



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

**Análisis Dinámico del Juego del Bien Común Evolutivo en  
Redes Complejas**

Tesis que presenta

**Martín Andrés González Morales**

Para obtener el grado de

**Maestro en Control y Sistemas Dinámicos**

**Dirección de la Tesis:**

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

Dra. Karla Flores Zarur

San Luis Potosí, S.L.P., 25 de noviembre de 2025

# Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Análisis Dinámico del Juego del Bien Común Evolutivo en Redes Complejas** presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Martín Andrés González Morales** y aprobada por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

---

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez  
(Director de la tesis)

---

Dra. Karla Flores Zarur  
(Codirector de la tesis)

---

Dr. Eric Campos Cantón

---

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada

# Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la codirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez y la Dra. Karla Flores Zarur.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación con No. de registro: 1099960 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



*A mi madre y mi padre*

# Agradecimientos

- A mi padre y mi madre, por su apoyo incondicional, por enseñarme a soñar en grande y por siempre creer en mí.
- A mis directores de tesis, por la dedicación, el acompañamiento constante y todo el tiempo que compartieron conmigo en este trabajo. Gracias por su guía, paciencia y confianza.
- A todos los académicos de la División de Control y Sistemas Dinámicos, quienes, con generosidad y compromiso, me ofrecieron su tiempo, conocimientos y apoyo más allá del aula, ayudándome a superar mis límites.
- A Abigail, por acompañarme y compartir esta etapa de mi vida. Gracias por caminar a mi lado mientras juntos seguimos avanzando hacia el futuro con el que soñamos.
- A mis compañeros y amigos que conocí a lo largo de mi paso por el Instituto. De cada uno me llevo algo valioso que me ayudó a crecer y ser una mejor versión de mí mismo.
- A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti), por el apoyo otorgado mediante la beca, que fue de gran ayuda para la realización de esta maestría.

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	1
1.2. Estado del conocimiento . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.4. Hipótesis y solución propuesta . . . . .	3
1.5. Resultados principales . . . . .	4
1.6. Estructura de la tesis . . . . .	4
<b>2. Teoría de juegos</b>	<b>6</b>
2.1. Motivación . . . . .	6
2.2. Juegos en forma extensiva . . . . .	7
2.3. Juegos en forma estratégica normal . . . . .	8
2.4. El dilema del prisionero y el equilibrio de Nash . . . . .	10
2.5. Estrategias mixtas . . . . .	10
2.6. Juego del bien común . . . . .	11
2.7. Juego del bien común con exclusión . . . . .	13
<b>3. Teoría de juegos evolutivos</b>	<b>16</b>
3.1. Antecedentes . . . . .	16
3.2. Dinámica evolutiva . . . . .	17
3.2.1. Modelo de crecimiento poblacional . . . . .	17
3.2.2. Modelo de crecimiento poblacional con capacidad de carga limitada	18
3.2.3. Modelo de selección en poblaciones . . . . .	18
3.2.4. Ecuación del replicador . . . . .	19
3.3. Juego del bien común evolutivo . . . . .	19
3.4. JBC evolutivo con exclusión de primer orden . . . . .	21
3.5. JBC evolutivo con exclusión de segundo orden . . . . .	24

<b>4. Juego del bien común evolutivo en redes complejas</b>	<b>27</b>
4.1. JBC evolutivo en redes complejas . . . . .	27
4.1.1. Modelo basado en agentes . . . . .	27
4.1.2. Modelo bajo aproximación por clases de nodos . . . . .	30
4.1.3. Simulación numérica . . . . .	33
4.2. JBC evolutivo con exclusión en redes complejas . . . . .	34
4.2.1. Modelo basado en agentes . . . . .	34
4.2.2. Modelo bajo aproximación por clases de nodos . . . . .	36
4.2.3. Simulación numérica . . . . .	38
4.3. JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en redes complejas . . . . .	40
4.3.1. Modelo basada en agentes . . . . .	40
4.3.2. Modelo bajo aproximación por clases de nodos . . . . .	42
4.3.3. Simulación numérica . . . . .	42
<b>5. Conclusiones</b>	<b>45</b>
5.1. Resultados principales . . . . .	45
5.2. Trabajo futuro . . . . .	46
<b>6. Apéndice</b>	<b>47</b>
6.1. Linealización y Estabilidad de Puntos de Equilibrio . . . . .	47
6.2. Redes Complejas . . . . .	48
6.2.1. Propiedades topológica . . . . .	49
6.2.2. Red Libre de Escala . . . . .	49
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>

# Índice de figuras

2.1. Juego de piedra, papel o tijera en forma extensiva. El nodo J2 representa un llamado conjunto de información que refleja que el jugador 2 desconoce la elección del jugador 1, dado que la decisión se toma de manera simultánea.	8
2.2. A) Los cooperadores (verde) contribuyen al mantenimiento de un manzano, mientras que los traidores (rojo) no lo hacen. B) Las manzanas producidas por el manzano se reparten equitativamente entre todos los jugadores, sin importar si cooperaron o no. . . . .	13
2.3. A) Los excluidores (negro) contribuyen al mantenimiento del bien común y realizan un pago adicional para excluir a los traidores del beneficio. B) El beneficio se reparte equitativamente entre cooperadores y excluidores, excluyendo a los traidores. . . . .	14
2.4. A) En la exclusión de segundo orden, los excluidores penalizan tanto a los traidores como a los cooperadores pasivos. B) Solo los excluidores reciben el beneficio del bien común, dejando fuera a quienes no contribuyen al mecanismo de cooperación. . . . .	15
3.1. Representación de los simplex $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ . . . . .	19
3.2. Dinámica evolutiva del sistema (3.25) con parámetros $c = 1, r = 2, N = 5, \delta_P = 0.5, x_0 = 0.6, y_0 = 0.2$ y $z_0 = 0.2$ . . . . .	23
3.3. El triángulo verde representa el espacio de estados. Los puntos amarillos indican poblaciones puras en los vértices del simplex, mientras que el punto rojo corresponde al punto crítico interno $(0.445, 0.445, 0.110)$ . Parámetros: $c = 1, r = 2, N = 5$ y $\delta_P = 0.5$ . . . . .	24
3.4. Dinámica evolutiva del sistema con parámetros $c = 1, r = 2, N = 5, \delta_P = 0.5, x_0 = 0.6, y_0 = 0.2$ y $z_0 = 0.2$ . . . . .	26
3.5. Dirección del campo vectorial en el espacio de estados. Los puntos amarillos representan los puntos críticos. Parámetros: $c = 1, r = 2, N = 5$ y $\delta_P = 0.5$ . . . . .	26
4.1. A) Red donde los nodos rojos representan a los traidores y los verdes a los cooperadores. B) El contorno representa el grupo formado alrededor del nodo $i$ . . . . .	28
4.2. Histograma de grados de la red generada. . . . .	28

4.3. Distribución de grados de la red generada. En el histograma por clases, la clase 1 contiene nodos con $3 \leq k \leq 10$ (90% de la red), y la clase 2 nodos con $11 \leq k \leq 80$ (10%). La clase 1 presenta un grado promedio $\bar{k} = 4.3$ , mientras que la clase 2 alcanza $\bar{k} = 22.2$ . . . . .	29
4.4. Dinámica de los cooperadores al simular el JBC evolutivo en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 100 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros: $c = 1, r = 2, x_0 = 0.9$ y $y_0 = 0.1$ . . . . .	30
4.5. Diagrama de estados de un jugador del JBC evolutivo en una red compleja. . . . .	31
4.6. Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros: $c = 1, r = 2, \bar{k}_1 = 4.3, \bar{k}_2 = 22.2, x_0 = 0.9$ y $y_0 = 0.1$ . . . . .	34
4.7. Dinámica de los cooperadores al simular el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros: $c = 1, r = 2, \delta_P = 0.5, x_0 = 0.1$ y $y_0 = 0.45$ . . . . .	35
4.8. Dinámica de los traidores al simular el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros: $c = 1, r = 2, \delta_P = 0.5, x_0 = 0.1$ y $y_0 = 0.45$ . . . . .	35
4.9. Dinámica de los excluidores al simular el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros: $c = 1, r = 2, \delta_P = 0.5, x_0 = 0.1$ y $y_0 = 0.45$ . . . . .	36
4.10. Diagrama de estados de un jugador del JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red compleja. . . . .	36
4.11. Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros: $c = 1, r = 2, \delta_P = 0.5, \bar{k}_1 = 4.3, \bar{k}_2 = 22.2, x_0 = 0.1$ y $y_0 = 0.45$ . . . . .	39
4.12. Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros: $c = 1, r = 2, \delta_P = 0.5, \bar{k}_1 = 4.3, \bar{k}_2 = 22.2, x_0 = 0.1$ y $y_0 = 0.45$ . . . . .	39
4.13. Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros: $c = 1, r = 2, \delta_P = 0.5, \bar{k}_1 = 4.3, \bar{k}_2 = 22.2, x_0 = 0.1$ y $y_0 = 0.45$ . . . . .	40
4.14. Dinámica de los cooperadores al simular el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros: $c = 1, r = 2, \delta_P = 0.5, x_0 = 0.45$ y $y_0 = 0.45$ . . . . .	41



# Resumen

La cooperación es un fenómeno esencial en sistemas sociales y biológicos, pero su sosténimiento resulta desafiante en contextos donde los individuos enfrentan incentivos para actuar de manera egoísta. El *juego del bien común* constituye un modelo fundamental para estudiar este dilema, al capturar la tensión entre el beneficio individual y el bienestar colectivo.

En esta tesis se desarrolla un modelo matemático del *juego del bien común evolutivo* en poblaciones estructuradas mediante redes complejas, incorporando mecanismos de exclusión social como posibles vías para sostener la cooperación. El modelo se construye a partir de una *aproximación por clases de nodos*, que simplifica la estructura de la red al agrupar a los individuos según su conectividad. Los resultados obtenidos se contrastan con simulaciones numéricas basadas en agentes.

Los hallazgos principales muestran que el modelo reproduce cualitativamente la dinámica observada en las simulaciones en escenarios sin exclusión y con exclusión, identificando correctamente las condiciones bajo las cuales la cooperación se sostiene o desaparece. En el caso de la exclusión de primer orden, el modelo captura únicamente la fase inicial de la dinámica, lo cual se atribuye a la diferencia entre el supuesto de redes infinitamente grandes y las simulaciones en redes finitas. Este resultado revela que el tamaño de la población influye de manera significativa en la eficacia de los mecanismos de cooperación.

En síntesis, la aproximación por clases de nodos ofrece una herramienta útil para estudiar dinámicas evolutivas en poblaciones estructuradas, al proporcionar predicciones cualitativas sobre el destino de las estrategias. Aunque no garantiza precisión exacta, sí permite identificar de forma clara las condiciones bajo las cuales la cooperación puede prevalecer, aportando así un marco simplificado y aplicable al análisis de dilemas sociales en sistemas reales.

**Palabras clave:** juegos evolutivos, poblaciones estructuradas, exclusión social, redes complejas, aproximación por clases de nodos.

# Abstract

Cooperation is an essential phenomenon in social and biological systems, but its maintenance becomes challenging in contexts where individuals face incentives to behave selfishly. The *public goods game* provides a fundamental framework to study this dilemma, as it captures the tension between individual benefit and collective welfare.

This thesis develops a mathematical model of the *evolutionary public goods game* in structured populations represented by complex networks, incorporating social exclusion mechanisms as potential ways to sustain cooperation. The model is built using a *degree-based approximation*, which simplifies the network structure by grouping individuals according to their connectivity. The theoretical results are contrasted with agent-based numerical simulations.

The main findings show that the model qualitatively reproduces the dynamics observed in simulations, both in scenarios with and without exclusion, correctly identifying the conditions under which cooperation is sustained or vanishes. In the case of first-order exclusion, the model captures only the initial phase of the dynamics, which is attributed to the difference between the assumption of infinitely large networks and the simulations carried out on finite networks. This result highlights that population size plays a significant role in the effectiveness of cooperation mechanisms.

In summary, the degree-based approximation provides a useful tool to study evolutionary dynamics in structured populations, offering qualitative predictions about the fate of strategies. While it does not guarantee exact precision, it clearly identifies the conditions under which cooperation can prevail, thus providing a simplified and applicable framework for the analysis of social dilemmas in real systems.

**Keywords:** evolutionary games, structured populations, social exclusion, complex networks, degree-based approximation.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Planteamiento del problema

En 1968, Garrett Hardin publicó el artículo *The Tragedy of the Commons* [1], en el que planteó un dilema fundamental sobre el uso compartido de los recursos. En su ejemplo, un pastizal abierto es explotado por diferentes pastores que, buscando maximizar su beneficio individual, añaden más ganado sin considerar las consecuencias colectivas de esta decisión. Aunque en el corto plazo cada individuo obtiene mayores ganancias, el resultado final es la sobreexplotación y el colapso del recurso común. Este escenario ilustra un problema recurrente en diversas dinámicas sociales y ambientales: el conflicto entre el interés individual y el bienestar colectivo. Ejemplos contemporáneos de este fenómeno incluyen la escasez del agua, la degradación del suelo, el calentamiento global y, en general, el uso insostenible de los recursos naturales [2].

Al inicio, priorizar el interés individual parece beneficioso; sin embargo, a medida que más personas adoptan la misma postura oportunista, los recursos se deterioran progresivamente hasta el punto en que dejan de ser útiles para toda la población. En este sentido, la “tragedia de los comunes” representa una advertencia sobre las consecuencias de priorizar el interés individual por encima del bien colectivo.

La *teoría de juegos* proporciona un marco matemático para modelar este tipo de situaciones, en las que individuos toman decisiones para obtener beneficios que dependen no solo de sus propias decisiones, sino también de las elecciones de los demás [3–8]. Modelos como el dilema del prisionero o el juego del bien común, entendido como una generalización del primero para  $N$  jugadores, permiten formalizar y estudiar el dilema planteado por Hardin. Se han propuesto diversos mecanismos que promueven la cooperación para explicar el surgimiento y la persistencia de la cooperación en diversos sistemas biológicos y sociales. En este trabajo se aplica la *exclusión social* como mecanismo para evitar que los individuos oportunistas se aprovechen de los cooperadores.

La *teoría de juegos evolutivos* amplía este enfoque al examinar la evolución temporal de las proporciones de estrategias dentro de una población, en función de los beneficios asociados a cada una [9–11]. La *teoría de sistemas dinámicos* proporciona las herramientas matemáticas para caracterizar cuantitativamente estos modelos, determinando bajo qué condiciones las estrategias de cooperación persisten en el tiempo. Mediante el análisis de puntos de equilibrio y estabilidad, es posible predecir si una población evolucionará hacia la

cooperación colectiva o, por el contrario, hacia la tragedia de los comunes [12, 13].

En los modelos evolutivos del juego del bien común, se suele asumir que la población es bien mezclada, es decir, que cada individuo puede interactuar con cualquier otro miembro de la población. Sin embargo, esta suposición resulta poco realista en la mayoría de los contextos sociales o biológicos, donde las interacciones están limitadas por una estructura que determina quién puede interactuar con quién.

En la práctica, los individuos no tienen contacto directo con todos los demás miembros de la población, sino que mantienen vínculos con un subconjunto de ellos, conformando una red de interacciones. La *teoría de redes complejas* ofrece herramientas para modelar de manera más realista la estructura de las poblaciones, al incorporar la topología de las interacciones entre individuos por medio de grafos [14–18].

Por ello, en este trabajo se propone extender el modelo del juego del bien común evolutivo con exclusión, originalmente formulado para una población bien mezclada, hacia un escenario donde la población está estructurada. En este marco, la red de interacciones se representará mediante un grafo, en el cual los nodos corresponden a los individuos y los enlaces indican las posibles interacciones entre ellos a través del juego del bien común.

Para obtener el modelo matemático del juego del bien común evolutivo con exclusión en una red, se empleará la aproximación por clases de nodos [19], que asume que los nodos con igual número de conexiones presentan, en promedio, una dinámica similar respecto a la evolución de sus estrategias. Esta aproximación permite describir el comportamiento colectivo de la red de manera reducida, manteniendo al mismo tiempo la heterogeneidad estructural característica de la red.

Finalmente, se implementará una simulación basada en agentes con el fin de contrastar los resultados teóricos obtenidos con el modelo matemático. Para ello, se considerará una red en la que las diferencias en el número de conexiones entre nodos hagan relevante el uso de la aproximación por clases de nodos.

## 1.2. Estado del conocimiento

En la literatura se han propuesto diversos mecanismos para explicar el surgimiento y la persistencia de la cooperación en poblaciones de individuos. En el reino animal, se han observado comportamientos altruistas, lo que ha motivado el desarrollo de modelos que buscan explicar cómo surge la cooperación [20–24]. Algunos de estos mecanismos son: selección por parentesco, reciprocidad indirecta, reciprocidad en redes, castigos, exclusión social.

En la selección de parentesco los individuos tienden a ayudar más a sus parientes, ya que comparten parte de su información genética. De este modo, un acto altruista puede tener un costo individual, pero beneficia a genes similares presentes en sus familiares. En la reciprocidad indirecta, ayudar a otros mejora la reputación individual, lo que incrementa la probabilidad de recibir ayuda de terceros, incluso de aquellos que no fueron beneficiados directamente. En este caso, la sociedad premia a los cooperadores. Mientras que en la reciprocidad en redes, cuando las interacciones ocurren en estructuras no aleatorias, los cooperadores pueden agruparse y apoyarse entre sí, aumentando su capacidad de resistir la invasión de individuos con posturas oportunistas.

Cuando los mecanismos mencionados no son suficientes para mantener la cooperación,

es decir, cuando los individuos siguen priorizando su beneficio individual sobre el colectivo, se requieren mecanismos como castigos o exclusión social.

Castigo consiste en sancionar a quienes adoptan posturas oportunistas mediante multas u otras formas de penalización [25, 26]. Mientras que exclusión social supone la existencia de una institución capaz de privar a los no cooperadores del acceso al beneficio dado por el recurso común. Diversos estudios han mostrado que este mecanismo puede ser incluso más eficaz que el castigo para sostener la cooperación [27]. En particular, Liu, Chen y Perc analizaron la dinámica evolutiva del juego del bien común con exclusión social en poblaciones infinitas y bien mezcladas mediante la ecuación del replicador [28]. En su estudio encontraron que, bajo exclusión de primer orden (cuando los excluidores sancionan únicamente a los traidores) el sistema exhibe oscilaciones periódicas entre cooperadores, traidores y excluidores, lo que permite la coexistencia dinámica de las estrategias. Sin embargo, cuando se incorpora exclusión de segundo orden, donde los excluidores también excluyen a los cooperadores, las oscilaciones desaparecen y la población converge hacia un estado dominado por los excluidores. Por lo tanto, sus resultados indican que la exclusión social es un mecanismo particularmente eficaz para sostener la cooperación en poblaciones bien mezcladas.

En este trabajo buscamos extender dicho modelo al caso de poblaciones estructuradas, donde las interacciones están determinadas por una red. Este enfoque permite aproximar de manera más realista el comportamiento de poblaciones biológicas y sociales, en las cuales los individuos no interactúan de manera aleatoria, sino que están influenciados principalmente por un subconjunto de individuos.

### 1.3. Objetivos

El objetivo general es desarrollar y analizar un modelo del juego del bien común evolutivo con exclusión en una población estructurada, empleando la aproximación por clases de nodos y simulaciones basadas en agentes para estudiar cómo la estructura de la red influye en la dinámica de la cooperación. Algunos objetivos específicos son:

1. Formular las ecuaciones que describen la evolución temporal de las estrategias en la red a partir de una aproximación basada en clases de nodos.
2. Implementar un modelo basado en agentes del JBC evolutivo con exclusión sobre una red.
3. Comparar los resultados obtenidos a partir del modelo matemático con los del modelo basado en agentes, identificando similitudes y discrepancias.

### 1.4. Hipótesis y solución propuesta

La dinámica evolutiva del juego del bien común en redes depende de manera crucial de la estructura de conexiones entre los individuos. En particular, la diversidad en los grados de los nodos puede generar efectos que no son capturados por modelos basados en la suposición de poblaciones bien mezcladas. Bajo esta perspectiva, la hipótesis central de este trabajo es que

una aproximación basada en clases de nodos es capaz de reproducir los patrones dinámicos observados en simulaciones basadas en agentes.

La aproximación por clases de nodos asume que los individuos con el mismo número de vecinos presentan un comportamiento promedio similar. Por tanto, la población puede agruparse en clases definidas por intervalos de grado, de modo que cada clase queda caracterizada por el número promedio de conexiones de los nodos que la componen. En redes con una distribución de conexiones muy desigual, como las redes libres de escala, se espera que esta partición sea particularmente informativa, dado que la dinámica de las estrategias de los nodos de alto grado puede diferir significativamente de la de los nodos con pocos enlaces.

Bajo esta aproximación, se considera que para capturar adecuadamente los efectos de la topología es suficiente con especificar la composición promedio del vecindario de cada clase. Esto implica conocer, para un nodo perteneciente a una clase dada, la fracción de sus vecinos que pertenecen a cada una de las demás clases.

## 1.5. Resultados principales

Los resultados obtenidos en esta tesis muestran que la aproximación por clases de nodos constituye un marco teórico capaz de capturar de manera cualitativa los patrones fundamentales de la dinámica evolutiva del juego del bien común evolutivo en redes complejas. En particular, se encontró que el modelo teórico reproduce adecuadamente las tendencias globales observadas en simulaciones basadas en agentes para los tres escenarios analizados: JBC evolutivo sin exclusión, con exclusión de primer orden y con exclusión de segundo orden.

En el caso de la exclusión de primer orden, el modelo predice la aparición de oscilaciones entre las estrategias, lo que indica la posibilidad de coexistencia entre las estrategias en redes libres de escala. Por otra parte, en los escenarios sin exclusión y con exclusión de segundo orden, tanto el modelo teórico como las simulaciones muestran que la dinámica converge hacia el dominio de una estrategia.

En conjunto, estos resultados evidencian que la estructura de la red y la composición de los vecindarios influyen de manera significativa en la evolución de las estrategias, y que la aproximación por clases es una herramienta efectiva para estudiar dichos efectos sin requerir simulaciones exhaustivas basadas en agentes.

## 1.6. Estructura de la tesis

El resto de tesis se organiza en los siguientes capítulos:

- **Capítulo 2. Teoría de juegos:** Se introducen los fundamentos de la teoría de juegos clásica, sus conceptos básicos y ejemplos representativos que servirán como marco conceptual.
- **Capítulo 3. Teoría de juegos evolutivos:** Se desarrolla la extensión evolutiva de la teoría de juegos, abordando las dinámicas poblacionales y las herramientas matemáticas necesarias para su análisis.

- **Capítulo 4. Juego del bien común evolutivo en redes complejas:** Se formula y analiza el modelo principal de esta investigación, considerando diferentes escenarios y evaluando sus dinámicas.
- **Capítulo 5. Conclusiones:** Se sintetizan los principales resultados de la tesis, se discuten sus implicaciones y se señalan posibles líneas de investigación futura.
- **Capítulo 6. Apéndice:** Se incluyen conceptos básicos de teoría de redes complejas y teoría de sistemas dinámicos que complementan el desarrollo teórico y facilitan la comprensión de los modelos presentados.

# Capítulo 2

## Teoría de juegos

### 2.1. Motivación

El estudio de fenómenos del mundo real puede abordarse mediante una herramienta fundamental en las ciencias: el modelado matemático. Esta herramienta permite hacer una abstracción de un fenómeno, reproduciendo sus comportamientos y propiedades características, con el objetivo de facilitar su análisis y comprensión.

Martin J. Osborne [5] define un modelo como una abstracción utilizada para interpretar observaciones y experiencias sobre un fenómeno. Señala que un modelo difícilmente será útil si las suposiciones en las que se basa contradicen de forma significativa la realidad observada. En consecuencia, la aplicabilidad de un modelo depende del grado en que incorpora las características relevantes del fenómeno en cuestión. Además, su utilidad práctica se relaciona con su simplicidad de modo que los supuestos deben capturar la esencia del fenómeno sin introducir complejidades innecesarias. Identificar cuáles supuestos son prescindibles solo es posible una vez que se han establecido los elementos mínimos necesarios para representar adecuadamente el fenómeno. Osborne concluye que este proceso de equilibrio entre simplicidad y fidelidad representa, en muchos casos, un arte.

Esta tesis se centra en el análisis del fenómeno de la cooperación entre individuos que interactúan bajo una estructura representada por una red compleja. Por tanto, el primer paso consiste en modelar matemáticamente dicha cooperación, lo cual motiva el uso de la teoría de juegos. Osborne define esta teoría como una disciplina compuesta por una colección de modelos (denominados juegos) que describen situaciones en las que intervienen múltiples tomadores de decisiones.

El origen formal de la teoría de juegos se remonta a la obra de John von Neumann y Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, publicada en 1944 [3]. Philip D. Straffin [4] sugiere que una denominación más precisa sería "teoría del conflicto y la cooperación", destacando así su pertinencia para el estudio de mecanismos cooperativos. Los modelos de esta teoría encuentran aplicación en disciplinas tan diversas como la economía, biología, ciencia política y sociología.

Según Straffin, un juego se define como una situación que cumple con las siguientes características:

1. Participan al menos dos jugadores, entendidos como tomadores de decisiones. Estos

pueden ser individuos o entidades colectivas como empresas o países.

2. Cada jugador dispone de un conjunto de elecciones entre las cuales puede elegir.
3. Las elecciones combinadas de los jugadores determinan el resultado del juego.
4. A cada resultado se asocia una recompensa o pago para cada jugador, que representa su valoración del mismo. En teoría de juegos, estas recompensas se expresan mediante funciones de utilidad, que asignan valores numéricos a los resultados, siendo mayores aquellos que representan resultados preferidos. Como explican Maschler et al. [7], cada jugador tiene sus propias preferencias, por lo que un mismo resultado puede tener distinto valor para jugadores distintos. Para analizar un juego, es necesario conocer cómo cada jugador ordena los resultados posibles, lo cual se formaliza mediante una relación de preferencia que indica, para cada par de resultados, cuál es preferido o si son indiferentes.

Antes de abordar las distintas formas de representar un juego, es necesario introducir el concepto de *teoría de la elección racional*, la cual constituye uno de los supuestos centrales del enfoque clásico de la teoría de juegos. Bajo esta perspectiva, los jugadores son considerados agentes racionales que toman decisiones de manera coherente con sus preferencias. Según Osborne [5], cada jugador selecciona, entre todas las alternativas disponibles, aquella que le proporciona el mayor nivel de utilidad de acuerdo con sus intereses particulares.

Cuando existen dos o más opciones que resultan igualmente satisfactorias, se asume que el jugador puede elegir cualquiera de ellas sin que dicha elección afecte negativamente su bienestar, es decir, toda elección realizada será, al menos, tan buena como las demás alternativas posibles. Además, siguiendo a Maschler et al. [7], se introduce un supuesto adicional de gran relevancia, según el cual la racionalidad de todos los jugadores es conocimiento común. Esto implica que cada jugador sabe que los demás son racionales y sabe que ellos saben que él también lo es. En consecuencia, cada decisión se toma anticipando que los otros jugadores también buscarán maximizar su utilidad al participar en el juego.

## 2.2. Juegos en forma extensiva

Un juego en forma extensiva se representa mediante un diagrama de árbol. En dicho árbol, el nodo raíz indica el inicio del juego, mientras que los nodos terminales representan los posibles desenlaces, cada uno asociado a un resultado específico. Los diferentes niveles del árbol corresponden a las etapas del juego. Los nodos no terminales corresponden a decisiones que debe tomar alguno de los jugadores, y las ramas que emergen de estos nodos indican las posibles elecciones disponibles en ese momento.

Von Neumann y Morgenstern [3] diferencian los conceptos de *movimiento* y *elección*. Un movimiento describe una situación en la que un jugador debe seleccionar una acción, mientras que una elección se refiere a la acción específica que se toma durante una partida al encontrarse en dicha situación.

Dentro de los juegos en forma extensiva se distinguen dos categorías según la información disponible para los jugadores. En los juegos de información perfecta, cada jugador

conoce todas las elecciones realizadas previamente antes de decidir su acción. El ajedrez es un ejemplo característico, ya que los jugadores se alternan sus movimientos con pleno conocimiento del estado actual del juego.

En cambio, los juegos de información imperfecta modelan situaciones donde las decisiones se toman de manera simultánea o donde un jugador desconoce lo que ha decidido el oponente en el momento de actuar. Un ejemplo representativo es *Piedra, Papel o Tijera*, en el cual dos jugadores eligen simultáneamente una de las tres acciones posibles. Este juego se representa en forma extensiva, como se muestra en la Figura 2.1.

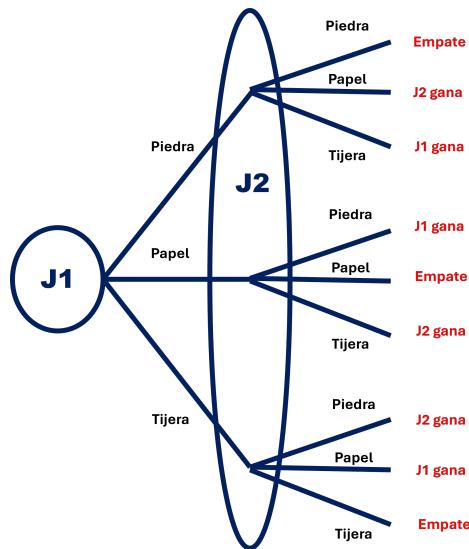


Figura 2.1: Juego de piedra, papel o tijera en forma extensiva. El nodo J2 representa un llamado conjunto de información que refleja que el jugador 2 desconoce la elección del jugador 1, dado que la decisión se toma de manera simultánea.

### 2.3. Juegos en forma estratégica normal

Además de la forma extensiva, que representa los momentos del juego mediante un árbol y muestra el orden de las decisiones, la información disponible y los posibles desenlaces, existe la representación en forma estratégica o normal. En esta tesis adoptaremos esta última por ser la más utilizada en la literatura y por ofrecer una representación más simple y directa del comportamiento estratégico de los jugadores.

Un juego en forma estratégica normal, o simplemente en forma normal, se representa mediante una tabla que muestra los resultados asociados a todas las combinaciones posibles de estrategias elegidas por los jugadores. A diferencia de la forma extensiva, esta representación no muestra directamente el orden en el que ocurren las decisiones ni la información disponible en cada etapa del juego. En su lugar, se asume que cada jugador elige una estrategia de manera simultánea al inicio de la interacción.

Es importante aclarar que un juego puede involucrar etapas o situaciones sucesivas, aunque esto no se represente explícitamente en la forma normal. Una estrategia puede incluir

instrucciones condicionales del tipo “si ocurre A, entonces hacer B”, lo que permite incorporar indirectamente la estructura temporal dentro de esta representación. Así, cada jugador selecciona un plan completo de acción desde el inicio, sin posibilidad de modificarlo posteriormente.

McCain [6] define un juego en su forma estratégica normal como una tríada ordenada  $\Gamma = (J, (S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J})$ , donde:

1.  $J = \{1, 2, \dots, N\}$  representa el conjunto de jugadores.
2.  $S_i$  es el conjunto de estrategias del jugador  $i$ .
3.  $\Sigma = S_1 \times \dots \times S_N$  es el espacio de perfiles de acción.
4.  $\sigma = (s_1, \dots, s_N)$  representa un perfil de acción, donde  $\sigma \in \Sigma$  y  $s_i \in S_i$ .
5.  $u_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de utilidad que asigna un pago  $u_i(\sigma)$  al jugador  $i$  en función del perfil de acción  $\sigma$ .

Como ejemplo, se retoma el juego de piedra, papel o tijera. Este se representa en forma normal identificando primero al conjunto de jugadores, denotados como jugador 1 y jugador 2, y luego el conjunto de estrategias disponibles para ambos: {Piedra, Papel, Tijera}.

Posteriormente, se enumeran los perfiles de acción, es decir, todas las combinaciones posibles entre las elecciones de ambos jugadores: (Piedra, Piedra), (Piedra, Papel), (Piedra, Tijera), (Papel, Piedra), (Papel, Papel), (Papel, Tijera), (Tijera, Piedra), (Tijera, Papel), (Tijera, Tijera).

Desde la perspectiva del jugador 1, los perfiles de acción pueden ordenarse según su preferencia: primero los que implican una victoria, luego los empates y finalmente las derrotas. Así, se tiene:

1. Victoria: (Piedra, Tijera), (Papel, Piedra), (Tijera, Papel),
2. Empate: (Piedra, Piedra), (Papel, Papel), (Tijera, Tijera),
3. Derrota: (Piedra, Papel), (Papel, Tijera), (Tijera, Piedra).

Esto se puede formalizar mediante una función de utilidad  $u_1$  del jugador 1, la cual cumple:

$$u_1(\text{Piedra, Tijera}) = u_1(\text{Papel, Piedra}) = u_1(\text{Tijera, Papel}), \quad (2.1)$$

$$u_1(\text{Piedra, Piedra}) = u_1(\text{Papel, Papel}) = u_1(\text{Tijera, Tijera}), \quad (2.2)$$

$$u_1(\text{Tijera, Piedra}) = u_1(\text{Piedra, Papel}) = u_1(\text{Papel, Tijera}), \quad (2.3)$$

$$u_1(\text{Piedra, Tijera}) > u_1(\text{Piedra, Piedra}) > u_1(\text{Piedra, Papel}). \quad (2.4)$$

Si se asigna un valor de 1 por victoria, 0 por empate y -1 por derrota, se obtiene el juego en forma normal representado en la Tabla 2.1.

		Jugador 2		
		Piedra	Papel	Tijera
Jugador 1	Piedra	0, 0	-1, 1	1, -1
	Papel	1, -1	0, 0	-1, 1
	Tijera	-1, 1	1, -1	0, 0

Tabla 2.1: Juego de Piedra, Papel o Tijera en forma normal.

## 2.4. El dilema del prisionero y el equilibrio de Nash

El profesor Alfred Tucker, del Departamento de Matemáticas de Princeton, buscaba ilustrar ante un grupo de psicólogos los fundamentos de la teoría de juegos, que por entonces comenzaba a ganar notoriedad en la comunidad científica. Para ello, propuso un ejemplo accesible sin recurrir a formalismos matemáticos, dando origen al célebre *Dilema del Prisionero*, uno de los modelos más estudiados en esta disciplina [8].

El dilema plantea una situación en la que dos sospechosos de haber cometido un delito grave son arrestados y confinados en celdas separadas. Las autoridades solo disponen de pruebas suficientes para condenarlos por un delito menor, a menos que uno de ellos confiese y actúe como testigo contra el otro, lo que permitiría una condena más severa.

La representación en forma normal del dilema del prisionero se muestra en la Tabla 2.2. Si ambos prisioneros optan por guardar silencio, serán condenados por el delito menor y cumplirán una pena de un año. Si uno confiesa y el otro guarda silencio, el delator queda en libertad, mientras que el otro recibe una condena de cuatro años. Si ambos se delatan mutuamente, cada uno recibe una condena de tres años.

Si el sospechoso 1 quiere decidir qué acción tomar, puede analizar los posibles escenarios según lo que haga el sospechoso 2. Si el sospechoso 2 opta por guardar silencio, la *mejor respuesta* del sospechoso 1 es delatar, ya que así obtiene una pena menor (queda libre en lugar de cumplir un año). Por otro lado, si el sospechoso 2 decide delatar, la mejor respuesta del sospechoso 1 vuelve a ser delatar, pues de esta forma recibe tres años en lugar de cuatro.

Si repetimos este razonamiento desde la perspectiva del sospechoso 2, llegamos a la misma conclusión: sin importar lo que haga el otro, la mejor respuesta siempre es delatar. En consecuencia, ambos terminan eligiendo esta estrategia. Este punto, donde cada jugador está tomando su mejor decisión considerando las posibles acciones del otro, se conoce como un *Equilibrio de Nash*.

Formalmente, un perfil de acción  $\sigma$  es un equilibrio de Nash si, para cada jugador  $i$ , su estrategia  $s_i$  constituye la mejor respuesta al conjunto de estrategias de los demás jugadores. En otras palabras, ningún jugador puede mejorar su resultado cambiando unilateralmente su estrategia mientras los demás mantengan las suyas. En el dilema del prisionero, el equilibrio de Nash corresponde al perfil  $\sigma = (\text{Delatar}, \text{Delatar})$ .

## 2.5. Estrategias mixtas

Hasta este punto solo se han considerado *estrategias puras*, es decir, aquellas en las que un jugador elige una acción de forma determinista. Por ejemplo, en el juego de Piedra, Papel

		Sospechoso 2	
		Silencio	Delatar
Sospechoso 1	Silencio	-1, -1	-4, 0
	Delatar	0, -4	-3, -3

Tabla 2.2: Dilema del Prisionero en forma normal.

o Tijera, las estrategias puras son {Piedra, Papel, Tijera}, mientras que en el dilema del prisionero son {Silencio, Delatar}.

Sin embargo, un jugador también puede adoptar una *estrategia mixta*, que consiste en asignar probabilidades a cada una de sus estrategias puras. En este caso, la estrategia mixta representa una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias posibles. Por ejemplo, en el juego de Piedra, Papel o Tijera, una estrategia mixta podría ser  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ , lo que indica que el jugador elegirá Piedra con probabilidad  $\frac{1}{3}$ , Papel con  $\frac{2}{3}$ , y nunca Tijera.

Para encontrar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego Piedra, Papel o Tijera, se debe hallar un perfil en el que ningún jugador tenga incentivos para modificar su estrategia, considerando que ambos pueden usar estrategias mixtas.

Supóngase que el jugador 1 elige la estrategia mixta  $(r, p, s)$ , donde  $r + p + s = 1$ . El pago esperado del jugador 2 al elegir cada una de sus estrategias puras se calcula como sigue:

1. Si el jugador 2 escoge Piedra:

$$(0)r + (-1)p + (1)s = -p + s. \quad (2.5)$$

2. Si el jugador 2 escoge Papel:

$$(1)r + (0)p + (-1)s = r - s. \quad (2.6)$$

3. Si el jugador 2 escoge Tijera:

$$(-1)r + (1)p + (0)s = -r + p. \quad (2.7)$$

Para que el jugador 2 sea indiferente entre sus tres acciones, es necesario que estos tres pagos esperados sean iguales. Al resolver el sistema de ecuaciones asociado a esta condición, se obtiene que la estrategia mixta  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  cumple con la condición. En consecuencia, este perfil en el que ambos eligen esta estrategia mixta constituye el equilibrio de Nash del juego Piedra, Papel o Tijera.

## 2.6. Juego del bien común

El *Juego del Bien Común* (JBC) modela la interacción entre individuos que deciden si contribuir con una cantidad  $c$  al mantenimiento de un bien común o, por el contrario, no aportar nada. La suma de todas las contribuciones se multiplica por un factor de sinergia  $1 < r < N$ , y el beneficio resultante se distribuye equitativamente entre todos los jugadores, sin importar su nivel de cooperación.

Este juego puede entenderse como una generalización del dilema del prisionero para  $N$  jugadores. En el dilema del prisionero, la mejor respuesta siempre corresponde a la estrategia individualmente más conveniente, que en ese caso es delatar, es decir, adoptar una postura no cooperativa. De manera análoga, en el JBC la mejor respuesta frente a cualquier combinación de estrategias de los demás jugadores también es no cooperar. Por lo tanto, el equilibrio de Nash en ambos juegos se alcanza cuando nadie coopera. Además, el JBC hereda otra propiedad fundamental del dilema del prisionero: el perfil de acciones en el que todos cooperan genera un beneficio individual mayor que el obtenido en el equilibrio de Nash, lo que convierte a este juego en un dilema social.

Como ejemplo, considérese el juego del bien común ilustrado en la Figura 2.2, en el que un grupo de  $N = 5$  jugadores comparte un bien común representado por un manzano. Supóngase que el manzano tiene un factor de sinergia  $r = 2$ . Cada jugador puede optar por cooperar ( $C$ ) y aportar al mantenimiento del árbol una cantidad  $c = 1$ , o por no cooperar ( $D$ ), beneficiándose igualmente del recurso sin contribuir.

El juego del bien común considerando 5 jugadores se define como  $(J, (S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J})$ , donde:

1.  $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
2.  $S_i = \{C, D\}$  para todo  $i \in J$ .
3.  $\Sigma = \{C, D\}^5$ .
4. Un perfil de estrategias es  $\sigma = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ , con  $s_i \in \{C, D\}$ .
5. La función de utilidad para el jugador  $i$  se define como:

$$u_i(\sigma) = \begin{cases} \frac{n_C}{N}rc & \text{si } s_i = D \\ \frac{(n_C + 1)}{N}rc - c & \text{si } s_i = C \end{cases} \quad (2.8)$$

donde  $n_C$  es el número de jugadores distintos a  $i$  que eligen cooperar.

La utilidad de un jugador  $i$  cuando todos cooperan ( $\sigma = (C, C, C, C, C)$ ) se calcula como

$$u_i(\sigma) = \frac{4+1}{5} \cdot 2 - 1 = 1. \quad (2.9)$$

Si el jugador  $i$  decidiera cambiar unilateralmente su estrategia y optar por no cooperar, su utilidad sería

$$u_i(\sigma) = \frac{4}{5} \cdot 2 = 1.6, \quad (2.10)$$

lo que muestra que, individualmente, le conviene no cooperar. Sin embargo, si todos los jugadores razonaran de la misma manera, el perfil de estrategias resultante sería  $\sigma = (D, D, D, D, D)$ , y la utilidad de cada jugador  $i$  sería

$$u_i(\sigma) = \frac{0}{5} \cdot 2 = 0. \quad (2.11)$$

Bajo estas circunstancias, si un jugador decidiera cooperar unilateralmente, su pago sería

$$u_i(\sigma) = \frac{0+1}{5} \cdot 2 - 1 = -0.6, \quad (2.12)$$

lo que muestra que no le conviene cambiar su estrategia. De esta manera, se alcanza un equilibrio en el que nadie coopera, generando un beneficio individual menor que si todos hubieran cooperado.

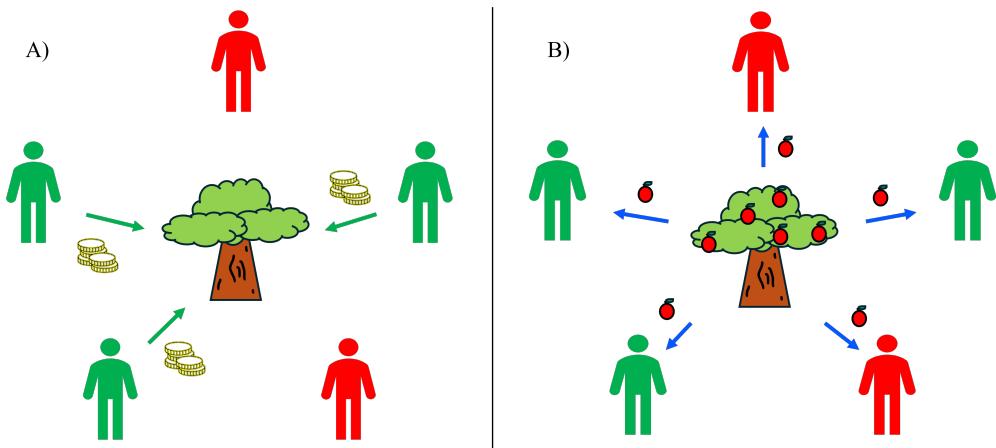


Figura 2.2: A) Los cooperadores (verde) contribuyen al mantenimiento de un manzano, mientras que los traidores (rojo) no lo hacen. B) Las manzanas producidas por el manzano se reparten equitativamente entre todos los jugadores, sin importar si cooperaron o no.

## 2.7. Juego del bien común con exclusión

En esta sección se analiza una variante del juego del bien común que incorpora un mecanismo de cooperación como estrategia adicional. La literatura presenta diversos mecanismos de cooperación; sin embargo, en este trabajo se considera exclusivamente la exclusión como herramienta para fomentar la cooperación.

La exclusión introduce una tercera estrategia, denominada *EC*, en la que los jugadores no solo contribuyen con una cantidad  $c$  al mantenimiento del bien común, sino que también realizan un pago adicional  $\delta_P$  a una institución encargada de excluir del beneficio a quienes decidan no cooperar.

Se asume que basta con que un solo jugador efectúe el pago  $\delta_P$  para que todos los traidores sean excluidos, de modo que el recurso se reparta únicamente entre cooperadores ( $C$ ) y excluidores ( $EC$ ). Este modelo se denomina *juego del bien común con exclusión de primer orden*, ya que únicamente se excluye a los no cooperadores, mientras que quienes cooperan sin pagar a la institución no son penalizados. La Figura 2.3 ilustra este escenario aplicado al ejemplo del manzano utilizado en la sección anterior.

La representación formal de este modelo es la tríada  $(J, (S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J})$ , donde:

1.  $J = \{1, 2, \dots, 5\}$ .

2.  $S_i = \{C, D, EC\}$  para todo  $i \in J$ .
3.  $\Sigma = \{C, D, EC\}^5$ .
4. Un perfil de estrategias es  $\sigma = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ , con  $s_i \in \{C, D, EC\}$ .
5. La función de utilidad para el jugador  $i$  se define como:

$$u_i(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i = D \text{ y } \exists j \text{ tal que } s_j = EC \\ \frac{n_C}{N} rc & \text{si } s_i = D \text{ y } \nexists j \text{ tal que } s_j = EC \\ rc - c & \text{si } s_i = C \text{ y } \exists j \text{ tal que } s_j = EC \\ \frac{(n_C + 1)}{N} rc - c & \text{si } s_i = C \text{ y } \nexists j \text{ tal que } s_j = EC \\ rc - c - \delta_P & \text{si } s_i = EC \end{cases} \quad (2.13)$$

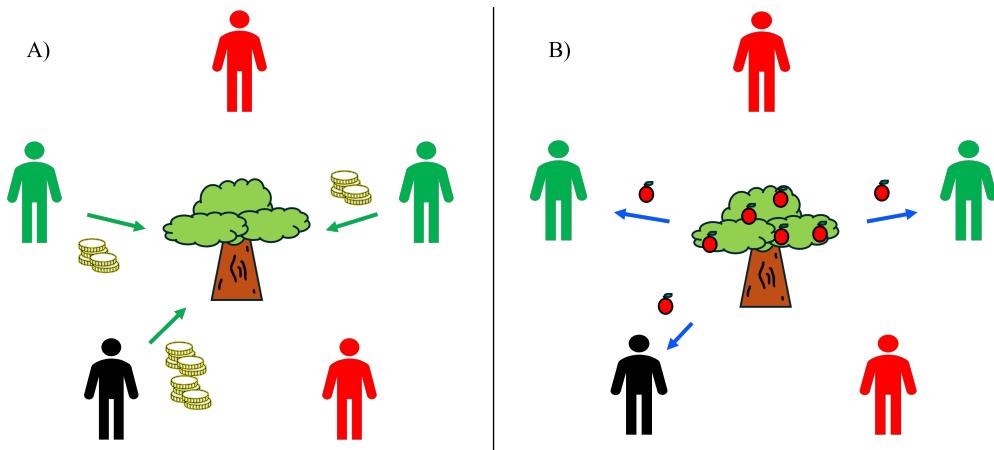


Figura 2.3: A) Los excluidores (negro) contribuyen al mantenimiento del bien común y realizan un pago adicional para excluir a los traidores del beneficio. B) El beneficio se reparte equitativamente entre cooperadores y excluidores, excluyendo a los traidores.

También se considera el *juego del bien común con exclusión de segundo orden*, representado en la Figura 2.4. En este caso, los excluidores no solo penalizan a los traidores, sino también a los cooperadores que no participan en el mecanismo de cooperación. La función

de utilidad para el jugador  $i$  se define como:

$$u_i(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i = D \text{ y } \exists j \text{ tal que } s_j = EC \\ \frac{n_C}{N}rc & \text{si } s_i = D \text{ y } \nexists j \text{ tal que } s_j = EC \\ -c & \text{si } s_i = C \text{ y } \exists j \text{ tal que } s_j = EC \\ \frac{(n_C + 1)}{N}rc - c & \text{si } s_i = C \text{ y } \nexists j \text{ tal que } s_j = EC \\ \frac{(n_C + n_{EC} + 1)}{n_{EC} + 1}rc - c - \delta_P & \text{si } s_i = EC \end{cases} \quad (2.14)$$

donde  $n_{EC}$  es el número de jugadores distintos a  $i$  que eligen excluir.

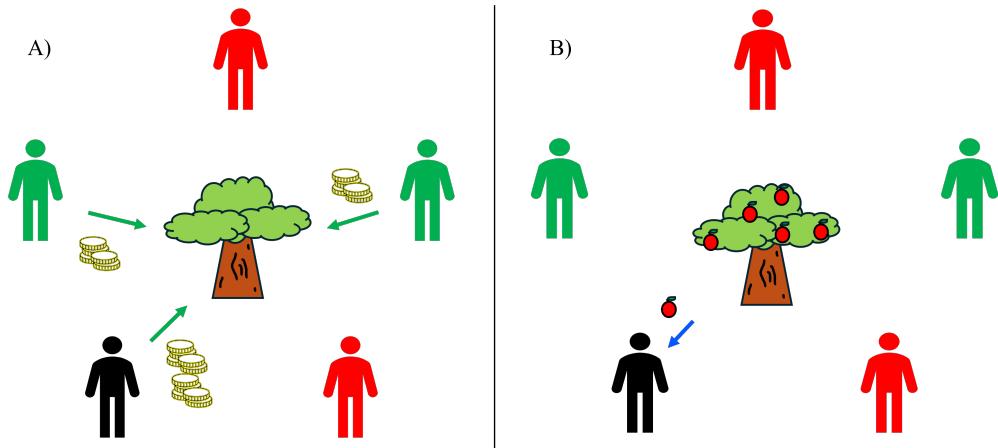


Figura 2.4: A) En la exclusión de segundo orden, los excluidores penalizan tanto a los traidores como a los cooperadores pasivos. B) Solo los excluidores reciben el beneficio del bien común, dejando fuera a quienes no contribuyen al mecanismo de cooperación.

# Capítulo 3

## Teoría de juegos evolutivos

### 3.1. Antecedentes

Según Martin A. Nowak [10], la teoría de juegos tradicional se centra en analizar la interacción entre un número reducido de jugadores, planteando cómo estos pueden maximizar sus beneficios en el juego bajo el supuesto de que todos son plenamente conscientes de que los demás también buscan maximizar sus pagos. Una de las principales limitaciones de estos modelos radica en que, en la práctica, no es posible garantizar que los jugadores adopten un comportamiento estrictamente racional.

En este contexto surge la *teoría de juegos evolutivos*, la cual no se fundamenta en la racionalidad de los jugadores, sino en procesos de evolución. Tal como explica Nowak, aunque Charles Darwin no fue el creador del concepto de evolución, es uno de los científicos más reconocidos en este ámbito por formular la teoría de la selección natural como mecanismo de transformación de las especies, idea que desarrolló en su obra *On the Origin of Species*. A lo largo del siglo siguiente, las contribuciones de numerosos investigadores desembocaron en el trabajo de John Maynard Smith, quien en 1973 formuló la teoría de juegos evolutivos.

Esta teoría considera una población de jugadores compuesta por diferentes tipos de individuos, entendidos como estrategias que los jugadores poseen desde el inicio, según una distribución inicial determinada. Dado que adopta numerosos conceptos de la biología, el proceso puede interpretarse como un juego que se desarrolla a lo largo de generaciones. En la primera generación, los individuos poseen estrategias predeterminadas y participan en interacciones aleatorias dentro de la población.

Los pagos obtenidos en estas interacciones se interpretan como *aptitud*, entendida como la capacidad de una estrategia para reproducirse y, en consecuencia, aumentar su proporción en la población en generaciones posteriores. Una estrategia exitosa en un juego evolutivo equivale a una estrategia con éxito reproductivo: aquellas que obtienen mejores resultados tienden a expandirse con mayor rapidez, mientras que las menos eficaces disminuyen progresivamente su presencia hasta alcanzar, en algunos casos, la extinción. Este proceso constituye el análogo de la selección natural en el marco de los juegos evolutivos.

## 3.2. Dinámica evolutiva

De acuerdo con Nowak [10], los tres componentes fundamentales de la dinámica evolutiva son la *replicación*, la *selección* y la *mutación*, conceptos que se aplican a todo organismo biológico.

Para que exista replicación en un proceso evolutivo, es necesaria la presencia de una población de individuos reproductores. Durante la reproducción, por ejemplo en los seres humanos, el ADN se replica y se transmite a la descendencia.

La selección ocurre cuando diferentes tipos de individuos dentro de una población compiten entre sí. Aquellos que logran reproducirse con mayor rapidez incrementan su presencia relativa en la población.

La mutación se produce cuando, durante la replicación, ocurren errores en la copia del material genético, generando variantes que contribuyen a la diversidad poblacional.

En el presente trabajo no se consideran procesos de mutación; los modelos analizados incluyen únicamente replicación y selección. Esta elección se debe a que, aun sin mutación, dichos elementos son suficientes para generar modelos de elevada complejidad, capaces de ofrecer nuevas perspectivas y aportar información relevante sobre los fenómenos estudiados.

### 3.2.1. Modelo de crecimiento poblacional

Inspirándose en el desarrollo teórico presentado por Nowak [10], Gintis [11] y Hofbauer y Sigmund [9], se inicia el análisis con el modelo de crecimiento irrestricto, punto de partida hacia la formulación de la ecuación del replicador. Sea  $x(t)$  el tamaño de la población en el instante  $t$ . En la realidad,  $x(t)$  adopta valores enteros ( $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ), ya que no existen fracciones de individuos. Sin embargo, cuando la población es lo suficientemente grande, los cambios discretos en el número de individuos resultan insignificantes a escala macroscópica. En tales casos, es posible aproximar  $x(t)$  mediante una función  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y suponer la existencia de su derivada temporal:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

En este marco, los valores fraccionarios de  $x(t)$  pueden interpretarse como el número promedio esperado de individuos en múltiples realizaciones del sistema. La razón  $\mathcal{R} = \dot{x}/x$  corresponde a la *tasa de crecimiento per cápita*, es decir, la contribución promedio de cada individuo al crecimiento poblacional. Si la tasa de crecimiento es constante, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = \mathcal{R}x, \quad (3.2)$$

cuya solución describe un crecimiento exponencial:

$$x(t) = x_0 e^{\mathcal{R}t}, \quad (3.3)$$

donde  $x_0$  representa la condición inicial. Este modelo describe un crecimiento exponencial continuo, en el que las generaciones no son discretas: nacimientos y muertes pueden ocurrir en cualquier instante.

### 3.2.2. Modelo de crecimiento poblacional con capacidad de carga limitada

Cuando se considera la existencia de recursos limitados, el crecimiento de la población puede modelarse mediante la ecuación logística:

$$\dot{x} = \mathcal{R}x \left(1 - \frac{x}{M}\right), \quad (3.4)$$

donde  $M$  representa el tamaño poblacional máximo que el entorno puede sostener. Este modelo resulta adecuado cuando  $x_0 < M$ , ya que asume que la tasa de reproducción es  $\mathcal{R}$ , pero el crecimiento se desacelera a medida que la población se aproxima a  $M$ , debido a la disponibilidad finita de recursos. La solución de la ecuación logística es:

$$x(t) = \frac{Mx_0 e^{\mathcal{R}t}}{M + x_0(e^{\mathcal{R}t} - 1)}, \quad (3.5)$$

lo que describe un crecimiento inicialmente rápido que se estabiliza conforme la población alcanza su límite máximo.

### 3.2.3. Modelo de selección en poblaciones

La selección natural se manifiesta cuando coexisten en la población diferentes tipos de individuos con tasas de reproducción distintas. Considerense dos tipos:  $A$  y  $B$ , con tasas de reproducción  $f_a$  y  $f_b$ , respectivamente. La tasa de reproducción se interpreta como la *aptitud* (*fitness*), y se asume que esta es un número real no negativo.

Se supone que la población total mantiene un tamaño constante en el tiempo, lo que corresponde al límite impuesto por la capacidad del entorno. En este escenario, no se producen variaciones en el número total de individuos, sino únicamente cambios en la composición relativa de la población.

Sea  $x(t)$  la abundancia relativa de individuos tipo  $A$  en el tiempo  $t$ , y  $y(t)$  la abundancia relativa de individuos tipo  $B$ . La *abundancia relativa* se define como la proporción de individuos de un tipo específico respecto al total. Dado que el tamaño poblacional es fijo, se cumple:

$$x + y = 1. \quad (3.6)$$

La dinámica para dos tipos está descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(f_a - \bar{f}(x,y)), \\ \dot{y} &= y(f_b - \bar{f}(x,y)), \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\bar{f}(x,y) = f_a x + f_b y$  es la aptitud promedio de la población. Restar a las aptitudes la aptitud promedio de la población garantiza la conservación de la condición  $x + y = 1$ .

El modelo puede generalizarse a  $n$  tipos de individuos. Sea  $x_i(t)$  la fracción de individuos del tipo  $i$ , con aptitud  $f_i$ . La aptitud promedio se define como:

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i. \quad (3.8)$$

La dinámica evolutiva se describe mediante:

$$\dot{x}_i = x_i (f_i - \bar{f}(x)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

La fracción  $x_i$  aumenta cuando la aptitud del tipo  $i$  excede el valor promedio  $\bar{f}(x)$ .

El conjunto de puntos que satisfacen  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  se denomina *simplex*  $\mathcal{S}_n$ . La Figura 3.1 ilustra los simplex correspondientes a poblaciones con dos, tres y cuatro tipos de individuos. Cada punto en el simplex representa un estado particular de la población.

El interior del simplex está formado por los vectores  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tales que  $x_i > 0$  para todo  $i$ . Las caras corresponden a configuraciones donde al menos un componente  $x_i = 0$ , y los vértices describen *poblaciones puras*, es decir, configuraciones en las que un único tipo está presente ( $x_i = 1$  y  $x_j = 0$  para todo  $j \neq i$ ).

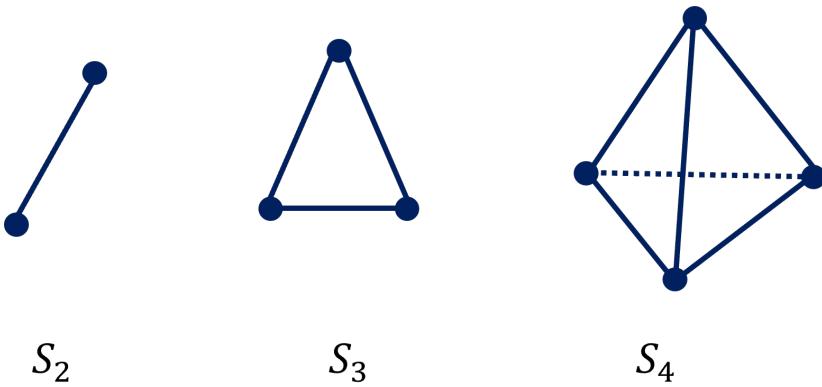


Figura 3.1: Representación de los simplex  $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ .

### 3.2.4. Ecuación del replicador

En los apartados anteriores, la aptitud de los diferentes tipos de individuos se consideró constante. Sin embargo, ahora se asume que la aptitud de cada individuo de tipo  $i = 1, \dots, n$  es una función  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que  $f_i(x)$  depende de las abundancias relativas de los distintos tipos en la población.

Esta generalización del modelo anterior conduce a la *ecuación del replicador*, introducida por primera vez en el trabajo de Peter D. Taylor y Leo B. Jonker [29].

La ecuación del replicador se expresa como:

$$\dot{x}_i = x_i (f_i(x) - \bar{f}(x)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

## 3.3. Juego del bien común evolutivo

Para definir un juego evolutivo es necesario especificar tres elementos fundamentales. Primero, la *estructura de interacción*, que en este caso corresponde al juego estático del bien

común descrito anteriormente. Segundo, los *tipos de agentes*, entendidos como las posibles posturas que pueden adoptar los individuos. Aquí se consideran dos tipos: cooperadores y traidores. Finalmente, se define la *estructura de la población*. En este capítulo se asume una población infinitamente grande y bien mezclada, lo que implica que cada individuo puede interactuar con cualquier otro con igual probabilidad.

La dinámica evolutiva procede de la siguiente manera. De forma aleatoria, se selecciona un grupo de  $N$  individuos para participar en el JBC. Una vez concluida la interacción, cada jugador compara su pago con el de otro individuo elegido al azar. Si su pago es mayor o igual, conserva su estrategia; en caso contrario, adopta la estrategia del otro. Bajo este mecanismo, las estrategias que otorgan mayores beneficios tienden a propagarse con mayor frecuencia.

Sea  $x(t)$  la proporción de cooperadores en el tiempo  $t$ , y  $y(t)$  la proporción de traidores, con  $x + y = 1$ . La evolución de las estrategias en el tiempo se describe mediante la ecuación del replicador:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(f_x(x, y) - \bar{f}(x, y)), \\ \dot{y} &= y(f_y(x, y) - \bar{f}(x, y)),\end{aligned}\tag{3.11}$$

donde  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$  representan las aptitudes de cooperadores y traidores, definidas como el pago esperado de cada postura dado el estado actual de la población.

Para calcular el pago esperado tomamos como referencia el análisis del JBC del capítulo anterior. Sea  $i$  un individuo que forma parte de un grupo de  $N$  jugadores y sea  $N_C$  una variable aleatoria discreta que representa el número de jugadores distintos a  $i$  que cooperan en el grupo. Si el jugador  $i$  coopera, su pago esperado se escribe como

$$f_x(x, y) = \mathbb{E} \left[ \frac{(N_C + 1)}{N} rc - c \right] = \frac{\mathbb{E}[N_C] + 1}{N} rc - c.\tag{3.12}$$

El número de cooperadores entre los otros  $N - 1$  jugadores puede modelarse como una variable aleatoria binomial, puesto que cada uno puede ser cooperador o traidor. Entonces,

$$\mathbb{P}(N_C = n_C) = \binom{N-1}{n_C} x^{n_C} y^{N-1-n_C},\tag{3.13}$$

donde  $x$  es la probabilidad de que un individuo sea cooperador y  $y = 1 - x$  la probabilidad de que sea traidor. El valor esperado de  $N_C$  es

$$\mathbb{E}[N_C] = \sum_{n_C=0}^{N-1} n_C \binom{N-1}{n_C} x^{n_C} y^{N-1-n_C} = (N-1)x.\tag{3.14}$$

Sustituyendo obtenemos el pago esperado de un cooperador:

$$f_x(x, y) = \frac{(N-1)x + 1}{N} rc - c.\tag{3.15}$$

De forma similar, el pago esperado de un traidor viene dado por:

$$f_y(x, y) = \mathbb{E} \left[ \frac{N_C}{N} rc \right] = \frac{\mathbb{E}[N_C]}{N} rc = \frac{(N-1)x}{N} rc.\tag{3.16}$$

La aptitud promedio de la población es:

$$\bar{f}(x, y) = xf_x(x, y) + yf_y(x, y). \quad (3.17)$$

Como  $y = 1 - x$ , el sistema (3.11) se reduce a una sola ecuación diferencial:

$$\dot{x} = \left(\frac{r}{N} - 1\right) cx(1 - x), \quad (3.18)$$

la cual corresponde a la ecuación logística que modela el crecimiento poblacional con capacidad de carga limitada. En este caso, la capacidad máxima es  $M = 1$ , pues se trabaja con abundancias relativas, y la tasa de reproducción  $\mathcal{R}$  se reemplaza por  $(\frac{r}{N} - 1)c$ , que representa la tasa de crecimiento de los cooperadores.

El signo de  $\frac{r}{N} - 1$  determina la dinámica:

1. Si  $r > N$ , los cooperadores aumentan hasta dominar completamente la población.
2. Si  $r < N$ , los cooperadores decrecen hasta su extinción.
3. Si  $r = N$ , las proporciones de cooperadores y traidores permanecen constantes en el tiempo.

### 3.4. JBC evolutivo con exclusión de primer orden

Asumimos una población infinitamente grande y bien mezclada, como se indicó en la sección anterior. En este juego evolutivo la estructura de interacción viene dada por el juego estático del bien común con exclusión de primer orden, y los individuos pueden adoptar tres posturas posibles: cooperador, traidor o excluidor. Denotamos por  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  las abundancias relativas de cooperadores, traidores y excluidores respectivamente, de modo que  $x + y + z = 1$ .

La dinámica evolutiva de las abundancias relativas se modela con la ecuación del replicador. Tal como se hará en las secciones siguientes, se omite la dependencia explícita de las aptitudes con respecto a las abundancias relativas  $y$ , por simplicidad, se escribe  $f_x(x, y, z) = f_x$ ,  $f_y(x, y, z) = f_y$ ,  $f_z(x, y, z) = f_z$  y  $\bar{f}(x, y, z) = \bar{f}$ . Así, el sistema queda expresado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(f_x - \bar{f}), \\ \dot{y} &= y(f_y - \bar{f}), \\ \dot{z} &= z(f_z - \bar{f}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

En el JBC con exclusión de primer orden, la utilidad individual del jugador  $i$  viene dada por la ecuación (2.13). En particular, para un cooperador hay dos escenarios relevantes según si en el resto del grupo existe al menos un excluidor o no:

1. Ninguno de los cojugadores es excluidor ( $N_{EC} = 0$ ).
2. Al menos uno de los cojugadores es excluidor ( $N_{EC} > 0$ ).

Por lo tanto, el pago esperado para un cooperador es:

$$\begin{aligned}
f_x &= \mathbb{P}(N_{EC} = 0) \mathbb{E} \left[ \frac{(N_C + 1)r}{N} c - c \middle| N_{EC} = 0 \right] + \mathbb{P}(N_{EC} > 0) \mathbb{E} \left[ rc - c \middle| N_{EC} > 0 \right], \quad (3.20) \\
&= \mathbb{P}(N_{EC} = 0) \left( \frac{(\mathbb{E}[N_C | N_{EC} = 0] + 1)r}{N} c - c \right) + \mathbb{P}(N_{EC} > 0) (rc - c), \\
&= \mathbb{P}(N_{EC} = 0) \left( \frac{(\mathbb{E}[N_C | N_{EC} = 0] + 1)r}{N} c \right) + \mathbb{P}(N_{EC} > 0) (rc) - c, \\
&= (1 - z)^{N-1} \left( \frac{(\mathbb{E}[N_C | N_{EC} = 0] + 1)r}{N} c \right) + [1 - (1 - z)^{N-1}] rc - c,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_C | N_{EC} = 0] &= \sum_{n_C} n_C \mathbb{P}(N_C = n_C | N_{EC} = 0), \quad (3.21) \\
&= \sum_{n_C=0}^{N-1} n_C \frac{\mathbb{P}(N_C = n_C, N_{EC} = 0)}{\mathbb{P}(N_{EC} = 0)}, \\
&= \sum_{n_C=0}^{N-1} n_C \frac{\mathbb{P}(N_C = n_C, N_{EC} = 0)}{\mathbb{P}(N_{EC} = 0)}, \\
&= \sum_{n_C=0}^{N-1} n_C \frac{\binom{N-1}{n_C} x^{n_C} y^{N-1-n_C}}{(1-z)^{(N-1)}}, \\
&= \sum_{n_C=0}^{N-1} n_C \frac{\binom{N-1}{n_C} x^{n_C} y^{N-1-n_C}}{(1-z)^{n_C} (1-z)^{N-1-n_C}}, \\
&= \sum_{n_C=0}^{N-1} n_C \binom{N-1}{n_C} \left( \frac{x}{1-z} \right)^{n_C} \left( \frac{y}{1-z} \right)^{N-1-n_C}, \\
&= (N-1) \frac{x}{1-z}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el pago esperado de un cooperador es:

$$f_x = rc - c - (1 - z)^{N-1} \frac{rc(N-1)y}{N(1-z)}. \quad (3.22)$$

El pago esperado de un traidor se obtiene de manera análoga a partir de (2.13):

$$\begin{aligned}
f_y &= \mathbb{P}(N_{EC} = 0) \mathbb{E} \left[ \frac{N_C r}{N} c \middle| N_{EC} = 0 \right] + \mathbb{P}(N_{EC} > 0) \mathbb{E} \left[ 0 \middle| N_{EC} > 0 \right], \quad (3.23) \\
&= \mathbb{P}(N_{EC} = 0) \left( \frac{\mathbb{E}[N_C | N_{EC} = 0] r}{N} c \right), \\
&= (1 - z)^{N-1} \frac{rc(N-1)x}{N(1-z)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, el pago esperado de un excluidor es:

$$f_z = rc - c - \delta_P. \quad (3.24)$$

Como  $z = 1 - x - y$ , el sistema se reduce a dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x[(1-x)(f_x - f_z) - y(f_y - f_z)], \\ \dot{y} &= y[(1-y)(f_y - f_z) - x(f_x - f_z)]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

El sistema tiene cuatro puntos de equilibrio. Los tres primeros corresponden a puntos silla y se ubican en los vértices del simplex, mientras que el cuarto es un punto interno y es un centro-foco [28] que se obtiene como:

$$\left( \left[ \frac{N(r-1)}{r(N-1)} \right]^{\frac{1}{N-1}} - \frac{\delta_P \left[ \frac{N(r-1)}{r(N-1)} \right]^{\frac{1}{N-1}}}{(r-1)c}, \frac{\delta_P \left[ \frac{N(r-1)}{r(N-1)} \right]^{\frac{1}{N-1}}}{(r-1)c}, 1 - \left[ \frac{N(r-1)}{r(N-1)} \right]^{\frac{1}{N-1}} \right). \quad (3.26)$$

La Figura 3.2 muestra la dinámica evolutiva del sistema bajo ciertas condiciones iniciales y parámetros, y la Figura 3.3 ilustra las direcciones del campo vectorial en el plano  $x$ - $y$ . Se concluye que, en este modelo, si el estado inicial se encuentra en el interior del simplex  $S_3$ , los tres tipos de individuos coexisten. A diferencia del modelo sin exclusión, donde en el interior del simplex los cooperadores se extinguían para  $1 < r < N$ , en este caso ninguna estrategia desaparece y las tres persisten en la población. En este modelo las estrategias solo se extinguirán si el estado inicial es un punto que pertenece a una de las caras del simplex.

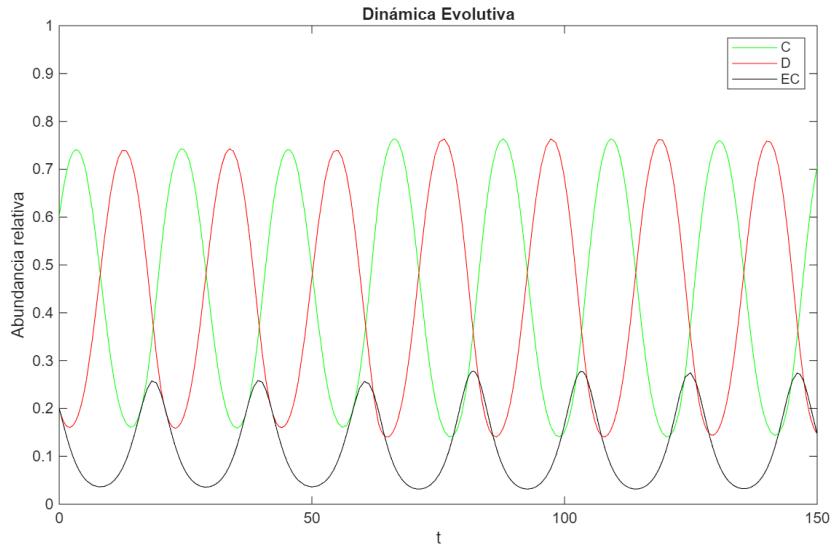


Figura 3.2: Dinámica evolutiva del sistema (3.25) con parámetros  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $N = 5$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $x_0 = 0.6$ ,  $y_0 = 0.2$  y  $z_0 = 0.2$ .

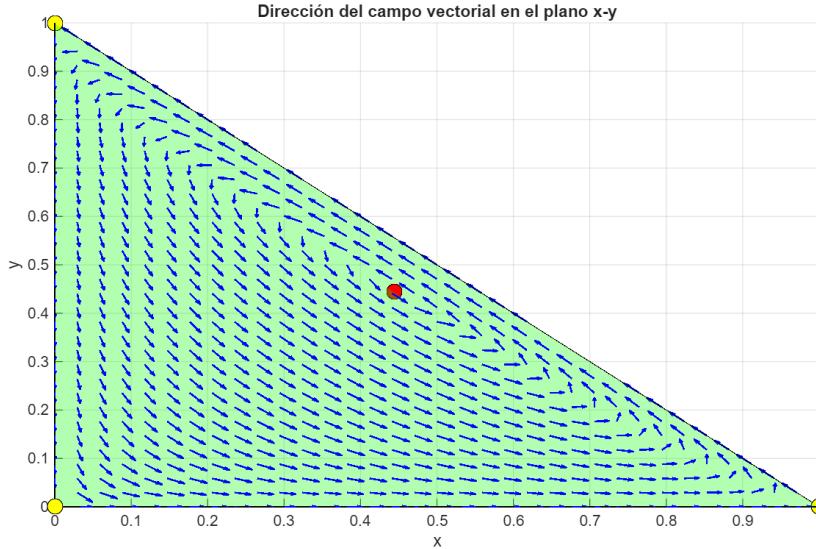


Figura 3.3: El triángulo verde representa el espacio de estados. Los puntos amarillos indican poblaciones puras en los vértices del simplex, mientras que el punto rojo corresponde al punto crítico interno  $(0.445, 0.445, 0.110)$ . Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $N = 5$  y  $\delta_P = 0.5$ .

### 3.5. JBC evolutivo con exclusión de segundo orden

Se considera el caso en el que los individuos de la población interactúan mediante el JBC con exclusión de segundo orden. Al igual que en el modelo anterior, la dinámica evolutiva se describe mediante un sistema de tres ecuaciones del replicador que, utilizando  $z = 1 - x - y$ , se reduce a dos ecuaciones diferenciales correspondientes al sistema (3.25). La diferencia radica en los pagos esperados, calculados según la ecuación (2.14), siguiendo un desarrollo análogo al de la sección anterior.

El pago esperado de un cooperador es:

$$\begin{aligned}
 f_x &= \mathbb{P}(N_{EC} = 0) \mathbb{E} \left[ \frac{(N_C + 1)r}{N} c - c \middle| N_{EC} = 0 \right] + \mathbb{P}(N_{EC} > 0) \mathbb{E} \left[ -c \middle| N_{EC} > 0 \right], \quad (3.27) \\
 &= (1 - z)^{N-1} \left( \frac{(\mathbb{E}[N_C | N_{EC} = 0] + 1)r}{N} c - c \right) - [1 - (1 - z)^{N-1}]c, \\
 &= (1 - z)^{N-1} \left( \frac{\left(\frac{(N-1)x}{1-z} + 1\right)r}{N} c \right) - c, \\
 &= (1 - z)^{N-1} \frac{rc(1 - z + (N - 1)x)}{N(1 - z)} - c.
 \end{aligned}$$

El pago esperado de un traidor es idéntico al obtenido en el modelo con exclusión de primer orden:

$$f_y = (1 - z)^{N-1} \frac{rc(N - 1)x}{N(1 - z)}. \quad (3.28)$$

Por su parte, el pago esperado de un excluidor es:

$$f_z = \mathbb{E} \left[ \frac{(N_C + N_{EC} + 1)}{N_{EC} + 1} rc - c - \delta_P \right], \quad (3.29)$$

$$= \left( \mathbb{E} \left[ \frac{N_C}{N_{EC} + 1} \right] + 1 \right) rc - c - \delta_P. \quad (3.30)$$

donde

$$\mathbb{E} \left[ \frac{N_C}{N_{EC} + 1} \right] = \sum_{n_C=0}^{N-1} \sum_{n_{EC}=0}^{N-1-n_C} \frac{n_C}{n_{EC} + 1} \mathbb{P}(N_C = n_C, N_{EC} = n_{EC}), \quad (3.31)$$

$$= \sum_{n_C=0}^{N-1} \sum_{n_{EC}=0}^{N-1-n_C} \frac{1}{n_{EC} + 1} \frac{(N-1)!}{(n_C-1)! n_{EC}! (N-1-n_C-n_{EC})!} x^{n_C} z^{n_{EC}} y^{N-1-n_C-n_{EC}}. \quad (3.32)$$

Bajo los cambios de variable  $n'_C = n_C - 1$ ,  $n'_{EC} = n_{EC} + 1$  y  $N' = N - 1$ , obtenemos:

$$\mathbb{E} \left[ \frac{N_C}{N_{EC} + 1} \right] = \frac{x}{z} \sum_{n'_C=0}^{N'-1} \sum_{n'_{EC}=1}^{N'-n'_C} \frac{N'!}{n'_C! n'_{EC}! (N'-n'_C-n'_{EC})!} x^{n'_C} z^{n'_{EC}} y^{N'-n'_C-n'_{EC}}, \quad (3.33)$$

$$= \frac{x}{z} \sum_{n'_C=0}^{N'-1} \sum_{n'_{EC}=1}^{N'-n'_C} \mathbb{P}(N'_C = n'_C, N'_{EC} = n'_{EC}), \quad (3.34)$$

donde, debido a los límites de las sumatorias, los términos correspondientes a  $n'_{EC} = 0$  no se incluyen, es decir, la doble suma excluye todos los pares  $(n'_C, n'_{EC}) = (0, 0), (1, 0), \dots, (N', 0)$ . En consecuencia, la probabilidad total representada por la doble suma equivale a  $1 - \mathbb{P}(N'_{EC} = 0)$ , y por tanto:

$$\mathbb{E} \left[ \frac{N_C}{N_{EC} + 1} \right] = \frac{x}{z} (1 - \mathbb{P}(N'_{EC} = 0)), \quad (3.35)$$

$$= \frac{x}{z} \left( 1 - \sum_{n'_C=0}^{N'} \binom{N'}{n'_C} x^{n'_C} y^{N'-n'_C} \right), \quad (3.36)$$

$$= \frac{x}{z} (1 - (x+y)^{N'}). \quad (3.37)$$

Finalmente, obtenemos:

$$f_z = \frac{rcx [1 - (1-z)^{N-1}]}{z} + rc - c - \delta_P. \quad (3.38)$$

En este sistema existen únicamente tres puntos de equilibrio, correspondientes a los vértices del simplex. El punto  $(0, 0, 1)$ , que representa una población compuesta exclusivamente por excluidores, es estable, mientras que los otros dos vértices son inestables [28].

De este modelo se concluye que, cuando hay excluidores en la población, su aptitud les confiere la mayor ventaja reproductiva, provocando la extinción de las demás estrategias, como se observa en la Figura 3.4. Para condiciones iniciales localizadas en la cara del simplex sin excluidores y con una combinación de cooperadores y traidores, se obtiene un comportamiento análogo al JBC evolutivo sin exclusión: los cooperadores se extinguén y los traidores terminan dominando, tal como se muestra en la Figura 3.5.

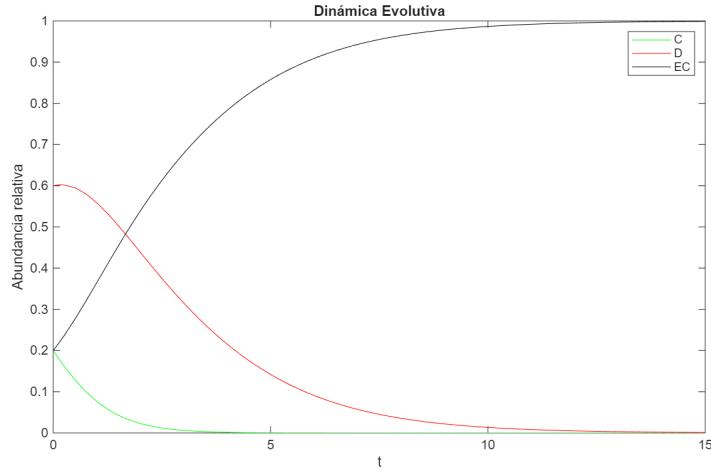


Figura 3.4: Dinámica evolutiva del sistema con parámetros  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $N = 5$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $x_0 = 0.6$ ,  $y_0 = 0.2$  y  $z_0 = 0.2$ .

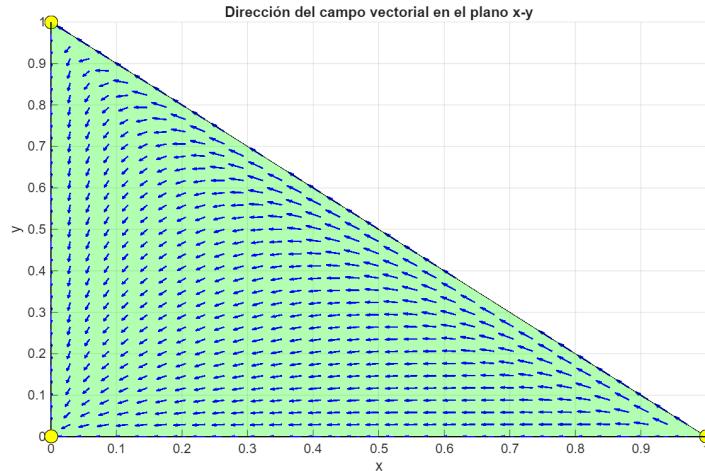


Figura 3.5: Dirección del campo vectorial en el espacio de estados. Los puntos amarillos representan los puntos críticos. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $N = 5$  y  $\delta_P = 0.5$ .

# Capítulo 4

## Juego del bien común evolutivo en redes complejas

### 4.1. JBC evolutivo en redes complejas

#### 4.1.1. Modelo basado en agentes

En una población real no resulta realista suponer que todos los individuos tienen la posibilidad de interactuar con cualquier otro miembro. Por ejemplo, la probabilidad de que dos personas elegidas al azar dentro de la población mundial lleguen a encontrarse es extremadamente baja y puede considerarse despreciable. En cambio, la mayoría de los individuos mantiene interacciones frecuentes dentro de un círculo reducido de conocidos, mientras que la mayor parte de la población queda fuera de su red habitual de contactos. Este patrón de interacciones puede modelarse mediante una red.

Para describir el JBC evolutivo en una población estructurada se considera una población de  $N_p$  individuos compuesta por cooperadores y traidores, donde cada individuo está representado por un nodo en una red. Cada nodo participa simultáneamente en un juego con sus vecinos inmediatos, como se ilustra en la Figura 4.1. Una vez completados los  $N_p$  juegos, las estrategias se actualizan mediante un proceso de aprendizaje social [30], en el cual los nodos comparan sus pagos con los de sus vecinos. Cada nodo  $i$  selecciona aleatoriamente a uno de sus vecinos  $v_i$  y compara el pago que obtuvo como anfitrión del juego, denotado por  $u_i$ , con el pago que ese vecino obtuvo en el mismo juego,  $u_{i_v}$ . La probabilidad de que el nodo  $i$  adopte la estrategia de su vecino se modela mediante una función sigmoidea:

$$\text{sgm}(u_{i_v}, u_i) = \frac{1}{1 + e^{-(u_{i_v} - u_i)}}, \quad (4.1)$$

la cual asigna una mayor probabilidad de imitación a los vecinos cuyo pago fue significativamente superior al del anfitrión. Este proceso ocurre de manera paralela en todos los nodos y se repite en cada iteración, generando así la dinámica evolutiva de la población. Cabe mencionar que en otros modelos del JBC evolutivo los pagos acumulados de los  $k_i$  juegos de cada nodo  $i$  también se consideran [31]. No obstante, en este trabajo se descarta ese mecanismo con el fin de simplificar la dinámica y reducir la carga computacional de las simulaciones.

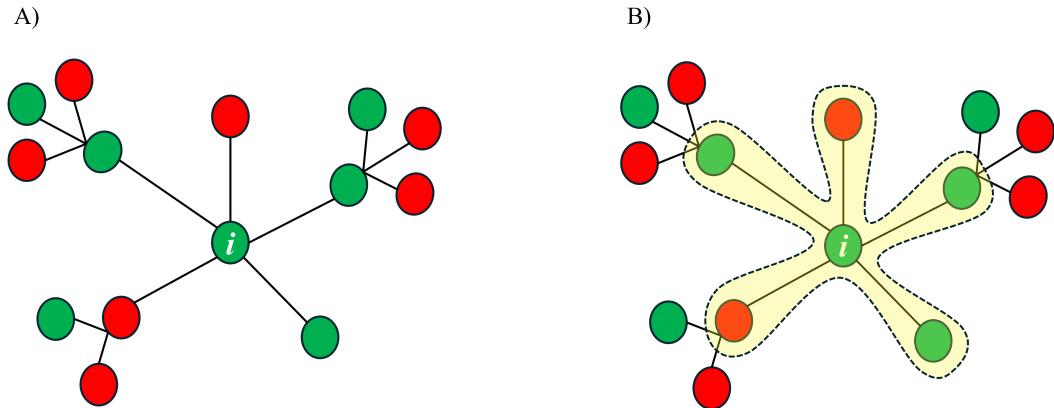


Figura 4.1: A) Red donde los nodos rojos representan a los traidores y los verdes a los cooperadores. B) El contorno representa el grupo formado alrededor del nodo  $i$ .

Para simular el JBC evolutivo en redes se generó una red libre de escala de  $N_p = 500$  nodos utilizando el modelo de Barabási-Albert. Se partió de una red completamente conectada de 3 nodos, y en cada iteración se añadió un nuevo nodo con 3 enlaces siguiendo el mecanismo de conexión preferencial. La red resultante presentó un coeficiente de agrupamiento promedio de 0.06 y una longitud de camino promedio de 3.1. Aunque se obtuvo a partir de una sola realización, se asumió que estas métricas son representativas del comportamiento promedio de redes libres de escala. La distribución de grados de la red generada se muestra en la Figura 4.2.

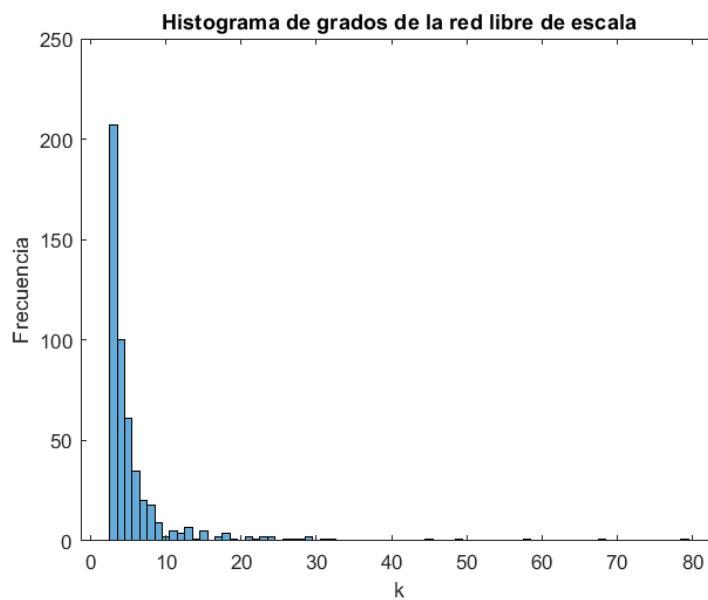


Figura 4.2: Histograma de grados de la red generada.

El objetivo de la simulación es analizar la dinámica evolutiva de las abundancias relativas de cooperadores y traidores bajo diferentes distribuciones iniciales. A diferencia del modelo con población bien mezclada estudiado en el capítulo anterior, donde una condición inicial

$(x_0, y_0)$  representa un único estado, en poblaciones estructuradas una misma condición global puede materializarse en múltiples configuraciones de la red. Por ejemplo, no es equivalente asignar a los cooperadores los nodos más conectados y a los traidores los menos conectados, o viceversa. Para explorar estos escenarios se definieron dos clases de nodos:

1. **Clase 1:** Nodos con muchas conexiones.
2. **Clase 2:** Nodos con pocas conexiones.

Al analizar la red, se observó que el 90 % de los nodos poseen grados en el intervalo  $[3, 10]$ , mientras que el 10 % restante tiene grados en el intervalo  $[11, 80]$ . Estos grupos se definieron como clase 1 y clase 2, respectivamente (véase Figura 4.3). Esta separación resulta interesante ya que permite evaluar el impacto de los nodos altamente conectados en la dinámica global, a pesar de constituir solo una fracción minoritaria de la población.

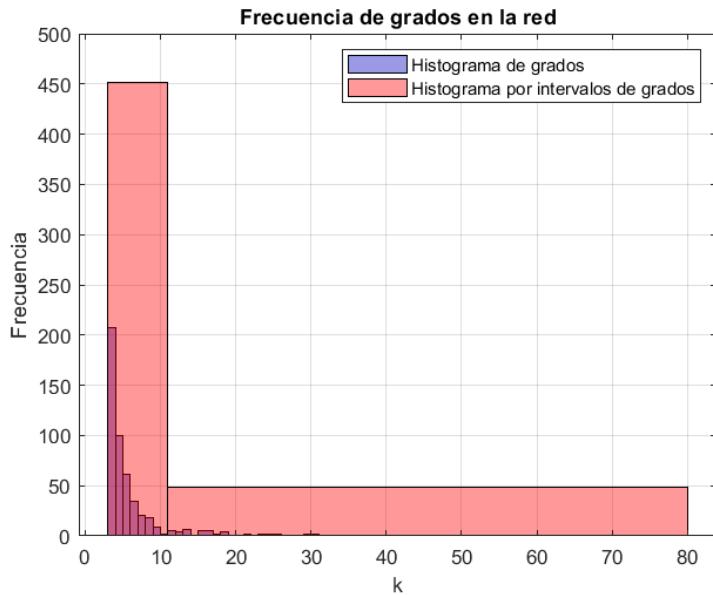


Figura 4.3: Distribución de grados de la red generada. En el histograma por clases, la clase 1 contiene nodos con  $3 \leq k \leq 10$  (90 % de la red), y la clase 2 nodos con  $11 \leq k \leq 80$  (10 %). La clase 1 presenta un grado promedio  $\bar{k} = 4.3$ , mientras que la clase 2 alcanza  $\bar{k} = 22.2$ .

Se estableció como condición inicial global que el 90 % de los nodos fueran cooperadores y el 10 % restante traidores, con el fin de observar con mayor detalle el proceso de extinción de la cooperación. Se definieron tres escenarios:

1. **Asignación uniforme:** ambas clases contienen 90 % de cooperadores y 10 % de traidores.
2. **Concentración de cooperadores en clase 2:** se asigna el mayor número posible de cooperadores a los nodos más conectados (clase 2), manteniendo la proporción global inicial.

3. **Concentración de traidores en clase 2:** se asigna el mayor número posible de traidores a la clase 2, sin alterar la proporción global inicial.

Como se muestra en la Figura 4.4, cuando los traidores se concentran en los nodos de la clase 2, la extinción de los cooperadores ocurre de manera mucho más rápida. En cambio, en los otros dos escenarios la desaparición de los cooperadores fue significativamente más lenta, siendo apenas más rápida en la distribución uniforme que en la concentración de cooperadores en la clase 2. Estos resultados evidencian la fuerte influencia de los nodos altamente conectados en la dinámica evolutiva, característica inherente a las redes libres de escala.

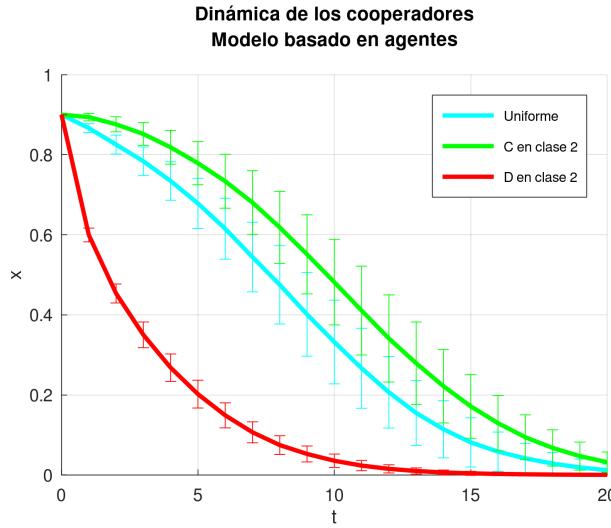


Figura 4.4: Dinámica de los cooperadores al simular el JBC evolutivo en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 100 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $x_0 = 0.9$  y  $y_0 = 0.1$ .

#### 4.1.2. Modelo bajo aproximación por clases de nodos

El modelo bajo aproximación por clases de nodos se inspira en la metodología desarrollada por Pastor-Satorras y colaboradores en el contexto de modelos epidemiológicos [15, 19]. En dichos trabajos se asume que los nodos con el mismo número de vecinos presentan un comportamiento promedio similar, lo que permite agruparlos en clases según su grado. De esta forma, cada clase representa a los nodos con  $k$  vecinos.

En este trabajo se adopta dicha idea, agrupando los nodos en función de intervalos de grado, de modo que cada nodo se asigna a la clase correspondiente según su número de conexiones. En particular, se trabaja con dos clases: una clase que agrupa a los nodos con pocos enlaces y otra que concentra a los nodos con un alto número de conexiones.

Bajo este planteamiento, para modelar la dinámica evolutiva de las abundancias relativas de cooperadores y traidores, se describen los posibles estados de un nodo de clase  $\phi$  mediante un diagrama, como se muestra en la Figura 4.5, donde  $\phi \in \{1, 2, \dots, \phi_{\max}\}$  representa la clase. En este esquema,  $P_{\phi_C \rightarrow C}$  y  $P_{\phi_C \rightarrow D}$  corresponden a las probabilidades de que un nodo

cooperador de clase  $\phi$  permanezca como cooperador o cambie a traidor, respectivamente. De manera análoga,  $P_{\phi_D \rightarrow D}$  y  $P_{\phi_D \rightarrow C}$  denotan las probabilidades de transición de un traidor de clase  $\phi$ .

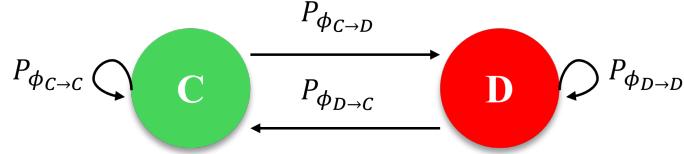


Figura 4.5: Diagrama de estados de un jugador del JBC evolutivo en una red compleja.

La probabilidad de que un individuo en la red cambie de estrategia se obtiene como la probabilidad conjunta de dos eventos: que, después de jugar el JBC, el nodo seleccione al azar a un vecino cuya estrategia sea distinta de la propia, y que dicho vecino haya obtenido un pago suficientemente mayor como para que el nodo decida imitarlo.

En particular, la probabilidad de que un nodo cooperador de clase  $\phi$  se convierta en traidor en la siguiente generación corresponde a la probabilidad de que, al comparar su pago con el de un vecino elegido al azar, dicho vecino resulte ser traidor y, además, el cooperador decida adoptar su estrategia. Esto puede expresarse como

$$P_{\phi_C \rightarrow D} = \mathbb{P}(\text{vecino es traidor, imitar al vecino}) \quad (4.2)$$

$$= \mathbb{P}(\text{imitar al vecino} \mid \text{vecino es traidor}) \mathbb{P}(\text{vecino es traidor}). \quad (4.3)$$

Como se definió en la ecuación 4.1, la probabilidad de imitación condicional se modela mediante una función sigmoidea que compara los pagos esperados del individuo focal y del vecino. En este caso,

$$\mathbb{P}(\text{imitar al vecino} \mid \text{vecino es traidor}) = \text{sgm}(f_{y_\phi}, f_{x_\phi}), \quad (4.4)$$

donde  $f_{x_\phi}$  y  $f_{y_\phi}$  representan los pagos esperados de un cooperador y un traidor en un grupo formado por un nodo de clase  $\phi$ .

Por otra parte, la probabilidad de que el vecino elegido sea traidor puede obtenerse mediante el teorema de probabilidad total:

$$\mathbb{P}(\text{vecino es traidor}) = \sum_{\alpha} \mathbb{P}(\text{vecino es traidor} \mid \text{vecino es clase } \alpha) \mathbb{P}(\text{vecino es clase } \alpha). \quad (4.5)$$

Para cada clase  $\alpha$ , la probabilidad condicional de que un vecino sea traidor viene dada por

$$\mathbb{P}(\text{vecino es traidor} \mid \text{vecino es clase } \alpha) = y_\alpha = 1 - x_\alpha, \quad (4.6)$$

mientras que

$$\mathbb{P}(\text{vecino es clase } \alpha) = v_{\phi_\alpha}, \quad (4.7)$$

donde  $v_{\phi_\alpha}$  denota la probabilidad de que un vecino de un nodo de clase  $\phi$  pertenezca a la clase  $\alpha$ .

De este modo,

$$\mathbb{P}(\text{vecino es traidor}) = y_{\phi_v} = \sum_{\alpha} (1 - x_{\alpha}) v_{\phi_{\alpha}}, \quad (4.8)$$

y análogamente, la probabilidad de que el vecino sea cooperador es

$$\mathbb{P}(\text{vecino es cooperador}) = x_{\phi_v} = \sum_{\alpha} x_{\alpha} v_{\phi_{\alpha}}. \quad (4.9)$$

Con estos elementos, las probabilidades de transición entre estrategias pueden escribirse de forma compacta como:

$$\begin{aligned} P_{\phi_{C \rightarrow D}} &= \text{sgm}(f_{y_{\phi}}, f_{x_{\phi}}) \sum_{\alpha} (1 - x_{\alpha}) v_{\phi_{\alpha}}, & P_{\phi_{C \rightarrow C}} &= 1 - P_{\phi_{C \rightarrow D}}, \\ P_{\phi_{D \rightarrow C}} &= \text{sgm}(f_{x_{\phi}}, f_{y_{\phi}}) \sum_{\alpha} x_{\alpha} v_{\phi_{\alpha}}, & P_{\phi_{D \rightarrow D}} &= 1 - P_{\phi_{D \rightarrow C}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

El pago esperado de un cooperador en un grupo formado por un nodo de clase  $\phi$  viene dado por

$$f_{x_{\phi}} = \mathbb{E} \left[ \frac{(N_{C_{\phi_v}} + 1)r}{\bar{k}_{\phi} + 1} c - c \right], \quad (4.11)$$

donde  $N_{C_{\phi_v}}$  es el número de vecinos cooperadores del nodo y  $\bar{k}_{\phi}$  es su grado promedio. Suponiendo que  $N_{C_{\phi_v}}$  sigue una distribución binomial, se obtiene

$$f_{x_{\phi}} = \frac{(\bar{k}_{\phi} x_{\phi_v} + 1)r}{\bar{k}_{\phi} + 1} c - c. \quad (4.12)$$

De manera similar, el pago esperado de un traidor en un grupo formado por un nodo de clase  $\phi$  es

$$f_{y_{\phi}} = \frac{\bar{k}_{\phi} x_{\phi_v} r}{\bar{k}_{\phi} + 1} c. \quad (4.13)$$

Sea  $x_{\phi}(t)$  y  $y_{\phi}(t)$  la fracción de cooperadores y traidores de clase  $\phi$  en el tiempo discreto  $t$ . La evolución temporal de estas fracciones está dada por:

$$\begin{aligned} x_{\phi}(t+1) &= P_{\phi_{C \rightarrow C}} x_{\phi}(t) + P_{\phi_{D \rightarrow C}} y_{\phi}(t), \\ y_{\phi}(t+1) &= P_{\phi_{D \rightarrow D}} y_{\phi}(t) + P_{\phi_{C \rightarrow D}} x_{\phi}(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dado que en todo instante  $\tau$  se cumple que  $y_{\phi}(\tau) = 1 - x_{\phi}(\tau)$ , basta resolver la ecuación para  $x_{\phi}(\tau)$  para conocer la dinámica completa.

Mediante una expansión de Taylor, se aproxima:

$$x_{\phi}(t+1) \approx x_{\phi}(t) + \dot{x}_{\phi}(t), \quad (4.15)$$

lo que permite pasar de un modelo discreto a uno continuo:

$$\dot{x}_\phi(t) = x_\phi(t+1) - x_\phi(t). \quad (4.16)$$

Así, se obtiene una ecuación diferencial no lineal:

$$\dot{x}_\phi(t) = P_{\phi D \rightarrow C}(1 - x_\phi(t)) - P_{\phi C \rightarrow D}x_\phi(t). \quad (4.17)$$

Finalmente, las dinámicas evolutivas globales se obtienen ponderando las dinámicas de cada clase según su peso en la red:

$$x = \sum_{\phi=1}^{\phi_{\max}} \rho_\phi x_\phi, \quad y = 1 - x, \quad (4.18)$$

donde  $\rho_\phi$  es la fracción de nodos pertenecientes a la clase  $\phi$ .

#### 4.1.3. Simulación numérica

Con el modelo definido, se evaluó su capacidad para reproducir la dinámica evolutiva del JBC en una red libre de escala generada. De manera análoga al modelo basado en agentes, se definieron dos clases  $\phi \in \{1, 2\}$ . Los coeficientes  $v_{\phi\alpha}$  se calcularon numéricamente a partir de la red, obteniéndose:

$$v_{11} = 0.556, \quad (4.19)$$

$$v_{12} = 1 - v_{11},$$

$$v_{21} = 0.756,$$

$$v_{22} = 1 - v_{21}.$$

$$(4.20)$$

Las condiciones iniciales para los tres escenarios de análisis fueron:

**1. Asignación uniforme:**

$$x_1 = 0.90, \quad x_2 = 0.90. \quad (4.21)$$

**2. Concentración de cooperadores en clase 2:**

$$x_1 = 0.89, \quad x_2 = 1. \quad (4.22)$$

**3. Concentración de traidores en clase 2:**

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0. \quad (4.23)$$

La dinámica evolutiva de los cooperadores obtenida mediante el modelo bajo aproximación por clases se muestra en la Figura 4.6. A simple vista, los resultados son consistentes con los obtenidos en la simulación basada en agentes: el escenario en el que los cooperadores desaparecen más rápidamente corresponde a la concentración de traidores en la clase 2, mientras que la desaparición más lenta ocurre cuando la mayoría de los cooperadores se encuentra en dicha clase.

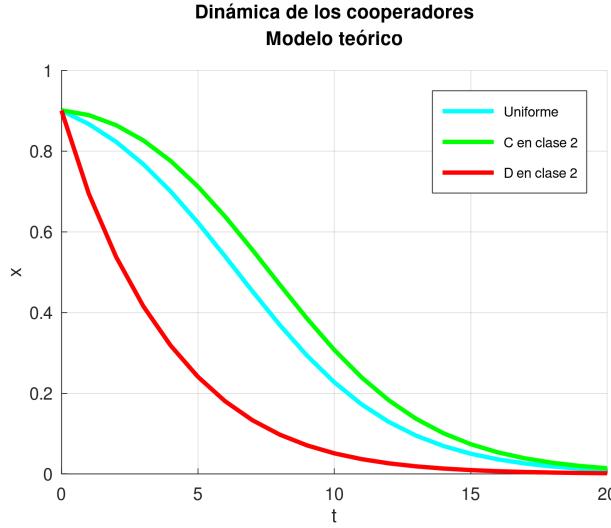


Figura 4.6: Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\bar{k}_1 = 4.3$ ,  $\bar{k}_2 = 22.2$ ,  $x_0 = 0.9$  y  $y_0 = 0.1$ .

## 4.2. JBC evolutivo con exclusión en redes complejas

### 4.2.1. Modelo basado en agentes

En esta sección analizamos el JBC evolutivo con exclusión de primer orden sobre la misma red libre de escala generada en la sección anterior. La principal diferencia respecto al juego evolutivo previamente estudiado es que ahora, además de cooperadores y traidores, incorporamos a los excluidores en la población.

Para la simulación de este juego en la red libre de escala se consideró la condición inicial  $x_0 = 0.1$ ,  $y_0 = 0.45$  y  $z_0 = 0.45$ . Al igual que en la sección anterior, se definieron dos clases en la red y realizamos la simulación del JBC evolutivo con exclusión de primer orden considerando los siguientes cuatro escenarios iniciales:

1. **Asignación uniforme:** ambas clases contienen 10% de cooperadores y 45% de traidores.
2. **Concentración de cooperadores en clase 2:** se asigna la mayor cantidad posible de cooperadores a los nodos más conectados, manteniendo la proporción global inicial.
3. **Concentración de traidores en clase 2:** se asigna la mayor cantidad posible de traidores a los nodos de clase 2, sin modificar la proporción global inicial.
4. **Concentración de excluidores en clase 2:** se asigna la mayor cantidad posible de excluidores a los nodos de clase 2, manteniendo la proporción global inicial.

Las Figuras 4.7, 4.8 y 4.9 muestran la evolución temporal de cada estrategia bajo los cuatro escenarios descritos. Dado que la red utilizada es finita, en etapas avanzadas de la simulación es común que alguna de las estrategias se extinga completamente, un fenómeno

que no aparece en el modelo teórico, el cual asume una población infinita. Por esta razón, la comparación entre el modelo basado en agentes y el modelo teórico solo es válida durante las primeras generaciones, donde las tres estrategias siguen presentes y la dinámica no está dominada por efectos de tamaño de la red.

Como se observa en las figuras, la dinámica depende de cómo se asignan inicialmente las estrategias sobre la red. Esto implica que, aun manteniendo constantes las condiciones iniciales globales ( $x_0, y_0, z_0$ ), distintos patrones de asignación pueden generar comportamientos evolutivos diferentes.

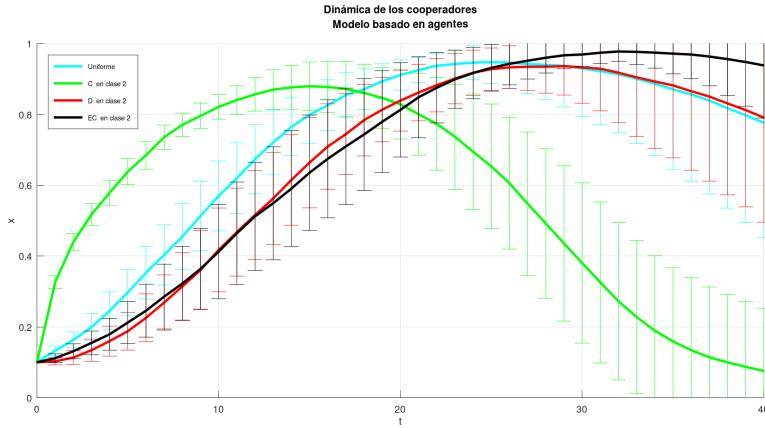


Figura 4.7: Dinámica de los cooperadores al simular el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $x_0 = 0.1$  y  $y_0 = 0.45$ .

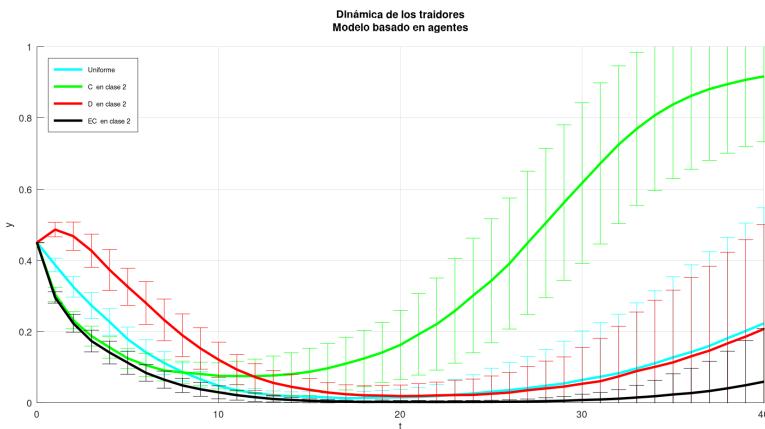


Figura 4.8: Dinámica de los traidores al simular el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $x_0 = 0.1$  y  $y_0 = 0.45$ .

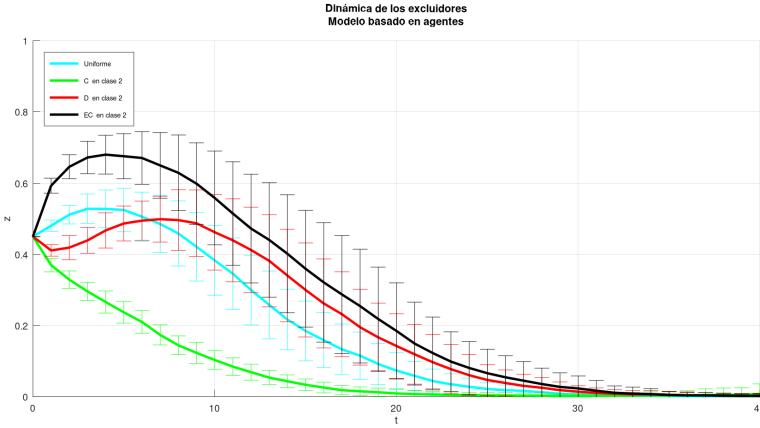


Figura 4.9: Dinámica de los excluidores al simular el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $x_0 = 0.1$  y  $y_0 = 0.45$ .

#### 4.2.2. Modelo bajo aproximación por clases de nodos

Para modelar el JBC evolutivo con exclusión de primer orden sobre una red, utilizamos una extensión del modelo bajo aproximación por clases de nodos definido en la sección anterior. Dado que ahora existen tres estrategias en la población, los nodos pueden encontrarse en un tercer estado posible. El correspondiente diagrama de estados se muestra en la Figura 4.10.

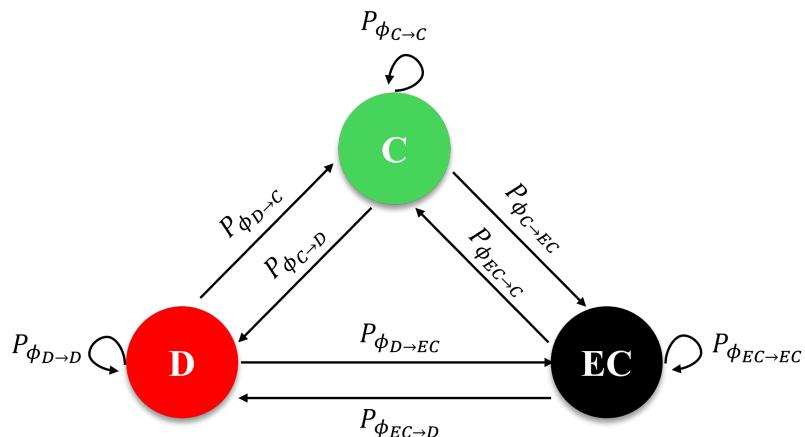


Figura 4.10: Diagrama de estados de un jugador del JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red compleja.

Las probabilidades de transición entre estados se expresan como:

$$\begin{aligned}
P_{\phi_C \rightarrow D} &= y_{\phi_v} \text{sgm}(f_{y_\phi}, f_{x_\phi}), & P_{\phi_C \rightarrow EC} &= z_{\phi_v} \text{sgm}(f_{z_\phi}, f_{x_\phi}), \\
P_{\phi_D \rightarrow C} &= x_{\phi_v} \text{sgm}(f_{x_\phi}, f_{y_\phi}), & P_{\phi_D \rightarrow EC} &= z_{\phi_v} \text{sgm}(f_{z_\phi}, f_{y_\phi}), \\
P_{\phi_{EC} \rightarrow C} &= x_{\phi_v} \text{sgm}(f_{x_\phi}, f_{z_\phi}), & P_{\phi_{EC} \rightarrow D} &= y_{\phi_v} \text{sgm}(f_{y_\phi}, f_{z_\phi}), \\
P_{\phi_C \rightarrow C} &= 1 - P_{\phi_C \rightarrow D} - P_{\phi_C \rightarrow EC}, & P_{\phi_D \rightarrow D} &= 1 - P_{\phi_D \rightarrow C} - P_{\phi_D \rightarrow EC}, \\
P_{\phi_{EC} \rightarrow EC} &= 1 - P_{\phi_{EC} \rightarrow C} - P_{\phi_{EC} \rightarrow D}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Los pagos esperados  $f_{x_\phi}$ ,  $f_{y_\phi}$  y  $f_{z_\phi}$  se calculan a partir de las expresiones (3.22), (3.23) y (3.24) para el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en poblaciones bien mezcladas. De este modo obtenemos:

$$\begin{aligned}
f_{x_\phi} &= rc - c - (1 - z_{v_\phi})^{\bar{k}_\phi} \frac{rc\bar{k}_\phi y_{v_\phi}}{(\bar{k}_\phi + 1)(1 - z_{v_\phi})}, \\
f_{y_\phi} &= (1 - z_{v_\phi})^{\bar{k}_\phi} \frac{rc\bar{k}_\phi x_{v_\phi}}{(\bar{k}_\phi + 1)(1 - z_{v_\phi})}, \\
f_{z_\phi} &= rc - c - \delta_P.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

De manera análoga a la sección anterior, calculamos  $x_{\phi_v}$ ,  $y_{\phi_v}$  y  $z_{\phi_v}$  como:

$$x_{\phi_v} = \sum_{\alpha} x_{\alpha} v_{\phi_{\alpha}}, \quad y_{\phi_v} = \sum_{\alpha} y_{\alpha} v_{\phi_{\alpha}}, \quad z_{\phi_v} = \sum_{\alpha} z_{\alpha} v_{\phi_{\alpha}}. \tag{4.26}$$

El sistema de ecuaciones discretas que describe la dinámica de cada clase es:

$$\begin{aligned}
x_{\phi}(t+1) &= P_{\phi_C \rightarrow C} x_{\phi}(t) + P_{\phi_D \rightarrow C} y_{\phi}(t) + P_{\phi_{EC} \rightarrow C} z_{\phi}(t), \\
y_{\phi}(t+1) &= P_{\phi_D \rightarrow D} y_{\phi}(t) + P_{\phi_C \rightarrow D} x_{\phi}(t) + P_{\phi_{EC} \rightarrow D} z_{\phi}(t), \\
z_{\phi}(t+1) &= P_{\phi_{EC} \rightarrow EC} z_{\phi}(t) + P_{\phi_C \rightarrow EC} x_{\phi}(t) + P_{\phi_D \rightarrow EC} y_{\phi}(t).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Dado que en todo instante  $\tau$  se cumple que  $z_{\phi}(\tau) = 1 - x_{\phi}(\tau) - y_{\phi}(\tau)$ , basta con resolver las ecuaciones para  $x_{\phi}(\tau)$  y  $y_{\phi}(\tau)$  para obtener la dinámica completa.

Aplicando una expansión de Taylor se obtiene el sistema continuo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{\phi}(t) &= P_{\phi_D \rightarrow C} y_{\phi}(t) + P_{\phi_{EC} \rightarrow C} z_{\phi}(t) - (P_{\phi_C \rightarrow D} + P_{\phi_C \rightarrow EC}) x_{\phi}(t), \\
\dot{y}_{\phi}(t) &= P_{\phi_C \rightarrow D} x_{\phi}(t) + P_{\phi_{EC} \rightarrow D} z_{\phi}(t) - (P_{\phi_D \rightarrow C} + P_{\phi_D \rightarrow EC}) y_{\phi}(t).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Las dinámicas globales se obtienen ponderando según el peso de cada clase en la red:

$$x = \sum_{\phi=1}^{\phi_{\max}} \rho_{\phi} x_{\phi}, \quad y = \sum_{\phi=1}^{\phi_{\max}} \rho_{\phi} y_{\phi}, \quad z = 1 - x - y. \tag{4.29}$$

### 4.2.3. Simulación numérica

Con el modelo definido, se analizó su capacidad para reproducir la dinámica evolutiva del JBC con exclusión de primer orden sobre la red libre de escala generada en la primera sección de este capítulo. Los coeficientes  $v_{\phi\alpha}$  son los mismos que en la sección anterior (4.19), ya que dependen únicamente de la estructura de la red.

Las condiciones iniciales para los cuatro escenarios de análisis son:

**1. Asignación uniforme:**

$$x_1 = 0.1, \quad x_2 = 0.1, \quad y_1 = 0.45, \quad y_2 = 0.45. \quad (4.30)$$

**2. Concentración de cooperadores en clase 2:**

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad y_1 = 0.50, \quad y_2 = 0. \quad (4.31)$$

**3. Concentración de traidores en clase 2:**

$$x_1 = 0.11, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0.39, \quad y_2 = 1. \quad (4.32)$$

**4. Concentración de excluidores en clase 2:**

$$x_1 = 0.11, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0.50, \quad y_2 = 0. \quad (4.33)$$

La dinámica evolutiva obtenida mediante el modelo bajo aproximación por clases se muestra en las Figuras 4.11, 4.12 y 4.13.

Para comparar los resultados del modelo teórico con los obtenidos mediante el modelo basado en agentes, realizamos una simulación numérica del sistema teórico restringida únicamente al corto plazo. Esto se debe a que el modelo teórico asume una red infinita, mientras que la simulación basada en agentes se ejecuta sobre una red finita en la cual, tras varias generaciones, algunas estrategias pueden desaparecer.

Los resultados muestran que el modelo teórico reproduce de manera cualitativa las trayectorias observadas en el modelo basado en agentes. Aunque no coinciden exactamente, las tendencias iniciales son notablemente similares.

El modelo teórico es capaz de capturar adecuadamente la dinámica temprana en redes finitas. En consecuencia, constituye una herramienta útil para predecir el comportamiento del sistema en el corto plazo, incluso en escenarios donde la cantidad finita de nodos impide que el modelo teórico describa la dinámica completa en escalas de tiempo largas.

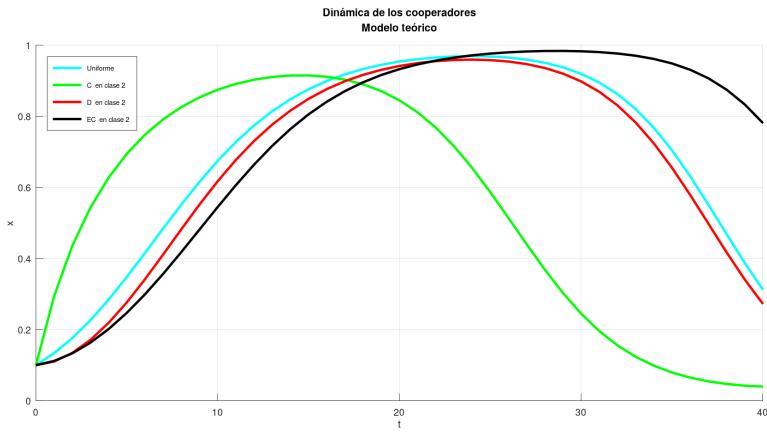


Figura 4.11: Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo con exclusión de primer orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $\bar{k}_1 = 4.3$ ,  $\bar{k}_2 = 22.2$ ,  $x_0 = 0.1$  y  $y_0 = 0.45$ .

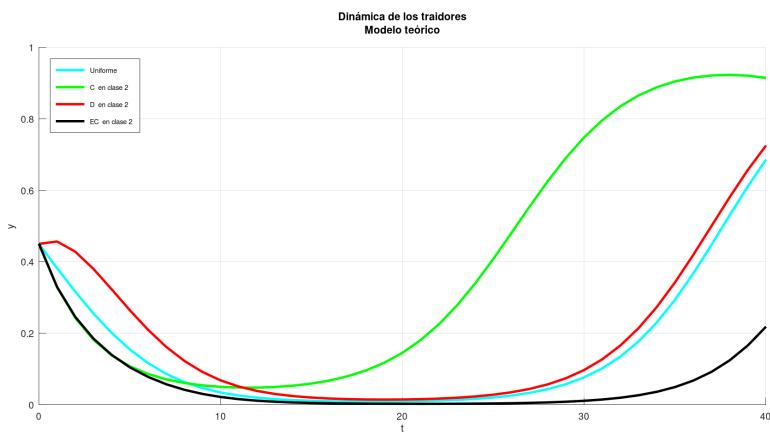


Figura 4.12: Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $\bar{k}_1 = 4.3$ ,  $\bar{k}_2 = 22.2$ ,  $x_0 = 0.1$  y  $y_0 = 0.45$ .

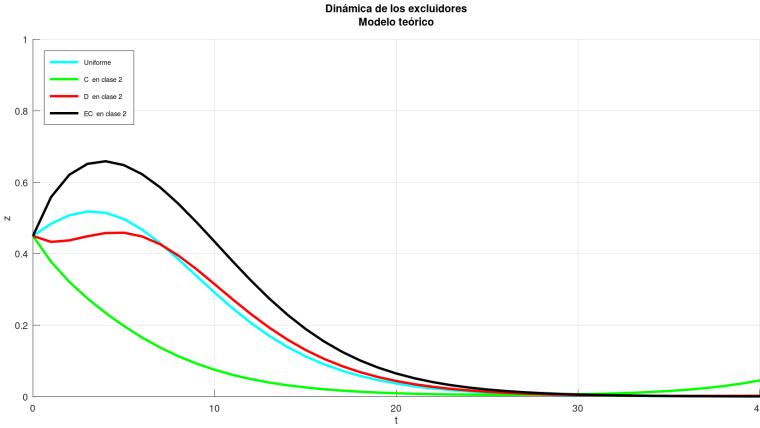


Figura 4.13: Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $\bar{k}_1 = 4.3$ ,  $\bar{k}_2 = 22.2$ ,  $x_0 = 0.1$  y  $y_0 = 0.45$ .

## 4.3. JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en redes complejas

### 4.3.1. Modelo basada en agentes

Analizamos ahora el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden sobre una red libre de escala. La diferencia fundamental respecto al modelo de la sección anterior radica en que, en este caso, los excluidores no solo sancionan a los traidores, sino que también excluyen a los cooperadores.

Para la simulación del juego evolutivo se consideró una condición inicial con  $x_0 = 0.45$ ,  $y_0 = 0.45$  y  $z_0 = 1 - x_0 - y_0$ . La dinámica evolutiva se estudió de forma análoga a la descrita previamente, bajo los mismos cuatro escenarios iniciales.

Las Figuras 4.14, 4.15 y 4.16 presentan los resultados obtenidos. Se observa que, en el escenario *concentración de excluidores en clase 2*, estos logran crecer rápidamente hasta dominar la población, mientras que en el escenario *concentración de traidores en clase 2* el dominio de los excluidores se alcanza de forma más lenta. Este comportamiento resalta, una vez más, la influencia de los nodos altamente conectados en la propagación de las estrategias a través de la red.

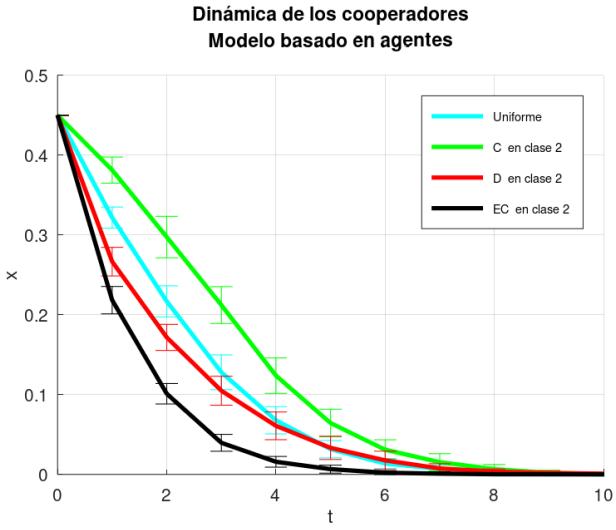


Figura 4.14: Dinámica de los cooperadores al simular el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $x_0 = 0.45$  y  $y_0 = 0.45$ .

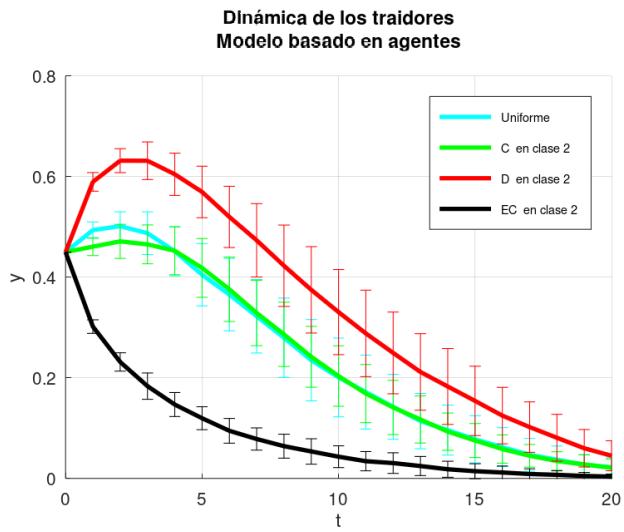


Figura 4.15: Dinámica de los traidores al simular el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $x_0 = 0.45$  y  $y_0 = 0.45$ .

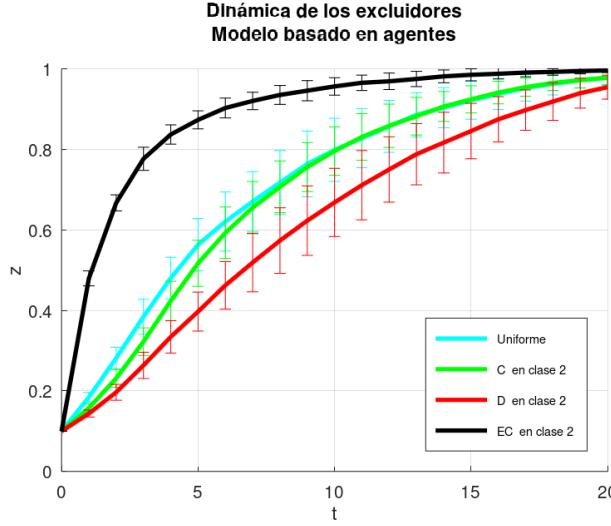


Figura 4.16: Dinámica de los excluidores al simular el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Los resultados corresponden al promedio de 30 realizaciones independientes y las barras de error representan la desviación estándar. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $x_0 = 0.45$  y  $y_0 = 0.45$ .

### 4.3.2. Modelo bajo aproximación por clases de nodos

Para modelar el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden se utilizó el mismo marco teórico descrito para el caso de exclusión de primer orden, con la única diferencia en la definición de los pagos esperados. En este escenario, las expresiones se obtienen adaptando las ecuaciones (3.27), (3.28) y (3.38) al caso de redes, resultando:

$$\begin{aligned}
 f_{x_\phi} &= (1 - z_{v_\phi})^{\bar{k}_\phi} \frac{rc(1 - z_{v_\phi} + \bar{k}_\phi x_{v_\phi})}{(\bar{k}_\phi + 1)(1 - z_{v_\phi})} - c, \\
 f_{y_\phi} &= (1 - z_{v_\phi})^{\bar{k}_\phi} \frac{rc\bar{k}_\phi x_{v_\phi}}{(\bar{k}_\phi + 1)(1 - z_{v_\phi})}, \\
 f_{z_\phi} &= \frac{rcx_{v_\phi} \left[ 1 - (1 - z_{v_\phi})^{\bar{k}_\phi} \right]}{z_{v_\phi}} + rc - c - \delta_P.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

### 4.3.3. Simulación numérica

Definidos los pagos esperados, se evaluó la capacidad del modelo bajo aproximación por clases de nodos para reproducir las dinámicas evolutivas observadas en las simulaciones de agentes. Las condiciones iniciales de los cuatro escenarios de análisis fueron:

#### 1. Asignación uniforme:

$$x_1 = 0.45, \quad x_2 = 0.45, \quad y_1 = 0.45, \quad y_2 = 0.45. \tag{4.35}$$

## 2. Concentración de cooperadores en clase 2:

$$x_1 = 0.39, \quad x_2 = 1, \quad y_1 = 0.50, \quad y_2 = 0. \quad (4.36)$$

## 3. Concentración de traidores en clase 2:

$$x_1 = 0.50, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0.39, \quad y_2 = 1. \quad (4.37)$$

## 4. Concentración de excluidores en clase 2:

$$x_1 = 0.50, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0.50, \quad y_2 = 0. \quad (4.38)$$

Las dinámicas obtenidas mediante el modelo se muestran en las Figuras 4.17, 4.18 y 4.19. Al comparar estos resultados con los obtenidos mediante el modelo basado en agentes observamos, en primer lugar, que en todos los escenarios los excluidores terminan por dominar la red, llevando a la extinción tanto a los cooperadores como a los traidores.

Asimismo, las trayectorias de las tres estrategias en los cuatro escenarios considerados presentan un comportamiento cualitativamente consistente con el observado en las simulaciones de agentes. Esto indica que el modelo bajo aproximación por clases reproduce adecuadamente la dinámica evolutiva global del sistema.

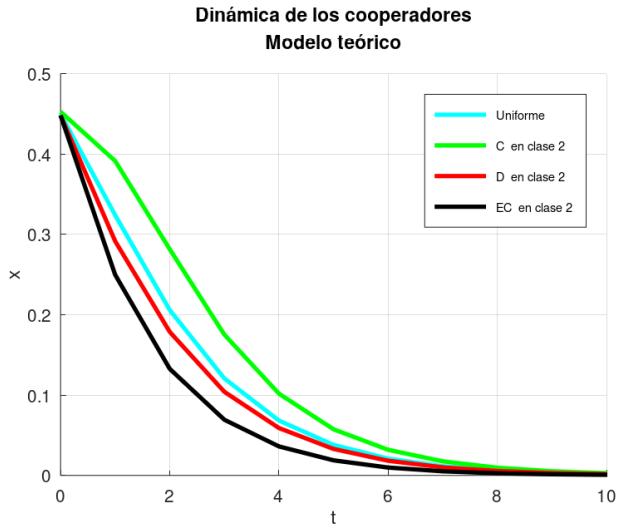


Figura 4.17: Dinámica de los cooperadores al modelar el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $\bar{k}_1 = 4.3$ ,  $\bar{k}_2 = 22.2$ ,  $x_0 = 0.45$  y  $y_0 = 0.45$ .

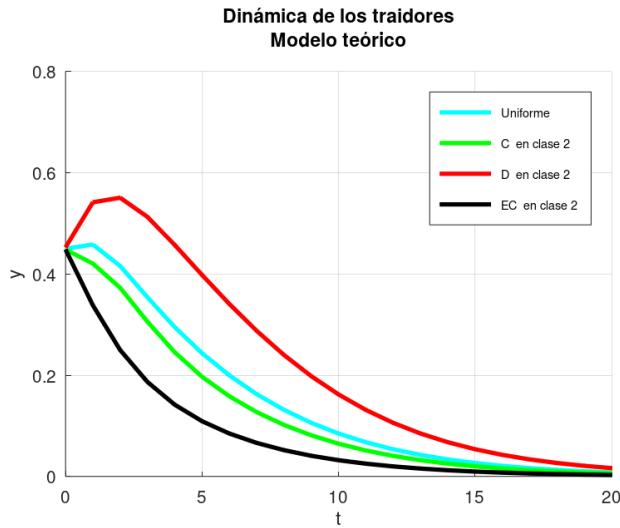


Figura 4.18: Dinámica de los traidores al modelar el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $\bar{k}_1 = 4.3$ ,  $\bar{k}_2 = 22.2$ ,  $x_0 = 0.45$  y  $y_0 = 0.45$ .

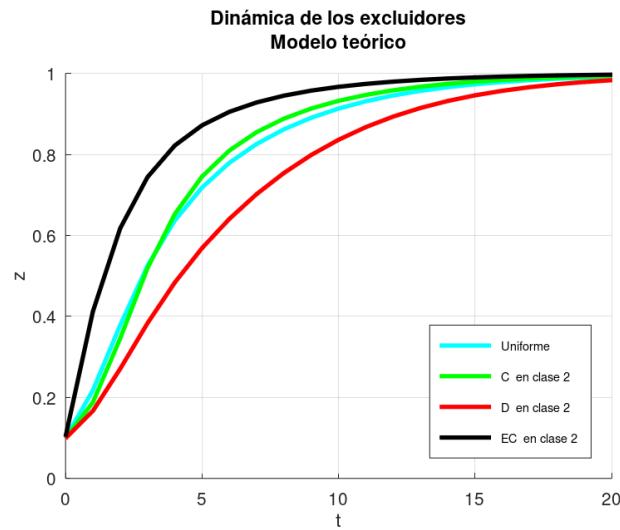


Figura 4.19: Dinámica de los excluidores al modelar el JBC evolutivo con exclusión de segundo orden en una red libre de escala bajo distintos escenarios. Parámetros:  $c = 1$ ,  $r = 2$ ,  $\delta_P = 0.5$ ,  $\bar{k}_1 = 4.3$ ,  $\bar{k}_2 = 22.2$ ,  $x_0 = 0.45$  y  $y_0 = 0.45$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

El objetivo de esta tesis fue analizar la dinámica evolutiva del juego del bien común en poblaciones estructuradas mediante redes complejas, incorporando mecanismos de exclusión social de primer y segundo orden. Para ello se desarrolló un modelo matemático basado en la *aproximación por clases de nodos*, el cual permite estudiar la propagación de estrategias en redes complejas sin necesidad de describir la dinámica de cada nodo individual. Esta aproximación agrupa a los nodos según su nivel de conectividad y asume que los individuos con grados similares presentan un comportamiento promedio equivalente.

El modelo teórico construido considera que cada individuo interactúa con sus vecinos a través del JBC y actualiza su estrategia comparando su pago con el obtenido por un vecino elegido al azar. De este modo es posible capturar el efecto de la estructura de la red sobre la evolución de las estrategias. Para caracterizar la estructura de la red, el modelo emplea tanto una partición en clases definida por intervalos de grados como coeficientes que describen la composición promedio del vecindario de cada clase.

Con el fin de evaluar la validez del modelo, se desarrolló además un modelo basado en agentes sobre una red libre de escala de tamaño finito. La comparación entre ambos enfoques permite identificar las fortalezas y limitaciones de la aproximación teórica, así como su capacidad para reproducir la dinámica observada en el modelo basado en agentes.

### 5.1. Resultados principales

Los resultados de esta tesis muestran que el modelo teórico bajo aproximación por clases reproduce de manera cualitativa las dinámicas observadas en el modelo basado en agentes para los tres escenarios estudiados: JBC evolutivo sin exclusión, con exclusión de primer orden y con exclusión de segundo orden.

En el caso de la exclusión de primer orden, el modelo teórico predice oscilaciones entre las tres estrategias. Sin embargo, dichas oscilaciones no pudieron observarse en la simulación basada en agentes debido al tamaño finito de la red. Cuando una estrategia alcanzaba un valor cercano a 0 o 1, la población colapsaba hacia el dominio de una estrategia, imposibilitando que la trayectoria siguiera oscilando. Aun así, para tiempos cortos, ambas aproximaciones muestran trayectorias cualitativamente similares, lo que indica que el modelo teórico permite predecir adecuadamente la dinámica inicial de redes finitas.

En los casos del JBC sin exclusión y con exclusión de segundo orden, las trayectorias del modelo teórico no presentan oscilaciones, sino que una estrategia domina en un tiempo relativamente corto. Como consecuencia, el tamaño finito de la red no introduce desviaciones significativas y se obtuvo una fuerte concordancia cualitativa entre el modelo teórico y el de agentes.

En síntesis, este trabajo demuestra que la aproximación por clases de nodos constituye una herramienta útil para estudiar la dinámica evolutiva en redes complejas. Aunque no captura exactamente todos los efectos de redes de tamaño finito, sí permite anticipar con buena precisión la evolución cualitativa del sistema.

## 5.2. Trabajo futuro

Los resultados obtenidos abren diversas líneas de investigación para profundizar en el estudio del JBC evolutivo en redes complejas:

1. Analizar cómo varía la dinámica evolutiva al modificar tanto el tamaño como la topología de la red.
2. Analizar cómo varía la dinámica evolutiva al modificar la partición de las clases.
3. Realizar un análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos no lineales resultantes, con el fin de caracterizar rigurosamente los puntos de equilibrio y comprender cómo los parámetros del modelo influyen en la dinámica global.
4. Comparar el modelo teórico del JBC evolutivo con exclusión de primer orden con simulaciones basadas en agentes en redes de tamaño suficientemente grande para observar las oscilaciones predichas teóricamente.

# Capítulo 6

## Apéndice

### 6.1. Linealización y Estabilidad de Puntos de Equilibrio

Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (6.1)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $C^1$ , con  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Un análisis inicial que se puede realizar para un sistema de este tipo consiste en determinar sus puntos de equilibrio, también llamados puntos críticos, y describir el comportamiento del sistema cerca de dicho punto. Un punto de equilibrio  $x_0 \in D$  satisface  $f(x_0) = 0$ .

Para aproximar el sistema no lineal 6.1 cerca de un punto de equilibrio, se procede a su linealización en dicho punto:

$$\dot{x} = Ax, \quad (6.2)$$

donde  $A = Df(x_0)$ , siendo  $Df$  la matriz Jacobiana, definida por:

$$Df = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]. \quad (6.3)$$

Un punto de equilibrio se denomina *hiperbólico* si ninguno de los eigenvalores de la matriz  $Df(x_0)$  tiene parte real igual a cero.

Un punto de equilibrio hiperbólico se clasifica en función de los eigenvalores de la matriz Jacobiana  $Df(x_0)$ :

1. Es un *sumidero* si todos los eigenvalores tienen parte real negativa.
2. Es una *fuente* si todos los eigenvalores tienen parte real positiva.
3. Es un punto *silla* si tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos uno con parte real negativa.

Un punto de equilibrio se considera *estable* si todas las soluciones que comienzan cerca de él permanecen cerca. En caso contrario, es *inestable*. Se dice que es *asintóticamente estable* si, además de permanecer cerca, las soluciones tienden al punto de equilibrio conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Finalmente, para puntos de equilibrio hiperbólicos, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Un punto de equilibrio hiperbólico es asintóticamente estable si y solo si es un sumidero.
2. Un punto de equilibrio hiperbólico es inestable si y solo si es una fuente o un punto silla.

## 6.2. Redes Complexas

El término *sistema* es ampliamente utilizado en diversas disciplinas como las ciencias naturales, la ingeniería, la medicina y la economía. A pesar de la diversidad de sus aplicaciones, el concepto de sistema comparte una característica fundamental: se trata de un conjunto de elementos interrelacionados cuya interacción está regida por ciertas reglas inherentes a la naturaleza de dichos elementos.

En física clásica, existen dos enfoques principales para abordar problemas relacionados con sistemas de partículas. El primer enfoque es a nivel microscópico, donde se conocen todas las propiedades e interacciones de las partículas individuales. La evolución temporal del sistema se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales que modelan con precisión su dinámica.

El segundo enfoque es el de la mecánica estadística, empleado cuando el número de partículas es tan grande que resolver directamente las ecuaciones diferenciales se vuelve poco práctico. En este caso, en lugar de estudiar cada partícula de forma individual, se introduce un *campo efectivo* que captura el comportamiento colectivo del sistema. Este método permite obtener valores esperados en lugar de soluciones exactas, lo cual es una aproximación válida debido al gran número de partículas involucradas.

Ambos enfoques son considerados *reduccionistas*, ya que el sistema es descrito en términos de las propiedades e interacciones de sus elementos constituyentes.

Sin embargo, aunque el reduccionismo es útil para describir muchos sistemas, no siempre es suficiente. Existen sistemas cuya descripción no puede basarse exclusivamente en sus elementos individuales. Algunas razones incluyen:

1. No contar con un número suficientemente grande de elementos para aplicar un campo efectivo.
2. La existencia de interacciones no triviales entre los elementos.
3. Una marcada heterogeneidad en los componentes, lo que da lugar a múltiples tipos de interacciones.

Estos sistemas exhiben propiedades que no pueden explicarse únicamente a partir de las características de sus componentes individuales. A estos se les denomina *sistemas complejos*.

Una representación conveniente para modelar sistemas complejos es el uso de redes, las cuales permiten capturar la estructura y dinámica de las interacciones entre los elementos del sistema.

### 6.2.1. Propiedades topológica

Una red se representa matemáticamente mediante un grafo  $G = (V, E)$ , donde  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$  es el conjunto de nodos, con  $N$  como el número total de nodos, y  $E \subset V \times V$  representa el conjunto de enlaces.

El grafo  $(V, E)$  puede representarse matricialmente a través de la *matriz de adyacencia*  $A$ , una matriz cuadrada de dimensiones  $N \times N$ , cuyas entradas  $a_{ij}$  son iguales a uno si existe un enlace entre los nodos  $i$  y  $j$ , y cero en caso contrario. Dado que no se consideran lazos en la red, se tiene que  $a_{ii} = 0$  para todo  $i$ .

El *grado* de un nodo  $i$ , denotado como  $k_i$ , se define como el número total de enlaces que posee o, de manera equivalente, el número de vecinos con los que está conectado. Se expresa matemáticamente como:

$$k_i = \sum_{j \in V} a_{ij}. \quad (6.4)$$

Una propiedad topológica fundamental de un grafo es la *distribución de grados*  $\rho(k)$ , que describe la probabilidad de que un nodo seleccionado al azar tenga grado  $k$ . En términos prácticos,  $\rho(k)$  equivale a la fracción de nodos con grado  $k$  en el grafo.

Otra métrica relevante es la *longitud de camino promedio*  $L$ , que mide la distancia típica entre nodos en la red. Se define como el promedio de las distancias geodésicas  $d_{ij}$  entre todos los pares de nodos  $i, j$ :

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \in V, i \neq j} d_{ij}. \quad (6.5)$$

Además, el *coeficiente de agrupamiento*  $C$  es una medida de la tendencia de los nodos a formar grupos altamente conectados. Se define como el promedio de los coeficientes de agrupamiento locales  $c_i$ :

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i \in V} c_i, \quad (6.6)$$

donde  $c_i$  mide la densidad de conexiones entre los vecinos del nodo  $i$ . Se calcula como la fracción de enlaces presentes ( $e_i$ ) en el subgrafo  $G_i$  formado por los vecinos de  $i$ , respecto al número total de enlaces posibles en dicho subgrafo:

$$c_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (6.7)$$

### 6.2.2. Red Libre de Escala

Otra propiedad fundamental de muchas redes reales es que estas crecen con el tiempo. Un ejemplo es la red de artículos científicos, donde cada artículo cita a otros trabajos previos. Esta red no solo se expande constantemente con la publicación de nuevos artículos, sino que además exhibe un *mecanismo de conexión preferencial*: los nuevos artículos tienden a citar con mayor frecuencia a los trabajos más citados, es decir, los más populares.

En 1999, Barabási y Albert propusieron un modelo que captura estas características [32]. Su modelo genera redes cuya distribución de grado sigue una *ley de potencias*, lo que significa que la mayoría de los nodos tienen pocos enlaces, mientras que unos pocos poseen un grado significativamente mayor, formando *hubs* altamente conectados.

La construcción de la red sigue el siguiente algoritmo:

1. **Crecimiento inicial:** Se comienza con un conjunto de  $N_0$  nodos iniciales, los cuales están completamente conectados entre sí, es decir, cada nodo inicial tiene  $N_0 - 1$  enlaces.
2. **Adición de nodos:** En cada iteración, se agrega un nuevo nodo a la red. Este nodo se conecta a  $l_0$  nodos preexistentes. El valor de  $l_0$  es un parámetro fijo que determina la cantidad de enlaces que tendrá cada nodo nuevo al incorporarse.
3. **Conexión preferencial:** Para modelar el mecanismo de conexión preferencial, la probabilidad  $\Pi(k_i)$  de que el nuevo nodo se conecte a un nodo  $i$  existente con grado  $k_i$  está dada por

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (6.8)$$

donde el denominador es la suma de los grados de todos los nodos existentes en la red. Esta regla implica que los nodos con mayor grado tienen una mayor probabilidad de recibir nuevas conexiones, lo que conduce a la formación de *hubs*.

# Bibliografía

- [1] G. Hardin, “The tragedy of the commons,” *Science*, vol. 162, pp. 1243–1248, 1968.
- [2] A. Dreber and M. A. Nowak, “Gambling for global goods,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 105, no. 7, pp. 2261–2262, 2008.
- [3] J. Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [4] P. D. Straffin, *Game Theory and Strategy*, vol. 36. The Mathematical Association of America, 1993.
- [5] M. J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, 2003.
- [6] R. A. McCain, *Game Theory and Public Policy*. Edward Elgar Publishing Limited, 2009.
- [7] M. Maschler, E. Solan, and S. Zamir, *Game Theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [8] R. McCain, *Game Theory: A Nontechnical Introduction To The Analysis Of Strategy*. World Scientific, 3 ed., 2014.
- [9] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- [10] M. A. Nowak, *Evolutionary Dynamics: Exploring the equations of life*. The Belknap Press of Harvard University Press, 2006.
- [11] H. Gintis, *Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction*. Princeton University Press, 2 ed., 2009.
- [12] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3 ed., 2002.
- [13] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, vol. 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 3 ed., 2001.
- [14] J. Reichardt, *Structure in Complex Networks*, vol. 766 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 1 ed., 2009.
- [15] M. Newman, *Networks: An Introduction*. Oxford University Press, 2010.

- [16] S. Dorogovtsev, *Lectures on Complex Networks*. Oxford University Press, 1 ed., 2010.
- [17] J. Poncela-Casasnovas, *Evolutionary Games in Complex Topologies: Interplay Between Structure and Dynamics*. Springer, 2012.
- [18] G. Chen, X. Wang, and X. Li, *Fundamentals of Complex Networks: Models, Structures and Dynamics*. Wiley, 1 ed., 2015.
- [19] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Epidemic dynamics and endemic states in complex networks,” *Physical Review E*, vol. 63, 2001.
- [20] E. Pennisi, “How did cooperative behavior evolve?,” *Science*, vol. 309, no. 5731, p. 93, 2005.
- [21] M. Perc, J. J. Jordan, D. G. Rand, Z. Wang, S. Boccaletti, and A. Szolnoki, “Statistical physics of human cooperation,” *Physics Reports*, vol. 687, pp. 1–51, 2017.
- [22] M. Nowak, “Five rules for the evolution of cooperation,” *Science*, vol. 314, pp. 1560–1563, 2006.
- [23] M. A. Nowak and K. Sigmund, “The dynamics of indirect reciprocity,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 194, pp. 561–574, 1998.
- [24] T. Clutton-Brock, “Breeding together: kin selection and mutualism in cooperative vertebrates,” *Science*, vol. 296, no. 5565, p. 69–72, 2002.
- [25] E. Fehr, “Cooperation and punishment in public goods experiments,” *American Economic Review*, vol. 90, no. 4, pp. 980–994, 2000.
- [26] K. Jaffe and L. Zaballa, “Co-operative punishment cements social cohesion,” *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, vol. 13, no. 3, 2010.
- [27] L. Liu, X. Chen, and A. Szolnoki, “Competitions between prosocial exclusions and punishments in finite populations,” *Scientific Reports*, vol. 7, no. 46634, 2017.
- [28] L. Liu, X. Chen, and M. Perc, “Evolutionary dynamics of cooperation in the public goods game with pool exclusion strategies,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 97, pp. 749–766, 2019.
- [29] P. Taylor and L. Jonker, “Evolutionary stable strategies and game dynamics,” *Mathematical Biosciences*, vol. 40, pp. 145–156, 1978.
- [30] L. Rendell, R. Boyd, D. Cownden, M. Enquist, K. Eriksson, M. W. Feldman, L. Fogarty, S. Ghirlanda, T. Lillicrap, and K. N. Laland, “Why copy others? insights from the social learning strategies tournament,” *Science*, vol. 328, no. 5975, pp. 208–213, 2010.
- [31] J. Han, X. Chen, and A. Szolnoki, “When selection pays: Structured public goods game with a generalized interaction mode,” *Chaos*, vol. 34, 2024.
- [32] A. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, p. 509–512, 1999.