



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica

Posgrado de Control y Sistemas Dinámicos

## **ESTUDIO DE SISTEMAS ISOCRONOS**

Tesis para optar al grado de Maestro en Ciencias

**ALBERTO DE LA ROSA DE LA ROSA**

**Director de tesis:**  
Dr. Haret-Codratian Rosu

San Luis Potosí, S.L.P., Noviembre 2025

*Esta tesis está dedicada a mi familia  
y a todos ese seres que ya no están  
en este mundo pero que me acompañan  
en espíritu.*

# Agradecimientos

- 1 Al IPICyT, por las condiciones ofrecidas para mi educación profesional que me permitió elaborar este documento de tesis.
- 2 A CONAHCYT, por la beca nacional otorgada para la realización de estudios de maestría.
- 3 Al asesor, el Dr. Haret-Codratian Rosu, por su guía en el tema de este documento de tesis y por su mentoría a lo largo de este periodo y también al Dr. Josué Domingo de la Cruz Díaz, que me oriento y apoyo cuando necesite ayuda.
- 4 Al comité tutorial formado por los Dres. Eric Campos Cantón y Cesar Octavio Maldonado Ahumada por su conocimiento, tolerancia y retroalimentación durante todo este periodo y cada uno de los avances de tesis.

# Contenido

Agradecimientos.	II
Índice de figuras	IV
Glosario.	VII
Resumen.	X
Abstract.	XI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes Historicos . . . . .	1
1.2. Estado del arte . . . . .	4
1.3. Justificación . . . . .	5
1.4. Objetivos . . . . .	7
<b>2. Preliminares</b>	<b>8</b>
2.1. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	8
2.2. Corchetes de Poisson . . . . .	10
2.2.1. Momento Angular . . . . .	11
2.2.2. Constantes de movimiento . . . . .	12
2.3. Orbitas de Kepler . . . . .	13
2.4. Vector Runge - Lenz . . . . .	15
2.5. Superintegrabilidad . . . . .	18
2.5.1. Dos tipos de comportamiento . . . . .	19
2.5.2. El papel de las contantes de movimiento . . . . .	20
2.6. Problema de fuerza central . . . . .	22
2.6.1. Ecuaciones de movimiento y primeras integrales . . . . .	22

---

<b>3. Orbitas elípticas</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. El Teorema de Bertrand como Condición Necesaria y Suficiente para la Cerrazón Universal . . . . .	28
3.2.1. Análisis de Estabilidad Orbital en el Límite Cuasi-Circular . .	30
3.2.2. La Integral de la Órbita y la Clasificación Universal de Bertrand	31
3.2.3. Simetrías Ocultas: El Vector de Runge-Lenz . . . . .	32
3.2.4. Órbitas Cerradas No Elípticas: El Caso de la Fragilidad Dinámica	33
<b>4. Los potenciales isócronos de Hénon</b>	<b>35</b>
4.1. Concepto de potencial isócrono . . . . .	35
4.2. Problema Inverso de Fuerza Central . . . . .	37
4.3. Soluciones Isócronas . . . . .	38
4.4. Los potenciales isócronos son Keplerianos . . . . .	42
<b>5. Isocronismo de las series Taylor truncadas de los potenciales efectivos de Kepler y Hénon</b>	<b>45</b>
5.1. Los potenciales isócronos de la astrofísica y sus series de Taylor truncadas alrededor de sus mínimos . . . . .	45
5.1.1. Introducción . . . . .	45
5.1.2. Potencial de Kepler: $V_K(r) = -\frac{k}{r}$ . . . . .	47
5.1.3. Primer potencial de Hénon: $V_{H1}(r) = -\frac{k}{\sqrt{b^2+r^2}+b}$ . . . . .	51
5.1.4. Segundo potencial de Hénon: $V_{H2}(r) = -k\sqrt{r^2-b^2}/r^2$ . . . .	55
5.1.5. Tercer potencial de Hénon: $V_{H3}(r) = \frac{k}{\sqrt{b^2-r^2}+b}$ . . . . .	59
<b>6. Conclusiones</b>	<b>64</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>65</b>
<b>Anexo 1</b>	<b>68</b>

# Índice de figuras

1.1.	(a) Galileo Galilei. (b) Johannes Kepler. . . . .	1
1.2.	(a) Christiaan Huygens. (b) El diseño de reloj de péndulo, invención de Huygens, que se encuentra en su libro <i>Horologium Oscillatorium</i> de 1673. . . . .	3
5.1.	Potenciales efectivos de Kepler sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 1 (color rojo) para $r_{01} = r_0 = 2, l = k = 1, m = 1/2$ y los valores indicados de energía $E$ . . . . .	49
5.2.	(a) Plano de fase para el potencial efectivo de Kepler sin truncamiento mostrando periodicidad para las energías indicadas. (b) Plano de fase para el potencial efectivo de Kepler truncado a orden 1 mostrando la periodicidad para las $E$ escogidas. . . . .	49
5.3.	(a) Potenciales efectivos de Kepler sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 2 (color rojo) para $r_{02} = r_0 = 2, l = k = 1, m = 1/2$ y los valores indicados de energía $E$ . (b) Plano de fase mostrando movimiento periódico para las $E$ escogidas. . . . .	50
5.4.	Gráficas de $T( E ^{-3/2})$ usando los datos de la primera y últimas tres columnas de la tabla anterior. . . . .	51
5.5.	Potenciales efectivos de primer caso de Hénon sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 1 (color rojo) empleando $r_0 = 2,193, b = 0,1, l = k = 1, m = 1/2$ y los valores indicados de energía $E$ . . . . .	53
5.6.	(a) Plano de fase para el potencial efectivo del primer caso de Hénon sin truncamiento mostrando periodicidad para las energías indicadas. (b) Plano de fase para el potencial efectivo del primer caso de Hénon truncado a orden 1 mostrando la periodicidad para las $E$ escogidas. .	53

---

5.7. (a) Potenciales efectivos de primer caso de Hénon sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 2 (color rojo) empleando $r_0 = 2,193, b = 0,1, l = k = 1, m = 1/2$ y los valores indicados de energía $E$ . (b) Plano de fase mostrando órbitas periódicas para las $E$ escogidas.	54
5.8. Gráficas de $T( E ^{-3/2})$ usando los datos de la primera y últimas tres columnas de la tabla anterior. . . . .	55
5.9. Potenciales efectivos del segundo caso de Hénon sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 1 (color rojo) empleando $r_0 = 2,0074, b = 0,1, l = k = 1, m = 1/2$ y los valores indicados de energía $E$ . . . . .	57
5.10. ((a) Plano de fase para el potencial efectivo del segundo caso de Hénon sin truncamiento mostrando periodicidad para las energías indicadas. (b) Plano de fase para el potencial efectivo del segundo caso de Hénon truncado a orden 1 mostrando la periodicidad para las $E$ seleccionadas.	57
5.11. (a) Segundo potencial efectivo de Hénon truncado a segundo orden de Taylor (en color rojo) y el mismo no truncado (en color azul) para $r_0 = 2,0074, b = 0,1, l = k = 1, m = 1/2$ y (b) plano de fase del caso truncado con algunas trayectorias cerradas. . . . .	58
5.12. Gráficas de $T( E ^{-3/2})$ usando los datos de la primera y últimas tres columnas de la tabla anterior. . . . .	59
5.13. Potenciales efectivos del tercer caso de Hénon sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 1 (color rojo) empleando $r_{01} = 0,078, l = b = 0,1, k = 1, m = 1/2$ y los valores indicados de energía $E$ . . . . .	61
5.14. (a) Plano de fase para el potencial efectivo del tercer caso de Hénon sin truncamiento mostrando periodicidad para las energías indicadas. (b) Plano de fase para el potencial efectivo del tercer caso de Hénon truncado a orden 1 mostrando la periodicidad para las $E$ escogidas. .	61
5.15. (a) Potencial efectivo del tercer caso de Hénon truncado a segundo orden de Taylor y (b) su plano de fase para movimientos periódicos para $r_{02} = 0,0767, l = b = 0,1, k = 1, m = 1/2$ . . . . .	62
5.16. Gráficas de $T( E ^{-3/2})$ usando los datos de la primera y últimas tres columnas de la tabla anterior. . . . .	63

## Glosario

**Aproximación local:** Descripción válida del sistema en un entorno cercano a un punto de equilibrio.

**Caos hamiltoniano:** Comportamiento dinámico sensible a las condiciones iniciales en sistemas conservativos.

**Constante de movimiento:** Función del espacio de fases que permanece invariante a lo largo de la evolución temporal del sistema.

**Coordenadas canónicas:** Variables conjugadas  $(q, p)$  que describen el espacio de fases de un sistema hamiltoniano.

**Dinámica no integrable:** Dinámica para la cual no existe un conjunto completo de constantes de movimiento.

**Dinámica orbital:** Estudio del movimiento bajo fuerzas centrales y potenciales gravitatorios.

**Ecuaciones de Hamilton:** Conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que gobiernan la evolución temporal de un sistema hamiltoniano.

**Ecuaciones de movimiento:** Ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal del sistema.

**Espacio de fases:** Espacio matemático formado por las coordenadas y momentos del sistema, donde se representa su evolución dinámica.

**Estabilidad orbital:** Propiedad que determina si una órbita permanece cercana a una trayectoria de referencia.

**Excentricidad:** Parámetro geométrico que caracteriza la forma de una órbita.

**Frecuencia fundamental:** Frecuencia asociada al movimiento periódico del sistema.

**Fuerza central:** Fuerza que depende únicamente de la distancia al centro de atracción y apunta radialmente hacia él.

**Hamiltoniano:** Función que describe la energía total de un sistema mecánico en términos de coordenadas generalizadas y momentos conjugados.



**Hamiltoniano polinómico:** Hamiltoniano expresado como un polinomio.

**Integrabilidad:** Propiedad de un sistema hamiltoniano que admite suficientes constantes de movimiento en involución para resolver su dinámica por cuadraturas.

**Isocronismo:** Propiedad dinámica por la cual todas las órbitas ligadas tienen el mismo periodo.

**Momento angular:** Magnitud vectorial conservada en sistemas con simetría rotacional, asociada al movimiento orbital.

**Órbita circular:** Caso particular de órbita elíptica con excentricidad nula.

**Órbita elíptica:** Órbita cerrada correspondiente a energía negativa.

**Órbita hiperbólica:** Órbita abierta correspondiente a energía positiva.

**Órbita parabólica:** Órbita de escape con energía total nula.

**Órbitas keplerianas:** Trayectorias cónicas resultantes del problema de Kepler.

**Periodo orbital:** Tiempo necesario para completar una órbita cerrada.

**Potencial central:** Potencial que depende únicamente de la coordenada radial.

**Potencial efectivo:** Potencial radial que incorpora el término centrífugo.

**Potencial gravitatorio:** Potencial asociado a la interacción gravitatoria responsable del movimiento orbital.

**Potencial isocrono:** Potencial para el cual el periodo orbital es independiente de la energía.

**Potencial kepleriano:** Potencial gravitatorio newtoniano inversamente proporcional a la distancia radial.

**Punto de equilibrio:** Punto del espacio de fases donde el sistema permanece en reposo.

**Resonancia:** Condición en la cual las frecuencias del sistema están relacionadas por relaciones racionales.

**Serie de Taylor:** Expansión polinómica de una función alrededor de un punto de referencia.

**Sistema hamiltoniano:** Sistema dinámico descrito por un Hamiltoniano que representa la energía total del sistema y cuyas ecuaciones de movimiento se obtienen mediante las ecuaciones de Hamilton.

**Teorema de Bertrand:** Teorema que establece que los únicos potenciales centrales con órbitas ligadas cerradas son el kepleriano y el armónico isotrópico.

**Teoría de perturbaciones:** Método analítico para estudiar desviaciones pequeñas respecto a un sistema integrable.

**Truncamiento de Taylor:** Aproximación de una función mediante una serie de Taylor de orden finito.

**Vector de Runge–Lenz:** Constante de movimiento adicional del problema de Kepler.

## Resumen

En esta tesis se discute el fenómeno de isocronismo enfocado en mecánica celeste con énfasis en el problema de Kepler y sus extensiones paramétricas conocidas en la literatura como potenciales de Hénon.

Recientemente, el problema de Kepler ha sido analizada del punto de vista de las álgebras de Lie (SGA, por sus siglas en inglés), sin embargo nuestros cálculos muestran que la aplicación del método SGA a los casos paramétricos de Hénon presenta inconsistencias.

Dada la problemática de la metodología SGA para los casos de Hénon aplicamos el formalismo de sistemas dinámicos Hamiltonianos con los potenciales efectivos (incluso el de Kepler) aproximados alrededor de sus mínimos a través de sus series de Taylor truncadas.

Nuestros resultados muestran que el isocronismo se manifiesta con una precisión al cuarto dígito alcanzada en el sexto orden de la expansión de Taylor de estos potenciales.

# Abstract

This thesis discusses the phenomenon of isochronism in celestial mechanics, focusing on Kepler's problem and its parametric extensions known in the literature as Hénon potentials.

Recently, Kepler's problem has been analyzed from the perspective of Lie algebras (SGAs); however, our calculations show that applying the SGA method to the parametric cases of Hénon presents inconsistencies.

Given the problems with the SGA methodology for the Hénon cases, we applied the formalism of Hamiltonian dynamical systems with the effective potentials (including Kepler's) approximated around their minima through their truncated Taylor series.

Our results show that isochronism manifests itself with a precision to the fourth digit, achieved in the sixth order of the Taylor expansion of these potentials.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes Historicos

El estudio sistemático del concepto de isocronismo, entendido [1] como igualdad de los periodos de uno o más movimientos periodicos se inició en la primera parte del siglo XVII con los trabajos de Johannes Kepler (1571-1630) y Galileo Galilei(1564-1642) [10] y posteriormente con el descubrimiento del fenómeno de sincronización por Christiaan Huygens (1629-1695) [18] y su invento tecnológico del reloj de péndulo hace 368 años que fue el dispositivo dominante (en sus formas de reloj de pared, de bolsillo y de pulsera) para la medición del tiempo de manera rutinaria por casi tres siglos.

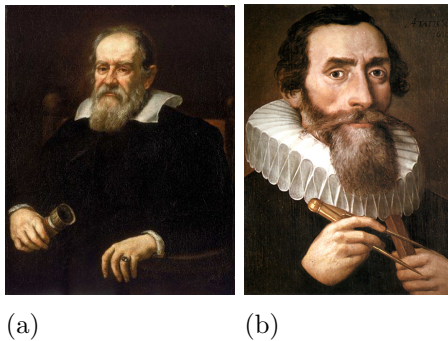


Figura 1.1: (a) Galileo Galilei. (b) Johannes Kepler.

En 1619, Johannes Kepler publicó su libro *De Harmonices Mundi Libris V* en la cual incluyó su tercera ley del movimiento planetario. Esta ley es una de las más conocidas leyes de la naturaleza que tuvo un impacto radical en el conocimiento de la humanidad. Se refiere a los periodos de revolución de los planetas del sistema solar, aseverando que el cuadrado de estos periodos es proporcional a las potencias cubicas de los semiejes mayores de las trayectorias periódicas de los planetas, con la misma constante de proporcionalidad. Por otro lado, esta misma ley fue el primer ejemplo de isocronismo reportado, entendido como un tipo de movimiento periódico para el cual el periodo depende de una sola constante de movimiento, en este caso la energía, ya que la energía es inversamente proporcional al semieje mayor.

Los trabajos de Galileo en física [22] estuvieron dedicados a la aceleración y la oscilación de los cuerpos. Menos conocidos que sus investigaciones sobre la aceleración, sus trabajos sobre las oscilaciones, especialmente sobre el isocronismo, no son menos importantes a nivel matemático y metodológico. Sus primeros esfuerzos en establecer una sólida base matemática se vieron plasmados en *Dialogo sopra i due massimi sistemi* (1632) y en *Discorsi e dimostrazioni matematiche* (1638). No solo se debe resaltar su contribución a la conceptualización del problema de isocronismo sino también su aporte a la resolución del problema de la oscilación de cuerpos pesados.

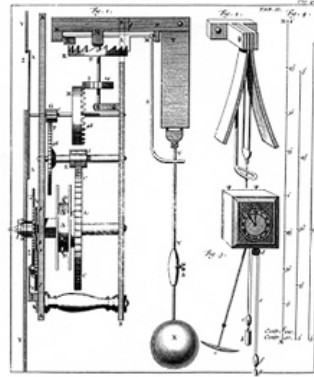
En la ciencia galileana del movimiento, el problema del isocronismo se refiere a la situación física en la que se obtiene la igualdad de tiempos para los movimientos de uno o varios cuerpos. Se dice que esta propiedad la notó por primera vez mientras observaba una lámpara oscilante en la Catedral de Pisa, usando su pulso para medir el tiempo. En términos más precisos, se trata de determinar las condiciones en las que los periodos de descenso a lo largo de las cuerdas internas (considerados como muchos planos inclinados) de un círculo vertical o durante las oscilaciones a lo largo de arcos de círculo son constantes. El primer caso describe lo que podría llamarse isocronismo de cuerdas, mientras que el segundo se refiere al isocronismo del péndulo. Galileo abordó la cuestión del isocronismo para cuerdas y para arcos de círculo. Galileo no logro establecer sólida prueba matemática, así que buscó validar esto a partir de la ley de cuerdas y respaldando con varios montajes experimentales que supuestamente le proporcionarían la confirmación requerida. Sin embargo, la falta de pruebas matemáticas no le impidió considerarlo lo suficientemente sólido como para apoyar una teoría del péndulo en la que se invirtieron las propiedades del péndulo, esto para concebir diversos dispositivos para medir el tiempo.

Christiaan Huygens fue el primer físico en observar y analizar el fenómeno de la sincronización que se puede interpretar como una transferencia de isocronismo de un

sistema a otro. Más precisamente, el físico y astrónomo holandés observó durante el primero de marzo de 1665 que dos relojes de péndulo que estaban situados uno en frente de otro, comenzaron a moverse en fase. Anteriormente, Huygens diseñó su reloj de péndulo en 1657 y fue construido por Salomon Coster. Posteriormente, Huygens patentó su invento en 1657-1658 aunque no gozó mucho de su invento que fue rápidamente copiado por otros constructores de relojes de péndulo. De cualquier forma, Huygens no fue el primero en concebir un reloj de péndulo [23]. Como se reveló en su *Horologium Oscillatorium* (1673) [18], su invención fue basada a su vez en una invención de Galileo Galilei sobre el principio de isocronismo [1].



(a)



(b)

Figura 1.2: (a) Christiaan Huygens. (b) El diseño de reloj de péndulo, invención de Huygens, que se encuentra en su libro *Horologium Oscillatorium* de 1673.

En astrofísica, el tema del isocronismo recibió un nuevo impulso solamente muchos años después, en 1959, en los trabajos de Michel Hénon (1931-2013) sobre los cúmulos globulares publicados en francés. Hénon descubrió tres deformaciones paramétricas del potencial de Kepler que se reducen al mismo en el límite en el cual el parámetro se anula y que tienen las mismas propiedades isócronas como el potencial de Kepler. Cabe decir que a pesar de la importancia de este descubrimiento su impacto no fue tan notable y en la actualidad la literatura al respecto es todavía reducida.

En esta tesis se considera este isocronismo descubierto en problemas de mecánica celeste para los casos de sistemas planetarios y cúmulos globulares modelados a

través de los potenciales de Kepler-Newton y Hénon, respectivamente. El contenido de los primeros tres capítulos es monográfico con material preliminar en el tema del isocronismo mencionado. En el capítulo 4 se extiende el formalismo ya desarrollado en la literatura en el caso del problema de Kepler a los potenciales paramétricos de Hénon, pero sin obtener resultados concluyentes. En el quinto capítulo usamos el formalismo de sistemas dinámicos Hamiltonianos para los mismos potenciales desarrollados en series de Taylor truncadas alrededor de los mínimos de los potenciales efectivos y encontramos que el sexto orden de truncamiento cumple con el isocronismo con precisión hasta el cuarto dígito decimal.

También, en un anexo, se incluyó una versión en español del artículo de Bertrand de 1873 sobre el teorema de Bertrand, un concepto básico en dinámica isócrona.

## 1.2. Estado del arte

Los sistemas hamiltonianos constituyen un marco fundamental para la descripción de una amplia clase de fenómenos en la mecánica clásica, particularmente en la mecánica celeste y la teoría de sistemas dinámicos. Su formulación permite describir la evolución temporal de un sistema a partir de una función escalar, el Hamiltoniano, que generalmente representa la energía total del sistema.

Dentro de este contexto, el problema de Kepler es uno de los ejemplos más representativos de sistemas hamiltonianos integrables. Su formulación en términos de un potencial gravitatorio newtoniano ha permitido no solo describir el movimiento de cuerpos bajo atracción de una fuerza central, sino también establecer las bases para el estudio de sistemas más complejos. El carácter integrable del problema de Kepler lo convierte en un punto de referencia fundamental para contrastar con sistemas que presentan comportamientos no integrables.

Las variaciones del potencial gravitatorio clásico de Kepler, así como la introducción de términos adicionales en el Hamiltoniano, conducen a sistemas cuyo comportamiento dinámico puede volverse significativamente más complejo. En este tipo de sistemas, la aparición de regiones caóticas en el espacio de fases ha motivado el estudio de potenciales que permitan analizar la transición entre dinámica regular y caótica.

En este marco surgen los potenciales de Hénon, introducidos originalmente como un



modelo simplificado para el estudio del movimiento estelar en galaxias y posteriormente utilizado para el análisis del caos hamiltoniano. El sistema de Hénon–Heiles, en particular, ha sido objeto de estudio debido a su comportamiento dinámico y a la coexistencia de órbitas regulares y caóticas dependiendo del nivel de energía.

La mayor parte de los trabajos existentes sobre los potenciales de Hénon se centran en el análisis numérico del sistema, empleando herramientas como secciones de Poincaré, métodos mediante la integración de Abel y simulaciones computacionales para caracterizar su comportamiento dinámico. Sin embargo, estas aproximaciones suelen apoyarse en desarrollos específicos del Hamiltoniano completo o en otra clase de métodos, sin abordar de manera sistemática la aproximación directa del potencial mediante expansiones en series de Taylor truncadas.

A pesar de que las series de Taylor constituyen una herramienta ampliamente utilizada para aproximar funciones en diversos contextos de las ciencias e ingenierías, no existe mucha literatura que estudie el impacto de truncar los potenciales de Hénon a distintos órdenes y analizar las consecuencias dinámicas de dichas aproximaciones en el sistema hamiltoniano resultante. Esta ausencia es particularmente relevante, dado que tales aproximaciones podrían proporcionar modelos analíticamente más manejables y ofrecer una perspectiva alternativa sobre la estructura del espacio de fases.

En este sentido, la presente tesis se propone contribuir al estudio de los sistemas hamiltonianos asociados al potencial de Hénon mediante la aproximación del potencial original por medio de series de Taylor truncadas a distintos órdenes. El objetivo es analizar cómo estas aproximaciones afectan la dinámica del sistema, identificar las limitaciones de validez de cada truncamiento y evaluar en qué medida preservan o alteran las características fundamentales del sistema original. De este modo, el trabajo busca llenar un vacío en la literatura existente y aportar una aproximación analítica complementaria al estudio clásico de los potenciales de Hénon.

### 1.3. Justificación

El estudio de los sistemas hamiltonianos con fuerzas centrales constituye un área fundamental de la mecánica clásica, debido a su relevancia en la descripción del movimiento orbital y proporcionan un marco para el análisis cualitativo de la dinámica, la estabilidad orbital y la transición entre regímenes integrables y no integrables.

El problema de Kepler es el sistema hamiltoniano integrable con fuerza central de los más conocidos. Su estructura analítica ha servido como referencia para el desarrollo de la teoría moderna de sistemas dinámicos, y su carácter excepcional queda formalmente establecido por el teorema de Bertrand, el cual afirma que únicamente el potencial kepleriano y el potencial armónico generan órbitas cerradas para todas las condiciones iniciales ligadas. Este resultado pone de manifiesto la fragilidad de la integrabilidad ante perturbaciones del potencial y motiva el estudio de modelos que se apartan de estos casos ideales.

En este contexto, los potenciales de Hénon surgen como una generalización natural del problema de Kepler al preservar la propiedad de isocronía del movimiento ligado, aun cuando no todas las órbitas sean necesariamente cerradas. Estos potenciales permiten construir modelos intermedios entre sistemas completamente integrables y sistemas no integrables, y resultan especialmente útiles para el análisis de estabilidad orbital y métodos perturbativos.

Por otra parte, los potenciales de Hénon constituyen un modelo ampliamente utilizado en dinámica galáctica y en el estudio del caos hamiltoniano. Su relevancia radica en que describen campos gravitatorios realistas y presentan una importante fenomenología dinámica caracterizada por la coexistencia de regiones regulares y caóticas en el espacio de fases. No obstante, estos potenciales no admiten, en general, soluciones analíticas exactas, lo que limita el análisis detallado de su estructura dinámica.

En este sentido, las aproximaciones mediante expansiones en series de Taylor truncadas alrededor de puntos de equilibrio representan una estrategia eficaz para construir modelos hamiltonianos polinómicos tratables, que conservan la estructura del sistema original.

La presente investigación se justifica por la necesidad de establecer un puente sistemático entre los potenciales gravitatorios clásicos comprendidos, como el potencial kepleriano y el potencial armónico, y otros modelos como los potenciales de Hénon. En particular, la modificación de estos últimos mediante aproximaciones de series de Taylor truncadas permite analizar cómo la forma funcional del potencial influye en la estructura de las órbitas contribuyendo así a una mejor comprensión de la dinámica hamiltoniana de tipo gravitatorio.

## 1.4. Objetivos

### Objetivo General

Investigar el isocronismo astrofísico (Kepler y Hénon), utilizando técnicas de expansión de series truncadas de Taylor, alrededor de los mínimos de los potenciales isocronos.

### Objetivos particulares

- Realizar un análisis local (mediante expansiones de Taylor truncadas) de los potenciales de Kepler y de Hénon.
- Mostrar cómo las series de Taylor truncadas de estos potenciales alrededor de sus mínimos convergen hacia la propiedad de isocronismo, definido como la independencia de los periodos de los movimientos periódicos respecto al momento angular.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Ecuaciones de Hamilton

En el caso de una partícula moviéndose en una dimensión bajo la acción de un potencial  $U(x)$ , como se muestra en [3], la ecuación es

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (2.1.1)$$

o bien, en forma de ecuaciones de primer orden,  $\dot{x} = v$ ,  $\dot{v} = F/m$ . La energía total

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \quad (2.1.2)$$

es una constante del movimiento, por lo que las trayectorias en el espacio de fase son las curvas de nivel de la función  $E(x, v)$ .

Resulta conveniente utilizar el momento  $p = mv$  en vez de la velocidad. El Hamiltoniano se escribe entonces

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad (2.1.3)$$

y las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.1.4)$$

Así escritas, se llaman ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas. A primera vista puede parecer que solo se ha hecho un sencillo cambio de variables, sin muchas

consecuencias. Pero, lejos de ser así, la formulación Hamiltoniano de la mecánica tiene una gran elegancia y ofrece una visión profunda sobre la evolución de los sistemas. El campo vectorial en el espacio de fases  $(x, p)$  correspondiente a (2.1.4) es

$$\mathbf{u}(x, p) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (2.1.5)$$

Para fijar ideas, se considera el sistema de la masa en la gravedad terrestre. El Hamiltoniano y el vector  $\mathbf{u}$  están dados por

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgx, \quad \mathbf{u} = \left( \frac{p}{m}, -mg \right) \quad (2.1.6)$$

Las consideraciones anteriores son igualmente válidas para cualquier sistema conservativo de un grado de libertad.

En el caso de  $n$  grados de libertad, en el formalismo Hamiltoniano usa como  $2n$  variables las  $n$  coordenadas  $q_k$  y sus  $n$  momentos conjugados  $p_k$  en vez de las  $q_k$  y las  $\dot{q}_k$ , teniendo en cuenta que la relación entre velocidades y momentos está dada por. Al hacerlo así, las derivadas parciales respecto a una  $q$  o una  $p$  deben entenderse manteniendo constantes las otras  $2n - 1$  cantidades. Si lo consideramos ahora el Hamiltoniano como función de  $q, p, t$ ,  $H = H(q, p, t)$ .

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad (2.1.6a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad (2.1.6b)$$

donde se ha hecho uso de las ecuaciones de Lagrange. Nótese como al calcular las derivadas de  $H$  respecto a  $q_k$  y  $p_k$  se consideran constantes las otras  $2n - 1$  y se toma  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p)$ .

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.1.7)$$

que son las ecuaciones canónicas o de Hamilton para  $n$  grados de libertad. Son equivalentes a las de Lagrange y se puede pasar de las unas a las otras, pero ofrecen dos perspectivas diferentes de la evolución de un sistema mecánico.

Consideremos ahora la derivada de  $H$  a lo largo de la trayectoria

$$\dot{H} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.1.8)$$

lo que indica que  $H$  se conserva si no depende explícitamente del tiempo, cosa que ocurre cuando  $L$  tiene la misma propiedad. A pesar de que sus argumentos son funciones del tiempo  $q_k(t)$ ,  $p_k(t)$ , sus variaciones se compensan de tal forma que la derivada total respecto al tiempo de  $H$  se debe únicamente a su dependencia explícita. Lo mismo que un grado de libertad,  $H$  determina completamente la evolución del sistema, pues sus derivadas respecto a  $q_k$  y  $p_k$  fijan completamente las de estas variables respecto al tiempo. Una forma elegante de expresar esta idea es escribir (2.1.7) en la forma

$$\dot{x}_k = u_k(x, t), \quad k = 1, \dots, m$$

con  $m = 2n$  y

$$(x_1, \dots, x_m) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \quad (2.1.9)$$

$$(u_1, \dots, u_m) = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \quad (2.1.10)$$

El vector  $\mathbf{u}$  es la velocidad del punto representativo del sistema en el espacio de fase y, se obtiene girando el gradiente de  $H$   $\pi/2$  en sentido horario en cada plano  $(q_k, p_k)$ . Por todo eso, se dice que  $H$  es el generador de la evolución temporal, ya que su gradiente indica como se mueve el sistema en el espacio de fase, lo que explica la importancia de la función Hamiltoniana.

## 2.2. Corchetes de Poisson

Sea  $F = (q_i, p_i, t)$  cualquier variable dinámica de un sistema representado por las variables conjugadas  $q_i, p_i$  [21]. Entonces:

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

A partir de las ecuaciones canónicas de Hamilton se puede obtener:

$$\dot{F} = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.2.2)$$

La expresión  $\sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$  resulta ser muy significativo en el ámbito formal de la mecánica y es llamado el corchete de Poisson de  $F$  y  $H$ . En general, el corchete de Poisson de cualesquiera variables  $X$  y  $Y$  es definido como:

$$[X, Y] = \sum_i \left( \frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} \right) \quad (2.2.3)$$

El concepto no resuelve completamente el problema para las ecuaciones de movimiento de un sistema, pero es útil para discutir las constantes de movimiento. Esto conduce a un formalismo re-interpretado según un sencillo procedimiento, forma una conveniente manera de introducir reglas cuánticas en el desarrollo de Heisenberg de mecánica cuántica.

Las siguientes identidades se derivan inmediatamente de la definición:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X] \\ [X, X] &= 0 \\ [X, Y + Z] &= [X, Y] + [X, Z] \\ [X, YZ] &= Y[X, Z] + [X, Y]Z \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

también

$$\begin{aligned} [q_i, q_i] &= 0 = [p_i, p_j]_{q,p} \\ [q_i, p_i]_{q,p} &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

donde  $\delta_{ij}$  es el para delta con la propiedad

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 0 \quad i \neq j \\ \delta_{ij} &= 1 \quad i = j \end{aligned}$$

### 2.2.1. Momento Angular

Los componentes del momento angular se han identificado con componentes del momento generalizados en casos particulares [21][24]. En general, el momento conjugado con cualquier coordenada angular se puede identificar de esta manera en un sistema mecánico simple donde, por ejemplo, no están presentes efectos electromagnéticos. Para investigar el corchete de Poisson de dos componentes del momento angular se considera una partícula referida a un sistema de coordenadas cartesianas, los componentes del momento angular vienen dados por:

$$l_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2 \quad l_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3 \quad l_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 \tag{2.2.6}$$

donde  $p_i = m\dot{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Evaluando el corchete de Poisson se obtiene:

$$[l_1, l_2] = (p_2 x_1 - p_1 x_2) = l_3 \tag{2.2.7}$$

Se pueden obtener resultados similares de otras combinaciones y se resumen en la siguiente expresión:

$$[l_i, l_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} l_k \quad (2.2.8)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  corresponde al símbolo de Levi-Civita.

La implicación de (2.2.8) es que no hay dos componentes del momento angular que puedan actuar simultáneamente como momentos conjugados.

Se considera ahora  $[l_i, l^2]$ , donde  $l^2$  es el cuadrado total del momento angular. Y usando las identidades (2.2.5) y (2.2.8):

$$[l_i, l^2] = [l_i, \sum_j l_j^2] = \sum_j [l_i, l_j^2] = \sum_j \{2l_j [l_i, l_j]\} = \sum_{j,k} 2l_j \epsilon_{ijk} l_k = 0 \quad (2.2.9)$$

Esto es  $l^2$  y cualquier componente de  $l$  puede considerarse simultáneamente como momentos conjugados. Otros resultados con significado similar son:

$$[x_i, l_i] = \sum_k \epsilon_{ijk} x_k \quad [p_i, l_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} p_k \quad (2.2.10)$$

donde las  $p$ 's en este caso todavía denotan componentes cartesianas de momento lineal.

### 2.2.2. Constantes de movimiento

Ya se ha enfatizado que para algunos propósitos la solución de un problema puede considerarse logrado identificando las constantes de movimiento. Reescribiendo (2.2.2) en notación de los corchetes de Poisson, se observa que la variación temporal de cualquier variable dinámica  $F$  está dada por

$$\dot{F} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.2.11)$$

Esto muestra que si la variable no contiene el tiempo explícitamente es suficiente para el corchete de Poisson con  $H$  desaparezca para que sea una constante de movimiento. Este resultado es independiente de si  $H$  en sí es una constante de movimiento y proporciona un medio útil para identificar constantes de movimiento.

A continuación se presentan algunos casos especiales de (2.2.2):

$$\dot{q}_i = [q_i, H] \quad \dot{p}_i = [p_i, H] \quad (2.2.12)$$



estos son idénticos a las ecuaciones canónicas de Hamilton y podrían ser referidos como las ecuaciones de movimiento en la forma de corchetes de Poisson.

Y otro caso especial es:

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.2.13)$$

Esta relación también ha aparecido anteriormente.

## 2.3. Orbitas de Kepler

¿Cuál es la órbita de una partícula que se mueve en un campo de fuerza central en el que la fuerza centrípeta varía inversamente con el cuadrado de la distancia?. La respuesta se conoce desde los tiempos de Newton (1687), quien descubrió que existen tres tipos de órbitas: elipses, parábolas e hipérbolas [25][30]. De hecho, en 1687 Newton ya conocía la Primera ley de Kepler (1609) sobre las órbitas elípticas de los planetas [8]. Para dar cuenta de este tipo de órbitas, Newton asumió la fuerza de atracción central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia radial.

$$-\frac{\alpha}{r^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad (2.3.1)$$

donde  $\alpha$  es la constante gravitacional y  $\theta$  es el ángulo azimutal. El primer término del lado derecho es la aceleración radial, el segundo término representa la aceleración centrípeta necesaria para mantener la partícula en una órbita circular de radio  $r$ . La ecuación de la componente tangencial viene dada por la ley de conservación del momento angular [26].

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} = \beta. \quad (2.3.2)$$

Esto es equivalente a la segunda ley de Kepler (1609) indicando que el radio vector cubre áreas iguales en tiempos iguales.

Reordenando (2.3.2) en la forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\beta}{r^2}, \quad (2.3.3)$$

y señalando que

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr}. \quad (2.3.4)$$

entonces es posible reescribir (2.3.2) de la forma

$$\frac{d\theta}{dt} = -\beta \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} . \quad (2.3.5)$$

de (2.3.5), se puede obtener la siguiente expresión para la velocidad radial

$$\frac{dr}{dt} = -\beta \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} . \quad (2.3.6)$$

Para obtener la aceleración radial, primero hay que observar que (2.3.6) se puede escribir como

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\beta}{r^2} \frac{dr}{d\theta} . \quad (2.3.7)$$

Por tanto, se obtiene la siguiente relación que puede aplicarse a la función para la distancia radial

$$\frac{d}{dt} = \frac{\beta}{r^2} \frac{d}{d\theta} . \quad (2.3.8)$$

Entonces la aceleración radial puede calcularse de la siguiente forma

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\beta}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{\beta}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\beta}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{2\beta^2}{r^5} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{\beta^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2} \approx \frac{\beta^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2} , \quad (2.3.9)$$

donde el primer término del lado derecho es descartado debido a que  $O(r^{-1})$  con respecto al segundo término, sobre todo el contexto de la mecánica celeste.

Usando (2.3.9), se puede convertir (2.3.1) en la forma

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} , \quad (2.3.10)$$

con solución

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - e \cos \theta) , \quad (2.3.11)$$

que es la ecuación de la sección cónica. Para  $e < 1$ , que corresponde a la ecuación en coordenadas polares de la elipse. Y en efecto, es sabido que en el caso de la elipse, el módulo de la distancia de un punto de la elipse al foco es dado por

$$|z|_{1,2} = r_{1,2} = a \pm c \cos u \quad (2.3.12)$$

y el azimut focal es

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{a \cos u + c}{a + c \cos u} . \quad (2.3.13)$$

Eliminando el parámetro  $u$  de las últimas dos ecuaciones (trabajando con  $r_1$ ), se puede encontrar que la ecuación polar de la elipse es dada por

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 - e \cos \theta) . \quad (2.3.14)$$

Entonces, se obtiene la elipse celeste si se selecciona  $p = \beta^2/\alpha$  y  $e < 1$ , pero también se obtienen parábolas si se selecciona  $e = 1$ .

## 2.4. Vector Runge - Lenz

El problema de Kepler [2][8] contiene otro vector adicional conservativo, además del momento angular. Para una fuerza central, la segunda Ley de Newton de movimiento puede ser escrita vectorialmente por:

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.4.1)$$

El producto cruz de  $\dot{\mathbf{p}}$  con el vector del momento angular  $\mathbf{L}$  entonces puede expandirse como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \\ &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}] \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

La ecuación (2.4.2) puede simplificarse aún más teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\dot{r}$$

(que también se puede interpretar como, la componente de la velocidad en la dirección radial es  $\dot{r}$ ). Como  $\mathbf{L}$  es constante, la ecuación (2.4.2) puede también ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right)$$

que también puede ser

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.4.3)$$

Sin especificar el término  $f(r)$ , no se puede llegar muy lejos. Pero la ecuación (2.4.3) puede integrarse inmediatamente si  $f(r)$  es inversamente proporcional a  $r^2$  del problema de Kepler. Reescribiendo  $f(r)$  en:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mk\mathbf{r}}{r}\right)$$

que dice que para el problema de Kepler existe un vector conservativo  $\mathbf{A}$  definido por

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.4.4)$$

De la definición de  $\mathbf{A}$ , se observa que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0 \quad (2.4.5)$$

como  $\mathbf{L}$  es perpendicular a  $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$  y  $\mathbf{r}$  es perpendicular a  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . De esta ortogonalidad de  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{L}$  que  $\mathbf{A}$  debe ser algún vector fijo en el plano de la órbita. Si  $\theta$  es usado para denotar el ángulo entre  $\mathbf{r}$  y la dirección fija de  $\mathbf{A}$ , entonces el producto punto de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{A}$  es dado por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mkr \quad (2.4.6)$$

Ahora, desarrollando los términos en el triple producto punto, tenemos

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = l^2$$

así que la ecuación (2.4.6) se convierte en

$$Ar \cos \theta = l^2 - mkr$$

o también

$$\frac{l}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta\right) \quad (2.4.7)$$

El vector Runge-Lenz, por tanto, provee otra forma de derivar la ecuación de órbita del problema de Kepler. Comparando la ecuación (2.4.7) con la ecuación de la órbita de la ecuación (2.4.7a) muestra que  $\mathbf{A}$  está en la dirección del vector de radio del perihelio en la órbita y tiene una magnitud

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta')\right) \quad (2.4.7a)$$

$$\mathbf{A} = m\mathbf{k}\mathbf{e} \quad (2.4.8)$$

Para el problema de Kepler se tienen identificadas dos constantes de movimiento vectoriales,  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{A}$ , y un escalar  $E$ . Dado que un vector debe tener todas sus tres componentes independientes, esto corresponde a siete cantidades conservadas en total.

Ahora, un sistema como este con tres grados de libertad tiene seis constantes independientes del movimiento, correspondientes, a los tres componentes de la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula.

Más aún, las constantes de movimiento se pueden encontrar en todas las funciones algebraicas de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  que describe la órbita como un todo (orientación en el espacio, excentricidad), ninguna de estas siete cantidades conservadas describe donde está localizada la partícula en la orbital en un tiempo inicial. Ya que una constante de movimiento debe describir esta información, en la forma de  $T$ , el tiempo de paso del perihelio, solo puede haber cinco constantes independientes de movimiento describiendo el tamaño, forma y la orientación de la órbita.

Se puede entonces concluir que no todas las cantidades componiendo  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{E}$  pueden ser independientes, debe haber dos relaciones conectando con estas cantidades. Una de esas relaciones ya se ha obtenido como una relación como la ortogonalidad de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{L}$ , ecuación (2.4.5). La otra relación se presenta como la ecuación (2.4.8) cuando la excentricidad es expresada en términos de  $E$  y  $\ell$  de la ecuación (2.4.8a), dada por

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \quad (2.4.8a)$$

$$A^2 = m^2k^2 + 2mEl^2 \quad (2.4.9)$$

esto confirma que solo hay cinco constantes de movimiento en vez de siete.

El vector de momento angular y la energía por sí solas contienen solo cuatro constantes independientes de movimiento: el vector Runge-Lenz de este modo agrega una más. Es natural preguntar por qué no debería existir para cualquier ley general de fuerza central alguna cantidad conservada que juntos con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{E}$  sirva para definir la órbita en una manera similar al vector Runge-Lenz para el caso especial del problema de Kepler.

La respuesta parece ser que tales cantidades conservadas pueden construirse, pero que ellas son en general funciones peculiares del movimiento. Las constantes de movimiento describen a la órbita entre ellas definen la órbita. Hemos visto que en órbitas generales para un movimiento de fuerza central no son cerradas.

Las órbitas cerradas implican condiciones bastante estrictas sobre la forma de la ley

de fuerza. Es una propiedad de órbitas no cerradas que la curva eventualmente pasara a través de cualquier punto arbitrario  $(r, \theta)$  que se encuentra entre los límites de inflexión de  $r$ .

Intuitivamente, este puede ser visto por la naturaleza no cerrada de la órbita, como  $\theta$  va alrededor de un círculo completo, la partícula nunca debe volver sobre sus pasos en una órbita previa. Por tanto, la ecuación de la órbita es tal que  $r$  es una función multi evaluada de  $\theta$ ; en realidad, es una función infinita evaluada de  $\theta$ .

La cantidad conservada correspondiente adicional a  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{E}$  definiendo la órbita debe involucrar de manera similar una función infinita valuada del movimiento de partículas. Suponga la variable  $\mathbf{r}$  es periódica con frecuencia angular  $\omega_r$  y la coordenada angular  $\theta$  es periódica con frecuencia angular  $\omega_\theta$ . Si estas dos frecuencias tiene un radio  $(\omega_r/\omega_\theta)$  que es un entero o una fracción entera, se dice que los periodos son proporcionales.

Órbitas proporcionales son cerradas con la masa en órbita se retrae continuamente en su trayectoria. Cuando  $\omega_\theta > \omega_r$  la órbita será una espiral sobre el origen, ya que la distancia varía entre los valores absidales, cerrándose solo si las frecuencias son proporcionales.

Sí, como en el problema de Kepler  $\omega_\theta = \omega_r$ , el periodo entonces se dice que es degenerado. Si la órbita es degenerada, existe una cantidad conservada adicional que es una función algebraica de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  como el vector Runge-Lenz.

## 2.5. Superintegrabilidad

Son sistemas integrables, aquellos sistemas cuya ecuación del movimiento es reducible a cuadraturas, lo que significa que su solución general puede encontrarse realizando un número finito de integraciones y de inversiones de funciones. Algunos sistemas de este tipo, son todos los lineales, todos los conservativos con un grado de libertad, una partícula sometida a un potencial central en dos o tres dimensiones y el trompo de Lagrange, es decir, un sólido simétrico con un punto fijo y sometido a la gravedad.

Conviene subrayar dos cuestiones. Primeramente, la solución de un problema integrable se puede obtener mediante un conjunto finito de operaciones. En segundo lugar, a menudo no es fácil poder afirmar que un problema no es integrable, porque no conocer un método de reducción a cuadraturas no significa que no existe. Quizás si lo haya, pero, para encontrarlo, sea necesario dedicar más tiempo o más ingenio a su búsqueda. Sin embargo, podemos afirmar que existen sistemas que no son integra-

bles. Y no solo eso, sino que para que uno lo sea debe haber alguna buena razón (por ejemplo, que su Hamiltoniano o su Hagrangiano tengan alguna propiedad especial. En cierto sentido, lo genérico son los no integrables.

### 2.5.1. Dos tipos de comportamiento

La división de los sistemas dinámicos en esas dos clases es importante y refleja diferencias profundas en la estructura de las soluciones. En efecto, hay dos tipos de comportamientos.

(a) En algunos casos es posible encontrar la solución general de un problema, bien de manera exacta, bien con un margen de precisión  $\epsilon$  en todas las variables para todo tiempo  $t$ , es decir, tal que  $\|x_k(t) - x_k^*(t)\| < \epsilon$ , siendo  $x_k^*(t)$  la solución exacta, mediante un número de operaciones que no depende de  $t$ . En otras palabras; el esfuerzo para encontrar la solución no del tiempo. Es fácil comprender que así ocurre, por ejemplo, en el oscilador armónico o en el problema de los dos cuerpos.

(b) El comportamiento de otros sistemas es muy diferente, pues, para ellos, no existe ningún algoritmo finito que de la solución para todo  $t$ . En todos los métodos que existen, la cantidad de operaciones  $N(t)$  que hay que realizar para encontrar la solución en el tiempo  $t$  con precisión  $\epsilon$  crece más deprisa que  $t$ . Es decir que, si  $t \rightarrow \infty$ ,  $\lim N(t)/t = \infty$ . Esto ocurre cuando la inestabilidad juega un papel importante, de modo que mantener una precisión  $\epsilon$  cuesta cada vez más esfuerzo, en término de operaciones matemáticas.

Para entender como y porque  $N(t)$  puede crecer tan deprisa, consideremos dos métodos frecuentes de solución: el desarrollo en serie de un parámetro y el cálculo numérico. En el primero, que tan importante papel ha jugado en el establecimiento de la mecánica celeste, ocurre a veces que el número de términos que es necesario emplear para alcanzar una precisión  $\epsilon$  crece con  $t$ , pero más deprisa que  $t$ . Cualquier suma parcial de la serie pierde su operatividad al cabo de un cierto tiempo. Se toma ahora la resolución numérica de las ecuaciones. Si hay inestabilidad, de modo que los errores se amplifiquen, llega a suceder que, para mantener la precisión  $\epsilon$ , es necesario hacer cada vez más operaciones por unidad de tiempo, bien disminuyendo el paso de integración, bien pasando a esquemas numéricos más complejos.

Se definen como comportamiento regular y comportamiento irregular a estos dos

tipos que se corresponden con las clasificaciones de los sistemas en integrables y no integrables. Sin embargo, los integrables pueden tener y tienen soluciones inestables y que los no integrables pueden tener y tienen soluciones estables. La diferencia está realmente en la proporción de soluciones inestables y en la virulencia de la inestabilidad.

### 2.5.2. El papel de las contantes de movimiento

La existencia de constantes de movimiento facilita en gran medida la resolución de un problema. Así, todos los sistemas conservativos de un grado de libertad pueden resolverse gracias a la integral de la energía, en el caso de una partícula en un potencial central juega un papel decisivo la conservación del momento angular, mientras que se llega a la solución de las ecuaciones del trompo de Lagrange combinado la constancia de la energía con las de los momentos conjugados a los ángulos  $\phi$  y  $\psi$ . Conviene, por tanto, examinar el papel que juegan esas constantes. Y para ellos se anuncia el siguiente teorema.

#### Teorema

Un sistema dinámico de orden  $m$  tiene exactamente  $m$  integrales primeras independientes entre sí.

Prueba:

Sea el sistema  $\dot{x}_k = u_k(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . La solución general tiene la forma

$$x_k = f_k(t; t_0, x_{10}, \dots, x_{m0}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5.1)$$

donde se indica la dependencia de los datos iniciales  $x_{k0} = x_k(t_0)$  y del tiempo inicial  $t_0$ . Quizás la función  $f$  sea de gran complejidad y desconocida, pero se sabe que existe, bajo condiciones muy generales sobre  $u_k$ . Es evidente que, considerando ahora a  $x_k(t)$  como datos de Cauchy en el tiempo inicial  $t$  y a  $t_0$  como tiempo actual, se cumple

$$x_{k0} = f_k(t_0; t, x_1(t), \dots, x_m(t)), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5.2)$$

Las ecuaciones (2.5.2) son la expresión de  $m$  integrales primeras, ya que  $m$  funciones de  $t$  y de  $x_k(t)$  se mantienen constantemente igual a  $x_{k0}$ . Hay, pues,  $m$  constantes independientes al menos. Enseguida se muestra porque no puede haber más. Se



comienza si hubiera otra  $A(x(t))$ ,  $t = a$ .

Sustituyendo (2.5.1), resulta  $A(x(t), t) = B(x_0, t) = \text{const}$  y, derivando respecto a  $t$ ,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.5.3)$$

lo que dice que  $B$  no depende de  $t$ , luego  $B = B(x_0)$  es una función de  $x_{k0}$  y no es independiente de ellas. Por tanto, hay  $m$  constantes independientes, ni más ni menos. Recuérdese que si el sistema es Newtoniano con  $n$  libertades,  $m = 2n$ . En general, consideraremos conjuntos de  $m$  constantes  $C_k(x, t)$ , independientes entre sí. Naturalmente, debe de ser funciones de las  $x_{k0}$ .

De esta propiedad parece deducirse que, si se conoce un conjunto de  $m$  constantes del movimiento, independientes entre sí, la solución del problema es inmediata. Pues, sean  $C_1, \dots, C_m$  constantes

$$C_k(x, t) = c_k, \quad K = 1, 2, \dots, m \quad (2.5.4)$$

Entre ellas, una al menos debe depender explícitamente del tiempo, pues, de no ser así, (2.5.4) implicaría que las coordenadas pueden tomar solo un conjunto discreto de valores (quizás uno solo) y no habría movimiento. En principio, y puesto que las  $C_k$  son funcionalmente independientes, se pueden invertir, obteniéndose así

$$x_k = x_k(t; c_1, \dots, c_m) \quad (2.5.5)$$

que es la solución general del sistema, dependiente de  $m$  constantes de integración. Este procedimiento índico la íntima relación que hay entre las constantes del movimiento y la solución de un problema. Se entiende mejor eliminado el tiempo en (2.5.4) con lo que se obtienen  $m - 1$  variables dinámicas que no dependen explícitamente del tiempo y que son constantes a lo largo de cada trayectoria, es decir,  $m - 1$  cantidades conservadas.

$$A_k(x) = a_k; \quad k = 1, \dots, m - 1 \quad (2.5.6)$$

La interpretación geométrica es simple, pues cada una de esas ecuaciones es la de una hipersuperficie de dimensión,  $m - 1$  es el espacio de fases de dimensión  $m$ . Por lo tanto, las  $m - 1$  ecuaciones (2.5.6) definen la trayectoria del sistema, de la misma manera que una curva en tres dimensiones es la intersección de dos superficies bidimensionales. Para conocer en que momento del tiempo pasa por cada punto basta con añadir una de las constantes  $C_k$  que depende efectivamente de  $t$ . Se entiende así como el conocimiento de una las constantes del movimiento independiente del tiempo permite eliminar una dimensión y rebajar en uno el orden del sistema dinámico simplificando la solución del problema.

## 2.6. Problema de fuerza central

### 2.6.1. Ecuaciones de movimiento y primeras integrales

Es necesario comenzar señalando que el problema se concentra en las fuerzas centrales conservativas, donde el potencial está dado por  $V(r)$ , una función de  $r$  únicamente, de modo que la fuerza siempre está a lo largo de  $\mathbf{r}$ . También se considera que el problema trata sobre una sola partícula de masa reducida  $m$  que se mueve alrededor de un centro de fuerza estático, que se tomará como origen del sistema de coordenadas. Dado que la energía potencial involucra solo la distancia radial, el problema tiene simetría esférica; es decir, cualquier rotación, sobre cualquier eje fijo, no puede tener ningún efecto sobre la solución. Por lo tanto, una coordenada de ángulo que representa la rotación alrededor de un eje fijo debe ser cíclica. Estas propiedades de simetría dan como resultado una considerable simplificación del problema. Como el problema es esféricamente simétrico, el momento angular total vector es

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

se conserva [28]. Por tanto, se deduce que  $\mathbf{r}$  es siempre perpendicular a la dirección fija de  $\mathbf{L}$  en el espacio. Esto solo puede ser cierto si  $\mathbf{r}$  siempre se encuentra en un plano cuya normal es paralelo a  $\mathbf{L}$ . Si bien este razonamiento se rompe si  $\mathbf{L}$  es cero, el movimiento en ese caso debe ser a lo largo de una línea recta que pasa por el centro de fuerza, para  $\mathbf{L} = 0$ . Requiere que  $\mathbf{r}$  sea paralelo a  $\dot{\mathbf{r}}$ , lo cual solo puede satisfacerse en un movimiento rectilíneo. Por tanto, el movimiento de la fuerza central es siempre un movimiento en un plano.

Ahora bien, el movimiento de una sola partícula en el espacio se describe mediante tres coordenadas; en coordenadas polares esféricas estos son el ángulo de acimut  $\theta$ , el cenit  $\psi$ , y la distancia radial  $r$ . Al elegir el eje polar que será en la dirección de  $\mathbf{L}$ , el movimiento es siempre en el plano perpendicular al eje polar. La coordenada  $\psi$  entonces solo tiene el valor constante  $\pi/2$  y puede eliminarse de la discusión posterior. La conservación del vector del momento angular, proporciona tres constantes de movimiento independientes (correspondientes a las tres componentes cartesianas). En efecto, dos de ellos, expresando la dirección constante del momento angular, se han utilizado para reducir el problema de tres a dos grados de libertad. La tercera de estas constantes, correspondiente a la conservación de la magnitud de  $\mathbf{L}$ , todavía está a nuestra disposición para completar la solución. Expresado ahora en coordenadas polares planas, el lagrangiano es

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \quad (2.6.1)$$

Como se había previsto,  $\theta$  es una coordenada cíclica, cuyo correspondiente momento canónico es el momento angular del sistema:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

Entonces, una de las dos ecuaciones de movimiento es simplemente

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (2.6.2)$$

con la integral inmediata

$$mr^2\dot{\theta} = l \quad (2.6.3)$$

donde  $l$  es la constante de magnitud del momento angular, y a partir de (2.6.2) se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad (2.6.4)$$

El factor  $\frac{1}{2}$  es insertado porque  $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$  es solo la velocidad área: el área barrida por el radio vector por unidad de tiempo. El área diferencial barrida en el tiempo  $dt$  es

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta)$$

y por tanto

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

La conservación del momento angular es, por tanto, equivalente a decir que el área de la velocidad es constante. Aquí tenemos la prueba de la segunda ley de Kepler. Ley del movimiento planetario: El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Sin embargo, se debe enfatizar que la conservación de la velocidad área es una propiedad general del movimiento de la fuerza central y no está restringida a una ley de fuerza de cuadrado inverso. La ecuación de Lagrange restante, para la coordenada  $r$ , es

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (2.6.5)$$

Designando el valor de la fuerza a lo largo de  $\mathbf{r}$ ,  $-\partial V/\partial r$ , por  $f(r)$  la ecuación puede ser reescrita como

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \quad (2.6.6)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.6.3),  $\dot{\theta}$ , puede ser eliminado de la ecuación de movimiento produciendo una ecuación diferencial de segundo orden que involucra solo a  $r$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \quad (2.6.7)$$

Hay otra primera integral de movimiento disponible, la energía total, ya que las fuerzas son conservativas. Sobre la base del teorema de conservación general de la energía, podemos afirmar inmediatamente que una constante del movimiento es

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \quad (2.6.8)$$

donde  $E$  es la energía del sistema. Alternativamente, esta primera integral puede ser derivada nuevamente de las ecuaciones de movimiento (2.6.2) y (2.6.7). Entonces se puede escribir como

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right) \quad (2.6.9)$$

Si ambos lados de la ecuación (2.6.9) son multiplicados por  $\dot{r}$ , el lado izquierdo ahora es

$$m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)$$

El lado derecho similarmente puede ser escrito como una derivada total del tiempo, si  $g(r)$  cualquier función de  $r$ , entonces la derivada total del tiempo de  $g$  es

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}$$

Por tanto, la ecuación (2.6.9) es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)$$

o bien

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right) = 0$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} = \text{constante} \quad (2.6.10)$$

La ecuación (2.6.10) es la declaración total de la energía, y usando (2.6.6) para  $l$ , el término del lado izquierdo puede ser escrito

$$\frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2}m^2r^4\dot{\theta}^2 = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2}$$

y (2.6.10) se reduce a (2.6.4). Estas dos primeras integrales proporcionan dos de las cuadraturas necesarias para completar el problema. Como hay dos variables,  $r$  y  $\theta$ , se necesitan un total de cuatro integraciones para resolver las ecuaciones de movimiento. Las dos primeras integraciones han dejado las ecuaciones de Lagrange como dos ecuaciones de primer orden (2.6.3) y (2.6.10); las dos integraciones restantes se pueden lograr (formalmente) de diversas maneras. Quizás el procedimiento más simple comience con la Ec. (2.6.10). Resolviendo para  $\dot{r}$ , tenemos

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V - \frac{l^2}{2mr^2})} \quad (2.6.11)$$

o bien

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V - \frac{l^2}{2mr^2})}} \quad (2.6.12)$$

En  $t = 0$ , para  $r$  en su valor inicial  $r_0$ . Entonces la integral de ambos lados de la ecuación que va del estado inicial al estado en el momento  $t$  toma la forma.

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V - \frac{l^2}{2mr^2})}} \quad (2.6.13)$$

Tal como está, la ecuación (2.6.13) da  $t$  como función de  $r$  y las constantes de integración  $E$ ,  $l$  y  $r_0$ . Sin embargo, se puede invertir, al menos formalmente, para dar  $r$  como función de  $t$  y las constantes. Una vez que se encuentra la solución para  $r$ , la solución  $\theta$  se desprende inmediatamente de la ecuación. (2.6.3), que puede escribirse como

$$d\theta = \frac{l dt}{mr^2} \quad (2.6.14)$$

Si el valor inicial de  $\theta$  es  $\theta_0$ , entonces la integral de (2.6.14) es

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0 \quad (2.6.15)$$

Las ecuaciones (2.6.13) y (2.6.15) son las dos integraciones restantes, y formalmente el problema se ha reducido a cuadraturas (evaluación de integrales), con cuatro constantes de integración  $E$ ,  $l$ ,  $r_0$ ,  $\theta_0$ . Estas constantes no son las únicas que pueden considerarse. También se pudo haber tomado  $r_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\dot{r}_0$ ,  $\dot{\theta}_0$ , pero por supuesto,  $E$  y  $l$  siempre se pueden determinar en términos de este conjunto. Sin embargo, para muchas aplicaciones, el conjunto que contiene la energía y el momento angular es

el natural. En mecánica cuántica, constantes como los valores iniciales de  $r$  y  $\theta$ , o de  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$ , pierden su significado, pero aún podemos hablar en términos del sistema energía o del momento angular del sistema. De hecho, dos diferencias destacadas entre la mecánica clásica y la cuántica aparecen en las propiedades de  $E$  y  $l$  en las dos teorías. Para discutir la transición a las teorías cuánticas es importante que la descripción clásica del sistema sea en términos de su energía y momento angular.

# Capítulo 3

## Orbitas elípticas

### 3.1. Introducción

La constante interrogación sobre la regularidad y la elegancia geométrica de los movimientos celestes ha impulsado la investigación fundamental desde la antigüedad. Se plantea la cuestión central sobre la naturaleza de la fuerza invisible que determina el retorno periódico de los cometas. Asimismo, en el ámbito de la ingeniería aeroespacial contemporánea, es crucial establecer las condiciones de estabilidad e inmutabilidad que deben satisfacer las trayectorias satelitales en el campo gravitatorio terrestre. La solución a esta tríada de problemas reside en los principios invariantes de la Geometría Dinámica y el formalismo de la Mecánica Clásica. Es un principio de la Mecánica Analítica que los sistemas físicos acotados, sujetos a la influencia de fuerzas centrales (planetas, satélites, cometas de periodo corto), describen una trayectoria en el espacio de fases que se caracteriza por la ausencia de puntos de inicio y fin bien definidos, configurando una órbita intrínsecamente cerrada y recurrente.

Como una elegante nota a pie de página en la historia de la física se puede apreciar que Joseph Bertrand, un epítome del pensamiento racionalista, lograra articular y redescubrir la profunda simetría inherente a las leyes gravitacionales newtonianas. En la rigurosa terminología de la Mecánica Analítica del siglo XX, la conclusión es lapidaria: solamente las órbitas elípticas poseen la capacidad de admitir las denominadas simetrías ocultas (o vectores de Runge-Lenz) cuando el movimiento está gobernado por un campo de fuerza central emanado de un único centro de atracción físico.

### 3.2. El Teorema de Bertrand como Condición Necesaria y Suficiente para la Cerrazón Universal

“Dentro del dominio exhaustivo de las posibles leyes de atracción de fuerzas centrales cuyo potencial asociado se anula asintóticamente al tender la distancia radial al infinito, la ley de la inversa del cuadrado ( $F \propto r^{-2}$ ), característica de la interacción gravitatoria y electrostática, es la única que garantiza matemáticamente que la totalidad de las órbitas acotadas descritas alrededor de un centro de atracción estacionario sean rigurosamente cerradas y estables. Si bien formulaciones alternativas de la ley de fuerza podrían *admitir* la existencia ocasional de órbitas cerradas [20] para un subconjunto específico de condiciones iniciales, solo la ley de gravitación las *impone* como el único resultado posible para cualquier movimiento acotado y periódico.”

#### Conservación y Reducción Dimensional Mediante el Potencial Efectivo

Para abordar el análisis formal de las trayectorias en presencia de potenciales centrales, es imperativo establecer los principios de conservación. La otra fuerza central cuyas órbitas acotadas resultan elípticas [25][29] es la fuerza elástica, definida por la ley de Hooke ( $F \propto r$ ). Su potencial asociado,  $V(r) \propto r^2$ , difiere del potencial gravitatorio en la condición asintótica de anulación al infinito, asegurando su compatibilidad con el Teorema de Bertrand. El cuestionamiento se reformula, por ende: ¿Existe alguna otra ley de potencial central que satisfaga estas condiciones de estabilidad? Como se describe en [4], el Teorema de Bertrand establece que no.

El fundamento de este resultado radica en la invariancia de dos cantidades fundamentales. Para cualquier potencial central  $V(r)$ , se conservan dos magnitudes escalares:

1. El Momento Angular ( $\mathbf{L}$ ): Se mantiene constante debido a que una fuerza central no produce torque ( $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ ).

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{constante}$$

2. La Energía Mecánica Total ( $E$ ): Su conservación es inherente al carácter conservativo de la fuerza central, dependiente únicamente del radio  $r$ .

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + V(r) = \text{constante}$$



La constancia del vector  $\mathbf{L}$  implica consecuencias geométricas y cinéticas directas: (i) La orientación espacial inmutable de  $\mathbf{L}$  restringe a los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$  a un plano perpendicular a  $\mathbf{L}$ . Esto justifica la selección de coordenadas polares  $(r, \theta)$  en el plano de la órbita, donde la coordenada vertical  $z$  es ignorable. (ii) La magnitud del momento angular en coordenadas polares se relaciona con la velocidad angular  $\dot{\theta}$ :

$$L = \|\mathbf{L}\| = mr^2\dot{\theta}$$

La energía cinética total  $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$  se descompone en las energías asociadas al movimiento radial y al movimiento angular. En coordenadas polares, la velocidad  $\mathbf{v}$  es  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$ , donde  $\mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{u}_\theta$  son los vectores unitarios.

$$T = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Al sustituir la expresión para  $\dot{\theta}$  derivada de la conservación del momento angular  $L$ :

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

En la formulación de la energía total ( $E = T + V(r)$ ), se obtiene la Ecuación de Energía Radial:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) + V(r)$$

Esta formulación facilita la reducción del problema a un único grado de libertad ( $r$ ) mediante la introducción del Potencial Efectivo  $V_{\text{ef}}(r)$ :

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \left(\frac{L^2}{2mr^2}\right)$$

donde el término  $\frac{L^2}{2mr^2}$  representa el Potencial Centrífugo de carácter repulsivo, esencialmente un término de energía potencial generado por el movimiento angular.

El escenario prototípico ocurre cuando el potencial centrífugo prevalece en el entorno del origen ( $r \rightarrow 0$ ) y es contrarrestado por el potencial atractivo  $V(r)$  a grandes distancias ( $r \rightarrow \infty$ ). Si la energía  $E$  y el momento angular  $L$  se seleccionan para coincidir con el mínimo del potencial efectivo, la órbita resultante es un círculo de radio  $r = r_0$ . Una perturbación de orden infinitesimal en las condiciones iniciales

transforma esta órbita de equilibrio en una trayectoria que oscila entre un valor mínimo ( $a$ ) y un valor máximo ( $b$ ) para la coordenada radial  $r$ .

La órbita solo cerrará si se cumple la condición de conmensurabilidad entre la frecuencia de oscilación radial ( $\nu_r$ ) y la frecuencia angular de revolución ( $\nu_\theta$ ):

$$\frac{\nu_r}{\nu_\theta} = \frac{p}{q} = n \in \mathbb{Q}$$

Esto implica que, tras  $p$  oscilaciones radiales (de  $a \rightarrow b \rightarrow a$ ), la partícula debe completar exactamente  $q$  revoluciones angulares ( $q \cdot 2\pi$ ), regresando al punto de partida original.

### 3.2.1. Análisis de Estabilidad Orbital en el Límite Cuasi-Circular

Para el análisis de estabilidad de las órbitas cuasi-circulares, se desarrolla el potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r)$  en una serie de Taylor de segundo orden alrededor del punto de equilibrio  $r_0$ , donde  $\frac{dV_{\text{ef}}}{dr}|_{r_0} = 0$ . En este régimen,  $V_{\text{ef}}$  se aproxima a un potencial de oscilador armónico simple. Las oscilaciones radiales entre  $a$  y  $b$  exhibirán isocronismo con una frecuencia angular radial  $\nu_r$  dada por la raíz cuadrada de la segunda derivada del potencial efectivo en el mínimo (tras normalización por la masa):

$$\nu_r^2 = \frac{1}{m} \left[ \left( \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right) \Big|_{r_0} \right] = \frac{1}{m} \left[ \left( \frac{d^2 V}{dr^2} \right) \Big|_{r_0} + \frac{3L^2}{mr_0^4} \right]$$

La frecuencia angular de revolución está dada por  $\nu_\theta = \dot{\theta}$  en  $r = r_0$ :

$$\nu_\theta = \frac{L}{mr_0^2}$$

La imposición de la condición de cerrazón de la órbita ( $\nu_r = n\nu_\theta$ ) a partir de las ecuaciones anteriores deriva en la siguiente ecuación diferencial trascendental sobre el potencial  $V(r)$  en el punto de equilibrio  $r_0$ :

$$r_0 \left( \frac{d^2 V}{dr^2} \right) \Big|_{r_0} = (n^2 - 3) \left( \frac{dV}{dr} \right) \Big|_{r_0}$$

La solución general de esta ecuación establece que el potencial debe manifestar un comportamiento localmente caracterizado por una ley de potencias:

$$V(r) \propto r^{n^2-2}$$

donde  $n = p/q$  es un número racional.

Esta restricción es una condición necesaria (aunque no suficiente) para que la totalidad de las órbitas acotadas del potencial sean cerradas, con independencia de la energía y el momento angular.

### 3.2.2. La Integral de la Órbita y la Clasificación Universal de Bertrand

La condición de conmensurabilidad se formaliza de manera rigurosa mediante la integral de la órbita. Utilizando el cambio de variable  $u = 1/r$ , la diferencial del ángulo  $\theta$  es:

$$d\theta = \frac{L du}{\sqrt{2mE - 2mV(u) - L^2u^2}}$$

Definiendo  $\alpha = 1/b$  y  $\beta = 1/a$  como los inversos de las distancias radiales extremas (puntos de retorno), la energía  $E$  y el momento angular  $L$  se relacionan mediante las condiciones de anulación de la velocidad radial en los límites ( $E = V_{\text{ef}}(a) = V_{\text{ef}}(b)$ ):

$$E = \frac{\beta^2 V(\alpha) - \alpha^2 V(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$\frac{L^2}{2m} = \frac{V(\alpha) - V(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}$$

Para que la órbita sea cerrada para cualquier par de  $\alpha$  y  $\beta$ , se debe satisfacer la siguiente identidad integral (conmensurabilidad):

$$q \cdot 2\pi = p \cdot 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{V(\alpha) - V(\beta)}}{\sqrt{\beta^2 V(\alpha) - \alpha^2 V(\beta) - (\beta^2 - \alpha^2)V(u) - u^2(V(\alpha) - V(\beta))}} du$$

donde  $2\pi$  es el ángulo total y la integral representa el avance angular  $\Delta\theta$  por semiciclo radial.

Al evaluar esta integral bajo las condiciones singulares del potencial, el análisis de Bertrand reveló únicamente dos soluciones que permiten la cerrazón para todo  $\alpha$  y  $\beta$ :

1. Caso I:  $n = 1$  (Conmensurabilidad 1 : 1): Corresponde a  $V(r) \propto r^{-1}$ , la ley de la inversa del cuadrado (Gravitación y Electrostática).
2. Caso II:  $n = 2$  (Conmensurabilidad 2 : 1): Corresponde a  $V(r) \propto r^2$ , el potencial del oscilador armónico simple.

Estos son los únicos dos potenciales centrales para los cuales la totalidad de las órbitas acotadas resultan ser cerradas. Resulta notable que ambas leyes de fuerza generan órbitas con la misma forma geométrica: la elipse.

### 3.2.3. Simetrías Ocultas: El Vector de Runge-Lenz

La naturaleza especial de los potenciales  $V(r) \propto r^{-1}$  y  $V(r) \propto r^2$  no solo se evidencia en su cerrazón orbital, sino también en la existencia de una tercera magnitud vectorial que se conserva, además de la Energía ( $E$ ) y el Momento Angular ( $\mathbf{L}$ ): el Vector de Runge-Lenz ( $\mathbf{A}$ ).

El vector de Runge-Lenz se define para el caso de la fuerza de la inversa del cuadrado ( $V(r) = -k/r$ ) como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r}$$

donde  $\mathbf{p}$  es el momento lineal. La conservación de  $\mathbf{A}$  ( $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$ ) es una manifestación de una simetría dinámica adicional, conocida como simetría accidental o simetría oculta.

1. Justificación de la Elipse y la Precesión Cero: El hecho de que  $\mathbf{A}$  sea constante implica que la órbita no precesa. Geométricamente,  $\mathbf{A}$  apunta siempre a lo largo del eje mayor de la elipse, desde el centro de fuerza hasta el periastro (punto de máximo acercamiento).
2. Determinación de la Excentricidad: La magnitud de  $\mathbf{A}$  está relacionada con la excentricidad ( $\varepsilon$ ) de la órbita elíptica:

$$A = mk\varepsilon$$

La existencia de esta tercera magnitud conservada (un vector de tres componentes, con dos restricciones cinemáticas internas, dejando un grado de libertad adicional) eleva la simetría del problema del grupo  $O(3)$  (rotaciones, asociado a  $\mathbf{L}$ ) a un grupo de simetría superior,  $O(4)$ , que es el grupo de rotaciones en cuatro dimensiones. Es esta simetría superior la que fuerza la cerrazón exacta de la elipse y previene cualquier precesión a lo largo del tiempo. Los demás potenciales centrales no poseen un vector de conservación adicional de esta índole, lo que explica por qué sus órbitas, al ser perturbadas, exhiben precesión y no se cierran de manera exacta.

### 3.2.4. Órbitas Cerradas No Elípticas: El Caso de la Fragilidad Dinámica

La aseveración de que solo las elipses constituyen órbitas cerradas es, sorprendentemente, incorrecta. Si bien los casos  $n = 1$  y  $n = 2$  producen las elipses universales, existen otras curvas cerradas que no son elipses y se dan en casos límite:

- Para  $n = 1$  (Gravitación): La ecuación de la órbita es  $\frac{1}{r} = B + A \cos \theta$  (Elipse con foco en el polo).
- Para  $n = 2$  (Armónico): La ecuación es  $\frac{1}{r^2} = B + A \cos 2\theta$  (Elipse con centro en el polo).

Otras curvas cerradas satisfacen la condición de conmensurabilidad únicamente bajo una restricción severa en las condiciones iniciales (por ejemplo,  $E = 0$  o una relación específica entre  $E$  y  $L$ ).

El potencial  $V(u) = k'u^4 - ku^3$ , por ejemplo, genera la trayectoria limacón de Pascal  $r = A + B \cos \theta$  para  $E = 0$ . Análogamente, el potencial  $V(u) = ku^6 - k'u^4$  genera una lemniscata  $\frac{1}{r^2} = B + A \cos 2\theta$  para  $E = 0$ .

El potencial efectivo para estos casos límite presenta un máximo y un mínimo en  $E = 0$ . La curva cerrada existe solo si los parámetros  $E$  y  $L$  se seleccionan con precisión absoluta. Esto implica que estas órbitas son intrínsecamente frágiles; una desviación infinitesimal en  $E$  o  $L$  rompe la conmensurabilidad, resultando en una órbita que precesa en lugar de cerrarse.

La grandeza conceptual del teorema de Bertrand reside en su capacidad para seleccionar exclusivamente los potenciales con órbitas elípticas como soluciones estables. Para cualquier otro potencial, la órbita cerrada es un caso límite inestable. Todas las órbitas cerradas no elípticas son dinámicamente frágiles.

La fascinación final por la elipse se basa en sus simetrías. El círculo, con simetría infinita, impide la identificación de un potencial único. La elipse, en cambio, posee dos ejes de simetría distintivos:

- Si el centro de fuerza coincide con el centro geométrico (Potencial Armónico), la simetría es total ( $n = 2$ ).
- Si el centro de fuerza coincide con uno de los focos (Potencial Gravitatorio), la simetría se reduce a un solo eje ( $n = 1$ ), coincidiendo con la dirección del vector de Runge-Lenz.

La ley de gravitación newtoniana, al imponer la geometría del foco ( $n = 1$ ), establece un vínculo directo entre la simetría reducida, la existencia del Vector de Runge-Lenz y la estabilidad inherente, confiriendo a la elipse su relevancia fundamental en la física.

# Capítulo 4

## Los potenciales isócronos de Hénon

### 4.1. Concepto de potencial isócrono

El concepto de potencial isócrono fue propuesto por Michel Hénon en los años 1950's [11][12] y lo desarrolló en su estudio enfocado en los cúmulos globulares. Hénon se hizo la siguiente pregunta básica:

*¿Qué potenciales podrían liderar el periodo de oscilación que dependa solo de la energía y no del momento angular?*

Resolvió el problema a través de los potenciales isócronos. El problema de Hénon ha sido explorado desde diferentes perspectivas y en años recientes ha atraído la atención de los investigadores. El problema de Hénon fue resuelto a través de diferentes metodologías [5][9][14][15].

Presentamos una solución usando integración de Abel [17]. Se comienza por presentar el problema de fuerza central, su dinámica está descrita por  $E$  y  $L$  :

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r) \quad (4.1.1)$$

donde  $U(r)$  representa el potencial efectivo y por simplificar se toma  $m = 1$ .

$$U(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2r^2} \quad (4.1.2)$$

con  $V(r)$  siendo el potencial central. En (4.1.3) se muestra la expresión para el ángulo azimutal que es un resultado bien conocido en la literatura

$$\Theta(E, \ell) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2[E - U(r)]}} dr \quad (4.1.3)$$

que representa el ángulo de variación entre los puntos de menor y mayor aproximación al cuerpo central, periapsis y apoapsis y el periodo radial está dado por

$$T(E, \ell) = \sqrt{2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}} dr \quad (4.1.4)$$

Estas son dos cantidades fundamentales en el análisis del problema de dos cuerpos en campo central. Note que el ángulo apsidal, definido como ángulo de variación durante un periodo radial, es dos veces el ángulo azimutal. La condición de isocronía es equivalente a requerir que el periodo radial  $T$  no dependa del momento angular  $\ell$ . Hénon mostró que la condición de isocronía requiere:

$$(ax + bY)^2 + cx + dY + e = 0 \quad (4.1.5)$$

donde  $x = 2r^3$  y  $Y(x) = xV(\sqrt{x/2})$  son conocidas como las variables de Hénon y  $a, b, c, d$  y  $e$  son constantes que pueden ser expresadas en términos de la dinámica original.

A partir de (4.1.5) se pueden desprender los potenciales de Newton y armónicos:

$$V_{Ne} = -\frac{k}{r} \quad , \quad V_{ha} = \frac{k}{2} r^2 \quad (4.1.6)$$

son los potenciales isócronos más simples. Sus periodos correspondientes son:

$$T_{Ne} = \frac{\pi k}{\sqrt{2|E|^3}} \quad , \quad T_{ha} = \frac{\pi}{k} \quad (4.1.7)$$

Se puede observar que no dependen de  $\ell$ . El problema de isocronía de Hénon involucra el teorema de Bertrand en el sentido que los dos potenciales isócronos que llevan a órbitas cerradas son isócronos triviales, pero también existen otros potenciales isócronos que no son cerrados. Los potenciales derivados de (5), además de ser casos de Bertrand, son llamadas potenciales de Hénon:

$$V_{He}(r) = -\frac{k}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} \quad (4.1.8)$$



Y los potenciales  $V_{bo}$  y  $V_{ho}$  son:

$$V_{bo}(r) = \frac{k}{b + \sqrt{b^2 - r^2}} \quad , \quad V_{ho}(r) = -\frac{k}{r^2} \sqrt{r^2 - b^2} \quad (4.1.9)$$

Es necesario observar que los potenciales  $V_{bo}$  y  $V_{ho}$  no están definidos para todo  $r$ . Si  $V(r)$  es un potencial isocrono, entonces  $V(r) + \epsilon + \Lambda/r^2$  también lo será a partir de agregar algunos términos extra.

Una de las condiciones necesarias son la suavidad, aunque solo basta que sea continuamente diferenciables en contraste con otras condiciones en la literatura que requieren que  $V(r)$  sea analítica, ver [9][16].

Estas aproximaciones permiten mostrar que todos los potenciales isocronos de la familia (4.1.8) y (4.1.9) tienen periodo radial  $T^2 \propto |E|^{-3}$  y sus órbitas pueden ser llevadas a un problema típico de Kepler.

## 4.2. Problema Inverso de Fuerza Central

Para obtener el potencial efectivo  $U$  en términos de  $T$  y  $\Theta$ , es conveniente usar un cambio de variable para la integración [27], de  $r$  a  $U$ , tal que  $r_1(U) \leq r_2(U)$  son dos ramas de la función inversa para  $U(r)$  cerca de un mínimo local  $U_0 = U(r_0)$ . Entonces la integración es

$$\int_{r_{max}}^{r_{max}} dr = \int_E^{U_0} \frac{dr_1}{dU} dU + \int_{U_0}^E \frac{dr_2}{dU} dU \quad (4.2.1)$$

y escribiendo (4.1.3) y (4.1.4):

$$\Theta(E, \ell) = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \int_{U_0}^E \frac{1}{\sqrt{E - U}} \frac{d}{dU} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dU \quad (4.2.2)$$

Y

$$T(E, \ell) = \sqrt{2} \int_{U_0}^E \frac{1}{\sqrt{E - U}} \frac{d}{dU} (r_2 - r_1) dU \quad (4.2.3)$$

Las ecuaciones de tipo (4.2.2) y (4.2.3) pueden ser invertidas a través de la integración de Abel: si  $f$  y  $g$  son funciones tal que:

$$f(u) = \int_{u_0}^u \frac{g(v)}{\sqrt{u - v}} dv \quad (4.2.4)$$

entonces:

$$g(v) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dv} \int_{u_0}^u \frac{f(u)}{\sqrt{u-v}} du \quad (4.2.5)$$

Para nuestro propósito es suficiente que  $f(u)$  sea continuamente diferenciable en el intervalo  $I = [u_0, u_1]$  para asegurar que  $g(v)$ , no necesariamente continua, es solución única en el intervalo  $I$ . Entonces, aplicando la integración de Abel a (4.2.2) y (4.2.3):

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi \ell} \int_{U_0}^U \frac{\Theta(E, \ell)}{\sqrt{U-E}} dE \quad (4.2.6)$$

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{U_0}^U \frac{T(E, \ell)}{\sqrt{U-E}} dE \quad (4.2.7)$$

### 4.3. Soluciones Isócronas

La condición de isocronía, el requerimiento que el periodo radial  $T$  no dependa del momento angular,  $\ell$  es totalmente equivalente a la condición que el ángulo azimutal no dependa de la energía  $E$ . Esto puede ser visto como la identidad:

$$\frac{\partial T}{\partial \ell} = -2 \frac{\partial \Theta}{\partial E} \quad (4.3.1)$$

Que a su vez puede ser deducida a través de la acción radial:

$$A_r(E, \ell) = \sqrt{2} \int_{r_{max}}^{r_{min}} \sqrt{E - U(r, \ell)} dr \quad (4.3.2)$$

recordando que:

$$T = 2 \frac{\partial A_r}{\partial E}, \quad \Theta = - \frac{\partial A_r}{\partial \ell} \quad (4.3.3)$$

Y, por tanto, asumiendo la condición de isocronía  $\Theta = \pi \lambda(\ell)$ , la condición de diferenciable continua para la inversión de Abel es trivial y puede ser integrada directamente como:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \beta_\ell \sqrt{U - U_0} \quad (4.3.4)$$

donde  $\beta_\ell = 2\sqrt{2}\lambda(\ell)/\ell$ , donde  $\lambda$  es un número racional de acuerdo al teorema de Bertrand, independiente de  $\ell$ . El lado izquierdo de la ecuación (4.3.4) es una función suave para  $U > U_0$  y esto implica que ambos  $r_1(U)$  y  $r_2(U)$  son suaves y que

consecuentemente  $U(r)$  también será una función suave con una posible excepción en sus mínimos  $U_0 = U(r_0)$ . Se supone que  $V(r)$  no es suave, por ejemplo, en el punto  $r = r_2$ . A menos que  $V(r)$  tenga una falta de suavidad que se cancele en exactamente  $r = r_1$ , entonces la ecuación (4.3.4) no se cumplirá, con la única excepción correspondiente a la falta de suavidad ubicada precisamente en  $r = r_0$ , el único punto común de las dos ramas.

Pero incluso si admitimos un potencial  $V(r)$  “afinado” que tenga exactamente términos no suaves en  $r = r_1$  y  $r = r_2$ , dichos términos dependerán necesariamente de  $\ell$ , y esto queda excluido por la descomposición del potencial efectivo (4.1.2) en una barrera centrífuga y un potencial central puro, que nunca debe depender de  $\ell$ .

El caso de la integral (4.2.7) es diferente. La condición de isocronía no impone ninguna restricción a la función  $T = T(E)$ , es, en principio, una función completamente arbitraria. Sin embargo, podemos escribir el lado derecho de (4.2.7) en una forma funcional conveniente, sin pérdida de generalidad, como

$$r_2 - r_1 = \frac{\sqrt{U - U_0}}{h(U, U_0)} \quad (4.3.5)$$

donde  $h(U, U_0)$  es una función arbitraria indeterminada. Para simplificar notación, se denotará esta función simplemente como  $h(u)$ . Es importante resaltar que (4.3.5) es simplemente una definición de la función  $h(U)$ , por lo tanto, no hay pérdida de generalidad en esta elección, cuya principal motivación proviene del hecho de que  $U$  debe tener un mínimo local en  $r = r_0$  para poder garantizar la existencia de órbitas acotadas. Una expansión de series de Taylor de  $U$  arroja  $U - U_0 \rightarrow [U''(r_0/2)](r_{1,2} - r_0)^2$  como  $r_{1,2} \rightarrow r_0$  de modo que (4.3.5) puede ser localmente verificada, con  $h(U_0) = \sqrt{U''(r_0)}/8$ .

Así, (4.3.5) captura las características del comportamiento de  $U(r)$ , que debe tener un mínimo local en  $r_0$ . Es importante señalar que el argumento de las series de Taylor es solo una motivación para obtener (4.3.5), aquí no es necesario ningún supuesto de regularidad adicional sobre  $U$  alrededor de su mínimo en  $r_0$ . También hay que notar que el lado izquierdo de (4.3.5) es suave para  $U > U_0$  como consecuencia de la condición de isocronía, se tiene que  $h(U)$  también es una función suave para  $U > U_0$ . La conveniencia de la elección (4.3.5) quedará claro resolviendo las ecuaciones (4.3.4) y (4.3.5) para las dos ramas  $r_{1,2}(U)$ , lo que lleva a

$$\sqrt{U - U_0} = r_2 h(U) - \frac{1}{\beta_\ell r_2} = -[r_1 h(U) - \frac{1}{\beta_\ell r_1}] \quad (4.3.6)$$

de donde se tiene

$$U - U_0 = [rh(U) - \frac{1}{\beta_\ell r}]^2 \quad (4.3.7)$$

Como se puede observar la elección de (4.1.21) permite obtener expresiones simétricas en (4.3.6) para ambas ramas  $r_{1,2}(U)$  y, consecuentemente, una única expresión (4.3.7) válida para toda  $r$ .

La condición de isocronía es ahora equivalente a la existencia de soluciones de (4.3.7) para el potencial central efectivo  $U$  y, esto es suficiente para limitar la función desconocida  $h(U)$ . La clave está en que el potencial efectivo  $U(r)$  no es una función arbitraria de  $r$  y  $\ell$  pero este debe tener la forma de (4.1.2), con un  $V(r)$  que no dependa de  $\ell$ . Entonces la ecuación (4.3.7) se lee

$$r^2 h^2(U) - \frac{2h(U)}{\beta_\ell} = V(r) + C(\ell)r^{-2} - U_0 \quad (4.3.8)$$

con  $C(\ell) = (\frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{\beta_\ell^2})$ . Hay que observar  $U_0$  también puede depender de  $\ell$ . La ecuación (4.3.8) fija los términos dependientes de  $\ell$  y esto resulta ser una fuerte restricción sobre las posibles funciones  $h(U)$ . Por ejemplo, se puede observar que (4.3.8) tendrá soluciones de la forma (4.1.2) para polinomio  $h(U)$  solo para el caso lineal.

Recordando que el potencial efectivo para un  $V(r)$  atractivo es dominado por una barrera centrífuga para  $r \rightarrow 0$ . Examinando este límite en (4.3.8), para el término  $r^2 h^2$  del lado izquierdo, se tiene que una función polinómica  $h(U)$  de grado  $n$ , por ejemplo, dará origen a un término proporcional a  $\ell^{4n}/r^{4n-2}$ , que estará desequilibrado con respecto del lado derecho, al menos que  $n = 1$ . Se volverá al caso general  $h(U)$ . Asumiendo una expresión lineal como  $h = \alpha U + \gamma$  y multiplicando ambos lados de (4.3.7) por  $r^2$  se tiene

$$[\alpha r^2 V + \gamma r^2 + \frac{\alpha \ell^2}{2} - \frac{1}{\beta_\ell}]^2 - r^2 V - \frac{\ell^2}{2} + r^2 U_0 = 0 \quad (4.3.9)$$

donde (4.1.2) fue empleada para esta expresión. Se puede observar que se tuvo la parábola de Hénon que está en (4.1.5). sin más supuesto que continuidad diferenciable en  $V(r)$  y la condición isocronía. La expresión general  $H = \alpha U + \gamma$  se reduce a dos casos cualitativamente distintos:  $\alpha = 0$  o  $\gamma = 0$ . Si ambos coeficientes no desaparecen, se puede reescribir  $h = \alpha(U + \gamma/\alpha)$ , y entonces  $\gamma/\alpha$  puede ser ignorado, sin pérdida de generalidad, otro caso, podría significar agregar una constante al potencial  $V$ . El caso más simple que se presenta es si la constante  $h(U) = \sqrt{k/2}$ , lo que arroja

el potencial armónico isotrópico  $V_{ha}(r)$  en (4.1.6), junto con la condición de órbita cerrada  $\lambda = 1/2$ , y, por tanto, es solución del Teorema de Bertrand. Nótese que, en este caso, de (4.3.7), se tiene  $U_0 = \ell\sqrt{k}$ , como se esperaba para el potencial armónico. El segundo caso,  $h(U) = \alpha U$ , es un poco más complicado. Se tiene de (4.3.9) en este caso

$$r^2 V^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2} - \ell^2 + \frac{\ell}{\sqrt{2}\alpha\lambda}\right)V + \left(\frac{U_0}{\alpha^2} + \frac{c}{r^2}\right) = 0 \quad (4.3.10)$$

donde se tiene

$$-\frac{\ell^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell}{\sqrt{2}\alpha\lambda} - \frac{1}{4\alpha^2\lambda^2}\right) = c \quad (4.3.11)$$

El primer grupo de soluciones para potenciales isócronos proviene de  $c = 0$ , después de introducir los parámetros

$$\frac{1}{\alpha^2} - \ell^2 + \frac{\ell}{\sqrt{2}\lambda} = 2bk \quad -\frac{U_0}{\alpha^2} = \pm k^2 \quad (4.3.12)$$

donde  $k > 0$  y  $b \geq 0$ , resultando en los siguientes potenciales atractivos

$$V_{\mp}(r) = \frac{\mp k}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} \quad (4.3.13)$$

que corresponden a los potenciales Hénon  $V_{He}(r)$  y  $V_{bo}(r)$  respectivamente, se puede ver (4.1.8) y (4.1.9). Los parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$  que conducen a las soluciones

$$\alpha = \mp \frac{1}{\ell} \frac{1}{\sqrt{1 + 2bk/\ell^2 \pm 1 + 4bk/\ell^2}} \quad (4.3.14)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + 4bk/\ell^2}}\right) \quad (4.3.15)$$

El segundo tipo de solución surge de ajustar los parámetros

$$\frac{1}{\alpha^2} - \ell^2 + \frac{\ell}{\sqrt{2}\alpha\lambda} = 0 \quad (4.3.16)$$

$$c = b^2 k^2, \quad -\frac{U_0}{\alpha^2} = k^2$$

donde  $k > 0$  y  $b \geq 0$ , resultando en el potencial atractivo

$$V(r) = -k \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r^2} \quad (4.3.17)$$

que es el potencial isócrono restante  $V_{ho}(r)$ . Los parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$  para este caso son

$$\alpha = -\frac{1}{\ell} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (2bk/\ell^2)^2}}} \quad (4.3.18)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + (2bk/\ell^2)^2}}{1 + (2bk/\ell^2)^2}} \quad (4.3.19)$$

Obsérvese que el potencial Newtoniano es un caso particular del potencial Hénon en (4.3.13) y el potencial "hueco" (4.3.17), en ambos casos con  $b = 0$ , con la condición de órbita cerrada  $\lambda = 1$ , como también se esperaba del teorema de Bertrand. Nótese, que el potencial Hénon (4.1.8) y el potencial acotado (4.1.9) pueden ser escritos como

$$V_{He}(r) = \frac{kb}{r^2} - \frac{k}{r^2} \sqrt{b^2 + r^2} \quad (4.3.20)$$

$$V_{bo}(r) = \frac{kb}{r^2} - \frac{k}{r^2} \sqrt{b^2 - r^2} \quad (4.3.21)$$

de donde se puede observar que ambos potenciales  $V_{\mp}(r)$  surgen para  $b < 0$  en (4.1.28) corresponde a algún  $(\epsilon, \Lambda)$ -gauge redefiniciones de potenciales isócronos estándar, completando todos soluciones que podemos obtener de (4.3.9).

## 4.4. Los potenciales isócronos son Keplerianos

Obsérvese que las ecuaciones (4.2.3) y (4.3.5) implican que

$$T(E) = \sqrt{2} \int_{U_0}^E \frac{1}{\sqrt{E-U}} \frac{d}{dU} \frac{\sqrt{U-U_0}}{h(U)} dU \quad (4.4.1)$$

Para el caso del potencial armónico isotrópico, de la sección anterior se sabe que  $h(U) = \sqrt{k/2}$  y, por tanto, de (4.4.1) se tiene

$$T(E) = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \quad (4.4.2)$$

El siguiente grupo de potenciales isócronos se vuelve más interesante. Usando  $h(U) = \alpha U$  y  $|U_0| = \alpha^2 k^2$ .

También se puede obtener la tercera ley de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3 \quad (4.4.3)$$

Para obtener la tercera ley de Kepler, se debe encontrar una longitud orbital característica  $a$  que es inversamente proporcional a la energía  $E$ . El punto de inicio es la ecuación peripasis y apoapsis,  $V(r) + \ell^2/2r^2 = E$ . Para los potenciales isócronos (4.3.13), se define  $\xi_{\pm} = \sqrt{b^2 + r^2}$  que a su vez satisface la siguiente expresión

$$|E|\xi_{\pm}^2 - k\xi_{\pm} + (kb + \frac{\ell^2}{2} - |E|b^2) = 0 \quad (4.4.4)$$

y por tanto

$$a_{\pm} = \frac{\sqrt{b^2 \pm r_{max}^2} + \sqrt{b^2 \pm r_{min}^2}}{2} = \frac{k}{2|E|} \quad (4.4.5)$$

De forma similar, se para el potencial isócrono (4.3.17) ahora se define  $\xi = \sqrt{r^2 - b^2}$  que satisface

$$|E|\xi^2 - k\xi + (\frac{\ell^2}{2} - |E|b^2) = 0 \quad (4.4.6)$$

y por tanto

$$a = \frac{\sqrt{r_{max}^2 - b^2} + \sqrt{r_{min}^2 - b^2}}{2} = \frac{k}{2|E|} \quad (4.4.7)$$

Para los casos con  $b = 0$ ,  $a$  corresponde al eje semi mayor del problema de Kepler. El hecho de los potenciales isócronos (4.3.13) y (4.3.17) tengan el mismo periodo Kepleriano (4.4.3) no es coincidencia. Resolviendo la ecuación de movimiento bajo energía constante (4.1.1)

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \ell^2/2r^2}} dr \quad (4.4.8)$$

y para que todos estos potenciales tengan una forma Kepleriana

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{E_* + k/\xi - \ell_*^2/2\xi^2}} dr \quad (4.4.9)$$

y realizando un cambio de variables  $\xi_{\pm} = \sqrt{b^2 \pm r^2}$  para los potenciales isócronos (4.3.13), con parámetros orbitales

$$E_* = \pm E, \quad \frac{\ell_*^2}{2} = \frac{\ell^2}{2} + kb + E_*b^2 \quad (4.4.10)$$

y ahora efectuando un cambiando de variable  $\xi = \sqrt{r^2 - b^2}$  para el potencial (4.3.17), con parámetros orbitales

$$E_* = E, \quad \frac{\ell_*^2}{2} = \frac{\ell^2}{2} - E_*b^2. \quad (4.4.11)$$

Configurando los parámetros

$$p = \frac{\ell_*^2}{k}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E_*\ell_*^2}{k^2}}. \quad (4.4.12)$$

Ahora se tiene un problema de Kepler que conduce a las siguientes soluciones paramétricas

$$\xi = a(1 - e \cos \psi), \quad t = \sqrt{\frac{a^3}{k}}(\psi - e \sin \psi) \quad (4.4.13)$$

$$\xi = \frac{p}{2}(1 + \psi^2), \quad t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{k}}(\psi + \frac{\psi^3}{3}) \quad (4.4.14)$$

$$\xi = a(e \cosh \psi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{a^3}{k}}(e \sinh \psi - \psi) \quad (4.4.15)$$

para  $E_* < 0$ ,  $E_* = 0$ , y  $E_* > 0$ , respectivamente, donde la condición inicial  $\xi$  toma el valor mas pequeño en  $t = 0$  para todos los casos.



## Capítulo 5

# Isocronismo de las series Taylor truncadas de los potenciales efectivos de Kepler y Hénon

### 5.1. Los potenciales isócronos de la astrofísica y sus series de Taylor truncadas alrededor de sus mínimos

En este capítulo se analiza localmente (por expansiones de Taylor truncadas) el potencial de Kepler y los tres potenciales de Hénon que son formas deformadas por un parámetro  $b$  del potencial de Kepler. En la literatura se sabe que estos potenciales radiales tienen isocronismo definido como independencia de los periodos de los movimientos periódicos del momento angular. En este capítulo se muestra como las series de Taylor truncadas [19] de estos potenciales calculadas alrededor de sus mínimos convergen hacia la propiedad de isocronismo.

#### 5.1.1. Introducción

Los Hamiltonianos para estudiar del punto de vista del isocronismo pueden escribirse de forma compacta como:

$$H_j(r, \dot{r}; r_0, b, l) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + U_j(r; a, b, l) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \mathcal{V}_j(r; r_0, b) , \quad (5.1)$$

donde  $U_j(r; r_0, b, l)$  es el potencial efectivo con  $\mathcal{V}_j(r; r_0, b)$  la expansión en series de Taylor a orden  $j$  alrededor del mínimo  $r_0$  de los potenciales sin truncamiento  $\mathcal{V}_\infty$  definidos como potencial gravitacional (de Kepler) para  $b = 0$  y los potenciales de Hénon para  $b \neq 0$  que son potenciales gravitacionales de Kepler deformados a través del parámetro  $b$ . En forma explícita de sumatoria de Taylor truncada, los potenciales efectivos se escriben como:

$$U_j(r; r_0, b, l) = \frac{l^2}{2mr^2} + \sum_{n=0}^j \frac{\mathcal{V}_\infty^{(n)}(r, b)|_{r_0}}{n!} (r - r_0)^n \quad (5.2)$$

donde  $\mathcal{V}_\infty^{(n)}|_{r_0}$  es la derivada de orden  $n$  de  $\mathcal{V}_\infty$  calculada en el punto  $r = r_0$ . Por lo tanto los Hamiltonianos a estudiar serán:

$$H_j(r, \dot{r}; a, b, l) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \sum_{n=0}^j \frac{\mathcal{V}_\infty^{(n)}(r, b)|_{r_0}}{n!} (r - r_0)^n . \quad (5.3)$$

Esta forma reduce el problema original a un Hamiltoniano  $H_j = p^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + P_j(r - r_0)$ , donde  $P_j(r - r_0)$  es un polinomio de grado  $j$  en potencias de  $(r - r_0)$ .

Para estudiar Hamiltonianos en el contexto de sistemas dinámicos es necesario construir el sistema Hamiltoniano asociado, que consiste en escribir las ecuaciones clásicas de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H_j}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H_j}{\partial r} \end{cases} \quad (5.4)$$

Para este sistema dinámico podemos deducir los puntos de equilibrio, tomando  $\dot{r} = 0$ ,  $\dot{p} = 0$  en los cuales el sistema permanece en equilibrio infinitamente. Además si las ecuaciones  $\dot{p} = \dot{r} = 0$  tienen solo raíces imaginarias entonces el sistema Hamiltoniano no tiene un centro en el espacio de fase.

Para  $\frac{\partial H_j}{\partial p} = 0$  se obtendrá siempre que  $p = 0$ , dada la forma del Hamiltoniano, sin embargo para el caso  $-\frac{\partial H_j}{\partial r} = 0$  se obtiene una función que depende del parámetro del potencial de Hénon ( $b$ ) y del punto alrededor del cuál se realiza la expansión en serie ( $r_0$ ) por tanto si se buscan órbitas cerradas se debe fijar uno de los parámetros

y localizar la región en la cuál se obtienen raíces reales positivas, esto último porque el Hamiltoniano es radial.

En este capítulo se tomarán algunos casos del conjunto  $(r_0, b)$  con órbitas periódicas y se indican también las coordenadas del centro, esta información se obtuvo de forma numérica y coincide con los gráficos mostrados.

Además, se calculan los periodos de los movimientos periódicos para todos estos casos a través de la fórmula clásica del periodo de oscilación de una partícula de masa  $m$  en un pozo unidimensional  $U(r)$  entre los dos puntos de retorno  $r_1$  y  $r_2$  (donde  $U(r) = E$ ) que está dada por la integral, ver [7]:

$$T = \sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{E - U(r)}} . \quad (5.5)$$

### 5.1.2. Potencial de Kepler: $V_K(r) = -\frac{k}{r}$

En el caso  $b = 0$  se tiene el potencial de Kepler  $V_\infty(r) = -\frac{k}{r}$ , con  $k$  la constante gravitacional. Al aplicar una expansión en serie de Taylor a primer orden se obtiene un potencial lineal en  $r$ :

$$\mathcal{V}_1(r; r_0, 0) = \frac{k(r - r_0)}{r_0^2} - \frac{k}{r_0} . \quad (5.6)$$

El Hamiltoniano es:

$$H_1(r, r'; r_0, 0, l) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k(r - r_0)}{r_0^2} - \frac{k}{r_0} \quad (5.7)$$

y el sistema dinámico Hamiltoniano se escribe:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial p} &= \frac{p}{m} \\ -\frac{\partial H_1}{\partial r} &= \frac{l^2}{mr^3} - \frac{k}{r_0^2} \end{cases} \quad (5.8)$$

Para encontrar el punto critico (el centro) del sistema se establece que  $k = 1, l = 1, m = 1/2$  para después efectuar la expansión Taylor en la vecindad del mínimo del potencial efectivo en  $r_0 = 2$  lo que lleva a:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial p} &= \frac{p}{m} , \\ -\frac{\partial H_1}{\partial r} &= \frac{2}{r^3} - \frac{1}{4} , \end{cases} \quad (5.9)$$

donde la última ecuación tiene una sola raíz para  $-\frac{\partial H_1}{\partial r} = 0$  en  $r_{01} = r_0 = 2$ . La representación gráfica para este caso y el caso no truncado se puede observar en las figuras 5.1 y 5.2

En orden 2, se tiene:

$$\mathcal{V}_2(r, 0) = -\frac{k(r - r_0)^2}{r_0^3} + \frac{k(r - r_0)}{r_0^2} - \frac{k}{r_0}. \quad (5.10)$$

con el Hamiltoniano

$$H_2(r, r') = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k(r - r_0)^2}{r_0^3} + \frac{k(r - r_0)}{r_0^2} - \frac{k}{r_0} \quad (5.11)$$

y el sistema Hamiltoniano:

$$\frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.12)$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} + \frac{2k(r - r_0)}{r_0^3} - \frac{k}{r_0^2} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.14)$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial r} = \frac{2}{r^3} + \frac{r - 2}{4} - \frac{1}{4}. \quad (5.15)$$

En este caso, hay dos raíces reales de  $\partial H_2 / \partial r = 0$  en  $r_{02} = r_0 = 2$  y  $r_{M2} = 2,467$ , pero solamente la primera corresponde al mínimo del potencial mientras que la otra corresponde al valor máximo de la energía para obtener puntos de retorno. La existencia de estos puntos de equilibrio aseguran órbitas cerradas en el plano de fase, de manera similar al caso de orden 1 como se puede notar en la figura 5.3.

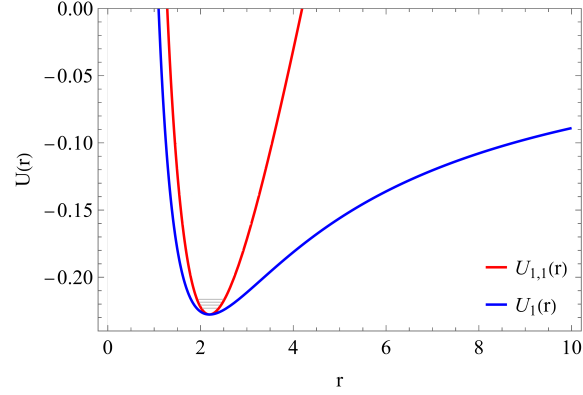


Figura 5.1: Potenciales efectivos de Kepler sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 1 (color rojo) para  $r_{01} = r_0 = 2, l = k = 1, m = 1/2$  y los valores indicados de energía  $E$ .

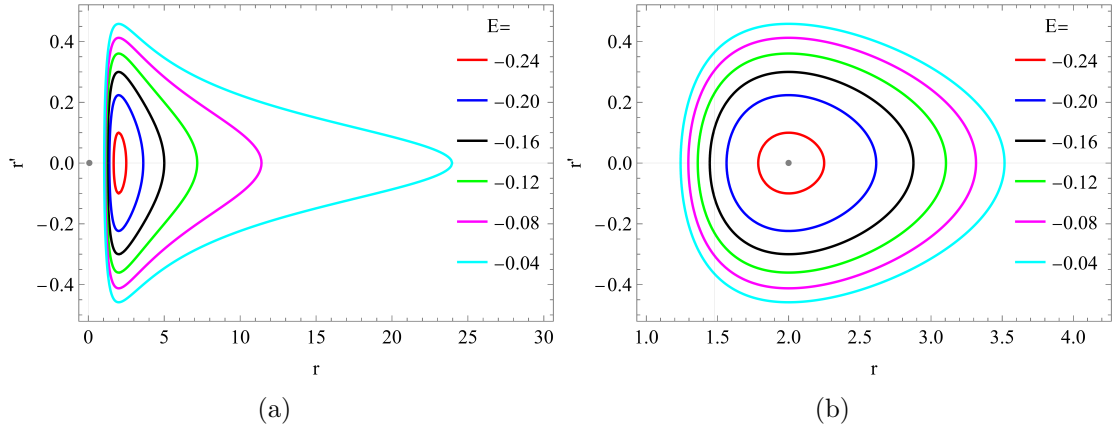


Figura 5.2: (a) Plano de fase para el potencial efectivo de Kepler sin truncamiento mostrando periodicidad para las energías indicadas. (b) Plano de fase para el potencial efectivo de Kepler truncado a orden 1 mostrando la periodicidad para las  $E$  escogidas.

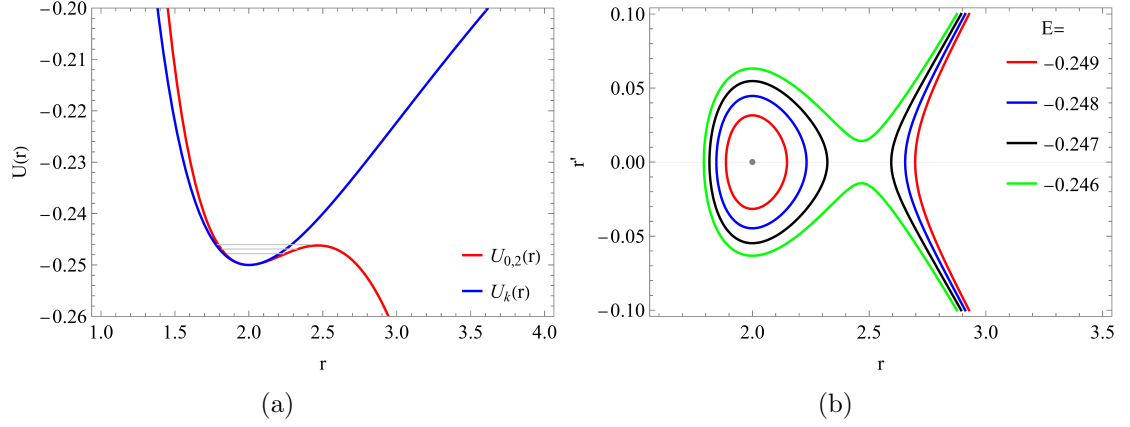


Figura 5.3: (a) Potenciales efectivos de Kepler sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 2 (color rojo) para  $r_{02} = r_0 = 2, l = k = 1, m = 1/2$  y los valores indicados de energía  $E$ . (b) Plano de fase mostrando movimiento periódico para las  $E$  escogidas.

En la siguiente tabla se presentan los resultados del cálculo a través de la ecuación (5.5) de los periodos de las trayectorias cerradas para las energías en el intervalo  $[-0.246, -0.249]$  hasta el sexto orden de Taylor cuando el periodo converge hasta milésimas al periodo del potencial de Kepler no truncado.

$E$	$T[V_k(r)]$	$T[V_{k,1}(r)]$	$T[V_{k,2}(r)]$	$T[V_{k,3}(r)]$	$T[V_{k,4}(r)]$	$T[V_{k,5}(r)]$	$T[V_{k,6}(r)]$
-0.246	12.8741	7.2713	no existe	12.5117	12.9185	12.8645	12.8753
-0.247	12.7960	7.2672	16.0296	12.5344	12.8196	12.7911	12.7965
-0.248	12.7187	7.2632	14.2006	12.5516	12.7287	12.7168	12.7188
-0.249	12.6421	7.2592	13.2275	12.5625	12.6445	12.6417	12.6422

Además, se verifica que el periodo del potencial de Kepler no truncado es  $T(E) = \frac{\pi}{2|E|^{3/2}}$ , es decir se respeta la tercera ley de Kepler que es una formulación cuantitativa del isocronismo. Esto se puede notar en la figura 5.4 donde se presentan las gráficas de  $T(|E|^{-3/2})$  para el potencial de Kepler no truncado y para los potenciales truncados de órdenes más altos de la tabla anterior. En el caso de Kepler no truncado se tiene una recta de pendiente  $\pi/2$  mientras que en el caso de los Kepler truncados hay pequeños desvíos de la forma lineal lo que implica no isocronismo. También se puede apreciar de manera visual la convergencia al subir el orden de truncamiento.

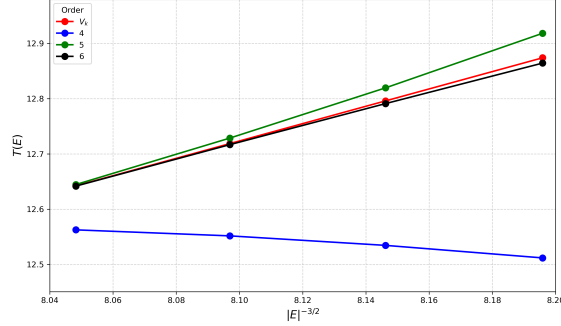


Figura 5.4: Gráficas de  $T(|E|^{-3/2})$  usando los datos de la primera y últimas tres columnas de la tabla anterior.

### 5.1.3. Primer potencial de Hénon: $V_{H1}(r) = -\frac{k}{\sqrt{b^2+r^2+b}}$

Este primer caso de los potenciales de Hénon no presenta singularidad en el origen donde su valor es  $V^{H1}(0) = -k/2b$ . El Hamiltoniano para este caso es:

$$H_j(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \mathcal{V}_j(r, b), \quad (5.16)$$

donde ahora  $\mathcal{V}_j(r, b)$  es la expansión Taylor a orden  $j$  de  $V^{H1}(r)$ . A orden uno se tiene:

$$\mathcal{V}_1(r, b) = \frac{r_0 k (r - r_0)}{\sqrt{r_0^2 + b^2} \left( \sqrt{r_0^2 + b^2} + b \right)^2} - \frac{k}{\sqrt{r_0^2 + b^2} + b} \quad (5.17)$$

El Hamiltoniano a orden uno es

$$H_1(r, r') = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{r_0 k (r - r_0)}{\sqrt{r_0^2 + b^2} \left( \sqrt{r_0^2 + b^2} + b \right)^2} - \frac{k}{\sqrt{r_0^2 + b^2} + b} \quad (5.18)$$

Para este caso el sistema Hamiltoniano es:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.19)$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} + \frac{2}{r^3} - \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + b^2} \left( \sqrt{r_0^2 + b^2} + b \right)^2} \quad (5.20)$$

El mínimo del potencial efectivo usando los mismos parámetros  $k = 1, l = 1, m = 1/2$  se encuentra a  $r_0 = 2,193$  que se usaron en el cálculo de los coeficientes de Taylor.

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.21)$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{2}{r^3} - 0,189617 \quad (5.22)$$

A orden dos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2(r, b) = & \frac{r_0 k (r - a)}{\sqrt{r_0^2 + b^2} \left( \sqrt{r_0^2 + b^2} + b \right)^2} - \frac{k}{\sqrt{r_0^2 + b^2} + b} - \\ & \frac{k \left( -b^2 \sqrt{r_0^2 + b^2} + 2r_0^2 \sqrt{r_0^2 + b^2} - b^3 \right) (r - r_0)^2}{2 (r_0^2 + b^2)^{3/2} \left( \sqrt{r_0^2 + b^2} + b \right)^3} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Con Hamiltoniano:

$$H_2(r, r') = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \mathcal{V}_2(r, b) \quad (5.24)$$

y sistema Hamiltoniano:

$$\frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_2}{\partial r} = & \frac{l^2}{mr^3} + -\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + b^2} \left( \sqrt{r_0^2 + b^2} + b \right)^2} + \\ & \frac{\left( -b^2 \sqrt{r_0^2 + b^2} + 2r_0^2 \sqrt{r_0^2 + b^2} - b^3 \right) (r - r_0)}{(r_0^2 + b^2)^{3/2} \left( \sqrt{r_0^2 + b^2} + b \right)^3} \end{aligned} \quad (5.26)$$

o, con  $r_0 = 2,193$  y  $b = 0,1$

$$\frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.27)$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial r} = \frac{2}{r^3} + 0,164873(r - 2,193) - 0,189617. \quad (5.28)$$



También en este caso hay dos raíces reales,  $r_0 = 2,193$  y  $r_1 = 2,776$ , pero solamente la primera corresponde al mínimo del potencial efectivo. Las gráficas correspondientes para el caso no truncado y truncado a primer orden se pueden observar en las figuras 5.5 y 5.6 y para el caso truncado a segundo orden se pueden observar en la figura 5.7, respectivamente.

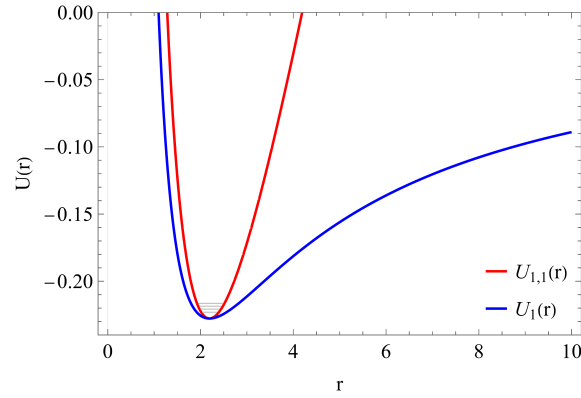


Figura 5.5: Potenciales efectivos de primer caso de Hénon sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 1 (color rojo) empleando  $r_0 = 2,193$ ,  $b = 0,1$ ,  $l = k = 1$ ,  $m = 1/2$  y los valores indicados de energía  $E$ .

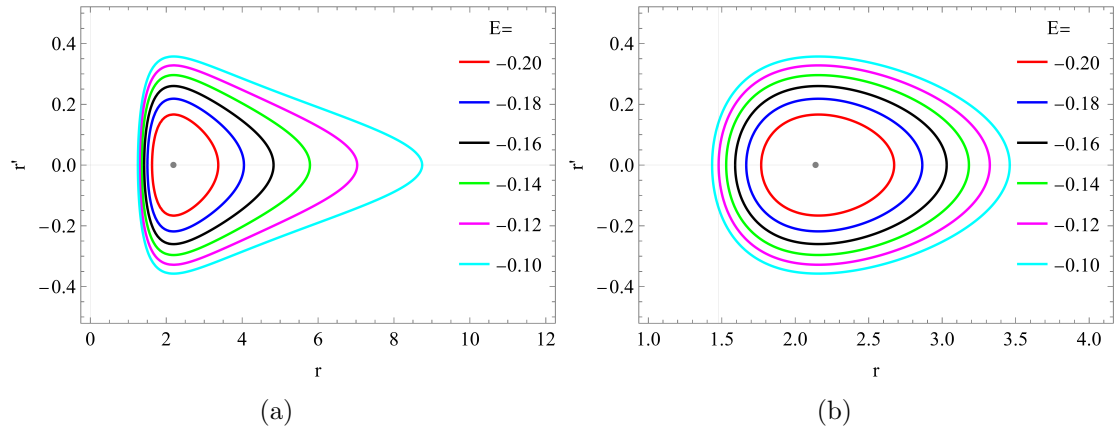


Figura 5.6: (a) Plano de fase para el potencial efectivo del primer caso de Hénon sin truncamiento mostrando periodicidad para las energías indicadas. (b) Plano de fase para el potencial efectivo del primer caso de Hénon truncado a orden 1 mostrando la periodicidad para las  $E$  escogidas.

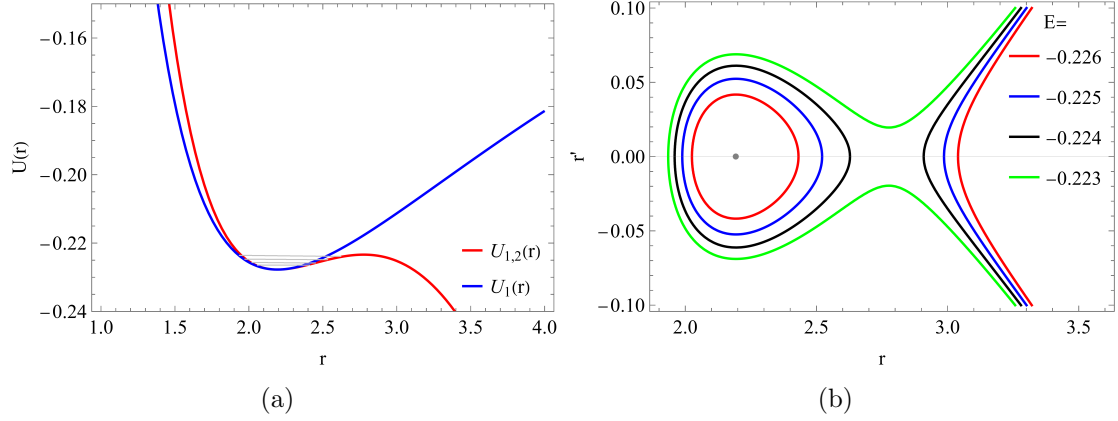


Figura 5.7: (a) Potenciales efectivos de primer caso de Hénon sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 2 (color rojo) empleando  $r_0 = 2,193, b = 0,1, l = k = 1, m = 1/2$  y los valores indicados de energía  $E$ . (b) Plano de fase mostrando órbitas periódicas para las  $E$  escogidas.

La tabla de los periodos para las trayectorias cerradas en el intervalo energético  $[-0,223, -0,226]$  hasta el sexto orden de Taylor con convergencia alcanzada a milésimas al periodo del primer potencial de Hénon no truncado con  $b = 0,1$  es presenta a continuación. Para el caso no truncado, la tercera ley de Kepler se respeta indicando el isocronismo.

$E$	$T[V_1(r)]$	$T[V_{1,1}(r)]$	$T[V_{1,2}(r)]$	$T[V_{1,3}(r)]$	$T[V_{1,4}(r)]$	$T[V_{1,5}(r)]$	$T[V_{1,6}(r)]$
-0.223	14.9163	8.7511	no existe	14.4543	14.9863	14.9011	14.9186
-0.224	14.8166	8.7452	19.6017	14.4676	14.8576	14.8081	14.8176
-0.225	14.7179	8.7394	17.0237	14.4742	14.7388	14.7138	14.7183
-0.226	14.6203	8.7336	15.7645	14.4736	14.6283	14.6189	14.6204

En la figura 5.8, a continuación se presentan las gráficas de  $T(|E|^{-3/2})$  para el primer potencial de Hénon no truncado y para los truncados de órdenes más altos de la tabla anterior. De manera similar al caso de Kepler, el potencial de Hénon respeta la forma lineal del isocronismo y los casos de los Hénon truncados presentan desvíos de la forma lineal pero muestran convergencia al escalamiento isócrono con el aumento del orden de truncamiento.

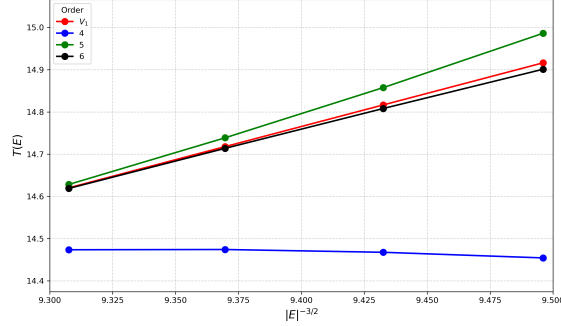


Figura 5.8: Gráficas de  $T(|E|^{-3/2})$  usando los datos de la primera y últimas tres columnas de la tabla anterior.

#### 5.1.4. Segundo potencial de Hénon: $V_{H2}(r) = -k\sqrt{r^2 - b^2}/r^2$

Este potencial es real solamente desde  $r = b$ . A orden uno, su expresión es:

$$\mathcal{V}_1(r, b) = \frac{k(r_0^2 - 2b^2)(r - r_0)}{r_0^3\sqrt{r_0^2 - b^2}} - \frac{k\sqrt{r_0^2 - b^2}}{r_0^2} \quad (5.29)$$

y el Hamiltoniano para este caso es

$$H_1(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k(a^2 - 2b^2)(r - a)}{a^3\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{k\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}, \quad (5.30)$$

por lo tanto el sistema dinámico Hamiltoniano a orden uno es:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.31)$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} + \frac{2}{r^3} - \frac{r_0^2 - 2b^2}{r_0^3\sqrt{r_0^2 - b^2}} \quad (5.32)$$

Con  $k = 1, l = 1, m = 1/2, b = 0,1$ , se encuentra que para el caso no truncado el mínimo del potencial efectivo se encuentra en  $r_0 = 2,0074$ . Entonces la expansión de Taylor se realiza alrededor de este mínimo. Usando estos valores numéricos para los parámetros, el sistema dinámico Hamiltoniano se escribe:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.33)$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{2}{r^3} - 0,247236 \quad (5.34)$$

que tiene la única raíz real  $r_0 = 2,0074$ .

A orden dos:

$$\mathcal{V}_2(r, b) = -\frac{k\sqrt{r_0^2 - b^2}}{r_0^2} - \frac{k(2r_0^4 - 9r_0^2b^2 + 6b^4)(r - r_0)^2}{2r_0^4(r_0^2 - b^2)^{3/2}} + \frac{k(r_0^2 - 2b^2)(r - r_0)}{r_0^3\sqrt{r_0^2 - b^2}} \quad (5.35)$$

el Hamiltoniano es:

$$H_2(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + V'_{2,2}(r, b) \quad (5.36)$$

y el sistema Hamiltoniano se escribe

$$\frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.37)$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} + \frac{(2r_0^4 - 9r_0^2b^2 + 6b^4)(r - r_0)}{r_0^4(r_0^2 - b^2)^{3/2}} - \frac{r_0^2 - 2b^2}{r_0^3\sqrt{r_0^2 - b^2}} \quad (5.38)$$

La expansión Taylor se calcula en la vecindad del mínimo del potencial de Hénon no truncado que se encuentra en  $r_0 = 2,0074$  y se obtiene

$$\frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.39)$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial r} = \frac{2}{r^3} + 0,245402(r - 2,0074) - 0,247236 . \quad (5.40)$$

La ecuación  $-\partial H_2/\partial r = 0$  tiene dos raíces reales en  $r_0 = 2,0074$  y  $r_{2M} = 2,4815$ , primera corresponde al mínimo del potencial y la segunda a la energía máxima para tener puntos de retorno, esto asegura la existencia de trayectorias cerradas en el plano de fase. Para este caso, los potenciales efectivos truncados a orden uno y dos junto con el potencial no truncado se muestran en las figuras 5.9 y 5.11(a) respectivamente y los planos de fase para el no truncado y truncado a orden 1 en la figura 5.10(a) y (b) respectivamente y para el truncado a segundo orden en la figura 5.11(b).

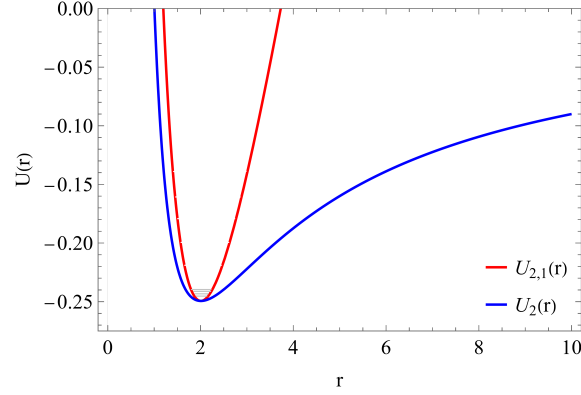


Figura 5.9: Potenciales efectivos del segundo caso de Hénon sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 1 (color rojo) empleando  $r_0 = 2,0074$ ,  $b = 0,1$ ,  $l = k = 1$ ,  $m = 1/2$  y los valores indicados de energía  $E$ .

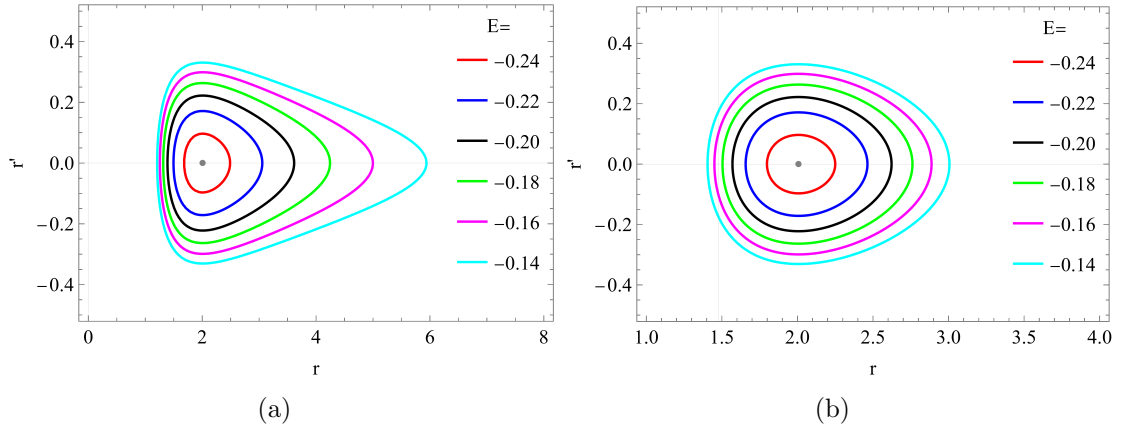


Figura 5.10: ((a) Plano de fase para el potencial efectivo del segundo caso de Hénon sin truncamiento mostrando periodicidad para las energías indicadas. (b) Plano de fase para el potencial efectivo del segundo caso de Hénon truncado a orden 1 mostrando la periodicidad para las  $E$  seleccionadas.

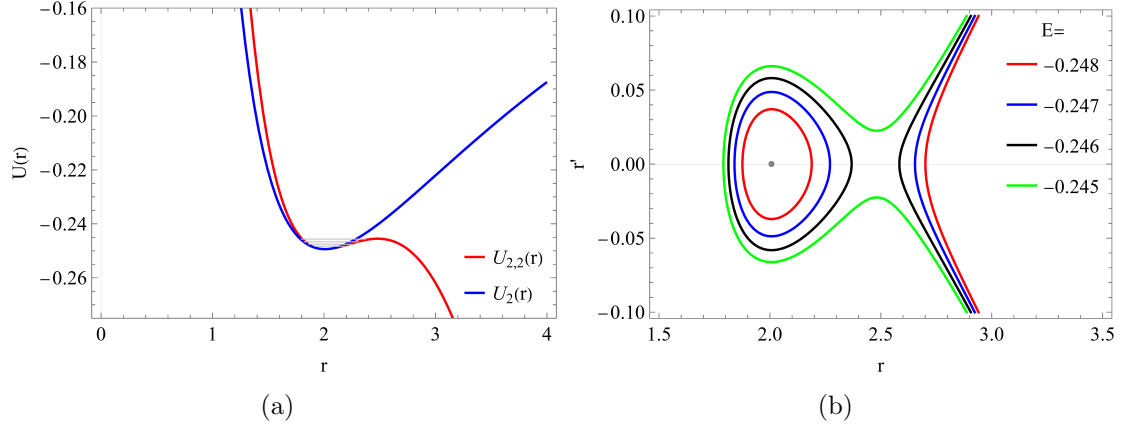


Figura 5.11: (a) Segundo potencial efectivo de Hénon truncado a segundo orden de Taylor (en color rojo) y el mismo no truncado (en color azul) para  $r_0 = 2,0074$ ,  $b = 0,1$ ,  $l = k = 1$ ,  $m = 1/2$  y (b) plano de fase del caso truncado con algunas trayectorias cerradas.

La tabla de los periodos para las trayectorias cerradas en el intervalo energético  $[-0,245, -0,248]$  hasta el sexto orden de Taylor mostrada a continuación presenta las mismas características de los casos anteriores.

$E$	$T[V_2(r)]$	$T[V_{2,1}(r)]$	$T[V_{2,2}(r)]$	$T[V_{2,3}(r)]$	$T[V_{2,4}(r)]$	$T[V_{2,5}(r)]$	$T[V_{2,6}(r)]$
-0.245	12.9530	7.3270	no existe	12.5568	13.0062	12.9414	12.9545
-0.246	12.8741	7.3229	17.2610	12.5797	12.9041	12.8679	12.8748
-0.247	12.7960	7.3189	14.7197	12.5972	12.8101	12.7932	12.7962
-0.248	12.7187	7.3148	13.5762	12.6088	12.7232	12.7179	12.7187

Las gráficas de  $T(|E|^{-3/2})$  para el segundo potencial de Hénon no truncado y sus formas de series de Taylor truncadas a órdenes de 4 a 6 calculadas en el punto de mínimo en la tabla anterior se presentan en la figura 5.12 donde se pueden observar las mismas propiedades con respecto al escalamiento isócrono como en los casos anteriores.

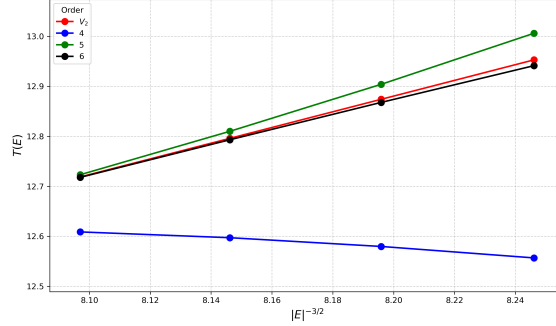


Figura 5.12: Gráficas de  $T(|E|^{-3/2})$  usando los datos de la primera y últimas tres columnas de la tabla anterior.

### 5.1.5. Tercer potencial de Hénon: $V_{H3}(r) = \frac{k}{\sqrt{b^2 - r^2} + b}$

El tercer potencial de Hénon es real solamente para  $r \leq b$ , con  $V^{H3}(0) = k/2b$  y es repulsivo.

A orden uno de la expansión de Taylor este potencial tiene la forma:

$$\mathcal{V}_1(r, b) = \frac{r_0 k (r - r_0)}{\sqrt{b^2 - r_0^2} \left( \sqrt{b^2 - r_0^2} + b \right)^2} + \frac{k}{\sqrt{b^2 - r_0^2} + b} \quad (5.41)$$

con Hamiltoniano

$$H_1(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{r_0 k (r - r_0)}{\sqrt{b^2 - r_0^2} \left( \sqrt{b^2 - r_0^2} + b \right)^2} + \frac{k}{\sqrt{b^2 - r_0^2} + b} \quad (5.42)$$

y sistema Hamiltoniano:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.43)$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{r_0 k}{\sqrt{b^2 - r_0^2} \left( \sqrt{b^2 - r_0^2} + b \right)^2} \quad (5.44)$$

Con los mismos valores numéricos de los parámetros,  $k = 1, l = 0,1, m = 1/2, b = 0,1$ , se encuentra que el mínimo del potencial efectivo no truncado de este caso está en  $r_0 = 0,075$  adentro del segmento radial en el cual el potencial es real.

Pasando al sistema Hamiltoniano con los mismos parámetros:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.45)$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{0,02}{r^3} - 41,0775 \quad (5.46)$$

se encuentra que la única raíz real de  $-\frac{\partial H_1}{\partial r} = 0$  está en  $r_{01} = 0,078$ .

A orden dos en la expansión Taylor se tiene el potencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2(r, b) = & \frac{r_0 k (r - r_0)}{\sqrt{b^2 - r_0^2} \left( \sqrt{b^2 - r_0^2} + b \right)^2} + \frac{k}{\sqrt{b^2 - r_0^2} + b} + \\ & \frac{k \left( b^2 \sqrt{b^2 - r_0^2} + 2r_0^2 \sqrt{b^2 - r_0^2} + b^3 \right) (r - r_0)^2}{2(b^2 - r_0^2)^{3/2} \left( \sqrt{b^2 - r_0^2} + b \right)^3} \end{aligned} \quad (5.47)$$

y el Hamiltoniano aproximado a este orden:

$$H_2(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + \mathcal{V}_2(r, b) \quad (5.48)$$

que resulta en el sistema Hamiltoniano:

$$\frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_2}{\partial r} = & \frac{l^2}{mr^3} - \frac{r_0 k}{\sqrt{b^2 - r_0^2} \left( \sqrt{b^2 - r_0^2} + b \right)^2} - \\ & \frac{k \left( b^2 \sqrt{b^2 - r_0^2} + 2r_0^2 \sqrt{b^2 - r_0^2} + b^3 \right) (r - r_0)}{(b^2 - r_0^2)^{3/2} \left( \sqrt{b^2 - r_0^2} + b \right)^3} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Para obtener el punto de equilibrio de este sistema dinámico se usa  $r_0$  para el mínimo del potencial efectivo no truncado de este caso de Hénon, es decir  $r_0 = 0,075$  y los mismos valores  $k = 1, l = 1, m = 1/2, b = 0,1$  que nos lleva a la siguiente forma del sistema dinámico aproximado:

$$\frac{\partial H_2}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.51)$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial r} = \frac{0,02}{r^3} - 1812,58(r - 0,075) - 41,0775. \quad (5.52)$$



La única raíz real de  $\partial H_2/\partial r = 0$  está en  $r_{02} = 0,0767$ .

Gráficas similares a los casos anteriores se presentan en las figuras 5.13, 5.14 y 5.15.

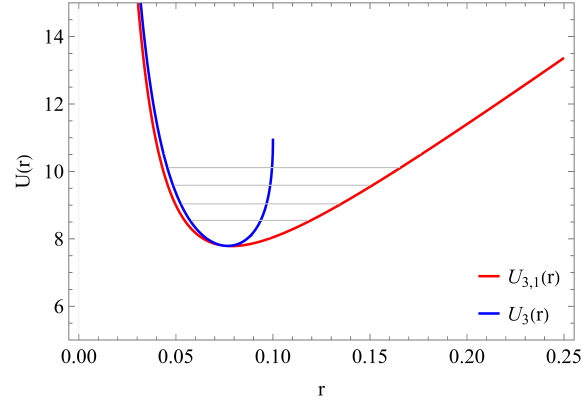


Figura 5.13: Potenciales efectivos del tercer caso de Hénon sin truncamiento (color azul) y truncado a orden 1 (color rojo) empleando  $r_{01} = 0,078, l = b = 0,1, k = 1, m = 1/2$  y los valores indicados de energía  $E$ .

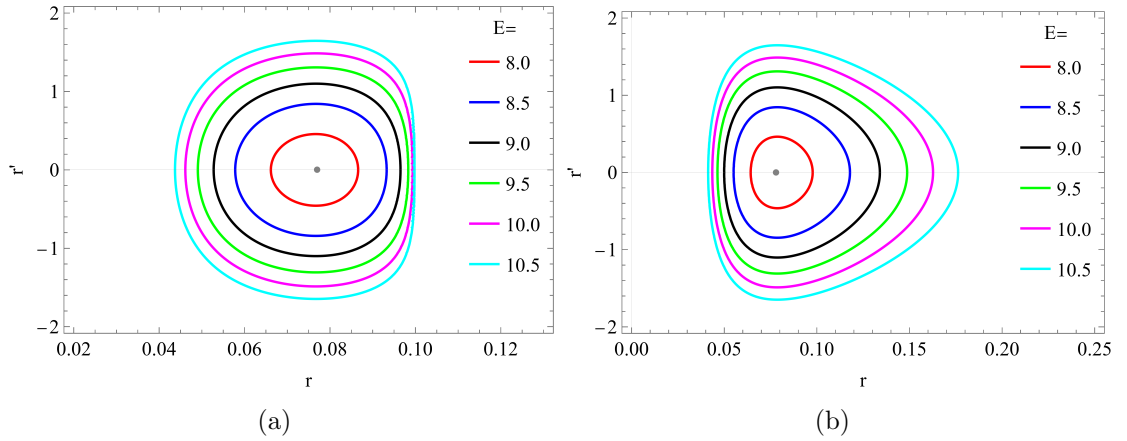


Figura 5.14: (a) Plano de fase para el potencial efectivo del tercer caso de Hénon sin truncamiento mostrando periodicidad para las energías indicadas. (b) Plano de fase para el potencial efectivo del tercer caso de Hénon truncado a orden 1 mostrando la periodicidad para las  $E$  escogidas.

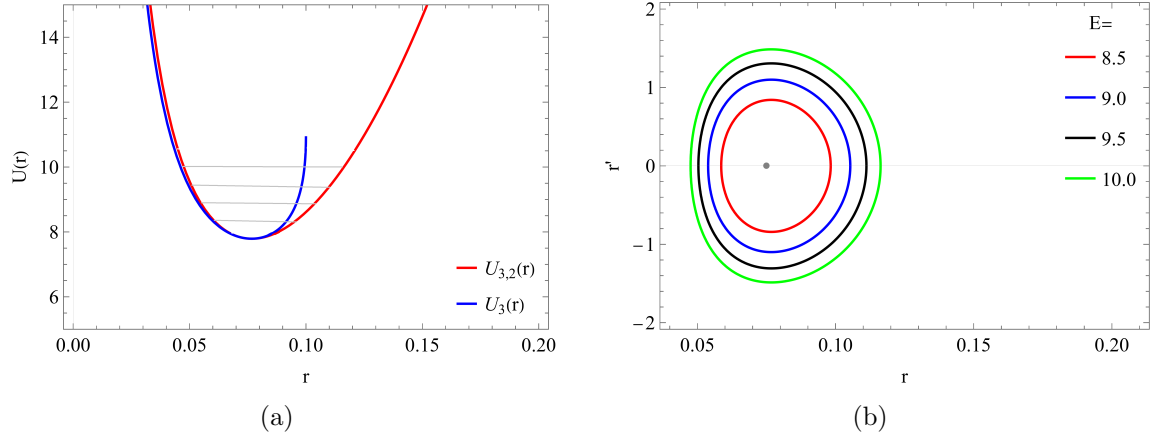


Figura 5.15: (a) Potencial efectivo del tercer caso de Hénon truncado a segundo orden de Taylor y (b) su plano de fase para movimientos periódicos para  $r_{02} = 0,0767, l = b = 0,1, = k = 1, m = 1/2$ .

Finalmente, la tabla de los periodos para las trayectorias cerradas en el intervalo energético  $[8,5, 9,5]$  hasta el sexto orden de Taylor se muestra a continuación y presenta características semejantes a los casos precedentes.

$E$	$T[V_3(r)]$	$T[V_{3,1}(r)]$	$T[V_{3,2}(r)]$	$T[V_{3,3}(r)]$	$T[V_{3,4}(r)]$	$T[V_{3,5}(r)]$	$T[V_{3,6}(r)]$
8.5	0.0633	0.1190	0.0736	0.0698	0.0655	0.0653	0.0641
9.0	0.0581	0.1235	0.0729	0.0678	0.0621	0.0622	0.0599
9.5	0.0536	0.1279	0.0723	0.0659	0.0594	0.0598	0.0564
10.0	0.0496	0.1323	0.0717	0.0642	0.0572	0.0577	0.0536

El escalamiento isócrono  $T(|E|^{-3/2})$  para el tercer potencial de Hénon no truncado y sus formas de series de Taylor truncadas a órdenes de 4 a 6 calculadas en el punto de mínimo tomadas de la tabla anterior se presentan en la figura 5.16 donde se pueden observar las mismas propiedades como en los casos anteriores.

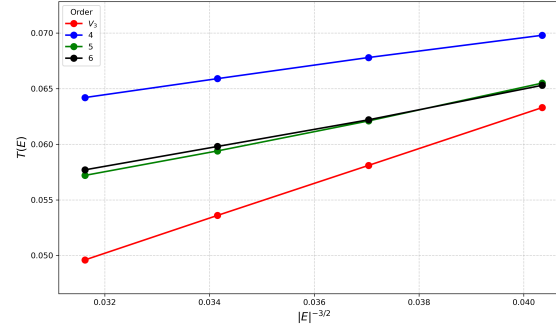


Figura 5.16: Gráficas de  $T(|E|^{-3/2})$  usando los datos de la primera y últimas tres columnas de la tabla anterior.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En esta tesis de maestría se estudió la propiedad de isocronía del movimiento periódico en potenciales radiales de tipo Kepler ( $\sim 1/r$ ) y sus extensiones paramétricas de tipo Hénon que en el límite hacia cero del parámetro tienden al potencial de Kepler. El isocronismo en este caso se define como dependencia del periodo del movimiento periódico solamente de la constante de movimiento Hamiltoniana (la energía total del sistema conservativo) e independencia de cualquier otra constante de movimiento, en particular del momento angular.

En el caso de Kepler, esta forma estándar de isocronismo se expresa por la dependencia puramente geométrica del cuadrado del periodo formulada en la tercera ley de Kepler que se puede expresar también en dependencia únicamente de energía.

Se demostró que un formalismo en términos de álgebras de Lie desarrollado en la literatura para el problema de Kepler no proporciona resultados consistentes en el caso de los potenciales paramétricos de Hénon. Por otro lado, aplicando el formalismo de sistemas dinámicos Hamiltonianos con los potenciales aproximados alrededor de sus mínimos en series de Taylor truncadas se obtuvieron resultados consistentes con el isocronismo dependiente solamente de la energía del sistema dinámico con precisión a cuarto dígito obtenida con el sexto orden de truncamiento de las series de Taylor.

Los resultados muestran que los potenciales generados con la expansión truncada a orden impar solo admiten un conjunto limitado de energías para las cuales se obtienen órbitas periódicas en contraste con los casos truncadas a órdenes pares en los cuales se obtienen potenciales de tipo parabólico con un conjunto infinito de energías admisibles que no son explícitamente negativas como en el caso de los potenciales de Kepler o Hénon.

# Bibliografía

- [1] Saa A., Venegeroles R. (2023). A new derivation of the Hénon's isochrone potentials. *Canadian Journal of Physics*, 101(2), 63-69. <https://doi.org/nq88>
- [2] Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley.
- [3] Rañada, A. F. (2004). *Dinámica Clásica*. Fondo de Cultura Económica.
- [4] Berrondo M., Flores J., Novaro O. (1974), La magia de las órbitas elípticas. *Rev. Mex. Fís.* 23, E13.
- [5] Ramond, P., & Perez, J. (2021). New Methods of Isochrone Mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 62(11), 112704. <https://doi.org/10.1063/5.0056957>
- [6] Santos, F. C., Soares, V., & Tort, A. C. (2007). An English translation of Bertrand's theorem. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0704.2396>
- [7] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., & Sykes, J. B. (1976). *Mechanics: Volume 1*. Butterworth-Heinemann.
- [8] Colwell, P. (1993) *Solving Kepler's equation over three centuries*. Willmann-Bell Inc.
- [9] Ramond, P., & Perez, J. (2020). The geometry of isochrone orbits: From Archimedes' parabolae to Kepler's third law. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 132(4), 22. <https://doi.org/10.1007/s10569-020-09960-w>
- [10] Erlichson, H. (1999). Galileo's pendulum. *The Physics Teacher*, 37(8), 478-479. <https://doi.org/10.1119/1.880380>
- [11] Hénon, M. (1959). L'amas Isochrone I. *Annales d'Astrophysique* 22, 126.
- [12] Hénon, M. (1959). L'amas Isochrone I. *Annales d'Astrophysique* 22, 491.

- 
- [13] Bertrand, J. (1873). Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. *Comptes Rendus* 77, 849-853.
- [14] Simon-Petit, A., Perez, J., & Duval, G. (2018). Isochrony in 3D radial potentials. From Michel Hénon ideas to isochrone relativity: Classification, interpretation and applications. *Communications in Mathematical Physics*, 363(2), 605-653. <https://doi.org/10.1007/s00220-018-3212-y>
- [15] Simon-Petit, A., Perez, J., & Plum, G. (2019). The status of isochrony in the formation and evolution of self-gravitating systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. <https://doi.org/10.1093/mnras/stz351>
- [16] Binney, J. (2014). Henon's Isochrone Model <https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.4937>
- [17] Abel, Niels H. (1841). "Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes". *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* (in French). Paris. pp. 176-264.
- [18] Christian Huygens, *Horologium Oscillatorium*, an english translation by Ian Bruce, *The pendulum or the motion of pendulum adapted to clocks*.
- [19] Arfken, G. "La expansión de Taylor". *Métodos matemáticos para físicos*, 3.<sup>a</sup> ed. Orlando, FL: Academic Press, págs. 303-313, 1985.
- [20] Cabral, H., & Diacu, F. (Eds.). (2002). *Classical and Celestial Mechanics: The Recife Lectures*. Princeton, págs. 78-85.
- [21] Leech, J. W. (1965). *Classical Mechanics*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-9169-5>
- [22] Abattouy, M. *The Mathematics of isochronism in Galileo: from his manuscript notes on motion to the discorsi*.
- [23] Buyse, F. *Galileo, Huygens and the pendulum clock: isochronism and synchronicity*.
- [24] Arnold, V. (1989). *Mathematical methods of classical mechanics* (2nd ed.). Springer-Verlag.
-

- [25] Bate, R. R., Mueller, D. D., & White, J. E. (1971). Fundamentals of astrodynamics (First publ). Dover Publ.
- [26] Serway, Raymond A.; Jewett, John W. (2004). Physics for Scientists and Engineers, (6<sup>a</sup> edición). Brooks/Cole.
- [27] Aiton, E. J. (1954). "The Inverse Problem of Central Forces". Annals of Science.
- [28] Spivak, M. (2010). Physics for mathematicians—Mechanics I. Publish or Perish.
- [29] Al-Hashimi, M. (2019). Energy and Angular Momentum Dependent Potentials with Closed Orbits. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.03228>
- [30] Moriconi, M. (2021). Elementary Solution of Kepler Problem (and a few other problems). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.09064>

# Apéndice 1 - Teorema de Bertrand

## Introducción

En 1873, Joseph Louis Francois Bertrand (1822-1900) publicó un breve, pero importante artículo [6] en el que demostró que solo hay dos campos centrales para los cuales todas las órbitas delimitadas son cerradas, a saber, la ley del oscilador armónico isotrópico y la ley de gravitación universal de Newton, que Bertrand llama "La loi de la Nature" (la ley de la naturaleza). Debido a esta simetría adicional, no es de extrañar que las propiedades más esenciales de estos dos campos fueran estudiadas por el propio Newton, quien las analiza en la Proposición X y en la Proposición XI del Libro I de sus Principia. Newton demuestra que ambos campos dan lugar a una órbita elíptica con la diferencia de que en el primer caso la fuerza se dirige hacia el centro geométrico de la elipse y en el segundo caso la fuerza se dirige a uno de los focos.

El artículo de Bertrand apareció en las Comptes Rendus de la Académie des Sciences de París donde se publicaron las memorias y comunicaciones de los miembros y corresponsales de esa academia de ciencias francesa. La sesión académica en que Bertrand presentó su ponencia tuvo lugar el lunes 20 de octubre de 1873. El resultado de Bertrand, también conocido como teorema de Bertrand, sigue fascinando a las viejas y nuevas generaciones de físicos interesados en la mecánica clásica y, como era de esperar, se siguen publicando artículos dedicados a ella.

La prueba de Bertrand es concisa y elegante y, contrariamente a lo que a uno podría inducir a pensar gracias a una serie de demostraciones perturbativas que se pueden encontrar en la literatura, los libros de texto y los artículos modernos sobre el tema, es completamente no perturbativa. Hasta la fecha no hay una versión en español del artículo de Bertrand. En este anexo, se provee una versión basada en la traducción de la versión en inglés que está accesible en el ArXiv desde 2007 [13].



## Teorema relativo al movimiento de un punto atraído hacia un centro fijo; por el Sr. J. Bertrand.

Las órbitas planetarias son curvas cerradas; esta es la causa principal de la estabilidad de nuestro sistema planetario, y esta importante circunstancia surge de la ley de atracción que, cualquiera que sea la circunstancias iniciales, hace que cada cuerpo celeste que no sea expulsado de nuestro sistema siga la circunferencia de una elipse. Hasta ahora no se ha observado que la ley de atracción de Newton sea la única que cumple esta condición.

Entre las leyes de atracción que suponen nula la acción a una distancia infinita, la de la naturaleza es la única según la cual un cuerpo móvil lanzado arbitrariamente con una velocidad inferior a un cierto límite y arrastrado hacia un centro fijo, describe necesariamente una curva sobre este centro. Todas las leyes de la atracción permiten órbitas cerradas, pero la ley de la naturaleza es el único que los impone.

La prueba del teorema se muestra a continuación: sea  $\varphi(r)$  la atracción ejercida sobre una distancia  $r$  sobre la partícula que se encuentra a la distancia  $r$  y con respecto al centro de atracción que se toma como origen de las coordenadas. Denotando por  $r$  y  $\theta$  las dos coordenadas polares del cuerpo móvil, y se tiene la siguiente fórmula.

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{r^2} \left( \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right)$$

y haciendo un cambio de variable:  $\frac{1}{r} = z$ .

$$r^2 \varphi = \psi(z) \tag{1}$$

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2} \psi(z) = 0$$

Se multiplican ambos miembros por 2  $dz$  e integrando

$$\left( \frac{dz}{d\theta} \right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2} \omega(z) - h = 0 \tag{2}$$

$h$  siendo una constante.

De esto se deduce que

$$d\theta = \pm \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2} \omega(z) - z^2}}$$

Si la curva representada por la ecuación que une  $z$  con  $\theta$  es cerrada, el valor de  $z$  tendrá máximos y mínimos para los cuales  $dz/d\theta$  será nulo y el vector radio correspondiente, normal a la trayectoria, necesariamente habrá ejes de simetría para la misma. Ahora cuando una curva admite dos ejes de simetría, la condición necesaria y suficiente para que sea cerrado es que su ángulo sea conmensurable con  $\pi$ . Por lo tanto, si  $\alpha$  y  $\beta$  representan un mínimo de  $z$  y el máximo que le sigue respectivamente, la condición requerida se expresa mediante la ecuación

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\omega(z) - z^2}} \quad (3)$$

donde  $m$  denota un numero conmensurable. Esta ecuación debe tener cualquier  $h$  y  $k$  que puedan ser y consecuentemente, los limites  $\alpha$  y  $\beta$  que dependan de ellos.

Se tiene

$$h + \frac{1}{k^2}\omega(\alpha) - \alpha^2 = 0$$

$$h + \frac{1}{k^2}\omega(\beta) - \beta^2 = 0$$

consecuentemente

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\omega(\beta) - \omega(\alpha)}$$

$$h = \frac{\alpha^2\omega(\beta) - \beta^2\omega(\alpha)}{\omega(\beta) - \omega(\alpha)}$$

y la ecuacion (3) se convierte

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\omega(\beta) - \omega(\alpha)} dz}{\sqrt{\alpha^2\omega(\beta) - \beta^2\omega(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\omega(z) - [\omega(\beta) - \omega(\alpha)]z^3}} \quad (4)$$

La función  $\omega(z)$  debe ser tal que esta ecuación sea válida para todos los valores  $\alpha$  y  $\beta$ . Más aún, el número conmensurable  $m$  debe ser una constante, porque si variara de una órbita a otra, una variación infinitamente pequeña de las condiciones iniciales produciría una variación finita del número y la disposición de los ejes de simetría de la trayectoria.

Se asume que  $\alpha$  y  $\beta$  difieren infinitesimalmente: dado

$$\beta = \alpha + u$$

$z$  estando incluida entre  $\alpha$  y  $\beta$ . se fija

$$z = \alpha + \gamma$$

Y  $\gamma$  será, tal como  $u$ , infinitamente pequeña. Despreciando lo infinitamente pequeño de segundo orden se tiene

$$\sqrt{\omega(\beta) - \omega(\alpha)} = \sqrt{u\omega'(\alpha)}$$

En la expresión bajo el signo radical en el denominador de la integral (4) los infinitamente pequeños de primer orden se reducen a cero, y lo mismo ocurre con los de segundo; son esos de tercero que son necesarios mantener, y descuidando lo infinitamente pequeño de cuarto orden uno tiene

$$\alpha^2\omega(\beta) - \beta^2\omega(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)\omega(z) - z^3[\omega(\beta) - \omega(\alpha)] = [\omega'(\alpha) - \alpha\omega''(\alpha)](u^2\gamma - u\gamma^2)$$

La ecuación (4) se convierte

$$m\pi = \int_0^u \frac{d\gamma \sqrt{\omega'(\alpha)}}{\sqrt{[\omega'(\alpha) - \alpha\omega''(\alpha)]\sqrt{u\gamma - \gamma^2}}} \quad (5)$$

es decir, realizar la integración y suprimir factores comunes

$$m = \sqrt{\frac{\omega'(\alpha)}{\omega'(\alpha) - \alpha\omega''(\alpha)}}$$

o

$$(1 - m^2)\omega'(\alpha) + m^2\omega''(\alpha) = 0$$

De esto se deduce que

$$\omega'(\alpha) = \frac{A}{\alpha^{1/m^2-1}}$$

$$\omega(\alpha) = A \frac{\alpha^{2-1/m^2}}{2 - \frac{1}{m^2}} + B$$

$A$  y  $B$  denotando constantes.

De las relaciones asumidas entre las funciones  $\omega$ ,  $\psi$  y  $\varphi$  se tiene que

$$\psi(z) = \frac{A}{2z^{1/m^2-1}}$$

$$\psi(r) = \frac{A}{2} r^{1/m^2-3}$$

Ésta es la única ley posible de atracción, denotando aquí  $m$  cualquier número conmensurable; pero de esto no se sigue que cumpla todas las condiciones de la proposición para cualquier  $m$ . De hecho, se debe tener para los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ ,

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz \sqrt{\frac{1}{\beta^{1/m^2-2}} - \frac{1}{\alpha^{1/m^2-2}}}}{\frac{\alpha^2}{\beta^{1/m^2-2}} - \frac{\beta^2}{\alpha^{1/m^2-2}} + (\beta^2 - \alpha^2) \frac{1}{z^{1/m^2-2}} - z^2 \left( \frac{1}{\beta^{1/m^2-2}} - \frac{1}{\alpha^{1/m^2-2}} \right)} \quad (6)$$

A continuación se asume inicialmente que  $1/m^2 - 2$  es negativo, también se asume que  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ , la ecuación se convierte

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z^{1/m^2-2}} - z^2}} = \int_0^1 \frac{z^{1/2m^2-1} dz}{1 - z^{1/m^2}}$$

y de la ecuación (6) se obtiene

$$m\pi = m^2\pi$$

$$m = 1$$

La correspondiente a la ley de atracción es

$$\varphi(r) = \frac{A}{r^2}$$

Si se asume que  $1/m^2 - 2$  es positivo, la ecuación (6) para  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2}$$

De esto se deduce que  $m = 1/2$ , y la correspondiente ley de atracción es

$$\varphi(r) = Ar$$

Por lo tanto, solo dos leyes cumplen las condiciones requeridas, la de la naturaleza, por lo cual la órbita cerrada tiene solo un eje de simetría que pasa a través del centro de acción, y la atracción proporcional a la distancia. por lo cual hay dos.