



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Estudio de hélices y estructuras clotoidales
usando sus parámetros intrínsecos**

Tesis que presenta

Paola Lemus Basilio

Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Haret Codratian Rosu

San Luis Potosí, S.L.P., 5 de Febrero del 2026.



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Estudio de hélices y estructuras clotoidales usando sus parámetros intrínsecos**, presentada para obtener el Grado de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Paola Lemus Basilio** y aprobada el **5 de Febrero del 2026** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Haret Codratian Rosu
Director de la tesis

Dra. Stephanie Esmeralda Velázquez Pérez
Jurado en el examen

Dr. Josué Domingo de la Cruz Díaz
Jurado en el examen

Dr. Eric Campos Cantón
Jurado en el examen

Dr. César Octavio Maldonado Ahumada
Jurado en el examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Haret Codratian Rosu.

Durante la realización del trabajo la autora recibió una beca académica del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (antes Conacyt) con No. de registro: 842367 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

*A mis padres,
a Martín
e Ibrahim*

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías y al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica por proporcionar los medios para realizar este trabajo.

Gracias a mi asesor de tesis Dr. Haret Codratian Rosu por sus enseñanzas y por el tiempo dedicado a este trabajo, así como al comité tutorial formado por los doctores Eric Campos Cantón, César Octavio Maldonado Ahumada, Stephanie Esmeralda Velázquez Pérez y Josué Domingo de la Cruz Díaz por las observaciones siempre útiles que me ofrecieron y por las contribuciones realizadas a esta tesis.

Gracias a mi familia por su apoyo incondicional durante todo este tiempo, por tener siempre una palabra, por escuchar y por estar siempre presentes. Agradezco a los que ya no están, a quienes muy seguramente les habría gustado ver la culminación de este proyecto.

Agradezco a mis colegas, compañeros y amigos con quienes me ha tocado cursar esta travesía, por la motivación, los consejos y las conversaciones brindados además de su amistad y compañerismo. Finalmente, agradezco a Dios y a la vida por prestarme el tiempo de realizar este trabajo, que, sin todo el esfuerzo de los implicados jamás se hubiese logrado.

Resumen

En este trabajo de tesis se aborda la caracterización de las curvas que denominamos clotoidales en el espacio euclidiano tres dimensional por medio del método de Lie-Darboux. En este método cualquier curva espacial se puede obtener a partir de una ecuación de Riccati, que es una ecuación no lineal de primer orden cuyos coeficientes κ y τ son los parámetros intrínsecos de curvatura y torsión, respectivamente, de la curva espacial. Si la ecuación de Riccati tiene una solución general analítica, las ecuaciones paramétricas de la curva se pueden obtener siguiendo los pasos del método. En el caso de las hélices clotoidales esto es posible ya que la curvatura y la torsión son proporcionales a la longitud de arco.

También se considera el problema de la ambigüedad en el signo de la torsión para curvas en tres dimensiones. El signo de la torsión no puede definirse a partir de las ecuaciones paramétricas de una curva, se define solo al encontrarse la ecuación diferencial de Riccati asociada a estas curvas.

Abstract

This thesis addresses the characterization of curves called clothoid type in three-dimensional Euclidean space using the Lie-Darboux method. In this method, any spatial curve can be obtained from a Riccati equation, which is a first-order nonlinear equation with the coefficients κ and τ that represent the intrinsic parameters, curvature and torsion, respectively, of the spatial curve. If the Riccati equation has a general analytical solution in rational form, the parametric equations of the curve can be obtained by following the steps of the method. In the case of clothoidal helices this is possible because both curvature and torsion are proportional to the arc length.

Moreover, we consider the problem of ambiguity in the sign of torsion of three-dimensional curves. The sign of torsion cannot be defined from the parametric equations of a curve; it is defined only by finding the associated Riccati equation of the curves.

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Ecuaciones naturales de las curvas	1
1.2	Desarrollo histórico del método de Lie-Darboux	2
1.3	Organización de la tesis	5
2	Preliminares	7
2.1	Cosenos directores	7
2.2	Curvas y parámetros intrínsecos en dos dimensiones	8
2.2.1	Curvas en dos dimensiones	8
2.2.2	Longitud de arco	9
2.2.3	Curvatura	13
2.2.4	Sistema de Frenet-Serret en dos dimensiones	18
2.3	Curvas espaciales	19
2.3.1	Curvas en tres dimensiones	19
2.3.2	Longitud de arco	19
2.3.3	Curvatura y torsión	20
2.3.4	Sistema de Frenet-Serret en tres dimensiones	23
2.3.5	Sistema de Frenet-Serret en cuatro dimensiones	25
2.4	Ecuación diferencial de las curvas espaciales	27
2.5	El método de Lie-Darboux y las fórmulas de Scheffers	29
3	Resultados y aplicaciones	35
3.1	Dos ecuaciones de Riccati para el método de Lie-Darboux	35
3.2	Aplicación a las hélices cilíndricas	37
3.3	Caso $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 1$	44
3.3.1	Ecuaciones de Riccati para el caso en M^3	45
3.3.2	Observación de las constantes de las soluciones	47
3.4	Caso $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$	49
3.4.1	Ecuaciones de Riccati para $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$	49
4	Las helices clotoidales	51
4.1	Hélices clotoidales por el método de Lie-Darboux	51
4.2	Las hélices clotoidales δ - desplazadas	53

5 Conclusiones	57
A Ecuaciones de Riccati y sus soluciones	59
A.1 Constantes de las soluciones	61
B Transformación de coordenadas	63
C Curvas	65
C.1 Longitud de arco	66
D Actividades del periodo doctoral	69

Lista de figuras

1.1	Representación de la indicatriz esférica de una curva en el espacio.	3
1.2	Representación de la indicatriz esférica de una curva en el espacio recorrida en un sentido y en otro.	3
2.1	Cosenos directores de una recta en el espacio.	7
2.2	Los cosenos directores α_i de un radio vector en el espacio euclideo de tres dimensiones.	8
2.3	Gráfica de subintervalos para calcular la longitud de arco de una función suave.	10
2.4	Longitud de arco entre A y B	11
2.5	Longitud de segmento de línea.	13
2.6	Vector tangente y normal en el plano.	14
2.7	Longitud de arco s	14
2.8	El vector tangente unitario conforme un punto se mueve a lo largo de la curva.	15
2.9	Curvatura del círculo.	16
2.10	Vector tangente y normal en el plano.	18
2.11	Vectores unitarios tangente y normal en el espacio.	21
2.12	Vector tangente, normal y binormal de un punto sobre una curva en el espacio.	23
4.1	Caso 1: La hélice clotoideal C_1	52
4.2	Caso 2: La hélice clotoideal C_2	53
4.3	Caso 1: Hélices clotoideales δ -desplazadas $C_{1,\delta}$	54
4.4	Caso 2: Hélices clotoideales δ -desplazadas $C_{2,\delta}$	54
4.5	Focos de hélices clotoideales $C_{1,\delta}$	55
4.6	Focos de hélices clotoideales $C_{2,\delta}$	56
C.1	Formulación de la longitud de arco.	67
C.2	$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$	67

Introducción

En este capítulo presentamos una breve historia del método de Lie-Darboux, posteriormente se menciona el estado del arte de este tema y las oportunidades que se tienen en el área.

1.1. Ecuaciones naturales de las curvas

Se entiende por *ecuación natural* a aquella ecuación que permite que la representación de una curva sea independiente de cualquier elección del sistema de coordenadas o parametrización. Dicha ecuación está en función del elemento lineal o longitud de arco s . Se puede probar analíticamente que esta función determina la forma de una única curva y que, conversamente, cada función de este tipo da una curva (dado que la función satisface ciertas condiciones de continuidad). Por esta razón, la longitud de arco s y la curvatura κ son llamadas coordenadas “naturales” o “intrínsecas” de la curva [1].

Ha de resaltarse que en geometría se usa el término geometría intrínseca para denotar aquellas propiedades de una superficie que son invariantes cuando la superficie se dobla sin estirarse, es decir, dependen sólo de la medición de las longitudes de las curvas a lo largo de la superficie misma. Por el contrario, las propiedades extrínsecas dependen de la incrustación de la superficie en el espacio [2].

Podemos encontrar otra forma de describir el problema con el que comienza el estudio de las ecuaciones naturales: dadas dos funciones de un parámetro, encuentre la curva espacial para la cual las ecuaciones son la curvatura y la torsión [3].

La representación de una curva en términos de κ y s fue establecida por Euler para curvas planas. Se puede ver que la relación entre la curvatura y la longitud de arco proporciona una ecuación para una curva plana [4]. Es decir, dada una ecuación $\kappa = \kappa(s)$, entonces usando las relaciones

$$R^{-1} = \kappa = d\varphi/ds, \quad \cos(\varphi) = dx/ds, \quad \sin(\varphi) = d\varphi/ds \quad (1.1)$$

x y y se encuentran en términos de dos integrales

$$x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R \cos(\varphi) d\varphi, \quad y = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R \sin(\varphi) d\varphi, \quad \varphi = \int_{s_0}^s \kappa ds. \quad (1.2)$$

1.2. Desarrollo histórico del método de Lie-Darboux

En geometría diferencial clásica en virtud de la representación de la solución de las ecuaciones naturales que describen a las curvas en un espacio euclidiano surgió el método que llamamos de Lie-Darboux el cual consiste en obtener una ecuación de Riccati y resolverla para obtener coordenadas paramétricas en función de la longitud de arco. Esta reducción a una ecuación de Riccati se remonta a S. Lie en *Werke III* (1882) y G. Darboux en *Leçons I* (1887). Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{(f_1^2 - f_3^2) - (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1f_4 - f_2f_3)}, \\ \alpha_2 &= i \frac{(f_1^2 - f_3^2) + (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1f_4 - f_2f_3)}, \\ \alpha_3 &= \frac{f_3f_4 - f_1f_2}{(f_1f_4 - f_2f_3)}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde las α_i , $i = 1, 2, 3$ representan los cosenos directores de la línea tangente a un punto que está sobre la curva y las f_j , $j = 1, 2, 3, 4$ son las cuatro funciones componentes para la solución general, requerida en forma racional, de la ecuación de Riccati de las curvas, las cuales se abordan en el Capítulo 2. Las ecuaciones (1.3) se atribuyen a G. Scheffers en su libro *Anwendung I*, p. 298. (1901) [5].

El reconocido geómetra G. Darboux realizó una recopilación sistemática de los conocimientos que se tenían hasta el momento de su carrera educativa en la Escuela Normal Superior de París. La obra de Darboux consiste en nueve libros, incluye desde las investigaciones de Monge hasta los estudios de Klein, Lie y otros geómetras y matemáticos notables. Tales investigaciones y colaboraciones son las bases de un método denominado de Lie-Darboux en la geometría diferencial de las curvas que es el tema principal de esta tesis. La idea principal de Darboux fue considerar dos sistemas de ejes de coordenadas para representar el movimiento de un objeto alrededor de un punto o de un eje instantáneo de rotación en función del tiempo [6].

Además de la importancia de las ecuaciones de Frenet-Serret en el estudio de las curvas, Darboux ya había mencionado que Serret introdujo el concepto de indicatriz esférica. Eisenhart retoma esta idea y la presenta con el propósito de encontrar una expresión para el radio de primera curvatura ρ en términos de las cantidades que definen a la curva. Tomaremos la esfera de radio unitario con centro en el origen y dibujamos radios paralelos a las direcciones positivas de las tangentes a la curva, o una porción de ella tal que no haya dos tangentes paralelas. El lugar geométrico de los extremos es una curva sobre la esfera, la cual está en correspondencia uno a uno con la curva dada. En este sentido, tenemos una *representación esférica o indicatriz esférica* de la curva [7].

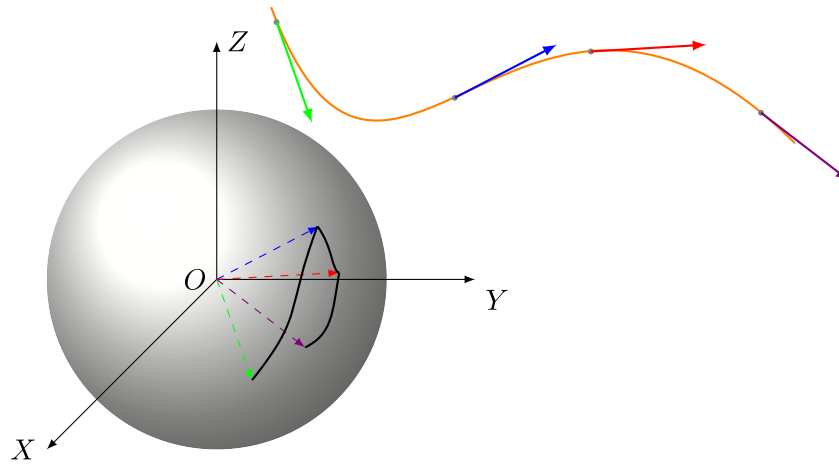


Figura 1.1: Representación de la indicatriz esférica de una curva en el espacio.

Entonces el concepto de indicatriz esférica se refiere a un mapeo uno a uno entre una curva espacial y una curva correspondiente que yace en la superficie de la esfera unitaria centrada en el origen, lo cual reduce el estudio de curvas espaciales en \mathbb{E}^3 al estudio de curvas en \mathbb{S}^2 , ver Figura 1.1. Por otro lado, en la Figura 1.2 se representa la indicatriz esférica de una curva en el espacio cuando uno se desplaza en uno y otro sentido o dirección sobre la curva misma. El interés en esta representación radica en la consideración de ambos signos en la curvatura y la torsión de la curva espacial y las curvas creadas sobre la superficie de la esfera unitaria.

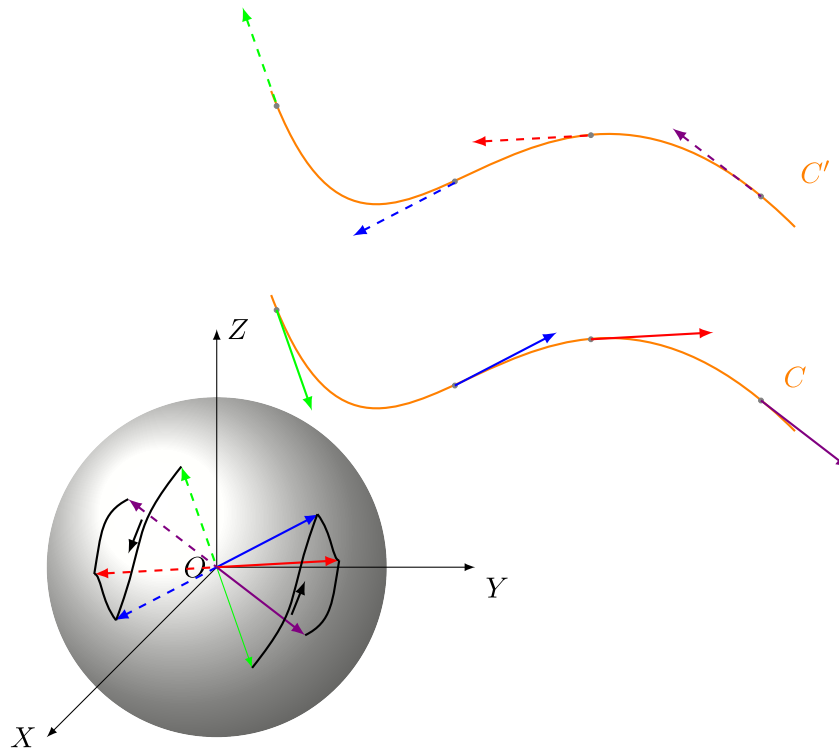


Figura 1.2: Representación de la indicatriz esférica de una curva en el espacio recorrida en un sentido y en otro.

En su libro, Scheffers [5] presenta las fórmulas (1.3) para la integración de las ecuaciones naturales de la curvas y la obtención de las coordenadas como solución y el ejemplo de curvas planas. En dicho libro llama invariantes diferenciales al radio de curvatura y al radio de torsión. Menciona que estos invariantes diferenciales están a lo largo de la curva como funciones de la longitud de arco. Para representar dichos invariantes diferenciales de la curva espacial, se considera el concepto de cosenos directores y se calculan los determinantes formados con las derivadas de las ecuaciones de las curvas, no de las coordenadas mismas.

También afirma que entonces no hay invariante diferencial de primer orden y ρ (radio de curvatura) es el único invariante diferencial esencial de segundo orden y que el invariante diferencial, a continuación, vuelve a ser un invariante diferencial [5].

En su libro Struik [4] retoma estas ideas y las sintetiza presentando la relación de las ecuaciones naturales, de las ecuaciones de Frenet-Serret y del método de reducción a la ecuación diferencial conocida como ecuación de Riccati.

En la literatura en este tema se han realizado avances principalmente referente a las hélices en más de tres dimensiones. Sin embargo un estudio más completo en esta dirección requiere herramientas de álgebra abstracta y topología algebraica. En la literatura encontramos específicamente del método un análisis computacional en mecánica con valores aleatorios de curvaturas y torsiones [8].

Existen generalizaciones del sistema de Frenet-Serret como los que se presentan en el trabajo de Hanson y Hui Ma [9] y Guven [10]. Así como también hemos hallado otros métodos para abordar la cinemática de las hélices en Goriely [11].

Este método de Lie-Darboux aparece en textos clásicos de geometría diferencial, lo cual nos hace pensar que se ha dejado a un lado y se ha dedicado el pensamiento a otras herramientas como por ejemplo las soluciones de las ecuaciones diferenciales con las herramientas de cómputo.

Aparentemente es un tema explotado en su totalidad pero cabe destacar que aún si así lo fuese es una herramienta que nos lleva a comprender cómo se extiende en más casos. Por ejemplo en Sternberg [12] se realiza un análisis a un listón en un espacio euclidiano usando el sistema de Frenet-Serret se puede ver los patrones que ayudan en otras áreas así como en geometrías más abstractas.

Se conoce la ecuación de las curvas que es una ecuación diferencial de cuarto orden homogénea, como es sabido, corresponde al área de ecuaciones diferenciales y conlleva resolver el problema de valores de la frontera, obtener el conjunto primordial de soluciones para la ecuación diferencial. En este método, se retoman estos conceptos para obtener la solución de una ecuación de Riccati de las curvas, la cual es más sencilla de resolver en nivel de dificultad comparada con la ecuación de cuarto orden.

En este trabajo el método de Lie-Darboux es extendido en la medida de que se obtienen dos ecuaciones de Riccati de las curvas que difieren en los signos de la torsión. Es sabido que existe una ambigüedad en el signo de la torsión por lo que en este trabajo se obtiene una ecuación de Riccati adicional que podría ayudar en la desambiguación de este signo. De manera que el método aplicado a la otra ecuación de Riccati nos expone que se obtiene la misma solución para ambas ecuaciones.

En este trabajo se presenta el estudio de las curvas en \mathbb{R}^3 cuya curvatura y torsión cumplen la razón $\kappa/\tau = cte.$ ambas constantes y el caso en el que ambas, curvatura y torsión, son directamente proporcionales a la longitud de arco s utilizando el método de Lie-Darboux al utilizar la ecuación de Riccati asociada para conocer las componentes α_i , $i = 1, 2, 3$, del vector tangente a la curva.

1.3. Organización de la tesis

El propósito de esta tesis es retomar, actualizar y presentar en una perspectiva moderna el método de Lie-Darboux que se puede considerar abandonado desde hace decenas de años ya que el último libro donde se presenta con más detalle es el libro de Struik de 1961 [4] mientras que a nivel de artículos el método fue mencionado solamente en 2020 por Gusella [8] además del artículo publicado en este proyecto doctoral en 2023.

En el siguiente capítulo se introducen los conceptos básicos en esta área de la geometría diferencial, incluyendo el sistema ortogonal de Frenet-Serret de una curva finalizando con una descripción del método de Lie-Darboux donde se emplea el sistema de Frenet-Serret para la obtención de la ecuación de Riccati de las curvas espaciales.

Los Capítulos 3 y 4 contienen los resultados originales de este trabajo doctoral. En el Capítulo 3 se presenta un abordaje algebraico semejante al de Lie y Darboux con una extensión que permite introducir una ecuación de Riccati adicional a la estándar y se aplica a varios casos conocidos de hélices como son las cilíndricas y clotoidales.

En el Capítulo 4 se introducen las hélices clotoidales empleando la ecuación de Riccati de las curvas espaciales proporcionada por el método de Lie-Darboux. Estas hélices tienen la curvatura de las espirales de Cornu y la torsión proporcional a la curvatura de la espiral de Cornu.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de nuestro trabajo doctoral. Finalmente el documento se complementa con los apéndices.

Bases de la geometría diferencial de las curvas espaciales en \mathbb{E}_n

En este capítulo se presentan definiciones y conceptos matemáticos básicos para la teoría de la geometría diferencial de las curvas.

2.1. Cosenos directores

En una amplia variedad de tratados y libros de geometría analítica se menciona que la dirección de una recta en el plano se determina por medio de su pendiente. En el espacio euclideo de n componentes \mathbb{E}_n , la dirección de una recta cualquiera se determina por los ángulos que forma con los ejes de coordenadas. Véase Figura 2.1 donde los ángulos α_1 , α_2 y α_3 formados por las partes positivas de los ejes X, Y y Z y la recta dada (o vector) se llaman ángulos directores de la recta dirigida l . Por conveniencia, de forma usual se consideran los cosenos directores de tales ángulos en lugar de los ángulos mismos, los cuales reciben el nombre de *cosenos directores* o *cosenos de dirección* de la recta dirigida l . Cualquier recta en el espacio no dirigida tiene dos sistemas de cosenos directores iguales en valor absoluto pero opuestos en signo.

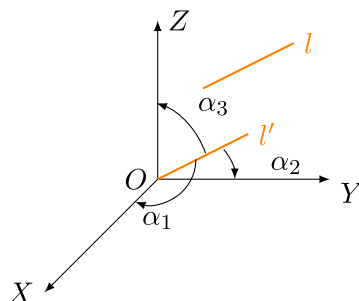


Figura 2.1: Cosenos directores de una recta en el espacio.

En un sentido más extenso, en el espacio se define el *ángulo diedral* entre dos planos que se intersecan. Este es el ángulo entre las líneas determinadas sobre los dos planos por un tercer plano ortogonal a ambos [13]. En la literatura se determinan los cosenos directores de una recta en el espacio cuya posición está dada por dos de sus

puntos P_1 y P_2 , como cosenos directores en el sentido P_1 a P_2 tenemos

$$\cos(\alpha_1) = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos(\alpha_2) = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos(\alpha_3) = \frac{z_2 - z_1}{d}, \quad (2.1)$$

donde d es un número positivo. Por otro lado, en el sentido P_2 a P_1 los cosenos directores son

$$\cos(\alpha_1) = \frac{x_1 - x_2}{d}, \quad \cos(\alpha_2) = \frac{y_1 - y_2}{d}, \quad \cos(\alpha_3) = \frac{z_1 - z_2}{d}, \quad (2.2)$$

si se suman los cuadrados de los términos del lado derecho de las ecuaciones (2.1) y (2.2) esta forma de determinación da origen al siguiente resultado

Teorema 1. *La suma de los cuadrados de los cosenos directores de cualquier radio vector es igual a la unidad [14]*

$$\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1. \quad (2.3)$$

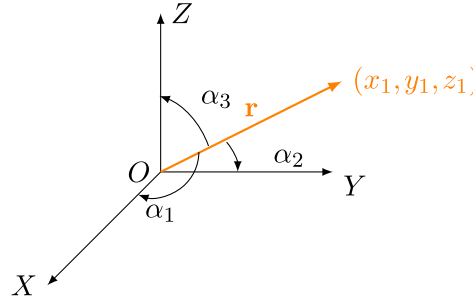


Figura 2.2: Los cosenos directores α_i de un radio vector en el espacio euclideo de tres dimensiones.

Obsérvese en la Figura 2.2 el radio vector r hacia el punto (x_1, y_1, z_1) . Utilizando r para la magnitud del vector r las coordenadas del punto final y la magnitud están relacionadas por la siguientes ecuaciones

$$x_1 = r \cos(\alpha_1), \quad y_1 = r \cos(\alpha_2), \quad z_1 = r \cos(\alpha_3).$$

Las cantidades x_1 , y_1 y z_1 son llamados componentes cartesianos o proyecciones de r [15].

2.2. Curvas y parámetros intrínsecos en dos dimensiones

2.2.1. Curvas en dos dimensiones

En la literatura se puede encontrar distintas formas de representar una curva, se puede considerar a una curva como un conjunto de puntos en el plano o en el espacio, por ejemplo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}, \quad (2.4)$$

donde c es una constante. También como la representación de un punto moviéndose en un plano de coordenadas cartesianas ortogonales de manera que si consideramos $\lambda(t)$ el

vector de posición del punto en el tiempo t la curva está descrita por la función λ y el parámetro escalar t tiene valores de un vector en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 [16]. Por esto es común llamar curva plana a la gráfica de una ecuación $y = f(x)$ donde f es función continua [17]. En el caso de las curvas planas se puede listar la siguiente definición:

Definición 1. [17] Una curva plana es un conjunto C de pares ordenados de la forma $(f(t), g(t))$ donde las funciones f y g son continuas en un intervalo I .

En algunos casos es conveniente imaginar que el punto denotado $P(t) = (f(t), g(t))$ de la Definición 1 traza la curva C conforme t varía en el intervalo I . El siguiente concepto a retomar considera una variable independiente llamada variable auxiliar o parámetro, término que históricamente habría sido introducido por Euler y Cramer [5].

Definición 2. Sea C la curva que consiste en todos los pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g son continuas en el intervalo I . Las ecuaciones

$$x = f(t) \quad y = g(t) , \quad t \in I ,$$

son llamadas ecuaciones paramétricas de C y t es llamado parámetro.

Si se nos da la representación paramétrica a veces es posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación para C que involucra las variables x y y de la forma

$$F(x, y) = 0 . \quad (2.5)$$

La continuidad de f y g implica que un cambio pequeño en el valor de t produce un cambio pequeño en la posición del punto $(f(t), g(t))$ en la curva C . Se le dice *curva suave* si tiene representación paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ en un intervalo I tal que las derivadas de f' y g' sean continuas en el intervalo, y que no sean cero de forma simultánea, excepto en posibles puntos finales de I [17].

2.2.2. Longitud de arco

Un concepto fundamental para esta tesis es la longitud de arco, este concepto en cálculo integral se expresa mediante una integral definida. El significado de la longitud de arco entre dos puntos A y B en la gráfica de una función suave se puede abordar como sigue.

Longitud de arco entre dos puntos

Dada una función f suave en un intervalo cerrado $[a, b]$, los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ son los puntos finales de la gráfica de f . Dada la partición P del intervalo $[a, b]$ determinada por $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$. El punto con coordenadas $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$ es el punto Q_i . Si conectamos los $n + 1$ puntos Q_0, Q_1, \dots, Q_n en la gráfica de f como se observa en la Figura 2.4 por medio de un segmento de línea

$$d(Q_{i-1}, Q_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} , \quad (2.6)$$

entonces se puede conocer la longitud de la línea quebrada

$$L_p = \sum_{i=1}^n d(Q_{i-1}, Q_i) \quad (2.7)$$

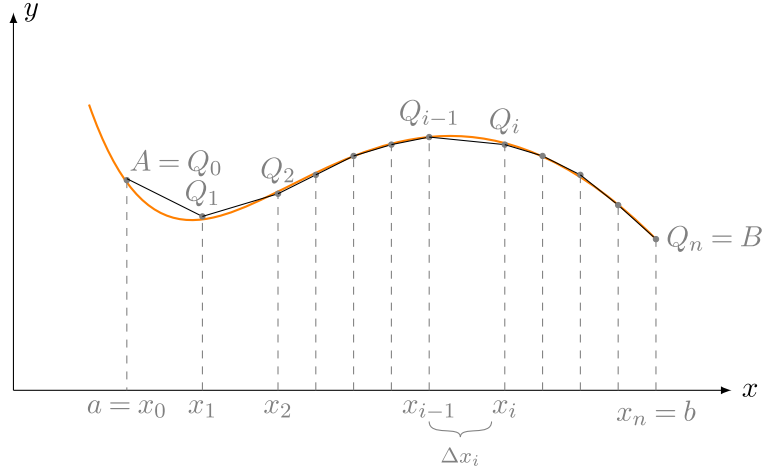


Figura 2.3: Gráfica de subintervalos para calcular la longitud de arco de una función suave.

al considerar el Teorema del valor medio

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) &= f'(x_{i-1}, x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f'(m_i)(x_i - x_{i-1}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde m_i es el intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) y sustituyendo (2.8) en la fórmula de la distancia (2.6)

$$d(Q_{i-1}, Q_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(m_i)(x_i - x_{i-1})]^2}. \quad (2.9)$$

Como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, la ecuación (2.9) resulta

$$\begin{aligned} d(Q_{i-1}, Q_i) &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(m_i)\Delta x_i]^2} \\ &= \sqrt{\Delta x_i(1 + f'(m_i)^2)} \\ &= \sqrt{1 + f'(m_i)^2} \Delta x_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En consecuencia,

$$L_p = \sum_{i=1}^n d(Q_{i-1}, Q_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(m_i)^2} \Delta x_i. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) indica que la suma de las longitudes de los lados de los polígonos inscritos en la curva (formados de la línea quebrada) tiene un límite para el caso de un número infinito de vértices Q y es llamada longitud de arco. Es decir, si la norma $\|P\| \rightarrow 0$, entonces la longitud de la línea quebrada debe aproximarse a la longitud de la gráfica de f de A a B [5], [17]. Por lo que tenemos la siguiente definición

Definición 3. Sea la función f suave en un intervalo $[a, b]$. La longitud de arco de la gráfica de f de $A(a, f(a))$ a $B(b, f(b))$ está dada por

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2.12)$$

Si una gráfica puede descomponerse en un número finito de partes, cada una de las cuales sea la gráfica de una función suave, entonces la longitud de arco de la gráfica está definida como la suma de las longitudes de arco de las gráficas individuales. Una función de este tipo se dice ser *suave por partes* en su dominio. A continuación denotaremos con t la variable de integración para evitar abuso de notación. De la Definición 3, si f es suave en el intervalo $[a, b]$, entonces f es suave en $[a, x]$ para cada x en $[a, b]$ y la longitud de la gráfica del punto $A(a, f(a))$ al punto $Q(x, f(x))$ está dado por

$$L_a^x = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt . \quad (2.13)$$

Al realizar un cambio de notación y usar el símbolo $s(x)$ en lugar de L_a^x , entonces s debe considerarse como una función con dominio $[a, b]$ debido a que cada x en $[a, b]$ corresponde un número único $s(x)$. Llamaremos s la función de longitud de arco para la gráfica de f como en la siguiente definición.

Definición 4. Sea la función f suave en el intervalo $[a, b]$ la función de longitud de arco de la gráfica de f en $[a, b]$ está dado por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt , \quad (2.14)$$

donde $a \leq x \leq b$.

Como se muestra en la Figura 2.4 los valores $s(x)$ de s pueden representarse geoméricamente como longitudes de arco de la gráfica de f de $A(a, f(a))$ a $Q(x, f(x))$. Para los problemas que involucran a la función longitud de arco hallamos en la literatura el siguiente teorema.

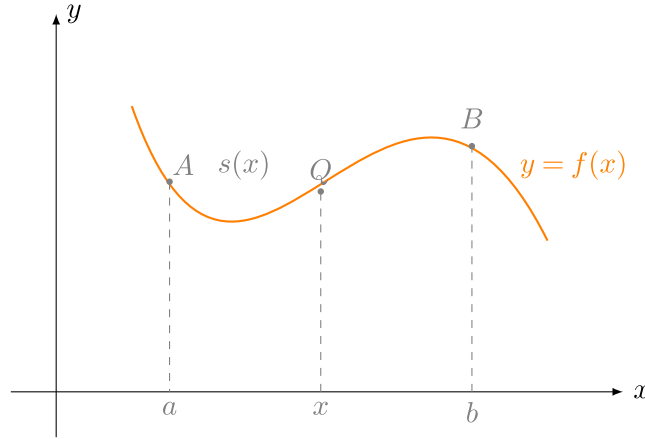


Figura 2.4: Longitud de arco entre A y B.

Teorema 2. Sea f suave en $[a, b]$ y sea s la función de longitud de arco para la gráfica de $y = f(x)$ en $[a, b]$. Si dx y dy son diferenciales de x y y , entonces

$$i) ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$ii) (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Demostración. Por la Definición 4 y el teorema fundamental del cálculo

$$D_x[s(x)] = D_x \left[\int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt \right] = D_x [F(x) - F(a)] , \quad (2.15)$$

donde $F(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y $F(a) = \sqrt{1 + [f'(a)]^2}$, entonces:

$$\begin{aligned} D_x[s(x)] &= D_x F(x) - D_x F(a) \\ &= D_x \left[\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \right] - D_x \left[\sqrt{1 + [f'(a)]^2} \right] \\ &= \sqrt{1 + [f'(x)]^2} - 0 = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Luego, por definición, al ser f diferenciable y Δx un incremento de x , el diferencial dx de la variable independiente x es $dx = \Delta x$ y el diferencial dy de la variable dependiente y es

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x) dx \quad (2.17)$$

tenemos que

$$D_x[s(x)]dx = ds = s'(x)dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx , \quad (2.18)$$

esto prueba i). Luego, elevando al cuadrado ambos miembros de i)

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left\{ 1 + [f'(x)]^2 \right\} (dx)^2 \\ &= (dx)^2 + [f'(x)dx]^2 . \end{aligned}$$

Considerando la definición del diferencial (2.17) de $dy = f'(x)dx$ esto da ii). \square

Longitud de una curva

A partir de la Definición 3 se puede obtener una fórmula de longitud de arco para un tipo de curvas dadas por ecuaciones paramétricas, en este sentido supongamos que C es una curva que no se interseca a sí misma, dada de forma paramétrica por

$$x = f(t), \quad y = g(t) ,$$

donde $a \leq t \leq b$. Al decir que no se interseca a sí misma se refiere a que distintos valores de t determinan puntos diferentes en C . Consideremos la partición P de $[a, b]$ dada por $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $P_i = (f(t_i), g(t_i))$ el punto en la curva C determinado por t_i . Si $d(P_{i-1}, P_i)$ es la longitud del *segmento de línea* $P_{i-1}P_i$, entonces la longitud L de la línea quebrada mostrada en la Figura 2.5 es

$$L_p = \sum_{i=1}^n d(P_{i-1}, P_i) . \quad (2.19)$$

Entonces

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} L_p , \quad (2.20)$$

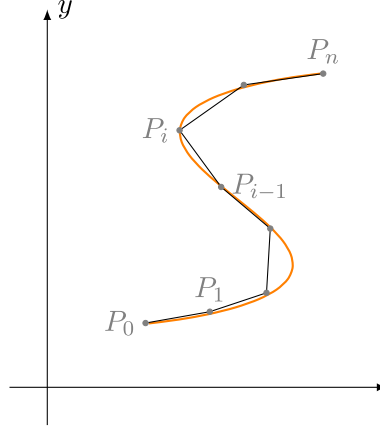


Figura 2.5: Longitud de segmento de línea.

donde llamaremos L la longitud de C de P_0 a P_n si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|L_p - L| < \epsilon$ para todas las particiones P con $\|P\| < \delta$. Por la fórmula de la distancia tenemos

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}. \quad (2.21)$$

Con un procedimiento similar al de la ecuación (2.8) utilizando el teorema del valor medio y la ecuación (2.21) se obtiene

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} L_p = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(w_i)]^2 + [g'(z_i)]^2} \Delta t_i, \quad (2.22)$$

dado que el límite existe, donde w_i y z_i son valores en el intervalo abierto (t_{i-1}, t_i) . Si $w_i = z_i$ para toda i , entonces la suma es una suma de Riemann para la función \overline{m} definida como

$$\overline{m}(t) = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}. \quad (2.23)$$

El límite de esta suma es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt. \quad (2.24)$$

Esta discusión se halla en la literatura en términos del siguiente teorema [17]

Teorema 3. Si una curva suave C está dada paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde $a \leq t \leq b$ y si C no se interseca a sí misma excepto posiblemente en los puntos finales de $[a, b]$, entonces la longitud L de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (2.25)$$

2.2.3. Curvatura

Consideremos ahora una función vectorial \mathbf{r} en dos dimensiones tal que $\mathbf{r} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ y sea C la curva determinada por el punto final del vector posición correspondiente

a $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}'(t)$ es el vector tangente a C que apunta en dirección de los valores crecientes de t . Si $\mathbf{r}(t) \neq 0$ entonces el vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$ a C está dado por la fórmula

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{r}'(t). \quad (2.26)$$

Debido a que $|\mathbf{T}(t)| = 1$, se tiene que $\mathbf{T}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para cada t . Sea $\mathbf{N}(t) = (1/|\mathbf{T}'(t)|)\mathbf{T}'(t)$ un vector unitario ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Nos referimos a $|\mathbf{N}(t)|$ como un vector normal unitario a C . Establecemos esto como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{|\mathbf{T}'(t)|} \mathbf{T}'(t). \quad (2.27)$$

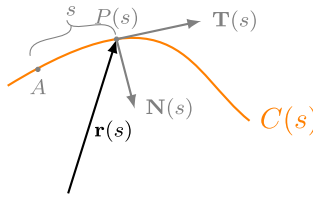


Figura 2.6: Vector tangente y normal en el plano.

Ejemplo 1. Sea C la curva determinada por

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$$

usando (2.26) con $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{(2t)^2 + (1)^2}} (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= \frac{2t}{\sqrt{4t^2 + 1}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Al diferenciar los componentes de $\mathbf{T}(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= \frac{2(4t^2 + 1)^{1/2} - 2t(\frac{1}{2}(4t^2 + 1)^{-1/2})8t}{4t^2 + 1} \mathbf{i} + \frac{-(1/2(4t^2 + 1)^{-1/2})8t}{4t^2 + 1} \mathbf{j} \\ &= 2 \frac{(4t^2 + 1)^{1/2} - 4t^2(4t^2 + 1)^{-1/2}}{(4t^2 + 1)} \mathbf{i} - \frac{4t(4t^2)}{(4t^2 + 1)} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Utilizando la longitud de arco s medida desde cualquier punto fijo A como parámetro en las ecuaciones de una curva C dada por $x = f(s)$ y $y = g(s)$ en el plano xy , donde f' y g' son continuas en un intervalo I , véase Figura 2.7.

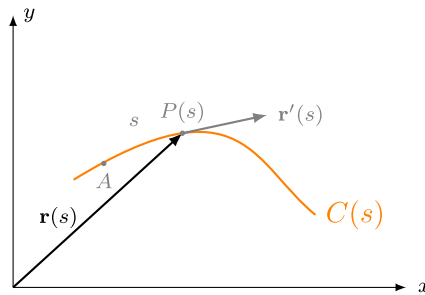


Figura 2.7: Longitud de arco s .

Para cada s en el intervalo I corresponde un único punto $P(s) = (f(s), g(s))$ el cual está a s unidades de A (medido a lo largo de C) y la dirección positiva a lo largo de la curva C se determina por los valores crecientes de s .

A continuación se analiza la variación del vector unitario tangente $T(s)$ conforme $P(s)$ se mueve a lo largo de C . Para cada s sea θ el ángulo entre $T(s)$ e i (el vector unitario en la dirección del eje x) como se observa en la Figura 2.8.

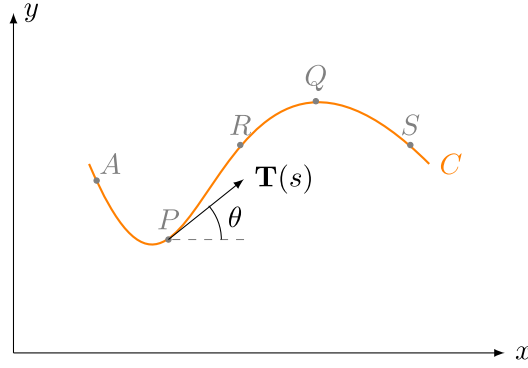


Figura 2.8: Vector tangente a la curva y su variación conforme el punto P se mueve a lo largo de la curva, donde θ es el ángulo entre $T(s)$ y el vector unitario en la dirección del eje x .

Observación: θ es función de s debido a que para cada s corresponde un punto $P(s)$ en la curva C que determina un valor de θ . La razón de cambio $d\theta/ds$ de θ con respecto a s es la clave de la siguiente definición [17].

Definición 5. Sea una curva C dada por $x = f(s)$, $y = g(s)$, donde s es el parámetro de longitud de arco. La curvatura κ de C en el punto $P(s) = P(x, y)$ es

$$\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|.$$

Entonces la curvatura puede entenderse como el valor absoluto de la razón a la cual el ángulo θ cambia con respecto a la longitud de arco s . En este sentido, la curvatura es pequeña para puntos tales como R y S en la Figura 2.8 debido a que θ cambia lentamente conforme $P(s)$ se mueve a lo largo de C . Por otro lado la curvatura es grande para el punto Q debido a que en ese punto θ cambia muy rápido. Por lo que, a grosso modo, se dice que la curvatura κ proporciona información sobre el filo (sharpeness) de una curva en varios puntos. Algunos ejemplos que hallamos en la literatura para profundizar un poco en este tema se presentan a continuación

Ejemplo 2. Pruebe que la curvatura en una línea es 0 en cada punto de la línea.

Si C es una línea entonces el ángulo θ es el mismo para cada punto $P(s)$ sobre la línea, es decir, θ es constante. Por lo que

$$\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = |\theta| = 0.$$

Ejemplo 3. Pruebe que la curvatura en cualquier punto en un círculo de radio a es $\frac{1}{a}$. Se asume que en la Figura 2.9 el círculo tiene centro en O y el punto P está en el primer

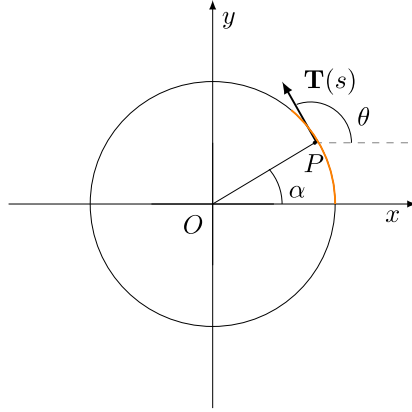


Figura 2.9: Curvatura del círculo.

cuadrante. Establecemos el punto $A(a, 0)$ fijo y sea s la longitud del arco AP entonces por definición que $s = a\alpha$ o $\alpha = \frac{1}{a}$, donde α es $\angle POA$. De acuerdo a la Figura 2.9 vemos que

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{s}{a} + \frac{\pi}{2}$$

y por lo tanto

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a}, \quad \kappa = \frac{1}{a}.$$

Ahora consideremos que una curva C es la gráfica de una ecuación rectangular $y = h(x)$ donde h' es continua en algún intervalo. Como y' es la pendiente de la línea tangente en P , vemos en la Figura 2.8 que

$$\tan(\theta) = y' \quad \text{o} \quad \theta = \tan^{-1}(y'). \quad (2.28)$$

De la Definición 4 la función de longitud de arco s puede definirse como

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (2.29)$$

donde a es la coordenada x del punto fijo A en C . Si y'' existe entonces por la regla de la cadena

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dx}. \quad (2.30)$$

Entonces la curvatura se escribe

$$\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \left| \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dx} \right|. \quad (2.31)$$

Considerando (2.28) y (2.29) se tiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (2.32)$$

Al sustituir ambas ecuaciones en (2.31) se llega al siguiente resultado

$$\kappa = \frac{\frac{y''}{1+(y')^2}}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}} . \quad (2.33)$$

Esta es una fórmula hallada en la literatura [17] para calcular la curvatura de la curva C de una gráfica $y = f(x)$ en el punto $P(x, y)$.

Consideremos ahora una curva C descrita en términos de cualquier parámetro t dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) , \quad y = g(t) , \quad (2.34)$$

y además f'' y g'' existen para toda t ; se puede encontrar en la literatura la siguiente fórmula para la curvatura κ en el punto $P(x, y)$ [17]

$$\kappa = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{3/2}} . \quad (2.35)$$

Si la curvatura en un punto P en una curva C es distinta de cero, entonces el círculo de radio $\rho = \frac{1}{\kappa}$ cuyo radio yace en el lado cóncavo de C y el cual posee la misma línea tangente en P que C es llamado *círculo de curvatura* para P . Su radio ρ y centro son llamados *radio de curvatura* y *centro de curvatura* para P respectivamente. Los ejemplos donde se estudió el radio del círculo, dicen que la curvatura del círculo de curvatura es $\frac{1}{\rho}$ o κ y por lo tanto es lo mismo que la curvatura de C . Por esta razón el círculo de curvatura puede pensarse como el círculo que mejor coincide con C en P . Para finalizar esta sección, a continuación revisaremos el cálculo de la curvatura de una elipse analíticamente a partir de sus ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 4. *Curvatura de una elipse [18]*

$$\begin{aligned} f(t) &= a \cos(t) \\ g(t) &= b \sin(t) . \end{aligned}$$

Al derivar las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} f'(t) &= -a \sin(t) & g'(t) &= b \cos(t) \\ f''(t) &= -a \cos(t) & g''(t) &= -b \sin(t) . \end{aligned}$$

Entonces la curvatura al sustituir en la ecuación (2.35)

$$\kappa = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{3/2}} .$$

resulta

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|[-a \sin(t)][-b \sin(t)] - [b \cos(t)][-a \cos(t)]|}{\{[-a \sin(t)]^2 + [b \cos(t)]^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{|[ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t)]|}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}} = \frac{|ab(\sin^2(t) + \cos^2(t))|}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{|ab|}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}} \end{aligned}$$

2.2.4. Sistema de Frenet-Serret en dos dimensiones

En esta sección presentaremos la formulación del sistema de Frenet-Serret para las curvas en un plano.

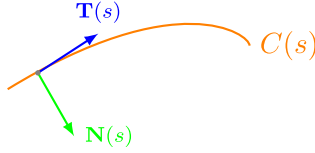


Figura 2.10: Vector tangente y normal en el plano.

Consideremos un punto sobre la curva como se presenta en la Figura 2.10. La derivada del producto punto del vector tangente en ese punto consigo mismo [4]

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \quad (2.36)$$

se reduce a

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{T} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 2\mathbf{T} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0 . \quad (2.37)$$

Sea κ la magnitud de $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$, considerando \mathbf{N} como el vector unitario normal a la tangente, es decir, introducimos un factor de proporcionalidad η tal que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \eta \mathbf{N} . \quad (2.38)$$

El término $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ expresa la razón de cambio de la tangente cuando avanzamos sobre la curva, es llamado el vector de curvatura, su dirección está bien definida por la curva, independiente de la orientación de ésta ya que cuando s cambia de signo, \mathbf{T} también cambia de signo [4].

Por ser \mathbf{N} perpendicular a \mathbf{T} , se tiene que

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0 . \quad (2.39)$$

Derivando esta última expresión tenemos

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = 0 . \quad (2.40)$$

De (2.38) y como $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$, al realizar el producto punto con \mathbf{N} se obtiene

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{N} = \eta \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \eta . \quad (2.41)$$

Entonces, al sustituir esto en la ecuación (2.40) resulta

$$\begin{aligned} \eta + \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} &= -\eta . \end{aligned} \quad (2.42)$$

De manera similar, al derivar el producto $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ se obtiene

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} , \quad (2.43)$$

lo que significa que $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ y \mathbf{N} son perpendiculares.

Ahora, cualquier vector \mathbf{x} en el plano \mathbf{T}, \mathbf{N} se puede expresar como

$$\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{N}}{ds} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} . \quad (2.44)$$

Consideremos $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{N}}{ds}$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} \right) \mathbf{T} + \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{N} \right) \mathbf{N} = -\eta \mathbf{T} \quad (2.45)$$

donde $\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} = -\eta$ y $\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{N} = 0$.

Por lo que la formulación de Frenet-Serret en dos dimensiones resulta

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \eta \mathbf{N} , \quad (2.46)$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\eta \mathbf{T} . \quad (2.47)$$

2.3. Curvas espaciales

2.3.1. Curvas en tres dimensiones

Una curva espacial o una curva en tres dimensiones, se define como un conjunto C de tripletas ordenadas

$$C = (f(t), g(t), h(t)) \quad (2.48)$$

donde las funciones f, g y h son continuas en un intervalo I [17].

2.3.2. Longitud de arco

La fórmula de longitud de arco para el espacio euclídeo tridimensional en un sistema coordenado rectangular (x^1, x^2, x^3) es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt ,$$

véase (C.2) en Apéndice C, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker [19].

Si una curva C está dada paramétricamente por $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$, donde $a \leq t \leq b$, y si C no se interseca a sí misma, excepto posiblemente en los puntos finales de $[a, b]$, entonces la longitud L de C está dada por

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} . \end{aligned}$$

2.3.3. Curvatura y torsión

La curvatura mide la razón de cambio de la tangente a lo largo de la curva mientras que la torsión es una cantidad que mide la razón de cambio del plano osculador. Por otro lado el plano osculador es el plano formado por los vectores tangente y normal de la curva. Para alcanzar este objetivo de medición se considera un vector normal en el punto P a dicho plano osculador que se denomina binormal [4]. Como se observa en la sección siguiente sobre la formulación del triedro de Frenet-Serret, se introduce este factor de proporcionalidad τ , que puede ser positivo o negativo, como la curvatura, pero donde la ecuación de la curva define solo κ^2 (se hace la convención de que siempre es positiva y por lo tanto se fija el sentido de desplazamiento en la indicatriz esférica [7]) esto solo define τ .

La definición de curvatura $\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$ introducida en la Definición 5 no posee un análogo inmediato en tres dimensiones, porque el vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ no puede especificarse en términos de un sólo ángulo θ . Por lo que es necesario usar un abordaje diferente para curvas espaciales. Entonces debemos mostrar que si nos enfocamos en vectores en el plano, la nueva definición debe coincidir con la Definición 5.

Para hallar una definición apropiada debemos primero observar que en dos dimensiones

$$\mathbf{T}(s) = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} ,$$

donde θ es el ángulo considerado en la Definición 5.

Considerando θ como una función de s , al diferenciar la ecuación anterior nos da

$$\mathbf{T}'(s) = \left(-\sin(\theta) \frac{d(\theta)}{ds} \right) \mathbf{i} + \left(\cos(\theta) \frac{d(\theta)}{ds} \right) \mathbf{j} = \frac{d(\theta)}{ds} (-\sin(\theta)\mathbf{i} + \cos(\theta)\mathbf{j}) .$$

Por lo que

$$|\mathbf{T}'(s)| = \left| \frac{d(\theta)}{ds} \right| |-\sin(\theta)\mathbf{i} + \cos(\theta)\mathbf{j}| = \left| \frac{d(\theta)}{ds} \right| = \kappa .$$

Para introducir el concepto de curvatura en tres dimensiones debemos usar esta última ecuación. De hecho, queremos describir el vector $\mathbf{T}(s)$ sin referirnos al ángulo θ para después definir κ como $|\mathbf{T}'(s)|$.

Supongamos que una curva C está dada por

$$x = f(s) , \quad y = g(s) , \quad z = h(s) ,$$

donde s es la longitud de arco medido a lo largo de C desde un punto fijo A al punto $P(s) = (f(s), g(s), h(s))$ y donde $f''(s)$, $g''(s)$ y $h''(s)$ existen. Como ya se ha mencionado, si $\mathbf{r}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$ es el vector posición de $P(s)$, entonces $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario tangente a C en $P(s)$ que denotaremos por $\mathbf{T}(s)$. Como $|\mathbf{T}|(s)$ es una constante, se tiene que $\mathbf{T}'(s)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(s)$. Si $\mathbf{T}'(s) \neq 0$, sea

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{|\mathbf{T}'(s)|} \mathbf{T}'(s) .$$

El vector $\mathbf{N}(s)$ es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{T}(s)$ y se le llama vector normal unitario principal a C en el punto $P(s)$ como se muestran en la Figura 2.11. Habiendo descrito

al vector tangente unitario $\mathbf{T}(s)$ continuamos con la definición de la curvatura en tres dimensiones como sigue, donde se asume que $\mathbf{T}'(s)$ existe.

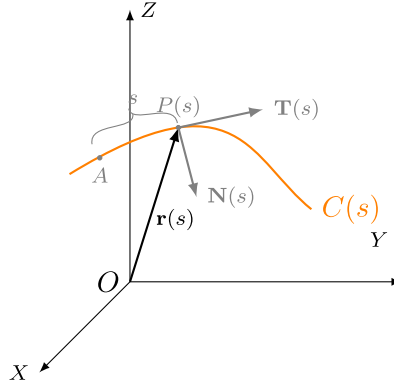


Figura 2.11: Vector unitario tangente $\mathbf{T}(s)$ y vector unitario normal principal $\mathbf{N}(s)$.

Definición 6. Sea la curva C dada por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s)$$

donde s es el parámetro longitud de arco. Sea $\mathbf{r}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$ y sea $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$. La curvatura κ de C en el punto $P(x, y, z)$ es

$$\kappa = |\mathbf{T}'(s)|.$$

Esta definición se reduce al resultado en Definición 5 si la curva C es plana. Nótese que

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa} \mathbf{T}'(s) \quad \text{o} \quad \mathbf{T}'(s) = \kappa \mathbf{N}(s).$$

Intentemos ahora calcular la fórmula de la curvatura de una curva espacial. Supongamos que en un tiempo t la partícula está en el punto $P(x, y, z)$ sobre una curva C dada de forma paramétrica por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ donde existen f'' , g'' y h'' . Representemos el vector de posición \overrightarrow{OP} y s denota la longitud de arco medida a lo largo de C . Asumamos que s incrementa conforme t incrementa. El vector unitario tangente puede expresarse como

$$\mathbf{T}(s) = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{r}'(t)$$

y por lo que

$$\mathbf{r}'(t) = |\mathbf{r}'(t)| \mathbf{T}(s) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(s).$$

Al diferenciar con respecto a t y considerando las reglas de diferenciación siguientes

$$D_t[f(t)\mathbf{u}(t)] = f(t)\mathbf{u}'(t) + f'(t)\mathbf{u}(t)$$

y

$$D_t\mathbf{u}(f(t)) = f'(t)\mathbf{u}'(f(t)),$$

donde $\mathbf{u}(t)$ es un vector, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''(t) &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}(s) + \frac{ds}{dt} \frac{d}{dt} \mathbf{T}(s) \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}(s) + \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} \mathbf{T}'(s) .\end{aligned}$$

De la nota de la Definición 6 escribimos $\mathbf{T}'(s) \kappa \mathbf{N}(s)$ donde κ es la curvatura de C . En consecuencia,

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}(s) + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \kappa \mathbf{N}(s) .$$

Si denotamos la velocidad ds/dt por v y escribimos $\kappa = 1/\rho$, donde ρ es el radio de curvatura de C , la fórmula reescrita puede expresar la aceleración $\mathbf{r}''(t)$ en términos del componente tangencial y el componente normal que depende solo de la velocidad y la curvatura de la curva entonces el componente normal de la aceleración es grande. Tenemos el siguiente teorema

Teorema 4. Sea P la posición de un punto en una curva C dado por

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

donde t representa el tiempo. Si la velocidad de P es $v = ds/dt$, entonces la aceleración de P es

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{dv}{dt} \mathbf{T}(s) + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{N}(s) .$$

donde ρ es el radio de curvatura de C .

Este resultado, en teoría, prueba el bien conocido hecho de que un automovilista debería frenar cuando va a tomar una curva.

Busquemos ahora fórmulas para los componentes normal y tangencial de la aceleración que dependan solo de $\mathbf{r}'(t)$. Primero recordemos de la discusión que

$$\mathbf{r}'(t) = v \mathbf{T}(s) .$$

Tomando el producto punto con $\mathbf{r}''(t)$ como se ve en el Teorema 4 se obtiene el componente tangencial de la aceleración. Y con el producto cruz se obtiene el componente normal de aceleración expresada como

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} . \quad (2.49)$$

Podemos utilizar esta ecuación para obtener una fórmula para la curvatura de una curva espacial C . Específicamente, si C está dada paramétricamente por

$$x = f(t) , \quad y = g(t) , \quad z = h(t)$$

sea

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} .$$

Podemos considerar a C como la curva trazada por el punto final de $\mathbf{r}(t)$ conforme t cambia. Como $v = |\mathbf{r}'(t)|$ y $\kappa = 1/\rho$ tenemos del componente normal de aceleración (2.49)

$$\frac{|\mathbf{r}'(t)|^2}{(1/\kappa)} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Al resolver para κ tenemos el siguiente

Teorema 5. Sea una curva C dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, donde f'' , g'' y h'' existen. La curvatura κ en el punto $P(x, y, z)$ sobre C es

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

A continuación revisaremos la formulación del sistema de Frenet-Serret y su relación con las ecuaciones de las curvas en tres dimensiones.

2.3.4. Sistema de Frenet-Serret en tres dimensiones

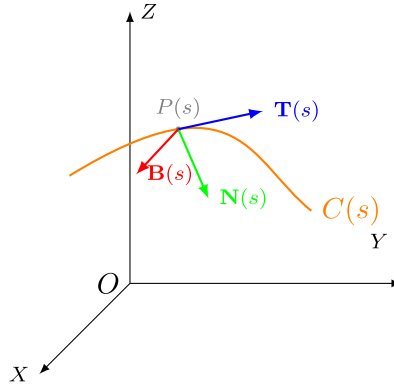


Figura 2.12: Vector tangente, normal y binormal de un punto sobre una curva en el espacio.

Para la formulación del sistema de Frenet-Serret en tres dimensiones, definimos un vector unitario \mathbf{B} perpendicular a \mathbf{T} y \mathbf{N} , véase la Figura 2.12. Derivando el producto punto con \mathbf{T} y \mathbf{N}

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} - \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} \right) \mathbf{T} - \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{N} \right) \mathbf{N} = \tau \mathbf{B}, \quad (2.50)$$

donde $\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{T} = -\kappa$ y $\frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{N} = 0$ y τ es otro factor de proporcionalidad. Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}}{ds} + \kappa \mathbf{T} - 0 &= \tau \mathbf{B} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Sea $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ un vector expresado en términos del vector tangente \mathbf{T} , del vector normal \mathbf{N} y del vector binormal \mathbf{B} .

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}, \quad (2.52)$$

donde a, b y c son constantes. Además, considerando que $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 1$ que resulta en $2\frac{d\mathbf{B}}{ds} = 0$, y que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$, al diferenciar

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} \mathbf{N} + \frac{d\mathbf{N}}{ds} \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{2.53}$$

y considerando la ecuación (2.51) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{B}}{ds} \mathbf{N} + \frac{d\mathbf{N}}{ds} \mathbf{B} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} \mathbf{N} + (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.54}$$

al sustituir (2.52) en (2.54) se tiene

$$\begin{aligned}(a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B})\mathbf{N} + (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B})\mathbf{B} &= 0 \\ a\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} + b\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} + c\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} - \kappa \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} + \tau \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.55}$$

Además, como $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 1$, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0$ entonces $a = 0$, $c = 0$, por lo que la ecuación (2.55) se reduce a

$$b = -\tau.\tag{2.56}$$

Esto quiere decir que el vector $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ supuesto de forma (2.52) tiene realmente la forma

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}.\tag{2.57}$$

Al diferenciar $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} \mathbf{T} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.58}$$

Al sustituir la ecuación (2.52) en (2.58) y considerando que $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{N}$, se tiene

$$\begin{aligned}(a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B})\mathbf{T} + \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ a\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + b\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} + c\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} + \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Esto último se reduce a $a = 0$, por lo que no tiene término con \mathbf{T} . Entonces el sistema de Frenet- Serret queda establecido con las ecuaciones (2.46), (2.51) y (2.57)

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \kappa \mathbf{N} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} &= -\tau \mathbf{N}\end{aligned}$$

En nuestro caso de estudio consideramos el sistema de Frenet-Serret como sigue

$$\begin{aligned}\alpha' &= \kappa \beta, \\ \beta' &= -\kappa \alpha + \tau \gamma, \\ \gamma' &= -\tau \beta,\end{aligned}\tag{2.60}$$

donde α, β y γ son considerados los cosenos directores del radio vector que define a la curva y α', β' y γ' son las derivadas de estos en función de s .

2.3.5. Sistema de Frenet-Serret en cuatro dimensiones

Es posible obtener una formulación en cuatro dimensiones con un procedimiento muy similar al que se presentó en la sección previa. Si \mathbf{D} es ortogonal a \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} entonces $\mathbf{D} \cdot \mathbf{T} = 0$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 1$. Derivando $\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = 0$ y al considerar la ecuación (2.46) se obtiene

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{B} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} = \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0$$

que resulta en

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{T} = -\kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} . \quad (2.61)$$

Derivando $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ al considerar (2.51)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{B} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ -\kappa \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} + \tau \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} &= -\tau . \end{aligned} \quad (2.62)$$

Al considerar (2.61), (2.62) y recordando que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} &= 1 \\ 2 \frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{B} &= 0 , \end{aligned}$$

el vector \mathbf{B} sería definido como $\sigma \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}}{ds} - \left(\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right) \mathbf{T} - \left(\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right) \mathbf{N} - \left(\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right) \mathbf{B} &= \sigma \mathbf{D} \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} + \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} + \tau \mathbf{N} - 0 &= \sigma \mathbf{D} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N} + \sigma \mathbf{D} \quad (2.63)$$

Ahora, como queremos que \mathbf{D} sea un vector ortogonal con la siguiente forma

$$\frac{d\mathbf{D}}{ds} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B} + d\mathbf{D} . \quad (2.64)$$

Veamos cómo es respecto a los otros vectores ortogonales.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{D}}{ds} \right) \cdot \mathbf{T} &= (a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B} + d\mathbf{D}) \cdot \mathbf{T} \\ \left(\frac{d\mathbf{D}}{ds} \right) \cdot \mathbf{T} &= a\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = a . \end{aligned}$$

Donde a, b, c, d son constantes arbitrarias. Y análogamente para los \mathbf{N} , \mathbf{B} y \mathbf{D} .

Consideremos el producto punto de los últimos dos vectores \mathbf{B} y \mathbf{D} ($\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = 0$) y al diferenciarlo obtenemos

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{ds} = 0$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.63) y (2.64), la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned} (-\tau\mathbf{N} + \sigma\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot (a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B} + d\mathbf{D}) &= 0 \\ (-\tau\mathbf{N}) \cdot \mathbf{B} + (\sigma\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + a\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} + b\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} + c\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + d\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

que al considerar que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = 0$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = 0$ y $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 1$ se obtiene

$$c = -\sigma .$$

Por lo que el vector $\frac{d\mathbf{D}}{ds}$ está dado por

$$\frac{d\mathbf{D}}{ds} = -\sigma\mathbf{B} . \quad (2.65)$$

Entonces, el sistema en cuatro dimensiones está formado por las ecuaciones (2.46), (2.51), (2.63) y (2.65)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \kappa\mathbf{N} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} &= -\tau\mathbf{N} + \sigma\mathbf{D} \\ \frac{d\mathbf{D}}{ds} &= -\sigma\mathbf{B} . \end{aligned}$$

Marco de Frenet-Serret para \mathbb{E}^4

De acuerdo a la sección anterior la formulación se generaliza a cuatro dimensiones de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa\mathbf{T} + \tau_1\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1' &= -\tau_1\mathbf{N} + \tau_2\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2' &= -\tau_2\mathbf{B}_1 \end{aligned}$$

O en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{B}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau_1 & 0 \\ 0 & -\tau_1 & 0 & \tau_2 \\ 0 & 0 & -\tau_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} ,$$

donde \mathbf{T}' , \mathbf{N}' , \mathbf{B}_1' y \mathbf{B}_2' son diferenciales de los vectores tangente, normal, primera binormal y segunda binormal, respectivamente y κ , τ_1 y τ_2 son la curvatura y la primera y segunda torsión respectivamente.

Y a cinco dimensiones

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N} \\
\mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T} + \tau_1 \mathbf{B}_1 \\
\mathbf{B}_1' &= -\tau_1 \mathbf{N} + \tau_2 \mathbf{B}_2 \\
\mathbf{B}_2' &= -\tau_2 \mathbf{B}_1 + \tau_3 \mathbf{B}_3 \\
\mathbf{B}_3' &= -\tau_3 \mathbf{B}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{B}_2' \\ \mathbf{B}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_1 & 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_2 & 0 & \tau_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{pmatrix},$$

donde, de igual forma, \mathbf{B}_3 es también la tercera binormal y τ_3 un tercera torsión.

2.4. Ecuación diferencial de las curvas espaciales

En la geometría diferencial de las curvas espaciales, que también es equivalente a la cinemática de trayectorias en la mecánica clásica, un resultado básico fue obtenido por J. F. Frenet y J. A. Serret alrededor de 1850, cuando introdujeron el Sistema de Frenet-Serret de ecuaciones diferenciales de primer orden para el marco móvil ortogonal de vectores tangente, normal y binormal (2.60) donde las primas representan las derivadas con respecto a la longitud del arco s de la curva, y los coeficientes κ y τ son la curvatura y la torsión de la curva, respectivamente. Este sistema lineal de tres ecuaciones de evolución acopladas en la longitud de la curva es, por supuesto, equivalente a una ecuación diferencial de tercer orden en la forma de la siguiente ecuación diferencial de cuarto orden en el vector tangente

$$\mathbf{x}^{(iv)} - \left(\frac{2\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau} \right) \mathbf{x}''' + \left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{\kappa\kappa'' - 2(\kappa')^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} \right) \mathbf{x}'' + \kappa^2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau} \right) \mathbf{x}' = 0, \quad (2.66)$$

donde $\kappa, \tau \neq 0$ y κ', κ'' son diferenciales de la curvatura y τ' la diferencial de la torsión.

En ecuaciones diferenciales ordinarias se estudia la reducción de una ecuación diferencial ordinaria no lineal conocida como ecuación de Riccati de la forma [20]

$$p(s)x + q(s) = f(s) \quad (2.67)$$

a una ecuación de Bernoulli o a una ecuación lineal de primer orden por medio de un cambio de variable o sustitución de variable una vez obtenida la función $u(x)$ la sustituimos en $y(t)$ para obtener la solución deseada. Ese es un algoritmo conocido y que incluiremos en el Apéndice A sobre ecuaciones de Riccati.

La ecuación de Riccati para las curvas que encontramos en la literatura [4] y [21] es una ecuación diferencial de cuarto orden homogénea y la obtención de su solución puede darse por sí misma al reducir el orden o al transformarla en un sistema de ecuaciones. La solución de dicha ecuación pertenece al estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior.

Si en lugar de utilizar el método de la ecuación de Riccati nos disponemos a obtener la $\mathbf{x}(s)$ directamente como la solución de las ecuaciones de Frenet para una $\kappa \neq 0$ y $\tau \neq 0$ se obtiene la ecuación (2.66).

Por otro lado, dada una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ de clase ≥ 4 cumple la ecuación diferencial (2.66). al calcular $\mathbf{x}' = \mathbf{t}$, $\mathbf{x}'' = \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$, $\mathbf{x}''' = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' = \kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} + \kappa \tau \mathbf{b}$ y $\mathbf{x}^{(iv)} = \dots$ como combinaciones lineales de \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , es decir, tangente, normal y binormal, respectivamente, y haciendo las sustituciones del caso.

Recordemos que el triedro de Frenet está definido como

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau \mathbf{n} .\end{aligned}\tag{2.68}$$

Entonces comenzamos con obtener $x^{(iv)}$:

$$x^{(iv)} = \kappa'' \mathbf{n} + \kappa' \mathbf{n}' - (2\kappa \mathbf{t} + \kappa^2 \mathbf{t}') + \kappa' \tau \mathbf{b} + \kappa(\tau' \mathbf{b} + \tau \mathbf{b}')\tag{2.69}$$

y al sustituir \mathbf{t}' , \mathbf{n}' , \mathbf{b}' en (2.69)

$$\begin{aligned}x^{(iv)} &= \ddot{\kappa} \mathbf{n} + \dot{\kappa}(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) - 2\kappa \mathbf{t} - \kappa^3 \mathbf{n} + \dot{\kappa} \tau \mathbf{b} + \kappa \dot{\tau} \mathbf{b} + \kappa \tau(-\tau \mathbf{n}) \\ &= \ddot{\kappa} \mathbf{n} - \dot{\kappa} \kappa \mathbf{t} + \tau \dot{\kappa} \mathbf{b} - 2\kappa \mathbf{t} - \kappa^3 \mathbf{n} + \dot{\kappa} \tau \mathbf{b} + \kappa \dot{\tau} \mathbf{b} - \kappa \tau^2 \mathbf{n} \\ &= (\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa \tau^2) \mathbf{n} + (-\kappa \dot{\kappa} - 2\kappa) \mathbf{t} + (2\tau \dot{\kappa} + \kappa \dot{\tau}) \mathbf{b} .\end{aligned}\tag{2.70}$$

Sustituimos $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}^{(iv)}$ en la ecuación diferencial (2.66)

$$\mathbf{x}^{(iv)} - \left(\frac{2\dot{\kappa}}{\kappa} + \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) (\dot{\kappa} \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} + \kappa \tau \mathbf{b}) + \left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{\kappa \ddot{\kappa} - 2(\dot{\kappa})^2}{\kappa^2} + \frac{\dot{\kappa} \dot{\tau}}{\kappa \tau} \right) (\kappa \mathbf{n})\tag{2.71}$$

$$+ \kappa^2 \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) \mathbf{t} = 0$$

$$\mathbf{x}^{(iv)} - \left(\frac{2\dot{\kappa}^2}{\kappa} + \frac{\dot{\tau} \dot{\kappa}}{\tau} \right) \mathbf{n} + \left(2\kappa \dot{\kappa} + \frac{\dot{\tau}}{\tau} \kappa^2 \right) \mathbf{t} - (2\dot{\kappa} \tau + \dot{\tau} \kappa) \mathbf{b} + \left(\kappa^3 + \kappa \tau^2 + \frac{\dot{\kappa} \dot{\tau}}{\tau} + \frac{2\dot{\kappa}^2 - \kappa \dot{\kappa}}{\kappa} \right) \mathbf{n}\tag{2.72}$$

$$+ \left(\kappa \dot{\kappa} - \frac{\kappa^2 \dot{\tau}}{\tau} \right) \mathbf{t} = 0$$

$$\mathbf{x}^{(iv)} + \left(\kappa^3 + \tau^2 \kappa - \frac{\kappa \ddot{\kappa}}{\kappa} \right) \mathbf{n} + (3\kappa \dot{\kappa}) \mathbf{t} - (2\dot{\kappa} \tau + \dot{\tau} \kappa) \mathbf{b} = 0 .\tag{2.73}$$

Observamos que se reducen todos los términos de esta última ecuación y (2.70) así

$$(\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa \tau^2) \mathbf{n} + (-\kappa \dot{\kappa} - 2\kappa) \mathbf{t} + (2\tau \dot{\kappa} + \kappa \dot{\tau}) \mathbf{b} + \left(\kappa^3 + \tau^2 \kappa - \frac{\kappa \ddot{\kappa}}{\kappa} \right) \mathbf{n} + (3\kappa \dot{\kappa}) \mathbf{t} - (2\dot{\kappa} \tau + \dot{\tau} \kappa) \mathbf{b} = 0 .\tag{2.74}$$

Como vimos, estamos interesados en soluciones linealmente dependientes de una ecuación diferencial lineal de orden superior de la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} = g(x) .\tag{2.75}$$

Esta ecuación es de un tipo en la que la variable y no aparece explícitamente. El método de reducción de orden considera el cambio de variable

$$z = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^3z}{dy^3} = \frac{d^4y}{dx^4}. \quad (2.76)$$

Considerando los coeficientes de la ecuación (2.66) de acuerdo a la ecuación (2.75), definimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{a_1(x)}{a_4(x)} = \kappa^2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau} \right), & Q(x) &= \frac{a_2(x)}{a_4(x)} = \kappa^2 + \tau^2 - \frac{\kappa\kappa'' - 2(\kappa')^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} \\ R(x) &= \frac{a_3(x)}{a_4(x)} = \kappa^2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau} \right), & S(x) &= \frac{g(x)}{a_4(x)} = 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Si sustituimos estas funciones y el cambio de variable en la ecuación de cuarto orden lograremos reducir a una ecuación de la siguiente forma

$$\frac{d^3z}{dy} - R(x) \frac{d^2z}{dy} + Q(x) \frac{dz}{dy} + P(x)z = S(x) = 0. \quad (2.78)$$

2.5. El método de Lie-Darboux y las fórmulas de Scheffers

En la sección anterior se presentó un enfoque de las ecuaciones diferenciales para expresar curvas solución de dichas ecuaciones. Un resultado menos conocido, pero no menos importante, fue obtenido a finales del siglo XIX por S. Lie. y G. Darboux, quienes idearon un método con el cual las curvas espaciales podrían describirse mediante una ecuación de Riccati de primer orden no lineal con coeficientes expresados en términos de curvatura y torsión. El método de Lie-Darboux se menciona en algunos libros de texto clásicos de geometría diferencial, como el tratado de Eisenhart [7] y las conferencias de Struik [4].

En la literatura [7] y [5] encontramos el resultado que habla sobre la congruencia de dos curvas dadas C_1, C_2 cuando los valores intrínsecos de ambas (la primera y segunda curvatura, es decir, la curvatura y la torsión respectivamente) coinciden en cada uno de los puntos de las curvas.

De dicho resultado se tiene que una curva está determinada a pesar de su posición en el espacio, por las expresiones para el radio de curvatura ρ y radio de torsión p en términos de la longitud de arco. Por lo que las ecuaciones de una curva que pueden escribirse de la forma

$$\kappa = f_1(s), \quad \tau = f_2(s) \quad (2.79)$$

donde $\kappa = \frac{1}{\rho}$ es la curvatura y $\tau = \frac{1}{p}$ es la torsión, son llamadas *ecuaciones intrínsecas* de la curva.

El objetivo ahora es sobre el caso converso, es decir, cuando dos ecuaciones (2.79) son ecuaciones intrínsecas de una curva para la cual s es la longitud de arco, en las cuales f_1 y f_2 son funciones cualesquiera del parámetro s ¿qué se obtiene?. Para responder esta

pregunta, en primer lugar, las ecuaciones (2.60) reescritas como están en [5]

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho}, \quad (2.80)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{p}\right), \quad (2.81)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\beta}{p} \quad (2.82)$$

o como las encontramos en [4]

$$\frac{d\alpha}{ds} = \kappa\beta, \quad (2.83)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\kappa\alpha + \tau\gamma, \quad (2.84)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = -\tau\beta \quad (2.85)$$

admiten tres conjuntos de soluciones de cosenos directores, es decir:

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1; \quad (2.86)$$

$$\alpha = \alpha_2, \quad \beta = \beta_2, \quad \gamma = \gamma_2; \quad (2.87)$$

$$\alpha = \alpha_3, \quad \beta = \beta_3, \quad \gamma = \gamma_3; \quad (2.88)$$

tales que para cada valor de s las cantidades α_i , β_i y γ_i son los cosenos directores de tres líneas o vectores perpendiculares entre sí. Con un argumento similar al que utilizan en la teoría de curvas congruentes prueban que para todos los valores de s las soluciones (2.86) satisfacen las condiciones siguientes

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\alpha_3 + \gamma_3\gamma_1 = 0. \quad (2.89)$$

es decir, se cumplen las condiciones de ortogonalidad y además las condiciones de los cosenos directores al inicio de este capítulo, ecuación (2.3), sobre que la suma de los cuadrados de una recta siempre debe ser igual a uno

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (2.90)$$

Para más información respecto a estos conjuntos de soluciones consulte [4, 5, 7].

Para ser más precisos supongamos que tenemos un conjunto de soluciones, es decir, α_1, α_2 y α_3 son los cosenos directores de la tangente a la curva. Para la curva dada por las siguientes ecuaciones

$$x = \int \alpha_1 ds, \quad y = \int \alpha_2 ds, \quad z = \int \alpha_3 ds, \quad (2.91)$$

se puede decir, que si ρ es positivo para todos los valores de s , es el radio de curvatura de la curva (2.91) y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ son los cosenos directores de la normal principal en el sentido positivo y las funciones $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ son los cosenos directores de la binormal [5, 7]. Por lo que de las ecuaciones de Frenet- Serret (2.60) y la tercera ecuación de (2.80) se tiene que p es el radio de torsión de la curva. Por lo que tenemos el siguiente teorema fundamental de las curvas [5]:

Teorema 6. *Dadas dos funciones holomórficas $f_1(s)$, $f_2(s)$ de los cuales la forma es positiva para todos los valores de s en un cierto dominio, en un dominio dado para valores de la longitud de arco s existe una curva para la cual $\rho = f_1(s)$, $\tau = f_2(s)$. La determinación de la curva se reduce a hallar los tres conjuntos de soluciones de las ecuaciones (2.80) satisfaciendo las condiciones (2.89), (2.90) e integrar.*

O siguiendo el procedimiento de Struik [4], procederemos a efectuar la integración de las ecuaciones (2.83).

Dado que aún desconocemos estos cosenos directores como funciones de s , queremos hallar aquellas funciones α, β, γ de s que, además de las ecuaciones (2.83), también corresponden a la ecuación siguiente

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (2.92)$$

es este punto donde recordamos la reducción del estudio de las curvas espaciales en \mathbb{E}^3 al estudio de las curvas en \mathbb{S}^2 mencionada al inicio de esta tesis: para una curva indicatriz esférica arbitraria, sus vectores unitarios tangente, normal y binormal satisfacen el sistema lineal de Frenet-Serret (2.60) y también la ecuación algebraica de la esfera unitaria \mathbb{S}^2 (2.92). La idea del método de Lie-Darboux es convertir esta definición aditiva de \mathbb{S}^2 en la forma factorizada

$$(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = (1 + \gamma)(1 - \gamma) \quad (2.93)$$

e introducir las funciones imaginarias conjugadas w y $-z^{-1}$

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta}, \quad (2.94)$$

$$-\frac{1}{z} = \frac{\alpha - i\beta}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\alpha + i\beta}, \quad (2.95)$$

de donde se puede obtener la tangente, normal y binormal en formas racionales en términos de las funciones w y z

$$\alpha = \frac{1 - wz}{w - z}, \quad \beta = i \frac{1 + wz}{w - z}, \quad \gamma = \frac{w + z}{w - z}. \quad (2.96)$$

Así mismo en el caso del sistema de Frenet-Serret, uno puede estar interesado en la evolución en la variable longitud de arco de las funciones w y $-1/z$. Para la diferencial de w , tenemos

$$w' = \frac{\alpha' + i\beta'}{1 - \gamma} + \frac{\alpha + i\beta}{(1 - \gamma)^2} \gamma' = -i\kappa w + \frac{i\gamma - \beta w}{1 - \gamma}, \quad (2.97)$$

donde en el último paso se han utilizado las derivadas del sistema de Frenet-Serret (2.83). El truco ahora es obtener α de la primera definición de w en (2.94) y sustituirla en la segunda definición de w . La ecuación resultante, se resuelve para β y al sustituir en la última ecuación de (2.96). El resultado es que γ se elimina de la ecuación (2.97), la cual se convierte en

$$w' = -i\kappa w + \frac{i}{2}\tau w^2 - \frac{i}{2}\tau, \quad (2.98)$$

que es una ecuación de Riccati en la cual la torsión proporciona tanto el término libre como el acoplamiento a la no linealidad. Esta ecuación diferencial (2.98) pertenece a una

clase de ecuaciones diferenciales interesante ya que define el cociente diferencial de la función desconocida w como una función cuadrática de w , cuyos coeficientes, κ y τ sin embargo todavía contienen la variable independiente s .

Un cálculo algebraico similar muestra que la función z satisface la misma ecuación de Riccati que w , lo que implica que los resultados para w se apliquen también a z . La segunda parte del método de Lie-Darboux consiste en obtener las ecuaciones paramétricas de la curva a partir de la ecuación de Riccati (2.98). La forma más sencilla de hacerlo es integrando los tres componentes del vector unitario tangente α en (2.96).

Se puede observar que para cada uno de los componentes se necesitan dos soluciones particulares de (2.98), w y z . La expresión más conveniente para estas soluciones de Riccati es la forma racional

$$w = \frac{cf_1 + f_2}{cf_3 + f_4}, \quad z = \frac{df_1 + f_2}{df_3 + f_4}, \quad (2.99)$$

donde c y d son constantes elegidas apropiadamente que deben cumplir las relaciones de ortogonalidad de los vectores Frenet-Serret escrito en términos de w y z , y las f_i son funciones de la longitud del arco s también soluciones particulares de la ecuación (2.98).

No hay un método general para resolver la ecuación de Riccati (2.98), y ya sabemos resolverlos sólo en casos particulares pero la solución general w , por cierto, se puede dar tan pronto como tengan o conozcan las soluciones particulares [5].

Entonces para las soluciones de las ecuaciones de Riccati tenemos para α_i presentadas en [4]:

$$\alpha_1 = \frac{1 - w_1 z_1}{w_1 - z_1}, \quad \beta_1 = \frac{1 + w_1 z_1}{w_1 - z_1}, \quad \gamma_1 = \frac{w_1 + z_1}{w_1 - z_1}, \quad (2.100)$$

$$\alpha_2 = \frac{1 - w_2 z_2}{w_2 - z_2}, \quad \beta_2 = \frac{1 + w_2 z_2}{w_2 - z_2}, \quad \gamma_2 = \frac{w_2 + z_2}{w_2 - z_2}, \quad (2.101)$$

$$\alpha_3 = \frac{1 - w_3 z_3}{w_3 - z_3}, \quad \beta_3 = \frac{1 + w_3 z_3}{w_3 - z_3}, \quad \gamma_3 = \frac{w_3 + z_3}{w_3 - z_3}, \quad (2.102)$$

Las fórmulas importantes de los componentes para la tangente unitaria fueron obtenidas por primera vez por G. Scheffers [5]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(f_1^2 - f_3^2) - (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\ \alpha_2 &= i \frac{(f_1^2 - f_3^2) + (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\ \alpha_3 &= \frac{f_3 f_4 - f_1 f_2}{(f_1 f_4 - f_2 f_3)}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva son obtenidas al integrar α_i a lo largo de la curva:

$$x(s) = \int^s \alpha_1(\sigma) d\sigma, \quad y(s) = \int^s \alpha_2(\sigma) d\sigma, \quad z(s) = \int^s \alpha_3(\sigma) d\sigma. \quad (2.104)$$

Entonces cabe recalcar que el principal objetivo del método de Lie-Darboux es obtener cuatro funciones $f_i(s)$, es decir poner las soluciones de la ecuación de Riccati en la forma

dada en (2.99) . Consideremos algunos ejemplos utilizando clases especiales de curvas para determinarlas de esta manera [5, 7].

Nota 1. Se presenta a continuación el caso cuando las curvas tienen torsión cero:

$$\tau = \frac{1}{p} = 0 .$$

la solución general de la ecuación de Riccati degenerada

$$\sigma = ce^{-i \int \frac{ds}{r}}$$

por lo que el conjunto de soluciones puede considerarse

$$f_1 = e^{-i \int \frac{ds}{r}} , \quad f_2 = 0 , \quad f_3 = 0 , \quad f_4 = 1$$

de modo que la fórmula para α_3 en las ecuaciones (2.103) sea $\alpha_3 = \text{cte}$. Por tanto, la curva mencionada resultante es plana.

Nota 2. Veamos ahora las curvas cuya curvatura es cero, es decir cuando

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = 0 .$$

La solución de la ecuación resultante al considerar $\kappa = 0$

$$\sigma = \frac{ce^{i \int \frac{ds}{\rho}} - 1}{ce^{i \int \frac{ds}{\rho}} + 1} .$$

Esto proporciona el conjunto de soluciones

$$p = e^{i \int \frac{ds}{\rho}} , \quad q = -1 , \quad \pi = e^{i \int \frac{ds}{\varphi}} , \quad \kappa = 1 .$$

Y la curva resultante es una recta.

Resultados y aplicaciones

En este capítulo se presenta un enfoque más general del método de Lie-Darboux que genera dos ecuaciones de Riccati que difieren por el signo de la torsión.

3.1. Dos ecuaciones de Riccati para el método de Lie-Darboux

Consideremos la siguiente generalización de la ecuación algebraica (2.92) presentada en el capítulo anterior,

$$k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \beta^2 + k_3^2 \gamma^2 = 1, \quad (3.1)$$

donde k_1 , k_2 y k_3 son constantes reales arbitrarias. Para $k_1 = k_2 = k_3 = k$ esta ecuación (3.1) de la esfera de radio k^{-1} en el espacio euclidiano tridimensional \mathbb{E}^3 y si $k = 1$ es la esfera unitaria. También se considera que las funciones α , β y γ son funciones de la longitud de arco s . Procedemos a factorizar (3.1) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \beta^2 &= 1 - k_3^2 \gamma^2 \\ (k_1 \alpha + i k_2 \beta)(k_1 \alpha - i k_2 \beta) &= (1 + k_3 \gamma)(1 - k_3 \gamma). \end{aligned}$$

A continuación se define la función w de dos maneras

$$w = \frac{k_1 \alpha + i k_2 \beta}{1 - k_3 \gamma} = \frac{1 + k_3 \gamma}{k_1 \alpha - i k_2 \beta}, \quad (3.2)$$

derivando con respecto a s la primera definición en (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} w' &= \frac{(k_1 \alpha + i k_2 \beta)'(1 - k_3 \gamma)}{(1 - k_3 \gamma)^2} - \frac{(k_1 \alpha + i k_2 \beta)(1 - k_3 \gamma)'}{(1 - k_3 \gamma)^2} \\ &= \frac{k_1 \alpha' + i k_2 \beta'}{1 - k_3 \gamma} + \frac{(k_1 \alpha + i k_2 \beta) k_3 \gamma'}{(1 - k_3 \gamma)^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Al sustituir las derivadas de α , β y γ que hallamos en el sistema de Frenet-Serret (2.60) y usando la primera definición de la función w en (3.2), la ecuación (3.3) se transforma en

$$\begin{aligned} w' &= \frac{k_1 \kappa \beta - i k_2 \kappa \alpha + i k_2 \tau \gamma}{1 - k_3 \gamma} + w \frac{k_3 (-\tau \beta)}{1 - k_3 \gamma} \\ &= -i \kappa \frac{k_2 \alpha + i k_1 \beta}{1 - k_3 \gamma} + \tau \frac{i k_2 \gamma - k_3 \beta w}{1 - k_3 \gamma}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se puede ver que al tomar en esta última ecuación $k_1 = k_2 = k$ se obtiene

$$w' = -i\kappa w + \tau \frac{ik\gamma - k_3\beta w}{1 - k_3\gamma} . \quad (3.5)$$

Por otro lado, también podemos obtener α de la primera definición de w en la ecuación (3.2)

$$w(1 - k_3\gamma) - ik\beta = k\alpha , \quad (3.6)$$

que resulta entonces

$$\alpha = \frac{w(1 - k_3\gamma) - ik\beta}{k} = \frac{(1 - k_3\gamma)}{k} w - i\beta . \quad (3.7)$$

Sustituyendo la expresión de α (3.7) en la segunda definición de w (3.2), obtenemos

$$w = \frac{1 + k_3\gamma}{k \left[\frac{(1 - k_3\gamma)}{k} w - i\beta \right] - ik\beta} = \frac{1 + k_3\gamma}{(1 - k_3\gamma)w - 2ik\beta} . \quad (3.8)$$

De este modo, al reacomodar los términos de (3.8) tenemos

$$(1 - k_3\gamma)w^2 - 2ik\beta w = 1 + k_3\gamma . \quad (3.9)$$

de donde obtenemos β como sigue

$$\beta = \frac{1 + k_3\gamma - (1 - k_3\gamma)w^2}{-2ikw} = \frac{i}{2} \frac{(1 + k_3\gamma)}{kw} - \frac{i}{2} \frac{1 - k_3\gamma}{k} w , \quad (3.10)$$

que tras sustituir (3.10) en la ecuación (3.5), y después de los pasos de cálculo siguientes llegamos a

$$\begin{aligned} w' &= -i\kappa w + \tau \frac{ik\gamma}{1 - k_3\gamma} - k_3\tau w \left[\frac{\frac{i}{2} \left(\frac{1 + k_3\gamma}{kw} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{1 - k_3\gamma}{k} \right) w}{1 - k_3\gamma} \right] \\ &= -i\kappa w + \tau \frac{ik\gamma}{1 - k_3\gamma} - \frac{i}{2} \tau \left[\frac{k_3}{k} \left(\frac{1 + k_3\gamma}{1 - k_3\gamma} \right) - \frac{k_3}{k} \left(\frac{1 - k_3\gamma}{1 - k_3\gamma} \right) w^2 \right] \\ &= -i\kappa w + \tau \frac{i}{2} \frac{k_3}{k} w^2 + \frac{i\tau}{2} \left[\frac{2k\gamma}{1 - k_3\gamma} - \frac{k_3}{k} \frac{1 + k_3\gamma}{1 - k_3\gamma} \right] \\ &= -i\kappa w + \tau \frac{i}{2} \frac{k_3}{k} w^2 + \frac{i\tau}{2} Q \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde

$$Q = \frac{2k^2\gamma - k_3(1 + k_3\gamma)}{k(1 - k_3\gamma)} . \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) aún contiene el término γ , se toman algunas consideraciones para obtener una ecuación en términos de los parámetros intrínsecos y la función w .

Al considerar $k_3 = k$ en (3.11), obtenemos que el término denotado por Q resulta $Q = -1$, lo cual lleva a la ecuación de Riccati siguiente, la cual es la ecuación obtenida en el método de Lie-Darboux original, es decir, el hallado en la literatura,

$$w' = -i\kappa w + \frac{i}{2} \tau w^2 - \frac{i\tau}{2} . \quad (3.13)$$

Por otro lado, si tomamos $k_3 = -k$ entonces $Q = 1$, que lleva a la ecuación de Riccati siguiente

$$\tilde{w}' = -i\kappa\tilde{w} - \frac{i}{2}\tau\tilde{w}^2 + \frac{i\tau}{2} . \quad (3.14)$$

Esta ecuación difiere de la primera ecuación de Riccati en el signo de la torsión. Retomaremos lo que implica este cambio de signo más adelante en este trabajo. A continuación se revisa el caso de las hélices cilíndricas del punto de vista de las dos ecuaciones de Riccati con torsiones opuestas.

3.2. Aplicación a las hélices cilíndricas

Las hélices cilíndricas son conocidas como el caso más sencillo de curvas de pendiente constante, es decir, curvas que poseen la razón entre curvatura y torsión constante, $\kappa/\tau = h$, donde h es una constante real arbitraria [7]. Para tales curvas, las ecuaciones de Riccati en el método estándar se resuelven por separación de variables y por lo tanto se pueden utilizar como el ejemplo ilustrativo preferido para el método de Lie-Darboux.

Caso $k_3 = k$. Consideremos la ecuación de Riccati (3.13) correspondiente a este caso la cual tiene la siguiente forma

$$\frac{dw}{ds} = \frac{i\tau}{2}(w^2 - 2\xi w - 1) , \quad (3.15)$$

donde $\xi = \kappa/\tau = a/b$ es una constante que tomamos como número racional. Utilizando el método de separación de variables obtenemos

$$\int \frac{dw}{w^2 - 2\xi w - 1} = \int \frac{i\tau}{2} ds . \quad (3.16)$$

Al reescribir el término del lado izquierdo de la ecuación (3.16) se tiene

$$\int \frac{dw}{w^2 - 2\xi w - 1} = \frac{1}{(w_1 - w_2)} \int \frac{1}{(w - w_1)} - \frac{1}{(w - w_2)} dw . \quad (3.17)$$

Entonces, la ecuación (3.16) se reescribe como

$$\frac{1}{(w_1 - w_2)} \int \frac{1}{(w - w_1)} - \frac{1}{(w - w_2)} dw = \int \frac{i}{2} \tau d\sigma . \quad (3.18)$$

Al resolver la ecuación (3.18) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_1 - w_2} [\ln(w - w_1) - \ln(w - w_2)] &= \frac{i}{2} \int \tau d\sigma + C \\ \frac{1}{w_1 - w_2} \left[\ln \left(\frac{w - w_1}{w - w_2} \right) \right] &= \frac{i}{2} \int \tau d\sigma + C . \\ \ln \left(\frac{w - w_1}{w - w_2} \right) &= \frac{i}{2} \cdot 2\sqrt{\xi^2 + 1} \int \tau d\sigma + C \\ \ln \left(\frac{w - w_1}{w - w_2} \right) &= i \frac{c}{b} \int^s \tau(\sigma) d\sigma + \ln K . \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $w_1 = \xi + \sqrt{\xi^2 + 1}$ y $w_2 = \xi - \sqrt{\xi^2 + 1}$ son las raíces del polinomio $w^2 - 2\xi w - 1 = 0$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y la constante de integración arbitraria C se escribe por conveniencia como $\ln K$. Al resolver para w , se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{w - w_1}{w - w_2} &= K e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} \\
w - w_1 &= K e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} (w - w_2) \\
K e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} w - w &= K e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} w_2 - w_1 \\
w(K e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} - 1) &= K e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} w_2 - w_1 \\
w &= \frac{K w_2 e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} - w_1}{K e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} - 1}, \tag{3.20}
\end{aligned}$$

donde

$$\phi(s) = \int^s \tau(\sigma) d\sigma = \frac{b}{a} \int^s \kappa(\sigma) d\sigma. \tag{3.21}$$

De la solución general en la ecuación (3.20) consideramos $K = 1$ y el conjunto de funciones f_j , $j = 1, 2, 3, 4$ como a continuación

$$f_1 = w_2 e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}, \quad f_2 = -w_1, \quad f_3 = e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}, \quad f_4 = -1. \tag{3.22}$$

Este conjunto lleva a las siguientes expresiones para los tres componentes α_i como en el método estándar en (2.103). Para α_1 de este caso tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(w_2 e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} - e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}) - (w_1^2 - 1)}{2(-w_2 e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} + w_1 e^{i \frac{c}{b} \phi(s)})} \\
&= \left[\frac{e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_2^2 - 1) - (w_1^2 - 1)}{2(w_1 - w_2) e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}} \right] \frac{e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}}{e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}} \\
&= \frac{e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)} \cdot e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_2^2 - 1) - e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_1^2 - 1)}{2(w_1 - w_2) e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} \cdot e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}} \\
&= \frac{e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_2^2 - 1) - e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_1^2 - 1)}{2(w_1 - w_2)} \\
&= \frac{w_2^2 - 1}{w_1 - w_2} \frac{e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} - \left(\frac{w_1^2 - 1}{w_2^2 - 1}\right) e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}}{2}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Luego, α_2 se obtiene como sigue

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{(w_2 e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} - e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}) + (w_1^2 - 1)}{2(-w_2 e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} + w_1 e^{i \frac{c}{b} \phi(s)})} \\
&= \left[\frac{e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_2^2 - 1) + (w_1^2 - 1)}{2(w_1 - w_2) e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}} \right] \frac{e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}}{e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}} \\
&= \frac{e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)} \cdot e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_2^2 - 1) + e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_1^2 - 1)}{2(w_1 - w_2) e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} \cdot e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}} \\
&= \frac{e^{i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_2^2 - 1) + e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}(w_1^2 - 1)}{2(w_1 - w_2)} \\
&= \frac{w_2^2 - 1}{w_1 - w_2} \frac{e^{i \frac{c}{b} \phi(s)} + \left(\frac{w_1^2 - 1}{w_2^2 - 1}\right) e^{-i \frac{c}{b} \phi(s)}}{2}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Al final, α_3 se obtiene de

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \frac{-e^{i\frac{c}{b}\phi(s)} - w_2 e^{i\frac{c}{b}\phi(s)} \cdot (-w_1)}{-w_2 e^{i\frac{c}{b}\phi(s)} - (-w_1 e^{i\frac{c}{b}\phi(s)})} = \frac{w_1 w_2 - 1}{w_1 - w_2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Reescribiremos las ecuaciones (3.23), (3.24) y (3.25) como a continuación

$$\begin{aligned}\alpha_1(s) &= \frac{w_2^2 - 1}{w_1 - w_2} \frac{e^{i\frac{c}{b}\phi(s)} - \left(\frac{w_1^2 - 1}{w_2^2 - 1}\right) e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)}}{2} = i \frac{a}{bc} (a - c) \sin_1 \left(\frac{c}{b} \phi(s) \right), \\ \alpha_2(s) &= i \frac{w_2^2 - 1}{w_1 - w_2} \frac{e^{i\frac{c}{b}\phi(s)} + \left(\frac{w_1^2 - 1}{w_2^2 - 1}\right) e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)}}{2} = i \frac{a}{bc} (a - c) \cos_1 \left(\frac{c}{b} \phi(s) \right), \\ \alpha_3(s) &= -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = -\frac{b}{c},\end{aligned}\quad (3.26)$$

donde consideramos $\sin_1 \left(\frac{c}{b} \phi(s) \right) = \frac{e^{i\frac{c}{b}\phi(s)} - K_1 e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)}}{2i}$, $\cos_1 \left(\frac{c}{b} \phi(s) \right) = \frac{e^{i\frac{c}{b}\phi(s)} + K_1 e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)}}{2}$ y $K_1 = \frac{w_1^2 - 1}{w_2^2 - 1} = \frac{a+c}{a-c}$, este último lo llamaremos el coeficiente de deformación de la hélice. Utilizamos el subíndice 1 de \sin_1 , de \cos_1 y de K_1 para indicar el caso en el que $k_3 = k$.

Resolviendo las ecuaciones α_i , $i = 1, 2, 3$, en (3.26) para x, y, z de acuerdo a las ecuaciones (2.83) del método estándar, hallamos que

$$\begin{aligned}x(s) &= i \frac{a}{bc} (a - c) \int^s \sin_1 \left(\frac{c}{b} \phi(s') \right) ds' \\ y(s) &= i \frac{a}{bc} (a - c) \int^s \cos_1 \left(\frac{c}{b} \phi(s') \right) ds' \\ z(s) &= -\int^s \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} ds' = -\frac{s}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = -b(s/c),\end{aligned}\quad (3.27)$$

donde las constantes de integración han sido tomadas como cero por simplicidad. Para profundizar un poco más respecto a lo que implican las ecuaciones de Riccati revisemos ahora el siguiente ejemplo sobre las hélices cilíndricas más sencillas que podemos considerar.

Ejemplo 5. Los cálculos más sencillos para hélices ocurren cuando la torsión es una constante, es decir, sea $\tau(s) = \tau = \text{cte.}$, en dicho caso se considera $\phi = \tau s$ y podemos escribir las ecuaciones en (3.27) como

$$\begin{aligned}x(s) &= i \frac{a}{bc} (a - c) \int^s \sin_1 \left(\frac{c}{b} \tau s' \right) ds' = -i \frac{a}{b} (a - c) \cos_1(s/c), \\ y(s) &= i \frac{a}{bc} (a - c) \int^s \cos_1 \left(\frac{c}{b} \tau s' \right) ds' = -i \frac{a}{b} (a - c) \sin_1(s/c), \\ z(s) &= -\frac{s}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = -b(s/c),\end{aligned}\quad (3.28)$$

en el último paso en (3.28) la torsión constante ha sido elegida como $\tau = b/c$.

Veamos a continuación los pasos que nos llevan a una verificación de la hélice cilíndrica.

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \left[-icS_1 \frac{e^{i\frac{\sigma}{c}} + K_1 e^{-i\frac{\sigma}{c}}}{2} \right]^2 + \left[icS_1 \frac{e^{i\frac{\sigma}{c}} - K_1 e^{-i\frac{\sigma}{c}}}{2i} \right]^2 \\
&= (icS_1)^2 \left\{ \left[\frac{-e^{i\frac{\sigma}{c}} - K_1 e^{-i\frac{\sigma}{c}}}{2} \right]^2 + \left[\frac{e^{i\frac{\sigma}{c}} - K_1 e^{-i\frac{\sigma}{c}}}{2i} \right]^2 \right\} \\
&= (icS_1)^2 \left[\frac{e^{2i\frac{\sigma}{c}} + 2K_1 + K_1^2 e^{-2i\frac{\sigma}{c}}}{4} + \frac{e^{2i\frac{\sigma}{c}} - 2K_1 + K_1^2 e^{-2i\frac{\sigma}{c}}}{4(-1)} \right] \\
&= \frac{1}{4} (icS_1)^2 \left[e^{2i\frac{\sigma}{c}} + 2K_1 + K_1^2 e^{-2i\frac{\sigma}{c}} - e^{2i\frac{\sigma}{c}} + 2K_1 - K_1^2 e^{-2i\frac{\sigma}{c}} \right] \\
&= \frac{1}{4} (icS_1)^2 [4K_1] = (icS_1)^2 K_1
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Recordemos que $w_{1,2} = \bar{c} \pm \sqrt{\bar{c}^2 + 1}$. Consideramos el término $(icS_1)^2$ donde cS_1 resulta

$$cS_1 = c \frac{(w_2^2 - 1)}{(w_1 - w_2)} = c \frac{2\bar{c}^2 - 2\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2 + 1}}{2\sqrt{\bar{c} + 1}} = c \left(\frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}} \right) = c \left(\frac{(\frac{a}{b})^2}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}} - \frac{a}{b} \right)$$

por lo que elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}
c^2 \frac{(w_2^2 - 1)^2}{(w_1 - w_2)^2} &= c^2 \left(\frac{(\frac{a}{b})^2}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}} - \frac{a}{b} \right)^2 = c^2 \left[\frac{(\frac{a}{b})^4}{\frac{a^2}{b^2} + 1} + \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b} \frac{(\frac{a}{b})^2}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}} \right] \\
&= c^2 \left[\frac{a^4}{b^2(a^2 + b^2)} + \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a^3}{b^3\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}} \right], \quad c = b\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}, \quad c^2 = a^2 + b^2, \\
&= \frac{a^4}{b^2} + c^2 \frac{a^2}{b^2} - 2c \frac{a^3}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} (a^2 + c^2 - 2ac) = \frac{a^2}{b^2} (a - c)^2
\end{aligned}$$

Consideremos ahora el término K_1

$$K_1 = \frac{w_1^2 - 1}{w_2^2 - 1} = \frac{(2\bar{c}^2 + 2\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2 + 1})}{(2\bar{c}^2 - 2\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2 + 1})} = \frac{\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 + 1}}{\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 + 1}} = \frac{\frac{a}{b} + \sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}}{\frac{a}{b} - \sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}} = \frac{a + b\sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}}{a - b\sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}} = \frac{a + c}{a - c}.$$

Entonces el término resultante en la ecuación (3.29) es

$$\begin{aligned}
(icS_1)^2 K_1 &= -\frac{a^2}{b^2} (a - c)^2 \frac{a + c}{a - c} = -\frac{a^2}{b^2} (a - c)(a + c) = -\frac{a^2}{b^2} (a^2 - c^2), \quad c = a^2 + b^2, \\
&= -\frac{a^2}{b^2} (a^2 - a^2 - b^2) = a^2
\end{aligned}$$

Al calcular $\sin^2(s/c) + \cos^2(s/c) = K_1$, uno encuentra que

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{3.30}$$

la cual junto con la expresión para $z(s)$ anterior en (3.28) muestra que la hélice es cilíndrica.

Caso $k_3 = -k$. En este caso, la ecuación de Riccati (3.14) toma la forma siguiente

$$\frac{d\tilde{w}}{ds} = -\frac{i\tau}{2}(\tilde{w}^2 + 2\xi\tilde{w} - 1). \quad (3.31)$$

De manera similar que el caso anterior, al integrar por separación de variables se obtiene la solución general \tilde{w} en la forma siguiente

$$\tilde{w} = \frac{\tilde{K}\tilde{w}_2 e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)} - \tilde{w}_1}{\tilde{K}e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)} - 1}, \quad \phi(s) = \int \tau(s') ds', \quad (3.32)$$

donde las raíces cuadráticas son $\tilde{w}_{1,2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 + 1}$.

Cabe resaltar que las raíces son $\tilde{w}_{1,2} = -w_{2,1}$. Por lo que se puede observar la siguiente relación con las f_j , $j = 1, 2, 3, 4$ del Caso $k_3 = k$

$$f_1 = -w_1 e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}, \quad f_2 = w_2, \quad f_3 = e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}, \quad f_4 = -1. \quad (3.33)$$

Consideramos para los siguientes cálculos $\tilde{K} = 1$, por lo que las expresiones que usaremos en el conjunto de funciones f_j , $j = 1, \dots, 4$ de la ecuación (3.32) son las siguientes

$$f_1 = \tilde{w}_2 e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}, \quad f_2 = \tilde{w}_1, \quad f_3 = e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}, \quad f_4 = -1. \quad (3.34)$$

Entonces, con respecto a las $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, 2, 3$, las ecuaciones (2.103) se presentan a continuación. Para $\tilde{\alpha}_1$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \frac{(\tilde{w}_2^2 e^{-2i\frac{\xi}{b}\phi(s)} - e^{-2i\frac{\xi}{b}\phi(s)}) - (\tilde{w}_1^2 - 1)}{2(-\tilde{w}_2 e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)} + \tilde{w}_1 e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)})} = \left[\frac{e^{-2i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_2^2 - 1) - (\tilde{w}_1^2 - 1)}{2(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}} \right] \frac{e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)}}{e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)}} \\ &= \frac{e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)} \cdot e^{-2i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_2^2 - 1) - e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_1^2 - 1)}{2(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)} \cdot e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_2^2 - 1) - e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_1^2 - 1)}{2(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)} \\ &= -\left(\frac{\tilde{w}_1^2 - 1}{\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2} \right) \frac{e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)} - \left(\frac{\tilde{w}_2^2 - 1}{\tilde{w}_1^2 - 1} \right) e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}}{2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para $\tilde{\alpha}_2$ la expresión se obtiene como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_2 &= i \left[\frac{(\tilde{w}_2^2 e^{-2i\frac{\xi}{b}\phi(s)} - e^{-2i\frac{\xi}{b}\phi(s)}) + (\tilde{w}_1^2 - 1)}{2(-\tilde{w}_2 e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)} + \tilde{w}_1 e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)})} \right] = i \left[\frac{e^{-2i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_2^2 - 1) - (\tilde{w}_1^2 - 1)}{2(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}} \right] \frac{e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)}}{e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)}} \\ &= i \left[\frac{e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)} \cdot e^{-2i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_2^2 - 1) + e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_1^2 - 1)}{2(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)} \cdot e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}} \right] \\ &= i \left[\frac{e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_2^2 - 1) + e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)}(\tilde{w}_1^2 - 1)}{2(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)} \right] \\ &= i \left(\frac{\tilde{w}_1^2 - 1}{\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2} \right) \frac{e^{i\frac{\xi}{b}\phi(s)} + \left(\frac{\tilde{w}_2^2 - 1}{\tilde{w}_1^2 - 1} \right) e^{-i\frac{\xi}{b}\phi(s)}}{2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Finalmente para $\tilde{\alpha}_3$ la expresión resulta de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_3 &= \frac{-e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)} - \tilde{w}_2 e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)} \cdot (-\tilde{w}_1)}{-\tilde{w}_2 e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)} - (-\tilde{w}_1 e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)})} = \frac{\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)} - e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)}}{\tilde{w}_1 e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)} - \tilde{w}_2 e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)}} \\
&= \frac{-e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)} - e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)}}{2\sqrt{\xi^2 + 1} e^{-i\frac{c}{b}\phi(s)}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Reescribimos las ecuaciones (3.35), (3.36) y (3.37) como a continuación

$$\tilde{\alpha}_1 = -iS_{-1} \sin_{-1} \left(\frac{s}{c} \right), \tag{3.38}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = iS_{-1} \cos_{-1} \left(\frac{s}{c} \right), \tag{3.39}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}}. \tag{3.40}$$

Donde $\sin_{-1} \left(\frac{s}{c} \right) = \frac{e^{i\frac{s}{c}} - K_{-1} e^{-i\frac{s}{c}}}{2i}$, $\cos_{-1} \left(\frac{s}{c} \right) = \frac{e^{i\frac{s}{c}} + K_{-1} e^{-i\frac{s}{c}}}{2}$, y los coeficientes son

$$S_{-1} = \frac{\tilde{w}_1^2 - 1}{\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2}, \quad K_{-1} = \frac{\tilde{w}_2^2 - 1}{\tilde{w}_1^2 - 1}, \tag{3.41}$$

donde $\tilde{w}_{1,2} = -\bar{c} \pm \sqrt{\bar{c}^2 + 1}$ y K_{-1} es el coeficiente de deformación de la hélice y al igual que en el caso anterior el subíndice indica que es del caso $k_3 = -k$.

Resolviendo para $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$:

$$\tilde{x} = \int \tilde{\alpha}_1(s) ds = -S_{-1} \left(\frac{1}{2} \int e^{i\frac{\sigma}{c}} d\sigma - \frac{K_{-1}}{2} \int e^{-i\frac{\sigma}{c}} d\sigma \right)$$

consideremos que $\nu = i\sigma/c$, $d\nu = i d\sigma/c$, entonces

$$\begin{aligned}
\int \tilde{\alpha}_1(s) ds &= -S_{-1} \left[\frac{c}{2i} \int e^{i\frac{\sigma}{c}} d\sigma - \frac{K_{-1}}{2} \int -\frac{c}{i} e^{-i\frac{\sigma}{c}} d\sigma \right] + \mathcal{C}_1 \\
&= -S_{-1} \left[\frac{c}{2i} e^{i\frac{\sigma}{c}} + \frac{cK_{-1}}{2i} e^{-i\frac{\sigma}{c}} \right] \Big|_0^s + \mathcal{C}_1 \\
&= -\frac{c}{i} S_{-1} \left[\frac{e^{i\frac{\sigma}{c}} + K_{-1} e^{-i\frac{\sigma}{c}}}{2} \right] \Big|_0^s + \mathcal{C}_1 \\
&= icS_{-1} \cos_{-1}(\sigma/c) \Big|_0^s + \mathcal{C}_1 \tag{3.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= \int \tilde{\alpha}_2(s) ds = iS_{-1} \left(\frac{1}{2} \int e^{i\frac{\sigma}{c}} d\sigma + \frac{K_{-1}}{2} \int e^{-i\frac{\sigma}{c}} d\sigma \right) \\
&= iS_{-1} \left[\frac{c}{2i} \int e^{i\frac{\sigma}{c}} d\sigma + \frac{cK_{-1}}{-2i} \int e^{-i\frac{\sigma}{c}} d\sigma \right] \\
&= icS_{-1} \left[\frac{e^{i\frac{\sigma}{c}} - K_{-1} e^{-i\frac{\sigma}{c}}}{2i} \right] \Big|_0^s + \mathcal{C}_2 \\
&= icS_{-1} \left[\sin_{-1} \left(\frac{\sigma}{c} \right) \right] \Big|_0^s + \mathcal{C}_2. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= \int^s \tilde{\alpha}_3(s) ds = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} \int d\sigma \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} \sigma|_s + \mathcal{C}_3 \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} s + \mathcal{C}_3
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Con un análisis análogo al del Caso $k_3 = k$ y considerando las constantes de integración $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3 = 0$ resolvemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = cS_{-1} &= c \frac{w_1^2 - 1}{w_1 - w_2} = c \frac{(-\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 + 1})^2 - 1}{-\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 + 1} + \bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 + 1}} = c \frac{(\frac{a}{b})^2}{\sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}} - c \frac{a}{b} = c \frac{a}{b} \left[\frac{a}{b\sqrt{\bar{c}^2 + 1}} - 1 \right] \\
&= c \frac{a}{b} \left[\frac{a}{c} - 1 \right] = \frac{a}{b} [a - c]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \left[icS_{-1} \frac{(e^{i\frac{\sigma}{c}} + K_{-1}e^{-i\frac{\sigma}{c}})}{2} \right]^2 + \left[icS_{-1} \frac{(e^{i\frac{\sigma}{c}} - K_{-1}e^{-i\frac{\sigma}{c}})}{2i} \right]^2 \\
&= -\mathcal{A}^2 \left[\cos_{-1}^2 \left(\frac{\sigma}{c} \right) + \sin_{-1}^2 \left(\frac{\sigma}{c} \right) \right] \\
&= \mathcal{A}^2 \left[\frac{(e^{i\frac{\sigma}{c}} + K_{-1}e^{-i\frac{\sigma}{c}})^2}{4} - \frac{(e^{i\frac{\sigma}{c}} - K_{-1}e^{-i\frac{\sigma}{c}})^2}{4} \right] \\
&= \frac{\mathcal{A}^2}{4} \left[e^{2i\frac{\sigma}{c}} + 2K_{-1} + K_{-1}^2 e^{-2i\frac{\sigma}{c}} - e^{2i\frac{\sigma}{c}} + 2K_{-1} - K_{-1}^2 e^{-2i\frac{\sigma}{c}} \right] \\
&= \frac{\mathcal{A}^2}{4} (4K_{-1}) = \mathcal{A}^2 K_{-1}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Resulta en que el radio tiene la siguiente forma

$$R_{-1} = \mathcal{A} \sqrt{K_{-1}}$$

Donde llamaremos a K_{-1} el coeficiente de deformación de la hélice el cual es

$$K_{-1} = \frac{w_2^2 - 1}{w_1^2 - 1} = \frac{2\bar{c}^2 + 2\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2 + 1}}{2\bar{c}^2 - 2\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2 + 1}} = \frac{\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 + 1}}{\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 + 1}} = \frac{\frac{a}{b} + \sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}}{\frac{a}{b} - \sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}} = \frac{a + b\sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}}{a - b\sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}} = \frac{a + c}{a - c}, \tag{3.47}$$

donde $c = b\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}$, $c^2 = a^2 + b^2$.

El término cS_{-1} resulta en

$$cS_{-k} = c \frac{w_1^2 - 1}{w_1 - w_2} = c \frac{2\bar{c}^2 - 2\bar{c}\sqrt{\bar{c}^2 + 1}}{2\sqrt{\bar{c}^2 + 1}} = c \left(\frac{\bar{c}^2}{\sqrt{\bar{c}^2 + 1}} - \bar{c} \right) = c \left[\frac{(\frac{a}{b})^2}{\sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}} - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \tag{3.48}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
(cS_{-1})^2 &= \left(c \frac{w_1^2 - 1}{w_1 - w_2} \right)^2 = c^2 \left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^4}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2 \frac{a}{b} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} \right] \\
&= c^2 \left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^4}{b^2(a^2 + b^2)} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2 \frac{a^3}{b^3 \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} \right] \\
&= \frac{a^4}{b^2} + c^2 \frac{a^2}{b^2} - 2c \frac{a^3}{b^2} = \frac{a^2}{2} (a^2 + c^2 - 2ac) = \frac{a^2}{b^2} (a - c)^2 \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (3.46) resulta

$$(icS_{-1})^2 K_{-1} = -\frac{a^2}{b^2} (a - c)^2 \left(\frac{a + c}{a - c} \right) = -\frac{a^2}{b^2} (a - c)(a + c) = -\frac{a^2}{b^2} (a^2 - c^2) = a^2. \quad (3.50)$$

De nuestros dos ejemplos, podemos visualizar que el coeficiente dentro de \sin_1 y del \sin_{-1} es inverso (el numerador y el denominador están invertidos en la razón). Además que el coeficiente está cambiado únicamente por el numerador, que en este caso es el $w_1^2 - 1$ o el $w_2^2 - 1$ dependiendo del caso $k_3 = k$ o $k_3 = -k$.

Nota 3. Para el caso en el que $k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \beta^2 - k_3^2 \gamma^3 = 1$ para $k_3 = ik$ notamos que la ecuación de Riccati obtenida es la misma que el caso en el que $k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \beta^2 + k_3^2 \gamma = 1$ con $k_3 = -k$. Por lo que se procede como en el caso $k_3 = -k$.

Nota 4. Para el caso en el que $k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \beta^2 - k_3^2 \gamma^3 = 1$ son $k_3 = -ik$ la ecuación de Riccati obtenida es la misma que la que se obtiene para $k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \beta^2 + k_3^2 \gamma = 1$ con $k_3 = k$. Por lo que se procede como en el caso $k_3 = k$.

Cuando estas funciones son usadas para calcular los componentes α_i para este caso, que proporcionan los mismos resultados que en (3.28). Por lo que las coordenadas paramétricas obtenidas en ambos casos $k_3 = \pm k$ coinciden. Este hecho confirma la sentencia de Struik sobre que el signo de la torsión no puede determinarse a partir de las ecuaciones paramétricas de la curva y uno debería usar las ecuaciones diferenciales para establecer el signo ambiguo de la torsión. El hecho de que nuestro abordaje generalizado proporciona dos ecuaciones de Riccati que difieren por el signo de la torsión es la solución del problema de signo.

3.3. Caso $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 1$

Con el propósito de explorar un poco más este método de Lie-Darboux, consideraremos una ecuación para los cosenos directores de la siguiente manera

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 1. \quad (3.51)$$

A continuación se introducen las implicaciones del signo negativo en el lado derecho de la ecuación. Una esfera en el espacio euclidiano con radio r posee una curvatura constante $1/r^2$. La ecuación de este caso puede representarnos, por analogía, con una métrica cómo la métrica indefinida

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2. \quad (3.52)$$

Con esta métrica, \mathbb{R}^{n+1} , usualmente se refiere al espacio de Lorentz denotado por $\mathbb{E}^{n,1}$. Con una interpretación en relatividad general, la dirección vertical x_0 representa el tiempo y las direcciones horizontales representan el espacio. Un vector x es space-like, time-like o light-like dependiendo si la forma cuadrática $Q^-(x)$ definida negativa es positiva, negativa o cero [22]. Por analogía con el caso euclideo, la longitud de un vector x es $\sqrt{Q^-(x)}$, por lo que los vectores light-like poseen longitud cero, y los vectores time-like poseen longitud imaginaria (que tomamos como un múltiplo positivo de i). A saber, la esfera de radio i cerca del origen en $\mathbb{E}^{n,1}$ es el hiperboloide. Cuando nos restringimos a este hiperboloide, la métrica indefinida ds^2 de la ecuación (3.52) se convierte en una métrica Riemmaniana positiva definida.

En $\mathbb{E}^{n,1}$ se tiene aún una noción de ortogonalidad, dada por el producto interno $-x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. También se tiene la noción de transformación ortogonal, es decir, transformaciones lineales de \mathbb{R}^{n+1} que preserva Q^- [13].

3.3.1. Ecuaciones de Riccati para el caso en M^3

Se propuso obtener la ecuación de Riccati correspondiente a un espacio de Minkowski $M_{1,2}^3$, los índices 1 y 2 representan los signos positivos y negativos de los términos de la ecuación algebraica siguiente

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 1. \quad (3.53)$$

Se define la ecuación para este caso

$$w_M = \frac{\alpha + i\beta}{1 - i\gamma} = \frac{1 + i\gamma}{\alpha - i\beta},$$

Al derivar se llega a

$$(w_M)' = \frac{\alpha' + i\beta'}{1 - i\gamma} + \frac{\alpha + i\beta}{(1 - i\gamma)^2} i\gamma' = \frac{(\alpha' + i\beta')(1 + i\gamma)}{(1 + \gamma^2)} + \frac{(1 - i\gamma)w_M}{1 - i\gamma} \gamma'.$$

Despejando α de $w_M = \frac{\alpha + i\beta}{1 - i\gamma}$

$$\alpha = w_M(1 - i\gamma) - i\beta,$$

sustituyendo α , se obtiene

$$\beta = i \frac{1 + i\gamma - w_M^2 + i\gamma w_M^2}{2w_M}.$$

En $(w_M)'$ se llega a

$$(w_M)' = \left\{ -\frac{i\kappa}{w_M} (1 + i\gamma)^2 + \left[i\tau\gamma - i\frac{\tau}{2} (1 + i\gamma - w_M^2 + i\gamma w_M^2) \right] \right\} \frac{1 + i\gamma}{1 + \gamma^2}.$$

Esto nos permitirá saber si con la eliminación de γ resulta la ecuación de Riccati para este caso.

Desarrollando lo anterior como sigue

$$(w_M)' = \frac{\alpha' + i\beta'}{1 - i\gamma} + \frac{\alpha + i\beta}{(1 - i\gamma)^2} i\gamma' = \frac{\alpha' + i\beta'}{1 - i\gamma} + \frac{(i\gamma')}{1 - i\gamma} w_M \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\kappa\beta + i(-\kappa\alpha + \tau\gamma)}{1 - i\gamma} - i \frac{\tau\beta}{1 - i\gamma} w_M = \frac{[-i\kappa(\alpha - i\beta) + i\tau\gamma][1 + i\gamma]}{(1 - i\gamma)(1 + i\gamma)} - \frac{\tau\beta}{1 - i\gamma} \left(\frac{1 + i\gamma}{1 + i\gamma} \right) w_M \\ &= -\frac{i\kappa}{w_M} \frac{(1 + i\gamma)^2}{1 + \gamma^2} - i\tau(\beta w_M - \gamma) \left(\frac{1 + i\gamma}{1 + \gamma^2} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nos percatamos que no pueden reducirse γ y β , se propone otra ruta de trabajo:
Considerando la hiperboloide de una sola hoja \mathbb{H}_1 cuyo lugar geométrico se define

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (3.56)$$

Una parametrización de la hiperboloide es

$$\alpha = \frac{1 - uv}{u + v}, \quad \beta = \frac{1 + uv}{u + v}, \quad \gamma = \frac{u - v}{u + v},$$

ya que a

$$\begin{aligned} (u - v)^2 + (1 + uv)^2 - (uv - 1)^2 &= (u - v)^2 + 1 + 2uv + u^2v^2 - u^2v^2 - 2uv - 1 \\ &= u^2 + v^2 - 2uv + 4(uv) = (u + v)^2. \end{aligned}$$

Por definición, consideramos nuevamente la ecuación algebraica en términos de α , β y γ

$$-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (3.57)$$

de donde

$$\beta^2 - \alpha^2 = 1 - \gamma^2 \quad (3.58)$$

Considerando que $\beta = x$, $\alpha = y$ cumple lo siguiente

$$(x + y)(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2.$$

Se tiene que (3.58) puede expresarse como

$$(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = (1 - \gamma)(1 + \gamma) \quad (3.59)$$

De donde podemos observar que

$$w_{\mathbb{H}_1} = \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\beta - \alpha} \quad (3.60)$$

y que también

$$-\frac{1}{z_{\mathbb{H}_1}} = \frac{\beta - \alpha}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\beta + \alpha};$$

y considerando que se puede definir en dos variables de la siguiente manera

$$\alpha_{1w_{\mathbb{H}_1}} = \frac{1 - w_{1\mathbb{H}_1} z_{1\mathbb{H}_1}}{w_{1\mathbb{H}_1} + z_{1\mathbb{H}_1}}, \quad \beta_{1w_{\mathbb{H}_1}} = \frac{1 + w_{1\mathbb{H}_1} z_{1\mathbb{H}_1}}{w_{1\mathbb{H}_1} + z_{1\mathbb{H}_1}}, \quad \gamma_{1w_{\mathbb{H}_1}} = \frac{w_{1\mathbb{H}_1} - z_{1\mathbb{H}_1}}{w_{1\mathbb{H}_1} + z_{1\mathbb{H}_1}}, \quad (3.61)$$

De la ecuación (3.60) tenemos que

$$\begin{aligned}
w'_{\mathbb{H}_1} &= \frac{(\beta' + \alpha')(1 - \gamma) + (\beta + \alpha)\gamma'}{(1 - \gamma)^2} = \frac{\beta' + \alpha'}{1 - \gamma} + \frac{(\beta - \alpha)}{1 - \gamma}\gamma' \\
&= \frac{\kappa\alpha + \tau\gamma - \kappa\beta}{1 - \gamma} + \frac{w\gamma'}{1 - \gamma} = \frac{\kappa\alpha + \tau\gamma - \kappa\beta}{1 - \gamma} + \frac{-w_{\mathbb{H}_1}\tau\beta}{1 - \gamma} \\
&= -i\kappa w_{\mathbb{H}_1} + \frac{\tau(\gamma - \beta w_{\mathbb{H}_1})}{1 - \gamma}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Despejando a α de $w_{\mathbb{H}_1} = \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma}$

$$\alpha = -\beta + (1 - \gamma)w_{\mathbb{H}_1} \tag{3.63}$$

y despejando también a β de $w_{\mathbb{H}_1} = \frac{1 + \gamma}{\beta - \alpha}$ y sustituyendo a α se tiene

$$\begin{aligned}
\beta w_{\mathbb{H}_1} &= 1 + \gamma - \alpha w_{\mathbb{H}_1} = 1 + \gamma - \beta w_{\mathbb{H}_1} + (1 - \gamma)w_{\mathbb{H}_1}^2 \\
2\beta w_{\mathbb{H}_1} &= 1 + \gamma + (1 - \gamma)w_{\mathbb{H}_1}^2 \\
\beta &= \frac{1 + \gamma + (1 - \gamma)w_{\mathbb{H}_1}^2}{2w_{\mathbb{H}_1}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo a β en la ecuación (3.62) se tiene que

$$\begin{aligned}
w'_{\mathbb{H}_1} &= -i\kappa w_{\mathbb{H}_1} + \frac{\tau\left(\gamma - \frac{1 + \gamma + (1 - \gamma)w_{\mathbb{H}_1}^2}{2w_{\mathbb{H}_1}}w_{\mathbb{H}_1}\right)}{1 - \gamma} \\
&= -i\kappa w_{\mathbb{H}_1} + \frac{\tau\left(\gamma - \frac{1 + \gamma + (1 - \gamma)w_{\mathbb{H}_1}^2}{2}\right)}{1 - \gamma} \\
&= -i\kappa w_{\mathbb{H}_1} + \frac{\tau\left(2\gamma - 1 - \gamma - w_{\mathbb{H}_1}^2 - \gamma w_{\mathbb{H}_1}^2\right)}{2(1 - \gamma)} \\
&= -i\kappa w_{\mathbb{H}_1} - \frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2}w_{\mathbb{H}_1}^2.
\end{aligned}$$

Hacemos una comparación sobre las ecuaciones de Riccati para la superficie S_2 y para \mathbb{H}_1 :

$$w'_{\mathbb{H}_1} = -\frac{\tau}{2}w_{\mathbb{H}_1}^2 - i\kappa w_{\mathbb{H}_1} - \frac{\tau}{2} \quad w'_{S_2} = i\frac{\tau}{2}w_{S_2}^2 - i\kappa w_{S_2} - i\frac{\tau}{2}$$

En este caso no se llega a conclusiones adicionales debido a que se consideraron parametrizaciones de la hiperboloide en lugar de la esfera, lo que hace que definitivamente sea un caso muy distinto al del método estándar de Lie-Darboux. Por lo que se procede a analizar la forma de las constantes de las soluciones de la ecuación de Riccati.

3.3.2. Observación de las constantes de las soluciones

Según un resultado básico de las ecuaciones de Riccati, la solución general se puede escribir de la siguiente forma racional

$$w_i = \frac{c_i f_1 + f_2}{c_i f_3 - f_4}, \quad z_i = \frac{d_i f_1 + f_2}{d_i f_3 - f_4}$$

donde f_1, f_2, f_3, f_4 son funciones de s . Para poder calcular las $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$, necesitamos tres integrales para w_i y tres para z_i , las cuales estarán caracterizadas por las constantes c_1, c_2, c_3 para las w_i y por d_1, d_2, d_3 para las z_i de la ecuación (3.61) como sigue:

$$\alpha_1 = \frac{1 - w_1 z_1}{w_1 + z_1}, \quad \beta_1 = \frac{1 + w_1 z_1}{w_1 + z_1}, \quad \gamma_1 = \frac{w_1 - z_1}{w_1 + z_1}, \quad (3.64)$$

$$\alpha_2 = \frac{1 - w_2 z_2}{w_2 + z_2}, \quad \beta_2 = \frac{1 + w_2 z_2}{w_2 + z_2}, \quad \gamma_2 = \frac{w_2 - z_2}{w_2 + z_2}, \quad (3.65)$$

$$\alpha_3 = \frac{1 - w_3 z_3}{w_3 + z_3}, \quad \beta_3 = \frac{1 + w_3 z_3}{w_3 + z_3}, \quad \gamma_3 = \frac{w_3 - z_3}{w_3 + z_3}, \quad (3.66)$$

A continuar con el procedimiento de Lie y Darboux definiremos unas constantes que permitan que $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ cumplan las condiciones de ortogonalidad

$$-\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

La primera condición se cumple en virtud de la ecuación de la esfera por lo que debemos encontrar las c_i, d_i de forma que se cumplan las tres últimas condiciones

$$-\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0, \quad (3.67)$$

$$-\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0, \quad (3.68)$$

$$-\alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = 0. \quad (3.69)$$

Se puede demostrar que $-\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$ se puede escribir como

$$-\left(\frac{1 - w_1 z_1}{w_1 + z_1}\right)\left(\frac{1 - w_2 z_2}{w_2 + z_2}\right) + \left(\frac{1 + w_1 z_1}{w_1 + z_1}\right)\left(\frac{1 + w_2 z_2}{w_2 + z_2}\right) + \left(\frac{w_1 - z_1}{w_1 + z_1}\right)\left(\frac{w_2 - z_2}{w_2 + z_2}\right) = 0$$

desarrollando se tiene que

$$-\frac{(1 - w_2 z_2 - w_1 z_1 + w_1 w_2 z_1 z_2)}{w_1 w_2 + w_1 z_2 + w_2 z_1 + z_1 z_2} + \frac{1 + w_2 z_2 + w_1 z_1 + w_1 w_2 z_1 z_2}{w_1 w_2 + w_1 z_2 + w_2 z_1 + z_1 z_2} + \frac{w_1 w_2 - w_1 z_2 - w_2 z_1 + z_1 z_2}{w_1 w_2 + w_1 z_2 + w_2 z_1 + z_1 z_2} = 0$$

$$2(w_1 z_1 + w_2 z_2) = w_1 z_2 + w_2 z_1 - w_1 w_2 - z_1 z_2.$$

Obtenemos la misma relación para las constantes

$$2(c_1 d_1 + c_2 d_2) = c_1 d_2 + c_2 d_1 - c_1 c_2 - d_1 d_2.$$

Para el caso en estudio, las tres ecuaciones correspondientes son

$$2(c_1 d_1 + c_2 d_2) = c_1 d_2 + c_2 d_1 - c_1 c_2 - d_1 d_2, \quad (3.70)$$

$$2(c_2 d_2 + c_3 d_3) = c_2 d_3 + c_3 d_2 - c_2 c_3 - d_2 d_3, \quad (3.71)$$

$$2(c_3 d_3 + c_1 d_1) = c_3 d_1 + c_1 d_3 - c_3 c_1 - d_3 d_1. \quad (3.72)$$

Se reescribe la ecuación (3.70) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 2(c_1 d_1 + c_2 d_2) &= c_1(d_2 - c_2) + d_1(c_2 - d_2) \\ &= (d_2 - c_2)(c_1 - d_1) \end{aligned}$$

observamos que $c_1 = d_1$ el segundo miembro de la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} c_1^2 + c_2 d_2 \\ c_1^2 &= -c_2 d_2 \end{aligned}$$

consideramos que

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{d_2}{d_1} .$$

Tomemos $c_2 = d_2 = 1$, tendríamos que $c_1 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. Formando así los siguientes conjuntos de constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = i \\ c_2 = 1 \\ d_1 = i \\ d_2 = 1 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -i \\ c_2 = 1 \\ d_1 = -i \\ d_2 = 1 \end{array} \right\} .$$

Para el primero, la ecuación (3.70) resulta

$$2(-1 + 1) = i + i - i - i .$$

Otros conjuntos de constantes se obtienen al considerar que $c_2 = d_2$ y $c_1 = d_1 = 1$. De esto se obtiene que las constantes que tomaríamos para este caso son

$$c_1 = i, c_2 = 1, c_3 = \infty, \quad d_1 = i, d_2 = 1, d_3 = 0$$

Similares a las que se encuentran en el método estándar de Darboux y Lie en [4].

3.4. Caso $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$

3.4.1. Ecuaciones de Riccati para $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$

De la ecuación algebraica siguiente

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 , \tag{3.73}$$

consideramos que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 - \delta^2 \tag{3.74}$$

y definimos una función como

$$w_m = \frac{\alpha + i\beta + j\gamma}{1 - \delta} = \frac{1 + \delta}{\alpha - i\beta - j\gamma} . \tag{3.75}$$

Continuando con los pasos del método Lie-Darboux estándar, diferenciando la función w_m de la ecuación (3.75) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dw_m}{ds} &= \frac{(\alpha + i\beta + j\gamma)'(1 - \delta) - (\alpha + i\beta + j\gamma)(1 - \delta)'}{(1 - \delta)^2} \\
&= \frac{(\alpha + i\beta + j\gamma)'}{1 - \delta} + \frac{(\alpha + i\beta + j\gamma)}{(1 - \delta)^2} \delta' \\
&= \frac{\alpha' + i\beta' + j\gamma'}{1 - \delta} + \frac{w_m}{(1 - \delta)} \delta' .
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Considerando que el triedro de Frenet-Serret para cuatro dimensiones tiene la forma

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \kappa\beta \\
\beta' &= -\kappa\alpha + \tau_1\gamma \\
\gamma' &= -\tau_1\beta + \tau_2\delta \\
\delta' &= -\tau_2\gamma ,
\end{aligned} \tag{3.77}$$

al sustituir estas ecuaciones en la ecuación (3.76) se tiene que reducir dicha ecuación a una forma de Riccati

$$\begin{aligned}
w'_m &= \frac{\kappa\beta + i(-\kappa\alpha + \tau_1\gamma) + j(-\tau_1\beta + \tau_2\delta)}{1 - \delta} - \frac{w_m}{1 - \delta} \tau_2\gamma \\
&= -i\kappa w_m + ik\kappa \frac{\gamma}{1 - \delta} + \frac{\tau_1}{1 - \delta} (i\gamma - j\beta) + \frac{\tau_2}{1 - \delta} (j\delta - \gamma w_m) .
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Solo que, como se puede observar, el término lineal de la ecuación característica de Riccati no es sencillo obtenerlo con sustituciones simples. A tal situación se le propone el uso de propiedades de los cuaterniones, tema que queda fuera de esta tesis.

Las hélices clotoidales

4.1. Hélices clotoidales por el método de Lie-Darboux

En la literatura hallamos la curva plana conocida como espiral de Cornu también llamada clotoide. A saber, esta espiral tiene curvatura proporcional a la longitud de arco $\kappa(s) = ks/c^2$ y torsión cero [18].

En este capítulo nos interesa presentar las hélices que tienen $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ directamente proporcionales a la longitud de arco. Dichas curvas representan una generalización en tres dimensiones de las espirales clotoides, un nombre propuesto por Césaro al rededor de 1890 para las espirales de Cornu [23].

A continuación se describe la idea central del trabajo (aún en desarrollo para su publicación) basado en este método de Lie-Darboux para la obtención de las soluciones y sus gráficas que consiste en identificar las funciones f_i en todas las combinaciones posibles de acuerdo a la solución en forma de cociente.

Como ya se ha mencionado, se consideran aquellas curvas que poseen curvatura $\kappa(s) = hs/c^2$ y torsión $\tau(s) = s/c^2$, es decir, el caso de las hélices clotoidales con el cociente $\kappa/\tau = h$. A continuación enlistamos las formas posibles de seleccionar y ordenar el conjunto de f_i a partir de la solución general de la ecuación de Riccati:

$$1. \quad f_1 = w_1 e^{i \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2}}, \quad f_2 = w_2, \quad f_3 = e^{i \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2}}, \quad f_4 = 1, \quad (4.1)$$

$$2. \quad f_1 = w_2, \quad f_2 = w_1 e^{i \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2}}, \quad f_3 = 1, \quad f_4 = e^{i \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2}}, \quad (4.2)$$

$$3. \quad f_1 = w_1 e^{i \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2}}, \quad f_2 = w_2, \quad f_3 = 1, \quad f_4 = e^{i \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2}}, \quad (4.3)$$

$$4. \quad f_1 = w_2, \quad f_2 = w_1 e^{i \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2}}, \quad f_3 = e^{i \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2}}, \quad f_4 = 1. \quad (4.4)$$

Los dos últimos conjuntos no proporcionan resultados analíticos y no se tratarán más aquí.

Caso 1

Considerando el conjunto de funciones (4.1) los componentes obtenidos son

$$\begin{aligned}\alpha_1(s) &= h \left[\cos \left(\frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2} \right) + i \frac{h}{\sqrt{h^2+1}} \sin \left(\frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2} \right) \right], \\ \alpha_2(s) &= h \left[-\sin \left(\frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2} \right) + i \frac{h}{\sqrt{h^2+1}} \cos \left(\frac{\sqrt{h^2+1}}{2} \frac{s^2}{c^2} \right) \right], \\ \alpha_3(s) &= \frac{1}{\sqrt{h^2+1}},\end{aligned}\quad (4.5)$$

que satisfacen la condición $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Las coordenadas en la hélice \mathcal{C}_1 están dadas por

$$\begin{aligned}x_1(s) &= \int^s \alpha_1(\sigma) d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}ch}{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}} \left[C \left(\frac{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}c} s \right) + i \frac{h}{(h^2+1)^{\frac{1}{2}}} S \left(\frac{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}c} s \right) \right], \\ y_1(s) &= \int^s \alpha_2(\sigma) d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}ch}{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}} \left[-S \left(\frac{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}c} s \right) + i \frac{h}{(h^2+1)^{\frac{1}{2}}} C \left(\frac{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}c} s \right) \right], \\ z_1(s) &= \int^s \alpha_3(\sigma) d\sigma = \frac{s}{\sqrt{h^2+1}},\end{aligned}\quad (4.6)$$

Observemos que las coordenadas x_1 y y_1 son cantidades complejas mientras que la coordenada z_1 es real, las coordenadas $x_1(s)$ y $y_1(s)$ están dadas en términos de las integrales de Fresnel C y S . Por lo que solo la parte real corresponde a la hélice clotoidal. La gráfica correspondiente de la hélice se presenta en la Figura (4.1) para $c = 1$, $h = \pm 1$ y $h = \pm 2$.

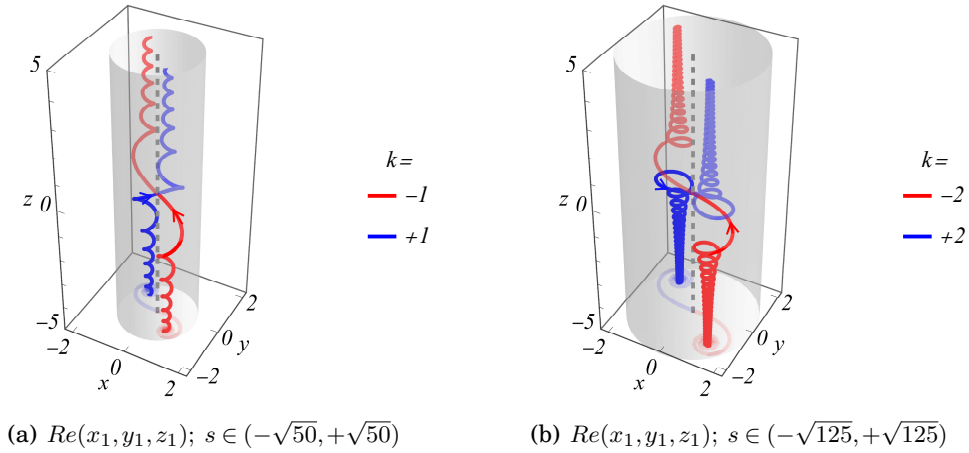


Figura 4.1: La hélice clotoidal \mathcal{C}_1 de (4.6) con $c = 1$ y $h = \pm 1$ (a) y $h = \pm 2$ (b).

Caso 2

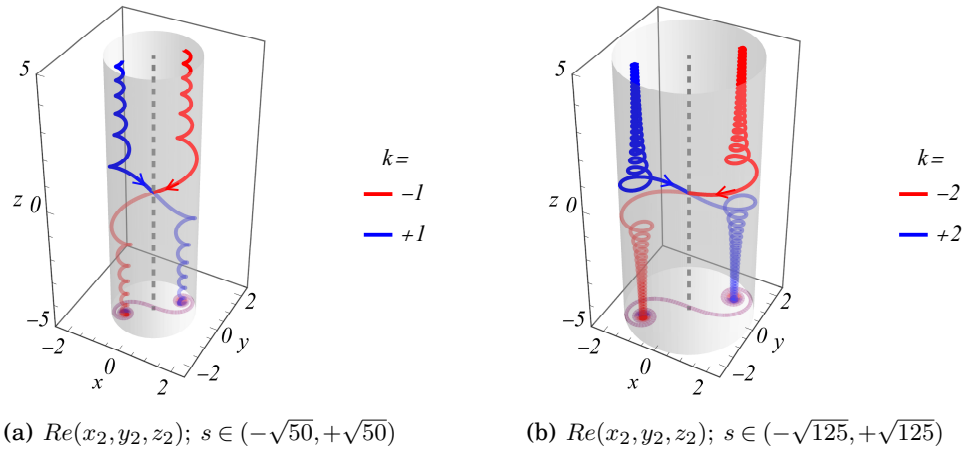
Para el conjunto de funciones (4.2) denotaremos los componentes tangenciales por $\tilde{\alpha}_i$ se puede observar de las ecuaciones (α 's) que

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1(s), \quad \tilde{\alpha}_2 = -\alpha_2(s), \quad \tilde{\alpha}_3 = -\alpha_3(s). \quad (4.7)$$

Por lo que las coordenadas de la hélice \mathcal{C}_2 están dadas por

$$\begin{aligned} x_2(s) &= \int^s \alpha_1(\sigma) d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}ch}{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}} \left[C\left(\frac{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}c}s\right) + i\frac{h}{(h^2+1)^{\frac{1}{2}}} S\left(\frac{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}c}s\right) \right], \\ y_2(s) &= \int^s \alpha_2(\sigma) d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}ch}{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}} \left[S\left(\frac{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}c}s\right) - i\frac{h}{(h^2+1)^{\frac{1}{2}}} C\left(\frac{(h^2+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}c}s\right) \right], \\ z_2(s) &= \int^s \alpha_3(\sigma) d\sigma = -\frac{s}{\sqrt{h^2+1}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En la Figura 4.2 se observan las gráficas similares a las presentadas en la Figura 4.1. Esta hélice clotoideal tiene sus focos en la primera bisectriz y también está girada respecto a la primera clotoide.



Autor: Josué Domingo de la Cruz Díaz

Figura 4.2: La hélice clotoideal \mathcal{C}_2 de (4.8) con $c = 1$ y $h = \pm 1$ (a) y $h = \pm 2$ (b).

4.2. Las hélices clotoidales δ - desplazadas

Un primer caso aún más general que aquellos presentados en la sección anterior surge cuando consideramos $\kappa(s) = \tau(s) = \frac{s}{c} + \delta$ donde δ es un parámetro constante de desplazamiento. Las coordenadas de las δ -hélices clotoidales resultan

$$\mathcal{C}_{1,\delta} = \begin{pmatrix} x_{1,\delta} \\ y_{1,\delta} \\ z_{1,\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\pi}c}{2^{1/4}} \mathcal{F}_1 \\ -\frac{\sqrt{\pi}c}{2^{1/4}} \mathcal{F}_2 \\ \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\pi}c}{2^{1/4}} \mathcal{F}_2 \\ \frac{\sqrt{\pi}c}{2^{1/4}} \mathcal{F}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde consideramos a una longitud de arco como $\tilde{s} = s + \delta$ y

$$\mathcal{F}_1 = C\left(\frac{\sqrt[4]{2}\tilde{s}}{\sqrt{\pi}c}\right) \cos\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) + S\left(\frac{\sqrt[4]{2}\tilde{s}}{\sqrt{\pi}c}\right) \sin\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) \quad (4.10)$$

$$\mathcal{F}_2 = S\left(\frac{\sqrt[4]{2}\tilde{s}}{\sqrt{\pi}c}\right) \cos\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) - C\left(\frac{\sqrt[4]{2}\tilde{s}}{\sqrt{\pi}c}\right) \sin\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) \quad (4.11)$$

y cuyas gráficas presentamos en la Figura 4.3 para algunos valores de δ .

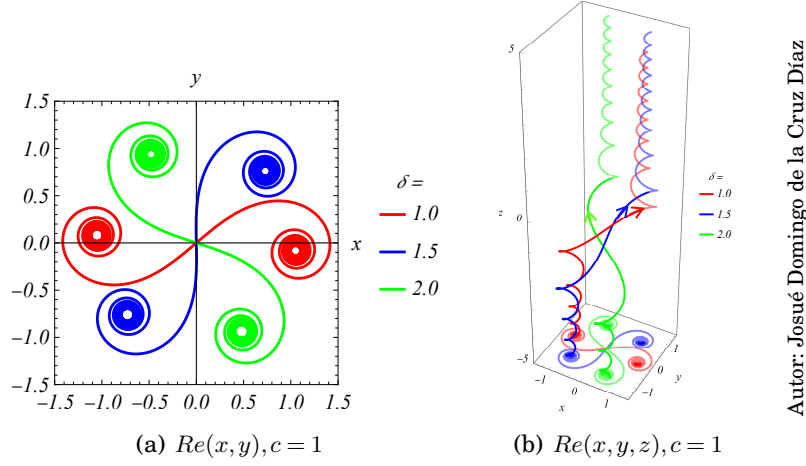


Figura 4.3: Hélices clotooidales δ -desplazadas $\mathcal{C}_{1,\delta}$ para tres δ distintas.

En el segundo caso se observa que

$$\tilde{\alpha}_{1,\delta} = \alpha_{1,\delta}(s), \quad \tilde{\alpha}_{2,\delta} = -\alpha_{2,\delta}(s), \quad \tilde{\alpha}_{3,\delta} = -\alpha_{1,\delta}(s), \quad (4.12)$$

y que la curva resultante es

$$\mathcal{C}_{2,\delta} = \begin{pmatrix} x_{1,\delta} \\ -y_{1,\delta} \\ -z_{1,\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\pi}c}{2^{1/4}}\mathcal{F}_1 \\ \frac{\sqrt{\pi}c}{2^{1/4}}\mathcal{F}_2 \\ -\frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\pi}c}{2^{3/4}}\mathcal{F}_2 \\ -\frac{\sqrt{\pi}c}{2^{3/4}}\mathcal{F}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Tal curva se observa gráficamente en la Figura 4.4.

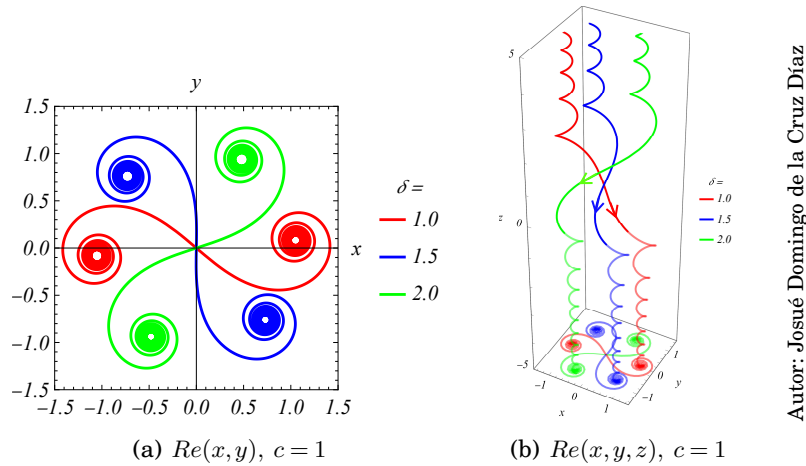


Figura 4.4: Hélices clotooidales δ -desplazadas $\mathcal{C}_{2,\delta}$ para tres δ distintas.

Con las coordenadas de los δ -focos dados por

$$x_{2,\delta}(s \rightarrow \pm\infty) = \pm \frac{c\sqrt{\pi}}{2^{5/4}} \left[\cos\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) + \sin\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) \right], \quad (4.14)$$

$$y_{2,\delta}(s \rightarrow \pm\infty) = \mp \frac{c\sqrt{\pi}}{2^{5/4}} \left[\cos\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) - \sin\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) \right], \quad (4.15)$$

Las siguientes imagenes muestran algunas de las hélices clotoidales de tipo δ –desplazadas $\mathcal{C}_{1,\delta}$ y $\mathcal{C}_{2,\delta}$ para las cuales ambos focos mantienen sus posiciones, Figura 4.5 y Figura 4.6. Para a determinar los valores del parámetro δ para los cuales ambos focos mantienen sus posiciones utilizemos las coordenadas de los focos como sigue

$$\cos\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) + \sin\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) = \sin\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) - \cos\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{2}c^2}\right) \quad (4.16)$$

Al calcular se obtiene que para para los valores siguientes de δ

$$\delta = \pm 2^{1/4} c \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.17)$$

los focos mantienen las mismas posiciones.

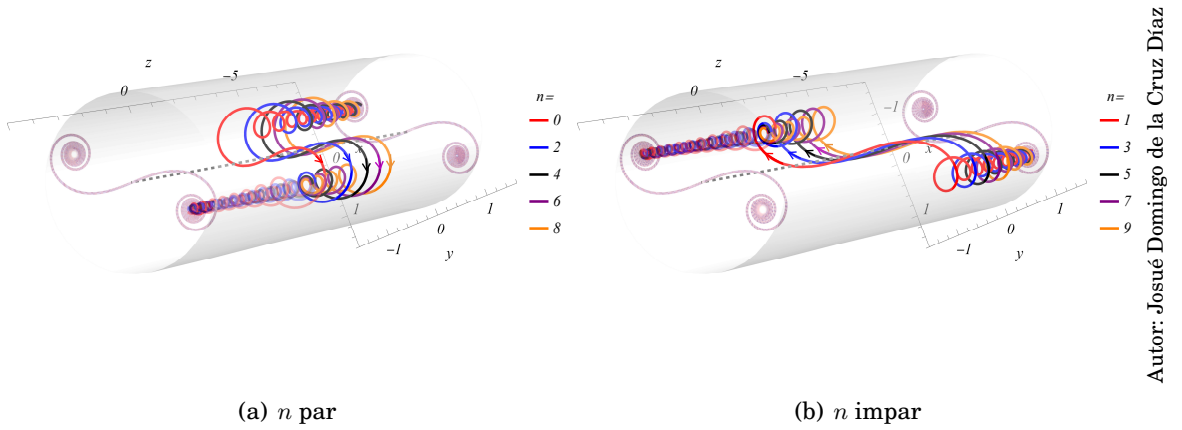


Figura 4.5: δ –hélices clotoidales $\mathcal{C}_{1,\delta}$ para $h = 1, c = 1$ y valores pares e impares de n de acuerdo a la ecuación (4.17).

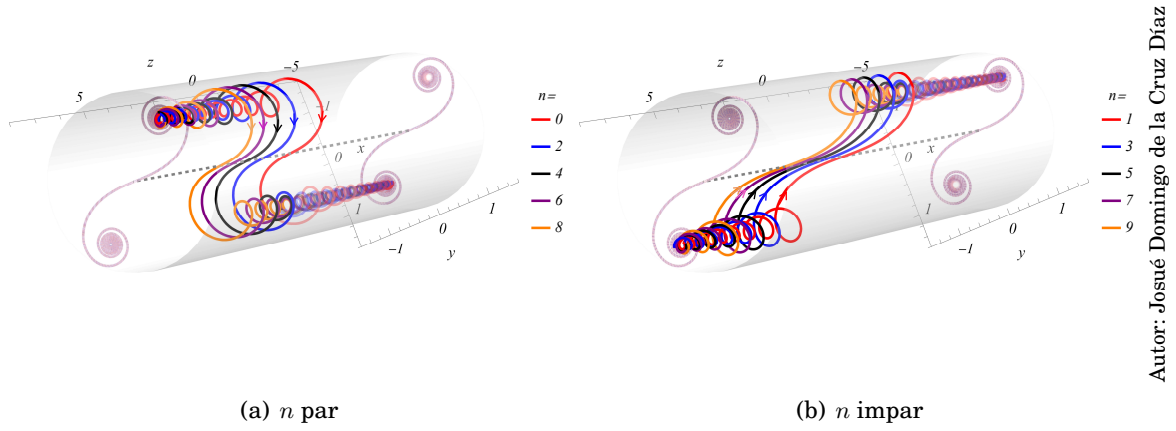


Figura 4.6: δ -hélices clotoidales $C_{2,\delta}$ para $h = 1, c = 1$ y valores pares e impares de n de acuerdo a la ecuación (4.17).

Conclusiones

En esta tesis doctoral se estudió el antiguo método de Lie-Darboux por el cual se obtiene la ecuación de Riccati de las curvas en el espacio euclídeo de tres dimensiones. Esto ofreció la posibilidad de una extensión del método al demostrar que este puede llevar a dos ecuaciones de Riccati, la segunda complementando a la ecuación de Riccati encontrada por Lie y Darboux.

Resolvimos las ecuaciones de Riccati estándar y complementaria para las hélices cilíndricas que tienen como propiedad que la curvatura y la torsión son constantes y para las hélices clotoidales que tienen como propiedad que estas cantidades intrínsecas son proporcionales a la longitud de arco.

Se obtuvieron hélices generalizadas en el sentido del factor de deformidad del seno y del coseno, con ciertas restricciones se obtienen las hélices cilíndricas más conocidas. Por otro lado, se logró obtener y graficar las curvas clotoidales utilizando el método de Lie-Darboux adicionalmente, se obtuvieron gráficas para un análisis adicional con las combinaciones de las funciones de la solución de las curvas clotoidales.

La experiencia acumulada en el trabajo con este método podríamos aplicarla a casos más complicados donde κ/τ ya no es constante, sabiendo que se pueden obtener soluciones gráficas solo en el caso en el cual se obtiene la solución general en formato racional de la ecuación de Riccati.

Para trabajo a futuro se buscarán ecuaciones de Riccati con los coeficientes intrínsecos no proporcionales que arrojen soluciones racionales y de tal manera permitan aplicar el método de Lie-Darboux y las fórmulas de Scheffers.

También se buscará la posibilidad de generalizar el método de Lie-Darboux a curvas espaciales en más dimensiones tanto euclidianas como no euclidianas.

Ecuaciones de Riccati y sus soluciones

Riccati consideró ecuaciones diferenciales de la forma especial:

$$\frac{d\sigma}{ds} = a\sigma^2 + bs^m \quad (\text{A.1})$$

donde $(a, b = \text{cte})$. Pero en realidad tienen el nombre de ecuaciones diferenciales de Riccati todas esas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden extendidas, en donde el cociente diferencial de la variable dependiente es un cuadrado de la función de la variable independiente

Podemos remontarnos a tratados antiguos de matemáticas y hallar algo al respecto, por ejemplo en el libro digitalizado [24] encontramos que se menciona a ‘una clase de ecuaciones cuya solución general se puede determinar cuando se conoce una solución particular’.

Estudiemos la ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2, \quad (\text{A.2})$$

dicha ecuación recibe el nombre de ecuación de Riccati, desarrollada en el siglo XVIII por el matemático italiano Jacopo Francesco Riccati. Resolver la ecuación de Riccati requiere del conocimiento previo de una solución particular $\hat{y}(x)$.

Si hacemos la sustitución

$$y(x) = \hat{y}(x) + u(x) \quad (\text{A.3})$$

la ecuación de Riccati adquiere la forma de una ecuación de Bernoulli.

Sea $\hat{y}(x)$ una solución particular de la ecuación de Riccati y consideremos la sustitución

$$y(x) = \hat{y}(x) + \frac{1}{u(x)}. \quad (\text{A.4})$$

Derivando esta ecuación,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\hat{y}}{dx} - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}, \quad (\text{A.5})$$

como \hat{y} es una solución de la ecuación de Riccati entonces satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = q_0(x) + q_1(x)\hat{y} + q_2(x)\hat{y}^2 . \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo (A.6) en (A.5)

$$\frac{dy}{dx} = q_0(x) + q_1(x)\hat{y} + q_2(x)\hat{y}^2 - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} , \quad (\text{A.7})$$

igualamos (A.7) con (A.2)

$$\begin{aligned} q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2 &= q_0(x) + q_1(x)\hat{y} + q_2(x)\hat{y}^2 - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} \\ q_1(x)y + q_2(x)y^2 &= q_1(x)\hat{y} + q_2(x)\hat{y}^2 - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} &= q_1(x)\hat{y} - q_1(x) + q_2(x)\hat{y}^2 - q_2(x)y^2 \\ \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} &= q_1(x)(\hat{y} - y) + q_2(x)(\hat{y}^2 - y^2) . \end{aligned}$$

Sustituyendo (A.4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} &= q_1(x) \left[\hat{y} - \left(\hat{y} + \frac{1}{u(x)} \right) \right] + q_2(x) \left[\hat{y}^2 - \left(\hat{y} + \frac{1}{u(x)} \right)^2 \right] \\ &= q_1(x) \left(-\frac{1}{u(x)} \right) + q_2(x) \left[\hat{y}^2 - \hat{y}^2 - 2\frac{\hat{y}}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)} \right] \\ &= q_1(x) \left(-\frac{1}{u(x)} \right) + q_2(x) \left(-2\frac{\hat{y}}{u(x)} - \frac{1}{u(x)^2} \right) \\ &= -\frac{q_1}{u(x)} - 2q_2 \frac{\hat{y}}{u(x)} - \frac{q_2}{u(x)^2} . \end{aligned}$$

Multiplicando por u^2

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} \cdot u^2 \frac{du}{dx} &= -\frac{q_1}{u(x)} \cdot u^2 - 2q_2 \frac{\hat{y}}{u(x)} \cdot u^2 - \frac{q_2}{u(x)^2} \cdot u^2 \\ \frac{du}{dx} &= -q_1 u - 2q_2 \hat{y} u - q_2 \\ &= (-q_1 - 2q_2 \hat{y})u - q_2 . \end{aligned}$$

Vemos

$$\frac{du}{dx} + (q_1 + 2q_2 \hat{y})u = -q_2(x) . \quad (\text{A.8})$$

Definimos las funciones

$$R(x) = q_1(x) + 2q_2 \hat{y} \quad S(x) = -q_2(x) .$$

La función (A.8) queda de la forma lineal no homogénea

$$\frac{dx}{du} + R(x)u = S(x) .$$

Esto mismo lo encontramos en el libro de Serret de integrales y hallamos como ejemplo

Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1y - (Xx^2 + X_1x + 1) = 0 ,$$

está satisfecha cuando se pone $y = x$; donde la sustitución

$$y = x + z$$

llevará esta ecuación a la siguiente:

$$\frac{dz}{dx} + (X_1 + 2Xx)z + Xz^2 = 0 .$$

La ecuación de Riccati pertenece a la clase de las ecuaciones mencionadas en el número anterior; dicha ecuación es la siguiente

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m, \quad (\text{A.9})$$

a y b son coeficientes constantes Cuando el número m tiene esta forma, siendo un entero positivo, la ecuación de Riccati es integrable por medio de las funciones algebraicas y logarítmicas; pero existe, como se verá, otro caso de integrabilidad.

A.1. Constantes de las soluciones

En el método estándar de Lie Darboux, las constantes de las soluciones para la ecuación de Riccati se toman como

$$c_1 = 1, c_2 = i, c_3 = \infty, \quad d_1 = -1, d_2 = -i, d_3 = 0$$

debido a que si se considera en un caso que

$$c_3 d_3 = 1$$

y en otro que

$$c_3 d_3 = -1$$

solo ocurre en el caso que se cumplan de forma simultánea lo siguiente

$$(1) \begin{cases} c_3 = n \\ d_3 = \frac{1}{n} \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} c_3 = n \\ d_3 = -\frac{1}{n} \end{cases} .$$

y

$$(3) \begin{cases} c_3 \sim \frac{1}{n} \\ d_3 \sim n \end{cases}, \quad (4) \begin{cases} c_3 = -\frac{1}{n} \\ d_3 = n \end{cases} .$$

donde n es real. Observemos que cuando

$$n \rightarrow \infty \quad (1) \begin{cases} c_3 = \infty \\ d_3 = 0 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} c_3 = \infty \\ d_3 = 0 \end{cases} \quad (1) = (2)$$

$$\begin{aligned}
n \rightarrow -\infty \quad (1) & \left\{ \begin{array}{l} c_3 = -\infty \\ d_3 = 0 \end{array} \right., \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} c_3 = -\infty \\ d_3 = 0 \end{array} \right. . \\
n \rightarrow \infty \quad (3) & \left\{ \begin{array}{l} c_3 = 0 \\ d_3 = \infty \end{array} \right., \quad (4) \left\{ \begin{array}{l} c_3 = 0 \\ d_3 = \infty \end{array} \right. . \\
n \rightarrow -\infty \quad (3) & \left\{ \begin{array}{l} c_3 = 0 \\ d_3 = -\infty \end{array} \right., \quad (4) \left\{ \begin{array}{l} c_3 = 0 \\ d_3 = -\infty \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Con las cuales, las ecuaciones correspondientes al caso

$$2(c_1 d_1 + c_2 d_2) = c_1 d_2 + c_2 d_1 + c_1 c_2 + d_1 d_2 .$$

proporcionan las constantes armónicas de los resultados de las propiedades de la solución general de la ecuación de Riccati [25, 26]. Podemos verificar esto al evaluar las constantes $c_1 = 1, c_2 = i, d_1 = -1, d_2 = -i$

$$\begin{aligned}
2(c_1 d_1 + c_2 d_2) &= c_1 d_2 + c_2 d_1 + c_1 c_2 + d_1 d_2 \\
2(-1 + 1) &= -i - i + i + i = 0
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1 - w_1 z_1}{w_1 - z_1} = \frac{(f_1^2 - f_3^2) - (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1 f_4 - f_2 f_3)} , \\
\alpha_2 &= \frac{1 - w_2 z_2}{w_2 - z_2} = \left[\frac{(f_1^2 - f_3^2) + (f_2^2 - f_4^2)}{2f_1 f_4 - f_2 f_3} \right] i , \\
\alpha_3 &= \frac{1 - w_3 z_3}{w_3 - z_3} = \frac{f_3 f_4 - f_1 f_2}{f_1 f_4 - f_2 f_3} .
\end{aligned}$$

Transformación de coordenadas

Un artificio que nos permite simplificar las ecuaciones de muchas curvas consiste en la transformación de coordenadas. Una transformación es el proceso que consiste en cambiar una relación, expresión o figura en otra.

Definición 7. Una transformación es una operación por la cual una relación, expresión o figura se cambia en otra siguiendo una ley dada.

Analíticamente, la ley se expresa por una o más ecuaciones llamadas *ecuaciones de transformación*. Un conjunto de ecuaciones lineales define una transformación lineal de cada punto (x, y) a su correspondiente imagen (\bar{x}, \bar{y}) . En forma matricial, una transformación lineal puede escribirse $\bar{x} = Ax$, si como en el conjunto de ecuaciones es uno a uno, entonces $|A| \neq 0$.

La operación de mover los ejes coordenados en el plano coordenado a una posición diferente, de manera que los nuevos ejes sean, respectivamente, paralelos a los ejes primitivos, y dirigidos en el mismo sentido se llama *traslación de los ejes coordenados*. Para simplificar ecuaciones mediante la traslación de los ejes coordenados se tiene el siguiente

Teorema 7. Si se trasladan los ejes coordenados a un nuevo origen $O'(h, k)$, y si las coordenadas de cualquier punto P antes y después de la traslación son (x, y) y (x', y') , respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema primitivo al nuevo sistema de coordenadas son [14]

$$\begin{aligned}x &= x' + h, \\y &= y' + k.\end{aligned}$$

Rotación de coordenadas o rotación de los ejes coordenados

Los vectores han sido definidos especificando la magnitud y la dirección y también especificando los componentes de los mismos. Una tercera representación está dada en términos del comportamiento bajo la rotación del sistema de coordenadas.

Para simplificar las ecuaciones por rotación de los ejes de coordenadas tenemos el siguiente

Teorema 8. Si los ejes coordenados giran un ángulo ϕ entorno de su origen como centro de rotación, y las coordenadas de un punto cualquiera P antes y después de la rotación

son (x, y) y (x', y') , respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema de coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta , \\y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta .\end{aligned}$$

Curvas

En esta sección, dejaremos de considerar los términos α , β y γ como cosenos directores.

Definición 8. [16] Una curva parametrizada en \mathbb{R}^n es un mapeo $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ para α, β con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ donde $(\alpha, \beta) = \{t \in \mathbb{R} | \alpha < t < \beta\}$.

Definición 9. [27] Sea J un intervalo abierto no vacío en \mathbb{R} . Entonces una curva en $U \subset \mathbb{R}^n$ es una función (de clase C^r con $1 \leq r \leq \infty$):

$$\gamma : J \rightarrow U .$$

Sea J un intervalo abierto no vacío en \mathbb{R} . Entonces una curva en $U \subset \mathbb{R}^n$ es una función (de clase C^r con $1 \leq r \leq \infty$) [27]:

$$\gamma : J \rightarrow U .$$

Nótese que la curva es una función y no el rango de dicha función. Utilizando las coordenadas estándar, tenemos para todo $t \in J$ que

$$\gamma(t) = \gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t) .$$

En cálculo elemental, la derivada de γ es

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) , \tag{C.1}$$

y decimos que $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector. Pero ¿es un vector tangente?. Esto es, ¿sigue la regla de transformación para un vector tangente bajo un cambio de coordenadas? En brevedad, en el confuso léxico estándar ¿el vector $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector?

Con el cambio de coordenadas $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ (con V abierto), la curva $\gamma : J \rightarrow U$ se transforma en la curva $\tilde{\gamma} := \phi \circ \gamma : J \rightarrow V$, o en otras palabras, $\tilde{\gamma} := \phi(\gamma(t))$ para cada $t \in J$. Utilizando las coordenadas en V , tenemos que

$$\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \dots, \tilde{\gamma}_n(t))$$

y

$$\phi(\gamma(t)) = (\phi_1(\gamma(t)), \dots, \phi_n(\gamma(t))) ,$$

de lo que sigue que

$$\tilde{\gamma}_j(t) = \phi_j(\gamma(t)) = \phi_j(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

para $j = 1, \dots, n$. Entonces, utilizando las coordenadas estándar x_1, \dots, x_n en U , tomamos la derivada utilizando la regla de la cadena y obtenemos

$$\tilde{\gamma}'_j(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(\gamma(t)) \gamma'_k(t) = \sum_{k=1}^n (D\phi(\gamma(t)))_{jk} \gamma'_k(t) ,$$

o equivalentemente en forma matricial

$$\tilde{\gamma}'(t) = D\phi(\gamma(t))\gamma'(t) ,$$

donde $\gamma'(t)$ y $\tilde{\gamma}'(t)$ están escritas como vectores columna (es decir, matrices $n \times 1$) y $D\phi$ es la matriz jacobiana $n \times n$. La última fórmula dice que la derivada de una curva es un vector tangente, es decir, que transforma utilizando la derivada de ϕ . (Compare con lo resaltado en la relación de equivalencia \equiv). En resumen, la derivada de una curva es un vector.

C.1. Longitud de arco

A continuación se presenta un método conciso para obtener la fórmula de longitud de arco en todo sistema admisible de coordenadas.

Consideremos que las expresiones típicas de la longitud de arco conducen a una fórmula general del tipo

$$L = \int_a^b \sqrt{\left| g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right|} dt \quad (C.2)$$

donde $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n) = g_{ji}$ son funciones de las coordenadas y L da la longitud del arco $a \leq t \leq b$ de la curva $x^i = x^i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) [19].

La fórmula del 2.3.2 admite la expresión diferencial

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j .$$

Más en general C.2 es equivalente a

$$\pm ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j . \quad (C.3)$$

Formulación con diferenciales

Definición 10. [17]

Sea $y = f(x)$ donde f es diferenciable y sea Δx un incremento de x

(i) el diferencial dx de la variable independiente x es $dx = \Delta x$.

(ii) el diferencial dy de la variable dependiente y es

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x) dx.$$

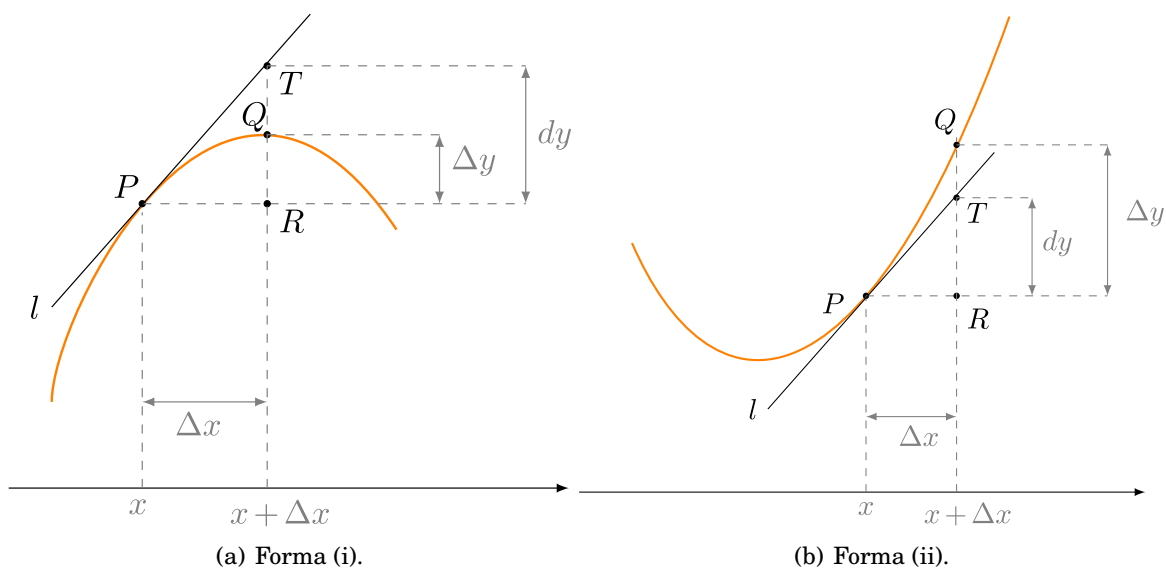


Figura C.1: Formulación de la longitud de arco.

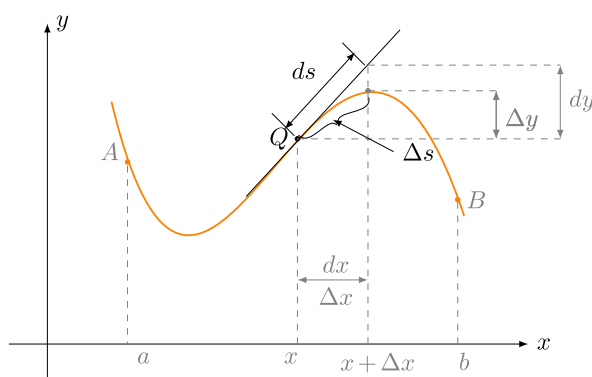


Figura C.2: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

Existe una interpretación geométrica de la forma (ii) del teorema anterior. Considérese $y = f(x)$ y dado x un incremento Δx . Sea Δy el cambio en y y Δs el cambio en la longitud de arco correspondiente a Δx . Estos incrementos están ilustrados en la Figura C.2 donde dy es la cantidad que la línea tangente sube o baja si la variable independiente cambia de x a $x + \Delta$, vea también Figura C.1.

Actividades del periodo doctoral

A continuación se listan las actividades en las que se participó durante este periodo doctoral.

I. Participación a nivel nacional en el concurso de póster del Congreso de la Sociedad Mexicana de Física con la exposición del tema “Generalización pseudoeuclídea del método de Lie-Darboux para las curvas tres dimensionales”. Realizado en la ciudad de Zacatecas, Zac. en Octubre del 2022.

II. Publicación del artículo titulado “Riccati equations of opposite torsions from the Lie-Darboux method for spatial curves and possible applications” en 2023.

<https://doi.org/10.1088/1402-4896/acf896>

III. Participación en el artículo “Clothoid helices obtained via the Lie-Darboux method”, por ser enviado.

Bibliografía

- [1] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination*. Chelsea, Second edition, 1991. (Traducción al inglés del libro en alemán Anschauliche Geometrie, 1952).
- [2] D. V. Alekseevskij, A. M. Vinogradov, and V. V. Lychagin. *Geometry I Basic ideas and concepts of differential geometry*. Springer-Verlag, 1988. (Traducción del ruso).
- [3] E. W. Weisstein. Natural equation. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/NaturalEquation.html>
- [4] D. J. Struik. *Lectures on classical differential geometry*. Dover Publications, Second Edition, 1961.
- [5] G. Scheffers. *Anwendung der differential und integralrechnung auf geometrie Einführung in die theorie der curven in der ebene und im raume*. Verlag von Veit & Comp., 1901.
- [6] G. Darboux. *Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Gauthier-Villars, 1887.
- [7] L. P. Eisenhart. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Ginn and Company, 1909.
- [8] V. Gusella. Geometrical uncertainty in mechanics and random curves in space. Probabilistic Engineering Mechanics, **62**, 103102, 2020.
- [9] A. J. Hanson and Hui Ma. Quaternion frame approach to streamline visualization. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, **1**, 164-174, 1995.
- [10] R. Capovilla, J. Guven, and E. Rojas. Null Frenet-Serret dynamics. General Relativity and Gravitation **38**, 689–698, 2006.
- [11] A. Goriely and M. Tabor. Spontaneous helix hand reversal and tendril perversion in climbing plants. Physical Review Letters, **80**, 1564, 1998.
- [12] S. Sternberg. *Lectures on differential geometry*. AMS Chelsea, 1999.

- [13] W. P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*. Volume 1. Princeton University Press, 1997.
- [14] C. Lehmann. *Geometría analítica*. Limusa, 1986.
- [15] G. Arfken. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, 1985.
- [16] A. Pressley. *Elementary differential geometry*. Springer, 2001.
- [17] E. W. Swokowski. *Calculus with analytic geometry*. PWS, 1983.
- [18] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Chapman & Hall/CRC. 2005.
- [19] D. C. Kay. *Cálculo tensorial*. Mc. Graw Hill. 1989.
- [20] E. L. Ince. *Ordinary differential equations*. Dover Publications.
- [21] M. Lipschutz. *Teoría y problemas de geometría diferencial*. Mc Graw-Hill, 1970.
- [22] K. Ilarslan, E. Nessovic. Some relations between normal and rectifying curves in Minkowski space-time. *International Electronic Journal of Geometry*. Vol. 7. No. 1, pp. 26-35. 2014.
- [23] E. Cesàro. *Vorlesungen über natürliche geometrie*. Druck und Verlag von B.G. Teubner. 1901.
- [24] J. A. Serret. *Cours de Calcul Différentiel et intégral*. Gauthier-Villars, Cinquième édition. 1900.
- [25] M. Berger. *Geometry I*. Springer, 1987.
- [26] M. Berger, P. Pansu, J.-P. Berry, and X. Saint-Raymond. *Problems in geometry*. Springer-Verlag, 1984.
- [27] S. B. Sontz. *Principal blundles: the classical case*. Springer, 2015.
- [28] M. Berger. *Geometry revealed: a Jacob's ladder to modern higher geometry*. Springer, 2010.
- [29] S. Lipschutz. *Teoría y problemas de topología general*. Mc.Graw-Hill, 1970.
- [30] W. F. Trench. *Introduction to real analysis*. Pearson Education, 2003.
- [31] S. Giardino. A primer on the differential geometry of quaternionic curves. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. Vol. 44, No. 18, pp.14428-14436. 2021.
- [32] M. S. Lone. Geometric invariants of normal curves under conformal transformation in \mathbb{E}^3 . *Tamkang Journal of Mathematics*. Vol. 53, No. 1, pp. 75-87, 2022.
- [33] A. J. Hanson. Quaternion Frenet frames: Making optimal tubes and ribbons from curves. *Computer Science Department, Indiana University Bloomington*. Vol. 47405, 1994.
- [34] R. L. Bishop. There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*. Vol. 82, No. 3, pp. 246-251, 1975.