el exponente q se calcula con la expresión $q = \frac{2p}{p+1}$; por último, el grado de homogeneidad μ se puede elegir como $\mu = p - 1$. Esto permite que p se pueda elegir de manera libre, por lo que, eligiendo p , se pueden tener diferentes grados de homogeneidad. Esto ocasiona (dado que el origen de (2.5) es asintóticamente estable en el caso homogéneo [4]) diferentes tipos de convergencia al origen. Esto se detalla a continuación: (**Nota.** La prueba de estabilidad de (2.5) se encuentra en el Capítulo 3.)

1. Cuando $p = 1$, el sistema (2.5) se vuelve el caso lineal, lo que implica que sea de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Nótese que el sistema (2.7) es δ^r -homogéneo de grado $\mu = 0$ con un vector de pesos $r = [2, 2]^\top$. Por lo tanto, el tipo de convergencia al origen de los estados es de forma exponencial como se muestra en la Figura 2.1.

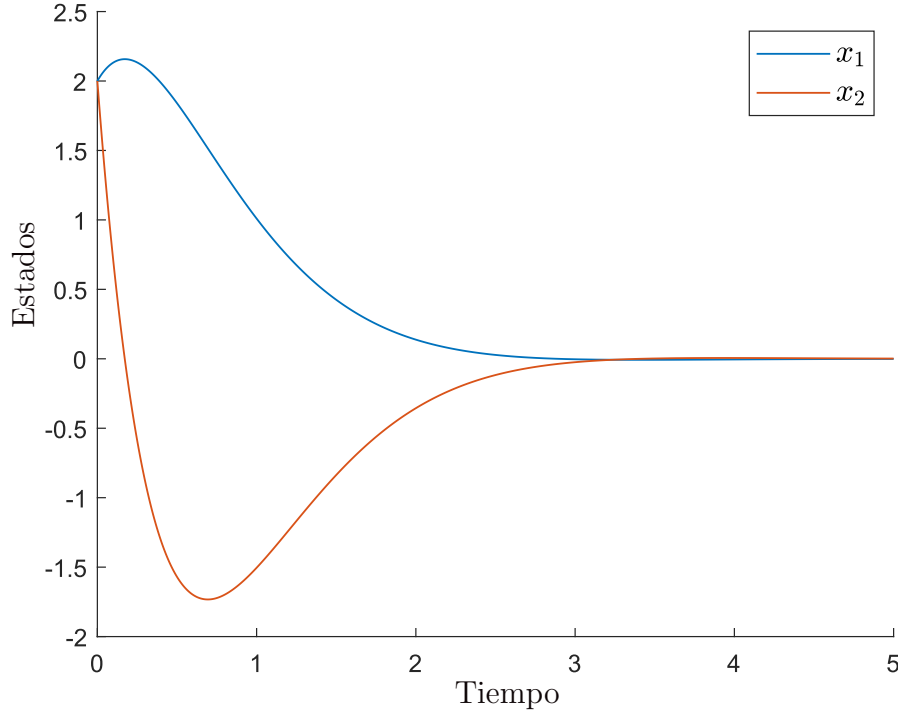


Figura 2.1: Simulación de (2.5), caso $\mu = 0$.

2. Para el caso $p \in (0, 1]$, con $p = \frac{1}{2}$ se tiene $q = \frac{2}{3}$ y el vector de pesos $r = [2, 3/2]^\top$. Para este caso el sistema queda como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{2}} - k_2[x_2]^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

El sistema (2.8) es un sistema δ^r -homogéneo de grado $\mu = -\frac{1}{2}$, por lo tanto el tipo de convergencia al origen de los estado es en tiempo finito, este comportamiento se ilustra en la Figura 2.2.

3. Para el caso $p > 1$, con $p = 2$ se obtiene que $q = \frac{4}{3}$ y el vector de pesos $r = [2, 3]^\top$, en esta ocasión el sistema se describe como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^2 - k_2[x_2]^{\frac{4}{3}}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

El sistema (2.9) tiene un grado de homogeneidad $\mu = 1$, esto implica convergencia de los estados de forma racional como se muestra en la Figura 2.3.

4. En el caso $p = 0$, tenemos un caso especial donde $q = 0$ y el vector de pesos $r = [2, 1]^\top$. En este caso el sistema resultante es conocido como Algoritmo *Twisting* [14], el cual se expresa como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^0 - k_2[x_2]^0.\end{aligned}\tag{2.10}$$

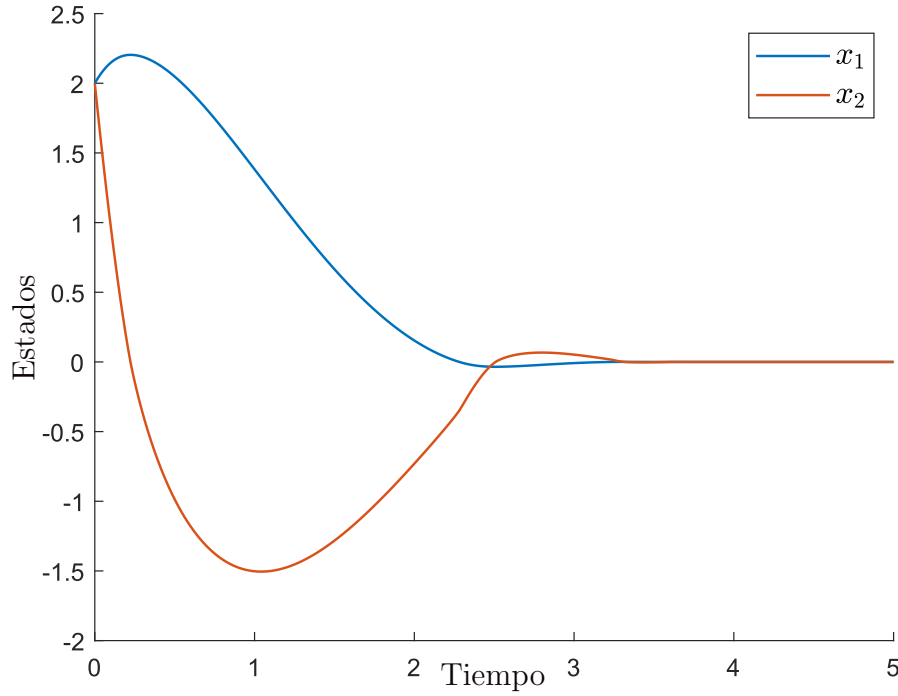


Figura 2.2: Simulación de (2.5), caso $\mu < 0$.

Obsérvese que el campo vectorial del sistema (2.10) es discontinuo, por lo que la teoría estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias ya no es adecuada para su análisis, sin embargo (de acuerdo con [14, 15]), las trayectorias del sistema convergen a 0 en tiempo finito por tener un grado de homogeneidad $\mu < 0$. Este comportamiento se ilustra en la Figura 2.4.

En las simulaciones de (2.5) se verifica lo establecido en el Corolario 1. En el caso 1, al tener un grado de homogeneidad $\mu = 0$, el cual representa el caso lineal, se observa que las trayectorias de los estados del sistema convergen a 0 de manera exponencial, esto se observa en la Figura 2.1. Por otro lado, en la Figura 2.2, que representa la simulación del sistema (2.5) con $\mu < 0$, se aprecia que las trayectorias convergen a 0 en tiempo finito. Para el caso $\mu > 0$, las trayectorias convergen de manera racional, es decir, las trayectorias convergen de manera cada vez más lenta y no llegan exactamente a 0.

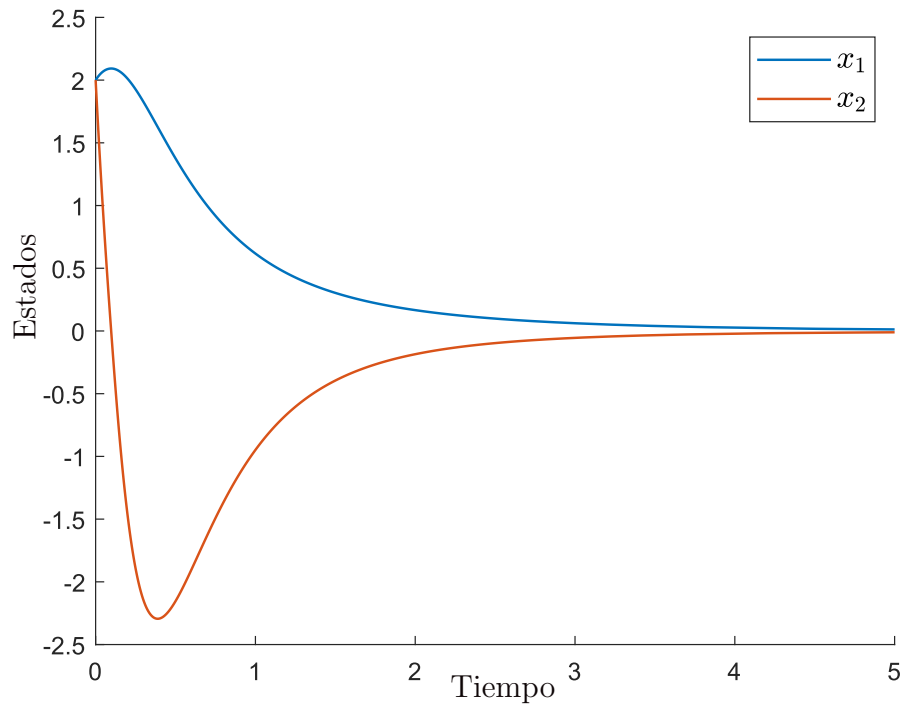


Figura 2.3: Simulación de (2.5), caso $\mu > 0$.

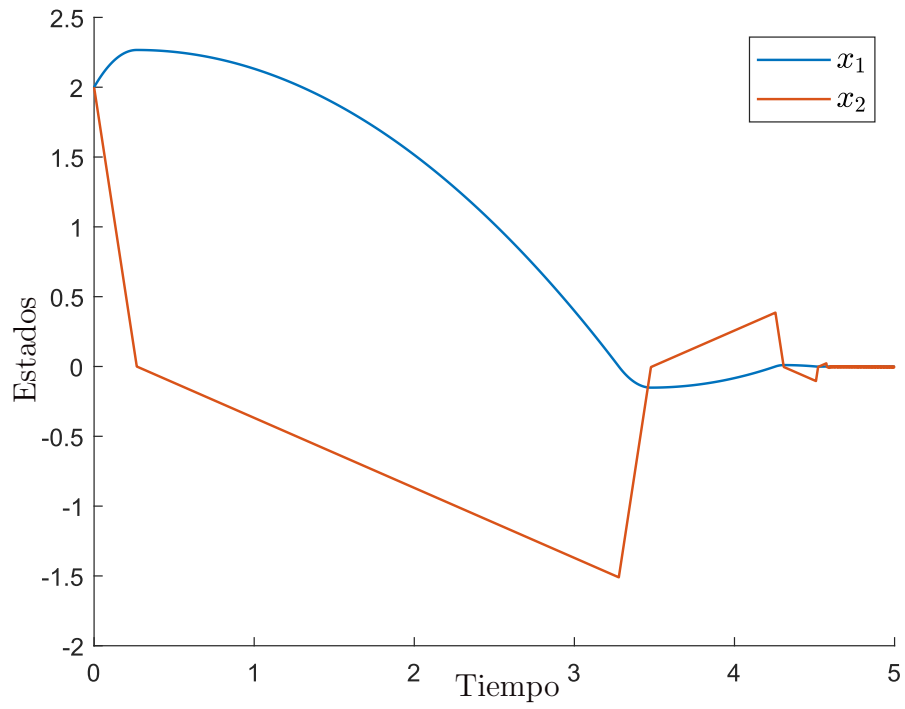


Figura 2.4: Simulación de (2.10), caso (discontinuo) $\mu = -1$.

Capítulo 3

Descripción del sistema y problemática

En este capítulo se expone la clase de sistemas no lineales de interés a estudiar, de igual manera se define el controlador que se encargará de estabilizar al sistema. Se introducen las propiedades del campo que deberán satisfacerse para que el controlador funcione de acuerdo con el análisis realizado. Además, se presenta la problemática que conlleva tanto el estudio de esta clase de sistemas, como la implementación física del controlador propuesto.

3.1. Descripción del sistema y del esquema de control

Considere la clase de sistemas no lineales descrita por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + U \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $f(x) \in \mathbb{R}$ es una cierta función que desconocemos parcialmente, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ son los estados, $y \in \mathbb{R}$ es la señal de salida que podemos medir, y U es la entrada de control. Suponemos que no podemos medir el estado x_2 . También suponemos que conocemos una función $\bar{f}$ tal que $\bar{f}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ es una aproximación de $f(x)$ en el sentido clarificado en la siguiente suposición.

Suposición 1. Considere (3.1), y defina el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq d\}$ para algún $d \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. La función incierta $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface lo siguiente: $f(0) = 0$, y es localmente Lipschitz, esto es, para cualquier $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, existe una constante $d_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$|f(x) - f(x')| \leq d_1 \|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in D.$$

2. La función $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un modelo conocido de f que satisface lo siguiente: es localmente Lipschitz, y para cualquier $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existe una constante $d_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$|f(x) - \bar{f}(x_1, x_2)| \leq d_2 \|x\|, \quad \forall x \in D.$$

De esta forma, el objetivo de control es estabilizar el origen de (3.1) en tiempo finito a pesar de la incertidumbre en f , y utilizando solo la salida y como información para el controlador.

Dadas las características descritas del sistema (3.1), y con el fin de lograr el objetivo de control, se propone el siguiente controlador

$$U = -\bar{f}(x_1, \hat{x}_2) + w(x, \hat{x}_2),$$

donde $\hat{x}_2$ es la estimación del estado x_2 (ya que no podemos medirlo directamente). El término $w(x_1, \hat{x}_2)$ es un controlador dinámico (basado en un observador) conocido como doble integrador en [4], dado por

$$w(x_1, \hat{x}_2) = -\bar{k}_1 [x_1]^p - \bar{k}_2 [\hat{x}_2]^q,$$

en conexión con el observador no lineal de tipo Luenberger

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\bar{l}_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{p_o} + \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\bar{l}_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{q_o} + w(x_1, \hat{x}_2), \end{aligned} \tag{3.2}$$

con $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ que denominamos ganancias de sintonización del control y $p, q, p_o, q_o \in \mathbb{R}_{>0}$ son los exponentes que se diseñarán de una forma muy específica (vea el Teorema 3 en el Capítulo 4) para la estabilización del sistema y lograr el objetivo de control.

Sistema en Retroalimentación

Con lo anterior definido, el sistema (3.1) en retroalimentación con el controlador propuesto queda como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}(x, \hat{x}) - \bar{k}_1 [x_1]^p - \bar{k}_2 [\hat{x}_2] \\ \dot{\hat{x}}_1 &= -\bar{l}_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{p_o} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\bar{l}_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{q_o} + w(x_1, \hat{x}_2), \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde se ha definido el término de incertidumbre $\tilde{f}(x, \hat{x}) = f(x) - \bar{f}(x_1, \hat{x}_2)$.

Definiendo el error de observación como $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ y $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$, con el observador propuesto, se obtiene la dinámica del error de observación de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{\hat{x}}_1 - \dot{x}_1 = -\bar{l}_1[\hat{x}_1 - x_1]^{p_o} + \hat{x}_2 - x_2 = -\bar{l}_1[e_1]^{p_o} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2 = -\bar{l}_2[\hat{x}_1 - x_1]^{q_o} + w - w - \tilde{f}(x, x + e).\end{aligned}$$

De esta forma, a partir del sistema (3.3) se obtiene el siguiente sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tilde{f}(x, x + e) - \bar{k}_1[x_1]^p - \bar{k}_2[x_2 + e_2]^q \\ \dot{e}_1 &= -\bar{l}_1[e_1]^{p_o} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\bar{l}_2[e_1]^{q_o} - \tilde{f}(x, x + e).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Es muy importante el análisis de la dinámica de error (3.4), debido a que si se puede asegurar estabilidad asintótica en el origen en el sistema (3.4), esto implica que el error de observación se hará 0. El error de observación es un difeomorfismo del sistema del observador dinámico (3.2), esto ocasiona que se consiga que conforme $t \rightarrow \infty$ el vector de estados aproximados $\hat{x} \rightarrow x$ de manera asintótica.

Nota: Obsérvese que en el sistema (3.4) el estado del error e_2 está de alguna manera perturbando al sistema controlado ya que está afectando a la ecuación del estado x_2 como una señal de entrada, esta particularidad se analiza posteriormente en el siguiente capítulo.

3.2. Planteamiento del problema

Definido el sistema de la dinámica del error, procedemos a describir los problemas a ser tratados en esta tesis. El objetivo principal de esta tesis es el diseño de un controlador no lineal homogéneo que garantice robustez ante la incertidumbre en f , específicamente, que asegure estabilidad en el origen del sistema (3.4). Por otro lado, se desea probar experimentalmente el controlador, para lo cual se considerará una planta emulada con electrónica analógica-digital. Debido a que es muy común encontrar microcontroladores digitales para la implementación de sistemas de control automático, es importante discretizar los algoritmos de control. Así, mediante el uso de diferentes métodos numéricos se discretizará el controlador propuesto con la finalidad de poder programarlo en un microcontrolador. Por lo tanto, la problemática de esta tesis se puede dividir en teórica y experimental, las cuales se describen a continuación.

Problemática 1 (Validez teórica). Para poder utilizar el controlador propuesto (esto es, el controlador por retroalimentación de salidas mediante el observador de tipo Luenberger) con las propiedades requeridas de robustez, se debe mostrar de manera teórica que el origen del sistema (3.4) es estable en el sentido de Lyapunov.

Problemática 2 (Prueba experimental). Para poder realizar una prueba experimental del esquema de control propuesto en un microcontrolador se requiere lo siguiente: desarrollar una planta experimental (en esta tesis, emulada con electrónica analógica-digital); siendo que el controlador dinámico propuesto es en tiempo continuo mientras que el dispositivo de implementación es digital se requiere utilizar métodos numéricos para la discretización del controlador.

La solución de la *Problemática 1* se aborda en el Capítulo 4 desarrollando la prueba de estabilidad en varias etapas, iniciando con un caso nominal del sistema hasta llegar al análisis del sistema con incertidumbre,. El Capítulo 5 se centra en la *Problemática 2*, donde se describe la planta electrónica y se realizan varias pruebas experimentales con distintas discretizaciones del controlador propuesto.

Capítulo 4

Análisis de estabilidad y diseño de parámetros del controlador

En este capítulo es de interés retomar el esquema de control, presentar el diseño de las ganancias de sintonización para el observador y el controlador, así como el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado. En particular, el objetivo de este capítulo es mostrar de manera teórica estabilidad en el sentido de Lyapunov del sistema (3.4) presentado en el Capítulo 3. Para esto, primero se analizan el sistema sin incertidumbre en su forma de control por retroalimentación de los estados (4.4) y el sistema observador (4.5) considerándolos como dos sistemas aislados. Posteriormente se aborda la propiedad de estabilidad del sistema controlado en conexión con el observador (como un sistema en cascada) y se verifica la propiedad de Estabilidad Entrada-Estado (conocida, por sus siglas en inglés, como ISS). Este análisis del sistema no lineal controlado sin incertidumbre sienta las bases para analizar el caso del sistema con incertidumbre. En la tercera etapa, los resultados anteriores se utilizan para mostrar de manera teórica propiedades de robustez, en particular, que el origen del sistema con incertidumbre es asintóticamente estable. Por último, se presentan los procedimientos para el diseño de ganancias del controlador y del observador que permiten obtener diferentes tipos de comportamientos transitorios.

El resultado teórico principal de esta tesis se presenta a continuación y su demostración se expone en las siguientes secciones del presente capítulo.

Teorema 3. *Considere el sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador por retroalimentación de salidas*

$$\begin{aligned} U &= -\bar{f}(x_1, \hat{x}_2) + w(x_1, \hat{x}_2), \\ w(x_1, \hat{x}_2) &= -\bar{k}_1[x_1]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_2]^q, \\ \dot{\hat{x}}_1 &= -\bar{l}_1[\hat{x}_1 - x_1]^{p_o} + \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\bar{l}_2[\hat{x}_1 - x_1]^{q_o} + w(x_1, \hat{x}_2), \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

$$p \in (0, 1), \quad q = \frac{2p}{p+1}, \quad p_o = \frac{p+1}{2}, \quad q_o = p, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \gamma^{1-p} k_1, & \bar{k}_2 &= \gamma^{1-q} k_2, \\ \bar{l}_1 &= \gamma^{1-p_o} l_1, & \bar{l}_2 &= \gamma^{1-q_o} l_2, \\ l_1 &= \gamma_o^{1-p_o} l_{10}, & l_2 &= \gamma_o^{1-q_o} l_{20}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

y defina $X = [x^\top \ e^\top]^\top$. Bajo estas restricciones y la Suposición 1, se cumple que para cualquier $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y para cualesquiera ganancias

$$k_1, k_2, l_{10}, l_{20}, \gamma_o \in \mathbb{R}_{>0},$$

existe $\gamma^* \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para toda $\gamma \geq \gamma^*$ el origen de la dinámica de error (3.4) es asintóticamente estable con un dominio de atracción $\mathcal{D}$ tal que $\{X \in \mathbb{R}^4 : \|X\|_r \leq a\} \subset \mathcal{D}$. Además, para cualquier condición inicial en $\mathcal{D}$, las trayectorias de (3.4) convergen al origen en tiempo finito.

El teorema se demuestra en las siguientes secciones del presente capítulo. El Teorema 3 garantiza la estabilidad asintótica en el origen para el sistema de error con incertidumbre, utilizando un controlador no lineal por retroalimentación de salidas basado en un observador tipo Luenberger, de tal forma que si la incertidumbre es muy grande se puede configurar la ganancia γ , lo que ocasiona que la región de atracción crezca y que el término de incertidumbre pueda ser compensado. Por esto, el controlador tiene la propiedad de robustez ante incertidumbre. Es importante mencionar que la elección de los exponentes dada en (4.2) es con la finalidad de obtener propiedades de homogeneidad, como se explicará más adelante.

4.1. Análisis del sistema sin incertidumbre

Esta sección se centra en analizar el caso nominal del sistema (3.4), es decir, la planta con el controlador en conexión con su observador sin el término de incertidumbre $\tilde{f}(x, \hat{x})$. Para el análisis del sistema sin incertidumbre se presenta a continuación el sistema auxiliar

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_1 [z_1]^p - k_2 [z_2 + \hat{z}_2]^q, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 - l_1 [\hat{z}_1]^{p_o} \\ \dot{\hat{z}}_2 &= -l_2 [\hat{z}_1]^{q_o}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si utilizamos el cambio de variable $e = \gamma \hat{z}$ y $x = \gamma z$, con $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, de (4.4)-(4.5) obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma^{1-p} k_1 [x_1]^p - \gamma^{1-q} k_2 [x_2 + e_2]^q, \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\gamma^{1-p_o} l_1 [e_1]^{p_o} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\gamma^{1-q_o} l_2 [e_1]^{q_o}. \end{aligned} \quad (4.6b)$$

el cual se compone de dos subsistemas: (4.6a) que llamaremos sistema en forma de controlador, y (4.6b) que llamaremos sistema en forma de observador. Con este cambio de variable, de (4.6) se definen las ganancias de sintonización de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bar{k}_1 &= \gamma^{1-p}k_1, & \bar{k}_2 &= \gamma^{1-q}k_2, \\ \bar{l}_1 &= \gamma^{1-p_o}l_1, & \bar{l}_2 &= \gamma^{1-q_o}l_2, \\ l_1 &= \gamma_o^{1-p_o}l_{10}, & l_2 &= \gamma_o^{1-q_o}l_{20}.\end{aligned}$$

Ahora procedemos a deducir las condiciones sobre los exponentes de los términos del controlador y del observador establecidas en (4.2).

Lema 1. *El campo vectorial de (4.6) es δ^r -homogéneo de grado $\mu = p - 1$ con pesos $r = [2, p + 1, 2, p + 1]$ si se cumplen las condiciones $p = q_o$, $q = \frac{2p}{p+1}$ y $p_o = \frac{q_o+1}{2}$, con $p \in (0, 1)$.*

Observe que las condiciones en el lema implican que (4.6) es δ^r -homogéneo de grado negativo, esto es $\mu < 0$, pero continuo.

Demostración. Si se utiliza la Definición 1 de homogeneidad para campos vectoriales, se obtienen las expresiones que relacionan los pesos y el grado de homogeneidad del campo vectorial de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mu + r_1 &= r_2, & \mu + r_2 &= r_1p, \\ r_1p &= r_2q, & r_2q &= r_4q, \\ \mu + r_3 &= r_3p_o, & r_3p_o &= r_4, \\ \mu + r_4 &= r_3q_o,\end{aligned}$$

de donde se obtiene claramente la condición de que $r_2 = r_4$. Entonces se igualan 2 expresiones de la siguiente manera

$$\mu + r_1 = \mu + r_3,$$

de donde se observa que $r_1 = r_3$. Así, sustituyendo y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que el campo vectorial es δ^r -homogéneo con un vector de pesos $r = [2, p + 1, 2, p + 1]$ con un grado $\mu = p - 1$, con las condiciones $p = q_o$, $q = \frac{2p}{p+1}$ y $p_o = \frac{q_o+1}{2}$. Con esto se demuestra que seleccionando alguna $p \in (0, 1)$ el campo vectorial del sistema sin incertidumbre (4.6) es δ^r -homogéneo de grado μ negativo. $\square$

En Lema 1 se mostró que el sistema sin incertidumbre es δ^r -homogéneo. En el siguiente lema se demuestra estabilidad asintótica del origen del sistema sin incertidumbre (4.6).

Lema 2. *Considere (4.6) con (4.2) y (4.3). Para toda $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ el origen del sistema es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

La demostración de este lema se hace por etapas en el resto de esta sección. Primero se analizarán los subsistemas aislados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\bar{k}_1 \lceil x_1 \rceil^p - \bar{k}_2 \lceil x_2 \rceil^q,\end{aligned}\tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -\bar{l}_1 \lceil e_1 \rceil^{p_o} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\bar{l}_2 \lceil e_1 \rceil^{q_o},\end{aligned}\tag{4.8}$$

y luego se comprobarán algunas propiedades que cumplen estos subsistemas y que aseguran que, al estar interconectados en cascada, también cuentan con la propiedad de estabilidad en sentido de Lyapunov.

Análisis de estabilidad para el sistema en forma de controlador

Los lemmas 3 y 4 pueden consultarse en [4, 10].

Lema 3. *Considere el sistema (4.7) con (4.2). Para toda $\bar{k}_1, \bar{k}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ el origen de (4.7) es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

Demostración. Para mostrar que el origen del sistema es asintóticamente estable se usará una función candidata de Lyapunov $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(x) = \alpha |x_1|^{p+1} + \beta x_2^2.$$

Si se fijan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$, con $\alpha = \frac{2\beta\bar{k}_1}{(p+1)}$ y $\beta = \frac{1}{2}$, entonces nuestra función candidata de Lyapunov es la siguiente

$$V(x) = \frac{\bar{k}_1}{p+1} |x_1|^{p+1} + \frac{1}{2} x_2^2.\tag{4.9}$$

Claramente esta función es positiva definida. Derivamos (4.9) a lo largo de las trayectorias de (4.7) obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{\bar{k}_1}{p+1} ((p+1) \lceil x_1 \rceil^p \dot{x}_1) + x_2 \dot{x}_2 \\ &= \bar{k}_1 \lceil x_1 \rceil^p x_2 + x_2 (-\bar{k}_1 \lceil x_1 \rceil^p - \bar{k}_2 \lceil x_2 \rceil^q) \\ &= x_2 (\bar{k}_1 \lceil x_1 \rceil^p - \bar{k}_1 \lceil x_1 \rceil^p - \bar{k}_2 \lceil x_2 \rceil^q) \\ &= x_2 (-\bar{k}_2 \lceil x_2 \rceil^q) = -\bar{k}_2 |x_2|^{q+1}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Debido a que (4.10) es semidefinida negativa, sólo podemos concluir estabilidad por lo que el Principio de Invariancia es de ayuda para poder afirmar estabilidad asintótica. Siguiendo el Teorema 1, se busca el conjunto invariante más grande M de (4.7) dentro de $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x) = 0\}$. Utilizando (4.10) se encuentra que $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$. Si $x_2 = 0$, se implica de (4.7) que $x_1 = 0$ para que las soluciones permanezcan en el conjunto E . Por esto, se puede afirmar que $M = \{(x_1, x_2) = (0, 0)\}$ (es decir, el origen) es el único conjunto invariante en E , por lo tanto, por el Teorema 1 se puede afirmar estabilidad asintótica del origen. $\square$

Análisis de estabilidad para el sistema en forma de observador

Como se mencionó anteriormente, si podemos asegurar que las trayectorias del error de observación de (4.8) convergen al origen en tiempo finito, entonces eso implica que el estado aproximado es igual que el estado que no podemos medir, esto es $x_2 = \hat{x}_2$, después de cierto tiempo. Además, se aseguraría que la entrada e_2 a la ecuación del estado x_2 en (4.6a) se hará 0 en tiempo finito.

Lema 4. *Considere el sistema (4.8) con (4.2). Para toda $\bar{l}_1, \bar{l}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ el origen de (4.8) es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

Demostración. Proponemos la función candidata de Lyapunov $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para (4.8) como

$$V(e) = \alpha |e_1|^{q_o+1} + \beta |e_2|^2.$$

Definiendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$, con $\alpha = \frac{2\beta\bar{l}_2}{q_o+1}$ y $\beta = \frac{1}{2}$, la función candidata de Lyapunov queda de la siguiente manera

$$V(e) = \frac{\bar{l}_2}{q_o+1} |e_1|^{q_o+1} + \frac{1}{2} |e_2|^2. \quad (4.11)$$

Note que V es positiva definida. Derivando (4.11) a lo largo de las trayectorias de (4.8) obtenemos la siguiente expresión

$$\dot{V}(e) = -\bar{l}_2 \bar{l}_1 |e_1|^{p_o+q_o}. \quad (4.12)$$

De igual manera, debido a que (4.12) es semidefinida negativa, sólo se puede concluir estabilidad. Se utiliza una vez más el Principio de Invariancia para afirmar estabilidad asintótica. Se encuentra el conjunto invariante más grande de (4.8) donde $\dot{V}(e) = 0$, esto es, en el conjunto $E = \{e \in \mathbb{R}^2 : e_1 = 0\}$. Si $e_1 = 0$, se implica de (4.8) que $e_2 = 0$ para que las soluciones de (4.8) se mantengan en E , por esto, se puede afirmar que el origen es el único conjunto invariante $M = \{(e_1, e_2) = (0, 0)\}$ en E . Por lo tanto, por el Teorema 1 se puede afirmar estabilidad asintótica del origen. $\square$

Propiedad de Estabilidad Entrada al Estado

Se mostró que el origen de cada sistema aislado es asintóticamente estable, aunque el objetivo es mostrar que el sistema acoplado (4.6) tiene la propiedad de estabilidad asintótica en el origen. Para conseguir esto, comprobaremos que (4.6a) cuenta con la propiedad de Estabilidad Entrada al Estado (ISS por sus siglas al inglés) considerando e_2 como entrada, esto para asegurar que las soluciones no se desbordan ante una entrada acotada e_2 .

Por otro lado el subsistema (4.6b) no tiene señales de entrada, además mostramos que sus trayectorias convergen al origen por lo que la entrada e_2 tiende a dejar de afectar

a (4.6a). Sin embargo, la entrada e_2 en (4.6a) podría ocasionar que las soluciones del sistema exploten, por esto es de interés que (4.6a) tenga la propiedad ISS.

A continuación se define formalmente la propiedad de Estabilidad Entrada al Estado, para esto consideramos el sistema

$$\dot{x} = f(x, d), \quad (4.13)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, y $d(t) \in \mathbb{R}^m$ es una entrada externa esencialmente acotada, esto es $d \in \mathcal{L}_\infty$.

Definición 4 ([22]). *El sistema (4.13) es llamado Entrada al Estado Estable (ISS) si existen funciones $\beta \in \mathcal{KL}$ y $\gamma \in \mathcal{K}$ tales que, para cualquier entrada $d \in \mathcal{L}_\infty$ y para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x(t; x(0); d)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma(\|d\|_{[0,t]}) \quad \forall t \geq 0,$$

donde $\|d\|_{[0,t]}$ denota el supremo esencial de $d(t)$ en el intervalo $[0, t]$. A la función γ se le conoce como ganancia asintótica no lineal.

Asegurando que un sistema tiene la propiedad ISS, se puede afirmar que sus soluciones están acotadas como se establece en la definición anterior, y se puede asegurar que las soluciones no se desbordarán para cualquier entrada acotada.

Existen en la literatura resultados para verificar la propiedad ISS. Sin embargo, para los sistemas homogéneos se facilita el análisis de esta propiedad. Esto es conveniente ya que se mostró que el sistema completo sin perturbación (4.6) es δ^r -homogéneo.

La siguiente suposición del campo vectorial servirá para comprobar la propiedad ISS.

Suposición 2. *El sistema (4.13) es tal que $d \in \mathcal{L}_\infty$, y $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz (o Hölder) continua con $f(0, 0) = 0$. Además, se tiene que existen $\mu \in \mathbb{R}$, $r = [r_1, \dots, r_n]$, $r_i > 0$ y $\hat{r} = [\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m]$, $\hat{r}_j \geq 0$, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ y toda $j \in \{1, \dots, m\}$ tales que $f(\delta_\epsilon^r(x), \delta_\epsilon^{\hat{r}}(d)) = \epsilon^\mu \delta_\epsilon^r(f(x, d))$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, toda $d \in \mathbb{R}^m$, y toda $\epsilon > 0$.*

El siguiente resultado muestra que cuando un sistema δ^r -homogéneo cumple con ciertas condiciones, al imponerle una entrada de cierta forma, dicho sistema cuenta con la propiedad de Estabilidad Entrada al Estado.

Teorema 4 ([5]). *Suponga que el origen del sistema (4.13) es asintóticamente estable con $d = 0$ y que cumple la Suposición 2 con $\mu \geq -r_{\min}$, $r_{\min} = \min\{r_1, \dots, r_n\}$, entonces el sistema (4.13) es ISS si*

$$\hat{r}_{\min} = \min\{\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m\} > 0. \quad (4.14)$$

Con este resultado probaremos el siguiente lema.

Lema 5. *El sistema (4.6a), con (4.2), es ISS con respecto a la entrada e_2 .*

Demostración. La prueba de este lema consiste en verificar las hipótesis del Teorema 4. La estabilidad asintótica se asegura en el Lema 3. Ahora, se define $d = e_2$ y el campo vectorial

$$f(x, d) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\bar{k}_1 \lceil x_1 \rceil^p - \bar{k}_2 \lceil x_2 + d \rceil^q \end{bmatrix},$$

que, aplicando la dilatación sobre los argumentos del campo nos da

$$f(\delta_\epsilon^r(x), \delta_\epsilon^{\hat{r}}(d)) = \begin{bmatrix} \epsilon^{r_2} x_2 \\ -\bar{k}_1 \lceil \epsilon^{r_1} x_1 \rceil^p - \bar{k}_2 \lceil \epsilon^{r_2} x_2 + \epsilon^{\hat{r}_1} d \rceil^q \end{bmatrix},$$

de donde se observa que el factor de dilatación de la entrada $\epsilon^{\hat{r}_1}$ debe ser igual al coeficiente de dilatación del estado x_2 , de modo que tenemos que $\epsilon^{\hat{r}_1} = \epsilon^{r_2}$. Como ya sabemos que $r = [2, p + 1]$ y $\mu = p - 1$ queremos ver si se cumple la desigualdad $\mu \geq -r_{min}$, esto es, si se cumple que

$$\begin{aligned} p - 1 &\geq -2, \\ p - 1 &\geq -(p + 1). \end{aligned}$$

Estas desigualdades se satisfacen si tenemos que $p \geq 0$ y $p \geq -1$. Esto siempre ocurre ya que (de (4.2) en el Teorema (3)) nos interesa solo que $0 < p < 1$ (para tener comportamiento de convergencia en tiempo finito). Finalmente tenemos que verificar que $\hat{r}_{min} > 0$, lo cuál es verdadero ya que $\hat{r}_{min} = \hat{r}_1 = p + 1 > 0$. Por lo que siempre se cumplen las condiciones del Teorema 4 que aseguran que el subsistema (4.6a) tiene la propiedad ISS. $\square$

Estabilidad para el sistema en cascada

Ya se ha mostrado que (4.6a) es ISS con respecto a e_2 , además sabemos del Lema 4 que las soluciones de (4.6b) convergen a cero. Esto nos permite concluir que las soluciones de (4.6) permanecen acotadas para todo $t \geq 0$ pero no nos permite concluir directamente que el origen es asintóticamente estable. Para argumentar que el sistema sin incertidumbre interconectado en cascada cumple con tener estabilidad asintótica en el origen, observamos que tiene la forma de conexión en cascada

$$\dot{x} = f_1(x, e_2), \tag{4.15}$$

$$\dot{e} = f_2(e), \tag{4.16}$$

donde $f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son continuas. El siguiente lema muestra que el origen del sistema en cascada tiene un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable en su origen y por lo tanto es el que culmina la demostración del Lema 2.

Lema 6. Si el sistema (4.15), con e_2 como entrada, es ISS y el origen de (4.16) es globalmente asintóticamente estable, entonces el origen del sistema en cascada (4.15)-(4.16) es globalmente asintóticamente estable.

Demostración. La demostración de este lema sigue las ideas en [12, Lema 4.7]. Por hipótesis, existen funciones $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ y $\gamma \in \mathcal{K}$, tales que las soluciones de (4.15) satisfacen globalmente, para todo $t \geq 0$,

$$\|x(t)\| \leq \beta_1(\|x(0)\|, t) + \gamma(\|e_2\|_{[0,t]}). \quad (4.17)$$

Además, por hipótesis y de acuerdo con [11] existe una función $\beta_2 \in \mathcal{KL}$ tal que las soluciones de (4.16) satisfacen globalmente, para todo $t \geq 0$,

$$\|e(t)\| \leq \beta_2(\|e(0)\|, t). \quad (4.18)$$

Así, para cualquier $s \geq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \beta_1(\|x(s)\|, t-s) + \gamma(\|e_2\|_{[s,t]}), \\ \|e(t)\| &\leq \beta_2(\|e(s)\|, t-s). \end{aligned}$$

Tomando $s = t/2$ obtenemos

$$\|x(t)\| \leq \beta_1(\|x(t/2)\|, t/2) + \gamma(\|e_2\|_{[t/2,t]}),$$

por lo tanto

$$\|x(t)\| \leq \beta_1(\beta_1(\|x(0)\|, t/2) + \gamma(\|e_2\|_{[0,t/2]}), t/2) + \gamma(\|e_2\|_{[t/2,t]}). \quad (4.19)$$

Ahora, de (4.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \|e_2\|_{[0,t/2]} &\leq \beta_2(\|e(0)\|, 0), \\ \|e_2\|_{[t/2,t]} &\leq \beta_2(\|e(0)\|, t/2). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas cotas en (4.19) obtenemos

$$\|x(t)\| \leq \beta_1\left(\beta_1(\|x(0)\|, t/2) + \gamma(\beta_2(\|e(0)\|, 0)), t/2\right) + \gamma\left(\beta_2(\|e(0)\|, t/2)\right). \quad (4.20)$$

Considerando que $\|x_1(t)\| \leq \|(x(t), e(t))\|$, $\|e_2(t)\| \leq \|(x(t), e(t))\|$, y $\|(x(t), e(t))\| \leq \|x(t)\| + \|e(t)\|$, se concluye el resultado

$$\|(x(t), e(t))\| \leq \beta(\|(x(0), e(0))\|, t),$$

donde β es una función de clase $\mathcal{KL}$, para toda $r \geq 0$, dada por

$$\beta(r, s) = \beta_1\left(\beta_1\left(r, \frac{s}{2}\right) + \gamma(\beta_2(r, 0)), \frac{s}{2}\right) + \gamma\left(\beta_2\left(r, \frac{s}{2}\right)\right) + \beta_2(r, s).$$

Por lo tanto (de acuerdo con [11]), el origen de (4.15) y (4.16) es globalmente asintóticamente estable. $\square$

Con el siguiente resultado se concluye esta sección.

Corolario 2. *Considere el sistema (4.4)-(4.5) con (4.2). Para toda $k_1, k_2, l_1, l_2 > 0$ el origen del sistema es asintóticamente estable.*

Demostración. El Lema 2 asegura que el origen de (4.6) es asintóticamente estable. Por otro lado, el cambio de variable $e = \gamma \hat{z}$, $x = \gamma z$, con $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, es lineal y por lo tanto un difeomorfismo. Así, podemos afirmar que el origen del sistema (4.4)-(4.5) es asintóticamente estable. $\square$

4.2. Análisis del sistema con incertidumbre

En esta sección se presenta el resto de la prueba que demuestra el Teorema 3. Se utiliza el resultado de que cuando se demuestra estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov de un sistema δ^r -homogéneo, esto implica que existe una función estricta homogénea de Lyapunov para dicho sistema (vea el Teorema 2). El análisis se realiza siguiendo parcialmente las ideas en [20].

Del Corolario 2 y del Corolario 1, se conoce que el origen del sistema interconectado (4.4)-(4.5) con (4.2) (por ser δ^r -homogéneo de grado $\mu = p - 1$ con pesos $r = [2, p + 1, 2, p + 1]$) es estable en tiempo finito, y del Teorema 2 que existe una función (δ^r -homogénea de grado $m > 0$) de Lyapunov estricta para el sistema $V_0 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dada por $V_0(z, \hat{z})$ que cumple con la Definición 3. Por lo anterior, derivando V_0 a lo largo de las trayectorias del sistema (4.4)-(4.5), obtenemos

$$\dot{V}_0 = \frac{\partial V_0}{\partial z}(z, \hat{z})\dot{z} + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}}(z, \hat{z})\dot{\hat{z}} = -W_0(z, \hat{z}),$$

donde W_0 es una función homogénea positiva definida.

Por otra parte, recordando que (4.6) se obtiene a partir de (4.4)-(4.5) con la transformación $e = \gamma \hat{z}$, $x = \gamma z$, $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, definimos la función $V_\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ de modo que $V_\gamma(x, e) = V_0(\gamma^{-1}x, \gamma^{-1}e)$. Note que V_γ es una función homogénea de Lyapunov estricta para (4.6). De hecho, observamos que la derivada de V_γ a lo largo de las trayectorias de (4.6) es tal que $\dot{V}_\gamma = \dot{V}_0$ y

$$\dot{V}_\gamma(x, e) = -W(x, e),$$

donde $W(x, e) = W_0(\gamma^{-1}x, \gamma^{-1}e)$.

Ahora consideramos el sistema con incertidumbre

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma^{1-p}k_1[x_1]^p - \gamma^{1-q}k_2[x_2 + e_2]^q + \tilde{f}(x, x + e) \\ \dot{e}_1 &= -\gamma^{1-p_0}l_1[e_1]^{p_0} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\gamma^{1-q_0}l_2[e_1]^{q_0} + \tilde{f}(x, x + e), \end{aligned} \tag{4.21}$$

y consideramos V_γ como una función candidata de Lyapunov para (4.21). Derivando V_γ a lo largo de las trayectorias del sistema obtenemos

$$\dot{V}_\gamma = -W(x, e) + \left(\frac{\partial V_\gamma}{\partial x}(x, e) + \frac{\partial V_\gamma}{\partial e}(x, e) \right) \tilde{f}(x, x + e).$$

Observe que para cualquier $\gamma > 0$, $W(x, e)$ es siempre positiva definida. Considerando nuevamente el cambio de variable $x = \gamma z$, $e = \gamma \hat{z}$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_\gamma(x, e) &= -W_0(z, \hat{z}) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z}(z, \hat{z}) \frac{1}{\gamma} + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}}(z, \hat{z}) \frac{1}{\gamma} \right) \tilde{f}(x, x + e). \\ \dot{V}_\gamma(x, e) &\leq -W_0(z, \hat{z}) + \frac{1}{\gamma} \left| \frac{\partial V_0}{\partial z_2}(z, \hat{z}) + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_2}(z, \hat{z}) \right| |\tilde{f}(x, x + e)|. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ahora, se utiliza la Definición 1 de homogeneidad para obtener el grado de homogeneidad de W_0 y del término $\left| \frac{\partial V_0}{\partial z_2}(z, \hat{z}) + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_2}(z, \hat{z}) \right|$. Sabemos que $W_0 = \frac{\partial V_0}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}} \dot{\hat{z}}$, se aplica la Definición 1 en W_0 obteniendo

$$W_0(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) = \frac{\partial V_0}{\partial z}(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) g_1(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}}(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) g_2(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})),$$

donde g_1 y g_2 denotan los campos de (4.4) y (4.5). Ahora, para $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial z_i}(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) g_{1,i}(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) &= \epsilon^{m-r_i} \frac{\partial V_0}{\partial z_i}(z, \hat{z}) \epsilon^{\mu+r_i} g_{1,i}(z, \hat{z}) + \epsilon^{m-r_i} \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_i}(z, \hat{z}) \epsilon^{\mu+r_i} g_{2,i}(\hat{z}), \\ &= \epsilon^{m+\mu} \left[\frac{\partial V_0}{\partial z_i}(z, \hat{z}) g_{1,i}(z, \hat{z}) + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_i}(z, \hat{z}) g_{2,i}(\hat{z}) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Así, se verifica en (4.23) que W_0 es una función δ^r -homogénea de grado $m+\mu$. Obtenemos ahora el grado de homogeneidad de

$$h(z, \hat{z}) := \left| \frac{\partial V_0}{\partial z_2}(z, \hat{z}) + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_2}(z, \hat{z}) \right|,$$

$$\begin{aligned} h(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) &= \left| \frac{\partial V_0}{\partial z_2}(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) + \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_2}(\delta_\epsilon^r(z, \hat{z})) \right| \\ &= \left| \epsilon^{m-r_2} \frac{\partial V_0}{\partial z_2}(z, \hat{z}) + \epsilon^{m-r_2} \frac{\partial V_0}{\partial \hat{z}_2}(z, \hat{z}) \right|, \end{aligned}$$

por lo que el término h es δ^r -homogéneo de grado $m - r_2$.

Para obtener una cota de $\dot{V}_\gamma$ con todos los términos en función de W_0 , utilizamos el Lema 9 (vea el Apéndice en el Capítulo 7) que dice que existe una constante $c_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que el término h se acota como

$$\left| \frac{\partial V_0(z, \hat{z})}{\partial z_2} + \frac{\partial V_0(z, \hat{z})}{\partial \hat{z}_2} \right| \leq c_0 W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}).$$

Sustituyendo las cotas encontradas en (4.22) obtenemos la siguiente expresión

$$\dot{V}_\gamma(x, e) \leq -W_0(z, \hat{z}) + \frac{c_0}{\gamma} W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) |\tilde{f}(x, x+e)|. \quad (4.24)$$

Analizando el término $|\tilde{f}(x, x+e)|$ vemos que se puede reescribir como

$$\tilde{f}(x, x+e) = [f(x) - f(x+e)] + [f(x+e) - \bar{f}(x_1, x_2+e_2)], \quad (4.25)$$

de modo que, de acuerdo con la Suposición 1, para cualquier $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existen $d_1, d_2, L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que para toda $X = [x^\top \ e^\top]^\top \in H_a = \{X \in \mathbb{R}^4 : \|X\|_r \leq a\}$ se satisface

$$|\tilde{f}(x, x+e)| \leq (d_1 + L)|e| + d_2|x+e| = \gamma(d_1 + L)|\hat{z}| + \gamma d_2|z + \hat{z}|, \quad (4.26)$$

donde L es la constante de Lipschitz de $\bar{f}$. Sustituyendo (4.26) en (4.24) obtenemos la siguiente expresión (para toda $X \in H_a$)

$$\begin{aligned} \dot{V}_\gamma(x, e) &\leq -W_0(z, \hat{z}) + c_0 \frac{1}{\gamma} W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) (\gamma(d_1 + L)|\hat{z}| + \gamma d_2|z + \hat{z}|), \\ &\leq -W_0(z, \hat{z}) + c_0 W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) ((d_1 + L)|\hat{z}| + d_2|z + \hat{z}|). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ahora encontramos el grado de homogeneidad de las cotas de los términos de la incertidumbre¹, de acuerdo al Lema 9, existen $c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, tales que

$$\begin{aligned} |\hat{z}|^2 &\leq c_1 W_0^{\frac{2r_1}{m+\mu}}(z, \hat{z}) + c_2 W_0^{\frac{2r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) \leq c_M \left(W_0^{\frac{2r_1}{m+\mu}}(z, \hat{z}) + W_0^{\frac{2r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) \right) \\ |z + \hat{z}|^2 &\leq \bar{c}_1 W_0^{\frac{2r_1}{m+\mu}}(z, \hat{z}) + \bar{c}_2 W_0^{\frac{2r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) \leq \bar{c}_M \left(W_0^{\frac{2r_1}{m+\mu}}(z, \hat{z}) + W_0^{\frac{2r_2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) \right), \end{aligned}$$

para toda $z, \hat{z} \in \mathbb{R}^2$, donde $c_M = \max\{c_1, c_2\}$ y $\bar{c}_M = \max\{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$. Recordando que $r_1 = 2$ y $r_2 = p + 1$, se puede acotar $|\hat{z}|^2$ y $|z + \hat{z}|^2$ en dos casos de la misma manera pero cambiando la potencia, es decir:

$$|\hat{z}|^2 \leq \begin{cases} 2c_M W_0^{\frac{4}{m+\mu}}(z, \hat{z}) & \text{para } W_0(z, \hat{z}) \geq 1, \\ 2c_M W_0^{\frac{2(p+1)}{m+\mu}}(z, \hat{z}) & \text{para } W_0(z, \hat{z}) < 1. \end{cases}$$

Así, tenemos que

$$|\hat{z}| \leq \begin{cases} \sqrt{2c_M} W_0^{\frac{2}{m+\mu}}(z, \hat{z}) & \text{para } W_0(z, \hat{z}) \geq 1, \\ \sqrt{2c_M} W_0^{\frac{(p+1)}{m+\mu}}(z, \hat{z}) & \text{para } W_0(z, \hat{z}) < 1. \end{cases}$$

¹Observe que la desigualdad (4.27) es válida para $X \in H_a$. Sin embargo, el análisis (basado en homogeneidad) del lado derecho de (4.27) se realiza, y es válido, para toda $z, \hat{z} \in \mathbb{R}^2$. No obstante, el análisis (basado en homogeneidad) de (4.27) también se podría realizar considerando algún concepto de homogeneidad local (ver, por ejemplo, [1, 25]).

Sustituyendo las cotas encontradas en (4.27) se tiene el caso (abusando de la notación, obviaremos los argumentos $(z, \hat{z})$ en los términos de W_0)

$$\begin{aligned}\dot{V}_\gamma(x, e) &\leq -W_0 + c_0 W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}} ((d_1 + L)\sqrt{2c_M} W_0^{\frac{2}{m+\mu}} + d_2\sqrt{2\bar{c}_M} W_0^{\frac{2}{m+\mu}}), \quad W_0 \geq 1 \\ \dot{V}_\gamma(x, e) &\leq -W_0 + c_0((d_1 + L)\sqrt{2c_M} + d_2\sqrt{2\bar{c}_M}) W_0^{\frac{m-p+1}{m+\mu}}, \quad W_0 \geq 1\end{aligned}\quad (4.28)$$

para toda $X \in H_a$, y el segundo caso

$$\begin{aligned}\dot{V}_\gamma(x, e) &\leq -W_0 + c_0 W_0^{\frac{m-r_2}{m+\mu}} ((d_1 + L)\sqrt{2c_M} W_0^{\frac{p+1}{m+\mu}} + d_2\sqrt{2\bar{c}_M} W_0^{\frac{p+1}{m+\mu}}), \quad W_0 < 1 \\ \dot{V}_\gamma(x, e) &\leq -W_0 + c_0((d_1 + L)\sqrt{2c_M} + d_2\sqrt{2\bar{c}_M}) W_0^{\frac{m}{m+\mu}}, \quad W_0 < 1,\end{aligned}\quad (4.29)$$

para toda $X \in H_a$. Conociendo que W_0 es δ^r -homogénea de grado $m + \mu$, se comprueba que en (4.28) y (4.29) el término $-W_0$ dominará cerca de cero al resto de los términos si en los dos casos los términos positivos que se obtuvieron en las cotas son de mayor grado: para el caso $W_0 \geq 1$, recordando que $\mu = p - 1$,

$$\begin{aligned}\frac{m-p+1}{m+\mu} &> 1 \quad \Leftrightarrow \\ m-p+1 &> m+\mu \Leftrightarrow \\ 1 &> p\end{aligned}$$

lo que siempre se cumple ya que consideramos el caso (como nos interesa tener convergencia de las trayectorias en tiempo finito) $p \in (0, 1]$, por lo tanto $\frac{m-p+1}{m+\mu} > 1$. De la misma manera obtenemos que $\frac{m}{m+\mu} > 1$.

El grado de homogeneidad del término de la cota de la incertidumbre en función de W_0 cambia dependiendo de que tan cerca o alejado está del origen, por lo que (para facilitar la notación) denotaremos

$$\zeta = \begin{cases} \frac{m-p+1}{m+\mu} & \text{para } W_0(z, \hat{z}) \geq 1, \\ \frac{m}{m+\mu} & \text{para } W_0(z, \hat{z}) < 1. \end{cases}$$

Así, de (4.28) y (4.29) obtenemos la siguiente expresión

$$\dot{V}_\gamma(x, e) \leq -W_0(z, \hat{z}) + C W_0^\zeta(z, \hat{z}), \quad (4.30)$$

con $C = c_0((d_1 + L)\sqrt{2c_M} + d_2\sqrt{2\bar{c}_M})$. El término $-W_0$ es definido negativo por lo que analizamos si es más fuerte que el término de incertidumbre de la siguiente forma

$$\dot{V}_\gamma(x, e) \leq -\frac{1}{2}W_0(z, \hat{z}) + \left(C W_0^\zeta(z, \hat{z}) - \frac{1}{2}W_0(z, \hat{z}) \right). \quad (4.31)$$

Observe que el lado derecho de (4.31) es definido negativo, i.e., $\dot{V}_\gamma(x, e) \leq -\frac{1}{2}W_0(z, \hat{z})$, si se cumple que $CW_0^\zeta(z, \hat{z}) - \frac{1}{2}W_0(z, \hat{z}) \leq 0$. Procederemos a analizar esta última desigualdad:

$$\begin{aligned} 2CW_0^\zeta(z, \hat{z}) &\leq W_0(z, \hat{z}) \quad \Leftrightarrow \\ 2CW_0^{\zeta^{-1}}(z, \hat{z}) &\leq 1 \quad \Leftrightarrow \\ W_0^{\zeta^{-1}}(z, \hat{z}) &\leq \frac{1}{2C}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Se define $\theta = 2C$ y a $\bar{\zeta}$ como

$$\bar{\zeta} = \begin{cases} \frac{m-p+1}{m+\mu} - 1 = \frac{2(1-p)}{m+\mu} & \text{para } W_0(z, \hat{z}) \geq 1, \\ \frac{m}{m+\mu} - 1 = \frac{1-p}{m+\mu} & \text{para } W_0(z, \hat{z}) < 1. \end{cases}$$

Con lo anterior propuesto, sustituyendo en (4.32) tenemos

$$W_0^{\bar{\zeta}}(z, \bar{z}) \leq \theta^{-1}. \tag{4.33}$$

Recordando que (ver Lema 9) existe una constante c_3 tal que $W_0(z, \hat{z}) \leq c_3\|(z, \hat{z})\|_r^{m+\mu}$, y utilizando el cambio de coordenadas tenemos que $c_3\|(z, \hat{z})\|_r^{m+\mu} \leq c_3\|(\frac{1}{\gamma}x, \frac{1}{\gamma}e)\|_r^{m+\mu}$. Nótese que se puede factorizar el coeficiente $\frac{1}{\gamma}$ como una cota superior utilizando el Lema 10 (en el Apéndice) como sigue

$$c_3\|(\frac{1}{\gamma}x, \frac{1}{\gamma}e)\|_r^{m+\mu} \leq \frac{c_3}{\alpha(\gamma)}\|(x, e)\|_r^{m+\mu}$$

donde α es una función de clase $\mathcal{K}_\infty$ dada por

$$\alpha(\gamma) = \begin{cases} \gamma^{\frac{1}{p+1}} & \text{para } \gamma \leq 1, \\ \gamma^{\frac{1}{2}} & \text{para } \gamma > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto se obtiene la siguiente desigualdad

$$W_0^{\bar{\zeta}}(z, \hat{z}) \leq [c_3\|(z, \hat{z})\|_r^{m+\mu}]^{\bar{\zeta}} \leq \left[\frac{c_3}{\alpha(\gamma)}\|(x, e)\|_r^{m+\mu} \right]^{\bar{\zeta}}. \tag{4.34}$$

Nos interesa que se satisfaga (4.32) (o, equivalentemente (4.33)), lo que se cumple siempre que

$$\left[\frac{c_3}{\alpha(\gamma)}\|(x, e)\|_r^{m+\mu} \right]^{\bar{\zeta}} \leq \theta^{-1},$$

equivalentemente

$$\nu \left(\frac{c_3}{\alpha(\gamma)}\|(x, e)\|_r^{m+\mu} \right) \leq \theta^{-1} \tag{4.35}$$

donde ν es una función de la siguiente forma

$$\nu(s) = \begin{cases} s^{\frac{2(1-p)}{m+\mu}} & \text{para } s \leq 1, \\ s^{\frac{1-p}{m+\mu}} & \text{para } s > 1, \end{cases}$$

$$\nu^{-1}(s) = \begin{cases} s^{\frac{m+\mu}{2(1-p)}} & \text{para } s \leq 1, \\ s^{\frac{m+\mu}{1-p}} & \text{para } s > 1. \end{cases}$$

Despejando en (4.35) se obtiene

$$\frac{c_3}{\alpha(\gamma)} \|(x, e)\|_r^{m+\mu} \leq \nu^{-1}(\theta^{-1})$$

$$\|(x, e)\|_r^{m+\mu} \leq \frac{\alpha(\gamma)}{c_3} \nu^{-1}(\theta^{-1}). \quad (4.36)$$

De (4.36) podemos concluir lo siguiente (recuerde que θ depende de d_1, d_2, L , estas dependen de a , y observe que $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$): para cualquier $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, existe $\gamma^* \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para toda $\gamma \geq \gamma^*$ siempre se cumple (4.36) y por lo tanto se asegura que $\dot{V}_\gamma(x, e) \leq -\frac{1}{2}W_0(z, \hat{z})$ para toda $X \in H_a$. Finalmente, por el Lema 9, existe $c_4 > 0$ tal que $\dot{V}_\gamma(x, e) \leq -c_4 V_\gamma^{\frac{m+\mu}{m}}(x, e)$, y por [6, Teorema 4.2], las trayectorias convergen al origen en tiempo finito.

4.3. Diseño de ganancias del controlador

En esta sección se presenta un procedimiento para la elección de las ganancias del esquema de control por salida. Se hace énfasis en el diseño de ganancias por separado, para la parte del controlador estático y para la parte del observador. Aunque esto no garantiza teóricamente un comportamiento transitorio del esquema por salida, empíricamente ha resultado útil, como se puede ver en el Capítulo 5.

Forma de controlador

En esta sección se presentan los resultados necesarios para la correcta manera de elegir las ganancias del controlador para tener el comportamiento transitorio deseado del sistema nominal en forma de controlador

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^p - k_2[x_2]^q. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Se puede elegir $p \in \mathbb{R}$ con la condición $q = \frac{2p}{p+1}$, tal que el sistema (4.37) es δ^r -homogéneo de grado $\mu = p - q$ con $r = [q, p]^\top$ para $p > 0$. Observe que:

- si $p = 1$, entonces $q = 1$ y $\mu = 0$ ((4.37) es lineal).

- si $p \in (0, 1)$, entonces $1 > q > p$ y $\mu < 0$.
- si $p > 1$, entonces $\min\{p, 2\} > q > 1$ y $\mu > 0$.

En [21] se demuestra la existencia de una ecuación característica de (4.37), tal que la respuesta transitoria del sistema se comporta diferente con base en las soluciones de dicha ecuación que dependen de las ganancias k_1, k_2 ; además, se muestra que el sistema (4.37) cuenta con las propiedades de estabilidad que se enuncian en el siguiente lema.

Lema 7 ([10]). *Considere (4.37). Para cualquier $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y si $p > 0$, entonces el origen es asintóticamente estable, más aún:*

1. si $p=1$, entonces el origen es exponencialmente estable;
2. si $p \in (0, 1)$, entonces el origen es estable en tiempo finito;
3. si $p > 1$, entonces el origen es estable en casi tiempo fijo.

Con este resultado se concluye que eligiendo p el sistema puede tener diferentes tipos de convergencia al origen. Con esto definido, se obtuvo el criterio para elegir el tipo de comportamiento del sistema con base en las ganancias del controlador.

Teorema 5 ([21]). *Considere (4.37) con $k_1 > 0$, $p \in \mathbb{R}_{>0}$ y $q = \frac{2p}{p+1}$. Se define*

$$\kappa = 2p\sqrt{q^{-(2+q)}k_1^{\frac{q}{p}}}, \quad (4.38)$$

y el factor de amortiguamiento $\zeta_c := k_2/\kappa$. Se tiene lo siguiente:

1. si $0 < \zeta_c < 1$, entonces la respuesta del sistema es subamortiguada;
2. si $1 < \zeta_c$, entonces la respuesta es sobreamortiguada;
3. si $\zeta_c = 1$, entonces la respuesta del sistema es críticamente amortiguada;
4. si $\zeta_c = 0$, entonces la respuesta del sistema es no amortiguada.

Ejemplo de diseño ganancias

Para el doble integrador $\ddot{y} = U$, el problema es diseñar el controlador U tal que la salida del sistema a controlar $y(t) \in \mathbb{R}$ siga una constante que denominaremos referencia $r \in \mathbb{R}$.

Se define la variable de error como $e = r - y$, con la condición $q = \frac{2p}{p+1}$, y el controlador está descrito como

$$U = k_1[e]^p + k_2[\dot{e}]^q, \quad k_1 > 0, \quad (4.39)$$

Un controlador de este tipo puede considerarse como un controlador (no lineal) de tipo proporcional-derivativo. Definiendo los estados $x_1 = e$ y $x_2 = \dot{e}$, el sistema en lazo

cerrado está dado por (4.37). Note que dos de los aspectos relevantes en el diseño de los parámetros de (4.39) son: el tipo de convergencia del error a cero y el tipo de comportamiento transitorio de la salida y . Ambos aspectos son descritos en el Teorema 5. A continuación se presentan simulaciones para comprobar cómo influyen las ganancias diseñadas en el comportamiento transitorio del sistema (4.37) con el controlador descrito en (4.39) con $p = 1/2$, $k_1 = 3$ y $k_2 = (5/4)\kappa, \kappa, (2/5)\kappa, 0$. En la Figura 4.1, se

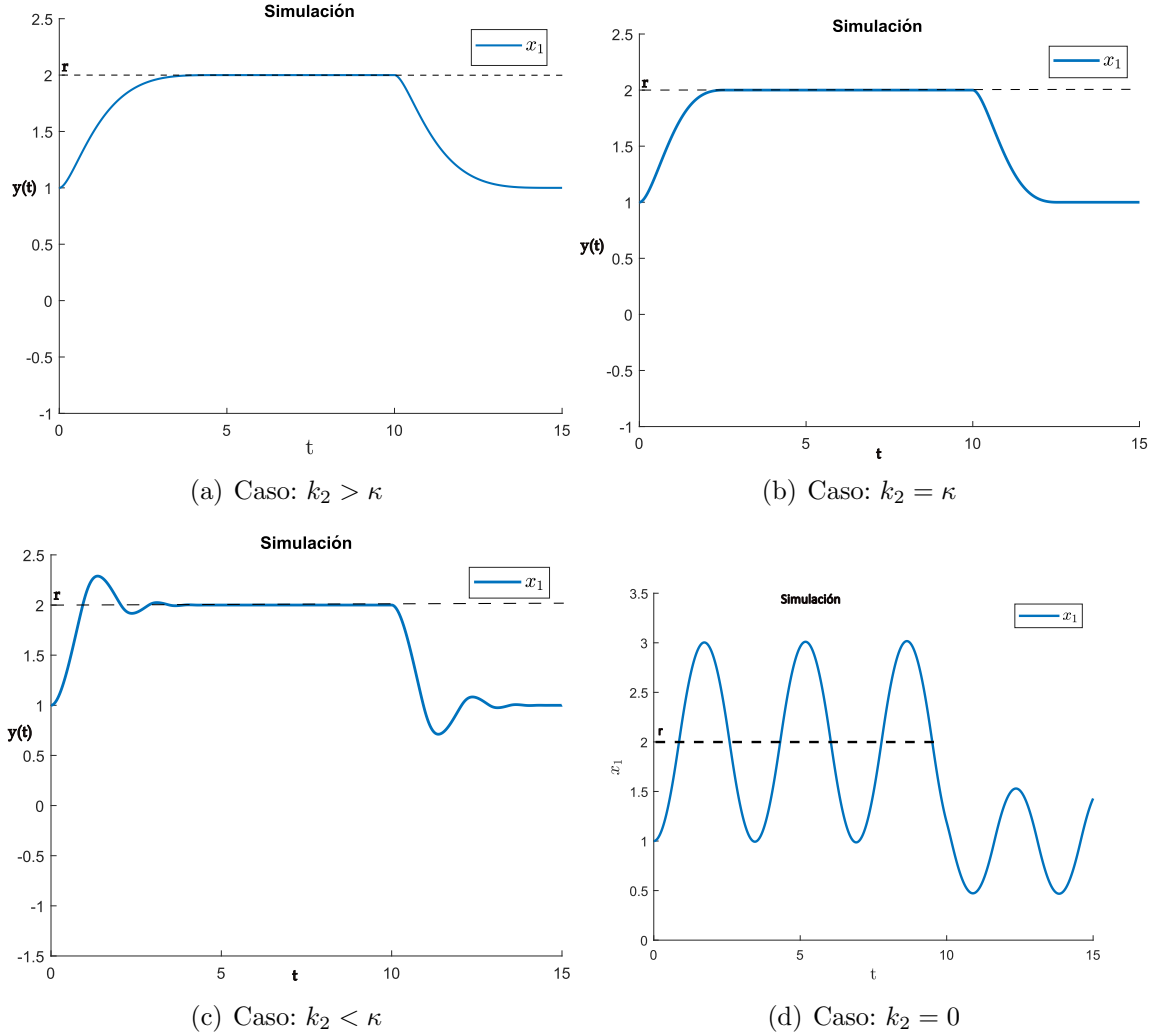


Figura 4.1: Simulación del sistema en forma de controlador.

observa que el controlador puede hacer que la salida del sistema alcance a la referencia (de tipo escalonada) en tiempo finito debido a que el grado de homogeneidad $\mu < 0$; más aún, el sistema presenta diferentes tipos de comportamientos transitorios en base a cómo cambia el factor de amortiguamiento ζ_c definido en el Teorema 5.

Forma de observador

En esta sección se presentan los resultados de la manera en la que se deben elegir las ganancias del observador para obtener una respuesta transitoria deseada. Considere el caso nominal del observador, es decir, el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -l_1 \lceil x_1 \rceil^{p_o} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -l_2 \lceil x_1 \rceil^{q_o}.\end{aligned}\tag{4.40}$$

Del Lema 1 obtenemos la siguiente condición que deben satisfacer los exponentes q_o y p_o (para que el sistema (4.40) sea δ^r -homogéneo de grado $\mu = p_o - 1$ con un vector de pesos $r = [1, p]^\top$):

$$q_o \in \mathbb{R}, \quad p_o = \frac{q_o + 1}{2}.\tag{4.41}$$

Observe que, dependiendo de los valores que toman q_o y p_o se distinguen los siguientes casos:

- si $q_o = 1$, entonces $p_o = 1$ y $\mu = 1$ ((4.40) es lineal);
- si $q_o \in (0, 1)$, entonces $\max\{\frac{1}{2}, q_o\} < p_o < 1$ y $\mu < 0$;
- si $q_o > 1$, entonces $1 < p_o < q_o$ y $\mu > 0$;
- si $q_o = 0$, entonces $p_o = \frac{1}{2}$ y $\mu = -1$.

El sistema (4.40) cuenta con propiedades de estabilidad que se enuncian en el siguiente lema.

Lema 8 ([10]). *Considere (4.40) con (4.41). Para cualesquier $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, el origen es asintóticamente estable, además:*

1. *si $q_o = 1$, entonces el origen es exponencialmente estable;*
2. *si $q_o \in (0, 1)$, entonces el origen es estable en tiempo finito;*
3. *si $q_o > 1$, entonces el origen es estable en casi tiempo fijo.*

Con estos resultados se comprueba que el tipo de convergencia al origen depende de cómo se seleccione q_o . En [21] se muestra la existencia del polinomio característico de (4.40) tal que el comportamiento de las trayectorias depende de las raíces de dicho polinomio, que a su vez dependen de los valores de las ganancias $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. El siguiente teorema establece un criterio para la elección de las ganancias del observador.

Teorema 6 ([21]). *Considere (4.40) con (4.41) y $l_2 > 0$. Se define*

$$\kappa_o := 2\sqrt{\frac{1}{p_o}l_2},\tag{4.42}$$

y el factor de amortiguamiento del observador $\zeta_o := l_1/\kappa_o$, con κ_o como se definió en (4.42). Se tiene lo siguiente:

1. si $0 < \zeta_o < 1$, entonces la respuesta del sistema es subamortiguada;
2. si $1 < \zeta_o$, entonces la respuesta es sobreamortiguada;
3. si $\zeta_o = 1$, entonces la respuesta del sistema es críticamente amortiguada;
4. $\zeta_o = 0$, entonces la respuesta del sistema es no amortiguada.

Ejemplo de diseño ganancias

Se pretende, además de mostrar que los estados de (4.40) convergen a cero (lo cual es garantizado por el Lema 4), verificar que el comportamiento transitorio del sistema depende de la elección de las ganancias. A continuación se presentan simulaciones para comprobar la manera en la que influyen las ganancias diseñadas en el comportamiento transitorio de la dinámica (4.40) con $p = 1/2$, $l_2 = 3$ y $l_1 = (5/4)\kappa, \kappa, (1/8)\kappa, 0$. En la Figura 4.2, se observa que los estados del sistema convergen a cero en tiempo finito gracias al grado de homogeneidad μ negativo. De manera análoga a la forma de controlador, el comportamiento transitorio varía dependiendo del factor de amortiguamiento ζ_o como se definió en el Teorema 6.

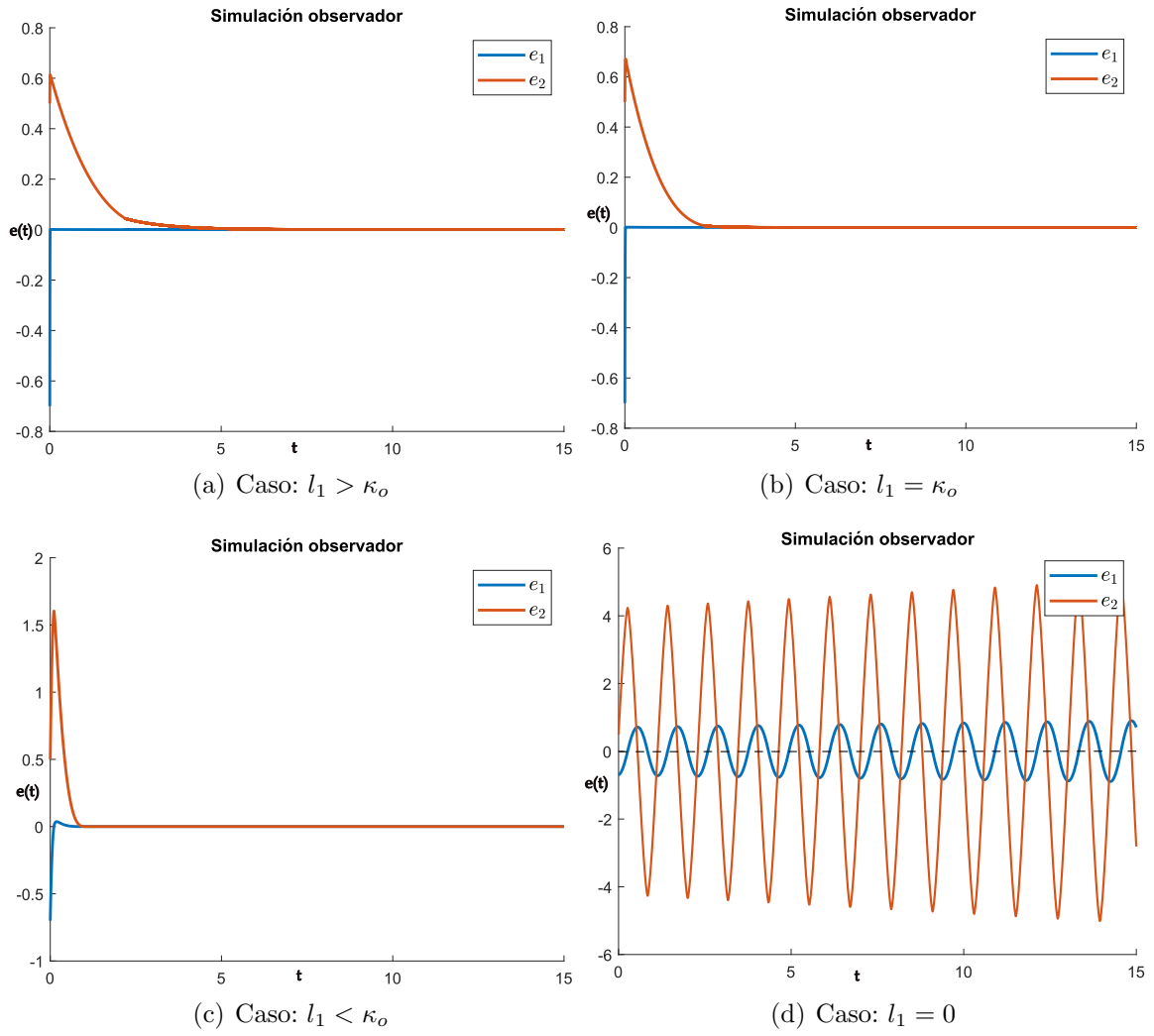


Figura 4.2: Simulación del sistema en forma de observador.

Capítulo 5

Implementación del controlador

En este capítulo se verifican experimentalmente algunas de las propiedades teóricas del controlador propuesto tales como que puede lograr la estabilidad en un sistema dinámico no lineal (como se describió en el Capítulo 3 y en el Capítulo 4).

Los resultados de la implementación del controlador que se reportan en este capítulo, fueron realizados para una planta no lineal de segundo orden creada con electrónica analógica-digital. El algoritmo de control se discretizó para su programación en un microcontrolador.

En la primera sección de este capítulo, se introducen algunos conceptos básicos de los métodos numéricos que se utilizan para el desarrollo de la versión en tiempo discreto del algoritmo de control. En la segunda sección se presenta el diseño con electrónica para emular el sistema dinámico no lineal y los dispositivos digitales utilizados para los experimentos. En la tercera sección se muestran los resultados de los experimentos llevados a cabo utilizando diferentes métodos de discretización del algoritmo de control.

5.1. Métodos de discretización de sistemas dinámicos

Se conoce que (bajo ciertas condiciones) existen métodos numéricos que pueden aproximar la solución $x(t) \in \mathbb{R}^n$ de un sistema dinámico con la forma

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{5.1}$$

sujeto a una condición inicial $x(t_0) = \alpha \in \mathbb{R}^n$. Lo anterior se puede expresar de manera extendida, es decir, el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

sujeto a condiciones iniciales

$$x_1(t_0) = \alpha_1, \quad x_2(t_0) = \alpha_2, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = \alpha_n.$$

Los métodos numéricos utilizados en el desarrollo de este proyecto involucran la idea de *discretización*: es decir, el intervalo de tiempo continuo $[a, b]$ en el que está definida una solución continua de (5.1) es reemplazado por el conjunto de instantes discretos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidos por $t_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ con $N = (b - a)/h$, donde el parámetro h es llamado longitud de paso de discretización (o de integración) [13].

Un *método de discretización* consiste en una ecuación en diferencias que genera una serie de aproximaciones consecutivas $\{x_n | n = 0, 1, 2, \dots, N\}$, tales que x_n aproxima a $x(t_n)$. Naturalmente, dicha ecuación en diferencias también involucra la función f . Para calcular x_n , la ecuación en diferencias puede requerir aproximaciones anteriores, es decir, $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}$. Si el número entero k es $k = 1$, el método es llamado método de un paso, mientras que si $k > 1$, el método es conocido como un método multipaso [13].

Todo método de discretización fiable (como los utilizados en este proyecto) debe de cumplir con ciertas propiedades como *estabilidad*, *consistencia* y *convergencia*, que garantizan que efectivamente x_n es una *buena* aproximación de $x(t_n)$. Para una explicación detallada de estas propiedades se puede consultar [2] ó [13]. A continuación se describen algunos métodos de discretización que se usan en esta tesis para la discretización del algoritmo de control.

Método de Euler

El método de Euler explícito es la técnica de aproximación más elemental para resolver problemas de valor inicial. La simplicidad de su derivación puede emplearse para ilustrar las ideas y técnicas involucradas en la construcción de algunos de los métodos más avanzados. El objetivo del método de Euler es obtener aproximaciones de soluciones al problema de valor inicial planteado en (5.1), con él, no se obtiene una aproximación continua a la solución $x(t)$, en su lugar, se generan aproximaciones x_k a $x(t_k)$ en los valores t_k (llamados puntos de malla) en el intervalo $[a, b]$. Cabe mencionar que, una vez que se obtiene la solución aproximada en los puntos de malla, una aproximación de la solución en otros puntos del intervalo puede hallarse mediante interpolación. La

ecuación en diferencias que produce el método de Euler explícito aplicado al sistema no lineal (5.1) se muestra en la siguiente expresión

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Si se discretiza la parte dinámica del controlador propuesto en el Teorema 3 utilizando el método de Euler explícito se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{1k+1} &= \hat{x}_{1k} + h(-\bar{l}_1[\hat{x}_{1k} - x_1(t_k)]^{p_o} + \hat{x}_{2k}), \\ \dot{\hat{x}}_{2k+1} &= \hat{x}_{2k} + h(-\bar{l}_2[\hat{x}_{1k} - x_1(t_k)]^{q_o} - \bar{k}_1[x_1(t_k)]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_{2k}]^q),\end{aligned}$$

donde $\hat{x}_{1k}$ denota a la aproximación de $\hat{x}_1$ en el instante t_k . El método de Euler es fácil de obtener e implementar gracias a su simplicidad. Su exactitud depende del tamaño del paso h . Para valores grandes de h , la aproximación puede ser inexacta, y para valores pequeños la exactitud mejora pero será necesario hacer más cálculos en el mismo intervalo de tiempo, lo que consume más tiempo y recursos de cómputo.

Método del trapecio

El método del trapecio explícito (también conocido como método de Heun o de Euler mejorado) es una técnica que se basa en la idea de aproximar el área bajo la curva de una integral mediante la suma de áreas de trapecios que se forman al dividir el intervalo de integración en subintervalos más pequeños. A diferencia de otros métodos, como el de los rectángulos (del que se puede deducir el método de Euler), que utilizan áreas rectangulares, el método del trapecio tiene la ventaja de que aproxima la curva con segmentos lineales, lo que generalmente conduce a una mayor exactitud. El método del trapecio explícito (que es un método del tipo predictor-corrector) aplicado al sistema (5.1) se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\text{Predicción : } x_{k+1}^* &= x_k + hf(t_k, x_k) \\ \text{Corrección : } x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{2}[f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1}^*)],\end{aligned}\tag{5.2}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Ésta técnica de aproximación es un método predictor-corrector, ya que hace una primera aproximación x_k^* utilizando el método de Euler y luego realiza el cálculo de x_k corrigiendo la primera aproximación de Euler. Aplicando el método del trapecio la parte dinámica del controlador propuesto en el Teorema 3 se obtiene la

siguiente discretización

Predicción :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{1k+1}^* &= \hat{x}_{1k} + h(-\bar{l}_1[\hat{x}_{1k} - x_1(t_k)]^{p_o} + \hat{x}_{2k}), \\ \dot{\hat{x}}_{2k+1}^* &= \hat{x}_{2k} + h(-\bar{l}_2[\hat{x}_{1k} - x_1(t_k)]^{q_o} - \bar{k}_1[x_1(t_k)]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_{2k}]^q),\end{aligned}$$

Corrección :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{1k+1} &= \hat{x}_{1k} + \frac{h}{2}(\hat{x}_{2k} - \bar{l}_1[\hat{x}_{1k} - x_1(t_k)]^{p_o} + \hat{x}_{2k+1}^* - \bar{l}_1[\hat{x}_{1k+1}^* - x_1(t_{k+1})]^{p_o}), \\ \dot{\hat{x}}_{2k+1} &= \hat{x}_{2k} + \frac{h}{2}(-\bar{l}_2[\hat{x}_{1k} - x_1(t_k)]^{q_o} - \bar{k}_1[x_1(t_k)]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_{2k}]^q - \\ &\quad \bar{l}_2[\hat{x}_{1k+1}^* - x_1(t_{k+1})]^{q_o} - \bar{k}_1[x_1(t_{k+1})]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_{2k+1}^*]^q).\end{aligned}\quad (5.3)$$

El método del trapecio mejora la exactitud, en comparación con el método de Euler, al promediar los valores en los extremos del intervalo. En [7], se especifica que el método del trapecio tiene un error del orden de h^2 , mientras que el error del método de Euler es del orden de h , lo que significa que la exactitud mejora significativamente más con el método del trapecio conforme se reduce el tamaño del paso h . Una desventaja, como se puede ver en (5.2), es el incremento en la carga computacional.

Métodos Adams-Bashforth

Los métodos Adams-Bashforth forman parte de la familia de métodos de discretización conocidos como métodos multipaso. A diferencia de métodos como el de Euler o los métodos Runge-Kutta, que son métodos de un solo paso, los métodos Adams-Bashforth aprovechan la información obtenida en pasos anteriores para calcular la aproximación x_{k+1} , lo que puede aumentar la eficiencia del cálculo y la exactitud de la aproximación. Básicamente, estiman el valor de la solución x_{k+1} mediante una combinación lineal de las derivadas (o pendientes) en puntos anteriores. Esto se puede interpretar como (que básicamente es la forma de deducirlos) una extrapolación de la curva de solución a partir de las aproximaciones previas $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-(\kappa-1)}$. El orden de exactitud κ de los métodos Adams-Bashforth coincide con el número de pasos anteriores utilizados en el cálculo de la nueva aproximación. Más información sobre estos métodos puede consultarse en [7]. Por ejemplo, el método Adams-Bashforth de orden $\kappa = 3$ usa x_k, x_{k-1} y x_{k-2} para calcular x_{k+1} . A continuación se muestra el método de Adams-Bashforth de tercer orden aplicado al sistema (5.1)

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{12}[23f(t_k, x_k) - 16f(t_{k-1}, x_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, x_{k-2})], \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Nótese que este método requiere de tres valores de f , sin embargo, no es necesario calcular los tres en cada iteración: si en una iteración se realiza el cálculo de $f(x_k)$, para la siguiente iteración se guarda este dato convirtiéndose en $f(x_{k-1})$, así, en las siguientes iteraciones se irán transfiriendo los datos del más nuevo al más viejo. Este procedimiento reduce el costo computacional del método. El método Adams-Bashforth

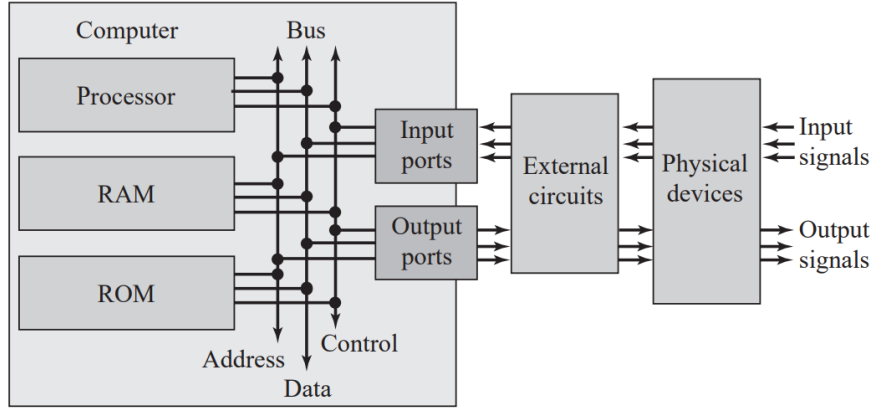


Figura 5.1: Componentes básicos de una microcomputadora.[24]

de orden $\kappa = 3$ aplicado a la parte dinámica del controlador propuesto en el Teorema 3 entrega la siguiente discretización

$$\begin{aligned}
 f_1(t, \hat{x}) &= -\bar{l}_1 [\hat{x}_1 - x_1(t)]^{p_o} + \hat{x}_2, \\
 f_2(t, \hat{x}) &= -\bar{l}_2 [\hat{x}_1 - x_1(t)]^{q_o} - \bar{k}_1 [x_1(t)]^p - \bar{k}_2 [\hat{x}_2]^q, \\
 \hat{x}_{1k+1} &= \hat{x}_{1k} + \frac{h}{12} [23f_1(t_k, \hat{x}_{1k}) - 16f_1(t_{k-1}, \hat{x}_{1k-1}) + 5f_1(t_{k-2}, \hat{x}_{1k-2})] \\
 \hat{x}_{2k+1} &= \hat{x}_{2k} + \frac{h}{12} [23f_2(t_k, \hat{x}_{2k}) - 16f_2(t_{k-1}, \hat{x}_{2k-1}) + 5f_2(t_{k-2}, \hat{x}_{2k-2})].
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Un aspecto importante a considerar sobre los métodos Adams-Bashforth es la necesidad de contar con condiciones iniciales adicionales. En nuestro ejemplo, $\hat{x}_{-1}$ y $\hat{x}_{-2}$ se pueden elegir cero ya que es la inicialización del observador.

5.2. Descripción de la planta electrónica

En esta sección se introducen el microcontrolador que se usará en los experimentos, y se describen sus características básicas. Posteriormente, se ofrece una breve explicación de los periféricos necesarios para implementar el controlador discretizado. Finalmente, se presenta el esquema del circuito electrónico analógico-digital, que servirá como planta para el desarrollo de la validación experimental del controlador analizado.

Microcontroladores

La arquitectura usual de una microcomputadora está conformada por un procesador (o microprocesador), una memoria de acceso aleatorio (RAM), una memoria de solo lectura (ROM) y puertos de entrada/salida (E/S) para los dispositivos periféricos, como se muestra en la Figura 5.1. Por otro lado, el *software* es una secuencia ordenada de instrucciones específicas que pueden almacenarse en las memorias ROM y RAM y que definen exactamente las tareas que deben realizarse. El procesador ejecuta el *software* recuperando e interpretando las instrucciones una a una. Un *microcontrolador* es

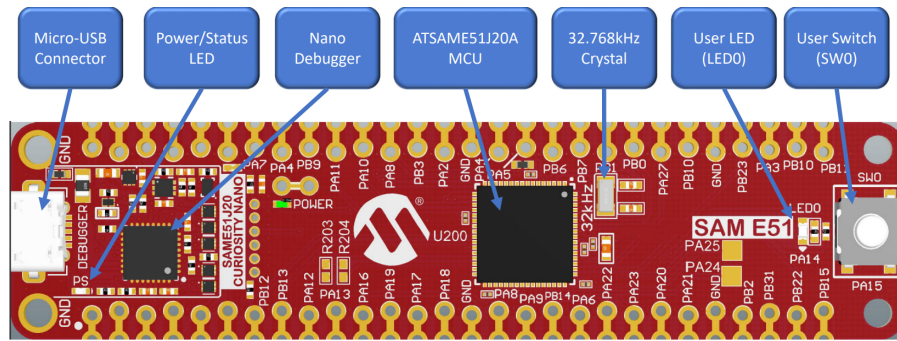


Figura 5.2: Tarjeta Curiosity Nano SAME51

un circuito electrónico que incorpora todos los componentes de una microcomputadora (procesador, memorias, E/S y periféricos) en un solo circuito integrado [24].

Existe, en el mercado, una gama muy amplia de microcontroladores con diversas características fabricados por varias empresas. En particular, los microcontroladores del fabricante Microchip[®] se caracterizan por tener una amplia variedad de modelos, flexibilidad en la configuración de sus periféricos y por su fácil programación y configuración [17]. Para la parte experimental de esta tesis, se utilizó la tarjeta de evaluación Curiosity Nano SAME51 de Microchip[®], que es una plataforma de *hardware* diseñada para evaluar el microcontrolador de la serie ATSAM. Esta plataforma de desarrollo cuenta con un microcontrolador ATSAME51J20A, un led de usuario, un interruptor mecánico de usuario, un depurador/programador, y alimentación por USB como se muestra en la Figura 5.2.

Características específicas del ATSAME51J20

En esta sección se describen algunas características y periféricos del microcontrolador ATSAME51J20 (al que nos referiremos simplemente como SAME51), en particular, nos concentraremos en aquellos periféricos necesarios para el desarrollo del proyecto. El SAME51 cuenta con las siguientes características [18]:

- un procesador ARM-Cortex[®] M4F de 32 bits que puede operar hasta a 120MHz, con unidad de punto flotante de precisión simple;
- una memoria flash de programa de 1 MB, y una memoria principal SRAM de 256 KB;
- un sistema de eventos de 32 canales;
- un convertidor de analógico a digital (ADC) de 12 bits y hasta 1 Msps;
- un convertidor de digital a analógico (DAC) de 12 bits y hasta 1 Msps;
- temporizadores/contadores de 8, 16, 24, y 32 bits.

La función del ADC es convertir una señal analógica en una digital, la señal de entrada suele ser un voltaje analógico (V_{in}) y la salida es un número binario. La *Resolución binaria* del ADC es el número de bits de la palabra de salida. Este número determina la cantidad de valores binarios que puede producir en la salida, por ejemplo, con un ADC de resolución binaria de 8 bits se pueden obtener 256 valores y con resolución binaria de 12 bits se obtienen 4096. El *Rango* del ADC es el intervalo entre los niveles de entrada máxima y mínima en voltios. La *Resolución eléctrica* del ADC es el cambio más pequeño (en voltios) distinguible en la entrada que hace que la salida digital cambie en 1, por lo que se tiene la siguiente relación

$$\text{Rango} = [2^{\text{Resolución binaria}} - 1] \cdot \text{Resolución eléctrica.} \quad (5.5)$$

El ADC del SAME51 tiene una Resolución binaria de 12 y un rango de medición de 0V a 3.3V, por lo que su Resolución eléctrica es de 0.8058mV. La velocidad de muestreo de este ADC es de una megamuestra por segundo (Msps).

Un DAC tiene como función convertir una señal digital en una analógica. La salida del DAC puede ser de corriente o de voltaje, y es posible que se requiera un procesamiento analógico adicional de filtrado, amplificación o modulación de la señal [24] con la finalidad de hacerla más útil. La resolución binaria y eléctrica se definen de manera análoga a las definiciones para el ADC (intercambiando la salida por la entrada), y la equivalencia del rango también está dada por (5.5). El DAC del SAME51 tiene una resolución binaria de 12 y un rango en su salida de voltaje de 0V a 3.3V, por lo que su resolución eléctrica es de 0.8058mV, además, es capaz de convertir a una velocidad de una Msps.

Planta electrónica analógica-digital

La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se puede describir en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado, como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos [19].

Está ampliamente estudiado que todos los sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI, por sus siglas en inglés) representados en ecuaciones de espacio de estados pueden ser implementados con circuitos con amplificadores operacionales (op-amp) [8]. Por esta razón se pueden emular fácilmente y sin costos excesivos los sistemas antes mencionados utilizando electrónica analógica. Esto, ya que los amplificadores operacionales se pueden configurar de distintas maneras para construir sistemas dinámicos de orden arbitrario.

Para los desarrollos de esta tesis, la planta a considerar es de segundo orden, es por esta razón que se propone utilizar un filtro Sallen-Key que servirá de base para la

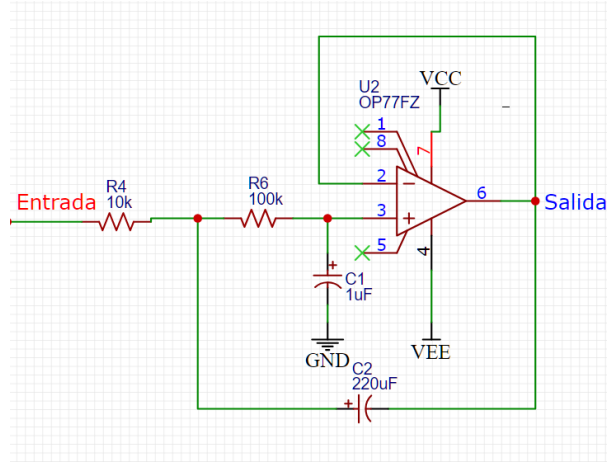


Figura 5.3: Filtro Sallen-Key

construcción de un sistema no lineal de segundo orden. El filtro Sallen-Key a utilizar, cuyo diagrama esquemático se muestra en la Figura (5.3), tiene como modelo la siguiente representación en espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4.55x_1 - 0.5x_2 + 4.55v_{in},\end{aligned}\tag{5.6}$$

donde x_1 es la caída de voltaje en C1, $x_2 = \frac{v_{C2}}{R6 \cdot C1}$, con v_{C2} la caída de voltaje en C2, y v_{in} es la señal de voltaje en la entrada del filtro.

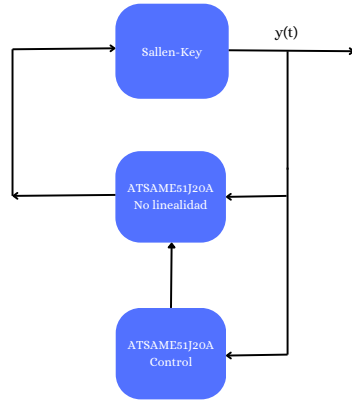
Ahora, el sistema no lineal que se propone emular, se describe como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.5x_2 - 4.55 \sin(x_1) + U,\end{aligned}\tag{5.7}$$

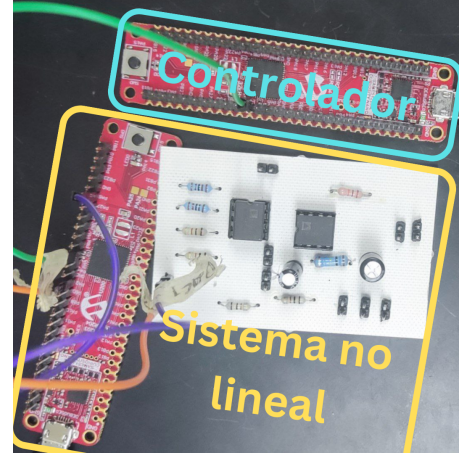
donde U es el controlador no lineal por retroalimentación de salidas basado en observador descrito en el Teorema 3. Sabiendo que no podemos replicar cualquier planta no lineal con circuitos electrónicos básicos, se propone utilizar un microcontrolador digital para causar las no linealidades en la planta. Para conseguir el sistema (5.7) se utiliza la configuración del filtro Sallen-Key mostrada en la Figura (5.3), esta se conecta en retroalimentación con un microcontrolador SAME51 para eliminar el término $4.55x_1$ y agregar el término no lineal $4.55 \sin(x_1)$ al lazo cerrado. Para esto, con el ADC del SAME51 se mide x_1 (que es la salida del filtro) y, a través del DAC del SAME51, se inyecta en la entrada del filtro la siguiente señal

$$v_{in} = x_1 - \sin(x_1) + \frac{1}{4.55}U.\tag{5.8}$$

A esta nueva planta se le conecta en retroalimentación otro microcontrolador SAME51 en el que se programará el controlador U . Así, la configuración final del sistema de



(a) Esquema del sistema



(b) Planta no lineal emulada mediante electrónica analógica-digital en lazo cerrado con el controlador implementado en un SAME51

Figura 5.4: Configuración del sistema de control en lazo cerrado.

control se muestra en la Figura (5.4). El ADC y el DAC del microcontrolador utilizado para agregar el término no lineal al sistema se configuran con un tiempo de muestreo de 1ms, mientras que el ADC y el DAC del microcontrolador utilizado para programar el controlador U se configuran a 10ms.

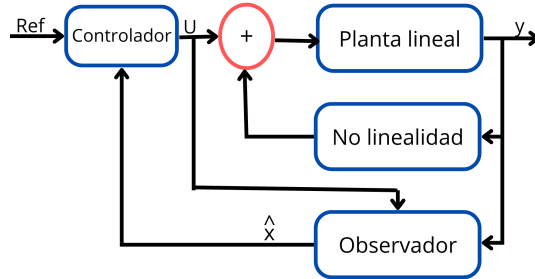


Figura 5.5: Diagrama a bloques del sistema.

5.3. Resultados experimentales

Aunque muchas veces los componentes eléctricos o electrónicos están marcados por un valor nominal (por ejemplo, resistencia o capacitancia) de fábrica, estos vienen con un

margen de tolerancia, por lo que los valores nominales de los componentes no son los correctos. Por esto, en las plantas emuladas con circuitos electrónicos se pueden encontrar errores en los coeficientes o parámetros del modelo (lo cual da lugar a incertidumbre paramétrica). os al modelar el sistema, lo cual se refleja . Sin embargo, esto va de acuerdo con el problema planteado en esta tesis, es decir, en plantear un controlador cuyo análisis considera el hecho de no conocer el modelo exacto del sistema.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en los experimentos realizados con el sistema de control electrónico descrito en la sección anterior. En estos experimentos, para la implementación del controlador propuesto, se utilizaron 3 diferentes métodos numéricos (descritos en la Sección 5.1) para convertir el controlador diseñado en tiempo continuo a un controlador en tiempo discreto. El objetivo es mostrar de manera empírica el comportamiento del sistema con los algoritmos de control derivados de las distintas discretizaciones aplicadas al controlador estudiado en el Capítulo 4. El controlador a programar en el SAME51 es $U = 0.5\hat{x}_2 + 4.55 \sin(x_1) - \bar{k}_1[r - x_1]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_2]^q$, donde r es la señal de referencia (generada en el mismo microcontrolador) y $\hat{x}_2$ es el estado observado obtenido de las discretizaciones (5.2), (5.3) ó (5.4). Para las ganancias, se utilizan las configuraciones expuestas en la Sección 4.3 para ver si permiten que el sistema exhiba comportamientos sobreamortiguado o subamortiguado.

5.3.1. Comportamiento sobreamortiguado

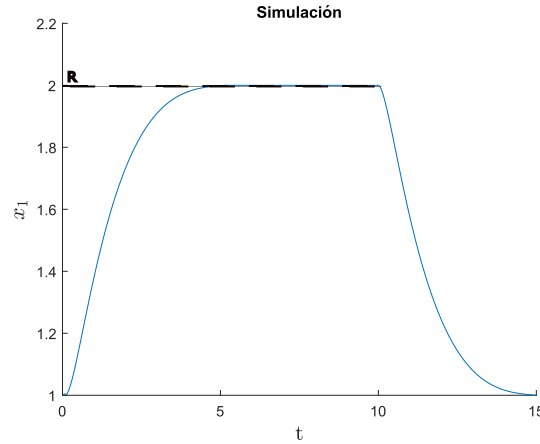


Figura 5.6: Señal del estado x_1 simulada.

En la Figura (5.6) se presenta la simulación de la respuesta, a una referencia pulso de amplitud 2 y de duración 10s, del sistema (5.7) en lazo cerrado con la parte estática del controlador (4.1) utilizando retroalimentación de estados, es decir, con $U = 0.5x_2 + 4.55 \sin(x_1) - \bar{k}_1[r - x_1]^p - \bar{k}_2[x_2]^q$, eligiendo $p = 1/2$. Esta simulación sirve de comparativa para la respuesta obtenida en los experimentos utilizando el controlador por salida. Utilizando la condición del Teorema (5) se propusieron las ganancias del controlador $k_1 = 3$, $k_2 = 5$ y $\gamma = 1$, con lo que se obtiene que (ya que $\kappa = 3.45$)

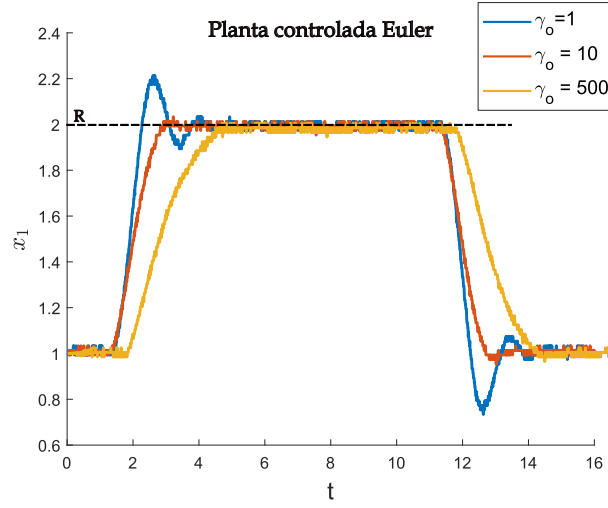


Figura 5.7: Respuesta transitoria bajo diferentes valores de γ_o utilizando el algoritmo de discretización de Euler.

$k_2 > \kappa$, esto implica (en el caso nominal por retroalimentación de los estados) que la salida del sistema tenga un comportamiento de tipo sobreamortiguado como se aprecia en la Figura 5.6. Como $p = 1/2$, recordando que eligiendo este valor de p obtenemos un grado de homogeneidad μ negativo del campo vectorial, la convergencia a la referencia es en tiempo finito.

En el experimento, se realizaron corridas utilizando los métodos de Euler, Trapecio y Adams-Bashforth para ver la respuesta del sistema usando distintas discretizaciones del controlador. Como ya se mencionó, se configuró un tiempo de muestreo h del controlador de 10ms, y se fijaron las ganancias del observador $l_{10} = 6$ y $l_{20} = 9$. Además, se variaron los valores de la ganancia del observador γ_o , manteniendo la ganancia del control $\gamma = 1$, esto con la finalidad de mostrar que la velocidad del observador mejora, mientras que el controlador recupera el tipo de comportamiento transitorio deseado y alcanza la referencia en tiempo finito.

En la Figura (5.7) se muestran los resultados obtenidos con el método de Euler y tres distintos valores de γ_o . Al variar el parámetro γ_o en el observador discretizado se observa que, al aumentarlo, la respuesta del sistema tiende a recuperar el comportamiento obtenido en la simulación con un control por retroalimentación de estados. Esto es debido a que, al incrementar γ_o , el observador aproxima más rápidamente el estado. Es importante mencionar que independientemente del valor de γ_o el controlador es capaz de llevar la salida del sistema a la referencia.

Se procedió de igual manera con los métodos del trapecio y de Adams-Bashforth. En las figuras 5.8 y 5.9 se puede ver que las respuestas con estos métodos presentan com-

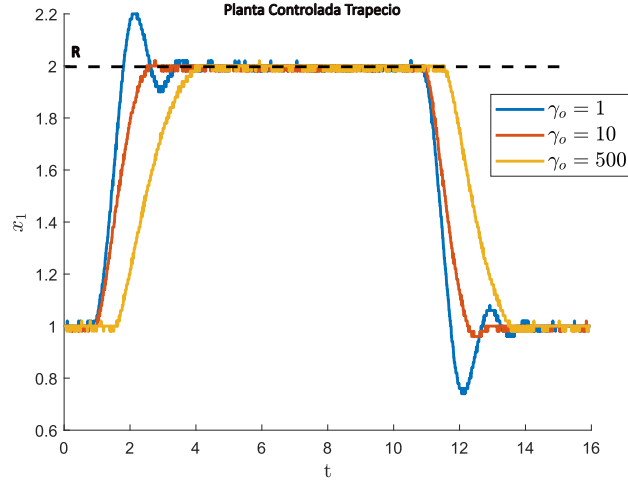


Figura 5.8: Respuesta transitoria bajo diferentes valores de γ_o utilizando el algoritmo de discretización del Trapecio.

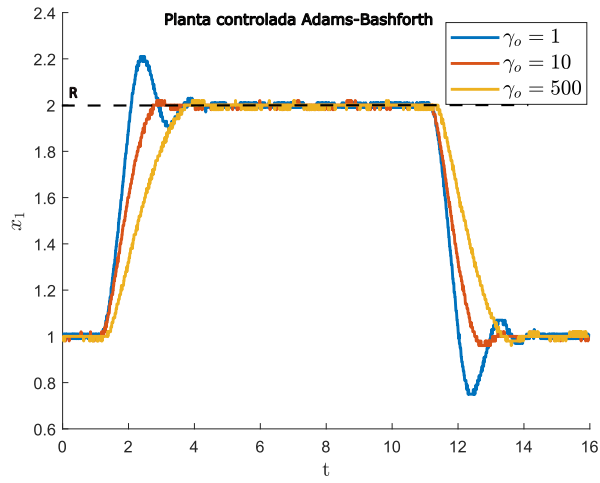


Figura 5.9: Respuesta transitoria bajo diferentes valores de γ_o utilizando el algoritmo de discretización de Adams-Bashforth.

portamientos análogos a los obtenidos con Euler. Sin embargo, aunque se puede decir que los tres métodos resultan adecuados para la implementación del controlador, con el método del trapecio se observa una ligera mejor recuperación del comportamiento nominal sobreamortiguado al incrementar γ_o .

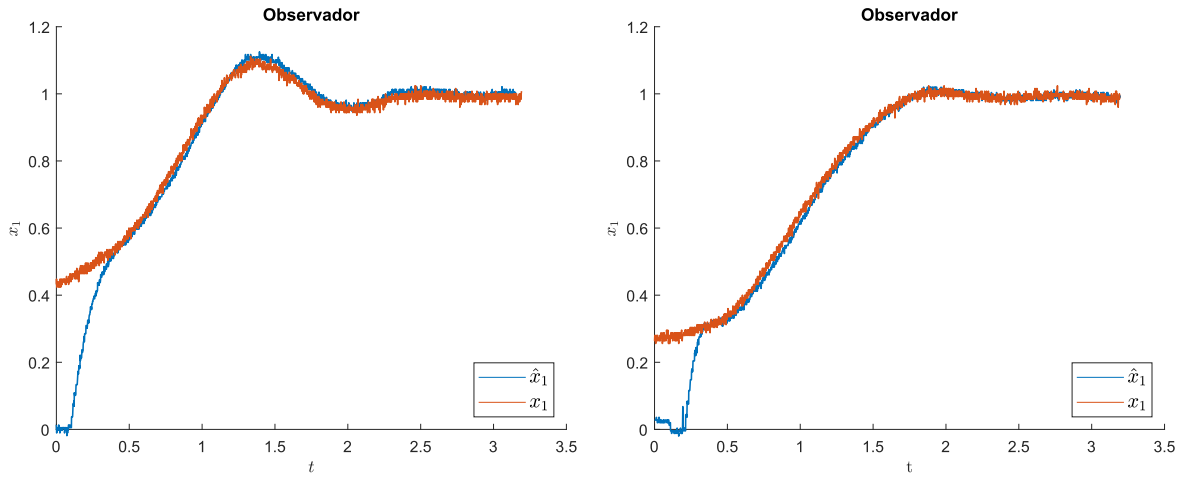
5.3.2. Efectos en el observador

Este experimento se enfoca en ver los efectos de la ganancia y la discretización en el observador. Para esto, se mantuvieron los valores de las ganancias del observador $l_{10} = 6$ y $l_{20} = 9$, estas ganancias son tales que (por el teorema (6)) se tiene $\kappa_o = 6.93$, lo que ocasiona que $l_{10} < \kappa_o$, esta condición implica que el tipo de respuesta del error de observación en el caso nominal sea de tipo subamortiguada. La señal del estado observado $\hat{x}_1$ se obtiene del microcontrolador donde se implementaron el observador y el controlador, mientras que el estado x_1 se mide directamente de la salida del sistema. En la Figura (5.10) se observan las señales x_1 y $\hat{x}_1$ de la planta bajo diferentes valores de γ_o . El experimento se realizó utilizando el método de Euler. En la figura se aprecia una mejora en la velocidad de aproximación del estado conforme aumenta el valor de γ_o , además, se puede ver que con el valor más alto del γ_o la respuesta transitoria hacia el estado real es de tipo subamortiguada, con esto, se muestra que el valor de la ganancia γ_o es útil para recuperar el comportamiento del diseño nominal.

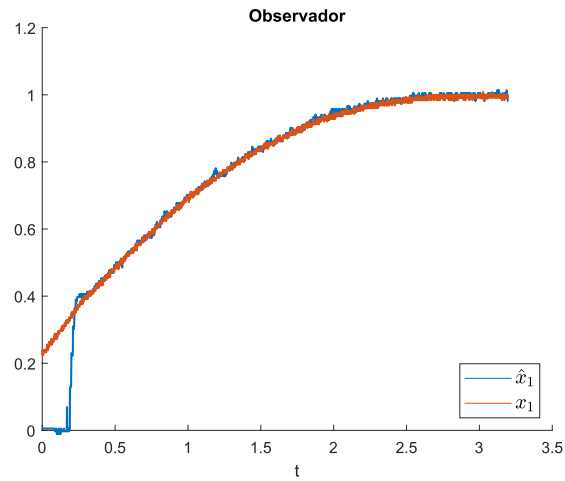
Como segunda parte de este experimento se compara la convergencia del estado $\hat{x}_1$ que se obtiene con el observador al estado x_1 sistema con una ganancia fija de $\gamma_o = 500$. El objetivo es ver posibles diferencias en el comportamiento entre los distintos métodos numéricos utilizados. Los resultados se muestran en las gráficas de la Figura (5.6). Obsérvese que todos los métodos numéricos utilizados aproximan de manera satisfactoria al estado real del sistema. Además, se verifica que se pueden elegir ganancias en el observador tales que se puede elegir el tipo de convergencia de los estados aproximados, en este caso, subamortiguada. Sin embargo, se puede observar que el estado aproximado $\hat{x}_1$ tiene ligeras variaciones respecto a la salida x_1 con el método de Euler y el de Adams-Bashforth (este error es más notorio en el método de Adams-Bashforth). Por último, se puede decir que el método del Trapecio es el que tiene un mejor desempeño debido a que el estado del observador logra seguir de manera casi perfecta a la salida.

5.3.3. Incremento de la incertidumbre

En este experimento, el objetivo es mostrar que el controlador, gracias a sus propiedades de robustez ante incertidumbre, es capaz de lograr el objetivo de control ajustando la ganancia de sintonización γ cuando se tiene mayor incertidumbre. Para el experimento se supone que el coeficiente del término no lineal en $f(x) = -0.5x_2 - 4.55\sin(x_1)$ (en el sistema (5.7)) no es exactamente conocido y en su modelo se tiene un error del 44 por ciento, así el modelo se supone como $\bar{f}(x_1, x_2) = 0.5x_2 + 2\sin(x_1)$. Con esto, nuestro control $U = 0.5\hat{x}_2 + 2\sin(x_1) - \bar{k}_1[r - x_1]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_2]^q$ comete una equivocación en la

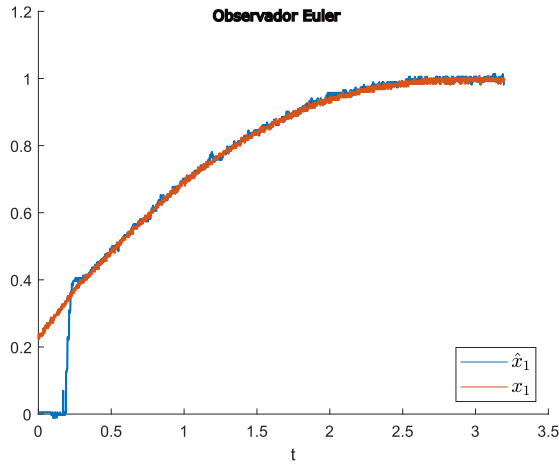


(a) Estado aproximado $\hat{x}_1$ ante el estado x_1 con $\gamma_o = 1$ en el observador. (b) Estado aproximado $\hat{x}_1$ ante el estado x_1 con $\gamma_o = 10$ en el observador.

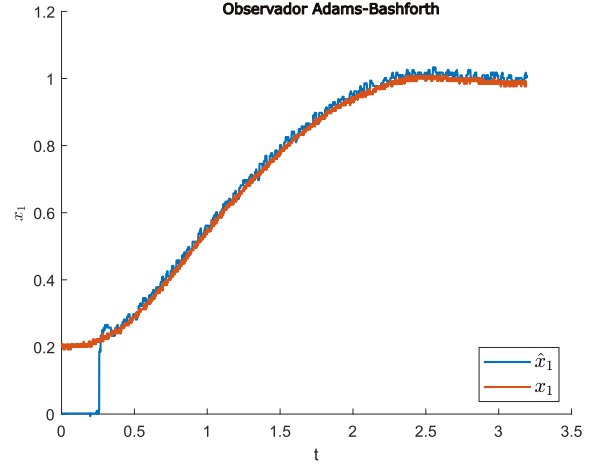


(c) Estado aproximado $\hat{x}_1$ ante el estado x_1 con $\gamma_o = 500$ en el observador.

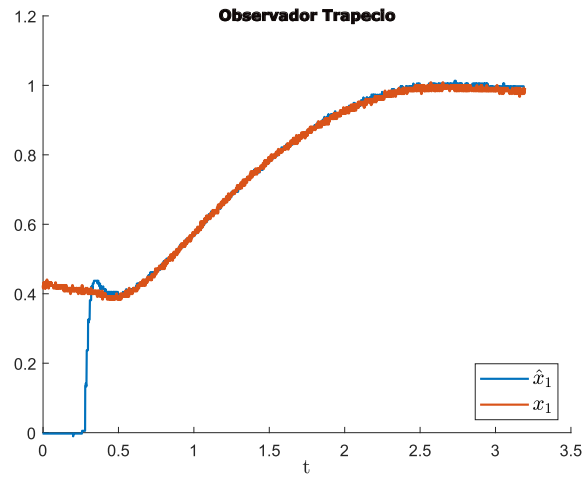
Figura 5.10: Respuesta del observador con el método de Euler y diferentes valores de γ_o .



(a) Estado aproximado $\hat{x}_1$ ante el estado de la salida x_1 utilizando el algoritmo de Euler.

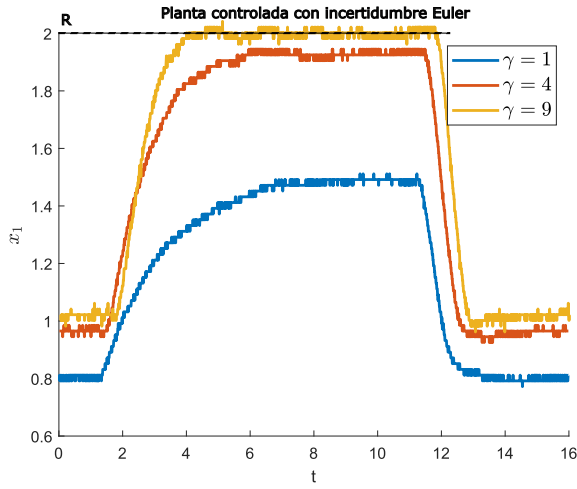


(b) Estado aproximado $\hat{x}_1$ ante el estado de la salida x_1 utilizando el algoritmo de Adams-Bashforth.

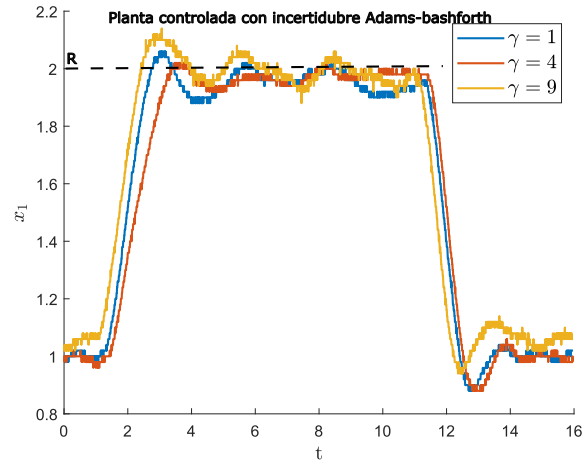


(c) Estado aproximado $\hat{x}_1$ ante el estado de la salida x_1 utilizando el algoritmo del Trapecio.

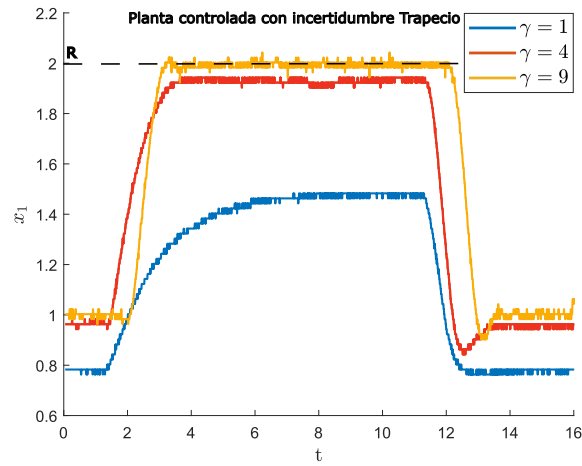
Figura 5.11: Respuesta del observador con ganancia fija de γ_o y diferentes métodos numéricos.



(a) Respuesta de la planta con incertidumbre con diferentes valores de γ utilizando el método de Euler.



(b) Respuesta de la planta con incertidumbre con diferentes valores de γ utilizando el método de Adams-Bashforth.



(c) Respuesta de la planta con incertidumbre con diferentes valores de γ utilizando el método del Trapecio.

Figura 5.12: Sistema con incertidumbre controlado con diferentes discretizaciones y diferentes valores de γ .

compensación de la no linealidad incrementando la incertidumbre $\tilde{f}(x, \hat{x})$. En el experimento, se ajusta la ganancia de sintonización γ , pero se mantiene fija la ganancia del observador $\gamma_o = 500$.

Los resultados del experimento se muestran en la Figura 5.12. Nótese que para $\gamma = 1$ se tiene un considerable error en estado estacionario (principalmente con los métodos de Euler y del Trapecio), sin embargo, ajustando γ se va reduciendo el error hasta que el controlador lleva la salida del sistema a la referencia. Esto ocurre utilizando las tres técnicas de discretización. En este experimento es más notorio que el método Adams-Bashforth produce oscilaciones en estado estacionario. Por otro lado, el método del Trapecio muestra mejores resultados para este problema de control al incrementar la ganancia, esto puede ser debido a que es un método predictor-corrector de segundo orden.

5.3.4. Comportamiento subamortiguado

El objetivo de este experimento es mostrar que se puede tener una respuesta transitoria de tipo subamortiguada configurando adecuadamente las ganancias del controlador. Utilizando la condición del Teorema (5) se propusieron las ganancias del controlador $k_1 = 6$, $k_2 = 2.7$ tal que $\kappa = 5.67$, por lo tanto $k_2 < \kappa$. Esto implica que la salida del sistema exhiba una respuesta transitoria de tipo subamortiguada en el caso nominal con retroalimentación de los estados. En la Figura (5.13) se muestra dicho comportamiento obtenido por simulación con los parámetros $\gamma = 1$ y con $p = 1/2$.

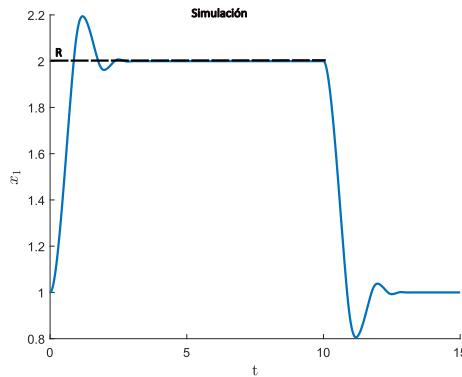
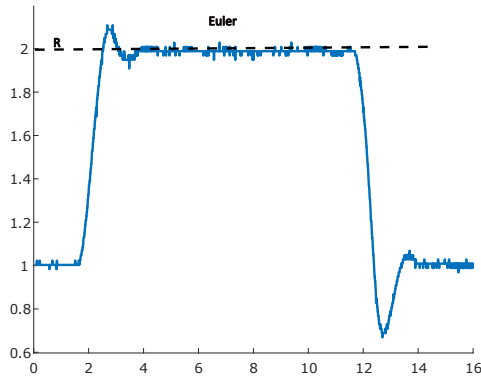
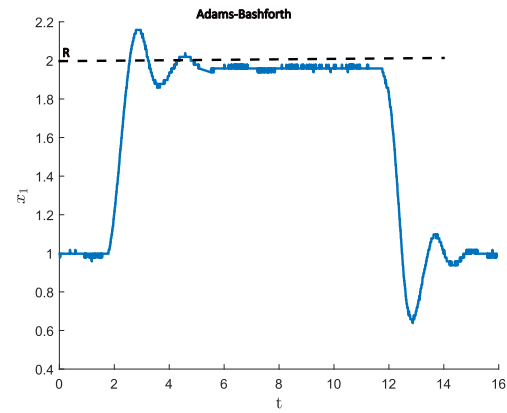


Figura 5.13: Señal del estado x_1 simulada.

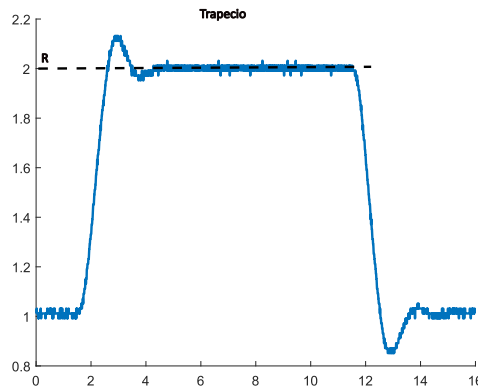
Para el experimento se utilizan los parámetros del observador $l_{10} = 6$, $l_{20} = 9$ y una ganancia $\gamma_o = 250$. De igual forma que en el experimento anterior, se supone un error paramétrico en el coeficiente del término no lineal del 44 por ciento, por lo que el controlador queda como $U = 0.5\hat{x}_2 + 2\sin(x_1) - \bar{k}_1[r - x_1]^p - \bar{k}_2[\hat{x}_2]^q$, lo que incrementa la incertidumbre $\tilde{f}(x, \hat{x})$. Se usan los parámetros k_1 , k_2 de la simulación pero con una



(a) Respuesta transitoria del sistema con el método de Euler.



(b) Respuesta transitoria del sistema con el método de Adams-Bashforth.



(c) Respuesta transitoria del sistema con el método del Trapecio.

Figura 5.14: Respuesta transitoria del sistema con incertidumbre usando diferentes discretizaciones del controlador.

ganancia $\gamma = 15$. En la Figura (5.14) se presentan las respuestas transitorias obtenidas de las mediciones, utilizando tres discretizaciones distintas del observador con los métodos numéricos propuestos. Se observa que a pesar de la incertidumbre el controlador, con los métodos de Euler y del Trapecio, logra llevar la salida a la referencia, y en los tres casos se recupera el tipo de comportamiento transitorio de la simulación (subamortiguado). Con el método de Adams-Bashforth se tiene un error en estado estacionario para el valor utilizado de ganancia γ , a diferencia de los métodos de Euler y de trapecios que tienen un desempeño bastante satisfactorio. Sin embargo, se puede observar que el método del Trapecio sobresale en mantener la salida en la referencia de manera casi perfecta y recuperando la forma de onda de la respuesta por simulación.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

Conclusiones

Las conclusiones del trabajo desarrollado en esta tesis, principalmente de los capítulos 4 y 5, se enuncian a continuación.

- En este trabajo se demuestra que, utilizando el controlador no lineal por retroalimentación de salidas propuesto, se garantiza estabilidad en el sentido de Lyapunov y robustez en lazo cerrado con un sistema no lineal a pesar de la incertidumbre, es decir, a pesar de no conocer un modelo exacto del sistema.
- Se mostró que se puede ajustar la ganancia γ tal que con esto se puede hacer crecer la región de atracción, permitiendo compensar el término de incertidumbre, por esto, se dice que el controlador es robusto ante incertidumbre.
- Se mostró empíricamente que el controlador es implementable a pesar de que la planta no lineal (que se emuló con un sistema electrónico) sea analógica y el controlador digital, esto se comprobó discretizando el algoritmo de control con tres métodos numéricos explícitos.
- Se observó experimentalmente que el tipo de respuesta transitoria del sistema no lineal con incertidumbre puede ser elegido con base en como se configuran las ganancias $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2 \in \mathbb{R}$. El ajuste de la ganancia γ_o mejora la velocidad de observación de los estados reales, por lo tanto el observador recupera el valor de los estados más rápido, lo que conlleva a que el controlador lleve la salida a la referencia con la respuesta transitoria deseada (como si fuera control por retroalimentación de estados).
- Empíricamente se observó que el método del Trapecio es el que produjo mejores resultados. Aunque esto es claro, respecto al método de Euler, por ser un método de orden de exactitud mayor, no es clara la razón por la cual supera al método utilizado de Adams-Bashforth que es un método de orden de exactitud mayor.

Trabajo a futuro

Las posibles direcciones a las que puede enfocarse a futuro la continuación de este trabajo de tesis se mencionan a continuación.

- Buscar la manera de mejorar el controlador para que sea capaz de ser robusto ante perturbaciones externas y no solo incertidumbre.
- Analizar la posibilidad de utilizar métodos numéricos más sofisticados, por ejemplo, los Runge-Kutta de orden superior, para la discretización del algoritmo de control.
- Analizar teóricamente las razones por las cuales el método del Trapecio produjo mejores resultados experimentales.
- Considerar el caso de un sistema de orden mayor a dos y analizar la posibilidad de aplicación del un controlador por retroalimentación de salida.

Capítulo 7

Apéndice

Lema 9 ([20]). Sean v_1 y v_2 funciones reales, continuas en $\mathbb{R}^n$ y δ^r -homogéneas de grados $m_1, m_2 > 0$, respectivamente, y v_1 positiva definida. Entonces, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$,

$$c_1 v_1^{\frac{m_2}{m_1}}(x) \leq v_2(x) \leq c_2 v_1^{\frac{m_2}{m_1}}(x),$$

donde $c_1 = \min_{x \in E} v_2(x)$ $c_2 = \max_{x \in E} v_2(x)$, y $E = \{x \in \mathbb{R}^n : v_1(x) = 1\}$.

Lema 10 ([20]). Para $s \in \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\frac{1}{\underline{\alpha}(a)} \|s\|_r \leq \left\| \frac{1}{a} s \right\|_r \leq \frac{1}{\alpha(a)} \|s\|_r$$

donde α y $\underline{\alpha}$ son funciones de clase $\mathcal{K}_\infty$ dadas por

$$\alpha(a) = \begin{cases} a^{\frac{1}{\min r_i}}, & \text{para } a \leq 1, \\ a^{\frac{1}{\max r_i}}, & \text{para } a > 1. \end{cases}$$

$$\underline{\alpha}(a) = \begin{cases} a^{\frac{1}{\max r_i}}, & \text{para } a \leq 1, \\ a^{\frac{1}{\min r_i}}, & \text{para } a > 1. \end{cases}$$

Bibliografía

- [1] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4):1814–1850, 2008.
- [2] U. Ascher and L. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. 3600 University City Science Center, Philadelphia: SIAM, 1998.
- [3] A. Bacciotti and L. Rosier. *Liapunov Functions And Stability in Control Theory*. Berlin Heidelberg: Springer, 2005.
- [4] E. Bernuau, W. Perruquetti, D. Efimov, and E. Moulay. Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator. *International Journal of Control*, 88(3):451–460, 2015.
- [5] E. Bernuau, A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti. Verification of iss, iiss and ioss properties applying weighted homogeneity. *Systems & Control Letters*, 62(12):1159–1167, 2013.
- [6] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3):751–766, 2000.
- [7] R. Burden and J. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Boston, MA, 9th edition, 2010.
- [8] C.-T. Chen. *Linear System Theory and Desing*. Oxford University Press, 3rd. edition, 1999.
- [9] W. H. Chen, J. Yang, L. Guo, and S. Li. Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods – An Overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(2):1083–1095, 2016.
- [10] E. Cruz-Zavala, T. Sanchez, J. A. Moreno, and E. Nuño. Strict Lyapunov functions for homogeneous finite-time second-order systems. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1530–1535, 2018.
- [11] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, 1967.

- [12] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3rd. edition, 2002.
- [13] J. D. Lambert. *Numerical methods for ordinary differential systems: The initial value problem*. John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [14] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [15] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830, 2005.
- [16] A. N. Michel, L. Hou, and D. Liu. *Stability of Dynamical Systems*. Birkhäuser, Boston, 2008.
- [17] Microchip. Microchip microcontrollers. <https://www.microchip.com/en-us/products/microcontrollers-and-microprocessors>, 2025. Microchip Technology Inc.
- [18] Microchip Technology Inc. *SAM D5x/E5x Family Data Sheet*, 2021.
- [19] K. Ogata. *Modern control engineering*. Pearson, Boston, 5th edition, 2010.
- [20] T. Sanchez and J. A. Moreno. Homogeneous output-feedback control with disturbance-observer for a class of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(9):3686–3707, 2021.
- [21] T. Sanchez, A. Zavala-Río, and G. I. Zamora-Gómez. On the transient behavior and gain design for a class of second order homogeneous systems. *Automatica*, 149:110830, 2023.
- [22] E. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(4):435–443, 1989.
- [23] V. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [24] J. Valvano W. *Embedded Microcomputer Systems*. 200 First Stamford Place, Suite 400 Stamford: Cengage Learning, 2011.
- [25] A. Zavala-Río and I. Fantoni. Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(2):471–477, 2014.
- [26] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Feher/Prentice Hall Digital and. Prentice Hall, 1996.