



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A. C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Sincronización Generalizada de Sistemas Caóticos con
Dinámica Interna**

Tesis que presenta

Karla Paulina Cuéllar Galarza

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

San Luis Potosí, S. L. P., Agosto de 2010



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Sincronización Generalizada de Sistemas Caóticos con Dinámica Interna** presentada para obtener el Grado de de Maestra en Ciencias Aplicadas en la opción **Control y Sistemas Dinámicos** fue elaborada por **Karla Paulina Cuéllar Galarza** y aprobada el **20 de Agosto de 2010** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Director de la tesis

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
Sinodal

Dra. Ilse Cervantes Camacho
Sinodal

Dr. Gualberto Celestino Solís Perales
Sinodal



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT-221804) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



INSTITUTO POTOSINO
DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

IPICYT

Acta No. 021

Del Sustentante:

KARLA PAULINA
CUELLAR
CAJARZA



[Signature]
Firma

Acta de Examen de Grado

En la ciudad de San Luis Potosí, a los 20 días, del mes de AGOSTO del año 2010, se reunió a las 12:00 horas, en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<u>DR. ALEJANDRO RICARDO FEMAT FLORES</u>	<u>PRESIDENTE</u>
<u>DR. JUAN GONZALO BARAJAS RAMIREZ</u>	<u>SECRETARIO</u>
<u>DR. GUALBERTO CELESTINO SOLIS PERALES</u>	<u>SINODAL</u>
<u>DRA. ILSE CERVANTES CAMACHO</u>	<u>SINODAL</u>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de Maestro (a) en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos, sustentó el (la)

C. KARLA PAULINA CUELLAR CAJARZA

sobre la Tesis intitulada: SINCRONIZACION GENERALIZADA DE SISTEMAS CAÓTICOS CON DINAMICA INTERNA

que se desarrolló bajo la dirección de: DR. JUAN GONZALO BARAJAS RAMIREZ

El Jurado, después de deliberar, determinó:
APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 13:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fé el Secretario Académico del Instituto.

[Signature]
Presidente

[Signature]
Secretario

[Signature]
Sinodal

[Signature]
Ilse Cervantes Camacho
Sinodal

Sinodal



A mis padres.

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente:

Al Dr. Gonzalo Barajas por su constante asesoría, apoyo y paciencia en la realización de esta tesis.

A mis sinodales, los Doctores Ricardo Femat, Gualberto Solís y a la Dra. Ilse Cervantes por sus comentarios y aportaciones.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de postgrado.

Al IPICYT y a los excelentes investigadores que como mis profesores de Maestría invirtieron su valioso tiempo para mi formación.

A mis amigos y a mi familia por su apoyo en cada proyecto de mi vida, pero sobre todo de manera muy especial agradezco a mi madre, Patricia Galarza Ramírez, por su inagotable e incondicional apoyo, por creer siempre en mi, por su invaluable ejemplo de lucha, por estar siempre conmigo en los momentos más difíciles y nunca dejarme caer.

Contenido

1. Introducción	16
1.1. Motivación	17
1.2. Estado Actual del Conocimiento	18
1.3. Descripción de la Tesis	20
2. Antecedentes Matemáticos	22
2.1. Algunas Definiciones de Sincronización	22
2.1.1. Definiciones Formales de Sincronización	22
2.2. Fundamentos de Cambio de Coordenadas Basadas en Derivadas de Lie	24
3. El Problema de la SG	28
3.1. Descripción del Problema de Control	28
3.2. SG en Sistemas Sin Dinámica Interna ($\sigma = n$)	30
3.3. SG en Sistemas Con Dinámica Interna ($\sigma < n$)	32
4. Estudio Numérico de la SGC y la SGP	37
4.1. Ilustración de SG Cuando $n = \sigma$	37
4.2. Ilustración de SG Cuando $n > \sigma$	41
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	57
5.1. Conclusiones	57
5.2. Discusión de los Resultados	58
5.3. Trabajo Futuro	58
A. Cambios de Coordenadas para Diferentes Sistemas Caóticos	60
A.1. Sistema de Rössler	60
A.2. Sistema de Lorenz	62
A.3. Circuito de Chua Suavizado	65
B. Figuras de la SGC y SGP	68
B.1. SG Cuando $n = \sigma$	68
B.2. SG Cuando $n > \sigma$	75
B.2.1. SG Cuando $\sigma_m > \sigma_s$	83

Lista de Figuras

4.1. SGC entre Lorenz (maestro) y Rössler (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a) Lorenz y (b) Rössler en sus variables originales (x_L, x_R) ; (c) Lorenz y (d) Rössler en sus variables transformadas (z_L, z_R)	39
4.2. SGC entre Lorenz (maestro) y Rössler (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en sus variables transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Rössler en sus variables transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	40
4.3. SGP entre Chua (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 2$. (a) Chua y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L) ; (c) Chua y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L)	42
4.4. SGP entre Chua (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 2$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua en sus variables transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en sus variables transformadas; (g), (h), (i) muestran las variedades de sincronización.	43
4.5. SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a) Rössler y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_R, x_C) ; (c) Rössler y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_R, z_C)	45
4.6. SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en sus variables transformadas. (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en sus variables transformadas. (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	46
4.7. SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_L = 2$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L) ; (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L)	48
4.8. SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_L = 2$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en sus variables transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en sus variables transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	49
4.9. SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 3$ y $\sigma_L = 1$ respectivamente. (a) Chua suavizado y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L) ; (c) Chua suavizado y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L)	51

4.10. SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 3$ y $\sigma_L = 1$ respectivamente. (a), (b), (c) son las proyecciones del circuito de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	52
4.11. SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 2$ y $\sigma_C = 1$. (a) Lorenz y (b) Chua en sus variables originales (x_L, x_C) ; (c) Lorenz y (d) Chua en sus variables transformadas (z_L, z_C)	54
4.12. SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 2$ y $\sigma_C = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	55
B.1. SGC entre Chua suavizado (maestro) y Rössler (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a) Chua suavizado y (b) Rössler en sus variables originales (x_C, x_R) ; (c) Chua suavizado y (d) Rössler en sus variables transformadas (z_C, z_R)	69
B.2. SGC entre Chua suavizado (maestro) y Rössler (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	70
B.3. SGC entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a) Lorenz y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_L, x_C) ; (c) Lorenz suavizado y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_L, z_C)	71
B.4. SGC entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	72
B.5. SGC entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a) Rössler y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_R, x_C) ; (c) Rössler y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_R, z_C)	73
B.6. SGC entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	74
B.7. SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 2$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L) ; (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L)	75

B.8. SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 2$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	76
B.9. SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L) ; (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L)	77
B.10. SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	78
B.11. SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a) Chua suavizado y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L) ; (c) Chua suavizado y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L)	79
B.12. SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	80
B.13. SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a) Lorenz y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_L, x_C) ; (c) Lorenz y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_L, z_C)	81
B.14. SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	82
B.15. SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 3$ y $\sigma_L = 2$. (a) Chua suavizado y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L) ; (c) Chua suavizado y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L)	83
B.16. SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 3$ y $\sigma_L = 2$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	84
B.17. SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_L = 1$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L) ; (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L)	85
B.18. SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_L = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	86

B.19.SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 3$ y $\sigma_C = 1$. (a) Lorenz y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_L, x_C) ; (c) Lorenz y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_L, z_C)	87
B.20.SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 3$ y $\sigma_C = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	88
B.21.SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_C = 1$. (a) Rössler y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_R, x_C) ; (c) Rössler y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_R, z_C)	89
B.22.SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_C = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	90
B.23.SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L) ; (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L)	91
B.24.SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	92
B.25.SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a) Chua suavizado y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L) ; (c) Chua suavizado y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L)	93
B.26.SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	94
B.27.SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 2$ y $\sigma_C = 1$. (a) Rössler y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_R, x_C) ; (c) Rössler y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_R, z_C)	95
B.28.SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_C = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.	96

Lista de Tablas

4.1. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n = \sigma = 3$. La SGP, no se admite por que se logra una linealización por la retroalimentación de estados.	41
4.2. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n > \sigma = 2$	44
4.3. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n > \sigma = 1$	47
4.4. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 2)$	50
4.5. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 1)$	53
4.6. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 2) > (\sigma_s = 1)$	56
B.1. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n = \sigma = 3$	68
B.2. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n > (\sigma = 2)$	75
B.3. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n > (\sigma = 1)$	77
B.4. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 2)$	83
B.5. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 1)$	85
B.6. Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 2) > (\sigma_s = 1)$	91

Glosario

BIBO: Bounded-input bounded-output.

DAESG: Dinámica Accesible del Error de Sincronización Generalizada.

DC: Dinámica Cero.

DCESG: Dinámica Cero del Error de Sincronización Generalizada.

DI: Dinámica Interna.

DIESG: Dinámica Interna del Error de Sincronización Generalizada.

ESG: Error de Sincronización Generalizada.

N.A.: No se Admite.

N.P.: No se Puede.

SC: Sincronización Completa.

SCDI: Sistemas Caóticos con Dinámica Interna.

SG: Sincronización Generalizada.

SGC: Sincronización Generalizada Completa.

SGP: Sincronización Generalizada Parcial.

SI: Sincronización Idéntica.

SP: Sincronización Parcial.

Resumen

En esta tesis se estudia la sincronización generalizada (SG) entre dos sistemas caóticos diferentes, con dimensiones iguales, en una configuración maestro-esclavo. Se dice que dos sistemas diferentes están sincronizados de manera generalizada cuando existe un mapeo estático e independiente del tiempo tal que, a través de este mapeo, las trayectorias del maestro y del esclavo coinciden exactamente de manera asintótica. Bajo la suposición de que el maestro y el esclavo solamente tienen una entrada y una salida, ambas escalares, se propone lograr la SG a través de un controlador por retroalimentación diseñado a partir de un cambio de coordenadas basado en derivadas de Lie.

Para lograr la SG se define el error de SG (ESG), como la diferencia entre los estados de los sistemas maestro y esclavo en variables transformadas. Enseguida, se diseña una entrada de control no lineal, estática, por retroalimentación de estados, la cual estabiliza asintóticamente el origen del ESG de tal forma que, a través de sus cambios de coordenadas, los sistemas maestro y esclavo están sincronizados de manera generalizada.

Los sistemas maestro y esclavo, dependiendo del cambio de coordenadas, pueden ser de grado relativo pleno o no pleno; es decir, que el grado relativo es igual o menor a la dimensión del sistema, respectivamente. Cuando ambos sistemas son de grado relativo pleno, es posible diseñar un control para lograr que todos los estados del maestro y del esclavo, en las variables transformadas, coincidan exactamente. En esta tesis a este tipo de sincronización, le llamaremos SG completa (SGC). Alternativamente, cuando uno o ambos sistemas sean de grado relativo no pleno, es decir, cuando en variables transformadas los sistemas tienen dinámica interna, tenemos que una retroalimentación estática no logra la SGC. En este caso, si es posible lograr que al menos uno de los estados del maestro y del esclavo coincidan exactamente en las variables transformadas y, a la vez, el resto de los estados permanecen acotados, se puede lograr una forma alternativa de sincronización a la cual, en esta tesis, se le llama SG parcial (SGP).

La SGP de sistemas caóticos con dinámica interna se define cuando, la dinámica interna del maestro está acotada y la dinámica cero del esclavo es asintóticamente estable. Si esto sucede, la dinámica interna del ESG está acotada, de modo que es posible diseñar una retroalimentación estática para hacer coincidir las dinámicas linealizables de los sistemas maestro y esclavo.

La identificación del fenómeno de SGP y la descripción de las condiciones bajo las cuales se logran la SGC y la SGP, en términos de sus dinámicas internas y dinámicas cero, constituyen las contribuciones principales de esta tesis. La SGC y SGP entre sistemas caóticos estrictamente diferentes se ilustran por medio simulaciones numéricas.

Abstract

In this thesis we study the generalized synchronization (GS) between two different chaotic systems with the same dimensions, in a master-slave configuration. Two different systems are synchronized in a generalized form if there is a mapping static and independent of time such that, through this mapping, the trajectories of master and slave arises asymptotically exactly. Under assumption that the master and slave are simple input-simple output, we proposed to achieve GS through a feedback controller designed from a change of coordinates based on Lie derivatives.

In order to achieve GS, we defined the GS error (GSE), as the difference between master and slave systems states in transformed variables. Then, we design a feedback nonlinear static input control, which asymptotically stabilizes the origin of the GSE such that, through the change of coordinates, master and slave systems are synchronized in a generalized form.

Master and slave systems, depending on the change coordinates, relative degree can be equal or less than the dimension of system. When both systems have the relative degree equals to dimension, it is possible to design a control to ensure that all the states of master and slave, in the transformed variables match exactly. In this thesis, this kind of synchronization is called complete GS (CGS). Alternatively, when one or both systems have a relative less than dimension, i.e., when systems in transformed variables have internal dynamics, CGS can not be achieved with a static feedback. In this case, if it is possible that at least one of the states of master and slave match exactly the transformed variables and, while the remaining states remain bounded, we can achieve an alternative kind of synchronization which, in this thesis, it is called partial GS (PGS).

The PGS of chaotic systems with internal dynamics is defined when the internal dynamics of the master is bounded and the zero dynamics of slave is asymptotically stable. If this happens, the internal dynamics of the GSE is bounded, so it is possible to design a static feedback to match linearized dynamics of master and slave systems.

The identification of the phenomenon of PGS and the description of conditions under which achieve the CGS and the PGS, in terms their internal and zero dynamics, are the main contributions of this thesis. The CGS and PGS between strictly different chaotic systems are illustrated numerical simulations.

Capítulo 1

Introducción

La sincronización es un fenómeno universal, en el cual dos o más sistemas acoplados coordinan sus movimientos a lo largo del tiempo de tal forma que, en algún sentido, se puede decir que se mueven al unísono. Por ejemplo, un tipo de sincronización sucede entre dos relojes de péndulo suspendidos de una misma viga, los cuales, después de un tiempo de estar oscilando de manera independiente, comienzan a moverse al mismo tiempo [1]. Otro ejemplo de sincronización, se observa en el comportamiento colectivo de grupos de animales, como un desplazamiento coordinado entre los individuos del grupo, los cuales quizás no se mueven a la vez pero con un mismo sentido. Cabe mencionar que existen diversos tipos de sincronización, en particular la sincronización generalizada (SG) surge cuando existe un mapeo estático e independiente del tiempo, usualmente llamado el mapeo de SG, a través del cual las trayectorias de dos sistemas coinciden exactamente de manera asintótica [15]. Un ejemplo de SG se observa en los ciclos circadianos [2], los cuales son variaciones fisiológicas rítmicas que se presentan en todos los organismos vivos como respuesta a cambios ambientales, como el nivel de luminosidad de las estaciones del año. Como se puede apreciar, en este ejemplo, existe una relación a través de la cual se sincronizan los ciclos ambientales y la respuesta fisiológica de los organismos. No obstante, conocer la forma de la relación que describen los ciclos circadianos no es un problema sencillo.

Esta tesis se enfoca al estudio de la SG entre dos sistemas caóticos diferentes, con una entrada y una salida, de dimensiones iguales, y en configuración maestro-esclavo. En el estudio de la SG entre sistemas diferentes se pueden identificar dos problemas: análisis y síntesis. En el primero, se busca identificar la relación de sincronización, mientras que en el segundo se busca un controlador, tal que se logre SG. En trabajos recientes, se propone integrar ambos problemas en un sólo diseño [4, 21]. Para lograr la SG se considera un cambio de coordenadas basadas en derivadas de Lie [5], de los sistemas maestro y esclavo. De modo que una vez transformados los sistemas, se define un error de sincronización generalizada (ESG), como la diferencia entre las variables transformadas de los sistemas maestro y esclavo. Enseguida, se diseña una entrada de control no lineal, estática, por retroalimentación de estados, para estabilizar asintóticamente el origen del ESG de tal forma que, a través de los cambios de coordenadas, los sistemas maestro y esclavo se sincronizan en términos generalizados. En esta tesis, se extiende este enfoque de diseño para la SG al caso de sistemas con dinámica interna,

lo que nos lleva a la descripción de un nuevo tipo de SG, el cual es llamado SG parcial (SGP).

En el resto de este capítulo, se describe la motivación del estudio de la SG de sistemas caóticos con dinámica interna (SCDI). Así mismo, se presenta una revisión de los trabajos más relevantes en el tema, con la finalidad de establecer el estado actual del conocimiento. En la descripción de la tesis, Sección 1.3, en primer lugar se describe la motivación, luego se define la hipótesis, el objetivo general del trabajo, y la metodología utilizada.

1.1. Motivación

Como un trabajo interdisciplinario, la aplicación de las matemáticas en la biología se han enfocado principalmente al desarrollo de modelos matemáticos que pretenden capturar características significativas de procesos biológicos mediante técnicas matemáticas. En este contexto, resulta motivante estudiar los tipos de sincronización que se pueden presentar en arreglos de células, como por ejemplo en arreglos de células pancreáticas β , con el fin de obtener un modelo para la secreción de insulina [6, 7]; o bien, saber de que manera la sincronización juega un rol en el procesamiento de la información en redes de células neuronales [8]. Del mismo modo, resulta interesante determinar de que manera, a través del estudio de la sincronización, se puede obtener información, modelos y estrategias de control para grupos de sistemas biológicos interconectados. Como por ejemplo del comportamiento cooperativo en grupos de animales, o bien, sobre el efecto de cambios ambientales en los ritmos fisiológicos de organismos vivos. Al igual que la sincronización puede ser utilizada para el estudio de los comportamientos colectivos en sistemas biológicos, los sistemas dinámicos con comportamiento caótico pueden y han sido utilizados para describir sistemas biológicos. Los osciladores caóticos han servido para modelar sistemas naturales, tales como sistemas poblacionales, reactores biológicos, etcétera [9].

Si bien es cierto que los casos descritos arriba se refieren a situaciones en las que el contexto de la sincronización es muy amplio, y de implicaciones complejas, ya que se involucran aspectos del estudio de redes de sistemas de diversas naturalezas, donde las conexiones son bidireccionales y variantes en el tiempo. Con el fin de atacar estos problemas de manera eficiente, es necesario estudiar primero situaciones más sencillas. En particular, se puede comenzar por estudiar lo que sucede en arreglos unidireccionales, es por ello, que en esta tesis la atención se enfoca al estudio de la sincronización, en términos generalizados, entre sistemas caóticos estrictamente diferentes, con una entrada y una salida, en una configuración maestro-esclavo.

Una forma convencional de estudiar la dinámica de un sistema no lineal es linealizando al rededor de un punto de equilibrio. Sin embargo, en muchas situaciones este método puede no ser deseable, ya que se pierde información. Una alternativa más poderosa, sobretodo en el caso más común, cuando únicamente se tiene acceso a una entrada y una salida del sistema, es la utilización de un cambio de coordenadas por medio de derivadas de Lie. Utilizar esta representación del sistema puede resultar ventajoso, ya que en las coordenadas transformadas, se puede obtener una versión linealizada del

sistema mediante una entrada de retroalimentación [5].

Teniendo en cuenta todo lo anterior como motivación, en esta tesis se estudia la SG en sistemas caóticos bajo una transformación de coordenadas por derivadas de Lie de los campos vectoriales que describen a los sistemas maestro y esclavo. Así mismo, se espera que los resultados obtenidos en esta tesis contribuyan de alguna forma a la continuidad de los estudios necesarios para resolver los problemas discutidos arriba.

1.2. Estado Actual del Conocimiento

El estudio de la sincronización ha sido un área de estudio muy atractiva desde su comienzo, el cual puede ser rastreado a los trabajos de C. Huygens en 1665, quien después de observar el comportamiento de dos relojes de péndulo suspendidos de la misma viga de madera, notó que después de un tiempo de estar oscilando a diferentes frecuencias, la diferencia entre los movimientos de un reloj y otro disminuía hasta que ambos péndulos se movían al mismo tiempo; a este comportamiento, Huygens, lo llamó el “fenómeno de la empatía”.

Siglos después el estudio de la sincronización se mantiene activo y cada vez más fuerte. En el sentido moderno, se puede decir que tiene su comienzo a principios de la década de 1920. En 1920, W. H. Eccles y J. H. Vincent confirmaron el fenómeno de sincronización entre sistemas físicos reales mientras estudiaban los triodos generadores. En sus experimentos Eccles y Vincent acoplaron dos generadores que oscilaban a frecuencias diferentes y demostraron que el acoplamiento forzaba ambos triodos a vibrar en una frecuencia común. Posteriormente, en 1922 y 1927 Edward Appleton y Balthasar van der Pol replicaron y extendieron los experimentos de Eccles y Vincent. Estos trabajos conforman lo que se puede llamar el primer estudio teórico-práctico del fenómeno de la sincronización [10]. Varias décadas después, se consideró el fenómeno de sincronización entre sistemas caóticos.

Cabe mencionar que en un principio, la idea de que sistemas caracterizados por su sensibilidad a pequeños cambios en condiciones iniciales, que los vuelve impredecibles a largo plazo, pudieran evolucionar siguiendo un mismo comportamiento; fue considerado como algo contraintuitivo. Sin embargo, varios trabajos significativos, entre los cuales, de los más citados en la literatura se encuentran los de Yamada y Fujisaka [11], quienes en 1983 fueron los primeros en hacer un análisis local para el estudio de la sincronización del caos. Poco después, en 1986, Afraimovich et al. [12] publicaron los conceptos necesarios para el análisis de sistemas caóticos sincronizados diferentes. Posteriormente, Pecora y Carroll en 1990 [29], usaron la idea de sincronizar un sistema caótico con un subsistema del mismo utilizando una señal común proveniente del sistema completo; además, aplicaron las ideas de Fujisaka para sincronizar circuitos caóticos reales [14].

Posteriormente, se realizó un intento por generalizar el concepto de sincronización entre sistemas caóticos. Los primeros trabajos en este sentido son de Rulkov et al, quien en 1995, propone que la sincronización entre sistemas caóticos en configuración maestro-esclavo, sea llamada SG cuando exista una variedad que sea subconjunto de la intersección entre los espacios de estados de los sistemas maestro y esclavo, tal que,

exista un mapeo, a través del cual, las trayectorias del maestro y del esclavo coincidan exactamente de manera asintótica [15]. Un año después, se publicó un trabajo de Kocarev y Parlitz [27] en el que demuestra que una condición para el surgimiento de SG, es que el sistema esclavo sea asintóticamente estable después de que los sistemas se conecten. En estos primeros trabajos, la forma exacta del mapeo de SG no es importante, solo su existencia y características básicas como el ser estático e independiente de los estados de los sistemas. Por otro lado, Hunt y colaboradores proponen una versión más estricta de SG, que llamaron SG diferenciable, en la que además de requerir que el mapeo de SG exista, se requiere que sea suave [17].

En el contexto de los trabajos que estudian la SG de sistemas caóticos, se incluyen diferentes técnicas para lograrla. Un ejemplo de este tipo de trabajos fue publicado en 1999 por Yang y Chua [18]. En ese estudio dos sistemas caóticos iguales en configuración maestro-esclavo, se descomponen en un par de funciones de los estados: una lineal y una no lineal. La parte lineal corresponde a una matriz, A , común al maestro y al esclavo, mientras que, la función no lineal de los sistemas contiene una matriz, Λ , bajo la condición de que las matrices Λ y A conmuten, es posible conectar los sistemas de modo que una SG se genere entre ellos. En el mismo año, Femat y Solís-Perales [19], presentaron una clasificación de los distintos fenómenos de sincronización que surgen entre dos sistemas caóticos acoplados. En dicho trabajo, se propone utilizar un control por retroalimentación para acoplar dos sistemas de Lorenz de modo que se sincronicen de manera práctica, donde además se propone una forma de sincronización parcial. En el año 2001 se publicó el libro "Synchronization a universal phenomena" de Pikovsky y colaboradores [10], este es un libro significativo donde se abordan algunos de los conceptos más relevantes en torno a la sincronización en sistemas no lineales, poniendo especial atención en los conceptos de sincronización de fase entre osciladores caóticos.

Cabe mencionar que en los trabajos mencionados respecto de la sincronización de sistemas caóticos, en su mayoría se acotan a sistemas idénticos, o al menos, sistemas de mismo orden. Un ejemplo donde se aborda la sincronización entre sistemas de dimensiones diferentes se presenta en el trabajo de 2002 [20], donde se logra la sincronización de dos sistemas caóticos de distintas dimensiones en las proyecciones del sistema maestro sobre el sistema esclavo, el cual es de menor dimensión que el maestro. Otro ejemplo de sincronización entre sistemas diferentes, se publicó en el año 2005, Femat y colaboradores [21], en esta publicación los autores resuelven la SG en sistemas caóticos diferentes restringiéndose al caso de sistemas diferentes con la misma dimensión, los cuales además tienen grado relativo pleno. De modo que, a través de un cambio de coordenadas obtenidas de las derivadas de Lie de la salida, los sistemas se pueden escribir en forma triangular. Entonces, una entrada de retroalimentación de estados es diseñada tal que el error entre los sistemas maestro y esclavo sea asintóticamente estable, lo que equivale a resolver el problema de SG. Por otra parte Zhang y Meng [22, 23] analizaron la SG de sistemas caóticos diferentes desde el punto de vista del diseño de controladores no lineales. El método que proponen consiste en aplicar a todos los estados del sistema esclavo un controlador obtenido derivando el mapeo de sincronización deseado. En el 2008, se publicó otro trabajo de la SG entre sistemas caóticos estrictamente diferentes donde se propone alcanzar SG mediante el diseño de un control por modos deslizantes, en este trabajo se considera también el caso de sistemas de dimensiones diferentes,

bajo la restricción de que el orden del sistema maestro sea de orden superior al sistema esclavo [24]. Recientemente, García-Sandoval y colaboradores analizaron el problema de SG en sistemas de orden diferente a través de un enfoque de subvariedades de sincronización [25]. Los sistemas considerados en [25] tienen entradas exógenas y pueden ser descompuestos tal que su dinámica interna sea Poisson estable. En esas condiciones, se diseñan controladores para alcanzar la SG. Otro método que se encuentra en la literatura es la utilización de técnicas de control adaptable para la sincronización entre sistemas caóticos diferentes, con este método se logran sincronizar sistemas de orden diferentes en distintas formas y no únicamente sus proyecciones [26].

En la gran mayoría de los trabajos discutidos arriba sobre la SG de sistemas caóticos diferentes solo se considera el caso de una SG donde todos los estados de un sistema están sincronizados, es decir, solo se ha considerado el caso de lo que en esta tesis se llama SG completa (SGC). Sin embargo, en algunas situaciones, como cuando los sistemas caóticos tienen dinámica interna, una SG de todos los estados no es posible, siendo necesario definir una SG parcial (SGP). En este sentido, los resultados presentados aquí, amplían el trabajo del 2005 de Femat y colaboradores [21]. Por otro lado, son estructuralmente diferentes del trabajo presentado en 2009 por García-Sandoval y colaboradores [4], ya que la SGP como se describe en esta tesis no depende de que a los sistemas se les aplique una excitación persistente que los force a una subvariedad Poisson estable. Como se verá en el resto de la tesis, la SGP que se propone surge cuando al menos uno de los sistemas tiene dinámica interna.

A continuación se describe la tesis y las partes que la conforman.

1.3. Descripción de la Tesis

Hipótesis

En esta tesis la hipótesis de trabajo se describe como sigue:

"Es posible lograr una forma de SG entre dos sistemas caóticos diferentes con dimensiones iguales, conectados unidireccionalmente en configuración maestro-esclavo, por medio del diseño de una entrada de control por retroalimentación de estados estática no lineal aplicada al esclavo, aún cuando los sistemas tengan dinámica interna".

Específicamente, se propone que cuando los sistemas tengan dinámica interna, el tipo de SG que se logra comprende sólo una parte de los sistemas involucrados. Esta situación no ha sido completamente analizada en la literatura por lo que se espera que los resultados descritos a partir de esta hipótesis generen conocimiento nuevo en el tema.

Objetivos y Metas

El objetivo general de la tesis es analizar y proponer metodologías para lograr la SG, en sistemas caóticos con dinámica interna (SCDI), estrictamente diferentes y de la misma dimensión.

De este objetivo general se desprenden los siguientes objetivos particulares: El primero es, buscar establecer las condiciones bajo las cuales se alcanza una SG en SCDI. Para ello, es necesario proponer una descripción del fenómeno de SG y generar un conjunto de condiciones bajo las cuales se presenta la SG. El segundo objetivo es determinar las diferentes formas de SG que se presentan en SCDI, para esto se busca proponer una descripción de los tipos de SG en los sistemas descritos. Posteriormente, se busca diseñar controladores basados en derivadas de Lie del maestro y el esclavo; para que se logre la SG en SCDI. El último objetivo planteado es, ilustrar los tipos de SG identificadas utilizando diferentes sistemas caóticos de prueba, para esto se necesita presentar un estudio numérico con el cual se ilustren los resultados obtenidos en la tesis.

Metodología

Para lograr los objetivos de esta tesis, se formula el problema de SG de sistemas caóticos con dinámica interna, considerando dos sistemas caóticos con las siguientes características: son diferentes entre sí, tienen dimensiones iguales, están en una configuración maestro-esclavo, y tienen sólo una entrada y una salida. Posteriormente, se propone realizar un cambio de coordenadas a los sistemas, por medio de derivadas de Lie. Luego, con base al grado relativo de los sistemas, se realiza una clasificación de las diferentes combinaciones entre la dimensión de los sistemas y su grado relativo. De esto, se pueden presentar dos situaciones, que el grado relativo sea del mismo orden que la dimensión del sistema, o bien, que el grado relativo sea de orden menor a la dimensión del sistema. De lo anterior, se observa que, en el primer caso se puede lograr la sincronización de todos los estados transformados a través de una entrada de control por retroalimentación, por otro lado, en el segundo caso, únicamente se sincronizan algunos de los estados transformados. El primer caso corresponde a la SGC y en el segundo a la SGP. Luego, se analizaron las condiciones bajo las cuales es posible diseñar una entrada de control tal que se logre la SGC y la SGP. Los resultados se concentraron en dos teoremas. Finalmente se realizaron simulaciones numéricas entre diferentes sistemas caóticos para comprobar los resultados.

El resto de esta tesis consiste en las definiciones de trabajo y las herramientas matemáticas utilizadas en el desarrollo de la tesis son presentadas en el Capítulo 2, por lo que dicho Capítulo se refiere al marco teórico de esta tesis. En el Capítulo 3 se describe del problema de sincronización generalizada entre sistemas caóticos a partir de cambios de coordenadas con y sin dinámica interna, y se presentan las condiciones necesarias para lograr la SGC y la SGP; las cuales conforman los resultados principales de la tesis. Una vez analizados los casos se presentan simulaciones utilizando distintas combinaciones de osciladores caóticos continuos diferentes y bien conocidos. Esto se presenta en el Capítulo 4. En el Capítulo 5 se concluye con la discusión de los resultados obtenidos y el trabajo futuro que se desprende de esta tesis.

Capítulo 2

Antecedentes Matemáticos

En el presente capítulo, se exponen las definiciones y herramientas matemáticas utilizadas en el desarrollo de esta tesis. En primer lugar, se presentan diferentes definiciones de sincronización que servirán de base para la descripción de las formas de SG que se proponen en esta tesis. Posteriormente, se discuten brevemente los fundamentos matemáticos del cambio de coordenadas de los sistemas maestro y esclavo mediante derivadas de Lie. Teniendo esto como base, se retoman resultados clásicos respecto del diseño de controladores por retroalimentación y su relación con el concepto de dinámica cero.

2.1. Algunas Definiciones de Sincronización

De forma intuitiva, sincronizar se refiere a lograr que las soluciones de dos o más sistemas dinámicos interconectados coincidan en el tiempo. El análisis del fenómeno de sincronización ha sido un tema de investigación activo durante muchos años, sin embargo, aun existen un gran número de problemas abiertos que continúan siendo estudiados. En el contexto de la sincronización de sistemas caóticos acoplados unidireccionalmente, diferentes conceptos de sincronización han sido propuestos. En primer lugar esta la sincronización idéntica (SI) [29], en ésta las trayectorias de los sistemas sincronizados coinciden exactamente. Por otro lado, se tiene la sincronización completa (SC) [19], en la cual todos y cada uno de los estados de los sistemas se sincronizan de manera idéntica. Desde otra perspectiva, se define la sincronización parcial (SP) [19], en la cual al menos uno de los estados de los sistemas se sincronizan de manera idéntica. Por último se tiene, la SG [15, 27, 28], en la cual las trayectorias de los sistemas sincronizados coinciden sólo a través de un mapeo. A continuación se presentan de manera formal estos tipos de sincronización.

2.1.1. Definiciones Formales de Sincronización

Considere dos sistemas caóticos de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_\pi &= f_\pi(x_\pi) + g_\pi(x_\pi)u_\pi \\ y_\pi &= h_\pi(x_\pi)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde, en lo subsecuente, el subíndice $\pi = m$ representa al sistema maestro, mientras que $\pi = s$ representa al sistema esclavo; $f_\pi : \mathbb{R}^{n_\pi} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\pi}$, $g_\pi : \mathbb{R}^{n_\pi} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\pi}$, son campos vectoriales suaves, los estados de los sistemas están dados por $x_\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$ y $h : \mathbb{R}^{n_\pi} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función escalar suave, $u_\pi \in \mathbb{R}$ es la entrada y $y_\pi \in \mathbb{R}$ es la salida.

Si los sistemas (2.1) son iguales, el tipo de sincronización que se puede lograr es la SI, y esta se define a continuación.

Definición 2.1 (SI) [30] *En dos sistemas idénticos acoplados, la SI ocurre cuando los estados del maestro y del esclavo convergen a los mismos valores en el tiempo, es decir, $\|x_m(t) - x_s(t)\| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. ■*

Las Definición 2.1 es necesaria para introducir los conceptos de SC y SP. En estas definiciones, además de tomar en cuenta la manera en que se sincronizan los estados, es importante la cantidad de estados que se sincronizan. Cuando se sincronizan todos los estados de dos sistemas acoplados se logra la SC, la cual se define como sigue:

Definición 2.2 (SC) [19] *Dos sistemas caóticos acoplados, están completamente sincronizados si y sólo si todos los estados del maestro y del esclavo están sincronizados de manera práctica o bien, de manera idéntica. ■*

Donde la sincronización práctica se logra cuando la diferencia entre las trayectorias del maestro y del esclavo, converge a una vecindad alrededor del origen.

Por otro lado, cuando no se sincronizan todos los estados de los sistemas en (2.1), se esta hablando de una sincronización parcial, la cual se define como:

Definición 2.3 (SP) [19] *Dos sistemas caóticos acoplados, están sincronizados de manera parcial, si, al menos uno de los estados del maestro y del esclavo están sincronizados de manera práctica o idéntica, y sólo si, al menos, uno de los estados del maestro y del esclavo no está sincronizado ni de manera práctica, ni de manera idéntica. ■*

Por otro lado, si los sistemas en (2.1) son diferentes, además de que se puede lograr la SI, otros tipos de sincronización son posibles, particularmente la sincronización generalizada, la cual se define como sigue:

Definición 2.4 (SG) [15, 27, 28] *Dos sistemas de la forma (2.1) se sincronizan de manera generalizada, si existe un mapeo $H_\Upsilon : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$, una variedad $M = \{(x_m, x_s) : x_m = H_\Upsilon(x_s)\}$ y un conjunto $B \subset \mathbb{R}^{n_m} \times \mathbb{R}^{n_s}$ tal que todas las trayectorias de (2.1) con condiciones iniciales en B se aproximan a M conforme $t \rightarrow \infty$. ■*

Aunque bien, en la Definición 2.4 la forma de la variedad M ya está dada, en realidad, la manera en que el mapeo H_Υ relaciona a los sistemas (2.1) puede variar y como consecuencia cambia la forma de la variedad M . El subíndice Υ indica como puede variar la relación. Cuando $\Upsilon = m - s$ la forma de la variedad es $M = \{(x_m, x_s) : x_m = H_\Upsilon(x_s)\}$, como en la Definición 2.4. Por otro lado cuando $\Upsilon = s - m$, la forma de la variedad esta dada por $M = \{(x_m, x_s) : x_s = H_\Upsilon(x_m)\}$.

De la Definición 2.4, y de lo que se ha descrito en esta sección, se entiende que se logra SG cuando, las soluciones del esclavo se relacionan a través de algún mapeo con

las soluciones del maestro. Es decir, se cumple con $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m - H_{m-s}(x_s)\| = 0$. Si esto no es posible, entonces, las soluciones del maestro se relacionan a través de algún mapeo con las soluciones del esclavo. Esto es, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_s - H_{s-m}(x_m)\| = 0$.

Cabe hacer notar que, la sincronización idéntica (SI) es un caso especial de sincronización generalizada, donde la función H es la identidad.

En la definiciones anteriores, la forma de la función H_γ determina el tipo de sincronización de la que se está hablando, como en el caso de la Definición 2.1 y la Definición 2.4. Por otro lado, la cantidad de estados que se sincronizan también determinan el tipo de sincronización del que se va a tratar, como en las Definiciones 2.2 y 2.3.

2.2. Fundamentos de Cambio de Coordenadas Basadas en Derivadas de Lie

En esta sección se describen: la operación de derivada de Lie, los conceptos de grado relativo, dinámica interna y dinámica cero. Mismos que son básicos para describir el problema de SG y la solución que se propone en esta tesis.

Derivada de Lie

Considere un sistema dinámico no lineal suave de la forma (2.1). La derivada de Lie está definida como sigue:

Definición 2.5 (Derivada de Lie) [31] *Dada una función escalar $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La derivada de Lie de h con respecto a f , denotada como $L_f h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, está dada por*

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (2.2)$$

donde las derivaciones recursivas están dadas por

$$L_f^{n+1} h(x) = \frac{\partial [L_f^n h(x)]}{\partial x} f(x) \quad (2.3)$$

además $L_f^0 h(x) = h(x)$. ■

La derivada de Lie, representa la derivada direccional para el campo escalar $h(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ a lo largo de la dirección de un campo vectorial n-dimensional $f(x)$. Donde $L_f h(x)$ es una notación abreviada para indicar que se está calculando la derivada direccional de $h(x)$ a lo largo del campo vectorial $f(x)$.

Definición 2.6 (Grado Relativo) [31] *Un sistema de la forma (2.1) se dice que tiene grado relativo σ en el punto x_0 , si*

$$\begin{aligned} i) \quad & L_g L_f^j h(x) = 0, \quad 0 \leq j \leq \sigma - 1, \quad \forall x \text{ en una vecindad de } x_0 \\ ii) \quad & L_g L_f^{\sigma-1} h(x_0) \neq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $L_g L_f h(x) = \frac{\partial [L_f h(x)]}{\partial x} g(x)$. ■

El grado relativo, representa las veces que hay que derivar la salida y_π a lo largo del campo vectorial f_π , para que aparezca explícitamente la entrada de control u_π . Se dice que el grado relativo está bien definido, cuando ninguna función continua de la secuencia $L_g h(x), L_g L_f h(x), \dots, L_g L_f^\sigma h(x)$, es cero en x_0 . La magnitud del grado relativo siempre es menor a la dimensión del sistema o cuando mucho de la misma dimensión ($\sigma_\pi \leq n_\pi$). En el primer caso, se dice que el grado relativo es no pleno, mientras que en el segundo caso se dice que el grado relativo es pleno.

Cuando el grado relativo está bien definido y si se cumplen las condiciones de la Definición 2.6, existe un cambio de coordenadas local ($z = \Phi(x)$) que se obtiene tomando la salida como la primera coordenada, es decir $z_1 = y = h(x)$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Enseguida, la segunda coordenada está dada por la derivada de Lie de $h(x)$ a lo largo del campo vectorial $f(x)$, es decir, $z_2 = \dot{z}_1 = L_f h(x)$. La tercera coordenada se obtiene derivando por segunda vez la salida a lo largo de $f(x)$, esto es, $z_3 = \dot{z}_2 = L_f^2 h(x)$. De esta forma, se sigue derivando hasta la σ -ésima componente del cambio de coordenadas. Cuando el grado relativo es pleno, la $(\sigma - 1)$ -ésima derivada corresponde a la n -ésima componente, de tal forma que el cambio de coordenadas está dada por

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \Phi(x) = \begin{pmatrix} L_f^0 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\sigma-1} h(x) \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

Los sistemas (2.1), bajo el cambio de coordenadas (2.5), están dados por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ \alpha(z) + \beta(z)u \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

la cual es llamada la forma normal del sistema y posee una estructura estricta de retroalimentación para el control.

En particular, si existe $\beta(z)^{-1}$ y la entrada de control está dada por $u = \beta(z)^{-1}(-\alpha(z) + [k_1 z_1 + \dots + k_n z_n])$, la dinámica del sistema en las variables transformadas se linealiza. Además, si las ganancias de retroalimentación, $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, se escogen tal que el polinomio $s^n + k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1$ es Hurwitz, el origen del sistema es asintóticamente estable.

Por otro lado, cuando el grado relativo es no pleno, la $(\sigma - 1)$ -ésima derivada de la salida representa la σ -ésima componente del cambio de coordenada, es decir, $z_\sigma = \dot{z}_{\sigma-1} = L_f^{\sigma-1} h(x)$. Las otras $n - \sigma$ componentes, que comúnmente se representan con η , se eligen tales que se cumpla con $L_g \phi_i(x) = 0$. De modo que, en este caso, el cambio de coordenadas está dado por

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\sigma \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-\sigma} \end{pmatrix} = \Phi(x) = \begin{pmatrix} L_f^0 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\sigma-1} h(x) \\ \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\sigma}(x) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

donde debido al criterio de elección de las funciones $\phi_i(x)$ para $i = 1, \dots, (n - \sigma)$, estas son linealmente independientes y su Jacobiano es un difeomorfismo. Cumpliéndose estas condiciones se asegura que el cambio de coordenadas es invertible, es decir, existe $\Phi^{-1}(z, \eta)$.

Si el Jacobiano del cambio de coordenadas, $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}$, no tiene ningún punto de singularidad entonces el cambio de coordenadas es global [5].

Note que si x_0 es un punto de equilibrio del sistema original, esto es si $f(x_0) = 0$ y $h(x_0) = 0$, entonces $z_0 = \Phi(x_0) = 0$ es un punto de equilibrio; cuando existe dinámica interna, si x_0 es un punto de equilibrio entonces las coordenadas $[z_1 \dots z_\sigma]^T$ son cero en x_0 . Si el cambio de coordenadas es local, entonces el punto de equilibrio es local.

Cuando el grado relativo de los sistemas es no pleno, y es el mismo para el maestro y el esclavo, a través del cambio de coordenadas (2.7) los sistemas (2.1) se reescriben como

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_\sigma \\ \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ \alpha(z, \eta) + \beta(z, \eta)u \\ \gamma_1(z, \eta) \\ \vdots \\ \gamma_{n-\sigma}(z, \eta) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donde $z = [z_1, \dots, z_\sigma]^T \in \mathbb{R}^\sigma$ representa la parte accesible y $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_{n-\sigma}]^T \in \mathbb{R}^{n-\sigma}$ representa la parte inaccesible del sistema (2.8) ya que en esta representación no se puede obtener información de ellos. A la parte de la dinámica correspondiente a η se le llama la dinámica interna (DI) del sistema.

Para poder diseñar una u que establezca el origen del sistema (2.8), es necesario analizar su dinámica cero (DC), la cual está definida como la dinámica de la parte inaccesible cuando las coordenadas z son cero, es decir, $\dot{\eta}|_{z=0}$ o equivalentemente $\eta = \gamma(0, \eta)$.

Si la DC de (2.8) es asintóticamente estable, $\beta(z, \eta)^{-1}$ está bien definida, y la entrada de control está dada por $u = \beta(z, \eta)^{-1}(-\alpha(z, \eta) + [k_1 z_1 + \dots + k_\sigma z_\sigma])$. Entonces, la dinámica accesible es linealizada, de modo que en lazo cerrado el sistema está dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_\sigma \\ \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ k_1 z_1 + \dots + k_\sigma z_\sigma \\ \gamma_1(z, \eta) \\ \vdots \\ \gamma_{n-\sigma}(z, \eta) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Además, si las ganancias $k_i \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, n$, se escogen tal que el polinomio $s^\sigma + k_\sigma s^{\sigma-1} + k_{\sigma-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1$ es Hurwitz, entonces la parte accesible del sistema se estabiliza en cero ($z \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$), y la parte inaccesible sigue la DC del sistema, por lo tanto (2.9) se estabiliza en el origen.

Observe que se distinguen dos situaciones cuando el grado relativo es pleno y cuando es no pleno. Cuando $n = \sigma$ se tiene una linealización entrada-estado, por otro lado, cuando $n > \sigma$ se tiene una linealización parcial entrada-salida.

En el siguiente capítulo se presenta la formulación del problema de SG de sistemas caóticos con dinámica interna.

Capítulo 3

El Problema de la SG

Este capítulo se divide en dos partes. En la primera, se describe el problema de SG que se analiza en esta tesis. En la segunda parte, se presentan los resultados principales de la tesis, siendo estos la definición de SGP y un teorema en el que se exponen las condiciones para lograr dicha sincronización.

3.1. Descripción del Problema de Control

Para sincronizar sistemas en una configuración maestro-esclavo, se pueden usar diferentes métodos. Por ejemplo, si es permitido, se puede construir el sistema esclavo como un observador del sistema maestro [32]. Por otra parte, considerando que ambos sistemas están dados la sincronización se logra diseñando un controlador para el sistema esclavo [20, 33]. En esta tesis, se considera este último escenario. Se asume que el sistema esclavo está dado y no puede ser modificado. Entonces, se propone resolver el problema de sincronización como un problema de control, en el que se diseña una entrada, u_s , tal que las soluciones del sistema esclavo, sigan a las soluciones del sistema maestro en el sentido generalizado como se describe en la Definición 2.4. Este problema de control se describe con mayor detalle a continuación.

Considere dos sistemas no lineales en una configuración maestro-esclavo, y están dados por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_\pi &= f_\pi(x_\pi) + g_\pi(x_\pi)u_\pi \\ y_\pi &= h_\pi(x_\pi) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde, $x_\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$ es el vector de estados, con $\pi \in \{m, s\}$. La salida está dada por $y_\pi \in \mathbb{R}$. La entrada, $u_m \in \mathbb{R}$, para el maestro debe ser acotada, incluso puede asumirse cero, mientras que la entrada para el esclavo es el control a ser diseñado tal que se logre la SG entre los sistemas maestro y esclavo en el sentido de la Definición 2.4. Así mismo, considere que los sistemas maestro y esclavo son estrictamente diferentes y de dimensiones iguales; esto es, $f_m : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m} \neq f_s : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$. Así mismo, considere que los sistemas tienen grado relativo bien definido y de la misma magnitud, es decir, $\sigma_m = \sigma_s = \sigma$.

Objetivo de Control

Considere que para cada uno de los sistemas de (3.1) existe una transformación de coordenadas, obtenida por medio de derivadas de Lie, $\Phi_\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z_\pi = \Phi_\pi(x_\pi)$. De manera explícita, siguiendo el desarrollo presentado en el Capítulo 2, se obtiene

$$\begin{pmatrix} z_\pi \\ \eta_\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{\pi,1} \\ \vdots \\ z_{\pi,\sigma} \\ \eta_{\pi,1} \\ \vdots \\ \eta_{\pi,n-\sigma} \end{pmatrix} = \Phi_\pi(x_\pi) = \begin{pmatrix} L_{f_\pi}^0 h_\pi(x_\pi) \\ \vdots \\ L_{f_\pi}^{\sigma-1} h_\pi(x_\pi) \\ \phi_{\pi,1}(x_\pi) \\ \vdots \\ \phi_{\pi,n-\sigma}(x_\pi) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

donde z_π y η_π representan la parte accesible y la parte inaccesible de la transformación, respectivamente. $L_{f_\pi}^i h_\pi(x_\pi)$, $i = 0, \dots, \sigma$ son las derivadas de Lie de la salida, h_π , a lo largo del campo vectorial f_π , donde se eligen las funciones $\phi_{\pi,i}(x_\pi)$ tales que cumplan con $L_{g_\pi} \phi_i(x_\pi) = 0$, con $i = 1, \dots, n - \sigma$, de tal forma la transformación sea de rango pleno y por lo tanto exista $\Phi_\pi^{-1}(z_\pi, \eta_\pi)$.

La dinámica de los sistemas (3.1) en variables transformadas está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_\pi \\ \dot{\eta}_\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z}_{\pi,1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{\pi,\sigma} \\ \dot{\eta}_{\pi,1} \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\pi,n-\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{\pi,2} \\ \vdots \\ \alpha_\pi(z_\pi, \eta_\pi) + \beta_\pi(z_\pi, \eta_\pi)u_\pi \\ \gamma_{\pi,1}(z_\pi, \eta_\pi) \\ \vdots \\ \gamma_{\pi,n-\sigma}(z_\pi, \eta_\pi) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Se define el error ESG como la diferencia, en las variables transformadas, entre el maestro y el esclavo (3.2). Esto es

$$e = \begin{pmatrix} e_z \\ e_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_m \\ \eta_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_s \\ \eta_s \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

donde e_z se refiere a la parte accesible del ESG, mientras que e_η es la parte inaccesible del ESG.

De modo que para lograr SG entre dos sistemas de la forma (3.1), el objetivo de control consiste en diseñar una entrada $u_s(x_s, h_m(x_m))$ tal que, el ESG sea asintóticamente estable. De esta forma, el punto de equilibrio del sistema del ESG, es el cero del ESG (3.4).

Casos de Estudio

Esta tesis se restringe a la situación en la que las dimensiones de los sistemas maestro y esclavo son iguales ($n_m = n_s = n$). En primer lugar, se considera el caso cuando los

grados relativos de ambos sistemas son iguales a su dimensión ($\sigma = n$). En este caso, el ESG no tiene parte inaccesible, es decir,

$$e = e_z = [z_{m,1} - z_{s,1}, \dots, z_{m,n} - z_{s,n}]^T. \quad (3.5)$$

En segundo lugar, se considera el caso cuando los grados relativos son iguales entre si pero menores que la dimensión ($\sigma < n$). En este caso el ESG está dado por

$$e = \begin{pmatrix} e_z \\ e_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_m - z_s \\ \eta_m - \eta_s \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

donde la parte accesible está dada por $e_z = [z_{m,1} - z_{s,1}, \dots, z_{m,\sigma} - z_{s,\sigma}]^T$ y la parte inaccesible de ESG, es $e_\eta = [\eta_{m,1} - \eta_{s,1}, \dots, \eta_{m,n-\sigma} - \eta_{s,n-\sigma}]^T$. Por ultimo, se considera el caso en el que los grados relativos son diferentes entre sí, esto es $\sigma_m \neq \sigma_s$, de lo cual surgen dos variantes: i) $\sigma_m < \sigma_s < n$ y ii) $n > \sigma_m > \sigma_s$, en ambas situaciones el ESG tiene parte inaccesible. En i) ESG está dado por

$$e = [e_z, e_{\eta z}, e_\eta]^T \in \mathbb{R}^n \quad (3.7)$$

donde $e_{i,z} = z_{i,m} - z_{i,s}$, para $i = 1, \dots, \sigma_m$; $e_{j,\eta z} = \eta_{j,m} - z_{\sigma_m+j,s}$, para $j = 1, \dots, \sigma_s - \sigma_m$; y $e_{k,\eta} = \eta_{(\sigma_s - \sigma_m + k),m} - \eta_{k,s}$, para $k = 1, \dots, n - \sigma_s$. Aquí la parte accesible de (3.7) es $e_z \in \mathbb{R}^{\sigma_m}$ y la parte inaccesible está dada por $[e_{\eta z}, e_\eta]^T \in \mathbb{R}^{n - \sigma_m}$. Por otra parte, para ii) el ESG está dado por

$$e = [e_z, e_{z\eta}, e_\eta]^T \in \mathbb{R}^n \quad (3.8)$$

donde $e_{i,z} = z_{i,m} - z_{i,s}$, para $i = 1, \dots, \sigma_s$; $e_{j,z\eta} = z_{\sigma_s+j,m} - \eta_{j,s}$, para $j = 1, \dots, \sigma_m - \sigma_s$; y $e_{k,\eta} = \eta_{k,m} - \eta_{(\sigma_m - \sigma_s + k),s}$, para $k = 1, \dots, n - \sigma_m$. Para esta variante, la parte accesible de (3.8) es $e_z \in \mathbb{R}^{\sigma_s}$ y la inaccesible $[e_{z\eta}, e_\eta]^T \in \mathbb{R}^{n - \sigma_s}$.

En la siguiente sección, se describen las condiciones necesarias para lograr la SG para estos casos.

3.2. SG en Sistemas Sin Dinámica Interna ($\sigma = n$)

Considere que los sistemas maestro y esclavo están descritos por (3.1), y que existen cambios de coordenadas (3.2) tales que para ambos sistemas $\sigma = n$. Más aun, suponga que existen las inversas $x_m = \Phi_m^{-1}(z_m)$ y $x_s = \Phi_s^{-1}(z_s)$. Bajo estos cambios de coordenadas, los sistemas maestro y esclavo se pueden escribir en la forma normal

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{\pi,1} \\ \dot{z}_{\pi,2} \\ \vdots \\ \dot{z}_{\pi,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{\pi,2} \\ z_{\pi,3} \\ \vdots \\ \alpha_\pi(z_\pi) + \beta_\pi(z_\pi)u_\pi \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

En este caso, el ESG está dado por (3.5). A partir de (3.9), la dinámica de ESG es

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ \alpha_m(z_m) + \beta_m(z_m)u_m - \alpha_s(z_s) - \beta_s(z_s)u_s \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

El objetivo de control consiste en lograr que el ESG sea asintóticamente estable en el origen. De esta manera, los sistemas maestro y esclavo logran una SG como se describe en la Definición 2.4. Note que, cuando se logra que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_m - z_s\| = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_m(x_m) - \Phi_s(x_s)\| = 0$, de donde $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m - \Phi_m^{-1}(\Phi_s(x_s))\| = 0$ o bien $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_s^{-1}(\Phi_m(x_m)) - x_s\| = 0$. En este sentido, se fija el mapeo de sincronización en términos de los cambios de coordenadas, teniendo que H_Υ puede ser $\Phi_m^{-1}(\Phi_s(x_s))$ o, equivalentemente, $\Phi_s^{-1}(\Phi_m(x_m))$.

Para poder construir una ley de control u_s , que establezca el ESG, es necesario que la entrada del maestro u_m esté acotada y que la función $\beta_s^{-1}(z_s, \eta_s)$ sea diferente de cero para todo tiempo. Entonces, si u_s está dada por

$$u_s = \beta_s(z_s)^{-1}(\alpha_m(z_m) + \beta_m(z_m)u_m - \alpha_s(z_s) - (k_1e_1 + \dots + k_n e_n)) \quad (3.11)$$

es posible escoger las ganancias k_1, \dots, k_n de modo que se logre el objetivo de control. Este resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Sean los sistemas maestro y esclavo (3.1), tales que bajo los cambios de coordenadas (3.2) se reescriban como (3.9), y su ESG está dado por (3.5). Si $\beta_s^{-1}(z_s)$ existe y la ley de control u_s es de la forma (3.11) con las ganancias k_i , $i = 1, \dots, n$ tales que las partes reales de las raíces de la ecuación $s^n + k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1 = 0$, son todas negativas. Entonces, se logra una SG entre el maestro y el esclavo, en el sentido de la Definición 2.4, donde H_Υ es una composición de sus cambios de coordenadas. \square*

Prueba: Suponga que $\beta_s^{-1}(z_s) \neq 0$ para todo $z_s \in \mathbb{R}^n$. A partir de (3.10) y (3.11) en lazo cerrado la dinámica del ESG está dada por el sistema lineal

$$\dot{e} = Ae = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & \dots & -k_n \end{pmatrix} e \quad (3.12)$$

donde el polinomio característico de A es $s^n + k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1$. De modo que, si las ganancias $k_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, \dots, n$ son tales que el polinomio es Hurwitz, entonces A es Hurwitz y el ESG (3.5) es asintóticamente estable, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$. Equivalentemente $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m - \Phi_m^{-1}(\Phi_s(x_s))\| = 0$. *QED*

De la Definición 2.4 se observa que los sistemas maestro y esclavo logran una SG donde la variedad de sincronización es $M = \{(x_m, x_s) : x_m = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s(x_s)\}$. Donde $H_\Upsilon = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s(x_s)$, es el mapeo de sincronización generalizada y donde B es el conjunto de las condiciones iniciales para las cuales M es atractiva.

Note que, a través de la ley de control (3.11), todos los estados de los sistemas maestro y esclavo descritos en (3.9) están sincronizados de manera generalizada. En esta tesis, a este tipo de sincronización, le llamaremos SG completa (SGC).

3.3. SG en Sistemas Con Dinámica Interna ($\sigma < n$)

Suponga que los sistemas maestro y esclavo (3.1), son tales que a través de los cambios de coordenadas (3.2), se pueden escribir como en (3.3). En el caso en el que los grados relativos son iguales ($\sigma_m = \sigma_s$), el ESG está descrito por (3.6). De lo anterior, se sigue que la dinámica del ESG está dada por

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} \dot{e}_z \\ \dot{e}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{z,2} \\ \vdots \\ \alpha_m(z_m, \eta_m) + \beta_m(z_m, \eta_m)u_m - \alpha_s(z_s, \eta_s) - \beta_s(z_s, \eta_s)u_s \\ \gamma_{m,1}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,1}(z_s, \eta_s) \\ \vdots \\ \gamma_{m,n-\sigma}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,n-\sigma}(z_s, \eta_s) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde \dot{e}_z es la dinámica accesible del ESG (DAESG) y \dot{e}_η describe la dinámica interna del ESG (DIESG).

En el caso anterior ($\sigma = n$), a través del diseño (3.11), bajo las condiciones del Teorema 3.1, se logra la SG. En este caso ($\sigma < n$), debido a que existe una dinámica interna del ESG, se deben considerar condiciones extras a las presentadas en el Teorema 3.1.

Analizando la ecuación (3.13), se observa que la entrada de control u_s únicamente afecta la DAESG. Sin embargo, para lograr que el ESG sea asintóticamente estable, se requiere que tanto la DAESG como la DIESG converjan a cero. Por lo tanto, es necesario analizar la estabilidad de la dinámica cero de ESG (DCESG).

Note que cuando $e_z = 0$ se tiene que $z_m = z_s$, entonces la DCESG está dada por

$$\dot{e}|_{e_z=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{m,1}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,1}(z_m, \eta_s) \\ \vdots \\ \gamma_{m,n-\sigma}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,n-\sigma}(z_m, \eta_s) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Para lograr el objetivo de control es necesario que (3.14) sea asintóticamente estable a cero [5, 31].

Note que debido a que los sistemas maestro y esclavo son estrictamente diferentes, sus dinámicas internas también lo son ($\gamma_m \neq \gamma_s$). Por lo tanto, aun cuando $z_m = z_s$ esto no es una condición suficiente para que la DCESG sea asintóticamente estable. Más aún, puesto que el sistema maestro oscila en un atractor caótico, su dinámica interna no converge a cero. En consecuencia, cuando el grado relativo es diferente a la dimensión, la DCESG no es asintóticamente estable. De modo que mediante el diseño de una u_s de la forma (3.11), una SGC no es posible en este caso.

En esta tesis se tiene la hipótesis de que es posible lograr una forma de SG, a través de una entrada de control aplicada al esclavo, aun cuando los sistemas tengan dinámica interna. Por lo discutido arriba, la SGC no se puede lograr en esta situación.

A continuación se describe un tipo de SG que se puede lograr cuando se tiene dinámica interna.

Definición 3.1 (SGP) *Dos sistemas de la forma (3.1) que pueden ser reescritos de la forma (3.3), con un ESG como en (3.6) están sincronizados de manera generalizada parcial cuando, la parte inaccesible del ESG permanece acotada, y existe un cambio de coordenadas dado por (3.2) para el maestro y el esclavo, así mismo, existe una variedad $M_p = \{(z_m, z_s) : z_m - z_s = 0\}$ y un conjunto $B_p \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que todas las trayectorias de (3.3) con condiciones iniciales en B_p se aproximan a M_p conforme $t \rightarrow \infty$. ■*

Observe que la entrada de control u_s no afecta la dinámica caótica del maestro, de tal forma que su dinámica interna permanece acotada. Para asegurar que la parte inaccesible del ESG permanezca acotada, es necesario analizar la dinámica interna del esclavo.

Considere que la dinámica cero del esclavo es asintóticamente estable y que $\beta_s^{-1}(z_s, \eta_s)$ es diferente de cero para todo tiempo, entonces es posible diseñar una ley de control de la forma¹

$$u_s = \beta_s(z_s, \eta_s)^{-1}(\alpha_m(z_m, \eta_m) + \beta_m(z_m, \eta_m)u_m - \alpha_s(z_s, \eta_s) - (k_1 e_1 + \dots + k_\sigma e_\sigma)) \quad (3.15)$$

para lograr estabilizar la DAESG de (3.13); esto es, lograr que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_m - z_s\| = 0$. Entonces, la dinámica interna del esclavo está dada por

$$\dot{\eta}_s = \begin{pmatrix} \gamma_{s,1}(z_m, \eta_s) \\ \vdots \\ \gamma_{s,n-\sigma}(z_m, \eta_s) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Observe que el subsistema (3.16) tiene la forma de un sistema no lineal, donde z_m puede considerarse como una entrada, la cual, como se discute arriba, es acotada. Haciendo un análisis local al rededor del origen de (3.16) se tiene

$$\dot{\eta}_s = Q\eta_s \quad (3.17)$$

donde $Q = \frac{\partial \hat{\gamma}_s(z_m, \eta_s)}{\partial \eta_s}$ con $\hat{\gamma}_s(z_m, \eta_s) = [\gamma_{s,1}(z_m, \eta_s), \dots, \gamma_{s,n-\sigma}(z_m, \eta_s)]^T$. De tal forma que si Q es definida negativa, el subsistema (3.16) es BIBO y la dinámica interna del esclavo es acotada, por lo tanto, la parte inaccesible del ESG también está acotada.

Entonces, si es posible aplicar un controlador de la forma (3.15) al sistema esclavo, se logra la SGP en el sentido de la Definición 3.1. Esto es, que la DIESG se mantiene acotada y a la vez que la DAESG es asintóticamente estable. Explícitamente,

$$\|e_\eta\| < P, \quad \forall t, \quad \text{con } P \in \mathbb{R}, \quad \text{y} \quad (3.18)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_z\| = 0 \quad (3.19)$$

Estos resultados respecto de la SGP se resumen en el siguiente teorema.

¹Note que es posible construir un control de la forma (3.15), puesto que, además de la salida, se tiene acceso a todos los estados del sistema esclavo.

Teorema 3.2 Sean los sistemas maestro y esclavo (3.1), tales que bajo los cambios de coordenadas (3.2) se reescriben como (3.3), y su ESG está dado por (3.6). Si la dinámica interna del maestro es acotada, $\beta_s^{-1}(z_s, \eta_s) \neq 0$ para todo tiempo, y la dinámica cero del esclavo es asintóticamente estable, se puede diseñar una ley de control u_s de la forma (3.15) con las ganancias k_i , $i = 1, \dots, \sigma$ tales que las partes reales de las raíces del polinomio $s^\sigma + k_\sigma s^{\sigma-1} + k_{\sigma-1} s^{\sigma-2} + \dots + k_2 s + k_1$, son todas negativas. De tal forma que si bajo la acción del control u_s , la dinámica interna del esclavo resultante (3.16) es BIBO. Entonces se logra una SGP entre el maestro y el esclavo, en el sentido de la Definición 3.1. \square

Prueba: Suponga que la dinámica interna del maestro es acotada, que existe $\beta_s^{-1}(z_s, \eta_s)$, y la dinámica cero del esclavo es asintóticamente estable. Aplicando el control (3.15) al sistema (3.13), la dinámica del ESG en lazo cerrado está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_z \\ \dot{e}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_z e_z \\ \gamma_{m,1}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,1}(z_s, \eta_s) \\ \vdots \\ \gamma_{m,n-\sigma}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,n-\sigma}(z_s, \eta_s) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

donde la matriz $A_z \in \mathbb{R}^{\sigma \times \sigma}$ está dada por

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & \dots & -k_\sigma \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es $s^\sigma + k_\sigma s^{\sigma-1} + k_{\sigma-1} s^{\sigma-2} + \dots + k_2 s + k_1 = 0$. De tal forma que si se eligen ganancias k_i , $i = 1, \dots, \sigma$ tales que la matriz A_z es Hurwitz, entonces la parte accesible del ESG es asintóticamente estable. Por otra parte, ya que el controlador produce una dinámica interna del esclavo resultante BIBO, y la dinámica interna del maestro también es acotada, entonces la DIESG es acotada. Por lo tanto, se logra una SGP entre los sistemas maestro y esclavo, en el sentido de la Definición 3.1. *QED*

A continuación se analiza el caso en el que los grados relativos son diferentes entre si ($\sigma_m \neq \sigma_s$). Para la primera variante, que es cuando $\sigma_m < \sigma_s$, el ESG está descrito por (3.7) y su dinámica está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{z,\sigma_m-1} \\ \dot{e}_{z,\sigma_m} \\ \dot{e}_{\eta z,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{\eta z,(\sigma_s-\sigma_m)} \\ \dot{e}_{\eta,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{\eta,n-\sigma_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{z,2} \\ \vdots \\ e_{z,\sigma_m} \\ \alpha_m(z_m, \eta_m) + \beta_m(z_m, \eta_m) u_m - z_{s,\sigma_m} \\ \gamma_{m,1}(z_m, \eta_m) - z_{s,\sigma_m+1} \\ \vdots \\ \gamma_{m,\sigma_s-\sigma_m}(z_m, \eta_m) - \alpha_s(z_s, \eta_s) - \beta_s(z_s, \eta_s) u_s \\ \gamma_{m,(\sigma_s-\sigma_m+1)}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,1}(z_s, \eta_s) \\ \vdots \\ \gamma_{m,n-\sigma_m}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,n-\sigma_s}(z_s, \eta_s) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

donde $\dot{e}_z \in \mathbb{R}^{\sigma_m}$ es la DAESG y $[\dot{e}_{\eta z}, \dot{e}_\eta]^T \in \mathbb{R}^{n-\sigma_m}$ describe la DIESG.

Como se puede observar de (3.21), la DAESG no tiene un controlador en el esclavo y puesto que u_m se supone cero, la DAESG no puede ser controlada. Más aun, se tiene que para diseñar la entrada de control u_s es necesario retroalimentar con la dinámica interna del maestro lo cual no es posible. Por lo tanto, aun y cuando la dinámica interna del maestro sea acotada y la dinámica cero del esclavo sea asintóticamente estable, no es posible diseñar una u_s que establezca la DAESG. Entonces, no se puede lograr ni la SGC, ni la SGP. De lo cual se desprende la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Sean los sistemas maestro y esclavo (3.1), tales que bajo los cambios de coordenadas (3.2) se reescriben como (3.3). Además $\sigma_m < \sigma_s$, tal que su ESG está dado por (3.7), entonces no es posible lograr ni la SGC ni la SGP entre estos sistemas.* \square

La prueba de la Proposición es directa, basta observar que la DAESG no es controlable por la entrada del esclavo u_s .

Por otro lado, para la variante en la cual $\sigma_m > \sigma_s$, el ESG está descrito por (3.8) y su dinámica está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{z,\sigma_s-1} \\ \dot{e}_{z,\sigma_s} \\ \dot{e}_{z\eta,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{z\eta,(\sigma_m-\sigma_s)} \\ \dot{e}_{\eta,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{\eta,n-\sigma_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{z,2} \\ \vdots \\ e_{z,\sigma_s} \\ z_{m,\sigma_s} - \alpha_s(z_s, \eta_s) - \beta_s(z_s, \eta_s)u_s \\ z_{m,\sigma_s+1} - \gamma_{s,1}(z_s, \eta_s) \\ \vdots \\ \alpha_m(z_m, \eta_m) + \beta_m(z_m, \eta_m)u_m - \gamma_{s,\sigma_m-\sigma_s}(z_s, \eta_s) \\ \gamma_{m,1}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,(\sigma_m-\sigma_s+1)}(z_s, \eta_s) \\ \vdots \\ \gamma_{m,n-\sigma_s}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,n-\sigma_m}(z_s, \eta_s) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

donde $\dot{e}_z \in \mathbb{R}^{\sigma_s}$ es la DAESG y $[\dot{e}_{z\eta}, \dot{e}_\eta]^T \in \mathbb{R}^{n-\sigma_s}$ describe la DIESG.

Como se puede observar de (3.22) la DAESG si tiene la entrada de control del esclavo. Entonces, suponiendo que la dinámica cero del esclavo es asintóticamente estable y que $\beta_s^{1-}(z_s, \eta_s)$ está bien definida, es posible diseñar a u_s como

$$u_s = \beta_s^{-1}(z_s, \eta_s)(z_{m,\sigma_m} - \alpha_s(z_s, \eta_s) - (k_1 e_1 + \cdots + k_{\sigma_s} e_{\sigma_s})) \quad (3.23)$$

con las ganancias k_i , $i = 1, \dots, \sigma_s$ tales que las partes reales de las raíces de la ecuación $s^{\sigma_s} + k_{\sigma_s}s^{\sigma_s-1} + k_{\sigma_s-1}s^{\sigma_s-2} + \cdots + k_2s + k_1 = 0$, son todas negativas.

La DCESG resultante de la acción del control (3.23) está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{z,\sigma_s-1} \\ \dot{e}_{z,\sigma_s} \\ \dot{e}_{z\eta,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{z\eta,(\sigma_m-\sigma_s)} \\ \dot{e}_{\eta,1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{\eta,n-\sigma_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ z_{m,\sigma_s+1} - \gamma_{s,1}(z_m, \eta_s) \\ \vdots \\ \alpha_m(z_m) + \beta_m(z_m)u_m - \gamma_{s,\sigma_m-\sigma_s}(z_m, \eta_s) \\ \gamma_{m,1}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,(\sigma_m-\sigma_s+1)}(z_m, \eta_s) \\ \vdots \\ \gamma_{m,n-\sigma_s}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,n-\sigma_m}(z_s, \eta_s) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

donde, como se discutió anteriormente, $[\dot{e}_{z\eta}, \dot{e}_\eta]^T|_{e_z=0}$ no necesariamente es asintóticamente estable.

Para lograr la SGP es necesario que la DCESG sea acotada. Observe que las z_m y las $\gamma_m(z_m, \eta_m)$, pertenecen a un atractor caótico por lo que son acotadas. Por otro lado, bajo el efecto de (3.23), la dinámica interna del esclavo está dada por

$$\dot{\eta}_s = \begin{pmatrix} \gamma_{s,1}(z_m, \eta_s) \\ \vdots \\ \gamma_{s,n-\sigma_m}(z_m, \eta_s) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Analizando (3.25) al rededor del origen, si se cumple la condición (3.17), entonces la dinámica interna del esclavo resultante es BIBO y por lo tanto (3.24) es acotada. En el corolario que se escribe a continuación se resume este resultado.

Corolario 3.1 *Sean los sistemas maestro y esclavo (3.1), tales que bajo los cambios de coordenadas (3.2) se reescriben como (3.3). Además $\sigma_m > \sigma_s$, tal que su ESG está dado por (3.8). Si se cumple que la dinámica interna del maestro está acotada, $\beta_s^{-1}(z_s, \eta_s)$ está bien definida, y la dinámica cero del esclavo es asintóticamente estable, se puede diseñar una ley de control de la forma (3.23) con las ganancias k_i , $i = 1, \dots, \sigma_s$ tales que las partes reales de las raíces de la ecuación $s^{\sigma_s} + k_{\sigma_s}s^{\sigma_s-1} + k_{\sigma_s-1}s^{\sigma_s-2} + \dots + k_2s + k_1 = 0$, son todas negativas. De tal forma que si bajo la acción del control, la dinámica interna del esclavo resultante (3.25) es BIBO. Entonces se logra una SGP entre el maestro y el esclavo, en el sentido de la Definición 3.1. \square*

La prueba del Corolario 3.1 es similar a la prueba del Teorema 3.2, con la única diferencia de que aquí la DIESG está dada por $[\dot{e}_{z\eta}, \dot{e}_\eta]^T$.

En el siguiente capítulo, se presenta un estudio numérico para ilustrar estos resultados teóricos sobre la SGC y la SGP.

Capítulo 4

Estudio Numérico de la SGC y la SGP

En este capítulo, utilizando osciladores caóticos bien conocidos, distintas combinaciones maestro-esclavo se utilizan para ilustrar las situaciones en las que se logra la SGC y SGP que se describieron en el Capítulo anterior.

En esta tesis, se utilizan los sistemas de Lorenz, Rössler y una versión suavizada del circuito de Chua para ilustrar la SGC y la SGP. Para estos sistemas tridimensionales, dependiendo de la elección de la entrada y salida, se pueden tener grado relativo $\sigma \in \{1, 2, 3\}$. Los cambios de coordenadas tales que se obtengan estos diferentes grados relativos se encuentran en el Apéndice A.

Cabe mencionar que no en todas las combinaciones es posible lograr una SG, ya que es necesario analizar los cambios de coordenadas, la dinámica interna, y la dinámica cero, cuando estas existen.

En el Apéndice B se concentran las figuras de todas las combinaciones para las cuales es posible lograr la SGC y/o la SGP, con estos sistemas.

4.1. Ilustración de SG Cuando $n = \sigma$

Considere los sistemas Rössler y Lorenz descritos en el Apéndice A, los cuales tienen grado relativo igual a tres para los cambios de coordenadas (A.2) y (A.14), respectivamente.

Suponga que se tiene la combinación Rössler-Lorenz. En lo sucesivo, el lado izquierdo del guión medio indica al maestro y el lado derecho al esclavo.

De los sistemas Rössler y Lorenz en coordenadas transformadas, dados por (A.4) y (A.16), respectivamente; se tiene que la dinámica del ESG, con $u_R = 0$, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z,2} \\ \dot{e}_{z,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{z,2} \\ e_{z,3} \\ -f_{R,2} - f_{R,3} + a_R(f_{R,1} + a_R f_{R,2}) - \alpha_L(z_L) - \beta_L(z_L)u_L \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

donde $\alpha_L(z_L) = -a_L[a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) - (b_L f_{L,1} - f_{L,2} - x_{L,3} f_{L,1} - x_{L,1} f_{L,3})]$ y $\beta_L(z_L) = z_{L,1}$.

Como se observa de la dinámica (4.1), la entrada del esclavo u_L no puede ser diseñada como una entrada de control por retroalimentación, puesto que la función $\beta_L^{-1}(z_L)$ no está bien definida. Por lo que se sigue que, con el sistema de Lorenz como

esclavo, no es posible lograr una SGC, debido a que no se cumplen con las condiciones del Teorema 3.1.

Por otro lado, considere la configuración Lorenz-Rössler en coordenadas transformadas.

En este caso, con $u_L = 0$, la dinámica del ESG está descrita por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z,2} \\ \dot{e}_{z,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{z,2} \\ e_{z,3} \\ \alpha_L(z_L) + f_{R,2} + f_{R,3} - a_R(f_{R,1} + a_R f_{R,2}) + u_R \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

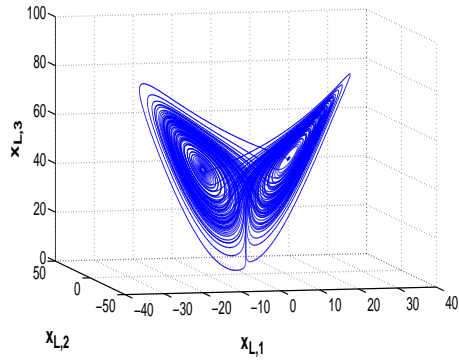
con $\alpha_L(z_L)$ como se describió en (4.1).

De (4.2) se tiene que la entrada de control para lograr la SGC está dada por

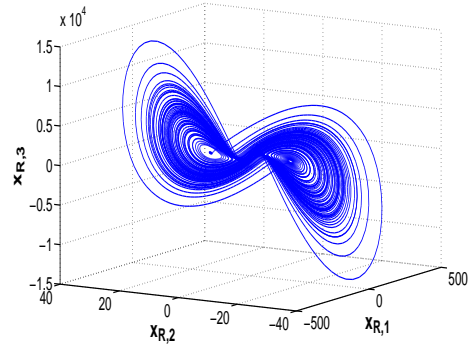
$$u_s = -\alpha_L(z_L) - f_{R,2} - f_{R,3} + a_R(f_{R,1} + a_R f_{R,2}) + (k_{LR,1}e_{z,1} + k_{LR,2}e_{z,2} + k_{LR,3}e_{z,3}) \quad (4.3)$$

con $K_{LR} = [-125000, -7500, -150]$.

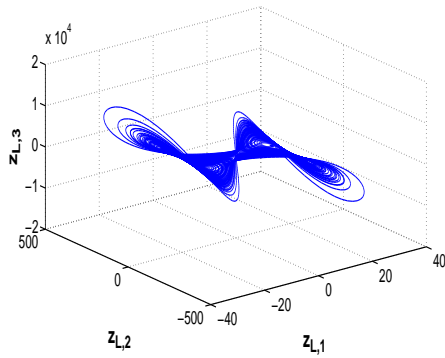
En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestra el efecto del control (4.3), en la configuración Lorenz-Rössler con grado relativo igual a tres.



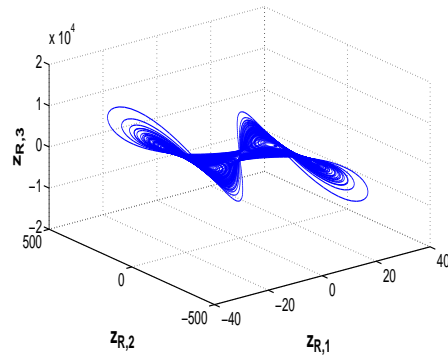
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.1: SGC entre Lorenz (maestro) y Rössler (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a) Lorenz y (b) Rössler en sus variables originales (x_L, x_R) ; (c) Lorenz y (d) Rössler en sus variables transformadas (z_L, z_R) .

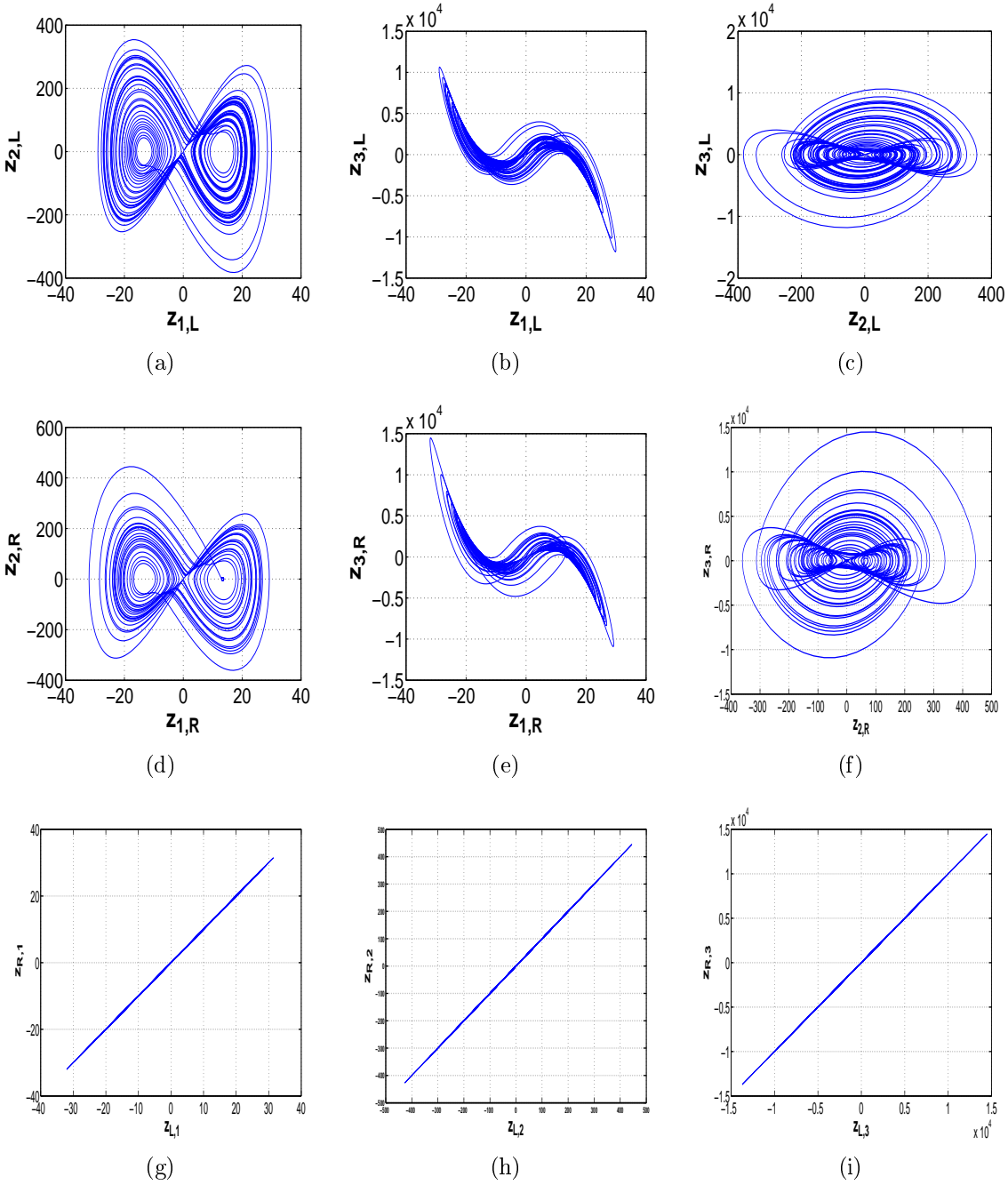


Figura 4.2: SGC entre Lorenz (maestro) y Rössler (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en sus variables transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Rössler en sus variables transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

La Tabla 4.1 resume todas las combinaciones maestro-esclavo entre los sistemas Rössler, Lorenz y Chua suavizado. En la tabla se indica con N.A. a la expresión “No se Admite”, cuando para esa combinación maestro-esclavo no es posible tener ese tipo

de SG. Mientras que N.P. para la expresión “No se Puede”, se utiliza cuando para esa combinación maestro-esclavo no se cumple con alguna de las condiciones de los teoremas del Capítulo 3, aun cuando teóricamente es posible la SG. El resto de las figuras correspondientes a las combinaciones en las que se logra la SG, se encuentran en el apéndice B.

Maestro $\sigma_m = 3$	Esclavo $\sigma_s = 3$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.P.	N.A.
Chua	Lorenz	N.P.	N.A.
Lorenz	Rössler	Fig. 4.1 y Fig. 4.2	N.A.
Chua	Rössler	Fig. B.1 y Fig. B.2	N.A.
Lorenz	Chua	Fig. B.3 y Fig. B.4	N.A.
Rössler	Chua	Fig. B.5 y Fig. B.6	N.A.

Tabla 4.1: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n = \sigma = 3$. La SGP, no se admite por que se logra una linealización por la retroalimentación de estados.

4.2. Ilustración de SG Cuando $n > \sigma$

Primera Variante ($\sigma_m = \sigma_s$)

Cuando $\sigma_m = \sigma_s = 2$

Considere el sistema de Lorenz y el sistema de Chua suavizado, descrito en el apéndice A por la ecuación (A.25).

Suponga que la configuración maestro-esclavo está dada por Lorenz-Chua, con los cambios de coordenadas para grado relativo igual a dos dados por (A.17) y (A.29), respectivamente.

En este caso, con $u_L = 0$, la dinámica del ESG está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z,2} \\ \dot{e}_{\eta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{z,2} \\ a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) - f_{C,1} + f_{C,2} - f_{C,3} - u_C \\ f_{L,3} + b_C z_{C,1} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

donde la dinámica cero del sistema de Chua es inestable, por lo que no es posible diseñar una u_C que estabilice la DAESG de (4.4). Por lo que, para esta configuración, no es posible lograr ni la SGC, ni la SGP.

Ahora, suponga la configuración Chua-Lorenz, cuya dinámica del ESG, con $u_C = 0$, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z,2} \\ \dot{e}_{\eta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{C,2} \\ f_{C,1} - f_{C,2} + f_{C,3} - a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) - a_L u_L \\ -b_C z_{C,1} - f_{L,3} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

puesto que la dinámica cero del sistema de Lorenz es asintóticamente estable, entonces es posible diseñar una entrada de control u_L , para lograr la SGP en el sentido de la Definición 3.1. La entrada de control está dada por

$$u_L = a_L^{-1}[f_{C,1} - f_{C,2} + f_{C,3} - a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) - (k_{CL,1}e_{z,1} + k_{CL,2}e_{z,2})] \quad (4.6)$$

con $K_{CL} = [-225, -30]$.

Con la entrada de control (4.6), la dinámica interna del sistema de Lorenz está dada por $\dot{\eta}_L = -c_L\eta_{L,1} + z_{C,1}(\frac{z_{C,2}}{a_L} + z_{C,1})$. Haciendo un análisis alrededor del origen se obtiene que $\dot{\eta}_L = -c_L\eta_{L,1}$, como $Q = -c_L$ es definida negativa, la dinámica interna de Lorenz es BIBO. De lo anterior se tiene que se cumplen todas las condiciones del Teorema 3.2, por lo tanto es posible lograr una SGP.

En las siguientes figuras se muestra la SGP, que se logra entre los sistemas Chua suavizado y Lorenz, con la ley de control (4.6).

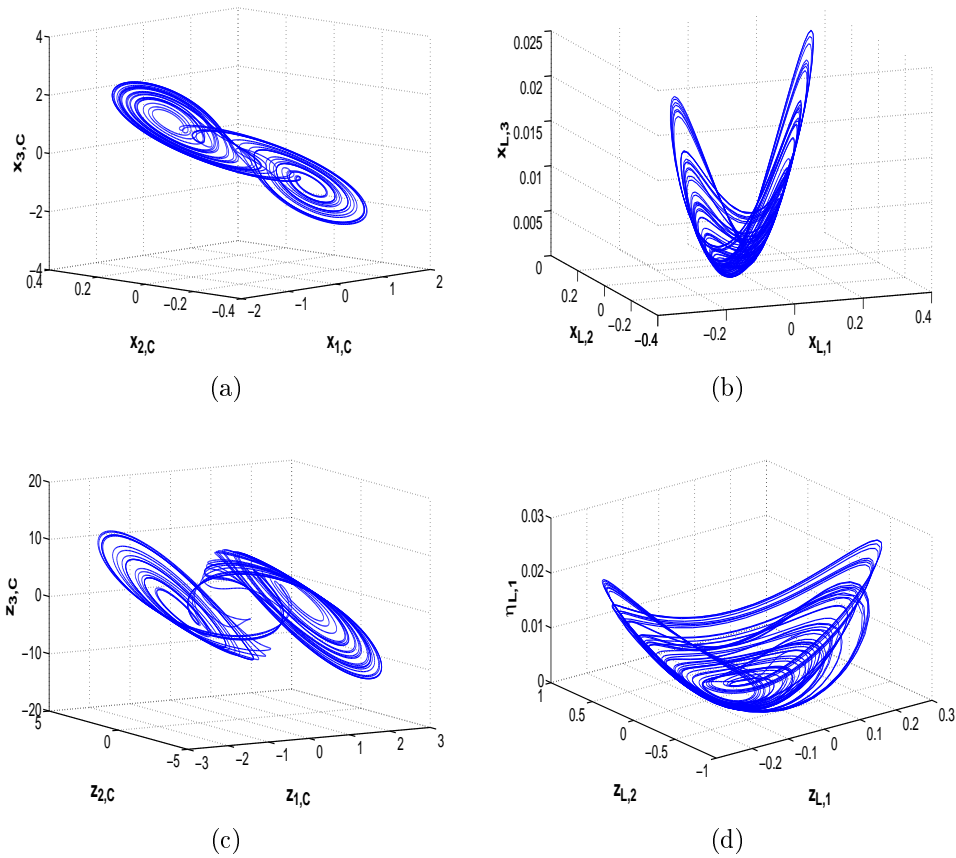


Figura 4.3: SGP entre Chua (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 2$. (a) Chua y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L); (c) Chua y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L).

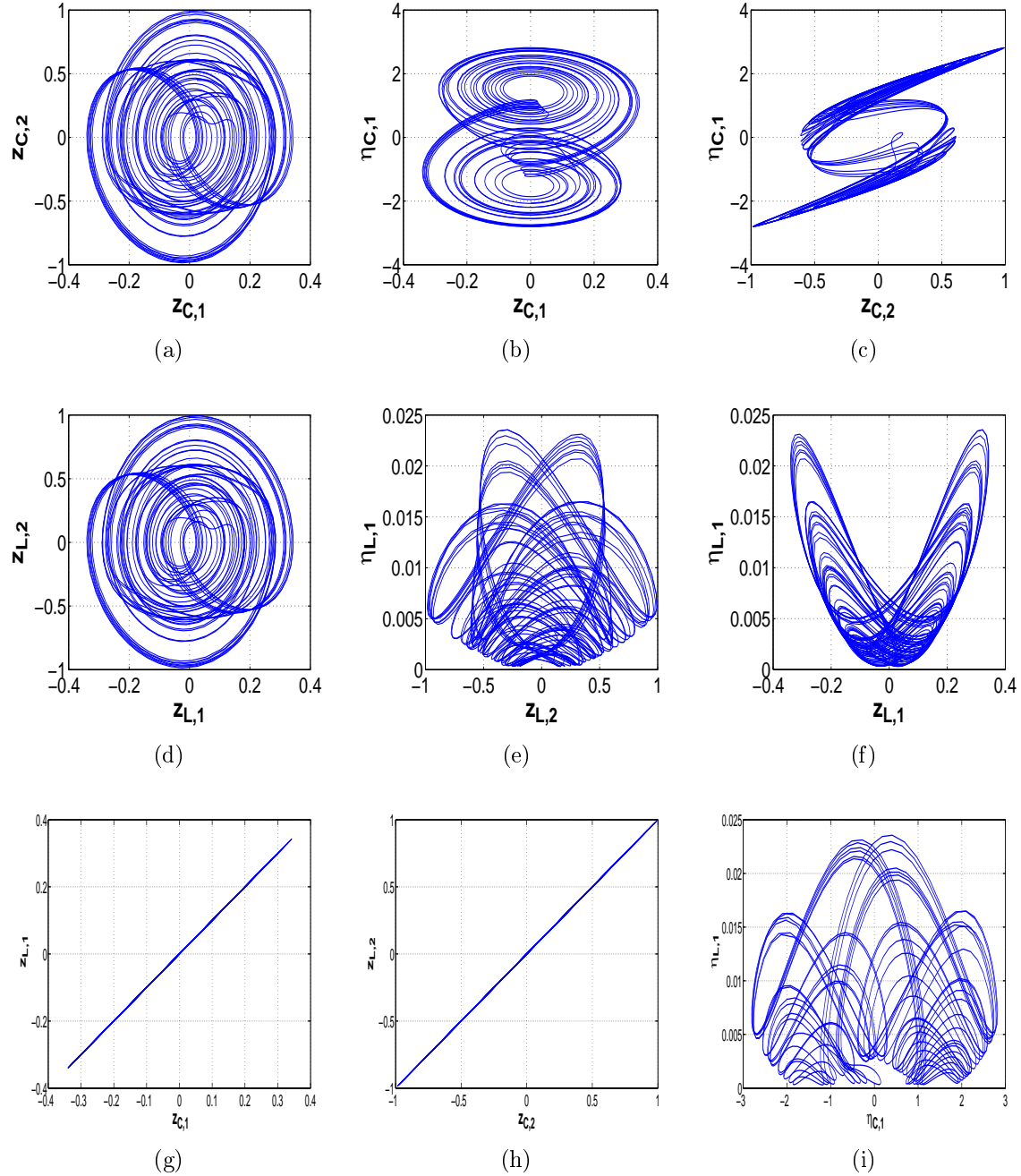


Figura 4.4: SGP entre Chua (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 2$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua en sus variables transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en sus variables transformadas; (g), (h), (i) muestran las variedades de sincronización.

En la Tabla (4.3) se muestran las combinaciones en las que es posible lograr la SGP cuando maestro y esclavo tienen grado relativo igual a dos. La dinámica cero de los sistemas Rössler y Chua suavizado es inestable, por lo que, con estos sistemas como

esclavos no es posible diseñar una u_S para lograr la SGP.

Maestro $\sigma_m = 2$	Esclavo $\sigma_s = 2$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. B.7 y Fig. B.8
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. 4.3 y Fig. 4.4
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	N.P.
Rössler	Chua	N.A.	N.P.

Tabla 4.2: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n > \sigma = 2$

Cuando $\sigma_m = \sigma_s = 1$

Ahora, considere la configuración Chua suavizado-Rössler, con sus cambios de coordenadas, para grado relativo igual a uno, dados por las ecuaciones (A.33) y (A.9), respectivamente.

En este caso, con $u_C = 0$, la dinámica del ESG está descrita por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{\eta,1} \\ \dot{e}_{\eta,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_C(\eta_{C,1} - z_{C,1} - \nu_z) - z_{R,1}(\eta_{R,1} - b_R) - a_R - u_R \\ z_{C,1} - \eta_{C,1} + \eta_{C,2} + \eta_{R,2} + z_{R,1} \\ -b_C\eta_{C,1} + \eta_{R,1}a_R\eta_{R,2} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Pero la dinámica cero de Rössler es inestable, por lo que no es posible diseñar una u_R que estabilice la DAESG. Entonces, con el sistema de Rössler como esclavo con grado relativo igual a uno, no es posible lograr la SGP.

Por otro lado, considere la configuración Rössler-Chua suavizado, con grado relativo igual a uno.

La dinámica del ESG, con $u_R = 0$, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{\eta,1} \\ \dot{e}_{\eta,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{R,1}(\eta_{R,1} - b_R) + a_R - a_C(\eta_{C,1} - z_{C,1} - \nu_z) - u_C \\ -\eta_{R,2} - z_{R,1} - z_{C,1} + \eta_{C,1} - \eta_{C,2} \\ -\eta_{R,1} - a_R\eta_{R,2} + b_C\eta_{C,1} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

del análisis realizado en el apéndice A se tiene que la dinámica cero del circuito de Chua suavizado es asintóticamente estable, por lo que es posible diseñar una u_C para lograr la SGP.

De la ecuación (4.8) se tiene que la entrada de control está dada por

$$u_C = z_{R,1}(\eta_{R,1} - b_R) + a_R - a_C(\eta_{C,1} - z_{C,1} - \nu_z) - k_{RC,1}e_{z,1} \quad (4.9)$$

con la ganancia $k_{RC,1} = -10$.

Con el control (4.9), se tiene que la dinámica interna del sistema de Chua suavizado, está dada por

$$\dot{\eta}_C = \begin{pmatrix} z_{R,1} - \eta_{C,1} + \eta_{C,2} \\ -b_C\eta_{C,1} \end{pmatrix}$$

de cuyo análisis alrededor del origen se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_C &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -b_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{C,1} \\ \eta_{C,2} \end{pmatrix} \\ &= Q\eta_C\end{aligned}$$

donde $|Q| = b_C > 0$ y con eigenvalores $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 3.7464i$. Puesto que $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$, entonces Q es definida negativa. Así, con (4.9), la dinámica interna del circuito de Chua suavizado es BIBO. Por lo que se cumplen las condiciones de Teorema 3.2, de tal forma que se logra la SGP.

En las siguientes figuras se ilustra la SGP que se logra con el control (4.9) entre los sistemas de Rössler y Chua suavizado, cuando ambos tienen grado relativo igual a uno.

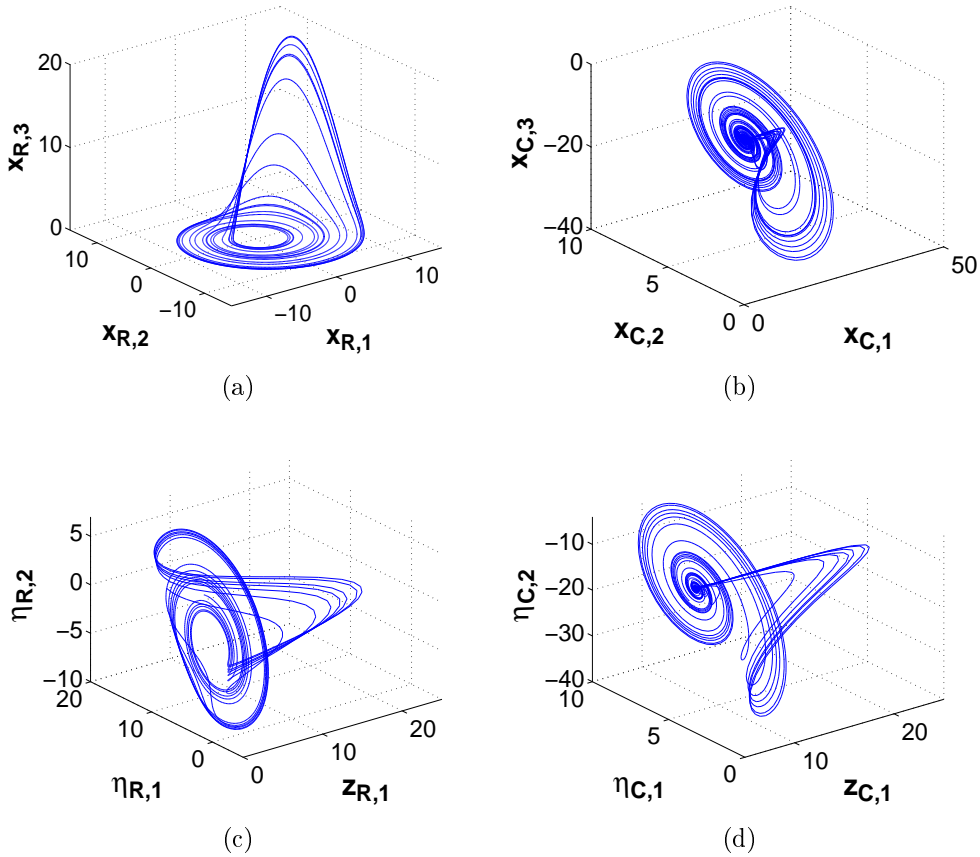


Figura 4.5: SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a) Rössler y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_R, x_C); (c) Rössler y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_R, z_C).

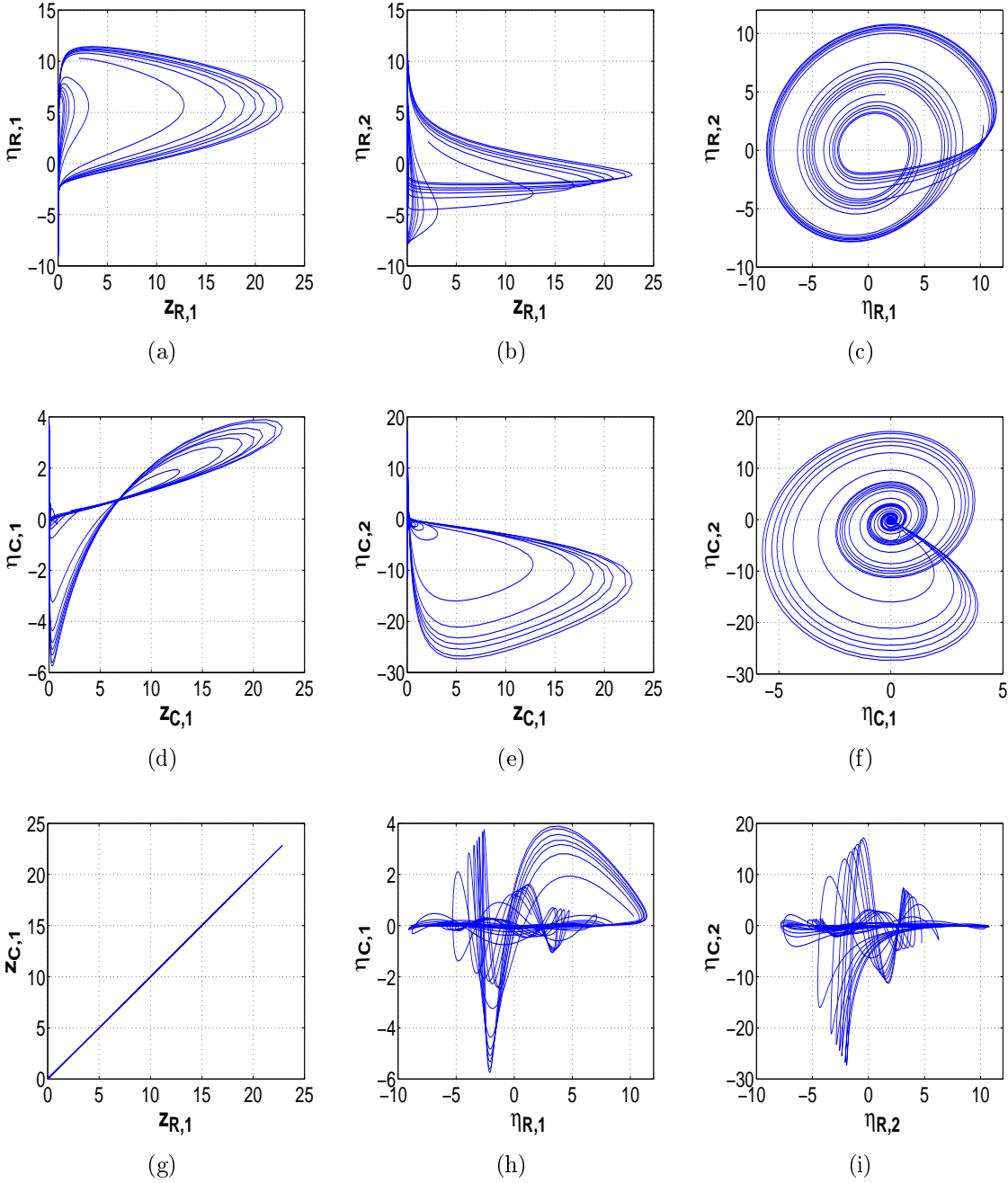


Figura 4.6: SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en sus variables transformadas. (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en sus variables transformadas. (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

En la siguiente tabla se resumen las combinaciones en las que si es posible lograr la SGP y las figuras correspondientes.

Maestro $\sigma_m = 1$	Esclavo $\sigma_s = 1$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. B.9 y Fig. B.10
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. B.11 y Fig. B.12
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	Fig. B.13 y Fig. B.14
Rössler	Chua	N.A.	Fig. 4.6 y Fig. 4.6

Tabla 4.3: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n > \sigma = 1$

Segunda Variante ($\sigma_m < \sigma_s$)

De acuerdo a los resultados que se presentan en el Capítulo 3, independientemente de la combinación maestro-esclavo que se elija, cuando el grado relativo del maestro es menor que el grado relativo del esclavo, no se puede lograr ni la SGC ni la SGP.

Tercera Variante ($\sigma_m > \sigma_s$)

Cuando ($\sigma_m = 3$) $>$ ($\sigma_s = 2$)

Para este ejemplo, considere la configuración Lorenz-Rössler, con el cambio de coordenadas para $\sigma_L = 3$ dado por (A.14) y para $\sigma_R = 2$ dado por (A.5).

De los sistemas transformados (A.16) y (A.7), con $u_L = 0$, se tiene que la dinámica del ESG está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z,2} \\ \dot{e}_{z\eta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{L,2} \\ z_{L,3} + f_{R,2} + f_{R,3} + u_R \\ \alpha_L(z_L) - z_{R,1} - a_R\eta_{R,1} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

donde la dinámica cero de Rössler es inestable, por lo que no es posible diseñar una u_R que estabilice la DAESG. De lo cual se sigue que, no es posible lograr la SGP para esta combinación.

Por otro lado, considere la configuración Rössler-Lorenz, con el cambio de coordenadas para $\sigma_R = 3$ dado por (A.2) y para $\sigma_L = 2$ dado por (A.17).

De los sistemas transformados (A.4) y (A.19), con $u_R = 0$, se tiene que la dinámica del ESG está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z,2} \\ \dot{e}_{z\eta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{R,2} \\ z_{R,3} - a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) - a_L u_L \\ -f_{R,2} - f_{R,3} + a_R(f_{R,1} + a_R f_{R,2}) - f_{L,3} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Puesto que la dinámica cero de Lorenz es asintóticamente estable, la u_L que estabiliza la DAESG está descrita como

$$u_L = a_L^{-1}[z_{R,3} - a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) - (k_{RL,1}e_{z,1} + k_{RL,2}e_{z,2})] \quad (4.12)$$

con las ganancias $K_{RL} = [-225, -30]$.

Bajo la acción del control (4.12), la dinámica interna de Lorenz está dada por $\dot{\eta}_L = -c_L \eta_{L,1} + z_{R,1}(a_L z_{R,2} + z_{R,1})$, de la cual se obtiene que al rededor de cero $Q = -c_L$. Puesto que $Q < 0$, la dinámica interna de Lorenz es BIBO, por lo tanto se logra la SGP.

Las siguientes figuras ilustran la SGP que se logra entre los sistemas Rössler y Lorenz.

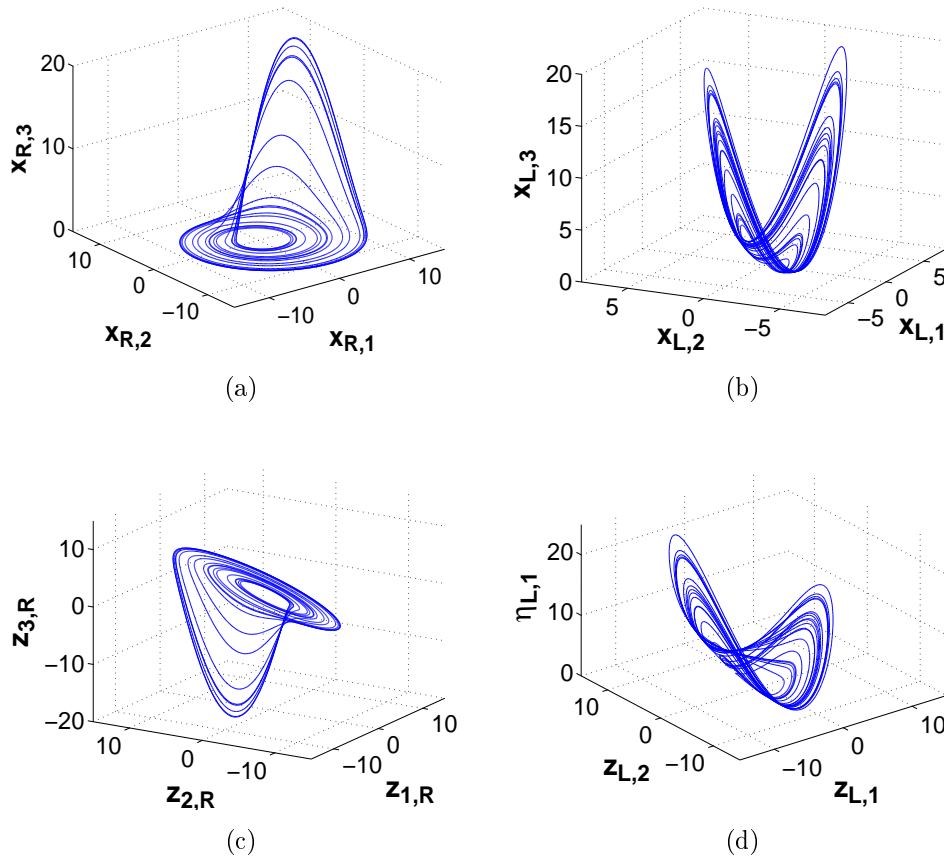


Figura 4.7: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_L = 2$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L); (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L).

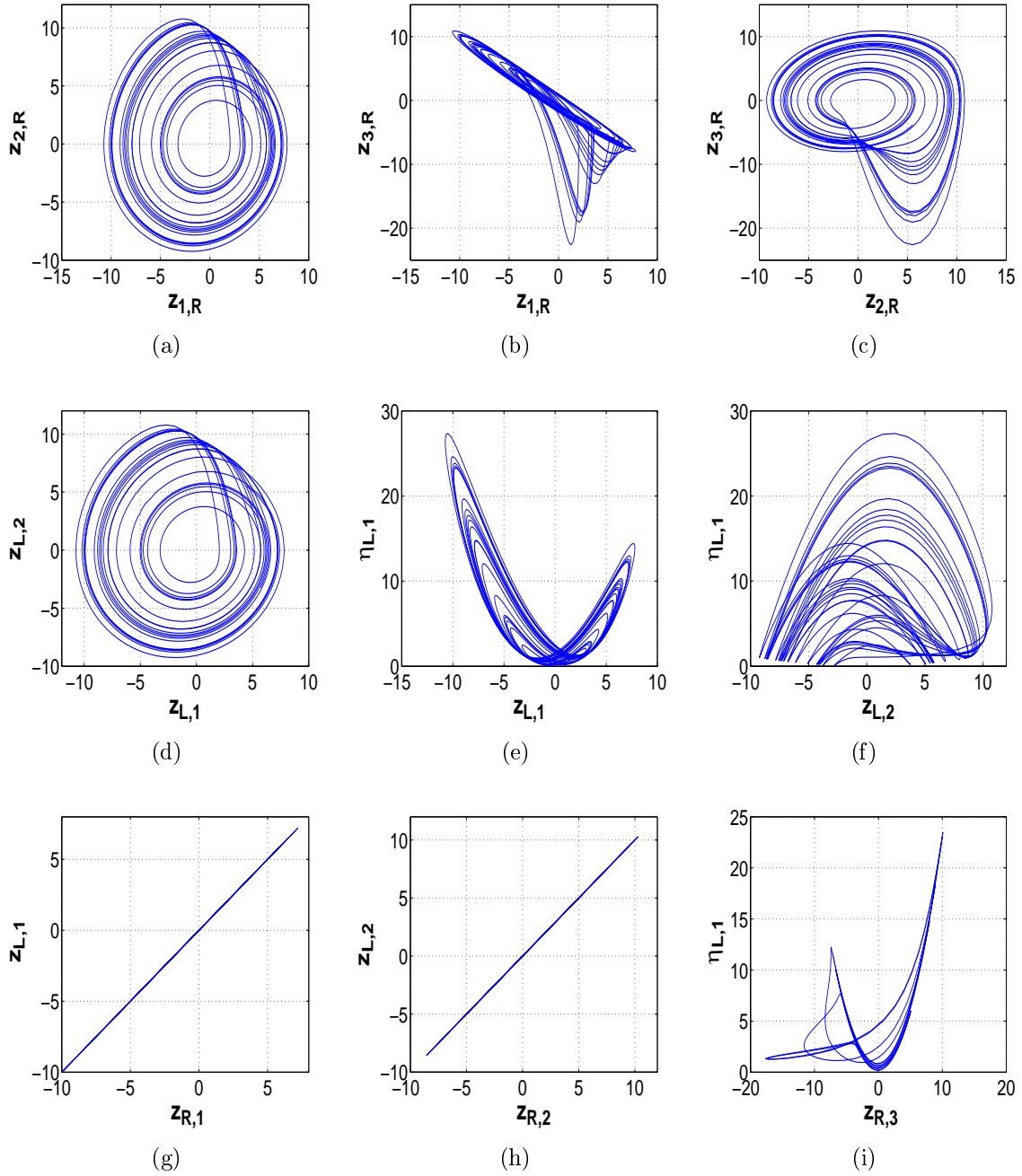


Figura 4.8: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_L = 2$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en sus variables transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en sus variables transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

En la siguiente tabla, para cuando $\sigma_m > \sigma_s$, se condensan las combinaciones en las que es posible lograr la SGP y las figuras correspondientes a cada combinación.

Maestro $\sigma_m = 3$	Esclavo $\sigma_s = 2$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. 4.7 y Fig. 4.8
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. B.15 y Fig. B.16
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	N.P.
Rössler	Chua	N.A.	N.P.

Tabla 4.4: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 2)$

Cuando $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 1)$

Para este ejemplo, considere la conexión Chua suavizado-Lorenz. El cambio de coordenadas del circuito de Chua suavizado para que tenga grado relativo igual a tres es (A.26) y el cambio de coordenadas para que Lorenz tenga grado relativo igual a uno es (A.21).

De los sistemas transformados Chua suavizado y Lorenz, descritos por (A.28) y (A.23) respectivamente, se obtiene la dinámica del ESG dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z\eta,1} \\ \dot{e}_{z\eta,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{C,2} - a_L(\eta_{L,1} - z_{L,1}) - u_L \\ z_{C,3} - b_L z_{L,1} + \eta_{L,1} + z_{L,1}\eta_{L,2} \\ b_C(f_{C,2} - f_{C,3} - f_{C,1} - b_C) + c_L\eta_{L,2} - z_{L,1}\eta_{L,1} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Puesto que la dinámica cero del sistema de Lorenz es asintóticamente estable es posible diseñar una u_L que estabilice $e_{z,1}$.

De (4.13), se tiene que la u_L con la que se logra la SGP está dada por

$$u_L = z_{C,2} - a_L(\eta_{L,1} - z_{L,1}) - k_{CL,1}e_{z,1} \quad (4.14)$$

con la ganancia $k_{CL,1} = -10$.

Bajo la acción del control (4.14), la dinámica interna de Lorenz es

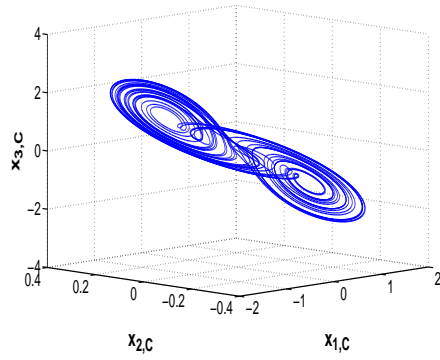
$$\dot{\eta}_L = \begin{pmatrix} b_L z_{C,1} - \eta_{L,1} - z_{C,1}\eta_{L,2} \\ -c_L\eta_{L,2} + z_{C,1}\eta_{L,1} \end{pmatrix}$$

de su análisis alrededor del origen, se obtiene

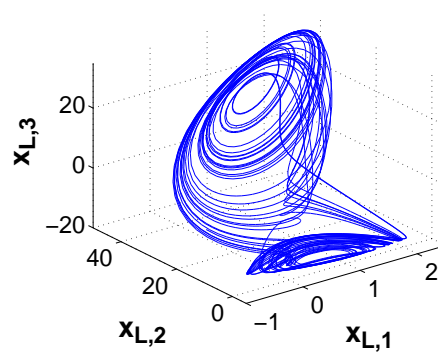
$$\dot{\eta}_L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -c_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{L,1} \\ \eta_{L,2} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

donde $|Q| = c_L > 0$, con la suma de los eigenvalores de Q dada por $\lambda_1 + \lambda_2 = -1 - c_L < 0$. De lo anterior se tiene que la DIESG es acotada y por lo tanto se tiene una SGP.

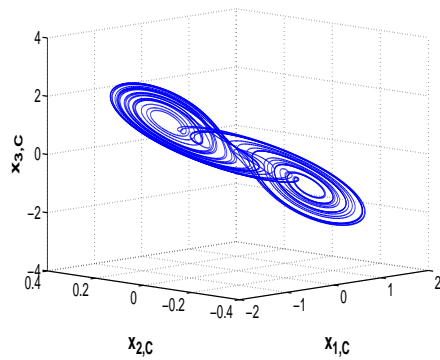
En las siguientes figuras se ilustra la SGP que se logra entre los sistemas de Chua suavizado con $\sigma_C = 3$ y Lorenz con $\sigma_L = 1$, bajo la acción del control (4.14).



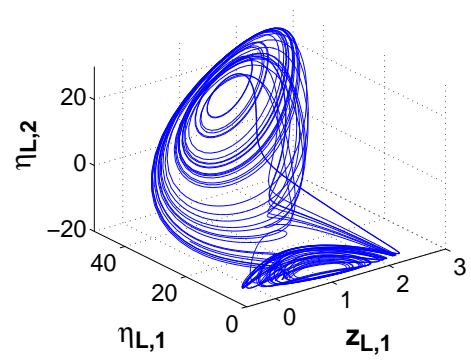
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.9: SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 3$ y $\sigma_L = 1$ respectivamente. (a) Chua suavizado y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L) ; (c) Chua suavizado y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L) .

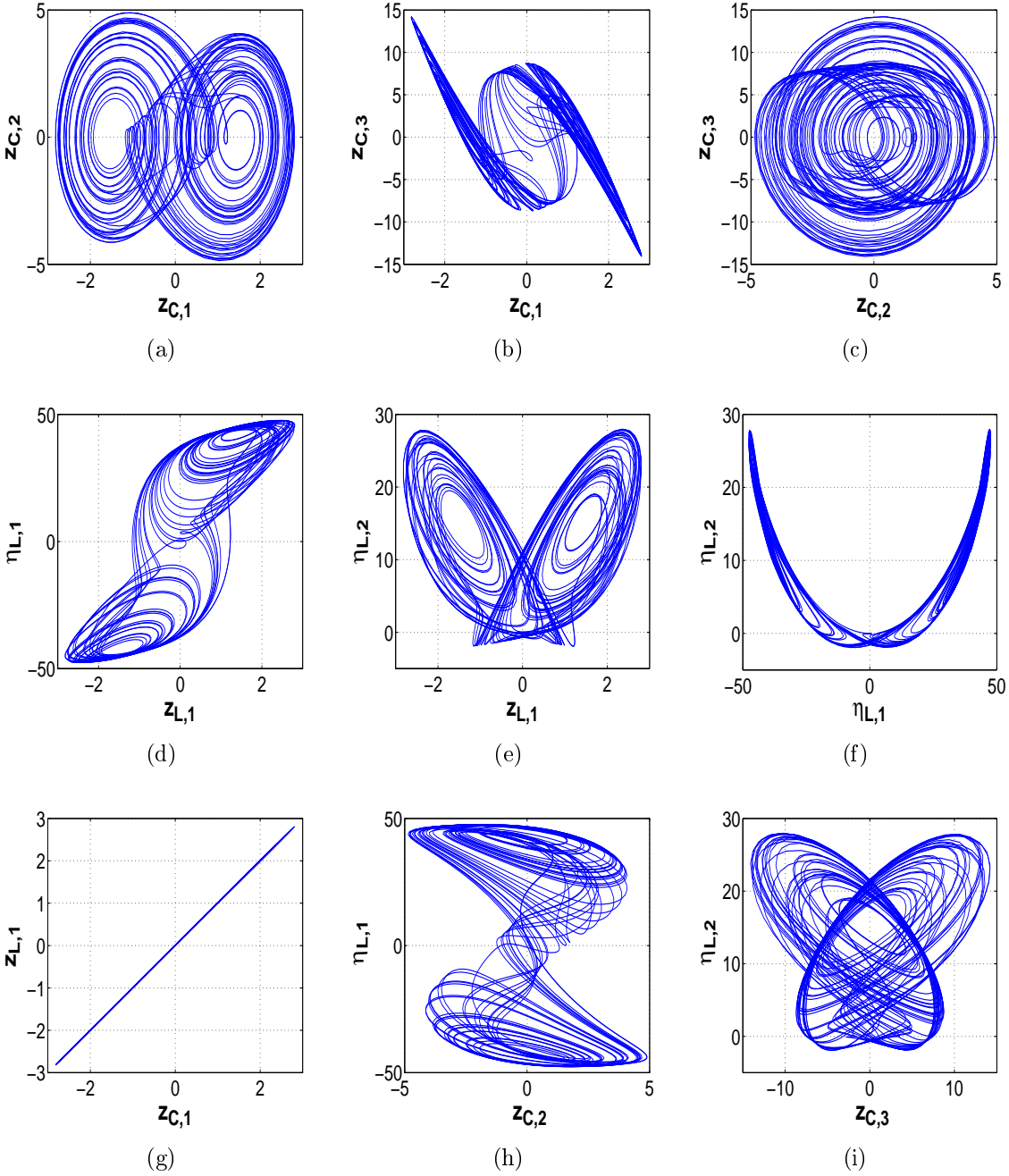


Figura 4.10: SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 3$ y $\sigma_L = 1$ respectivamente. (a), (b), (c) son las proyecciones del circuito de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

Por otro lado, para la configuración Lorenz como maestro con grado relativo igual a tres y Chua suavizado como esclavo con grado relativo igual a uno, se tiene que la dinámica cero del circuito de Chua suavizado es asintóticamente estable y como en el

ejemplo anterior, también es posible lograr la SGP. En la siguiente tabla, se condensan las combinaciones en las que es posible lograr la SGP cuando $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 1)$.

Maestro $\sigma_m = 3$	Esclavo $\sigma_s = 1$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. B.17 y Fig. B.18
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. 4.9 y Fig. 4.10
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	Fig. B.19 y Fig. B.20
Rössler	Chua	N.A.	Fig. B.21 y Fig. B.22

Tabla 4.5: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 1)$

Cuando $(\sigma_m = 2) > (\sigma_s = 1)$

Para ilustrar este ejemplo se elige como maestro al sistema de Lorenz con grado relativo igual a dos y como esclavo al circuito de Chua con grado relativo igual a uno. Los cambios de coordenadas correspondientes están dados por las ecuaciones (A.17) y (A.33).

Para la configuración Lorenz-Chua suavizado, de los respectivos sistemas transformados (A.19) y (A.35), se tiene que la dinámica del ESG, con $u_L = 0$, es

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z\eta,1} \\ \dot{e}_{z\eta,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{L,2} - a_C(\eta_{C,1} - z_{C,1} - \nu_z) - u_C \\ a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) - z_{C,1} + \eta_{C,1} - \eta_{C,2} \\ f_{L,3} + -b_C\eta_{C,1} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

con la dinámica interna del circuito de Chua suavizado asintóticamente estable.

Puesto que es posible diseñar una u_C que estabilice $e_{z,1}$, entonces se puede lograr la SGP, con la entrada de control dada por

$$u_C = z_{L,2} - a_C(\eta_{C,1} - z_{C,1} - \nu_z) - k_{LC,1}e_{z,1} \quad (4.17)$$

con la ganancia $k_{LC,1} = -10$.

Cuando se logra que $z_L = z_C$, con el control (4.17), la dinámica interna de Chua suavizado es

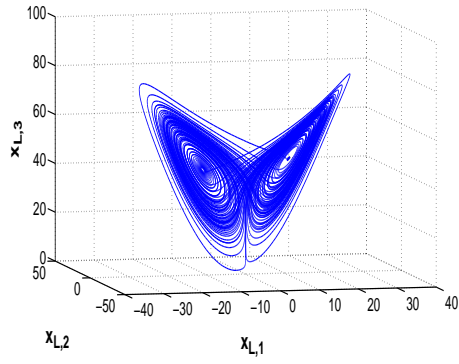
$$\dot{\eta}_C = \begin{pmatrix} z_{L,1} - \eta_{C,1} + \eta_{C,2} \\ -b_C\eta_{C,1} \end{pmatrix}$$

de que el análisis al rededor del origen resulta como

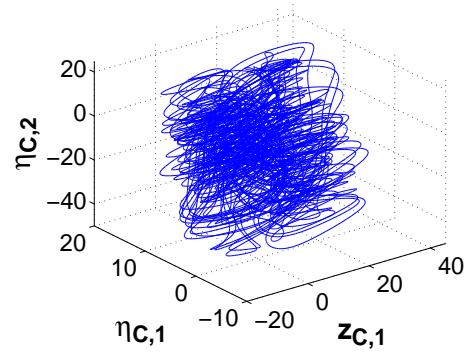
$$\dot{\eta}_C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -b_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{C,1} \\ \eta_{C,2} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

que como ya se vio en el ejemplo cuando $\sigma_m = \sigma_s = 1$, Q es definida negativa, por lo que la DIESG es acotada y se logra la SGP.

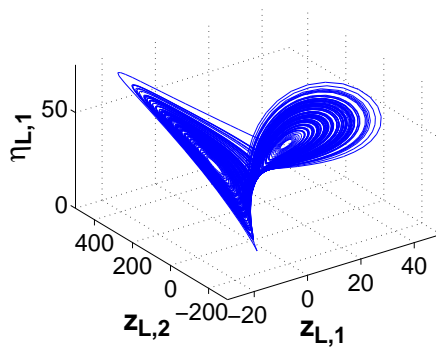
La siguientes figuras ilustran la SGP que se logra por el efecto del control (4.17) en los sistemas Lorenz y Chua suavizado.



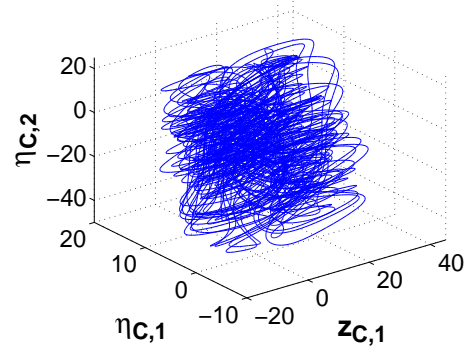
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.11: SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 2$ y $\sigma_C = 1$. (a) Lorenz y (b) Chua en sus variables originales (x_L, x_C); (c) Lorenz y (d) Chua en sus variables transformadas (z_L, z_C).

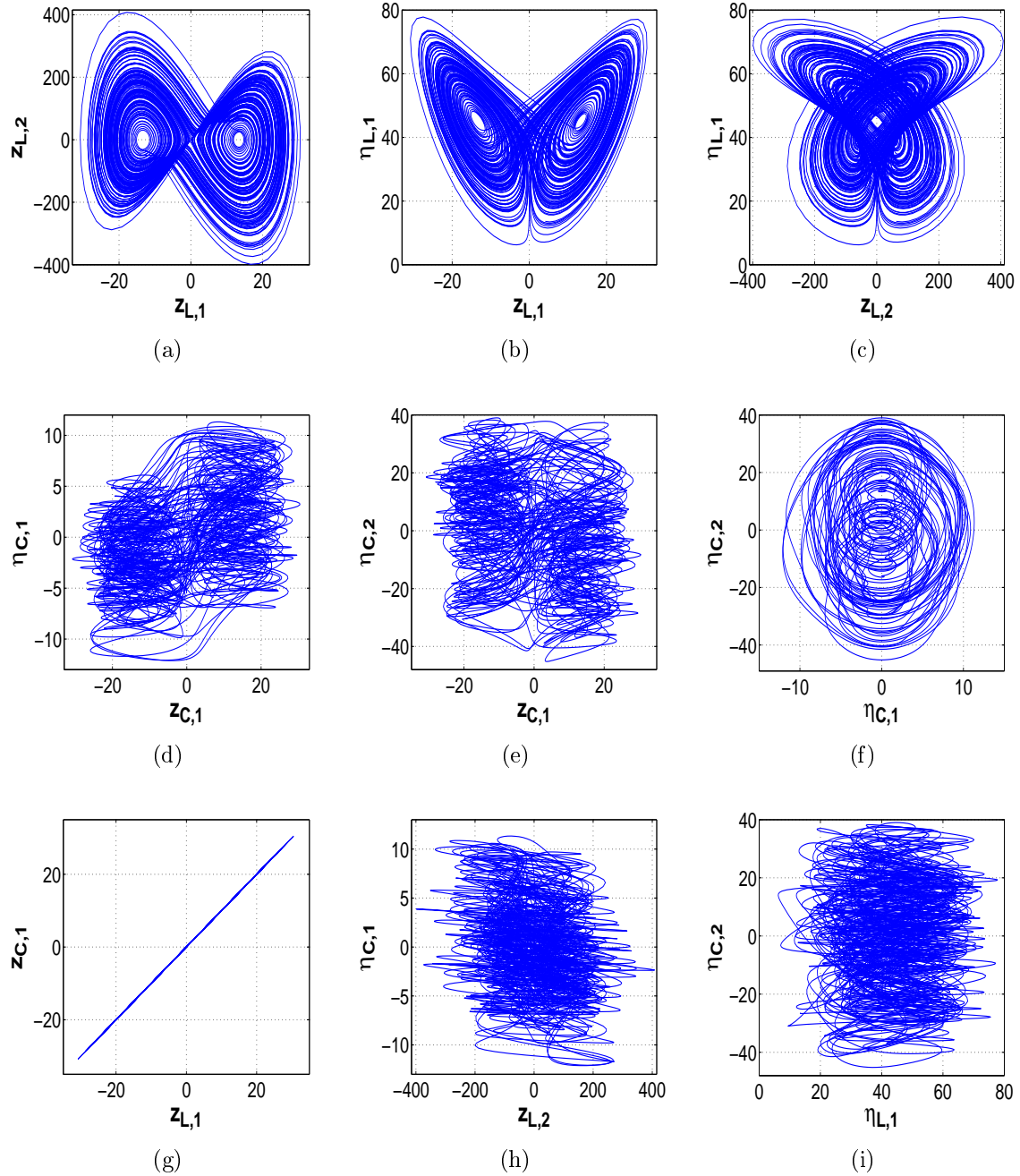


Figura 4.12: SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 2$ y $\sigma_C = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

En la siguiente tabla, se condensan las combinaciones en las que es posible lograr la SGP cuando $(\sigma_m = 2) > (\sigma_s = 1)$.

Maestro $\sigma_m = 2$	Esclavo $\sigma_s = 1$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. B.23 y Fig. B.24
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. B.25 y Fig. B.26
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	Fig. 4.11 y Fig. 4.12
Rössler	Chua	N.A.	Fig. B.27 y Fig. B.28

Tabla 4.6: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 2) > (\sigma_s = 1)$

En el siguiente capítulo se discuten los resultados de esta tesis, se presentan conclusiones y se describe el trabajo futuro.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

En este capítulo se concluye el trabajo de tesis con una discusión de los resultados expuestos y la descripción de trabajo que puede realizarse en un futuro como continuación de los resultados aquí planteados.

5.1. Conclusiones

En la hipótesis de esta tesis se propone que es posible lograr un tipo de SG entre dos sistemas caóticos diferentes con dimensiones iguales, conectados unidireccionalmente, por medio de una entrada de control aplicada al esclavo aun cuando los sistemas tengan dinámica interna.

La metodología que se propuso para verificar esta hipótesis consiste en diseñar un control por retroalimentación basado en un cambio de coordenadas por derivadas de Lie, a través del cual se asegura la existencia de un mapeo H_T y de una variedad M , de tal forma que se cumpla con la definición de SG (Definición 2.4). Una vez que se hace el cambio de coordenadas para los sistemas maestro y esclavo, con una retroalimentación aplicada al esclavo, se logra que las partes inaccesibles de los sistemas transformados estén acotadas y que se sincronicen las partes accesibles. De modo que, el tipo de SG que se obtiene es la SGP.

Si bien el concepto de sincronización parcial se utiliza para cuando se sincroniza de manera idéntica al menos uno de los estados de los sistemas maestro y esclavo, en esta tesis se plantea el concepto de SGP cuando a través de un cambio de coordenadas se sincroniza al menos uno de los estados.

Con los resultados expuestos en el Teorema 3.2, en la Proposición 3.3 y en el Corolario 3.1 se cumple con el objetivo de establecer las condiciones bajo las cuales se logra una SG, específicamente la SGP. Del estudio de los casos en que no se tiene dinámica interna y cuando se tiene dinámica interna, se desprende la distinción entre SGC y SGP, cumpliendo así otro de los objetivos planteados al inicio de esta tesis. El cumplimiento del tercer objetivo se logra al proponer el controlador por retroalimentación de estados, estático y no lineal. Finalmente, con la ilustración de los resultados en el Capítulo 4 y en el Apéndice B, se cumple con el último de los objetivos.

Al haber satisfecho todos los objetivos planteados, se cumple el objetivo general de esta tesis que es analizar y proponer metodologías para lograr la SG, en SCDI,

estrictamente diferentes y de la misma dimensión.

5.2. Discusión de los Resultados

Los resultados obtenidos muestran que se puede lograr la SG de dos sistemas caóticos estrictamente diferentes en una conexión maestro-esclavo y con un cambio de coordenadas basado en derivadas de Lie mediante un controlador. En primer lugar se tiene que cuando los sistemas no tienen dinámica interna la sincronización que se logra es una SGC. En segundo lugar, cuando los sistemas tienen dinámica interna es posible lograr una SGP, siempre y cuando el grado relativo del maestro sea mayor que el grado relativo del esclavo, ya que si el grado relativo del maestro es menor que el grado relativo del esclavo la DAESG no tiene la entrada de control del esclavo.

En las figuras presentadas en el Capítulo 4 y el apéndice B, se puede observar que en el caso en que no se tiene dinámica interna, que los atractores de los sistemas maestro y esclavo transformados son iguales debido a que las proyecciones de ambos sistemas son también iguales. Esto se refleja en las variedades de sincronización, en las cuales se observa que $z_{m,1} = z_{s,1}$, $z_{m,2} = z_{s,2}$ y $z_{m,3} = z_{s,3}$.

Cuando el grado relativo del esclavo es igual a dos, únicamente la primera proyección coincide y la segunda proyección es diferente, debido a que las dinámicas internas de los sistemas no son iguales. Lo que si son iguales son las primeras dos coordenadas transformadas de ambos sistemas, por lo que las primeras dos variedades de sincronización son una línea que pasa por el origen.

Cuando el grado relativo del esclavo es igual a uno, ninguna de las proyecciones de los sistemas maestro y esclavo son iguales entre si debido a que las dinámicas internas de estos, no son iguales. En este caso, la primera variedad de sincronización es la única línea que pasa por el origen.

Cuando dos sistemas están sincronizados de manera idéntica, la variedad de sincronización que se obtiene es una línea recta que pasa por el origen. Cuando dos sistemas están sincronizados de manera generalizada, si se observan únicamente las variedades de sincronización de los estados no se tiene una línea que pasa por el origen, sin embargo si se gráfica la relación entre los estados de un sistema y el mapeo de sincronización, se tiene la línea recta que pasa por el origen. De lo anterior, se vislumbra que cuando los sistemas logran una SGP, existe una relación entre el mapeo de sincronización y el cambio de coordenadas.

5.3. Trabajo Futuro

Los resultados de esta tesis se acotan a sistemas caóticos diferentes, de dimensiones iguales, acoplados en configuración maestro-esclavo. Sin embargo, del Teorema 3.2 se tiene que si el sistema maestro es acotado y se cumplen las demás condiciones entonces se logra la SGP. Por lo que, el trabajo se puede extender al estudio de la SGP en sistemas dinámicos, acoplados unidireccionalmente.

Otra de las extensiones de este trabajo puede ser, el estudio de la SGP cuando se tiene una red de sistemas acoplados. Se pueden tener distintas configuraciones de

redes, por ejemplo, una red en la que un nodo es el maestro y varios nodos son los esclavos, o bien, una red en la que todos los nodos están conectados y el acoplamiento es bidireccional.

En esta tesis se consideran sistemas de la misma dimensión, pero las dinámicas internas pueden ser de distinta dimensión. Esto puede servir como una primera aproximación, para extender el estudio de la SG en sistemas acotados de dimensiones diferentes, acoplados unidireccionalmente.

Apéndice A

Cambios de Coordenadas para Diferentes Sistemas Caóticos

En este apéndice, se presentan los cambios de coordenadas para los sistemas Rössler, Lorenz, y Chua suavizado, tales que estos tengan diferentes grados relativos. La forma en que se escoge la combinación entrada-salida, determina los cambios de coordenadas y el grado relativo que tiene el sistema. Cabe señalar que las combinaciones entrada-salida que se utilizan en este apéndice, no son las únicas con las cuales se obtienen los distintos grados relativos. Así mismo, los cambios de coordenadas correspondientes tampoco son únicos.

A.1. Sistema de Rössler

El sistema de Rössler está descrito por las siguiente ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_{R,1} \\ \dot{x}_{R,2} \\ \dot{x}_{R,3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{R,1} \\ f_{R,2} \\ f_{R,3} \end{pmatrix} + g_R(x_R)u_R \\ y_R(x_R) &= h_R(x_R) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

con $f_{R,1} = -x_{R,2} - x_{R,3}$, $f_{R,2} = x_{R,1} + a_R x_{R,2}$, $f_{R,3} = x_{R,3}(x_{R,1} - b_R) + a_R$, donde $x_R = [x_{R,1}, x_{R,2}, x_{R,3}]^T$ es su vector de estados, $g_R(x_R) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es su campo vectorial de entrada, y $h_R(x_R) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es su función de salida. Los parámetros del sistema de Rössler para que oscile en su regimen caótico son: $a_R = 0.2$ y $b_R = 5.7$.

Cambio de Coordenadas para $n = \sigma = 3$

Una combinación entrada-salida para la cual el sistema de Rössler tiene grado relativo pleno es $g_R(x_R) = [0, 0, 1]^T$, $y_R = x_{R,2}$. Calculando las derivadas de Lie correspondientes, el cambio de coordenadas está dado por

$$\begin{pmatrix} z_{R,1} \\ z_{R,2} \\ z_{R,3} \end{pmatrix} = \Phi_{R^3}(x_R) = \begin{pmatrix} x_{R,2} \\ x_{R,1} + a_R x_{R,2} \\ (a_R^2 - 1)x_{R,2} - x_{R,3} + a_R x_{R,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

con el correspondiente cambio de coordenadas inverso dado por

$$\begin{pmatrix} x_{R,1} \\ x_{R,2} \\ x_{R,3} \end{pmatrix} = \Phi_{R^3}^{-1}(z_R) = \begin{pmatrix} z_{R,2} - a_R z_{R,1} \\ z_{R,1} \\ a_R z_{R,2} - z_{R,1} - z_{R,3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Con la transformación de coordenadas (A.2) la dinámica que describe al sistema de Rössler, cuando tiene grado relativo pleno, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{R,1} \\ \dot{z}_{R,2} \\ \dot{z}_{R,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{R,2} \\ z_{R,3} \\ -f_{R,2} - f_{R,3} + a_R(f_{R,1} + a_R f_{R,2}) - u_R \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

donde las funciones f_R están descritas en (A.1).

Cambio de Coordenadas para $n > \sigma = 2$

Para que el sistema (A.1) presente grado relativo igual a dos, una combinación de entrada-salida es $g_L(x_R) = [0, 1, 0]^T$, $y_R = x_{R,1}$. En este caso, las dos primeras coordenadas se obtienen por derivadas de Lie, mientras que la última coordenada se elige tal que se cumpla con la condición que se describe en (2.7). Así, el cambio de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} z_{R,1} \\ z_{R,2} \\ \eta_{R,1} \end{pmatrix} = \Phi_{R^2}(x_R) = \begin{pmatrix} x_{R,1} \\ -x_{R,2} - x_{R,3} \\ x_{R,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

con su inversa dado por

$$\begin{pmatrix} x_{R,1} \\ x_{R,2} \\ x_{R,3} \end{pmatrix} = \Phi_{R^2}^{-1}(z_R, \eta_R) = \begin{pmatrix} z_{R,1} \\ \eta_{R,1} \\ -z_{R,2} - \eta_{R,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Con la transformación de coordenadas (A.5) la dinámica que se describe al sistema de Rössler, cuando tiene grado relativo igual a dos, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{R,1} \\ \dot{z}_{R,2} \\ \dot{\eta}_{R,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{R,2} \\ -f_{R,2} - f_{R,3} - u_R \\ z_{R,1} + a_R \eta_{R,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

donde las funciones f_R están descritas en (A.1).

De la ecuación (A.7) se tiene que la dinámica interna de Rössler está dada por $\dot{\eta}_{R,1} = z_{R,1} + a_R \eta_{R,1}$, de lo que se sigue que su dinámica cero es

$$\dot{\eta}_{R,1}|_{z_R=0} = a_R \eta_{R,1} \quad (\text{A.8})$$

como $a_R = 0.2$, entonces la dinámica cero de Rössler es inestable.

Cambio de Coordenadas para $n > \sigma = 1$

Una combinación de entrada-salida con la cual el sistema de Rössler presenta grado relativo igual a uno es $g_R(x_R) = [0, 0, 1]^T$, $y_R = x_{R,3}$. En este caso, la primera coordenada corresponde a la derivada cero de Lie y las dos últimas coordenadas se obtienen como se describió en el Capítulo 2. De esta forma, el cambio de coordenadas está dado por

$$\begin{pmatrix} z_{R,1} \\ \eta_{R,1} \\ \eta_{R,2} \end{pmatrix} = \Phi_{R^1}(x_R) = \begin{pmatrix} x_{R,3} \\ x_{R,1} \\ -x_{R,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

con su inverso dado por

$$\begin{pmatrix} x_{R,1} \\ x_{R,2} \\ x_{R,3} \end{pmatrix} = \Phi_{R^1}^{-1}(z_R, \eta_R) = \begin{pmatrix} \eta_{R,1} \\ -\eta_{R,2} \\ -z_{R,2} - \eta_{R,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Con la transformación de coordenadas (A.9) la dinámica que describe al sistema (A.1), cuando tiene grado relativo igual a uno, es

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{R,1} \\ \dot{\eta}_{R,1} \\ \dot{\eta}_{R,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{R,1}(\eta_{R,1} - b_R) + a_R + u_R \\ -\eta_{R,2} - z_{R,1} \\ -\eta_{R,1} - a_R \eta_{R,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

De la ecuación (A.11) se tiene que la dinámica interna de Rössler está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_{R,1} \\ \dot{\eta}_{R,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_{R,2} - z_{R,1} \\ -\eta_{R,1} - a_R \eta_{R,2} \end{pmatrix}$$

de lo que se sigue que su dinámica cero es

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_{R,1} \\ \dot{\eta}_{R,2} \end{pmatrix} \Big|_{z_R=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -a_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{R,1} \\ \eta_{R,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

con $a_R = 0.2$, los eigenvalores de la dinámica cero son $\lambda_{R,1} = 0.9050$ y $\lambda_{R,2} = -1.1050$. Entonces, la dinámica cero de Rössler con grado relativo igual a uno es inestable.

A.2. Sistema de Lorenz

Para el sistema de Lorenz se tienen las siguiente ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{L,1} \\ \dot{x}_{L,2} \\ \dot{x}_{L,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{L,1} \\ f_{L,2} \\ f_{L,3} \end{pmatrix} + g_L(x_L)u_L \quad (\text{A.13})$$

$$y_L = h_L(x_L)$$

con $f_{L,1} = a_L(x_{L,2} - x_{L,1})$, $f_{L,2} = b_L x_{L,1} - x_{L,2} - x_{L,1}x_{L,3}$, $f_{L,3} = -c_L x_{L,3} + x_{L,1}x_{L,2}$, donde $x_L = [x_{L,1}, x_{L,2}, x_{L,3}]^T$ es su vector de estados, $g_L(x_L) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es su campo vectorial de entrada, y $h_L(x_L) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es su función de salida. Los parámetros para el sistema de Lorenz son: $a_L = 16$, $b_L = 4$, y $c_L = 45.92$.

Cambio de Coordenadas para $n = \sigma = 3$

El grado relativo del sistema (A.13) no está bien definido en el origen, esto debido a que la distribución que se obtiene de las derivadas de Lie no es de rango pleno en el origen [20]. De tal forma que, fuera del origen, con la combinación entrada-salida $g_L(x_L) = [0, 0, 1]^T$ y $y_L = x_{L,1}$ se obtiene el cambio de coordenadas dado por

$$\begin{pmatrix} z_{L,1} \\ z_{L,2} \\ z_{L,3} \end{pmatrix} = \Phi_{L^3}(x_L) = \begin{pmatrix} x_{L,1} \\ f_{L,1} \\ -a_L(f_{L,1} - f_{L,2}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

con su inverso dado por

$$\begin{pmatrix} x_{L,1} \\ x_{L,2} \\ x_{L,3} \end{pmatrix} = \Phi_{L^3}^{-1}(z_L) = \begin{pmatrix} z_{L,1} \\ \frac{z_{L,2}}{a_L} + z_{L,1} \\ -\frac{z_{L,3}}{a_L z_{L,1}} - \frac{z_{L,2}}{z_{L,1}} - \frac{z_{L,2}}{a_L z_{L,1}} + b_L - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Note que en el origen, el cambio de coordenadas inverso, $\Phi_{L^3}^{-1}(z_L)$, tampoco está bien definido, ya que la función que describe a $x_{L,3}$ se indetermina.

Con el cambio de coordenadas (A.14) la dinámica que se describe está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{L,1} \\ \dot{z}_{L,2} \\ \dot{z}_{L,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{L,2} \\ z_{L,3} \\ \Gamma(z_L) \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

donde $\Gamma(z_L) = \alpha_L(z_L) + \beta_L(z_L)u_L$ con $\alpha_L(z_L) = -a_L[a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) - (b_L f_{L,1} - f_{L,2} - x_{L,3}f_{L,1} - x_{L,1}f_{L,3})]$, $\beta_L(z_L) = z_{L,1}$ y las funciones f_L descritas en (A.13).

Note que la función $\beta_L^{-1}(z_L) = z_{L,1}^{-1}$ no está definida para $z_{L,1} = 0$. Por lo que no se cumplen las condiciones para diseñar un controlador que sincronice los sistemas cuando Lorenz es el esclavo.

Cambio de Coordenadas para $n > \sigma = 2$

Una combinación de entrada-salida para la cual (A.13) presenta grado relativo igual a dos es $g_L(x_L) = [0, 1, 0]^T$, $y_L = x_{L,1}$. Siguiendo una metodología igual que para el sistema de Rössler. El cambio de coordenadas, tal que el sistema de Lorenz tiene grado relativo igual a dos, es

$$\begin{pmatrix} z_{L,1} \\ z_{L,2} \\ \eta_{L,1} \end{pmatrix} = \Phi_{L^2}(x_L) = \begin{pmatrix} x_{L,1} \\ a_L(x_{L,2} - x_{L,1}) \\ x_{L,3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

con su inversa dada por

$$\begin{pmatrix} x_{L,1} \\ x_{L,2} \\ x_{L,3} \end{pmatrix} = \Phi_{L^2}^{-1}(z_L, \eta_L) = \begin{pmatrix} z_{L,1} \\ \frac{z_{L,2}}{a_L} + z_{L,1} \\ \eta_{L,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Con el cambio de coordenadas (A.17) la dinámica que describe al sistema de Lorenz con grado relativo dos, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{L,1} \\ \dot{z}_{L,2} \\ \dot{\eta}_{L,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{L,2} \\ a_L(f_{L,2} - f_{L,1}) + a_L u_L \\ f_{L,3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

donde las funciones f_L están descritas en (A.13).

De la ecuación (A.19) se tiene que la dinámica interna de Lorenz es $\dot{\eta}_{L,1} = -c_L \eta_{L,1} + z_{L,1}(a_L z_{L,2} + z_{L,1})$, con la dinámica cero dada por

$$\dot{\eta}_{L,1}|_{z_L=0} = -c_L \eta_{L,1} \quad (\text{A.20})$$

como $c_L = 45.92$, entonces la dinámica cero de Lorenz es asintóticamente estable.

Cambio de Coordenadas para $n > \sigma = 1$

Con la entrada dada por $g_L(x_L) = [1, 0, 0]^T$ y la salida dada por $y_L = x_{L,1}$, el sistema (A.13) tiene grado relativo igual a uno. En este caso, el cambio de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} z_{L,1} \\ \eta_{L,1} \\ \eta_{L,2} \end{pmatrix} = \Phi_{L^1}(x_L) = \begin{pmatrix} x_{L,1} \\ x_{L,2} \\ x_{L,3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

con su inversa dada por

$$\begin{pmatrix} x_{L,1} \\ x_{L,2} \\ x_{L,3} \end{pmatrix} = \Phi_{L^1}^{-1}(z_L, \eta_L) = \begin{pmatrix} z_{L,1} \\ \eta_{L,1} \\ \eta_{L,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Con la transformación de coordenadas (A.21) la dinámica que describe al sistema de Lorenz en grado relativo uno, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{L,1} \\ \dot{\eta}_{L,1} \\ \dot{\eta}_{L,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_L(\eta_{L,1} - z_{L,1}) + u_L \\ b_L z_{L,1} - \eta_{L,1} - z_{L,1} \eta_{L,2} \\ -c_L \eta_{L,2} + z_{L,1} \eta_{L,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

De lo anterior se tiene que la dinámica interna de Lorenz es

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_{L,1} \\ \dot{\eta}_{L,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_L z_{L,1} - \eta_{L,1} - z_{L,1} \eta_{L,2} \\ -c_L \eta_{L,2} + z_{L,1} \eta_{L,1} \end{pmatrix}$$

de donde la dinámica cero de (A.23) es

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_{L,1} \\ \dot{\eta}_{L,2} \end{pmatrix} |_{z_L=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -c_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{L,1} \\ \eta_{L,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

puesto que $c_L = 45.92$, la dinámica cero de Lorenz es asintóticamente estable.

A.3. Circuito de Chua Suavizado

El circuito de Chua suavizado está descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_{C,1} \\ \dot{x}_{C,2} \\ \dot{x}_{C,3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{C,1} \\ f_{C,2} \\ f_{C,3} \end{pmatrix} + g_C(x_C)u_C \\ y_C &= h_C(x_C) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

con $f_{C,1} = a_C(x_{C,2} - x_{C,1} - \nu_x)$, $f_{C,2} = x_{C,1} - x_{C,2} + x_{C,3}$, $f_{C,3} = -b_C x_{C,2}$ y la función $\nu_x = m_0 x_{1,C} + m_1 x_{1,C}^3$. Donde $x_C = [x_{C,1}, x_{C,2}, x_{C,3}]^T$ es su vector de estados, $g_C(x_C) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es su campo vectorial de entrada, $h_C(x_C) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es su función de salida, y los parámetros son: $a_C = 9.5$, $b_C = 100/7$, $m_0 = -8/7$, y $m_1 = 4/63$.

Cambio de Coordenadas para $n = \sigma = 3$

Una combinación de entrada-salida con la que el circuito de Chua suavizado presenta grado relativo pleno es $g_C(x_C) = [1, 0, 0]^T$, $y_C = x_{C,3}$. De lo cual se obtiene

$$\begin{pmatrix} z_{C,1} \\ z_{C,2} \\ z_{C,3} \end{pmatrix} = \Phi_{C^3}(x_C) = \begin{pmatrix} x_{C,3} \\ -b_C x_{C,2} \\ -b_C(x_{C,1} - x_{C,2} + x_{C,3}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

cuya inversa está dada por

$$\begin{pmatrix} x_{C,1} \\ x_{C,2} \\ x_{C,3} \end{pmatrix} = \Phi_{C^3}^{-1}(z_C) = \begin{pmatrix} -b_C^{-1}(z_{C,3} + z_{C,2}) - z_{C,1} \\ -b_C^{-1}z_{C,2} \\ z_{C,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Con la transformación de coordenadas (A.26) la dinámica que se describe al sistema de Chua suavizado con grado relativo tres, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{C,1} \\ \dot{z}_{C,2} \\ \dot{z}_{C,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{C,2} \\ z_{C,3} \\ b_C(f_{C,2} - f_{C,3} - f_{C,1} - b_C) \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

donde las funciones f_C están descritas en (A.25).

Cambio de Coordenadas para $n > \sigma = 2$

Con el par entrada-salida dado por $g_C(x_C) = [0, 1, 0]^T$, $y_C = x_{C,2}$, el circuito de Chua suavizado tiene grado relativo dos. El cambio de coordenadas obtenido para este caso es

$$\begin{pmatrix} z_{C,1} \\ z_{C,2} \\ \eta_{C,1} \end{pmatrix} = \Phi_{C^2}(x_C) = \begin{pmatrix} x_{C,2} \\ x_{C,1} - x_{C,2} + x_{C,3} \\ x_{C,3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

cuya inversa está dada por

$$\begin{pmatrix} x_{C,1} \\ x_{C,2} \\ x_{C,3} \end{pmatrix} = \Phi_{C^2}^{-1}(z_C, \eta_C) = \begin{pmatrix} z_{C,2} + z_{C,1} - \eta_{C,1} \\ z_{C,1} \\ \eta_{C,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Con la transformación de coordenadas (A.29) la dinámica que se describe al sistema de Chua suavizado con grado relativo dos, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{C,1} \\ \dot{z}_{C,2} \\ \dot{\eta}_{C,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{C,2} \\ f_{C,1} - f_{C,2} + f_{C,3} + u_C \\ -b_C z_{C,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

donde las funciones f_C están descritas en (A.25).

De la ecuación anterior se tiene que la dinámica interna del circuito de Chua suavizado, está dada por $\dot{\eta}_{C,1} = -b_C z_{C,1}$ y su dinámica cero es

$$\dot{\eta}_{C,1}|_{z_C=0} = 0 \quad (\text{A.32})$$

por lo que la dinámica cero de (A.25) es marginalmente estable.

Cambio de Coordenadas para $n > \sigma = 1$

Con la combinación de entrada-salida $g_C(x_C) = [1, 0, 0]^T$, $y_C = x_{C,1}$, el sistema (A.25), tiene grado relativo igual a uno. Obteniendo la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} z_{C,1} \\ \eta_{C,1} \\ \eta_{C,2} \end{pmatrix} = \Phi_{C^1}(x_C) = \begin{pmatrix} x_{C,1} \\ x_{C,2} \\ x_{C,3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

cuya inversa está dada por

$$\begin{pmatrix} x_{C,1} \\ x_{C,2} \\ x_{C,3} \end{pmatrix} = \Phi_{C^1}^{-1}(z_C, \eta_C) = \begin{pmatrix} z_{C,1} \\ \eta_{C,1} \\ \eta_{C,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Con la transformación de coordenadas (A.33) la dinámica que se describe al sistema de Chua suavizado con grado relativo uno, está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{C,1} \\ \dot{\eta}_{C,1} \\ \dot{\eta}_{C,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_C(\eta_{C,1} - z_{C,1} - \nu_z) + u_C \\ z_{C,1} - \eta_{C,1} + \eta_{C,2} \\ -b_C \eta_{C,1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

donde la función $\nu_z = m_0 z_{C,1} + m_1 z_{C,1}^3$.

De la ecuación anterior se observa que la dinámica interna del sistema es

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_{C,1} \\ \dot{\eta}_{C,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{C,1} - \eta_{C,1} + \eta_{C,2} \\ -b_C \eta_{C,1} \end{pmatrix}$$

mientras que la dinámica cero está dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_{C,1} \\ \dot{\eta}_{C,2} \end{pmatrix} \Big|_{z_C=0} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -b_C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{C,1} \\ \eta_{C,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

con $b_C = 100/7$, los eigenvalores de la dinámica cero son $\lambda_{C,1} = -0.5 + 3.7464i$ y $\lambda_{C,2} = -0.5 - 3.7464i$. Así, el circuito de Chua suavizado con grado relativo igual a uno es asintóticamente estable.

En el Capítulo 4, los cambios de coordenadas descritos en este apéndice se utilizan para realizar un estudio numérico de la SGC y la SGP.

Apéndice B

Figuras de la SGC y SGP

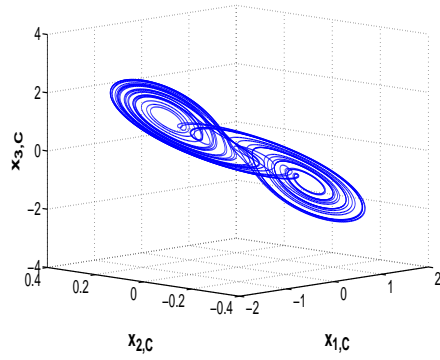
En este apéndice, se muestran las figuras que ilustran la SGC y la SGP entre todas las combinaciones maestro-esclavo de los sistemas de Rössler, Lorenz, y Chua suavizado, con diferente grado relativo $\sigma \in \{1, 2, 3\}$.

Los resultados se resumen en tablas, las cuales muestran las combinaciones maestro-esclavo y el grado relativo correspondiente. Además, en cada caso, cuando teóricamente no es posible un tipo de SG esa combinación se marca con N.A. (No se Admite). Por otro lado, cuando esa sincronización se admite, pero no se cumple alguna de las condiciones de los teoremas del Capítulo 3, entonces esa combinación se marca como N.P. (No se Puede).

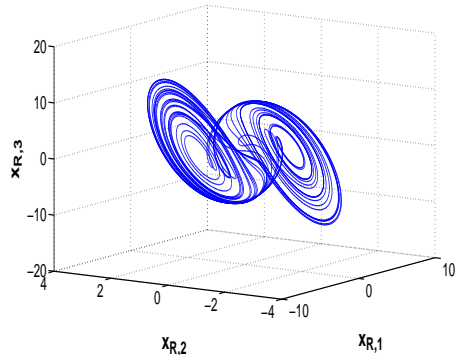
B.1. SG Cuando $n = \sigma$

Maestro $\sigma_m = 3$	Esclavo $\sigma_s = 3$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.P.	N.A.
Chua	Lorenz	N.P.	N.A.
Lorenz	Rössler	Fig. 4.1 y Fig. 4.2	N.A.
Chua	Rössler	Fig. B.1 y Fig. B.2	N.A.
Lorenz	Chua	Fig. B.3 y Fig. B.4	N.A.
Rössler	Chua	Fig. B.5 y Fig. B.6	N.A.

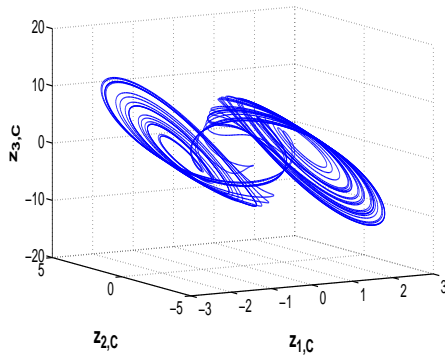
Tabla B.1: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n = \sigma = 3$



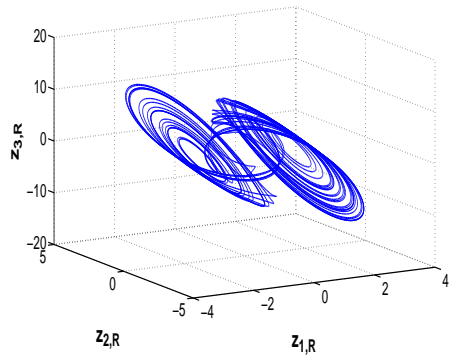
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura B.1: SGC entre Chua suavizado (maestro) y Rössler (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a) Chua suavizado y (b) Rössler en sus variables originales (x_C, x_R); (c) Chua suavizado y (d) Rössler en sus variables transformadas (z_C, z_R).

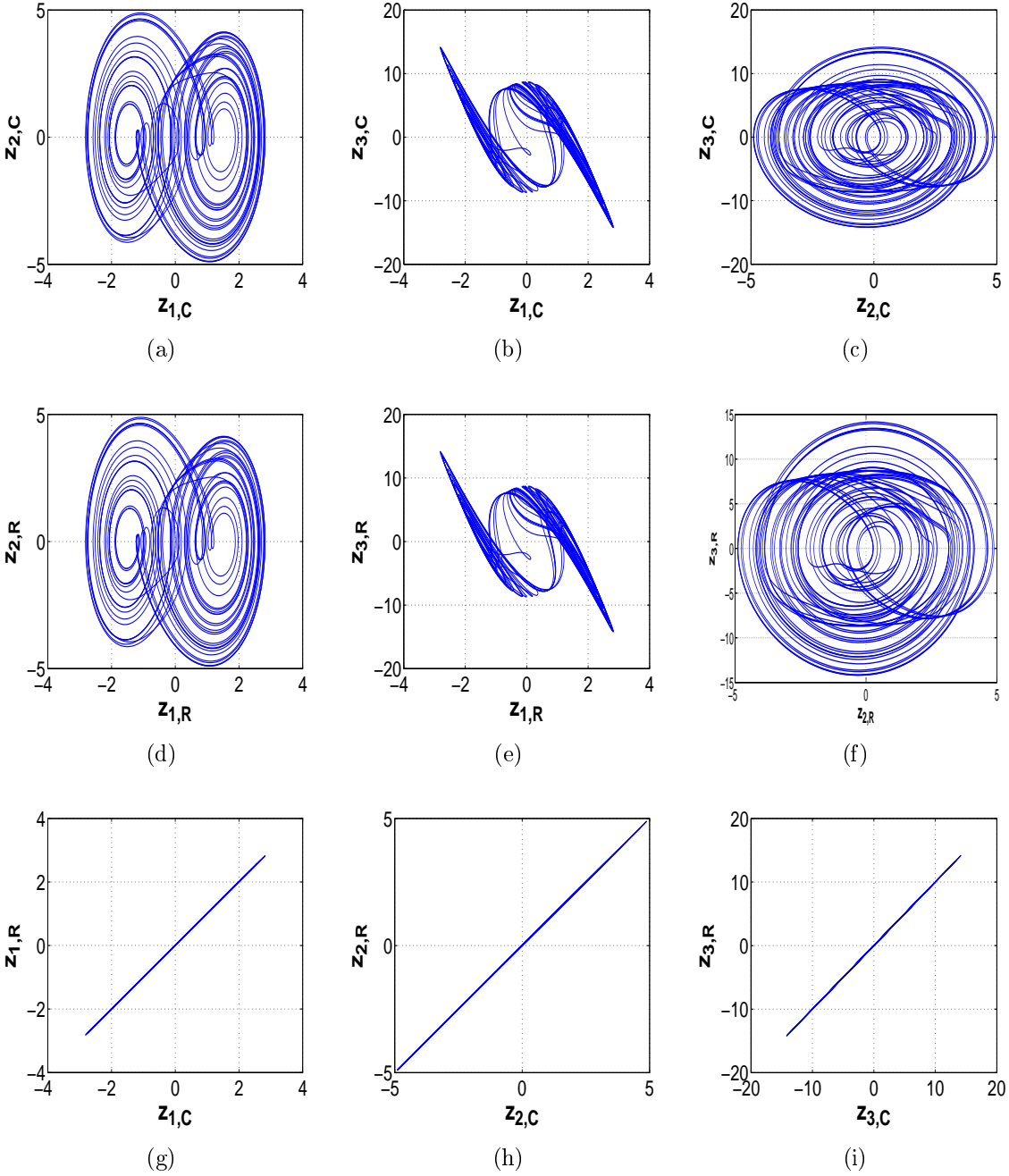
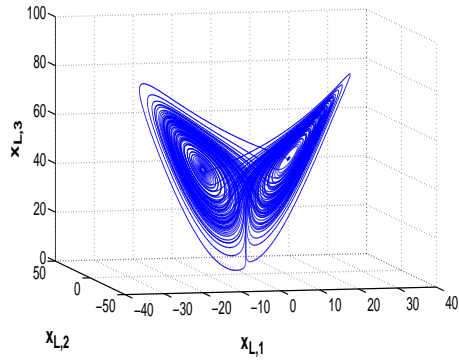
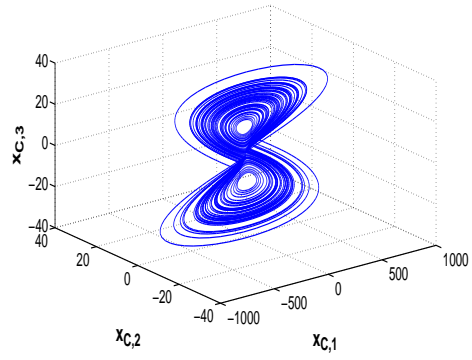


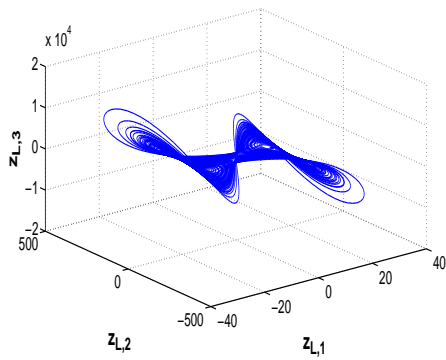
Figura B.2: SGC entre Chua suavizado (maestro) y Rössler (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.



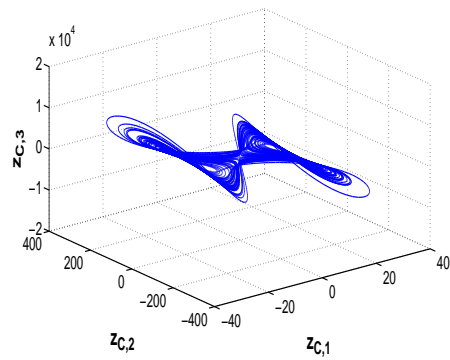
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura B.3: SGC entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a) Lorenz y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_L, x_C); (c) Lorenz suavizado y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_L, z_C).

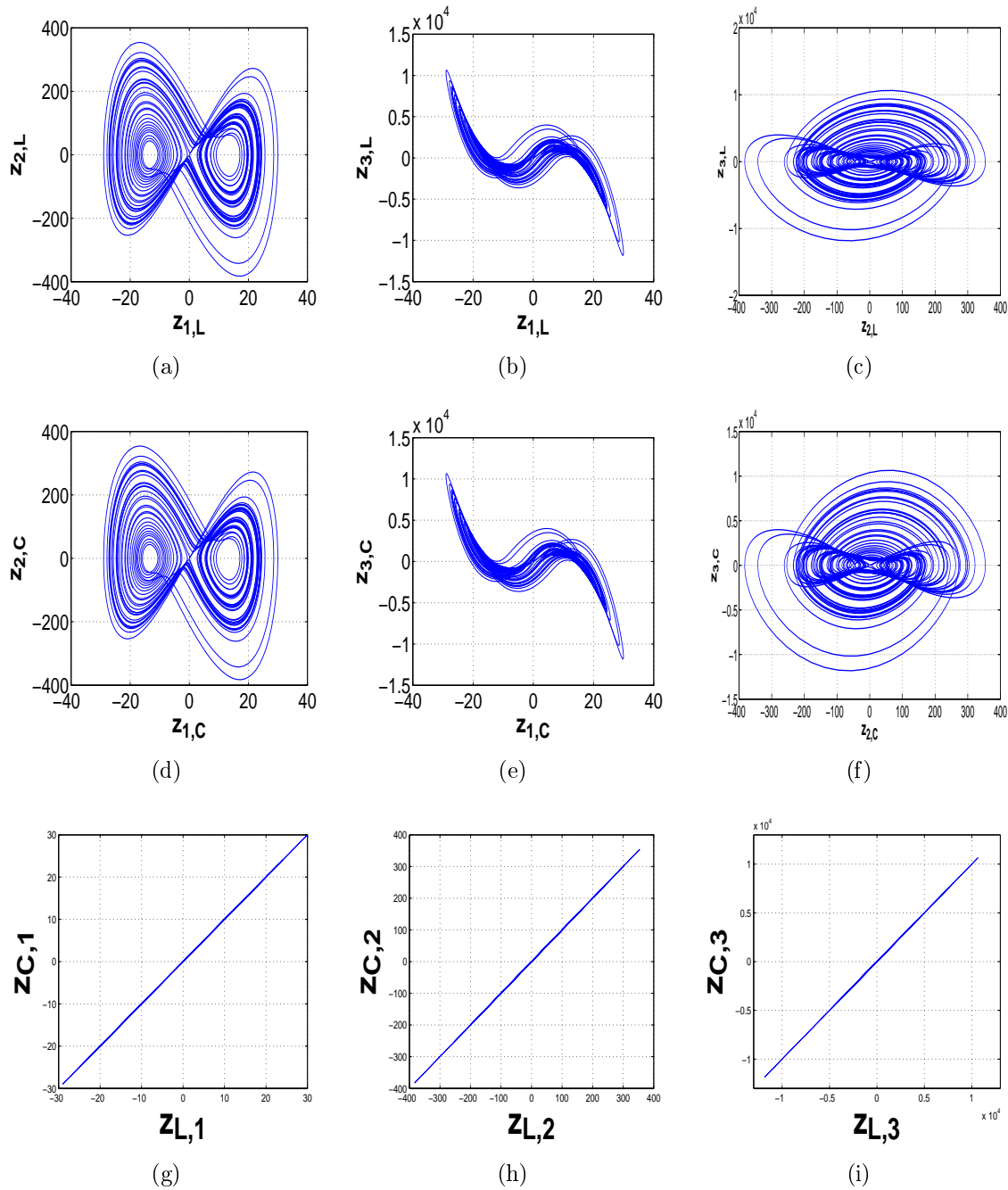


Figura B.4: SGC entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

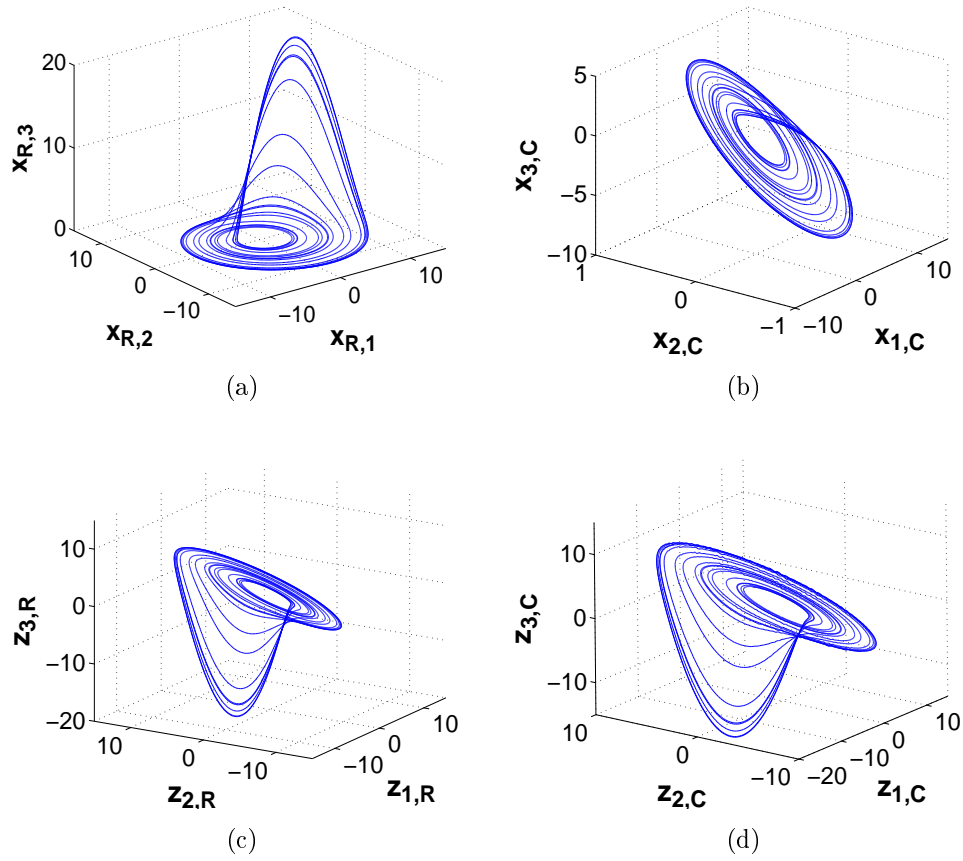


Figura B.5: SGC entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a) Rössler y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_R, x_C); (c) Rössler y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_R, z_C).

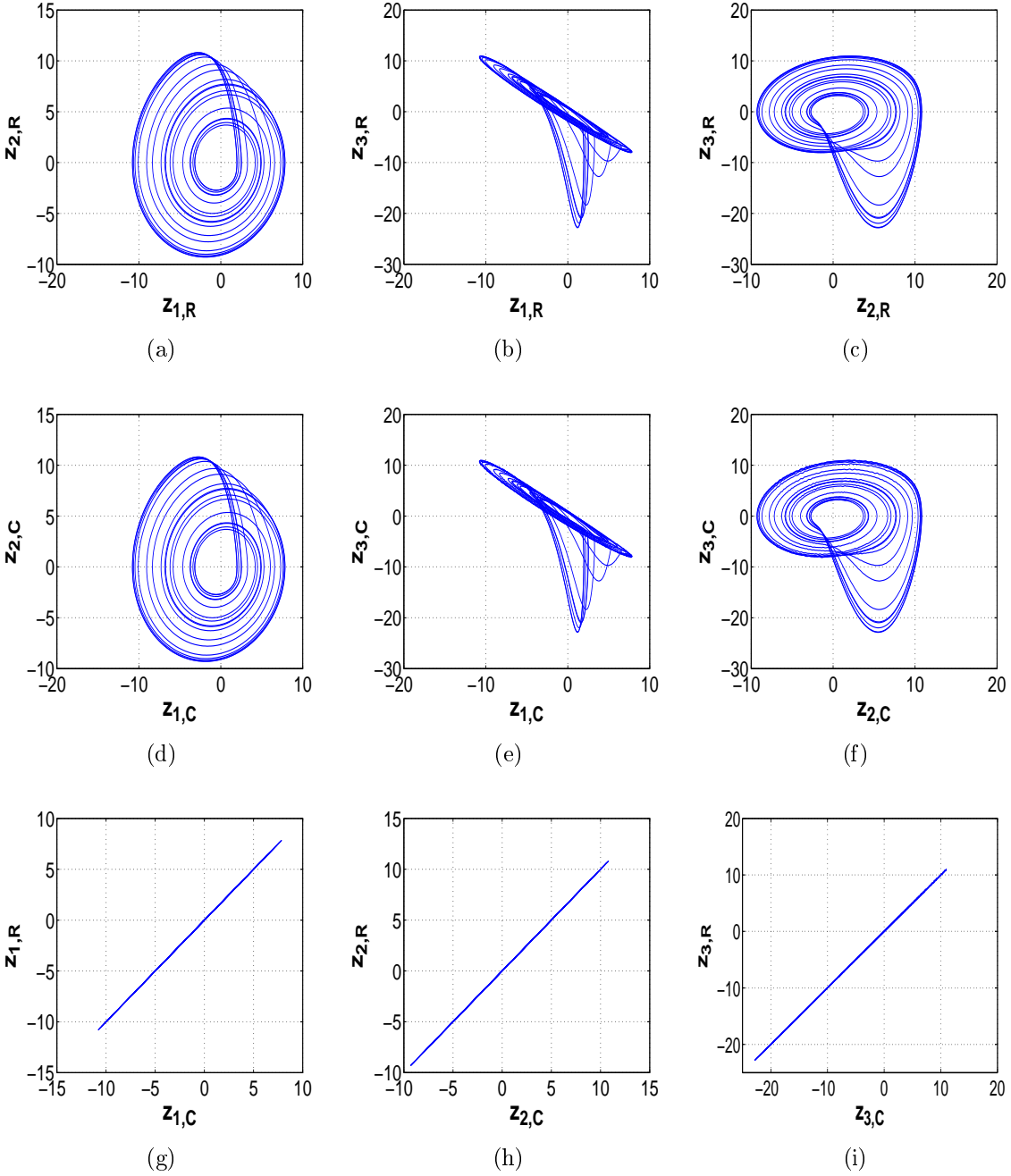


Figura B.6: SGC entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 3$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

B.2. SG Cuando $n > \sigma$

SGP Cuando $\sigma_m = \sigma_s = 2$

Maestro $\sigma_m = 2$	Esclavo $\sigma_s = 2$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. B.7 y Fig. B.8
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. 4.3 y Fig. 4.4
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	N.P.
Rössler	Chua	N.A.	N.P.

Tabla B.2: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n > (\sigma = 2)$

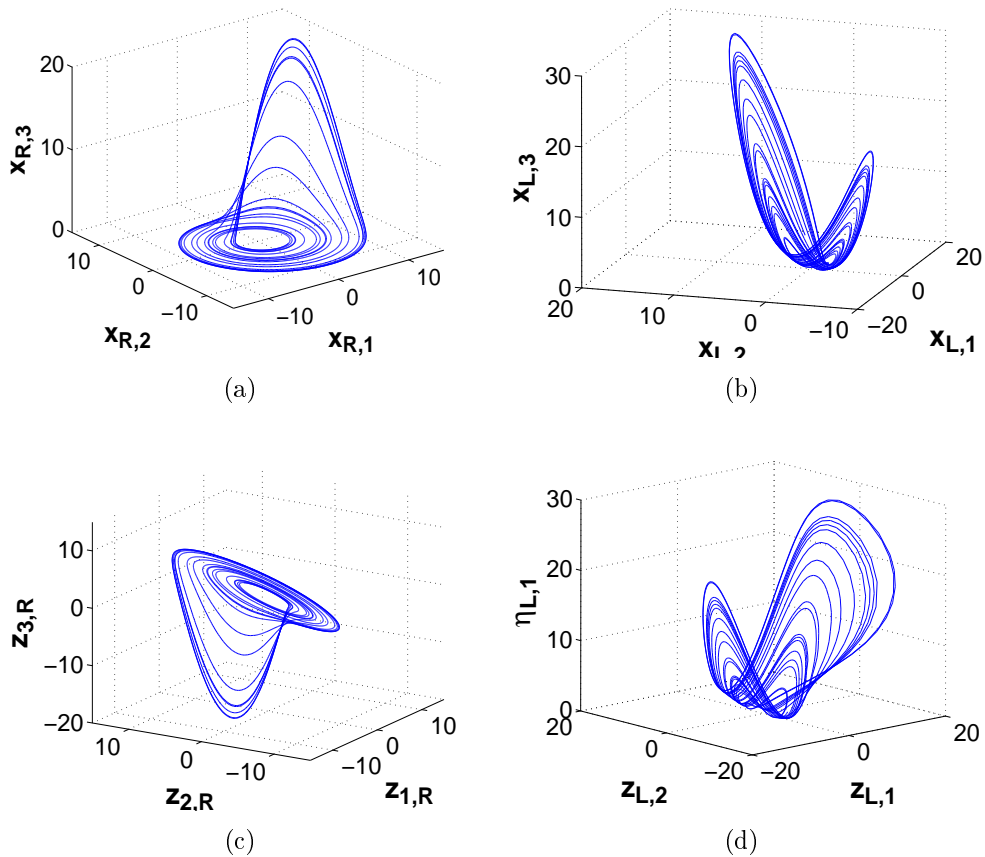


Figura B.7: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 2$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L) ; (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L) .

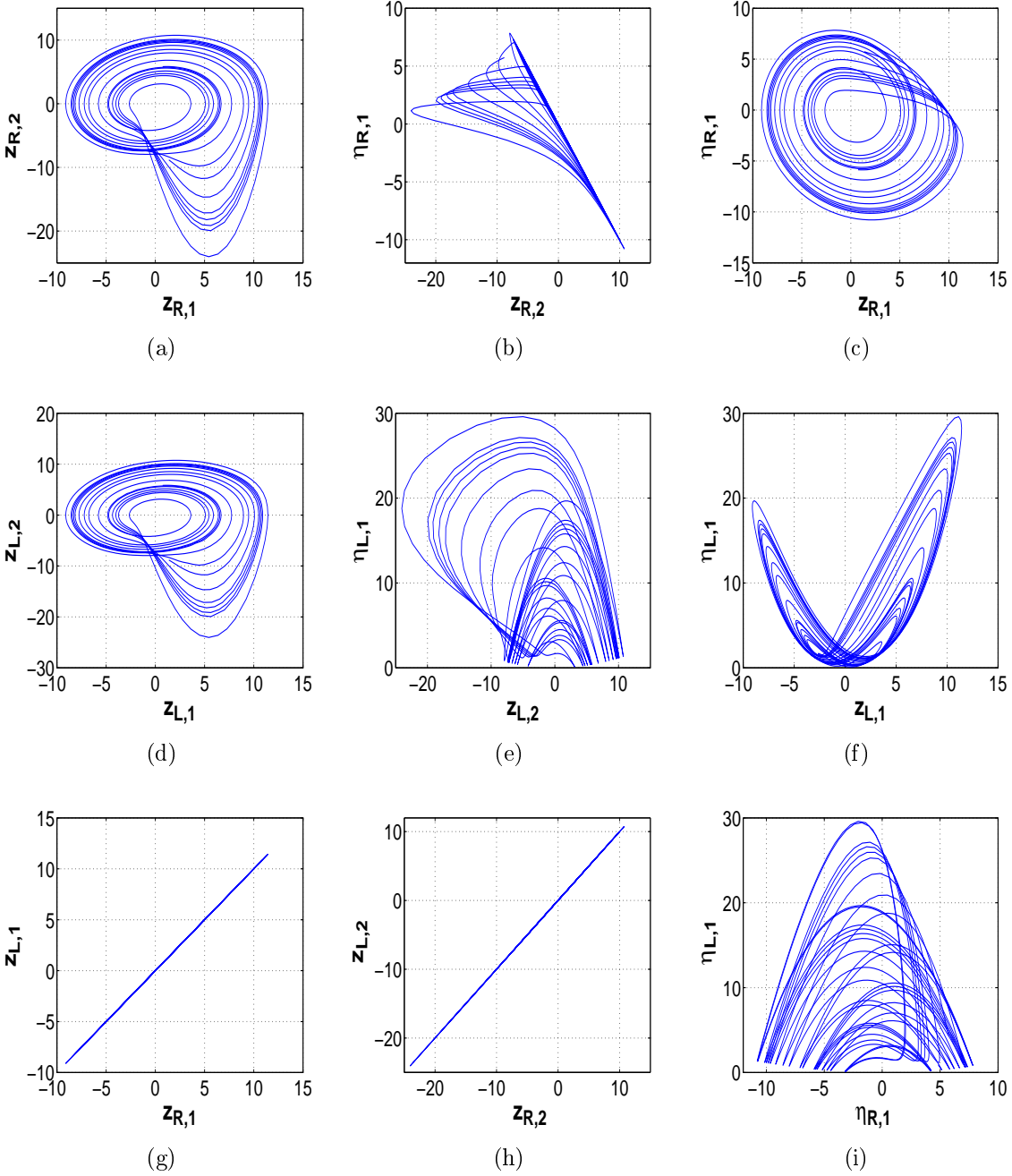


Figura B.8: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 2$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

SGP Cuando $\sigma_m = \sigma_s = 1$

Maestro $\sigma_m = 1$	Esclavo $\sigma_s = 1$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. B.9 y Fig. B.10
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. B.11 y Fig. B.12
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	Fig. B.13 y Fig. B.14
Rössler	Chua	N.A.	Fig. 4.6 y Fig. 4.6

Tabla B.3: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $n > (\sigma = 1)$

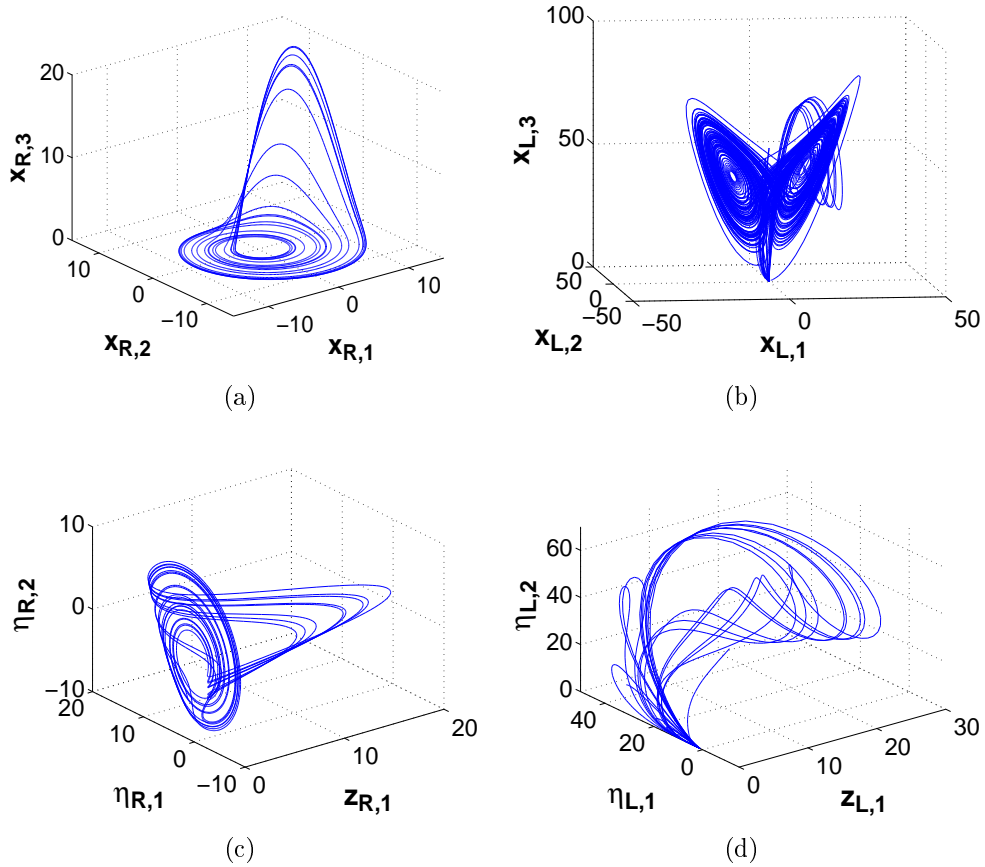


Figura B.9: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L); (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L).

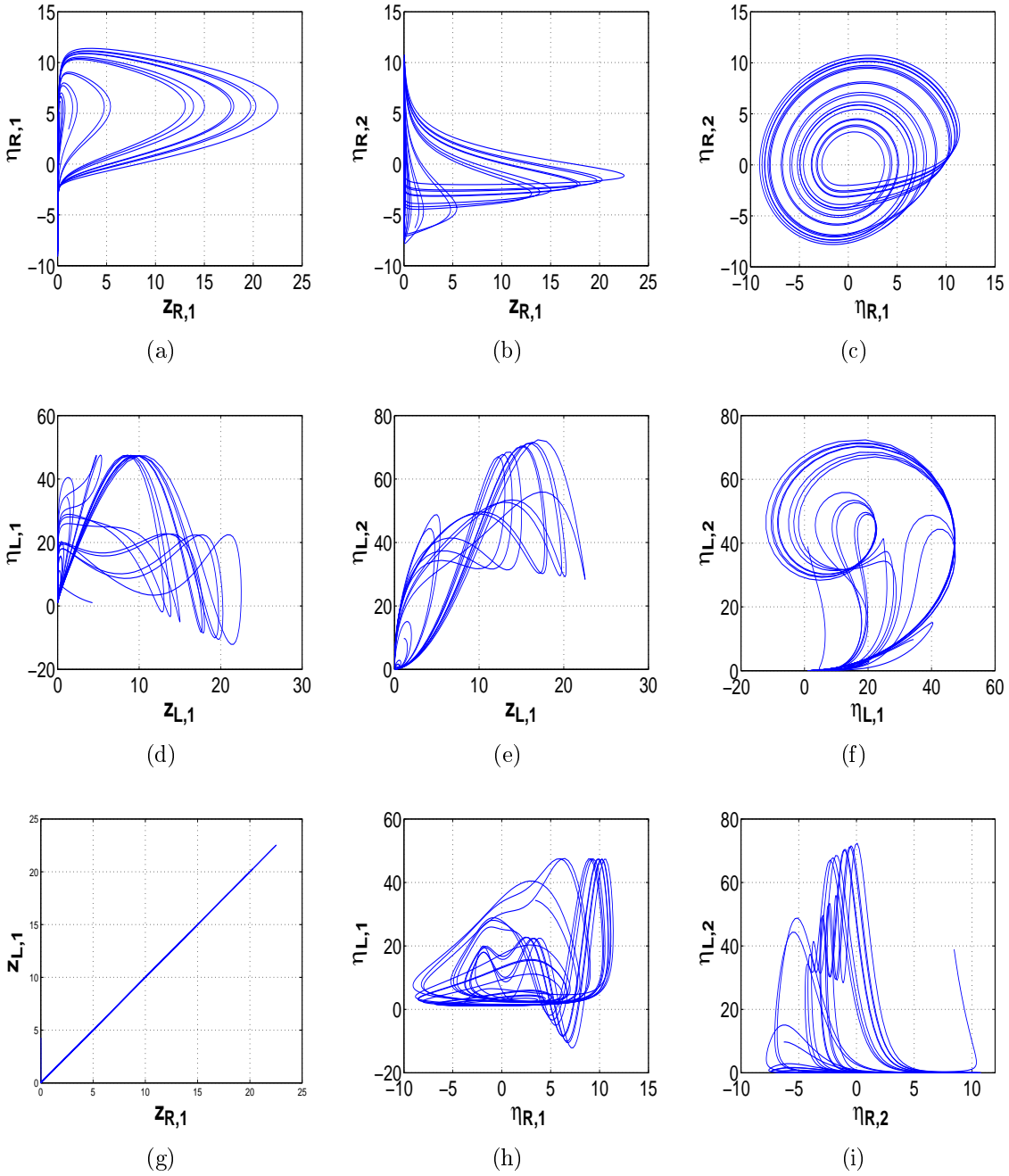
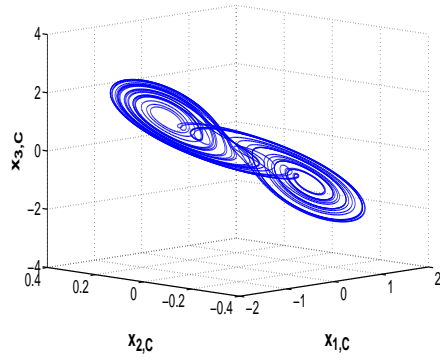
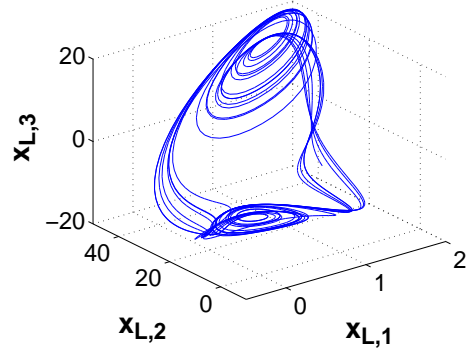


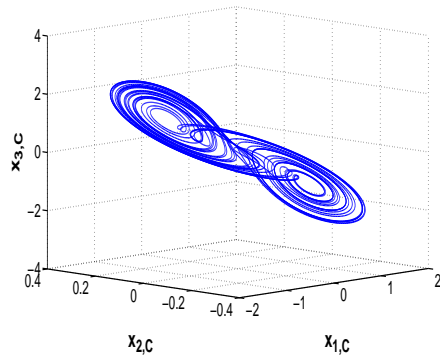
Figura B.10: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.



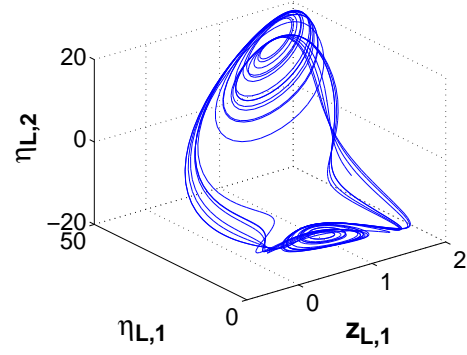
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura B.11: SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a) Chua suavizado y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L); (c) Chua suavizado y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L).

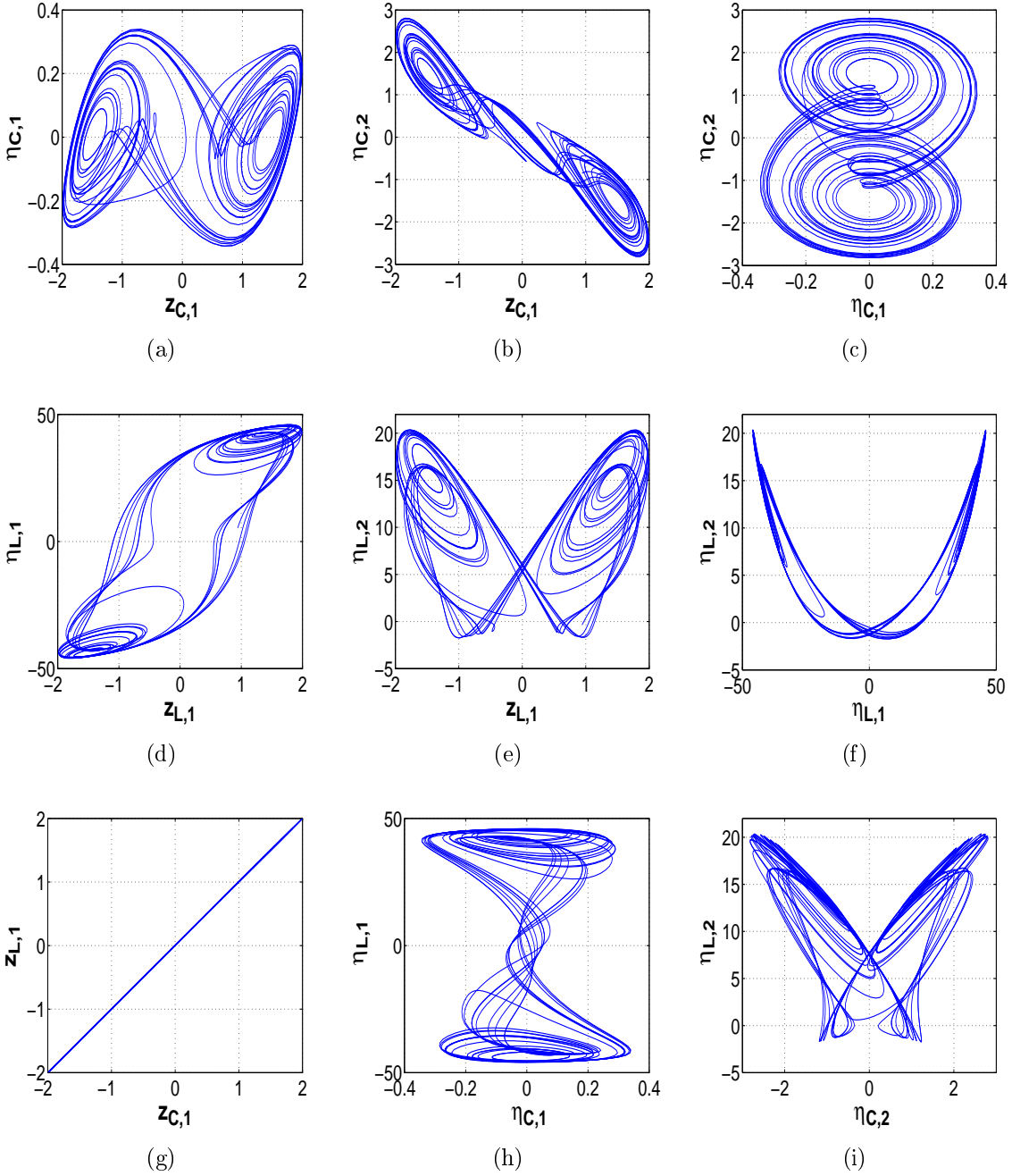
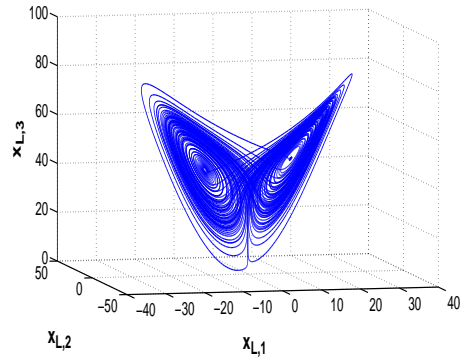
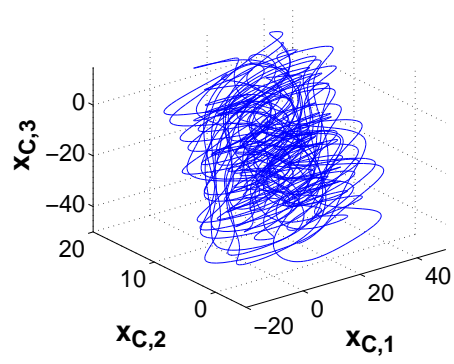


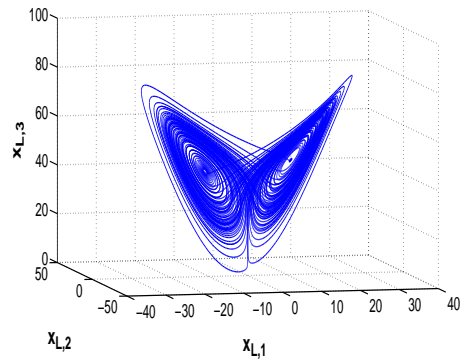
Figura B.12: SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.



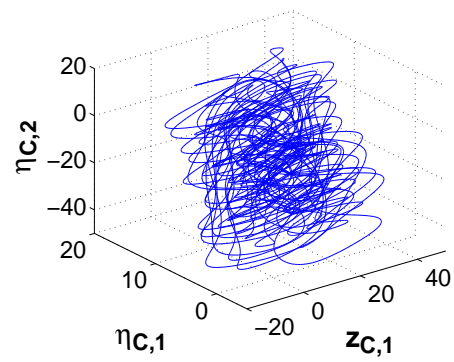
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura B.13: SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado(esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a) Lorenz y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_L, x_C); (c) Lorenz y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_L, z_C).

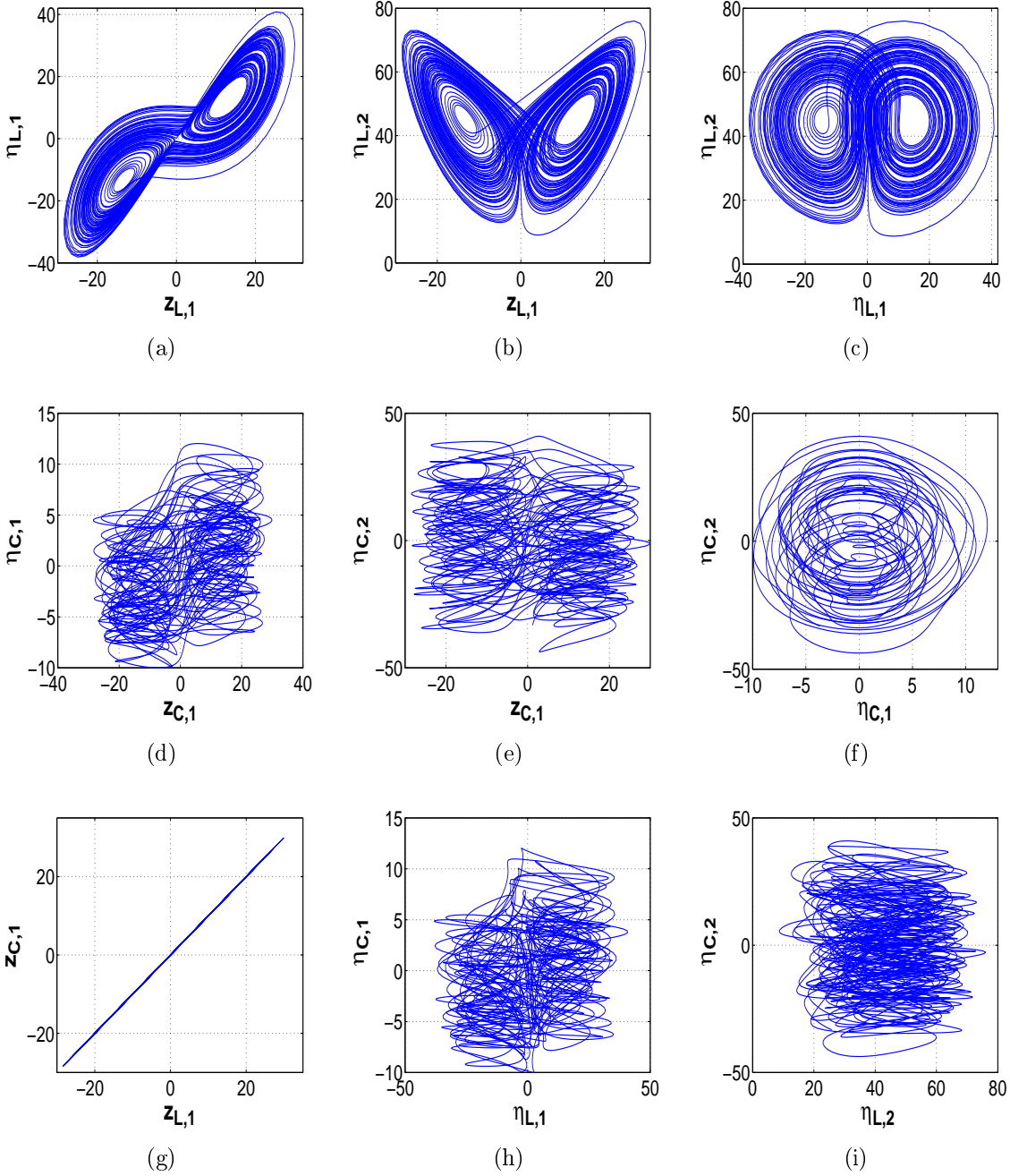


Figura B.14: SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), ambos con $\sigma = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

B.2.1. SG Cuando $\sigma_m > \sigma_s$

SGP Cuando $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 2)$

Maestro $\sigma_m = 3$	Esclavo $\sigma_s = 2$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. 4.7 y Fig. 4.8
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. B.15 y Fig. B.16
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	N.P.
Rössler	Chua	N.A.	N.P.

Tabla B.4: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 2)$

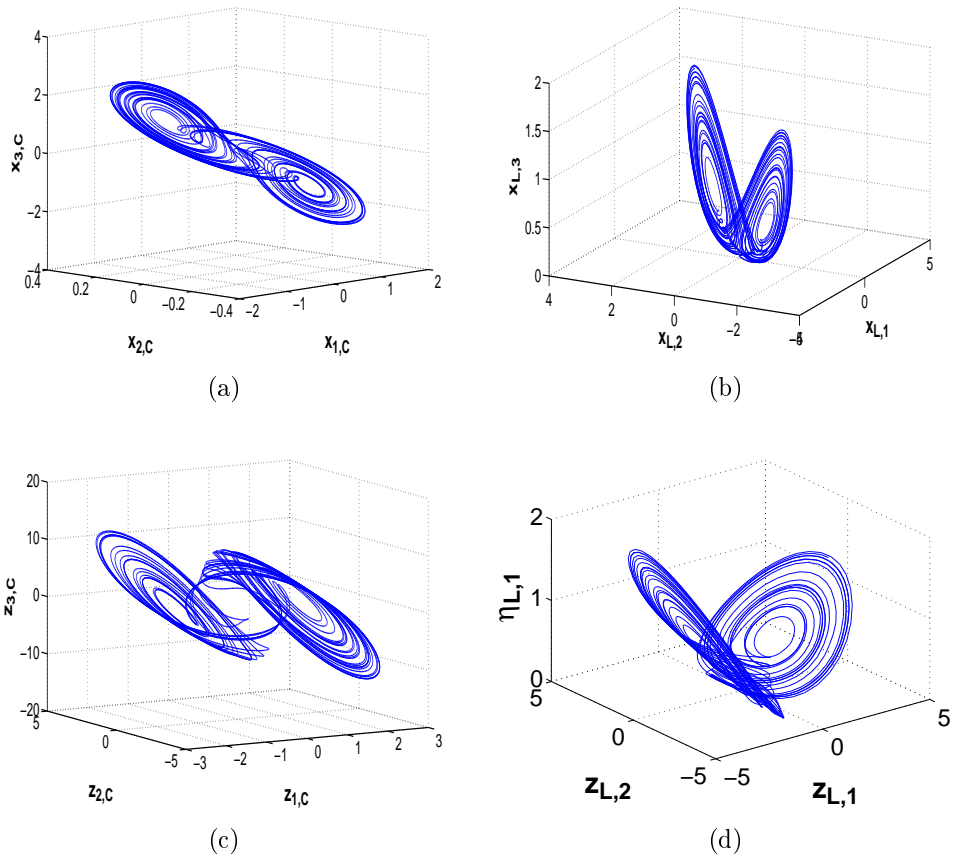


Figura B.15: SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 3$ y $\sigma_L = 2$. (a) Chua suavizado y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L); (c) Chua suavizado y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L).

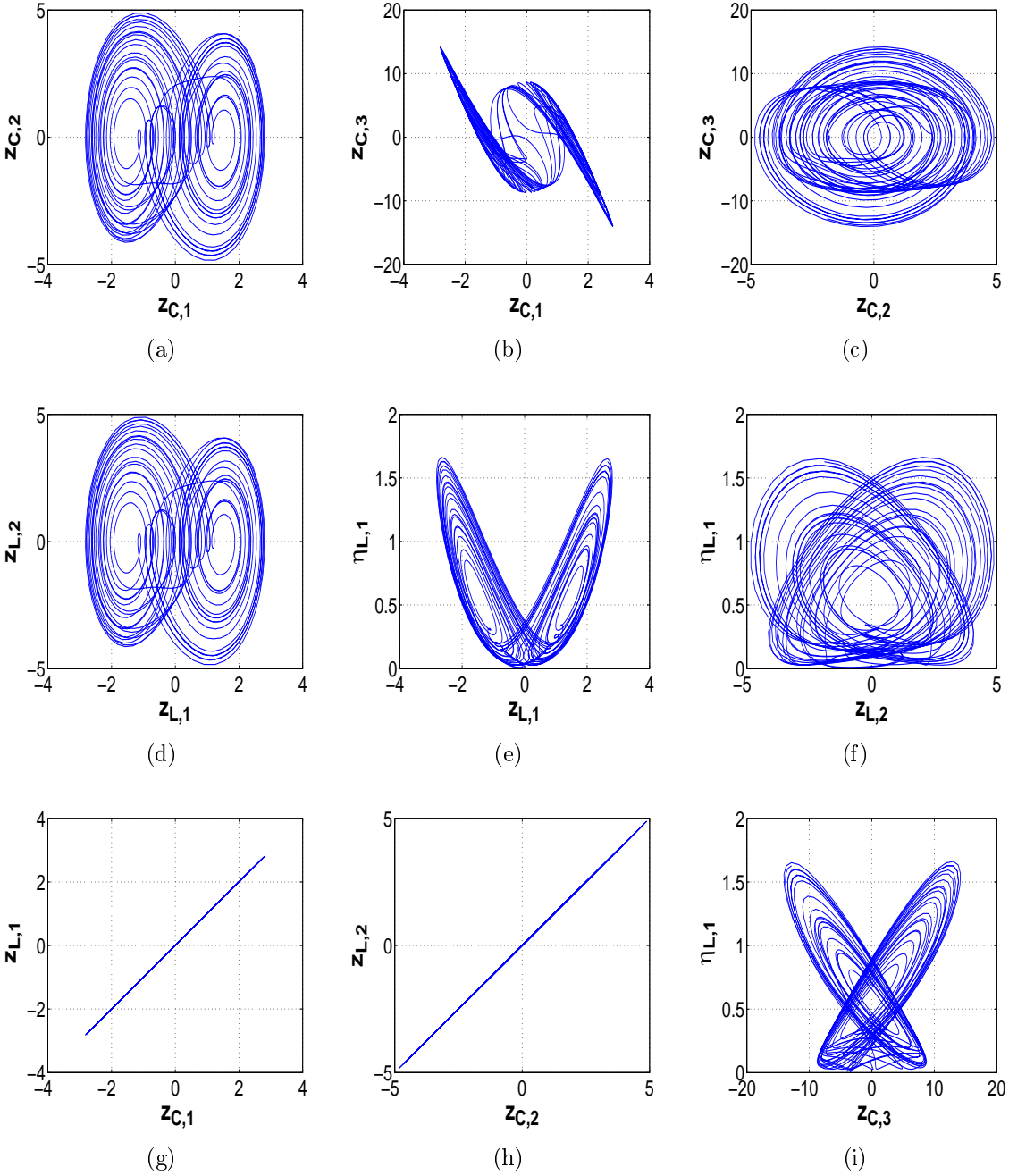


Figura B.16: SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 3$ y $\sigma_L = 2$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

SGP Cuando $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 1)$

Maestro $\sigma_m = 3$	Esclavo $\sigma_s = 1$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. B.17 y Fig. B.18
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. 4.9 y Fig. 4.10
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	Fig. B.19 y Fig. B.20
Rössler	Chua	N.A.	Fig. B.21 y Fig. B.22

Tabla B.5: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 3) > (\sigma_s = 1)$

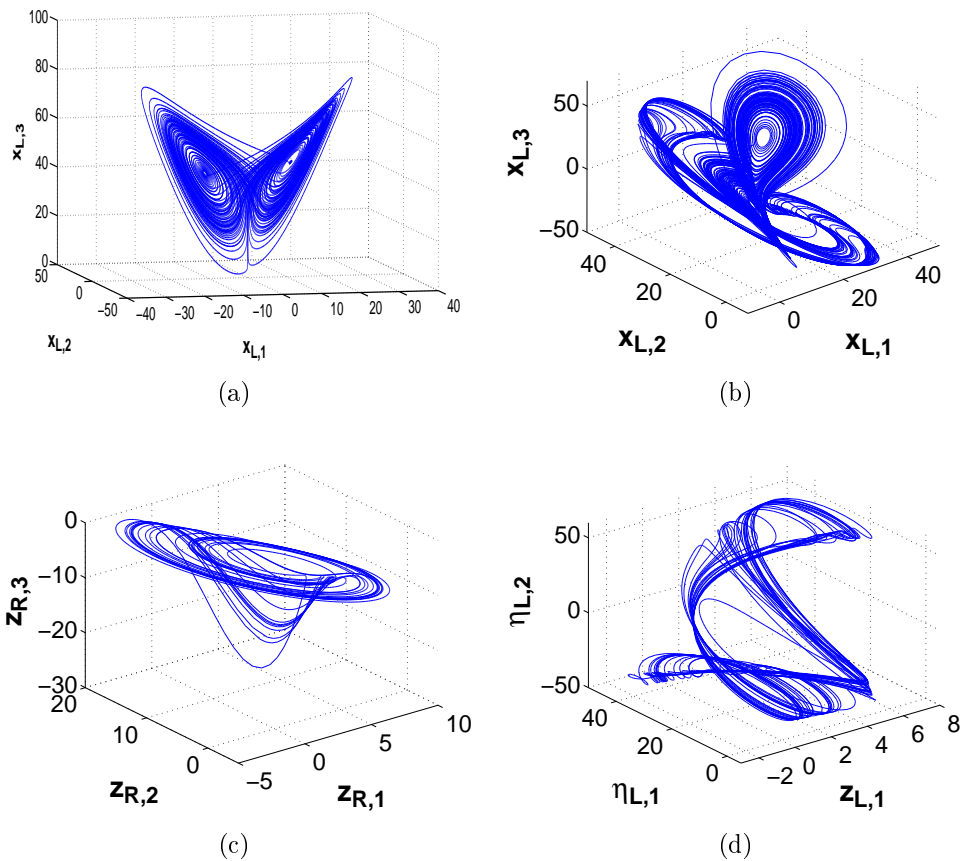


Figura B.17: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_L = 1$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L) ; (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L) .

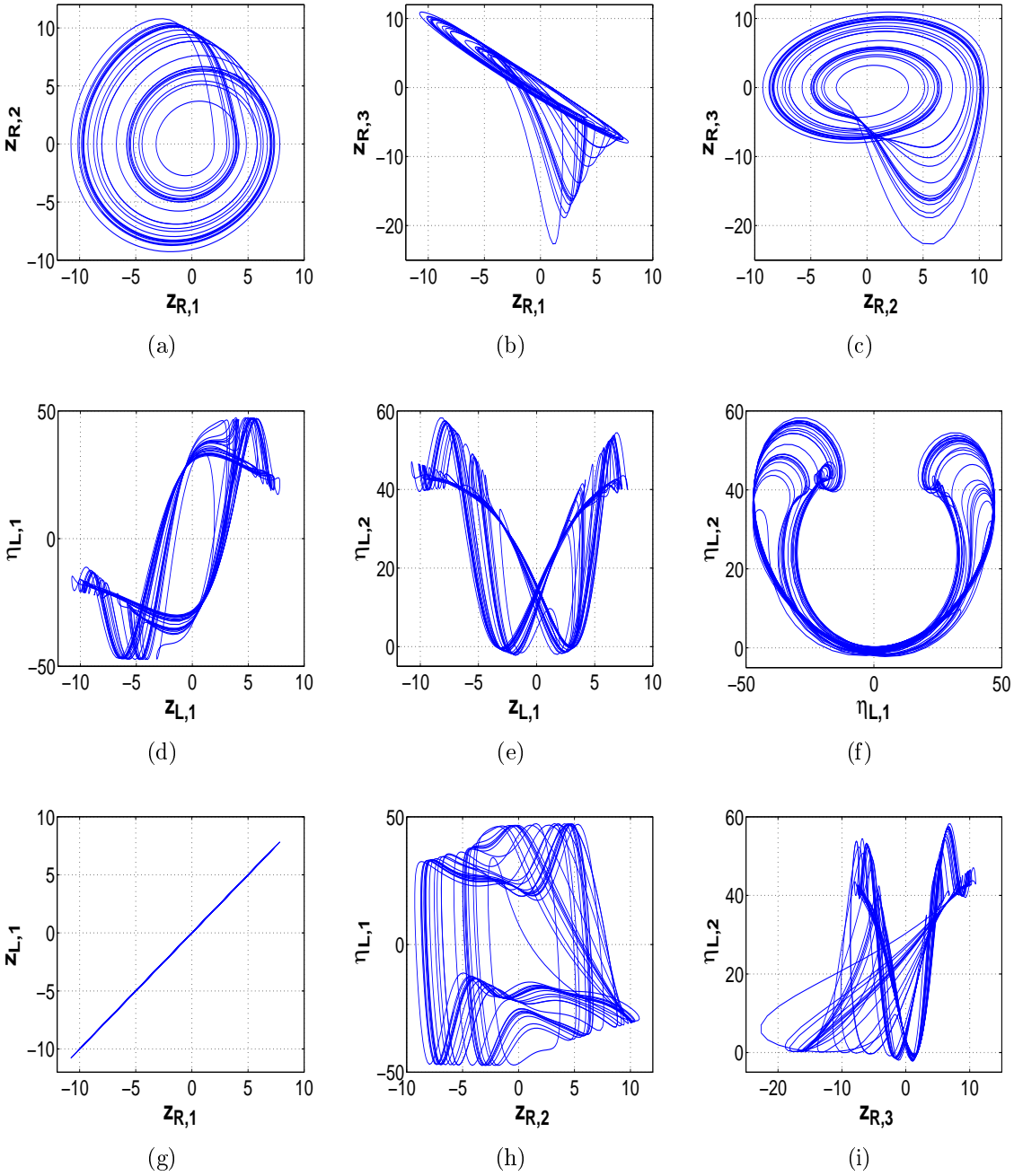
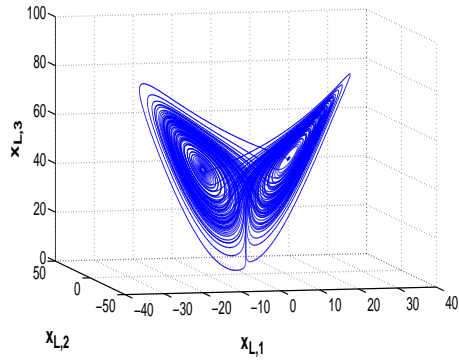
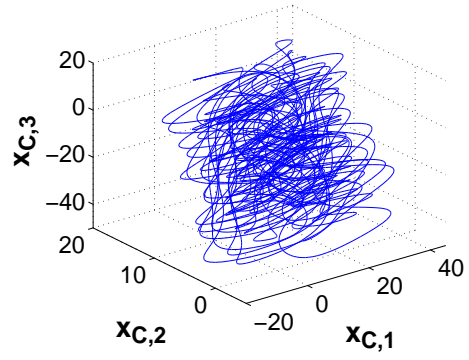


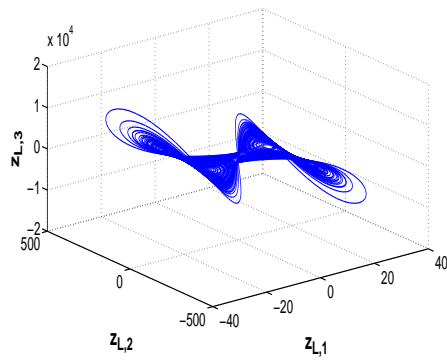
Figura B.18: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_L = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.



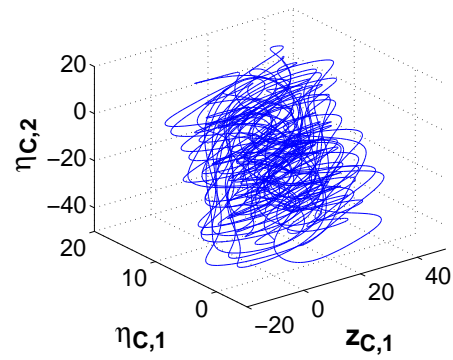
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura B.19: SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 3$ y $\sigma_C = 1$. (a) Lorenz y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_L, x_C); (c) Lorenz y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_L, z_C).

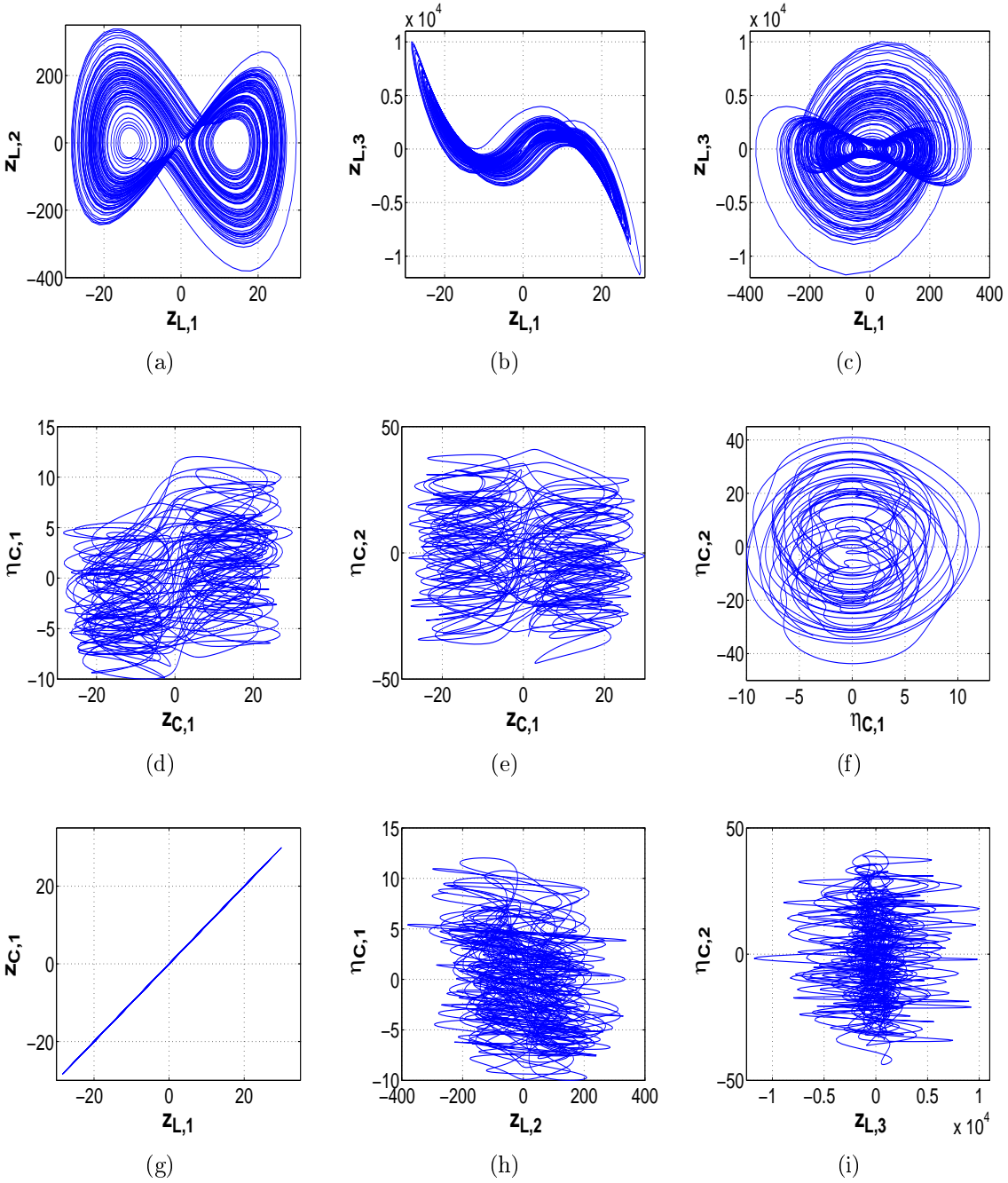


Figura B.20: SGP entre Lorenz (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 3$ y $\sigma_C = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

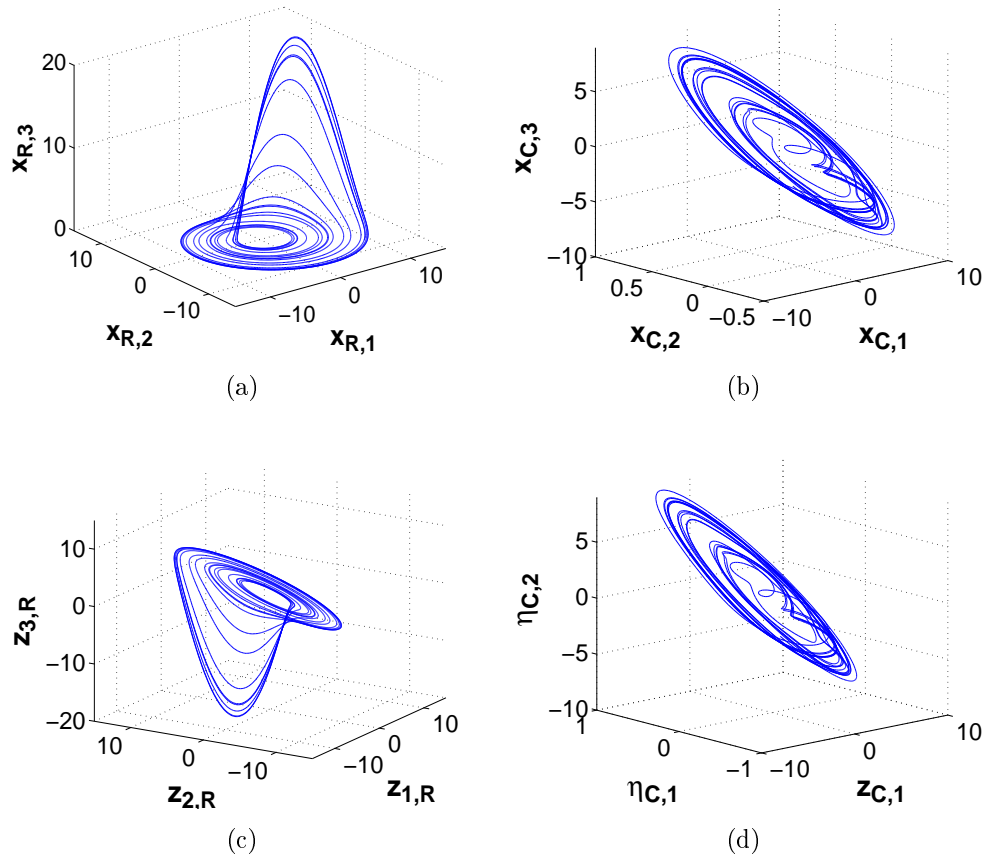


Figura B.21: SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_C = 1$. (a) Rössler y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_R, x_C); (c) Rössler y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_R, z_C).

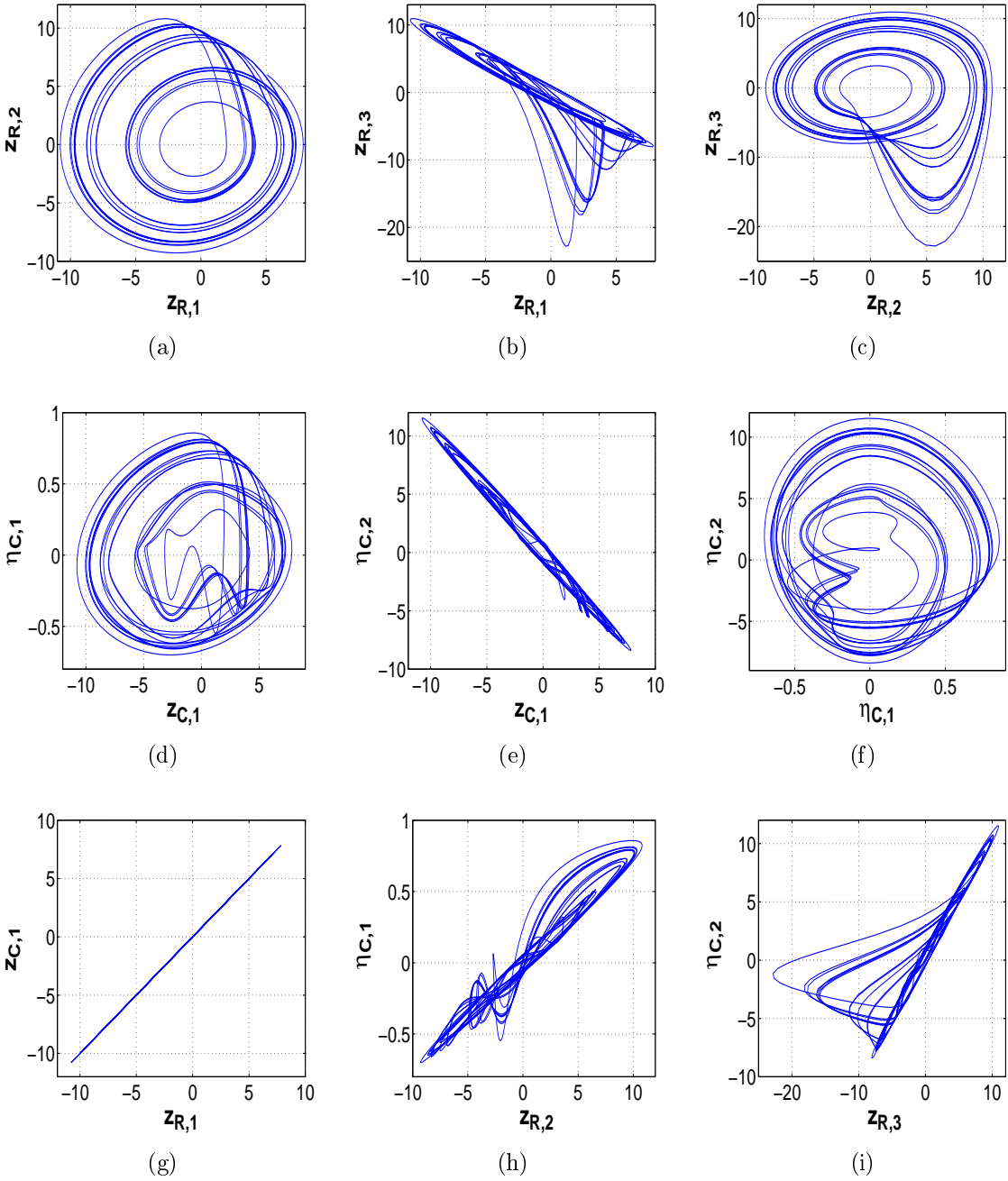


Figura B.22: SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_R = 3$ y $\sigma_C = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

SGP Cuando $(\sigma_m = 2) > (\sigma_s = 1)$

Maestro $\sigma_m = 2$	Esclavo $\sigma_s = 1$	SGC	SGP
Rössler	Lorenz	N.A.	Fig. B.23 y Fig. B.24
Chua	Lorenz	N.A.	Fig. B.25 y Fig. B.26
Lorenz	Rössler	N.A.	N.P.
Chua	Rössler	N.A.	N.P.
Lorenz	Chua	N.A.	Fig. 4.11 y Fig. 4.12
Rössler	Chua	N.A.	Fig. B.27 y Fig. B.28

Tabla B.6: Resumen para la configuración maestro-esclavo con $(\sigma_m = 2) > (\sigma_s = 1)$

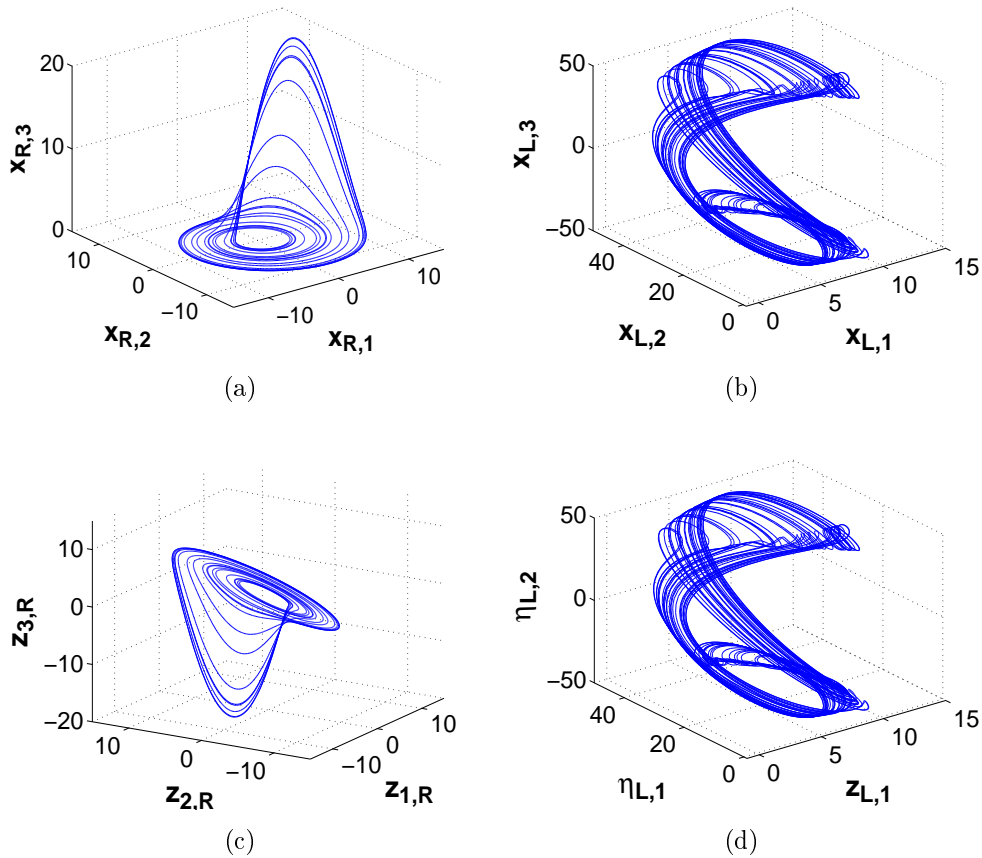


Figura B.23: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a) Rössler y (b) Lorenz en sus variables originales (x_R, x_L) ; (c) Rössler y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_R, z_L) .

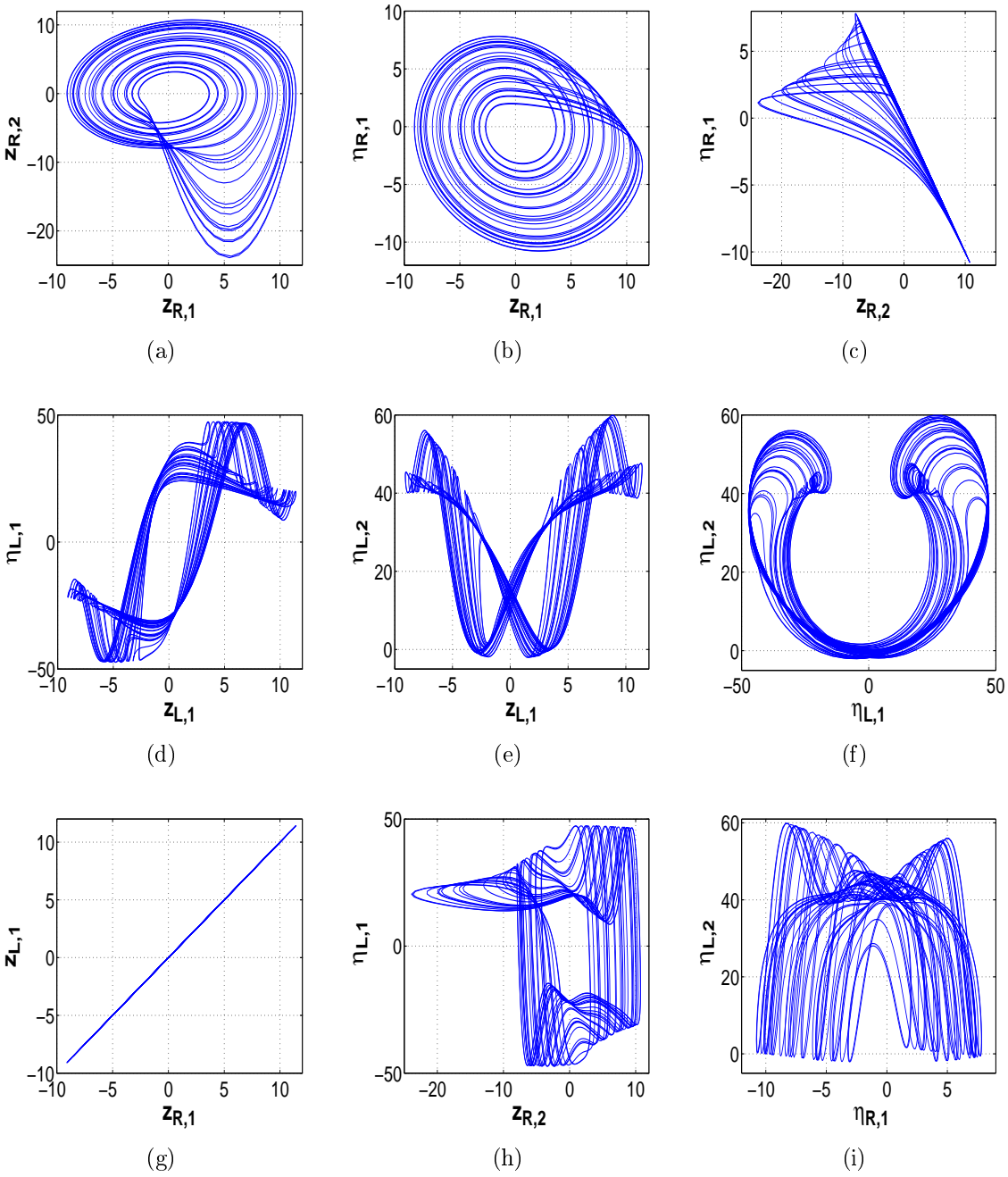
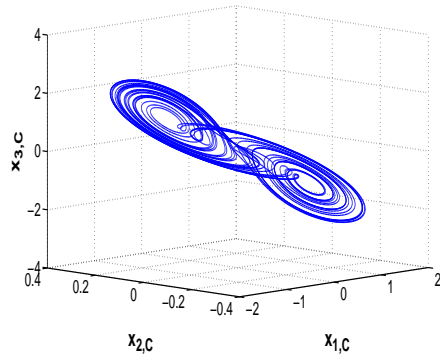
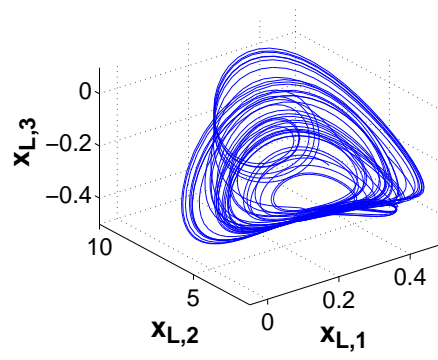


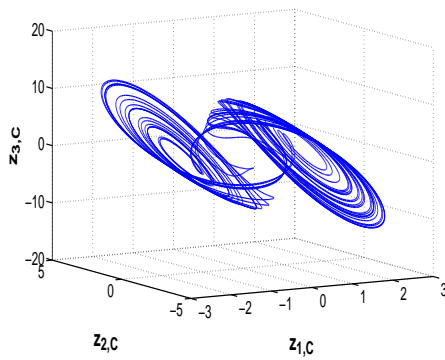
Figura B.24: SGP entre Rössler (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_R = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.



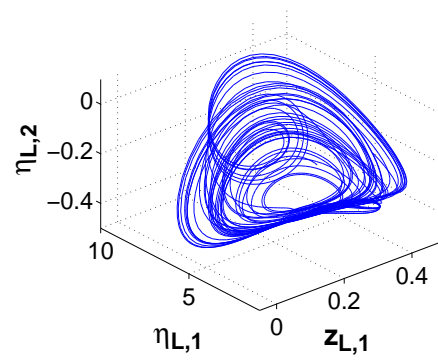
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura B.25: SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a) Chua suavizado y (b) Lorenz en sus variables originales (x_C, x_L); (c) Chua suavizado y (d) Lorenz en sus variables transformadas (z_C, z_L).

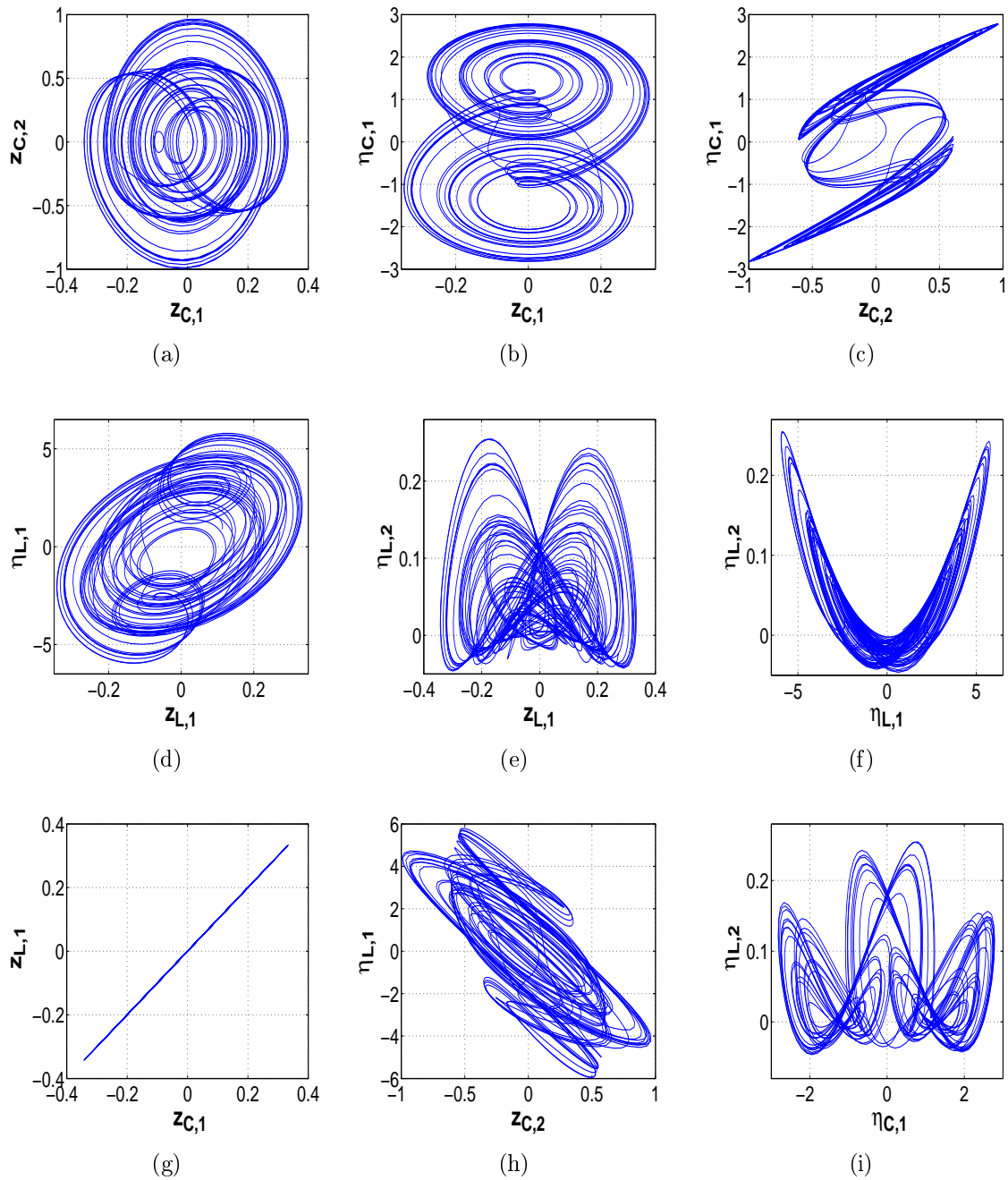


Figura B.26: SGP entre Chua suavizado (maestro) y Lorenz (esclavo), con $\sigma_C = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Lorenz en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

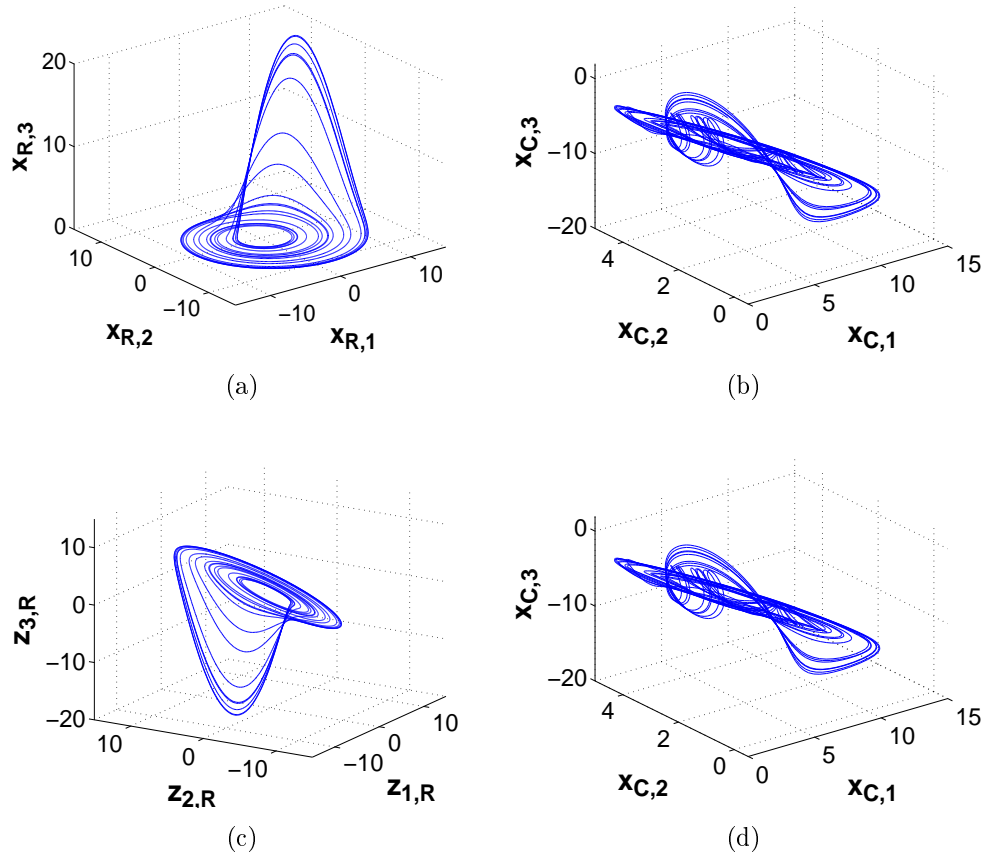


Figura B.27: SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_L = 2$ y $\sigma_C = 1$. (a) Rössler y (b) Chua suavizado en sus variables originales (x_R, x_C); (c) Rössler y (d) Chua suavizado en sus variables transformadas (z_R, z_C).

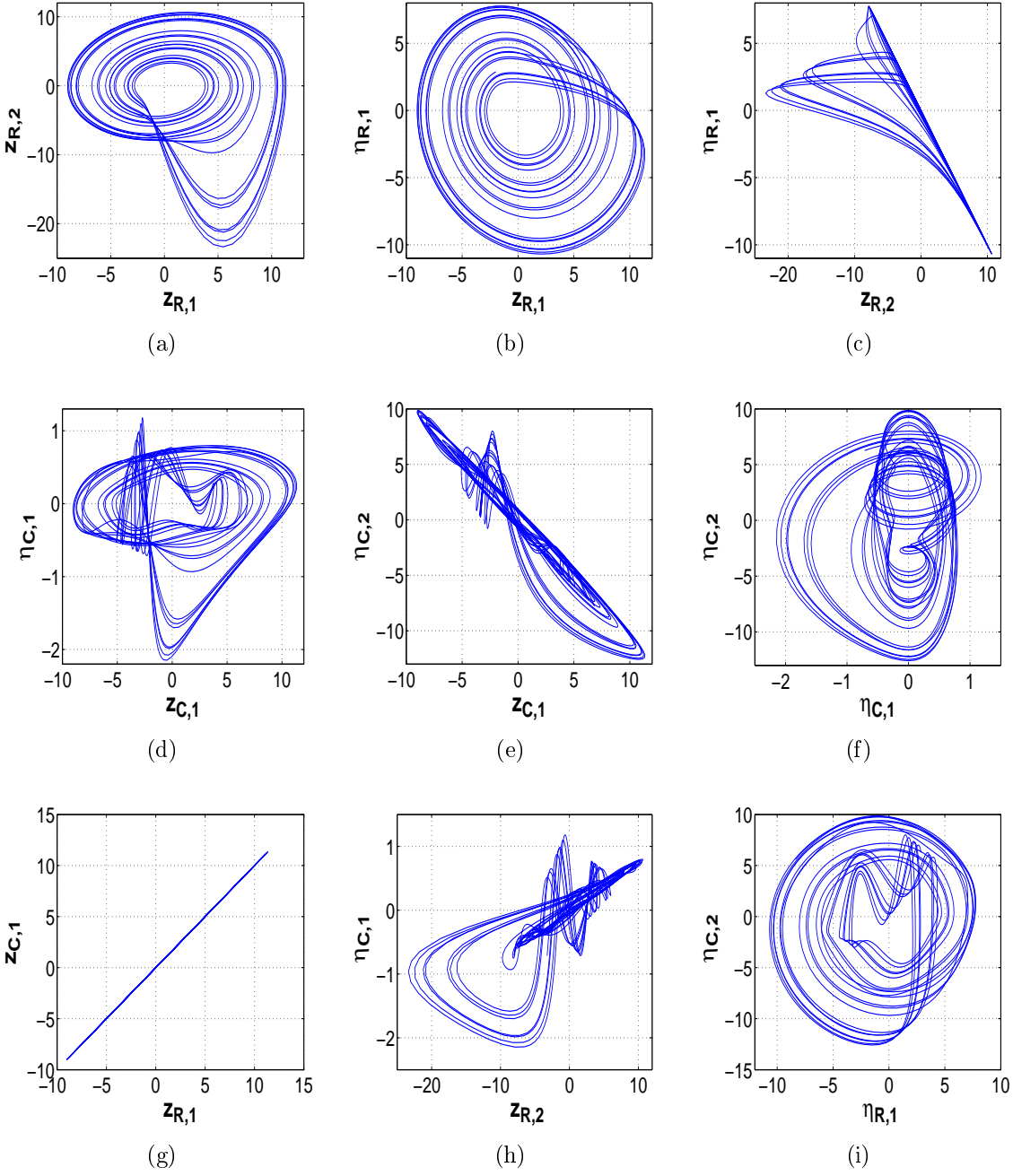


Figura B.28: SGP entre Rössler (maestro) y Chua suavizado (esclavo), con $\sigma_C = 2$ y $\sigma_L = 1$. (a), (b), (c) son las proyecciones de Rössler en coordenadas transformadas; (d), (e), (f) son las proyecciones de Chua suavizado en coordenadas transformadas; (g), (h), (i) son las variedades de sincronización.

Referencias

- [1] C. Huygens, *Horoloquim Oscilatorium*, Paris, France, 1673.
- [2] S. H. Strogatz, *The Mathematical Structure of the Human Sleep-Wake Cycle. Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 69, Springer, New York, 1986.
- [3] R. Femat, L. Kocarev, L. van Gerven, M. E. Monsivais-Pérez, Towards generalized synchronization of strictly different chaotic systems, *Phys. Lett. A*, 342, 247–255, 2005.
- [4] J. P. García-Sandoval, R. Femat, V. González-Álvarez, On generalized synchronization of different-order chaotic systems: a submanifold approach, *J. Phys A*, 42, 295101, 2009.
- [5] A. Isidori, *Nonlinear control systems*, 3th Ed., Springer, 1995. London
- [6] J. G. Barajas Ramirez, Transiciones a Sincronización en Islotes de Células Pancreáticas, en Congreso Nacional del AMCA 2007,(octubre 2007). <http://www.amca.org.mx> Monterrey, Nuevo Leon, México.
- [7] J.M.W. van de Weem, J.G. Barajas Ramírez, R. Femat, H. Nijmeijer, Conditions for synchronization and chaos in networks of Beta-cells, en IFAC CHAOS 09 , Federación Internacional de Control Automático, IFAC IFAC, Elsevier Londres, julio 2009.
- [8] R. Femat, J. G. Barajas Ramirez, G. Solis Perales, Lie algebra on synchronization of different systems: a generalized function for Hodgkin-Huxley neurons, the 3rd International IEEE Scientific Conference on Physics and Control, PhysCon 2007.
- [9] E. Mosekilde, Y. Maistrenko, and D. Postnov, *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems*, World Scientific, Singapore, 2002.
- [10] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurts, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, (2001)
- [11] H.Fujisaka and T. Yamada, Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems, *Prog. Theor. Phys.*, 69,1 pp. 32-47, 1983
- [12] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev and M. I. Rabinovich, Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems, *Radiophysics and Quantum Electronics*, 29, 795, 1986

- [13] L. M. Pecora and T. L. Carroll, Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.* 64, 821-824, 1990.
- [14] L. M. Pecora and T. L. Carroll, Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A* 44(4), 2374-2383, 1991.
- [15] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, Generalized Synchronization of Chaos in Directionally Coupled Chaotic Systems, *Phys. Rev. E* 51, 980-994, 1995.
- [16] L. Kocarev, U. Parlitz, Generalized Synchronization, Predictability, and Equivalence of Unidirectionally Coupled Dynamical Systems, *Phys. Rev. Lett.*, 76, 11, 1996.
- [17] B. R. Hunt, E. Ott, J. A. Yorke, Differentiable Generalized Synchronization on Chaos, *Phys. Rev. E*, 55, 4, 1997.
- [18] T. Yang, L. O. Chua, Generalized Synchronization of Chaos Via Linear Transformations, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 9, 1, 215-219, 1999.
- [19] R. Femat, G.Solís-Perales, On the Chaos Synchronization Phenomena, *Phys. Lett. A*, 262, 50-60, 1999.
- [20] R. Femat, G.Solís-Perales, Synchronization of Chaotic Systems with Different Order, *Phys. Rev. E*, 65, 2002.
- [21] R. Femat, L. Kocarev, L. van Gerven, M. E. Monsivais-Pérez, Towards Generalized Synchronization of Strictly Different Chaotic Systems, *Phys. Lett. A*, 342, 247-255, 2005.
- [22] G. Zhang, Z-r. Liu, Z-j. Ma, Generalized Synchronization of Continuous Dynamical System, *App. Math. and Mech.*, 28(2), 157-162, 2007.
- [23] J. Meng and X. Wang, Generalized Synchronization Via Nonlinear Control, *Chaos*, 18, 023108-1 - 023108-5, 2008.
- [24] A. Rodríguez, J. De León, L. Fridman, Quasi-continuous High-order Sliding-mode Controllers for Reduced-Order Chaos Synchronization, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43, 948-961, 2008.
- [25] J. P. García-Sandoval, R. Femat, V. Gonzales-Álvarez, On Generalized Synchronization of Different-order Chaotic Systems: A Submanifold Approach, *J. Phys. A: Math. Theor.* 42, 295101 (15pp), 2009.
- [26] Y. Jing, N. Cai, G. M. Dimirovski, S. Zhang, Adaptive Generalized Synchronization of Different Order Chaotic Systems, 2010.
- [27] L. Kocarev, U. Parlitz, Generalized Synchronization, Predictability, and Equivalence of Unidirectionally Coupled Dynamical Systems, *Phys. Rev. Lett.* 76, 1816-1819, 1996.

- [28] T. Yang, L. O. Chua, Channel-independent chaotic secure communication. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 6(12B), 2653-2660 S, (1996).
- [29] L.M. Pecora, T.L. Carroll, Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.* 64, 821-824, 1990.
- [30] U. Parlitz, L. Junge, L. Kocarev, Subharmonic Entrainment of Unstable Periodic Orbits and Generalized Synchronization, *Phys. Rev. Lett.* 79, 17, 3158-3161, 1997.
- [31] H. J. Marquez, *Nonlinear Control Systems: Analysis and Design*. Wiley-interscience, New Jersey, 2003.
- [32] T. Yang, H. H. Shao, Synchronizing chaotic dynamics with uncertainties based on a sliding mode control design, *Phys. Rev. E*, 65, 036556, 2002.
- [33] L. Pecora, T. H. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar, J. F. Heagy, Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications, *Chaos*, Vol. 7, No. 4, 520-542, 1997.