

INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

Método para revelar imágenes codificadas en tonos de gris y en color (RGB), mediante la aplicación de funciones de distribución Gamma

Tesis que presenta

Ximena Rodríguez González

Para obtener el grado de

Maestra en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Marcial Bonilla Marín

San Luis Potosí, S.L.P., Octubre de 2026

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis ”Método para revelar imágenes codificadas en tonos de gris y en color (RGB), mediante la aplicación de funciones de distribución Gamma”presentada para obtener el Grado de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Ximena Rodríguez González** y aprobada el **16 de 10 de 2026** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y sistemas dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Marcial Bonilla Marín
(Director de la tesis)

Dr. Eric Campos Cantón
(Sinodal)

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
(Sinodal)

Dr. José Tuxpan Vargas
(Sinodal)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Marcial Bonilla Marín.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación #2059860 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

A mis papás y mi hermano, por su paciencia, apoyo y comprensión en cada una de las metas que me propongo...

Agradecimientos

“If you’re happy, doing what you’re doing, then nobody can tell you you’re not successful” — Harry Styles.

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación por la beca otorgada #2059860 para llevar a cabo mis estudios de maestría y al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C. en especial a la División de Control y Sistemas Dinámicos por creer en mí y darme la oportunidad de crecer y extender mis conocimientos.

Y en especial al Dr. Marcial Bonilla por la confianza y apoyo esencial en cada uno de los pasos de la investigación, a mis sinodales, los doctores Eric Campos, Cesar Octavio y José Tuxpan por sus comentarios para mejorar el trabajo.

Quisiera agradecer a mis amigos Majo, Gisell, Yumiko, Montse, Kass, Jacob, Pablo, May, Abril, Vale, Frida, Mafer, Mich, Dani, China, Tovar, Navarro, Itzel, Tere, Andrea, Gael, Grecia y Elsa, por estar conmigo en las buenas y malas, por escucharme y apoyarme no solo en este camino sino desde siempre y sin dudarlo. Y a mis primos Lore, Erick, Ale, Ari, Pato, Andy y Jenny por las risas, mensajes y anécdotas que hemos llevado a lo largo de nuestra vida juntos. A mi equipo de fut TBD que me ha dado grandes amistades, momentos buenos dentro y fuera de la cancha. A mi ídolo desde que tengo memoria Lionel Messi, que me enseñó a no rendirme hasta conseguir lo que quiero.

Y finalmente a mis papás Luisa y Benny, y a mi hermano Emilio, gracias por todo su apoyo, quizá no siempre entienden de lo que hablo, pero me ayudan a salir adelante cada uno a su manera y por ser el pilar más importante en mi vida. A mi tía Chayo que es como una segunda mamá para mí. Sin ustedes no soy lo que sería hoy y les estoy eternamente agradecida. Al resto de mi familia y los que ya no están, pero sé que desde el cielo me cuidan y están al pendiente, sé que estarían orgullosos.

Contenido

Constancia de aprobación de la tesis . . . III
Créditos Institucionales . . . V
Acta de examen . . . VII
Dedicatorias . . . IX
Agradecimientos . . . XI
Lista de tablas . . . XV
Lista de figuras . . . XVI
Resumen . . . XIX
Abstract . . . XX

Introducción **1**

1. Visión humana y espacio RGB. **4**
1.1. Mecanismo de la visión humana. . . . 4
1.2. El espacio de color RGB. . . . 5
1.3. Digitalización de la imagen. . . . 7
1.4. Representación matemática de una imagen. Histogramas de intensidad. 7

2. Métodos. **9**
2.1. Método de codificación de imágenes: cajas de seguridad dinámica (S-Boxes). . . . 9
2.2. Función de distribución Gamma. . . . 12
2.3. Teorema Nyquist. . . . 14

3. Resultados. **15**
3.1. Proceso automatizado para revelar imágenes codificadas. . . . 15
3.2. Imágenes en tonos de gris . . . 16
3.2.1. Callejón . . . 18
3.2.2. Estructura . . . 23
3.3. Imágenes RGB . . . 28
3.3.1. Ardilla . . . 29
3.3.2. Perro . . . 32

3.3.3. Puma 35
3.4. Métrica SSIM. 38

4. Discusión. **45**
4.1. Dificultad en RGB. 48
4.2. Uso de la métrica SSIM. 49
4.3. Perspectivas a futuro. 50

Conclusión **52**

Apéndice **54**

Referencias **56**

Anexos **58**

Lista de tablas

1. Parámetros utilizados para revelar la imagen del Callejón 18
2. Parámetros utilizados para revelar la imagen de la Estructura 23
3. Parámetros de la distribución Gamma para la imagen de la ardilla . . 29
4. Parámetros de la distribución Gamma para la imagen del perro 32
5. Parámetros de la distribución Gamma para la imagen del puma 35

Lista de figuras

1. Representación del ojo humano con la ubicación de los conos y bastones. 5
2. Espacio de color RGB 6
3. Histograma de intensidad del puma de la fila 0 8
4. Puma imagen real e imagen codificada. 11
5. Distribuciones Gamma generadas para los distintos histogramas de intensidad. **(a)** Una curva Gamma generada para el canal R. **(b)** Dos curvas Gamma generadas para el canal G. **(c)** Tres curvas Gamma generadas para el canal B. 13
6. Procedimiento automatizado para revelar imágenes codificadas . . . 16
7. Imágenes de referencia del callejón 18
8. Histogramas de intensidades del Callejón, con una función de distribución Gamma. 19
9. Histogramas de intensidades del Callejón, con dos funciones de distribución Gamma. 19
10. Resultados obtenidos procesando el Callejón con diferentes resoluciones. 20
11. Resultados obtenidos con introducción de contraste en el callejón . . 21
12. Resultados obtenidos con introducción de contraste para dos curvas Gamma en el callejón 22
13. Imágenes de referencia de la estructura 23
14. Histogramas de intensidades de la Estructura, con una distribución Gamma. 24
15. Histogramas de intensidades de la Estructura, con dos funciones de distribución Gamma. 24
16. Resultados obtenidos procesando la Estructura con diferentes resoluciones 25
17. Resultados obtenidos con introducción de contraste en la estructura . 26

18. Resultados obtenidos con introducción de contraste para dos curvas Gamma en la estructura 27
19. Imágenes de referencia de la ardilla 29
20. Histogramas de intensidades del canal R de la ardilla 30
21. Imagen RGB de la ardilla revelada con el proceso automatizado . . . 31
22. Imágenes de referencia del perro 32
23. Histograma de intensidades del canal G del perro 33
24. Imagen RGB del perro revelada con el proceso automatizado 34
25. Imágenes de referencia del puma 35
26. Histograma de intensidades del canal B del puma 36
27. Imagen RGB del puma revelada con el proceso automatiza 37
28. Primeros resultados de la imagen del callejón. 39
29. Segundos resultados de la imagen del callejón. 40
30. Primeros resultados de la imagen de la estructura. 41
31. Segundos resultados de la imagen de la estructura. 42
32. Resultados de la imagen de la ardilla. 43
33. Resultados de la imagen del perro. 43
34. Resultados de la imagen del puma. 44

35. Introducción de contraste en cada canal de una imagen 47
36. Introducción de contraste en una imagen RGB 48
37. Ejemplo vecinos 51

Resumen

Se explora una nueva técnica para revelar imágenes codificadas utilizando la función de distribución Gamma. Las imágenes se codifican mediante cajas de sustitución (S-Boxes) generadas a partir de la función logística, lo que proporciona un esquema de codificación robusto.

Se implementó un método automatizado para procesar las imágenes codificadas, el cual consiste en procesar las imágenes fila por fila. Para ello se genera un histograma de intensidades teórico de la imagen real mediante funciones Gamma, al cual se ajustan los datos del histograma de intensidades de la imagen codificada.

Las imágenes procesadas son imágenes a color RGB e imágenes en escala de grises. Estas últimas, por tener un solo canal, presentan menos complejidad en su procesamiento, además de facilitar la introducción de contraste para resaltar sus características. En el caso de las imágenes a color, la técnica se aplica de manera independiente a cada canal de la imagen. La imagen RGB resultante se obtiene mediante la integración de las tres imágenes reveladas correspondientes a cada canal. El nivel de dificultad para reproducir los colores originales es muy alto, pues los valores de intensidad de los píxeles de las imágenes reveladas de los tres canales deben coincidir con aquellos de las imágenes reales para reproducir los colores originales.

Palabras clave: Función de distribución Gamma, s-boxes, histograma de intensidades

Abstract

A new technique using Gamma distribution functions was shown to be viable for revealing encoded images. The images were encoded using security S-Boxes generated by the extended logistic map, which produces robust encoding.

An automated method is implemented to process the encoded images, which consists of processing the images row by row. For this purpose, a theoretical histogram of intensities of the real image is generated using Gamma functions, to which the data of the histogram of intensities of the encoded image are adjusted.

The processed images are RGB color images and grayscale images. Since grayscale images contain a single channel, present less complexity in their processing and facilitate the introduction of contrast to highlight their features. In the case of color images, the technique is applied independently to each image channel. The resulting RGB image is obtained by integrating the three revealed images corresponding to each channel. The level of difficulty to reproduce the original colors is very high, since the intensity values of the pixels of the revealed images of the three channels must coincide with those of the real images to reproduce the original colors.

Key words: Gamma distribution functions, S-Boxes, intensity histogram

Introducción

La práctica de la criptografía y criptoanálisis se remonta a las civilizaciones antiguas. El cifrado César utilizando por Julio César, es uno de los cifrados más antiguos y conocidos y fue vulnerado mediante un análisis estadístico básico. Durante la Edad Media, el criptoanálisis experimentó avances, particularmente en el mundo islámico. Al-Kindi [1], erudito árabe del siglo IX, es reconocido por desarrollar el primer método de análisis de frecuencia, el cual se convirtió en la técnica fundamental para romper cifrados por sustitución monoalfabética, su método se basaba en analizar la frecuencia de aparición de letras en el texto cifrado. La invención del análisis de frecuencia constituyó el avance de criptoanalítico más significativo hasta la Segunda Guerra Mundial. Posteriormente, surgieron los cifrados polialfabéticos como el cifrado de Vigenére, diseñados para dificultar el análisis por frecuencia.

La criptología de imágenes tiene como objetivo proteger datos visuales contra accesos no autorizados y manipulaciones, y los métodos de criptoanálisis de imágenes han evolucionado para contrarrestar estas técnicas de cifrado. La criptología de imágenes ha experimentado una evolución significativa impulsada por avances tecnológicos, necesidades militares y factores sociales. Su desarrollo continuo ha sido motivado por la necesidad de asegurar y descifrar información.
Entre los primeros métodos de criptografía de imágenes se encuentran la criptografía visual, el mapeo logístico y el intercambio de claves Diffie-Hellman. La criptografía visual fue introducida por Moni Naor y Adi Shammir en 1994 [2]. Este método divide una imagen en fragmentos aleatorios, que de manera individual no revelan información, pero que permiten reconstruir la imagen original al combinarse. De manera similar, el mapeo logístico y el intercambio de claves Diffie-Hellman [3] se encuentran entre los primeros algoritmos de cifrado de imágenes que emplearon mapeos caóticos y versiones modificadas de algoritmos de intercambio de claves para generar claves seguras. La evolución del cifrado de imágenes ha incorporado mejoras significativas, como la cripto comprensión. Además, se han desarrollado diversos marcos de trabajo que integran mapas caóticos y procesos de confusión y difusión para mejorar la seguridad del cifrado de imágenes. Hasta la década de 1960, la criptografía segura fue principalmente dominio de los gobiernos. Desde entonces, dos eventos la llevaron al ámbito público: la creación de un estándar público

de cifrado (DES) y la invención de la criptografía de clave pública.

Los procedimientos utilizados para codificar imágenes pueden compararse con la codificación de textos. Por ejemplo, en un cifrado polialfabético, una letra del texto se sustituye por otra de tal manera que la regla de codificación cambia a lo largo del mensaje, basándose en el principio de que el mensaje final debe presentar una distribución uniforme de letras. Esta idea de los cifrados polialfabéticos puede aplicarse a la codificación de imágenes, sustituyendo los niveles de intensidad de los píxeles de una imagen real por diferentes intensidades a lo largo de la imagen. Este procedimiento oculta completamente la imagen original y, al proporcionar una distribución uniforme de valores de intensidad a los píxeles, produce una imagen codificada con una distribución uniforme de niveles de intensidad en escala de grises. La codificación de imágenes realizada en este trabajo consiste en reemplazar los niveles de intensidad de los píxeles de la imagen real mediante S-Boxes, lo que genera imágenes codificadas que presentan una distribución uniforme en escala de grises.

Esquema de la tesis.

En este trabajo, las imágenes codificadas fueron procesadas mediante la aplicación de un algoritmo para generar S-Boxes. Las imágenes reales fueron codificadas mediante la aplicación de una S-Box distinta para cada fila de la matriz de la imagen. La imagen codificada resultante oculta completamente la imagen original, haciéndola imposible de visualizar. Con esto dicho, se plantearon los siguientes objetivos:

Objetivo general:

Procesar con imágenes RGB y en tonalidad de grises, mostrar que es posible revelar imágenes codificas con S-Boxes aplicando una o varias funciones de distribución Gamma.

Objetivos específicos:

I. Desarrollar un proceso automatizado que procese las imágenes fila por fila generando histogramas de intensidad, y posteriormente ajustar los histogramas obtenidos a una o dos funciones de distribución Gamma.

II. Procesar las imágenes codificadas con diferentes resoluciones espaciales y a cada uno de sus canales, con una o dos funciones de distribuciń Gamma.

Estructura de la tesis.

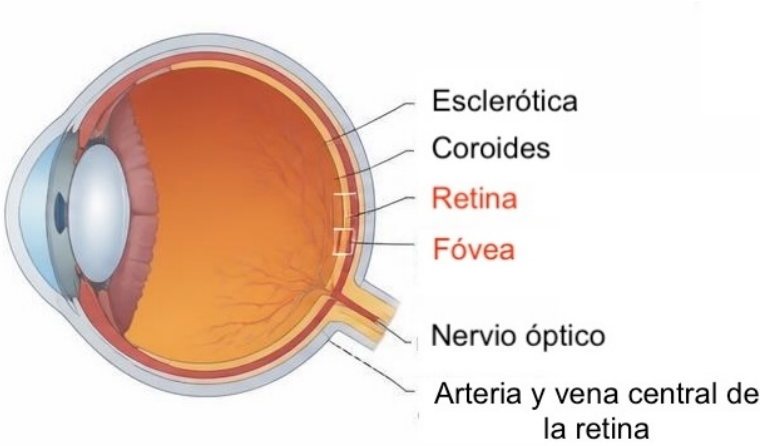
El trabajo se encuentra dividido en cuatro capítulos. En el capítulo 1. Visión humana y espacio RGB, se presentan los fundamentos esenciales para este trabajo, que es el mecanismo de la visión humana, el espacio de color RGB, la digitalización de imágenes y la representación matemática de una imagen la cual es mediante los histogramas de intensidad. En el capítulo 2. Métodos, se describen los métodos utilizados para la codificación de imágenes que fueron las cajas de sustitución (S-Boxes), la función de distribución Gamma, el cual fue el método seleccionado para revelar imágenes codificadas, y el teorema de Nyquist. En el capítulo 3. Resultados, se presentan los resultados obtenidos mediante el proceso automatizado de revelación de imágenes codificadas mediante funciones de distribución Gamma, considerando imágenes en tono de gris y a color RGB. Dentro de este mismo capítulo se anexa una subsección de métricas, donde la seleccionada fue la métrica SSIM (Structural Similarity Index Measure) donde se compara la imagen real con la imagen que obtuvimos al momento de revelar la imagen y cuantifica que tan bien se recuperó la información visual. En el capítulo 4. Discusión, se analizan los resultados obtenidos, junto con las dificultades que se dieron en el proceso y las perspectivas a futuro. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo y un apéndice que contiene los pseudocódigos de los programas desarrollados, posteriormente se encuentran las referencias bibliográficas utilizadas.

Capítulo 1
Visión humana y espacio RGB.

1.1 Mecanismo de la visión humana.

La visión del color en los seres humanos es posible gracias a tres tipos de células cono ubicadas en la retina del ojo humano: los conos L (longitud de onda larga, λ) sensibles al rojo en $\lambda_R = 563\,\mathrm{nm}$; los conos M (longitud de onda media) sensibles al verde en $\lambda_G = 530\,\mathrm{nm}$ y S (longitud de onda corta) sensibles al azul en $\lambda_B = 417\,\mathrm{nm}$. La longitud de onda determina el color que percibimos [4].

Además de los conos, la retina contiene bastones, los cuales son más sensibles a la intensidad luminosa pero no distinguen los colores. Los bastones son los responsables de la visión en condiciones de baja luminosidad y perciben la luz básicamente en tonos de gris, en tanto que los conos permiten la percepción del color en condiciones de luz brillante. Los conos sensibles al verde y rojo constituyen un 90 % de la población de conos y se concentran en la fóvea, la cual es la región central de la retina donde la agudeza visual es máxima, mientras que el azul constituye el 10 % de la población de conos [5].



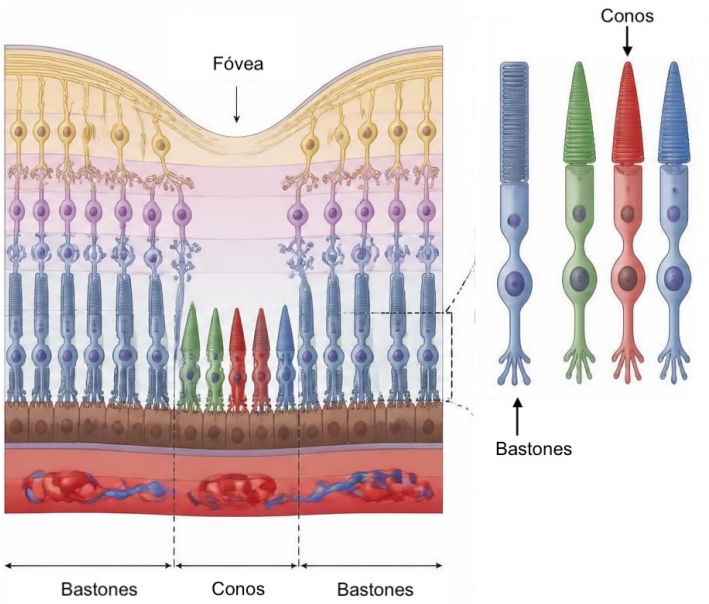


Figura 1: Representación del ojo humano con la ubicación de los conos y bastones.

1.2 El espacio de color RGB.

El modelo de color RGB (Rojo, Verde, Azul) es una representación matemática que sigue el principio de tricromacia, el cual es un principio biológico que se fundamenta en la existencia de los tres tipos de conos mencionados en la sección 1.1. Es un modelo aditivo, ya que, al sumar diferentes intensidades de luz roja, verde y azul, se genera una amplia gama de colores. Por ejemplo, si se utilizan 256 niveles de intensidad para cada color, entonces existirán $256 \times 256 \times 256 = 16,777,216$ posibles combinaciones de colores en una imagen RGB. Esto significa que al revelar los tres canales de una imagen codificada RGB, las posibilidades de recuperar los colores originales de la imagen real es extremadamente difícil, pues implicaría que cada uno de los tres canales recupera exactamente las intensidades de la imagen original.

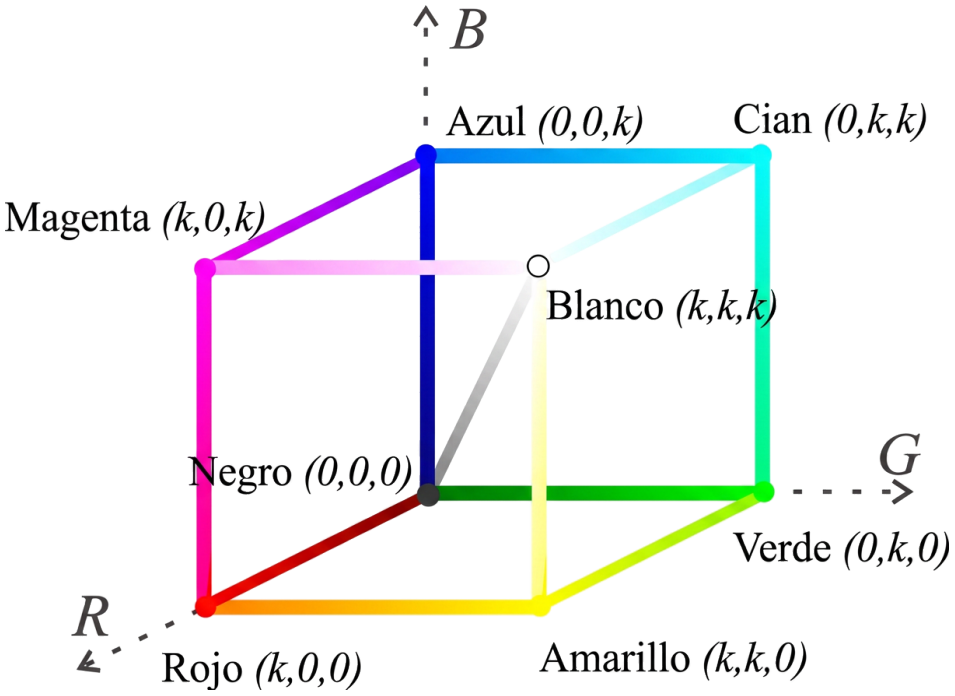


Figura 2: Representación esquemática del modelo RGB.

En la figura 2 se puede observar lo siguiente:

- **Canales primarios:** Las regiones de color rojo, verde y azul puro representan la máxima estimulación de un solo tipo de cono (L, M o S). Estos colores constituyen los tres ejes de la representación espacial del modelo RGB.
- **Colores secundarios:** La superposición de dos primarios estimula dos tipos de conos simultáneamente y produce otros colores. Por ejemplo, la combinación de los colores primarios rojo y verde produce el color secundario amarillo.
- **Blanco y negro:** La suma de los tres colores primarios a máxima intensidad produce la sensación de blanco, mientras que la ausencia de todos ellos produce la sensación de negro.

Existe un fenómeno llamado **metamerismo**, mediante el cual dos objetos pueden percibirse del mismo color por el ojo humano, aunque sus propiedades espectrales sean diferentes. Esta igualdad ocurre bajo determinadas condiciones de iluminación. Por ejemplo, el agua, por naturaleza la vemos azul, pero imaginemos que estamos caminando por un lago, dependiendo de la luz del sol que le dé podemos percibir el agua de diferentes colores, con mucha luz se ve como blanca o cristalina si nos acercamos, con cero luz se ve negra, y con sombra de los árboles la percibimos en

un azul más fuerte. Todo esto como se menciona depende de las condiciones de iluminación en que se encuentre el objeto.

El espacio RGB es solo uno de los muchos espacios de color que existen. Otros como los espacios YIQ/YUV (luminancia-crominancia) utilizados en televisión, separan la información de brillo (luminancia, representada por el componente Y) de la de información de color (crominancia, representada por los componentes IQ O UV). Los espacios HSV (tono, saturación, valor) y HSL (tono, saturación, luminosidad) están diseñados para ser más intuitivos para los humanos, separando el color en su matiz (el "color en sí"), su saturación (intensidad) y su brillo. [6]

1.3 Digitalización de la imagen.

El objetivo de la visión por computadora es que una computadora pueda procesar una imagen. Para lograrlo, la imagen debe transformarse en una matriz de números, a este proceso se le conoce como **digitalización** y consta de dos pasos:

1. **Muestreo:** Es el proceso de convertir una imagen continua (la imagen real) en una imagen discreta (matriz de píxeles). La resolución espacial de una imagen (ancho x alto) determina el nivel de detalle con que se captura.

2. **Cuantificación:** Es el proceso de asignar un valor numérico (entero) al brillo de cada píxel. Una imagen de 8 bits por canal (RGB) tiene $2^8 = 256$ niveles por canal.

A partir de esta matriz de números, la computadora puede extraer propiedades estadísticas como el histograma que se tratará a continuación, los cuales le ayudarán a la computadora a construir una representación simbólica del contenido de la imagen, y así acercarse a lo que nosotros percibimos.

1.4 Representación matemática de una imagen. Histogramas de intensidad.

Una imagen puede representarse mediante una función de dos variables $f(x, y)$ donde (x, y) son las coordenadas del plano. Si la imagen es en escala de grises, es

decir, de un solo canal, entonces una función escalar es suficiente para representarla. En el caso de imágenes a color en el sistema RGB, se utilizan tres canales: rojo (R), verde (G) y azul (B), y la imagen puede representarse mediante una función vectorial.

La resolución radiométrica de una imagen corresponde a los valores de nivel de intensidad de los píxeles. Las imágenes utilizadas para este trabajo presentan niveles de intensidad en la escala de 0 a 255, lo que corresponde a un total de 256 tonos de gris. Para una imagen monocromática, el nivel de intensidad más bajo, valor de píxel 0, se asocia con el color negro, mientras que el valor de píxel más alto 255 corresponde al color blanco.

Un histograma de intensidad contiene en su eje X los niveles de intensidad, en una escala de 0 a 255, mientras que el eje Y indica la frecuencia con la que cada valor de intensidad aparece. El histograma de intensidad establece un vínculo entre las imágenes y una descripción probabilística. Se puede definir una función de probabilidad de primer orden $p(b; x, y)$ que representa la probabilidad de que el píxel ubicado en (x, y) tenga un brillo b. [6]

Los histogramas de intensidad utilizados en este trabajo pueden corresponder a la imagen completa, o a un solo canal de una imagen en color, o a una zona específica de un canal o a una sola fila de un canal, dependiendo del tipo de análisis que se vaya a realizar. Para el proceso automatizado implementado en este trabajo para revelar imágenes codificadas, se utilizan principalmente histogramas de una sola fila.

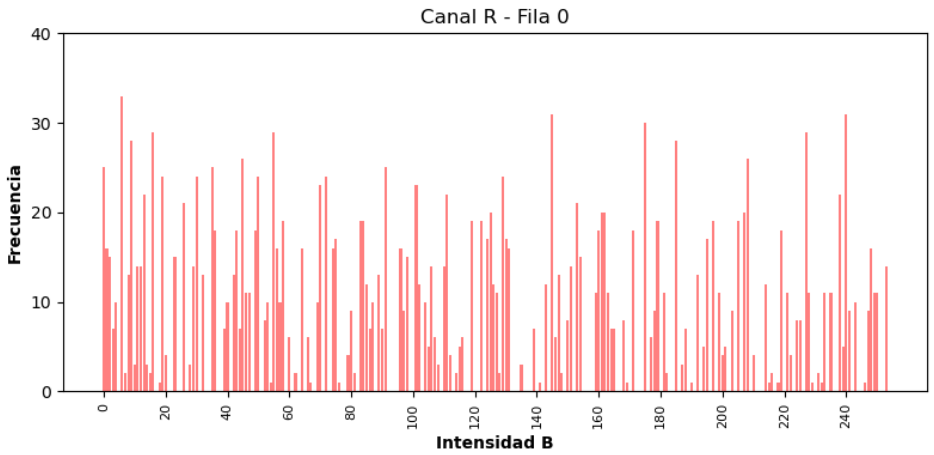


Figura 3: Histograma de intensidad de la fila 0 en el canal R de la imagen codificada de la ardilla.

Capítulo 2
Métodos.

Esta sección aborda los métodos utilizados en este trabajo. En primer lugar, se introducen las cajas de sustitución (S-Boxes), un método criptográfico empleado para codificar las imágenes que posteriormente son reveladas. A continuación, se describe la función de distribución Gamma, la cual, debido a sus características permite ajustar una o varias funciones Gamma al histograma de intensidades de una imagen. Finalmente, se aborda la estructura de las imágenes RGB y tonalidad de grises. Las imágenes procesadas en este trabajo fueron obtenidas de imageNet dataset (Large Scale Visual Recognition Challenge 2017—ILSVRC2017 [7])

2.1 Método de codificación de imágenes: cajas de seguridad dinámica (S-Boxes).

La codificación de las imágenes se realizó mediante S-Boxes. Una S-Box es una tabla de sustitución no lineal que toma como entrada el nivel de intensidad de un píxel de la imagen real y devuelve otro valor dentro del mismo dominio correspondiente al nivel de intensidad del píxel de la imagen codificada. Este dominio se encuentra en el rango $[0, 255]$. Para codificar una imagen, se aplica una S-Box a cada fila de la matriz de la imagen, y el valor de la intensidad de cada píxel de la fila se utiliza como índice en la S-Box para obtener su nuevo valor. De esta manera, una imagen con resolución espacial de $p * q$ píxeles se codifica utilizando diferentes cajas de sustitución, una S-Box por cada fila de la imagen. En este proceso de codificación se preservan las posiciones espaciales de los píxeles de la imagen real, únicamente se modifican los niveles de intensidad de los píxeles. [8]

Las S-Boxes dinámicas se generan de la siguiente manera:

- Se utiliza el mapeo logístico extendido debido a que puede adaptarse para operar en el intervalo $[0, 255]$ que corresponde al rango de niveles de intensidad

de la imagen.

- El mapeo es biyectivo, lo que significa que los valores dentro de este rango de niveles de intensidad se asignan de forma única a valores dentro del mismo rango sin repetirse.

Para codificar la imagen se parte de la ecuación logística extendida dada por:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \lambda x_n(2^k - x_n); k, n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

donde $\mathbb{N}_0$ es el conjunto de los números naturales incluyendo el cero.
Para $k = 8$ [8, 9] se obtienen dos valores para el parámetro $\lambda : \lambda = 1/2^6$ y $\lambda = -1/2^7$ con la ecuación expresada como:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(256 - x_n). \tag{2}$$

donde:

- x_n: estado actual del sistema.
- x_{n+1}: siguiente estado del sistema.
- λ: parámetro de control que determina el comportamiento del sistema.
  - $\lambda = \frac{1}{64}$: sistema dentro del rango de niveles de intensidad. $[0, 255]$.
  - $\lambda = \frac{-1}{128}$: zona de complejidad, rango $[-128, 384]$.

Dado que el objetivo es generar series temporales con distribución uniforme y con el fin de generar dos series temporales caóticas utilizando el mapeo logístico extendido, se emplean dos sistemas, ya que incrementan la complejidad del sistema y eliminan patrones repetitivos. Esto genera dos secuencias x_{n-10} y y_{n-10}, a las cuales se les añaden retardos mediante la mezcla de estados después de 10 iteraciones.

$$x_{n-10} = x_n + x_{n-5} + x_{n-10} \bmod 2^8. \qquad y_{n-10} = y_n + y_{n-6} + y_{n-10} \bmod 2^8.$$

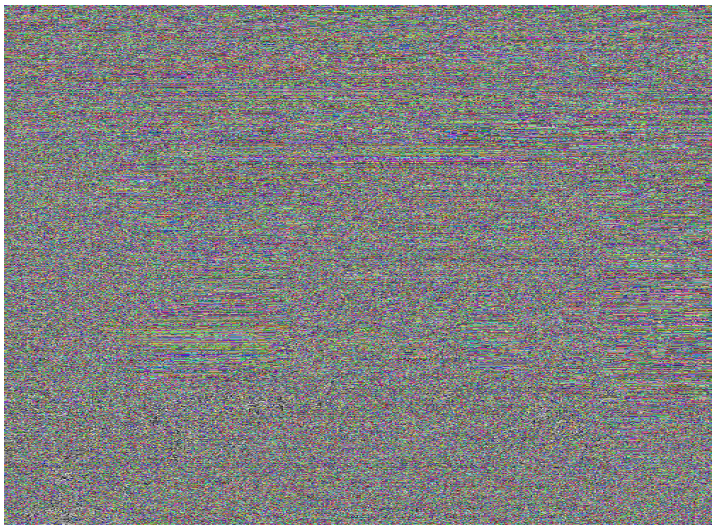
Finalmente, las secuencias se mezclan y se aplica módulo 256 para asegurar que todos los valores generados se encuentren dentro del rango de niveles de intensidad de los píxeles utilizando la ecuación:

$$s_n = x_n + y_n \bmod 2^8. \tag{3}$$

La figura 4a muestra una imagen real RGB de un puma y la figura 4b muestra la imagen RGB codificada, procesada de acuerdo con la ecuación (3). La imagen original quedó completamente oculta mediante la codificación usando S-Boxes.



(a)



(b)

Figura 4: Puma imagen real e imagen codificada. Puma, imagen real. Resolución espacial: 1468 x 2000. Puma, imagen codificada. Resolución espacial: 1468 x 2000.

2.2 Función de distribución Gamma.

La función de distribución Gamma es una función de probabilidad que permite trabajar con datos positivos y asimétricos, es decir, datos que no están distribuidos uniformemente. En este trabajo se utiliza la función de distribución Gamma para revelar imágenes codificadas. Se generan una o varias funciones Gamma para ajustar el histograma de intensidades de una imagen monocromática o los histogramas de intensidades generados por los canales de una imagen RGB. [10]

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}. \tag{4}$$

La media y la varianza de la distribución Gamma están dadas por:

$$\mu = E[X] = \alpha\beta, \tag{5}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2. \tag{6}$$

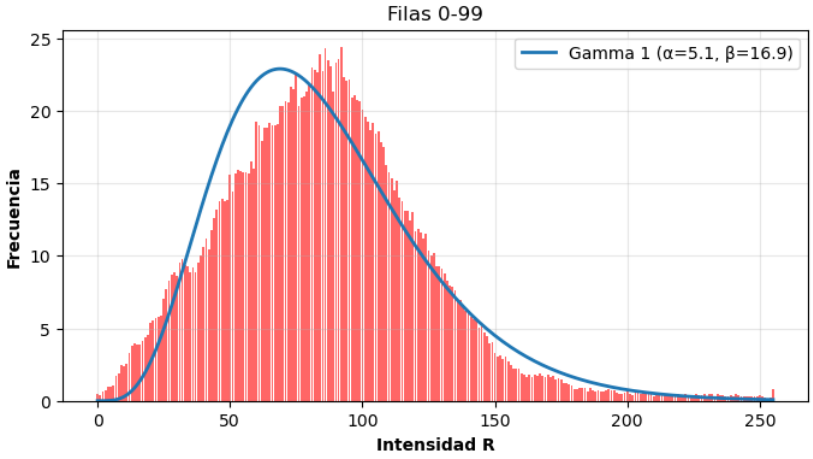
A partir de estas expresiones es posible despejar los parámetros de la distribución en función de la media y la varianza:

$$\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2}. \tag{7}$$

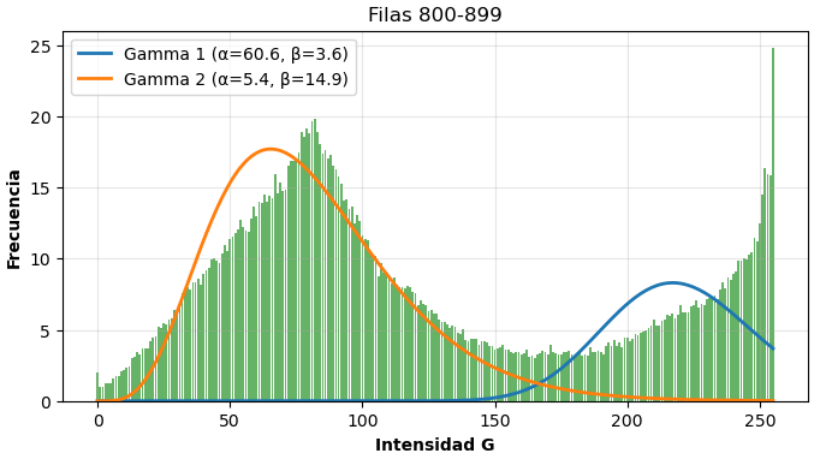
Parámetro de forma: define la ubicación del pico de la curva.

$$\beta = \frac{\sigma^2}{\mu}. \tag{8}$$

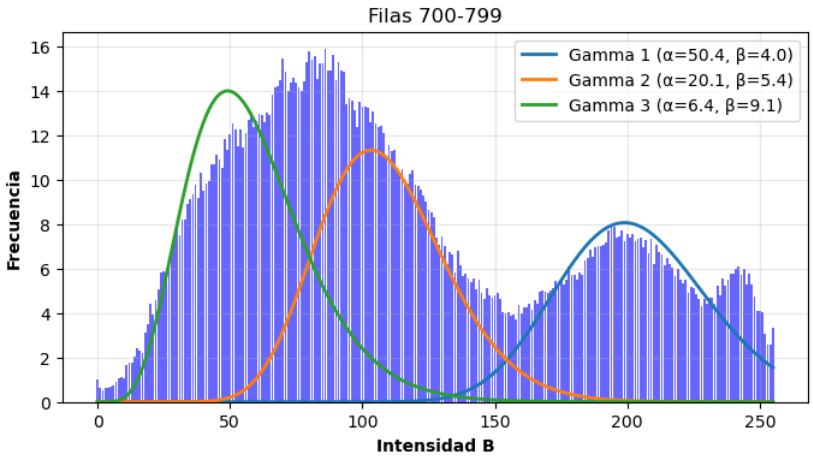
Parámetro de escala: define la anchura de la curva.



(a)



(b)



(c)

Figura 5: Distribuciones Gamma generadas para los distintos histogramas de intensidad. **(a)** Una curva Gamma generada para el canal R. **(b)** Dos curvas Gamma generadas para el canal G. **(c)** Tres curvas Gamma generadas para el canal B.

Para este trabajo se investigaron varias funciones de distribución, incluyendo las distribuciones de Laplace, Poisson y Beta. Sin embargo, se seleccionó la función de distribución Gamma debido a su versatilidad para generar curvas simétricas y asimétricas que pueden controlarse mediante los parámetros de forma (α) y escala (β). Se considera que una función Gamma, o una combinación de varias de ellas, permite generar funciones que pueden ajustarse a emular los histogramas de intensidad de las imágenes reales. Por el contrario, las otras funciones de distribución presentan limitaciones para el procesamiento de datos: la distribución de Poisson modela datos de eventos discretos y es útil para modelar eventos poco frecuentes, sin embargo, presenta la limitación de contar con un único parámetro de control, lo que reduce su flexibilidad. La distribución de Laplace, al ser simétrica no reproduce adecuadamente la asimetría típica de los histogramas de intensidad. La distribución Beta tampoco puede ajustarse a la amplia variedad de curvas observadas en los histogramas de intensidad de las imágenes. Por lo que la distribución Gamma resultó ser la opción más adecuada para este trabajo. [11]

2.3 Teorema Nyquist.

El teorema Nyquist establece que una señal analógica puede reconstruirse a partir de sus muestras si la frecuencia de muestreo es superior al doble de la frecuencia contenida en dicha señal. Este mismo teorema puede extenderse al dominio espacial para comprender la relación entre resolución y calidad de imagen. El cual dice que la frecuencia de muestreo espacial, determinada por la resolución de la imagen final, debe ser al menos el doble de la frecuencia espacial más alta presente en la escena original para evitar el fenómeno de aliasing. [12]
El **aliasing** es un fenómeno que ocurre cuando una señal, en este caso una imagen, se muestrea a una resolución insuficiente para capturar los detalles más finos. En el contexto de una imagen, una frecuencia espacial alta corresponde a detalles finos, bordes definidos o texturas. Si la resolución es insuficiente estos detalles no pueden ser representados correctamente. [13]

Por lo tanto, al aumentar la resolución, es decir, al incrementar la frecuencia de muestreo espacial, se eleva la frecuencia máxima que se puede capturar sin distorsión. Esto permite que la imagen digital resultante contenga una mayor cantidad de detalles finos de la escena original y reduzca el fenómeno de aliasing.

Capítulo 3
Resultados.

Esta sección presenta los resultados obtenidos al revelar imágenes codificadas utilizando la función de distribución Gamma. Se realizó un proceso automatizado el cual nos da resultados de forma más rápida y es capaz de procesar mejores resultados. La sección 3.1 describe el proceso automatizado desarrollado en este trabajo, el cual representa una contribución de gran utilidad, ya que normalmente requieren una cantidad de trabajo en el proceso manual en base a prueba y error.
Finalmente, en las secciones 3.2 y 3.3 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el proceso automatizado para revelar imágenes en tonos de gris e imágenes RGB.

3.1 Proceso automatizado para revelar imágenes codificadas.

La figura 6 muestra un diagrama de bloques que ilustra el proceso implementado para revelar automáticamente imágenes codificadas. El algoritmo comienza seleccionando una o dos curvas Gamma que se consideren son adecuadas para simular los histogramas de intensidades de imágenes reales. Si se seleccionan dos curvas Gamma para procesar las imágenes, la función resultante que se obtiene es la suma de ambas, de tal manera que el histograma de la imagen codificada es ajustado a esta función resultante. Cada curva Gamma seleccionada tiene los parámetros estadísticos α (alpha) y β (beta).
Dependiendo del tipo de imagen codificada que se va a procesar, ya sea en tonalidad de grises o RGB, para cada canal y fila de la imagen se obtiene un histograma de intensidades. El procedimiento consiste en tomar cada una de las barras del histograma de la imagen codificada para comparar las con las barras del histograma generado por la curva Gamma; una vez que se ubica la barra codificada en el valor que le corresponde en el histograma de la Gamma, se cambia el valor de la intensidad del histograma de la imagen codificada por el valor que proporciona la función

Gamma. Una vez completado este procedimiento para todas las filas de la imagen monocromática o, para los tres canales, si se trata de una imagen a color, se obtiene la imagen revelada monocromática o, mediante la integración de las imágenes de los 3 canales (RGB) se obtiene la imagen final a color.

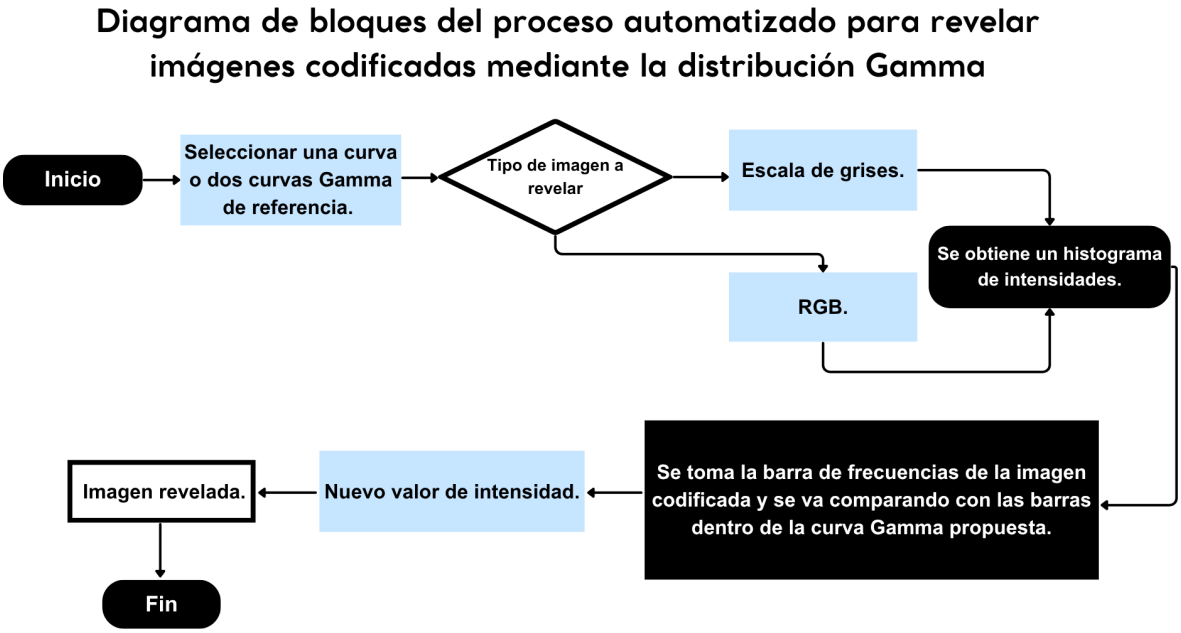


Figura 6: *Procedimiento automatizado para revelar imágenes codificadas.* La imagen se procesa fila por fila, en cada fila se genera un histograma de intensidades. Se obtiene un nuevo valor al ajustarlo a la curva de la función Gamma. Obtenemos la imagen revelada.

3.2 Imágenes en tonos de gris

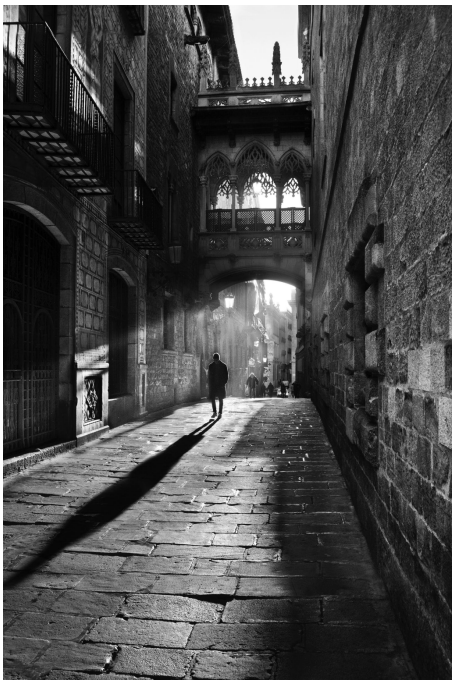
Para las imágenes procesadas en tonos de gris, se implementó el proceso automatizado considerando diferentes resoluciones espaciales para demostrar que existe una relación entre la resolución espacial y la definición de las características de la imagen revelada: a mayor resolución espacial de la imagen codificada, mejores resultados podemos obtener, en cuanto a la claridad de la imagen revelada.

Adicionalmente, las imágenes en tonos de gris pueden mejorar si se introduce contraste, pues incrementa la definición de características de la imagen para la percepción del ojo humano. En consecuencia, la introducción de contraste puede mejorar mucho las imágenes en tonos de gris, pues permite visualizar mejor sus segmentos. La introducción de contraste se implementa mediante la sustitución de un porcen-

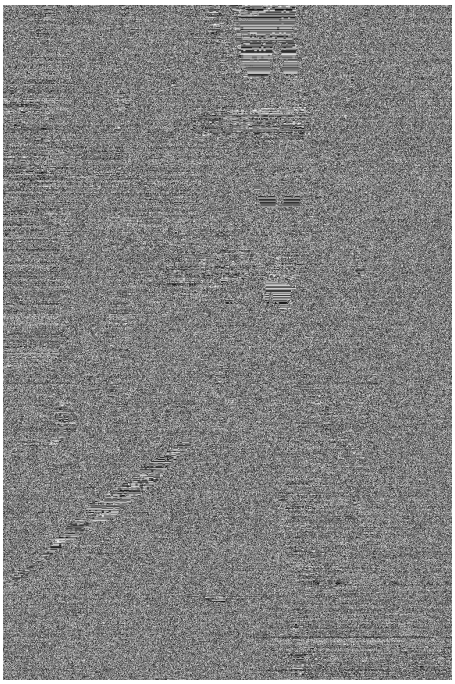
taje de los valores de intensidad obtenidos al revelar la imagen por píxeles blancos (intensidad 255) y negros (intensidad 0). El resto de los píxeles conservan los valores de intensidad que fueron asignados a partir de las funciones de distribución Gamma, en el proceso de revelado.

En las secciones 3.2.1 y 3.2.2 se presentan los resultados obtenidos al aplicar el proceso automatizado de revelación de imágenes a las imágenes en tonos de gris. En cada una de ellas se demuestran dos aspectos; el primero son las imágenes obtenidas al aplicar una curva y dos curvas de distribución Gamma, y el segundo muestras las imágenes con introducción de contraste, en cada una de estas se anexa un cuadro de parámetros para cada una de las imágenes.

3.2.1 Callejón



(a) Imagen original del callejón.



(b) Imagen codificada del callejón.

Figura 7: Imágenes de referencia utilizadas para los experimentos con diferentes resoluciones e introducción de contraste. Ambas imágenes tienen una resolución espacial de 1024×1540.

3.2.1.1 Revelación de imágenes con una y dos funciones Gamma.

Con el objetivo de mostrar los resultados del proceso automatizado de revelación de imágenes, se generaron versiones con diferentes resoluciones espaciales de las figuras 7a y 7b. Posteriormente, cada una de las imágenes codificadas se procesaron conforme se indica en el diagrama de bloques de la figura 6, utilizando primero una función Gamma y después con dos funciones Gamma. Los parámetros de las funciones Gamma se indican en el Cuadro 1.

Cuadro 1: Parámetros utilizados para revelar la imagen del Callejón 7a.

	Gamma		**Primer contraste**			**Segundo contraste**		
	α	β	Blanco	Negro	Gamma	Blanco	Negro	Gamma
1 curva Gamma	4.28	17.79	25 %	25 %	50 %	60 %	20 %	20 %
2 curvas Gamma	14.77	1.40	40 %	30 %	30 %	70 %	20 %	10 %
	4.80	20.74						

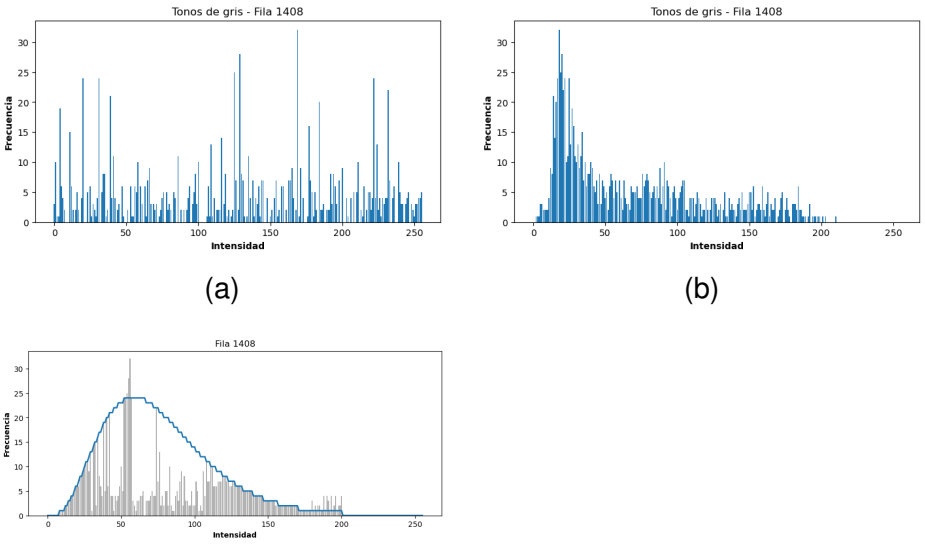


Figura 8: Histogramas de intensidades del Callejón, con una curva Gamma. **(a)** Histograma de intensidades de la imagen codificada para la fila 1408. **(b)** Histograma de intensidades de la imagen real para la fila 1408. **(c)** Histograma de intensidades resultante del ajuste de la imagen codificada a la curva Gamma propuesta para la fila 1408.

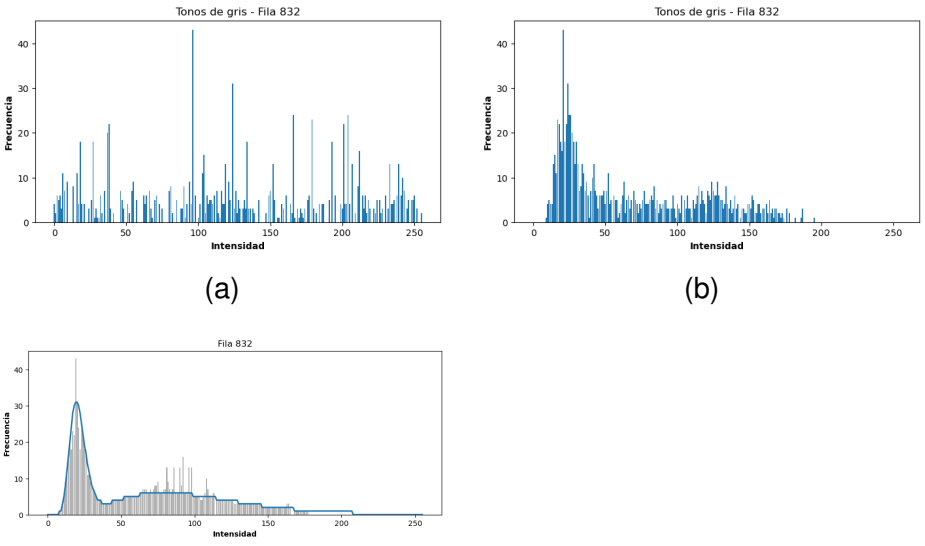
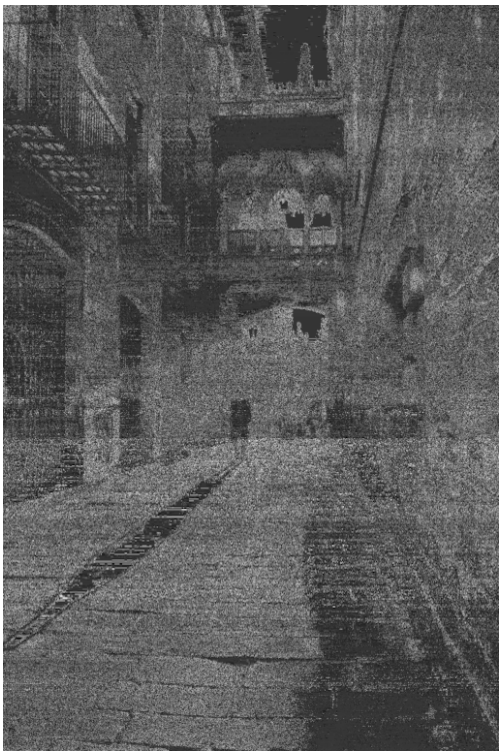
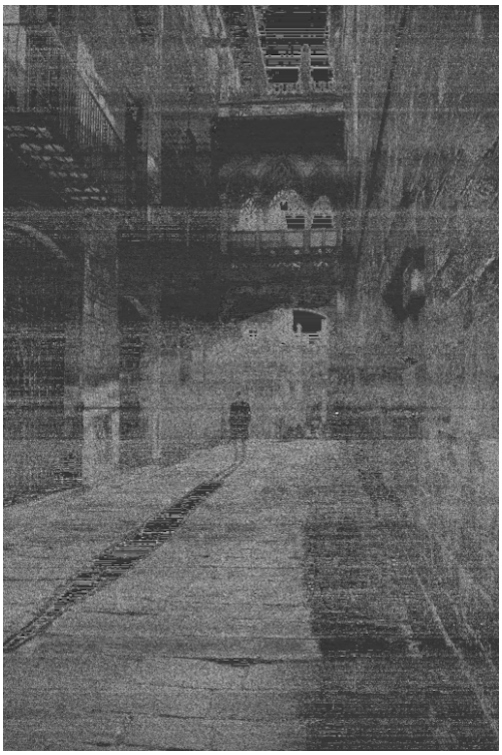


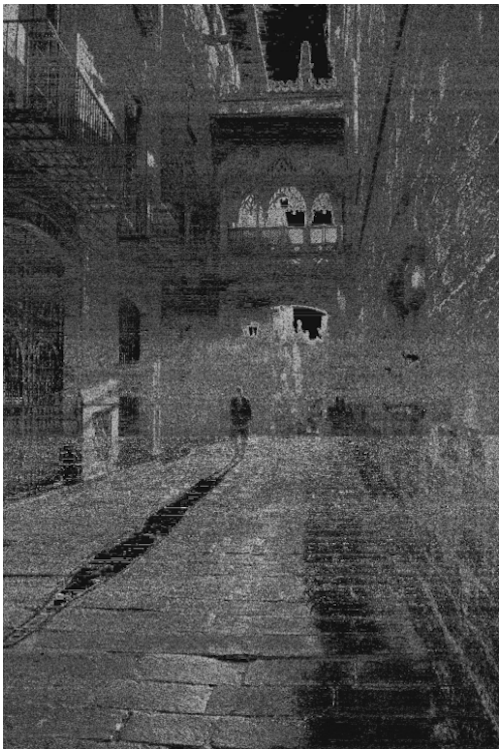
Figura 9: Histogramas de intensidades del Callejón, con dos curvas Gamma. **(a)** Histograma de intensidades de la imagen codificada para la fila 832. **(b)** Histograma de intensidades de la imagen real para la fila 832. **(c)** Histograma de intensidades resultante del ajuste de la imagen codificada a las curvas Gamma propuestas para la fila 832.



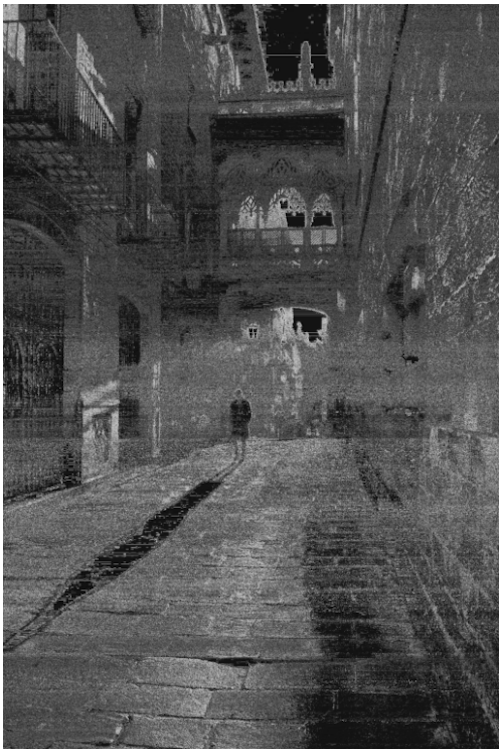
(a) Resolución espacial: 1024×1540.



(b) Resolución espacial: 1600×2406.



(c) Resolución espacial: 1024×1540.

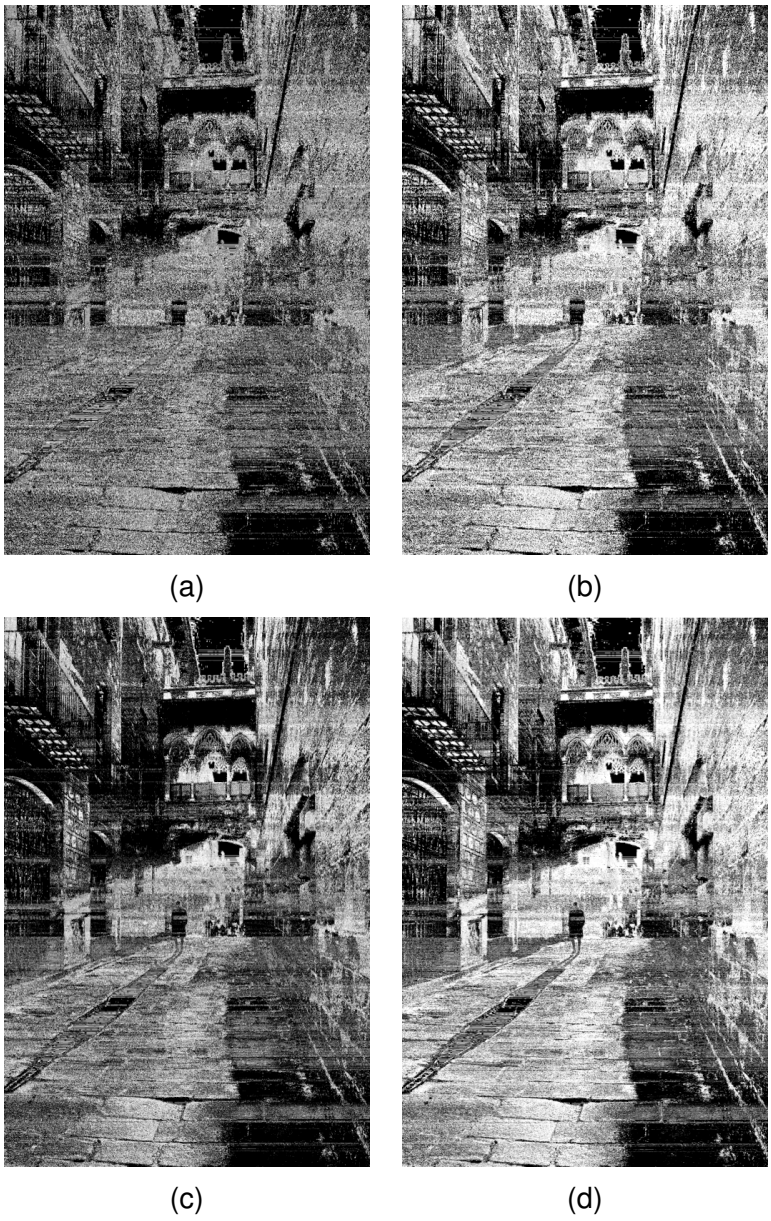


(d) Resolución espacial: 1600×2406.

Figura 10: Resultados obtenidos procesando las diferentes resoluciones de la imagen del Callejón con una o dos funciones Gamma. Las figuras **(a)** y **(b)** corresponden al procesamiento con una función Gamma, en tanto que las figuras **(c)** y **(d)** fueron procesadas aplicando dos funciones Gamma.

3.2.1.2 Introducción de contraste.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos al introducir diferentes porcentajes de contraste para mejorar las imágenes obtenidas en las figuras 10a y 10d.

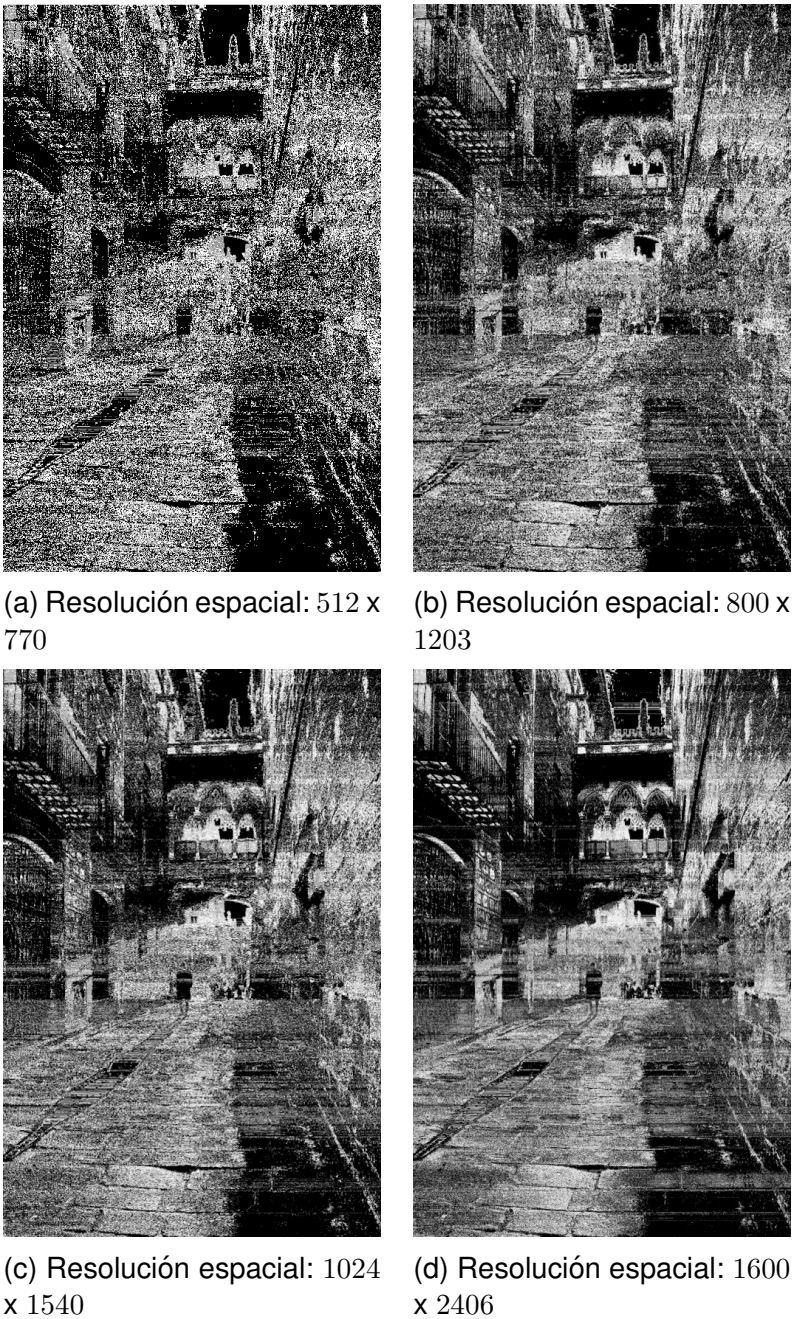


(a) (b) (c) (d)

Figura 11: Se aplicó el contraste conforme se indicada en el Cuadro 1. La figura **(a)** muestra el resultado obtenido con el primer contraste y la figura **(b)** muestra el resultado con el segundo contraste. Ambas imágenes fueron obtenidas a partir de la figura 10a que tiene una resolución espacial de 1024 x 1540 y fue revelada aplicando una función Gamma. Las figuras **(c)** y **(d)** muestran las imágenes obtenidas aplicando el primer y segundo contraste indicado en el Cuadro 1, respectivamente. Las imágenes **(c)** y **(d)** resultan de introducir contraste a la figura 10d cuya resolución espacial es de 1600 x 2406, y fue revelada utilizando dos funciones Gamma.

3.2.1.3 Efecto de la resolución en la calidad de la imagen revelada.

Los contrastes mencionados en el Cuadro 1 fueron aplicados a las imágenes generadas con diferente resolución espacial, esto con el fin de resaltar el efecto mencionado, el cual es que a mayor resolución espacial mejores resultados obtenemos.



(a) Resolución espacial: 512 x 770

(b) Resolución espacial: 800 x 1203

(c) Resolución espacial: 1024 x 1540

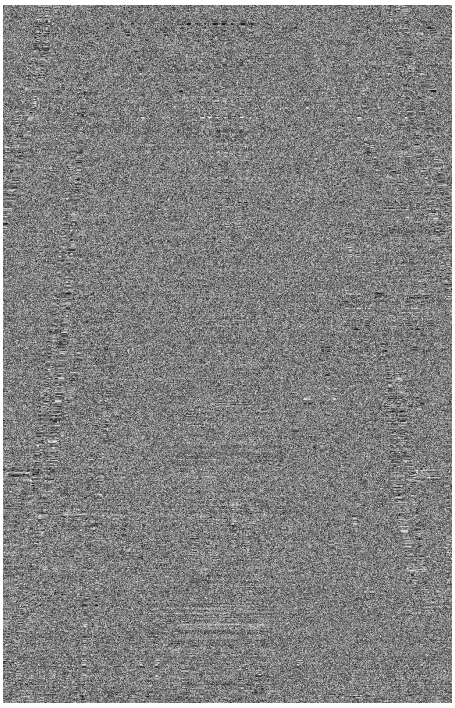
(d) Resolución espacial: 1600 x 2406

Figura 12: Se aplicó la primera introducción de contraste que se indica en el Cuadro 1 para las imágenes procesadas con dos funciones Gamma utilizando diferentes resoluciones espaciales. La figura muestra el efecto de aumentar la calidad de la imagen al aumentar la resolución en las imágenes reveladas.

3.2.2 Estructura



(a) Imagen original de la estructura.



(b) Imagen codificada de la estructura.

Figura 13: Imágenes de referencia utilizadas para los experimentos con diferentes resoluciones e introducción de contraste. Ambas imágenes tienen una resolución espacial de 1024×1594.

3.2.2.1 Revelación de imágenes con una y dos curvas Gamma.

Con el mismo objetivo de la sección 3.2.1, se generaron versiones con diferentes resoluciones espaciales de las figuras 13a y 13b. Posteriormente, cada una de las imágenes codificadas se procesaron conforme se indica en el diagrama de bloques de la figura 6, utilizando primero una función Gamma y después dos funciones Gamma. Los parámetros de las funciones Gamma se indican en el Cuadro 2.

Cuadro 2: Parámetros utilizados para revelar la imagen de la Estructura 13a.

	Gamma		**Primer contraste**			**Segundo contraste**		
	α	β	Blanco	Negro	Gamma	Blanco	Negro	Gamma
1 curva Gamma	3.92	18.68	25 %	25 %	50 %	60 %	20 %	20 %
2 curvas Gamma	1.90	19.60	40 %	30 %	30 %	70 %	20 %	10 %
	14.51	12.06						

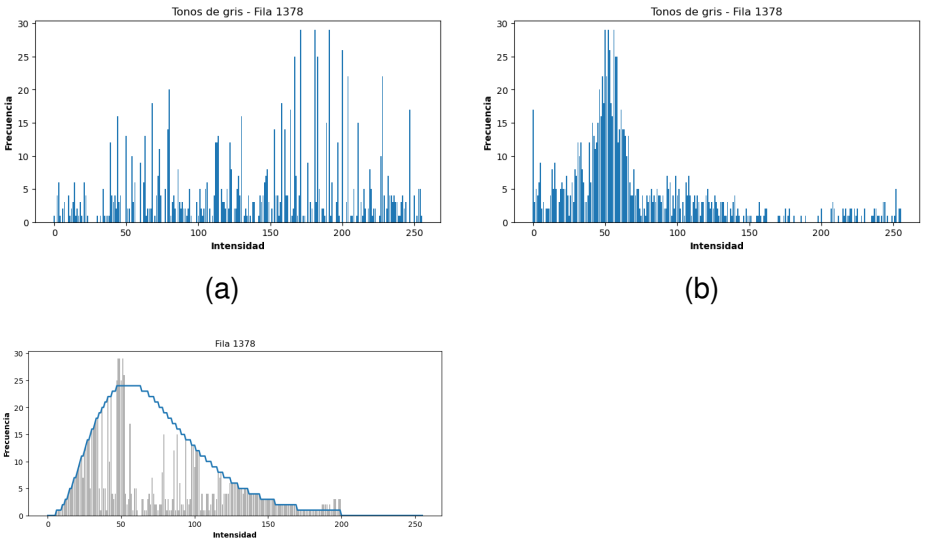


Figura 14: Histogramas de intensidades de la Estructura, con una curva Gamma. **(a)** Histograma de intensidades de la imagen codificada para la fila 1378. **(b)** Histograma de intensidades de la imagen real para la fila 1378. **(c)** Histograma de intensidades resultante del ajuste de la imagen codificada a la curva Gamma propuesta para la fila 1378.

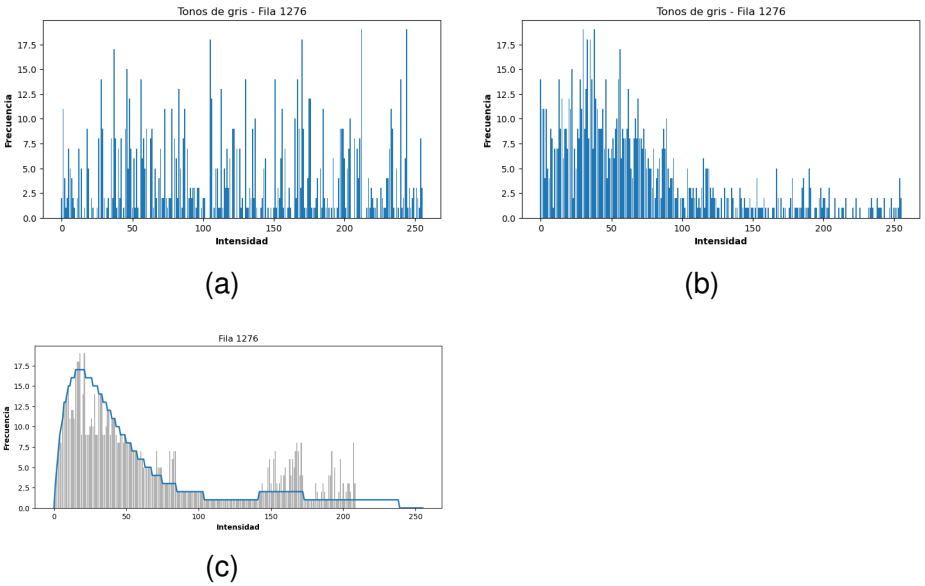
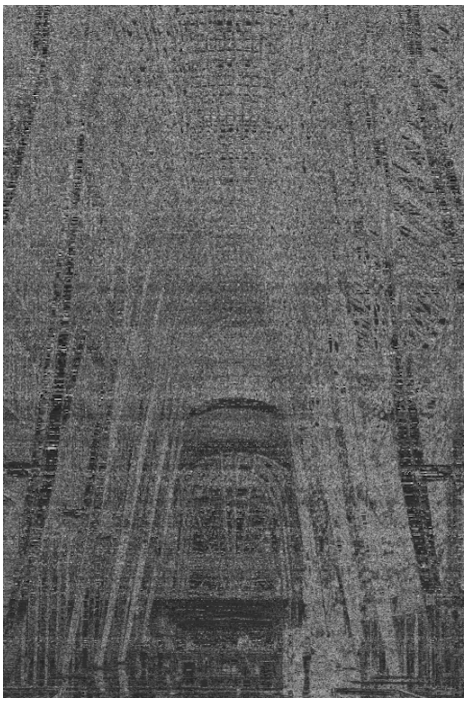
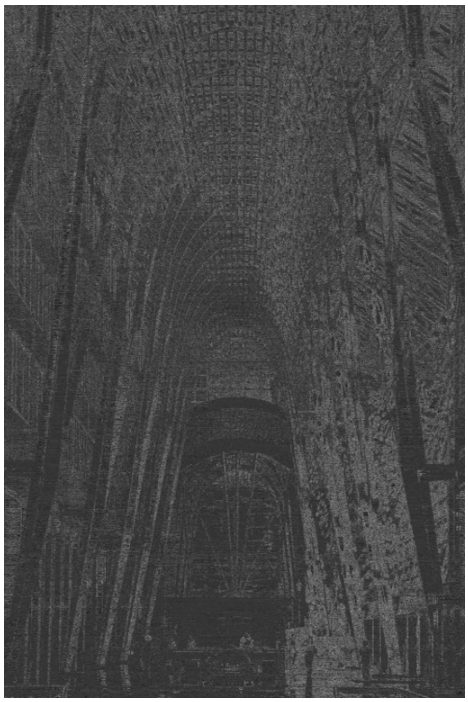


Figura 15: Histogramas de intensidades de la Estructura, con dos curvas Gamma. **(a)** Histograma de intensidades de la imagen codificada para la fila 1276. **(b)** Histograma de intensidades de la imagen real para la fila 1276. **(c)** Histograma de intensidades resultante del ajuste de la imagen codificada a las curvas Gamma propuestas para la fila 1276.



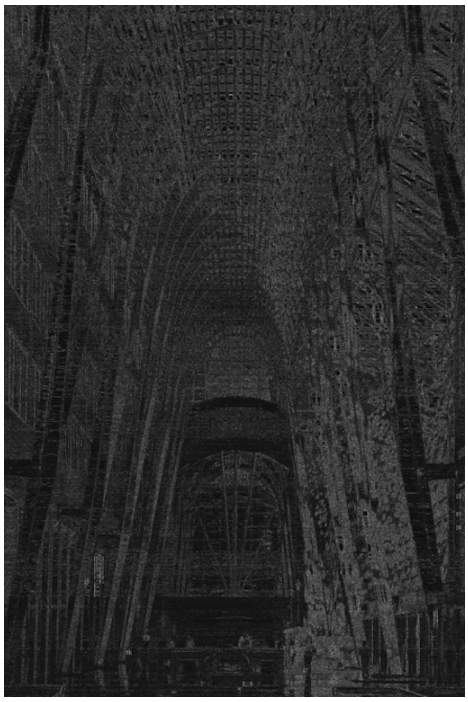
(a) Resolución espacial: 1024×1594.



(b) Resolución espacial: 1600×2491.



(c) Resolución espacial: 1024×1594.

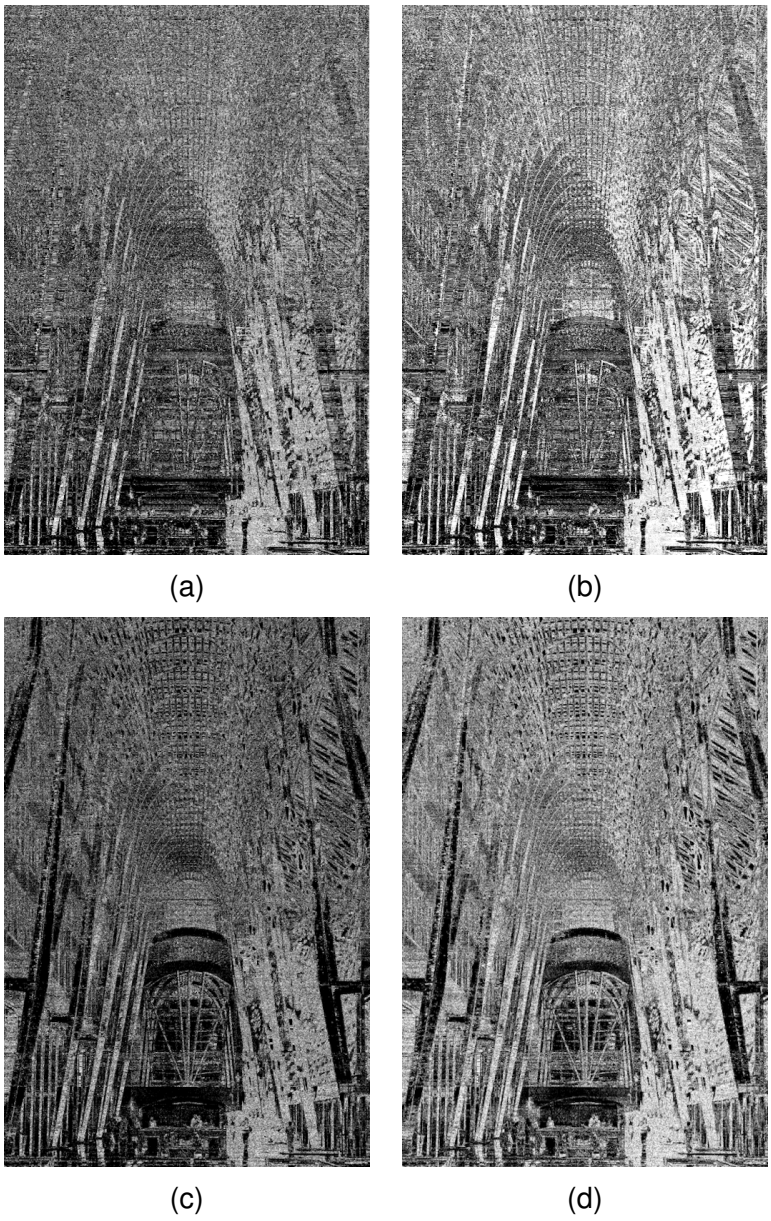


(d) Resolución espacial: 1600×2491.

Figura 16: Resultados obtenidos procesando las diferentes resoluciones de la imagen de la Estructura con una o dos funciones Gamma. Las figuras **(a)** y **(b)** corresponden al procesamiento con una función Gamma, en tanto que las figuras **(c)** y **(d)** fueron procesadas aplicando dos funciones Gamma.

3.2.2.2 Introducción de contraste.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos al introducir diferentes contrastes para mejorar las imagenes obtenidas en las figuras 16a y 16d.



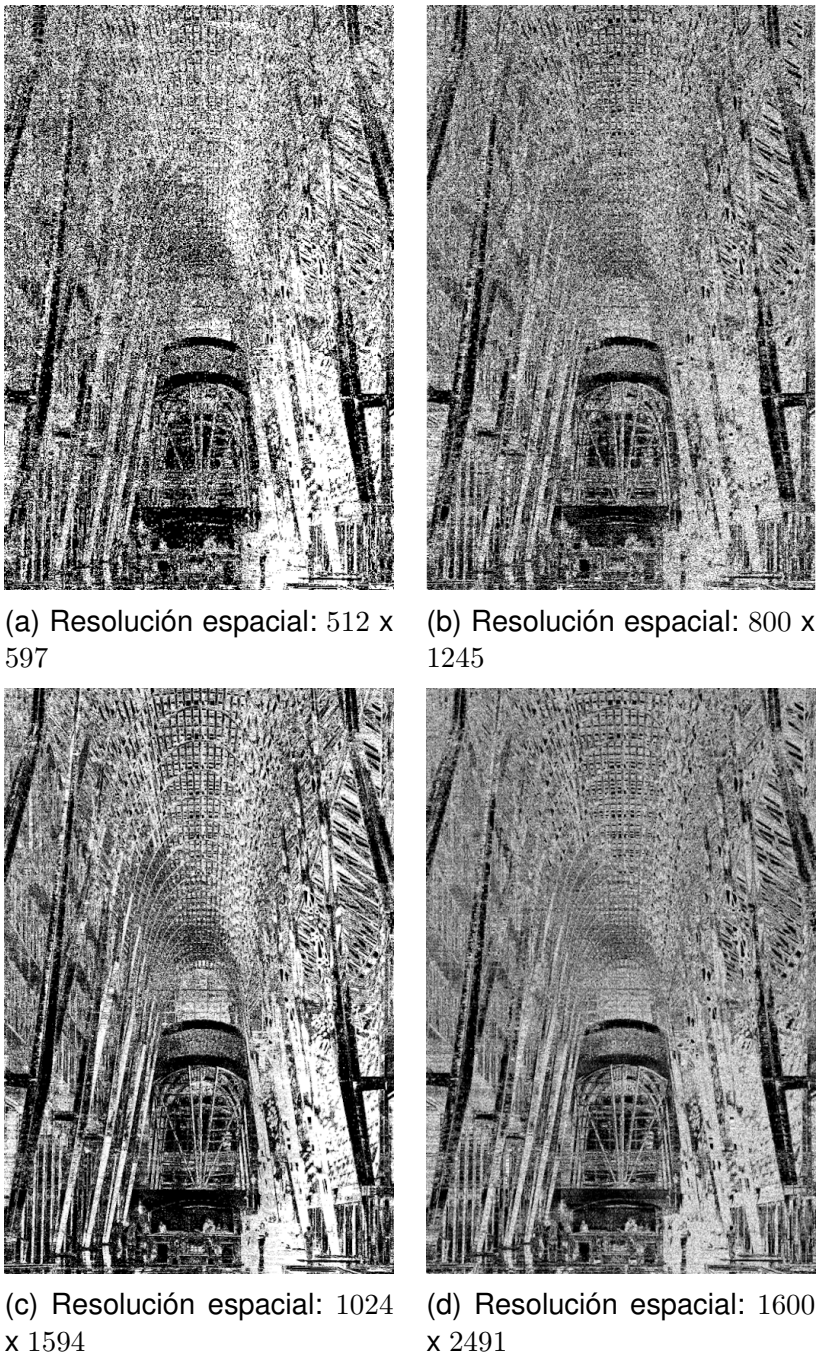
(a) (b)

(c) (d)

Figura 17: Se aplicó el contraste conforme se indica en el Cuadro 2. La figura **(a)** muestra el resultado con el primer contraste y la figura **(b)** muestra el resultado con el segundo contraste. Ambas imágenes fueron obtenidas a partir de la figura 16a que tiene resolución espacial de 1024 x 1594 y fue revelada aplicando una función Gamma. Las figuras **(c)** y **(d)** muestran las imágenes obtenidas aplicando el primer y segundo contraste indicado en el Cuadro 2, respectivamente. Las imágenes **(c)** y **(d)** resultan de introducir contraste a la figura 16d cuya resolución espacial de 1600 x 2491, y fue revelada utilizando dos funciones Gamma.

3.2.2.3 Efecto de la resolución en la calidad de la imagen revelada.

Los contrastes mencionados en el cuadro 2 fueron aplicados a las imágenes generadas con diferente resolución espacial.



(a) Resolución espacial: 512 x 597

(b) Resolución espacial: 800 x 1245

(c) Resolución espacial: 1024 x 1594

(d) Resolución espacial: 1600 x 2491

Figura 18: Se aplicó la segunda introducción de contraste que se indica en el cuadro 2 para las imágenes procesadas con dos funciones Gamma utilizando diferentes resoluciones espaciales. La figura muestra el efecto de aumentar la calidad de la imagen al aumentar la resolución en las imágenes reveladas.

3.3 Imágenes RGB

Para las imágenes a color se implementó el proceso automatizado en cada uno de los canales (RGB) que corresponden a las imágenes de cada canal en tonos de gris de cada canal. Las imágenes reveladas muestran buena definición de las características y se les podrá aplicar contraste, sin embargo, al integrar los 3 canales se tendrán píxeles en blanco y negro que no pertenecen a los colores de la imagen real, lo que daría origen a la introducción de colores ajenos a la imagen real. Un ejemplo de esto se encontrará en la sección 4 de discusión.

El procesamiento de este tipo de imágenes a color tiene su grado de dificultad, ya que al integrar los 3 canales obtendremos una imagen RGB que casi siempre difiere de la imagen real. Esto se debe a la suposición de que una curva o dos funciones Gamma que se consideran las adecuadas para simular los histogramas de intensidades de las imágenes reales, sin embargo, al realizar la transición de llevar las barras del histograma de intensidades de la imagen codificada para ajustar la o las funciones Gamma propuestas, los valores de intensidad pueden coincidir con los reales o pueden ser un aproximado al valor de intensidad que tiene en la imagen real. Esto es, el ajuste del histograma de frecuencias de la imagen codificada al histograma de frecuencias generado teóricamente para obtener la imagen real difícilmente puede tener un $100\,\%$ de coincidencia, o lo que es lo mismo, tener cero errores.

En las secciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 se presentan los resultados obtenidos al aplicar el proceso automatizado mencionado en el diagrama de bloques de la figura 6 a las imágenes de color. En cada una de las imágenes se muestran tres aspectos; el primero son los histogramas de intensidades generados tanto para la imagen codificada como el generado teóricamente para la imagen real, mostrando como se ajusta el histograma de la imagen codificada a la curva de la función Gamma propuesta; la segunda son las imágenes obtenidas por canal (RGB), y la tercera es la imagen final RGB generada al integrar los 3 canales.

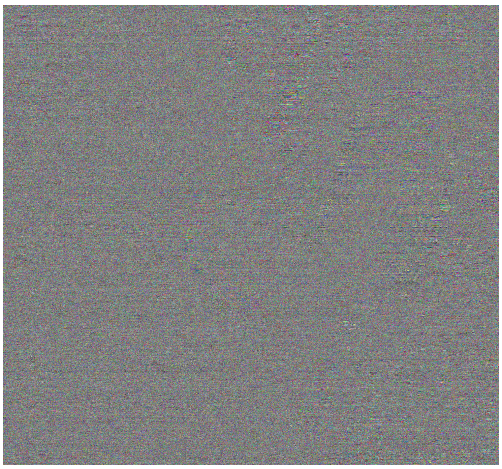
En el caso de la ardilla 3.3.1 y del perro 3.3.2 se utilizó una sola función Gamma para cada uno de sus canales, debido a que cada uno de sus histogramas de intensidades de la imagen real puede ajustarse a una sola función Gamma. Para el puma de la sección 3.3.3 se utilizaron dos funciones Gamma. En este caso, los histogramas de intensidades de la imagen real en sus primeras filas generan un pico, pero conforme se avanza de fila en fila empieza a aparecer más de un solo pico

en sus histogramas, por lo cual decidí trabajar con dos curvas para cada uno de sus canales. Con cada una de las imágenes y sus respectivos canales se hicieron pruebas con diferentes curvas hasta encontrar las que dieran mejores resultados.

3.3.1 Ardilla



(a)



(b)

Figura 19: Ardilla, imagen real. Resolución espacial: 2000 x 1856. Ardilla, imagen codificada. Resolución espacial: 2000 x 1856.

3.3.1.1 Histograma de intensidades.

Con el propósito de ilustrar el procedimiento seguido para revelar las imágenes codificadas, se muestran los histogramas de intensidad de la fila 0 de la imagen codificada (19b) y de la imagen real (19a). Asimismo, la figura 20c muestra la curva Gamma generada para el canal R y el resultado del ajuste generado en este caso. El Cuadro 3 indica los parámetros de la distribución Gamma utilizados para poder revelar las imágenes.

Cuadro 3: Parámetros de la distribución Gamma para la imagen de la ardilla 19a.

	Canal	**Gamma**	
		α	β
1 curva Gamma	R	4.59	22.17
	G	2.99	23.92
	B	3.62	23.69

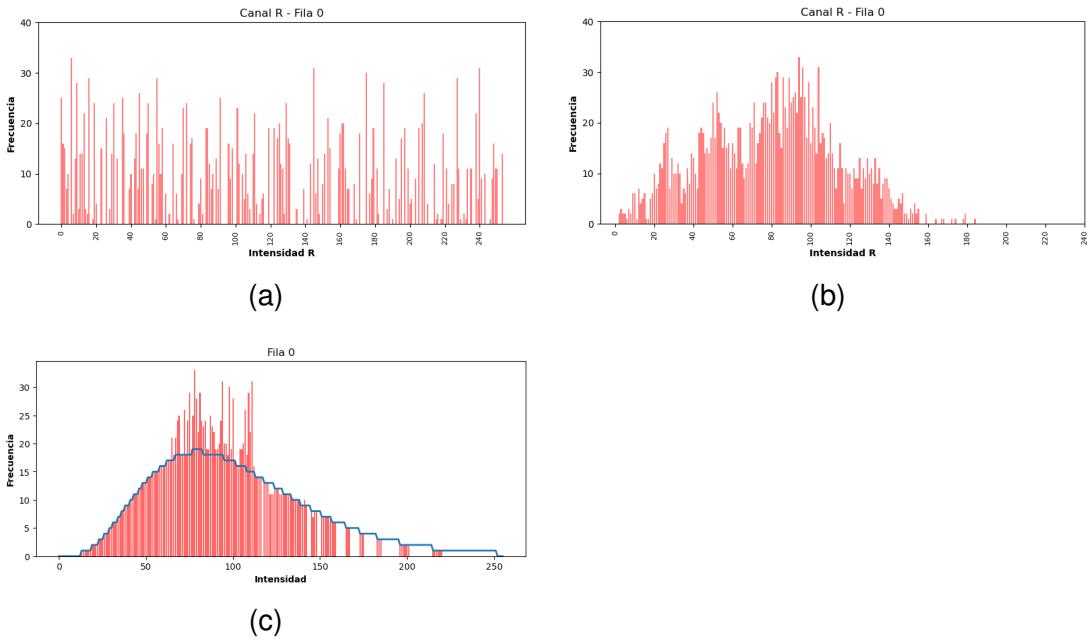


Figura 20: Histogramas de intensidades del canal R para la ardilla. **(a)** Histograma de intensidades de la imagen codificada para la fila 0. **(b)** Histograma de intensidades de la imagen real para la fila 0. **(c)** Histograma de intensidades resultante del ajuste de la imagen codificada a la curva Gamma propuesta para la fila 0.

3.3.1.2 Imagen revelada por canal e imagen final revelada integrando los tres canales (RGB).

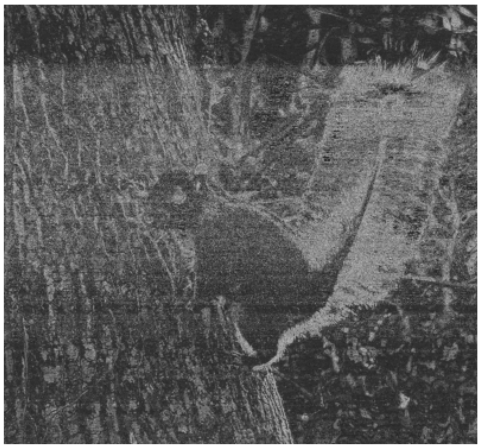


(a) Imagen Real del canal R.

(b) Imagen revelada para el canal R.



(c) Imagen Real del canal G.



(d) Imagen revelada para el canal G.



(e) Imagen Real del canal B.



(f) Imagen revelada para el canal B.



(g) Imagen Real. Resolución espacial: 2000 x 1856.



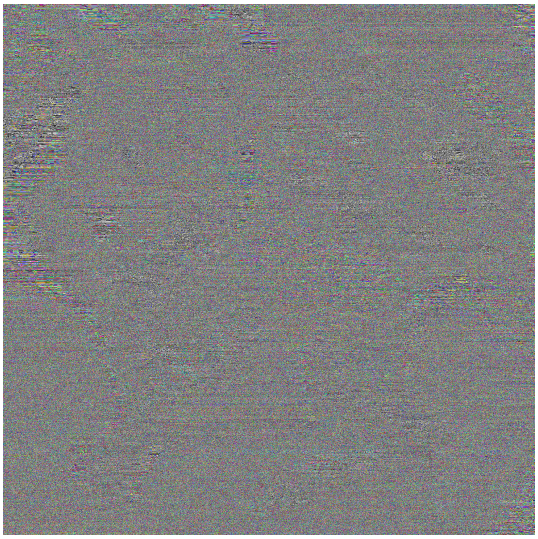
(h) Imagen Revelada. Resolución espacial: 2000 x 1856.

Figura 21: Imagen RGB de la ardilla revelada con el proceso automatizado. Las figuras **(b)**,**(d)** y **(f)** muestran las imágenes reveladas para cada canal R,G y B respectivamente. La figura **(h)** muestra la imagen RGB resultante.

3.3.2 Perro



(a)



(b)

Figura 22: Perro, imagen real. Resolución espacial: 2000 x 2000. Perro, imagen codificada. Resolución espacial: 2000 x 2000.

3.3.2.1 Histograma de intensidades.

Con el propósito de ilustrar el procedimiento seguido para revelar las imágenes codificadas, se muestran los histogramas de intensidad de la fila 1293 de la imagen codificada (22b) y de la imagen real (22a). Asimismo, la figura 23c muestra la curva Gamma generada para el canal G y el resultado del ajuste generado en este caso. El Cuadro 4 indica los parámetros de la distribución Gamma utilizados para poder revelar las imágenes.

Cuadro 4: Parámetros de la distribución Gamma para la imagen del perro 22a.

	Canal	**Gamma**	
		α	β
1 curva Gamma	R	2.61	27.60
	G	2.65	25.54
	B	1.80	35.15

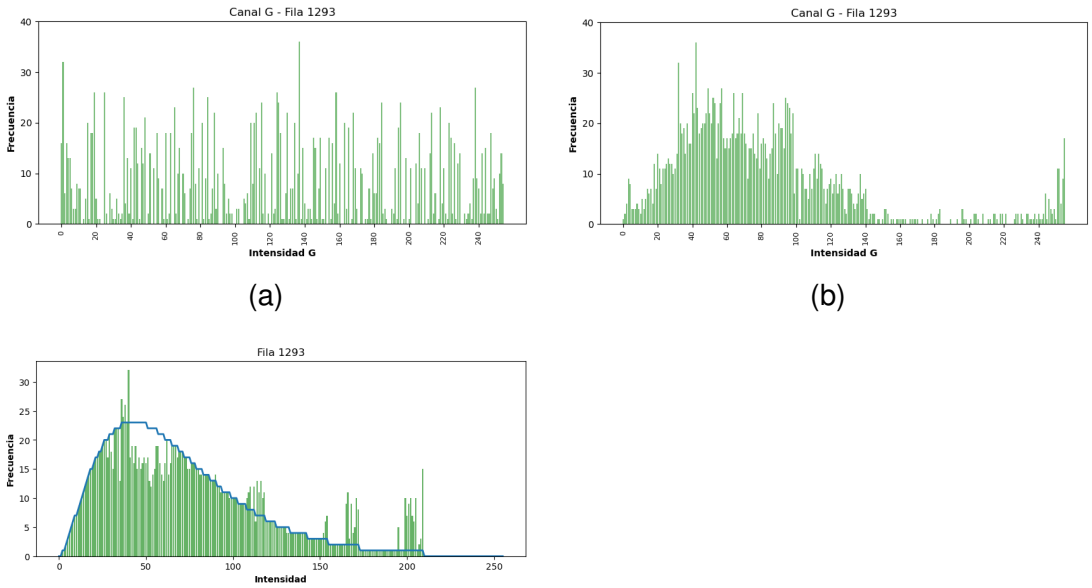
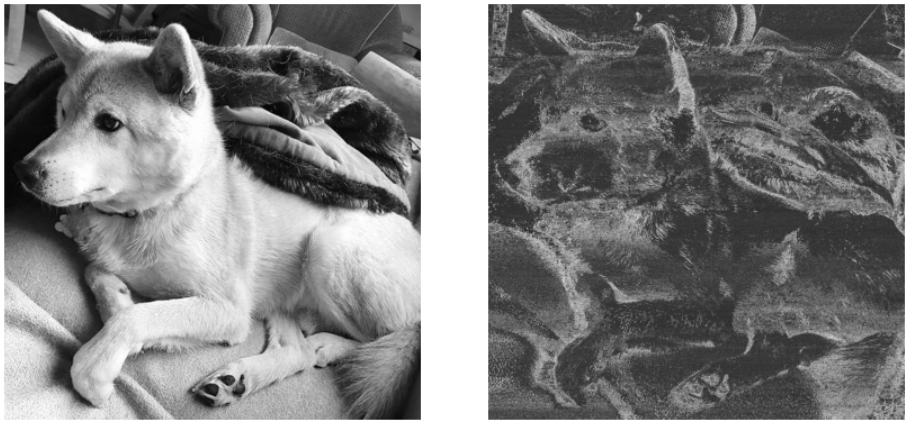


Figura 23: Histogramas de intensidades del canal G para el perro. **(a)** Histograma de intensidades de la imagen codificada para la fila 1293. **(b)** Histograma de intensidades de la imagen real para la fila 1293. **(c)** Histograma de intensidades de la imagen codificada, ajustado dentro de la curva Gamma propuesta para la fila 1293.

3.3.2.2 Imagen revelada por canal e imagen final revelada integrando los tres canales (RGB).



(a) Imagen Real del canal R.

(b) Imagen revelada para el canal R.



(c) Imagen Real del canal G.



(d) Imagen revelada para el canal G.



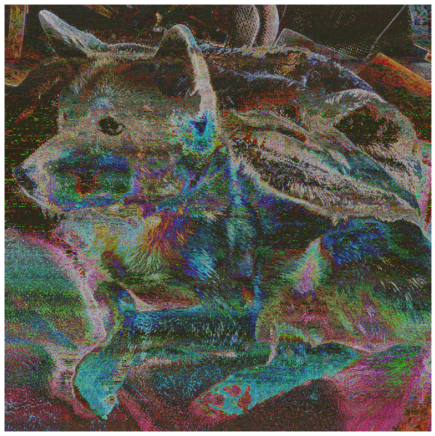
(e) Imagen Real del canal B.



(f) Imagen revelada para el canal B.



(g) Imagen Real. Resolución espacial: 2000 x 2000.



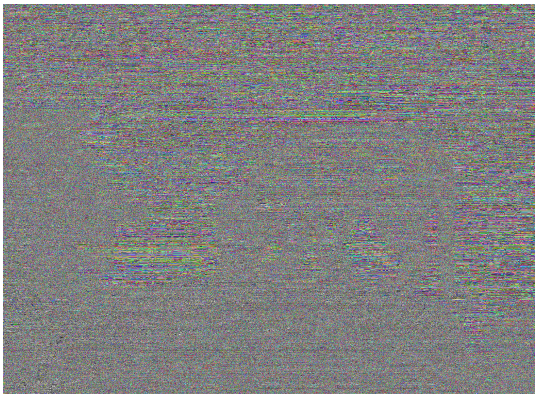
(h) Imagen Revelada. Resolución espacial: 2000 x 2000.

Figura 24: Imagen RGB del perro revelada con el proceso automatizado. Las figuras **(b)**,**(d)** y **(f)** muestran las imágenes reveladas para cada canal R,G y B respectivamente. La figura **(h)** muestra la imagen RGB resultante.

3.3.3 Puma



(a)



(b)

Figura 25: Puma, imagen real. Resolución espacial: 2000 x 1468. Perro, imagen codificada. Resolución espacial: 2000 x 1468.

3.3.3.1 Histograma de intensidades.

Con el propósito de ilustrar el procedimiento seguido para revelar las imágenes codificadas, se muestran los histogramas de intensidad de la fila 946 de la imagen codificada (25b) y de la imagen real (25a). Asimismo, la figura 26c muestra la curva Gamma generada para el canal B y el resultado del ajuste generado en este caso. El Cuadro 5 indica los parámetros de la distribución Gamma utilizados para poder revelar las imágenes.

Cuadro 5: Parámetros de la distribución Gamma para la imagen del puma 25a.

	Canal	**Gamma**	
		α	β
2 curvas Gamma	R	1.85	46.11
		2.16	10.25
	G	11.93	11.32
		22.18	2.26
	B	6.39	19.54
		10.15	3.91

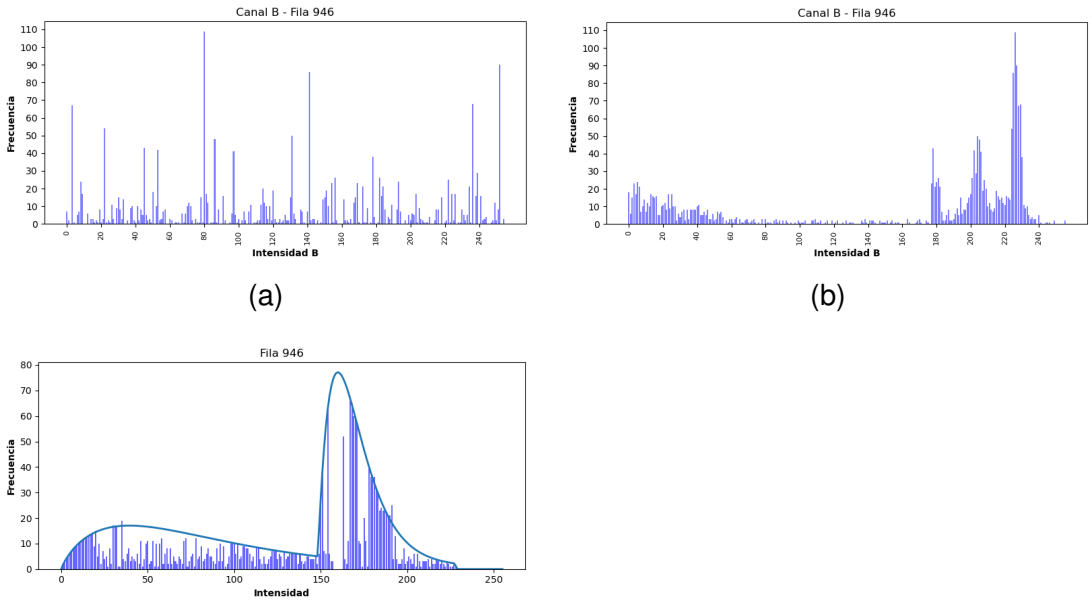


Figura 26: Histogramas de intensidades del canal B para el puma. **(a)** Histograma de intensidades de la imagen codificada para la fila 946. **(b)** Histograma de intensidades de la imagen real para la fila 946. **(c)** Histograma de intensidades de la imagen codificada, ajustado dentro de la curva Gamma propuesta para la fila 946.

3.3.3.2 Imagen revelada por canal e imagen final revelada integrando los tres canales (RGB).

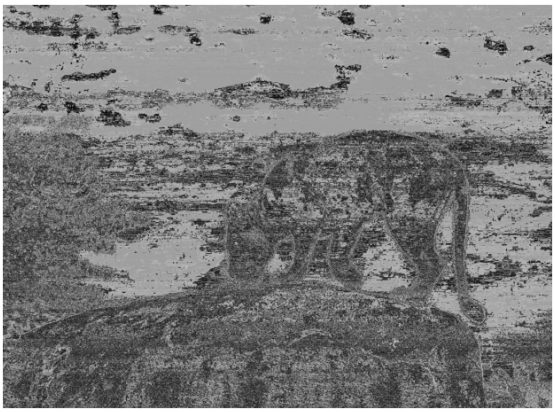


(a) Imagen Real del canal R.

(b) Imagen revelada para el canal R.



(c) Imagen Real del canal G.



(d) Imagen revelada para el canal G.



(e) Imagen Real del canal B.



(f) Imagen revelada para el canal B.



(g) Imagen Real. Resolución espacial: 2000 x 1468.



(h) Imagen Revelada. Resolución espacial: 2000 x 1468.

Figura 27: Imagen RGB del puma revelada con el proceso automatizado. Las figuras **(b)**,**(d)** y **(f)** muestran las imágenes reveladas para cada canal R,G y B respectivamente. La figura **(h)** muestra la imagen RGB resultante.

3.4 Métrica SSIM.

La métrica Structural Similarity Index Measure (SSIM,Índice de Similitud Estructural) evalúa la similitud entre una imagen de referencia (imagen original) y una imagen evaluada (imagen revelada). La métrica fue propuesta por Wang et. al en el 2004 [14], como una nueva forma de evaluar la calidad de una imagen considerando la percepción visual. SSIM es una métrica de referencia completa (full-reference), debido a que se debe tener la imagen de referencia para realizar la comparación. Se consideran tres puntos importantes:

- **Luminancia:** se relaciona con el valor medio de intensidad de las imágenes.
- **Contraste:** se estima con la desviación estándar.
- **Estructura:** se realiza después de normalizar las señales de luminancia y contraste.

$$\mathrm{SSIM}(x,y) = [l(x,y)]^{\alpha} \cdot [c(x,y)]^{\beta} \cdot [s(x,y)]^{\gamma}. \tag{1}$$

donde $[l(x,y)], [c(x,y)], [s(x,y)]$ representan respectivamente las comparaciones de luminancia, contraste y estructura entre la imagen de referencia (x) y la imagen evaluada (y). Los parámetros α, β y γ permiten establecer la importancia relativa de cada componente. El índice SSIM se establece en un intervalo de $[-1, 1]$, donde el valor de 1 corresponde a una similitud estructural perfecta entre las imágenes, los valores menores representan una menor similitud estructural, y los valores negativos representan una relación estructural inversa. [15]

La comparación mediante SSIM se realiza utilizando ventanas, es decir, una ventana puede ser una región de 11×11 píxeles y se calcula en ambas imágenes esa región obteniendo las propiedades de luminancia, contraste y estructura. Una vez terminado el proceso la ventana se desplaza a otros lugares de las imágenes, al terminar de recorrer las imágenes con las ventanas todos los valores obtenidos se combinan para obtener un índice global. Aunque SSIM utiliza los valores de los píxeles para hacer los cálculos, no se limita a comparar individualmente cada uno de los píxeles con sus correspondientes (es decir, los valores de los píxeles de la imagen de referencia con los de la imagen evaluada).

SSIM puede aplicarse a imágenes en tonos de gris e imágenes a color (RGB), pero para este último caso se aplica la métrica en cada uno de los canales o se puede

aplicar a imagen RGB completa, pero se convierte a una imagen en tonos de gris y el valor obtenido representa la similitud estructural asociada a la luminancia.



Imagen de referencia.
Resolución espacial: 1024x 1540.

Imagen evaluada.
Una curva de distribución Gamma.
Image similarity score: 0.18495.

Imagen evaluada.
Dos curvas de distribución Gamma.
Image similarity score: 0.17907.

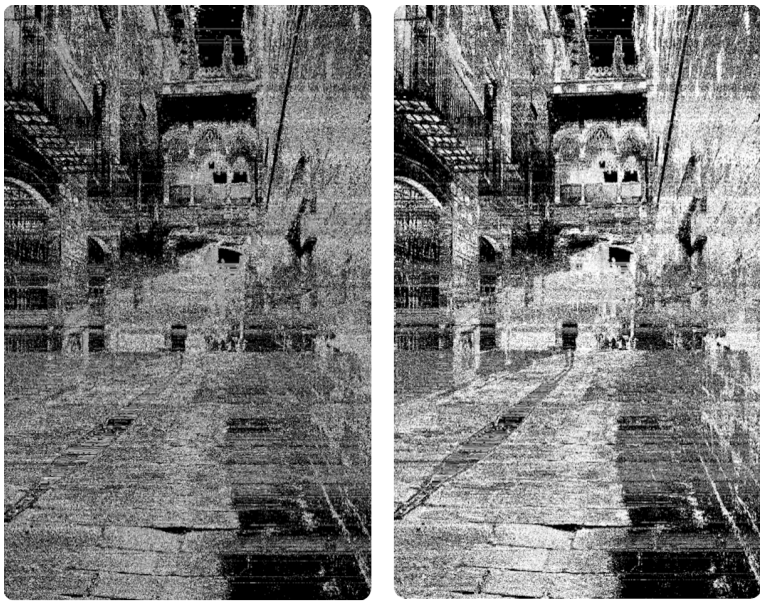


Imagen evaluada.
Primera introducción de contraste.
Image similarity score: 0.08773.

Imagen evaluada.
Segunda introducción de contraste.
Image similarity score: 0.11270.

Figura 28: Primeros resultados de la imagen del callejón.



Imagen de referencia.
Resolución espacial: 1600×2406.

Imagen evaluada.
Una curva de distribución Gamma.
Image similarity score: 0.19210.

Imagen evaluada.
Dos curvas de distribución Gamma.
Image similarity score: 0.20022.



Imagen evaluada.
Primera introducción de contraste.
Image similarity score: 0.13905.

Imagen evaluada.
Segunda introducción de contraste.
Image similarity score: 0.07002.

Figura 29: Segundos resultados de la imagen del callejón.

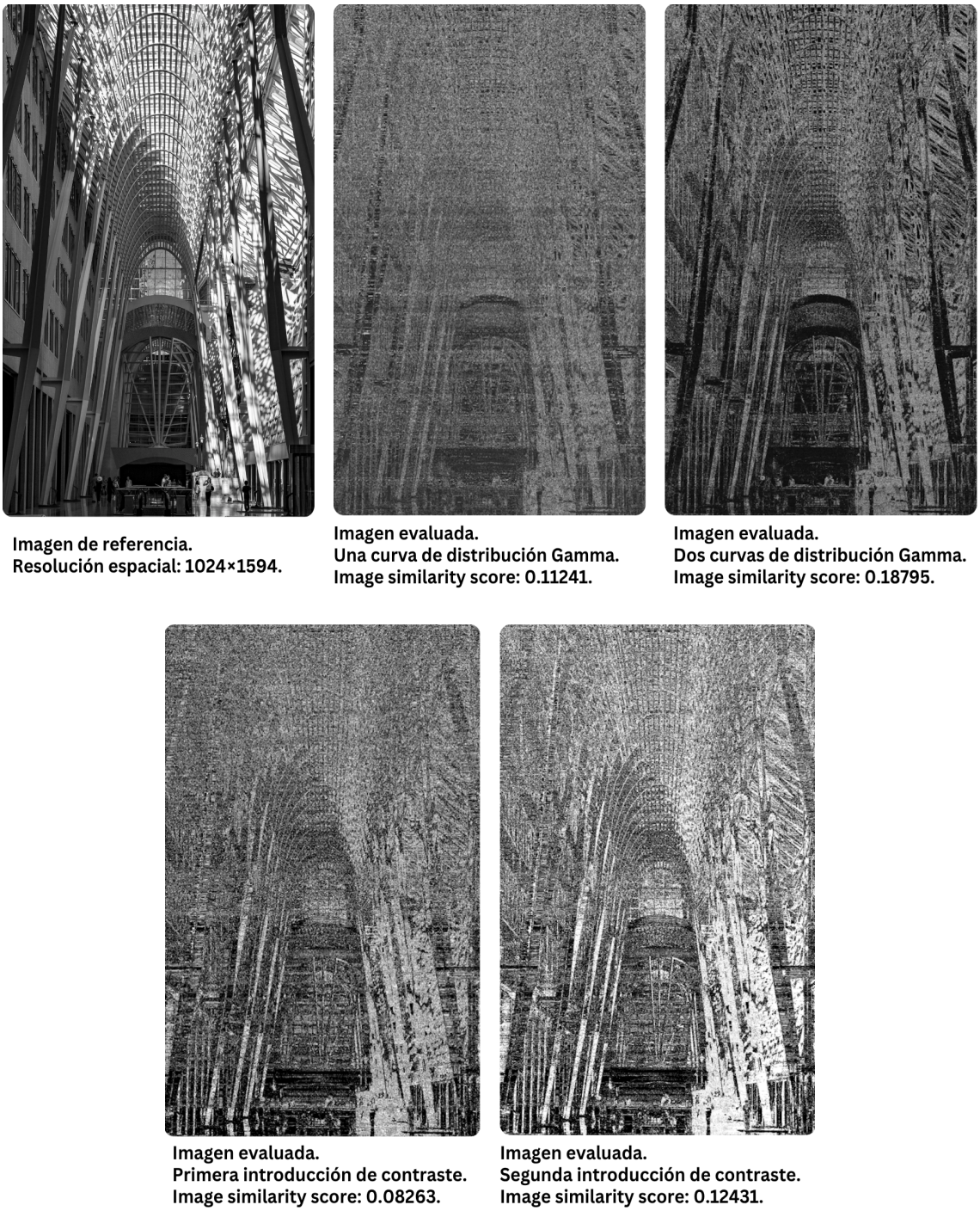


Figura 30: Primeros resultados de la imagen de la estructura.

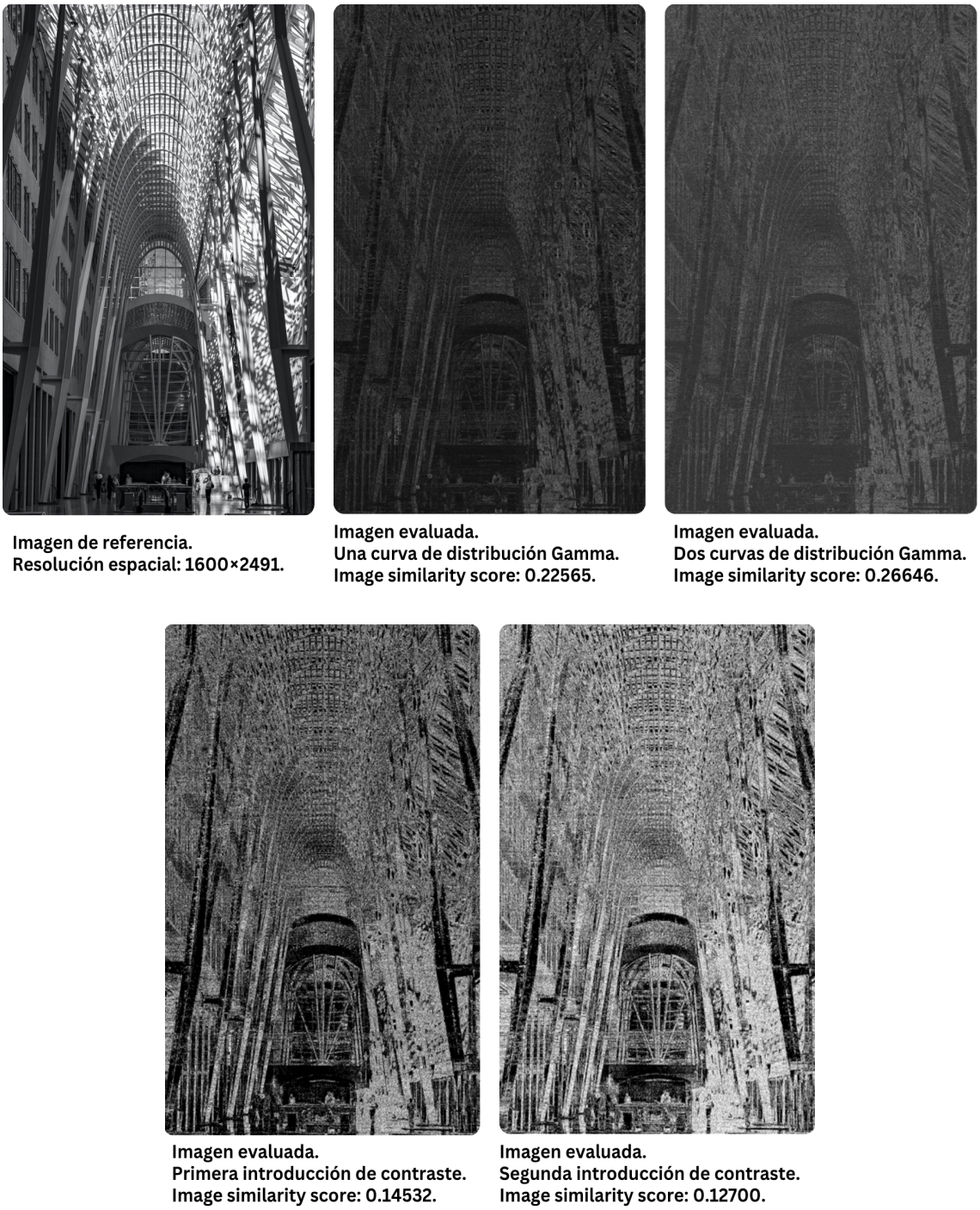


Figura 31: Segundos resultados de la imagen de la estructura.

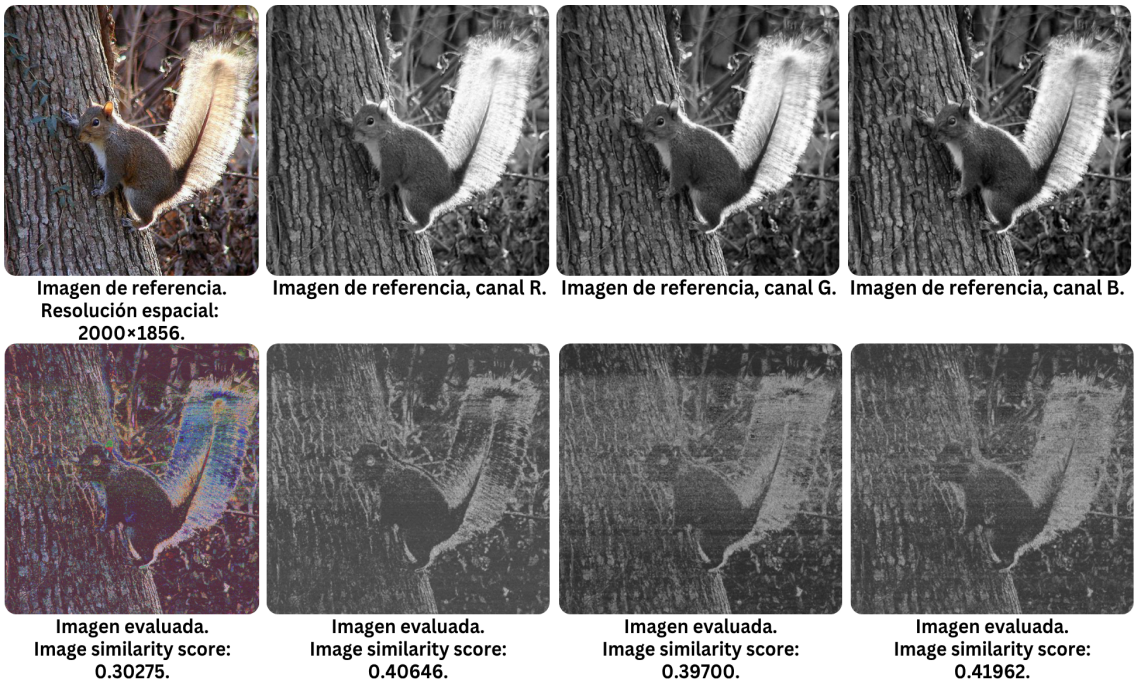


Figura 32: Resultados de la imagen de la ardilla.

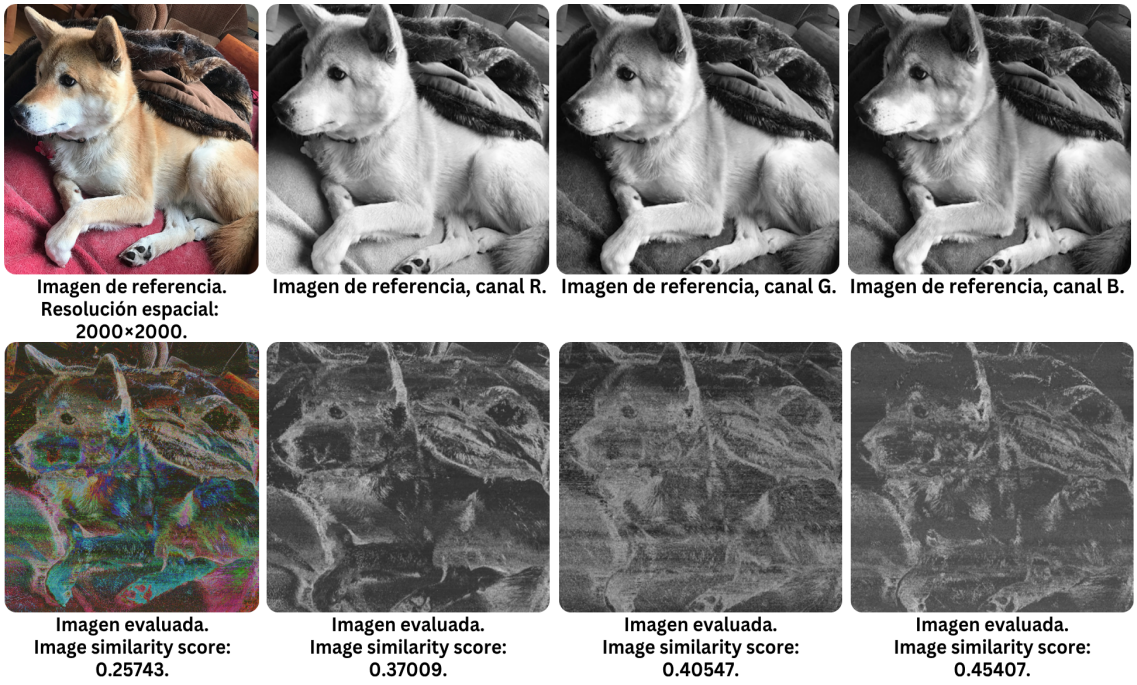


Figura 33: Resultados de la imagen del perro.

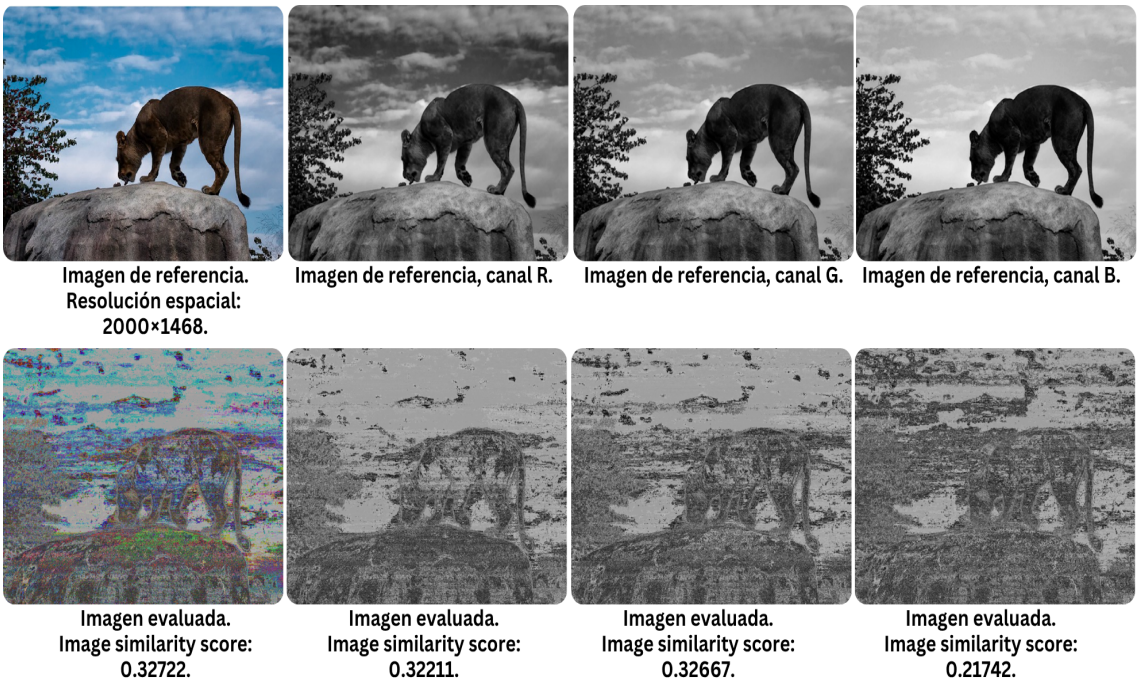


Figura 34: Resultados de la imagen del puma.

Capítulo 4
Discusión.

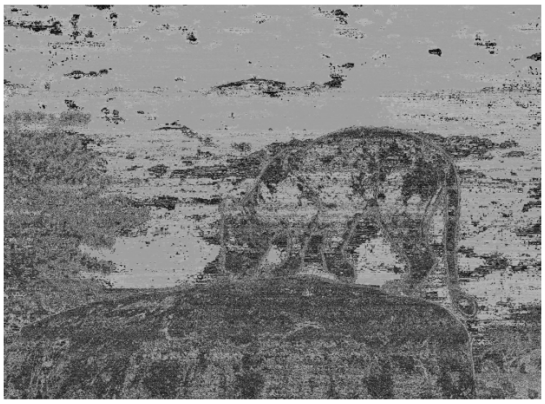
El desarrollo del algoritmo automatizado surgió tras la fase de experimentación manual. Esta etapa manual fue esencial para comprender el comportamiento de la función de distribución Gamma, dado que cada histograma de intensidades es diferente en cada final, sección o canal de la imagen. Procesar las distribuciones Gamma de forma manual resultaba tardado, esto llevó a la creación del algoritmo automatizado para evitar la pérdida de tiempo en la forma de ajustar las curvas de la distribución Gamma en cada uno de los histogramas de intensidades. En algunos histogramas de intensidades solamente existía un pico dominante y algunos otros hasta dos o tres picos dominantes, y ahí estaba el reto para poder ajustar las curvas de la mejor forma posible. Todos estos experimentos dieron como resultado el poder realizar de la mejor forma el método automatizado, porque ya sabía que, si no obtenía los mejores resultados con una sola curva Gamma, los resultados podían mejorar con dos o más curvas Gamma. Debido a los distintos histogramas de intensidades que se pueden generar, se podrían realizar trabajos posteriores donde se incluyan tres o más curvas Gamma.

Como mencioné anteriormente, cada imagen genera un histograma de intensidades diferente, para cada canal y para cada fila. Debido a esta variabilidad, la distribución Gamma se seleccionó por su flexibilidad, ya que los parámetros α y β nos permiten controlar la o las posiciones de cada pico y la anchura que nosotros consideramos adecuada para la curva, e incluso podemos usar el párametro *loc* para mover toda la curva hacia la derecha o izquierda según necesitemos. La variabilidad en cada uno de los histogramas de intensidades proviene del proceso de digitalización de imágenes, principalmente en el muestreo, el cual depende de las distintas resoluciones espaciales de las imágenes con las que se trabajó. Esto da un grado de complejidad en la creación y selección de curvas Gamma para obtener los mejores resultados posibles, porque puede ocurrir que una curva Gamma funcione de buena manera en un canal de una imagen, pero al usarla en otro canal de la misma imagen

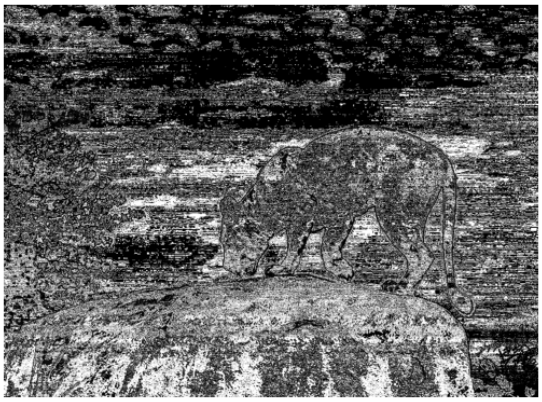
o en los canales de una imagen diferente, el resultado no será el deseado, y esto lleva a buscar otras curvas Gamma que se ajusten de la mejor forma.

En las subsecciones 3.2.1.1 del Callejón y 3.2.2.1 de la Estructura, se demuestra que cuando se aumenta la resolución espacial de una imagen, obtenemos mejores resultados al momento de revelar la imagen. Esto se debe a que aumenta el número de píxeles que existen en cada fila de la imagen, lo que permite construir histogramas de intensidades con más información y permite estimar mejores curvas Gamma en los histogramas. Este comportamiento está respaldado por el teorema de Nyquist mencionado en la sección 2.3, el cual establece que la frecuencia de muestreo debe ser el doble de la frecuencia de la imagen original para evitar el fenómeno de aliasing, este fenómeno mencionado ocurre cuando la resolución espacial es insuficiente para capturar los detalles finos de la imagen y provoca la pérdida de rasgos importantes en las imágenes, esto se demuestra en las subsecciones 3.2.1.3 del Callejón y 3.2.2.3 de la Estructura, donde se aprecia en las imágenes de baja resolución que no se ven los detalles como el piso, la puerta, la parte de arriba de la persona en el caso del Callejón, o en el caso de la Estructura la parte de arriba del techo o el escritorio que se encuentra al fondo. Al incrementar la resolución espacial de las imágenes, se permite al histograma de intensidades de la imagen obtener todos esos datos y así al hacer todo el proceso correspondiente obtener una buena revelación de imagen donde se aprecien de mejor forma los detalles mencionados anteriormente.

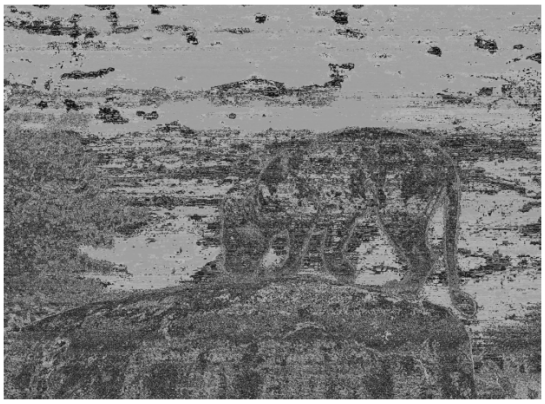
En el caso de las imágenes en tonos de gris, la introducción de contraste puede mejorar las características como se muestra en 3.2.1.2 del Callejón y 3.2.2.2 de la Estructura, donde al introducir porcentajes de píxeles blancos y negros podemos mejorar mucho una imagen y que se aprecien de mejor forma los detalles de la imagen. Sin embargo, este mismo método no se puede introducir en las imágenes a color, ya que, al integrar los 3 canales, muchos de los píxeles se quedaran en blanco y negro, y estos no corresponden a la imagen real. Mientras que en las imágenes reveladas para cada canal (RGB) se puede introducir contraste y no nos altera nada. Una prueba de esto se encuentra a continuación:



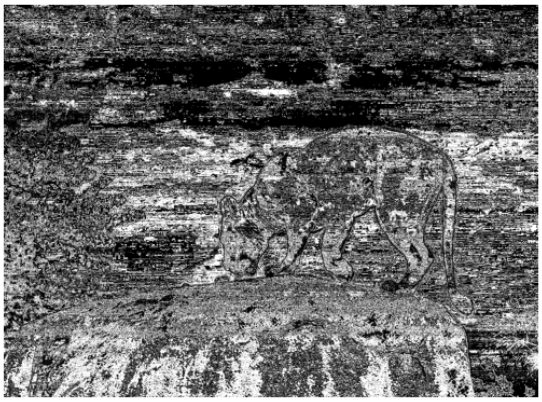
(a) Imagen revelada para el canal R.



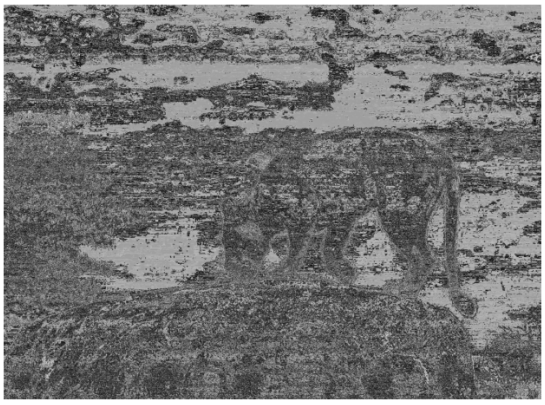
(b) Imagen con introducción de contraste para el canal R.



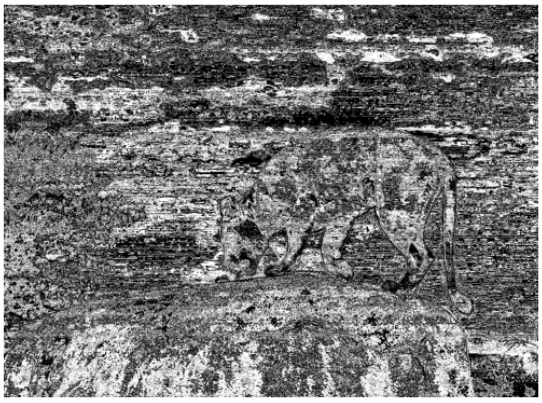
(c) Imagen revelada para el canal G.



(d) Imagen con introducción de contraste para el canal G.



(e) Imagen revelada para el canal B.



(f) Imagen con introducción de contraste para el canal B.

Figura 35: Las figuras 35a, 35c y 35e muestran las imágenes reveladas del puma para cada canal R, G y B, respectivamente. Las figuras 35b, 35d y 35f muestran las imágenes resultantes con introducción de contraste utilizando los porcentajes: $10\,\%$ Gamma, $60\,\%$ píxeles negros y $30\,\%$ píxeles blancos.



(a) Imagen Real. Resolución espacial: 2000 x 1468.



(b) Imagen Revelada. Resolución espacial: 2000 x 1468.



(c) Imagen Revelada con introducción de contraste.

Figura 36: La figura 36a muestra la imagen real del puma. La figura 36b muestra la imagen resultante de integrar los tres canales (RGB). La figura 36c muestra la imagen resultante con introducción de contraste con los porcentajes: $10\,\%$ Gamma, $60\,\%$ píxeles negros y $30\,\%$ píxeles blancos.

4.1 Dificultad en RGB.

Las imágenes a color representan una dificultad mayor que las imágenes monocromáticas. Esto se debe a que una imagen en escala de grises tiene un solo canal, una imagen RGB tiene 3 canales rojo (R), verde (G) y azul (B). Cada uno de los canales tiene su propio histograma de intensidades, y una vez que integramos los 3 canales, determinan el color percibido para cada píxel. Está representación vectorial de las imágenes RGB es descrita por Gonzalez y Wood [16], quienes señalan que el color del píxel depende de la integración de los 3 canales y no únicamente de un solo canal. Por esto cuando hacemos la suma de los 3 canales para obtener el valor

de intensidad final, el valor de intensidad es uno totalmente diferente al que se tiene en la imagen real.

El ojo humano alcanza su máxima sensibilidad espectral en los $555\,\mathrm{nm}$ una región entre verde y amarillo. Esta mayor sensibilidad al verde-amarillo se debe a que los conos M y L, constituyen el $90\,\%$ de la población de conos. Además, esta característica tiene una naturaleza evolutiva, nuestros ancestros necesitaban detectar hojas y frutos donde el entorno era verde, lo que favoreció una mayor eficiencia de los conos sensibles a esas longitudes de onda. Por esta razón, aunque el rojo tenga mayor longitud de onda, el ojo humano siempre detectará primero el color verde. [17]

En este trabajo, cada canal RGB es procesado mediante funciones de distribución Gamma, donde para cada fila de la imagen se genera un histograma de intensidades y de ahí determinamos si usamos una o dos curvas Gamma para aproximar la distribución a la de la imagen real. Este procedimiento permitió obtener imaǵenes reveladas con una buena definición de las características de la imagen en cada uno de sus canales. Sin embargo, al integrar los 3 canales no obtuvimos los valores de intensidad originales y eso se debe a lo mencionado anteriormente. Esto se muestra en las secciones 3.3.1.2 ardilla, 3.3.2.2 perro y 3.3.3.2 y puma.

4.2 Uso de la métrica SSIM.

En este trabajo fue necesaria una métrica que permitiera evaluar los resultados obtenidos al momento de revelar una imagen codificada. La métrica SSIM evalúa el resultado de la imagen obtenida comparando con la imagen real, para decir que tanto de la estructura original se conserva en la imagen obtenida. Esta métrica resulta la mejor en este trabajo debido a que el objetivo no es recuperar los valores de intensidad originales de cada píxel, se busca obtener valores de intensidad aproximados a partir de la o las funciones Gamma que se proponen; existen otros tipos de métricas como MAE (Mean Absolute Error) la cual calcula el promedio de la diferencia absoluta entre las intensidades de los píxeles, MSE (Mean Squared Error) la cual calcula el promedio cuadrado de las diferencias entre intensidades y RMSE (Root Mean Squared Error) la cual es la raíz cuadrada del MSE, este tipo de métricas pueden penalizar las diferencias existentes entre los valores aproximados y los valores originales aunque la estructura visual se preserve. Es importante resaltar que SSIM no representa un porcentaje de píxeles recuperados, el resultado es un índice de similitud estructural entre una imagen de referencia y una imagen estructural.

En la sección 3.4 Métrica SSIM se muestran los resultados obtenidos, primero se muestran las imágenes en tonos de gris de más alta resolución del Callejón, y lo mismo sucede con las imágenes de la Estructura, posteriormente se muestran las imágenes RGB, de la ardilla, el perro y el puma. En los resultados se muestra que las imágenes evaluadas es decir las imagenes reveladas mediante una o dos curvas de distribución Gamma presentan buenos índices SSIM, esto incluye a las imágenes en tonos de gris, también a las imágenes RGB por canal y la imagen final RGB que por motivos de la evaluación en la métrica la imagen de referencia e imagen evaluada se convierten a tonos de gris. De esta forma se demuestra que, aunque no obtenemos los valores de intensidad originales sino obtenemos valores aproximados, nuestras imágenes obtenidas conservan parte de las características visuales con respecto a la imagen original. En las imagenes en tonos de gris aplicamos la introducción de contraste y esas imágenes obtenidas pasaron por la métrica, se observa que obtenemos valores de similitud bajos, sin embargo esto se debe a que al introducir contraste alteramos las características de luminancia, contraste y estructura que usa la métrica SSIM, por esta razón aunque el contraste ayude a las imágenes a presentar de mejor forma las características de la imagen revelada puede ocasionar lo sucedido que es un bajo índice de similitud.

4.3 Perspectivas a futuro.

En algunos experimentos que realicé para entender todo aquello de la función de distribución Gamma, encontré la forma de determinar automáticamente el número de curvas Gamma en los histogramas de intensidades de la imagen real, esto lo hice mediante la función *from scipy.signal import find_peaks* [18] la cual permite detectar los picos que existen en un histograma de intensidades, como resultado otorga las curvas Gamma y si no estamos conformes con la anchura β podemos modificarlo.
Un trabajo y reto a futuro sería usar esa misma función para detectar las curvas que necesitamos en un histograma de intensidades de la imagen codificada, y posteriormente hacer el mismo proceso automatizado para acomodar de la mejor forma posible las barras del histograma de intensidades de la imagen codificada a que estén dentro de las curvas Gamma que la función obtuvo, con esto evitaríamos el suponer que las curvas Gamma que proponemos son las que funcionan, ya que tendríamos unas curvas más específicas.

Otro punto para considerar a futuro es el siguiente; En este trabajo, la asignación se

realiza con los datos que tenemos de cada una de las filas de la imagen. Un trabajo a futuro sería trabajar con el enfoque de vecinos cercanos, donde el valor de intensidad asignado a un píxel no dependería solamente del obtenido al pasarlo dentro de la curva Gamma, si no también tomando en cuenta los nuevos valores de intensidad que se le asignan a los píxeles vecinos. En el método de codificación de una imagen se conserva la posición del píxel y solo se modifica el valor de intensidad, y eso es lo que usamos, entonces hay información espacial que no se está usando, si la usáramos sabríamos cuales son los píxeles que rodean a uno es específico. Por ejemplo:

Imagen real:				
	0	**1**	**2**	**3**
0	50	51	52	53
Imagen codificada:				
	0	**1**	**2**	**3**
0	180	42	91	203

Figura 37: Se puede apreciar que las intensidades cambiaron, pero los vecinos siguen siendo los mismos, 0 sigue estando junto a 1, 1 junto a 2, etc...

Otra línea de investigación con el enfoque de los vecinos cercanos sería trabajar con modelos probabilísticos basados en Hidden Markov Models [19], los cuales permiten representar la dependencia estadística existente entre los píxeles vecinos, donde la intensidad que se le asigna a cada píxel no dependa solamente del histograma de intensidades, sino también del contexto espacial que lo rodea. Estos métodos podrían mejorar la imagen resultante RGB, ya que se acercarían más a los valores de intensidad originales.

Conclusión

Se puede concluir, con base en los resultados de este trabajo, que el proceso automatizado desarrollado con la función de distribución Gamma permite revelar y mostrar las características que fueron ocultas en las imágenes codificadas mediante S-Boxes. Esto aplica para las imágenes en escala de grises y en las de color (RGB). El haber seleccionado la función de distribución Gamma permitió que cumplir el objetivo fuera completado, ya que nos permite mucha flexibilidad y acercarnos de mejor forma a simular los histogramas de intensidades mediante la construcción de las curvas. Uno de los principales aportes fue el desarrollo del proceso automatizado para procesar las imágenes codificadas fila por fila y obtener sus respectivos histogramas de intensidades, así como para ajustar las barras del histograma codificado dentro de la o las curvas Gamma propuestas que son las que nos permiten simular el histograma de intensidades de la imagen real. Todo esto evita el trabajo manual que son basados en prueba y error, y también evita que se tome mucho tiempo en el procesamiento de resultados.

Se trabajó con una o dos funciones de distribución Gamma porque se estableció como lo necesario y se demostró que fueron suficientes para obtener una revelación de imagen aproximada a lo que es la imagen real, por lo que usar tres o más curvas no se consideró necesario para obtener mejores resultados de los que ya había.
Los trabajos realizados con diferentes resoluciones espaciales evidencian que cuando se tiene mayor resolución los resultados que podemos obtener al revelar una imagen es mucho mejor que una con baja resolución, ya que tenemos más información para cada una de la filas de la imagen. Asimismo, con la introducción de contraste se pueden mejorar las características que se perciben en una imagen en escala de grises e incluso con las de cada canal de la imagen a color (RGB), pero recordar que aplicar esta introducción de contraste en la imagen RGB se perderán los colores que se pueden obtener sin esa introducción. De igual forma percibimos que revelar las imágenes codificadas en escala de grises y por canal en las imágenes a color no representan una dificultad, esta aparece cuando integramos los 3 canales donde observamos que algunos colores se mantienen, pero la gran mayoría se alteran y por eso no obtenemos una imagen con los valores de intensidad de la imagen real.

Este trabajo demuestra que el desarrollar y analizar los histogramas de intensidad

son la herramienta principal para poder revelar las imágenes codificadas. De igual forma la función de distribución Gamma nos permite generar y manipular las curvas para poder aproximar nuestros resultados a los de la imagen real. Las perspectivas a futuro permiten abrir nuevas líneas de investigación en lo que se refiere al procesamiento de imágenes.

Apéndice

Se muestran los pseudocódigos de los programas desarrollados, el primero es la obtención de funciones de distribución Gamma, y el segundo el proceso automatizado para revelar las imágenes codificadas.

Obtención de la función Gamma de una imagen real.

```
Cargar la imagen real.
Extraer el histograma de intensidades.
for fila do
    Obtener media y desviación estándar.
    if una curva Gamma then
        Calcular α y β.
        Generar la curva Gamma.
    else
        Calcular α y β.
        Generar las curvas Gamma.
        Fusionar las dos curvas Gamma.
    end if
end for
Mostrar resultados.
```

Revelación de la imagen codificada.

```
Cargar la imagen codificada.
for cada fila de la imagen do
    Calcular el histograma codificado.
    for cada intensidad codificada do
        Transferir intensidades codificadas a la Gamma teórica.
        Verificar que no haya sido utilizada.
        Guardar la nueva intensidad.
    end for
```

9: **end for**
10: Mostrar la imagen revelada.

Referencias

[1] Al-Jubouri, I. M. N. (19 March 2018). *History of Islamic Philosophy: With View of Greek Philosophy and Early History of Islam*. Authors OnLine Ltd. ISBN 9780755210114.

[2] Naor, M., Shamir, A. (1995). Visual cryptography. In: De Santis, A. (eds) *Advances in Cryptology — EUROCRYPT'94*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 950. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/BFb0053419.

[3] Diffie, W., Hellman, M. E. (1976). New directions in cryptography. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22(6), 644–654. https://doi.org/10.1109/TIT.1976.1055638.

[4] Ohashi, S., Katayama, K., Kojima, A., Yang, X., Fukuda, M., Sacchetta, F., Suno, R., Sugita, Y., Nuemket, N., Kim, S., Kobayashi, K., Imai, H., Iwata, S., Nango, E., Kobayashi, T., Noda, T., Olivucci, M., Kato, H.E., and Kandori, H. *Structural insights into spectral tuning and retinal exchange in cone visual pigments*. *Science*, 2026, 392(6805), eadz3996. DOI: 10.1126/science.adz3996.

[5] Schmidt, S.L., Dostal, J., Sen, S., Hovan, A., Walter, D., Appleby, M.V., Kojima, A., Kato, H.E., Beale, J.H., Kloz, M., Schertler, G.F.X., and Isaikina, P. *Illuminating the molecular basis of human daylight vision*. *Science*, 2026, 392(6805), eadz3624. DOI: 10.1126/science.adz3624.

[6] Sonka, M., Hlavac, V., Boyle, R. *Image Processing, Analysis, and Machine Vision*. Fourth Edition. Cengage Learning, USA (2014).

[7] Russakovsky, O., Deng, J., Su, H., et al. ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge. *International Journal of Computer Vision*, 115, 211–252 (2015).

[8] Cassal-Quiroga, B. B., Campos-Cantón, E. Generation of Dynamical S-Boxes for Block Ciphers via Extended Logistic Map. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 2702653 (2020).

[9] Bonilla-Marín, M., Tuxpan-Vargas, J., Campos-Cantón, E. Revealing Encoded Images Using a Generative Adversarial Network. *Mathematics*, 13, 3788 (2025). https://doi.org/10.3390/math13233788.

[10] MathWorks, Inc. Histogram with distribution fit. MATLAB Documentation. https://la.mathworks.com/help/stats/histfit.html.

[11] Lefebvre, M. *Applied Probability and Statistics*. Springer, New York, NY, USA (2007).

[12] Shannon, C. E. *Communication in the presence of noise*. Proceedings of the IRE, vol. 37, no. 1, pp. 10-21, (1949).

[13] MathWorks. *Introducción al teorema de Nyquist*. https://la.mathworks.com/discovery/nyquist-theorem.html.

[14] Zhou Wang, Alan Conrad Bovik, Hamid Rahim Sheikh, and Eero P. Simoncelli *Image Quality Assessment: From Error Visibility toStructural Similarity*. https://www.cns.nyu.edu/pub/eero/wang03-reprint.pdf.

[15] MathWorks. *Índice de similitud estructural (SSIM) para medir la calidad de una imagen*. https://la.mathworks.com/help/images/ref/ssim.html.

[16] Gonzalez, R. C., Woods, R. E. *Digital Image Processing*, Third Edition. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA (2008). https://books.google.com.mx/books/about/Digital_Image_Processing.html?id=8uGOnjRGEzoC&redir_esc=y.

[17] Lucas, P.W., Dominy, N.J., Riba-Hernandez, P., Stoner, K.E., Yamashita, N., Loría-Calderón, C., and Darvell, B.W. *Evolution and function of routine trichromatic vision in primates*. *Evolution*, 2003, 57(11), pp. 2636-2643. DOI: 10.1111/j.0014-3820.2003.tb01506.x.

[18] SciPy Developers. *scipy.signal.find_peaks*, SciPy Documentation. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.find_peaks.html.

[19] Li, S. Z. *Markov Random Field Modeling in Image Analysis*. Third Edition. Springer, London (2009). https://doi.org/10.1007/978-1-84800-279-1.

Anexos

Como aportación de la investigación desarrollada, se publicó un capítulo en el libro: *Complex Systems and Their Applications*

- **Título:** Revealing Encoded RGB Images Applying Gamma Distribution Functions.
- **Tipo de publicación:** Capítulo de libro.
- **Año:** 2026.
- **Autores:** Ximena Rodríguez-González y Marcial Bonilla-Marín.
- **DOI:** 10.1007/978-3-032-25152-7_16.