



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Modelado del Flujo de Fluidos  
en una Bomba para Suministro de Medicamento**

Tesis que presenta

**Crescencio Hernández Rosales**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

En la opción de

**Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores

Dr. Armando Encinas Oropesa

San Luis Potosí, S.L.P., Diciembre del 2008



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Modelado del Flujo de Fluidos en una Bomba para Suministro de Medicamento**, presentada para obtener el Grado de Maestro en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Crescencio Hernández Rosales** y aprobada por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores  
(Director de la tesis)

Dr. Armando Encinas Oropesa  
(Codirector de la tesis)

Dr. José Noel Carbajal Pérez  
(Presidente)

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez  
(Sinodal interno)

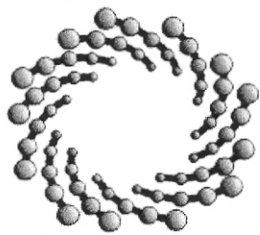
Dr. Ricardo Romero Méndez  
(Sinodal externo)



## Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores y del Dr. Armando Encinas Oropesa.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número 204026. Además de un apoyo financiero por un período de 2 meses de beca mediante el proyecto con No. de referencia 48307-R apoyado por CONACYT bajo el concepto de formación de recursos humanos.



**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 019 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 11 días del mes de diciembre del año 2008, se reunió a las 10:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. José Noel Carbajal Pérez</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Armando Encinas Oropesa</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>
<b>Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Ricardo Romero Méndez</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Crescencio Hernández Rosales**

sobre la Tesis intitulada:

*Modelado del Flujo de Fluidos en una Bomba para Suministro de Medicamento*

que se desarrolló bajo la dirección de


**Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores**  
**Dr. Armando Encinas Oropesa (UASLP)**

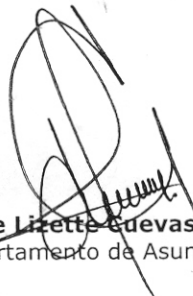
El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 11:59 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fé el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 11 días del mes de diciembre de 2008.

  
**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Velez**  
Jefa del Departamento de Asuntos Escolares



# Dedicatoria

*Esta tesis esta dedicada con mucho cariño a mis padres, hijos y esposa*

***A mis padres:** Por el ejemplo de honestidad y perseverancia para superarse en la vida.*

***A mis hijos:** Por su amor incondicional.*

***A mi esposa:** Por su amor, apoyo y paciencia para conmigo.*

# Agradecimientos

Deseo agradecer profundamente a todas aquellas personas que me han permitido conseguir de forma directa o indirecta una meta mas en mi vida.

**A mis asesores:** En especial al Dr. Ricardo Femat por su confianza, asesoría y apoyo incondicional hacia mi persona.

**A mis sinodales:** Al Dr. Gonzalo Barajas, al Dr. Noel Carbajal y al Dr. Ricardo Romero, por su invaluable contribución a mejorar la calidad de la discusión y presentación de los resultados.

**A mis profesores de Maestría:** En especial al Dr. David Lizarraga, al Dr. Daniel Melchor, al Dr. Arturo Zavala, al Dr. Hugo Cabrera y a la Dra. Ilse Cervantes, por su enseñanza y ejemplo de como hacer mejor las cosas.

**A mis compañeros y amigos:** En especial a Dulcesita, Gris, Aurora, Enrique Vilchiz, Juan Carlos Sánchez, Mario Alberto Noriega, Alfonso Arenas, Martín, Gerardo, mis compadres Miguel Ángel y Miguel Oviedo, al Dr. Eduardo Ruíz, a la Lic. Elizabeth Ruiz, Victor Mata, la Lic. Laura Nayelli y a la C.P. Alejandra Quezada.

**A mis hermanos:** En especial a mi hermana cata porque se nos ha adelantado en el camino.

**A la CIE:** Deseo agradecer profundamente a la Comisión Interna de Evaluación del IPICYT por la licencia laboral otorgada para realizar estudios de maestría. En especial al Dr. Carlos Barajas López, al Dr. David Rios Jara, al Dr. Marcial Bonilla y al Dr. Noel Carbajal, que en su momento presidieron dicha comisión.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Nuestra motivación: La enfermedad de la Diabetes Mellitus Tipo 1 . . . . .	1
1.1.1	Fundamentos en la dosificación de insulina . . . . .	2
1.1.2	Comentarios acerca del cálculo y suministro de la insulina . . . . .	3
1.1.3	Bombas comerciales para el suministro de insulina . . . . .	4
1.1.4	Suministro continuo de insulina . . . . .	6
1.1.5	Características que debe reunir un AD . . . . .	7
1.1.6	Geometría propuesta para el AD . . . . .	8
1.2	Planteamiento y justificación del problema . . . . .	10
1.2.1	Antecedentes: Mecánica de fluidos en tubos curvos de curvatura constante . . . . .	10
1.2.2	Suposiciones hechas en este trabajo . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Diseño del AD usando la geometría de un toro y de una espiral</b>	<b>13</b>
2.1	Caso I: Diseño del AD usando la geometría de un toro . . . . .	13
2.2	Caso II: Diseño del AD usando una espiral de Arquímedes . . . . .	15
2.2.1	Requerimientos adicionales en el diseño del AD . . . . .	17
2.2.2	Características del minimotor seleccionado para el AD . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modelado matemático del flujo de fluidos en el AD considerando tubos de curvatura constante</b>	<b>20</b>
3.1	Mecánica de fluidos . . . . .	20
3.1.1	Antecedentes y propiedades físicas de los fluidos . . . . .	20
3.1.2	Clasificación de los fluidos . . . . .	21
3.2	Modelado del flujo de fluidos en el AD . . . . .	22
3.2.1	Sistema coordenado usado en el modelo de Dean . . . . .	23
3.3	Extensión al modelo de Dean: Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes libre de coordenadas . . . . .	25
3.3.1	Ecuación de continuidad . . . . .	26
3.3.2	Ecuación de momento . . . . .	27
3.3.3	Ecuación de momento: Dirección radial . . . . .	27
3.3.4	Ecuación de momento: Dirección tangencial . . . . .	29
3.3.5	Ecuación de momento: Dirección axial . . . . .	30
3.4	Extensión del modelo al caso de fluidos compresibles . . . . .	33
3.4.1	Ecuación de continuidad fluido compresible . . . . .	33

3.4.2	Términos adicionales de la ecuación de momento: Fluidos compresibles . . . . .	34
3.4.3	Solución analítica al modelo de Dean simplificado . . . . .	35
3.5	Discusión acerca del Capítulo III . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Modelo del flujo de fluidos en el AD, considerando tubos curvos de curvatura variable</b>	<b>39</b>
4.1	Sistema de coordenadas espiroidales, usadas en el modelo extendido . . . . .	39
4.2	Modelo extendido en coordenadas espiroidales . . . . .	41
4.2.1	Ecuación de continuidad en C-E: Modelo extendido . . . . .	41
4.3	Ecuaciones de momento en coordenadas espiroidales . . . . .	42
4.3.1	Deducción de la ecuación de momento: Dirección axial . . . . .	42
4.4	Modelo del flujo de fluidos en el AD . . . . .	44
4.4.1	Comentarios acerca del Capítulo IV . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>45</b>
5.1	Comentarios y conclusiones sobre los modelos obtenidos . . . . .	45
5.2	Áreas de aplicación de los modelos obtenidos . . . . .	45
5.2.1	Intercambio de calor . . . . .	46
5.2.2	Modelado del flujo sanguíneo aórtico . . . . .	47
5.3	Trabajo a futuro . . . . .	47
<b>A</b>	<b>Parametrización y cálculo de las métricas en C-T y C-E</b>	<b>49</b>
A.1	Parametrización de una curva mediante el parámetro longitud de arco . . . . .	49
A.1.1	Cálculo de la longitud de la curva del toro y de la espiral . . . . .	49
A.1.2	Cálculo de la curvatura del toro y de la espiral . . . . .	50
A.2	Obtención de las métricas en coordenadas toroidales y espiroidales . . . . .	51
A.2.1	Métrica en coordenadas toroidales (C-T) . . . . .	51
A.2.2	Métrica en coordenadas espiroidales (C-E) . . . . .	52
A.3	Gradiente, Divergencia y Rotacional . . . . .	53
A.3.1	Cálculo del perfil de flujo en un tubo recto . . . . .	54



# Lista de Figuras

1.1	Diagrama de bloques del páncreas artificial. El bloque en color obscuro denota la parte donde se incrusta este trabajo. . . . .	3
1.2	Bomba comercial para suministro de insulina. . . . .	5
1.3	Curva de suministro realizado por este tipo de bombas comerciales. . . . .	6
1.4	Dosis de insulina calculada por el algoritmo de control reportado por Ruiz-Velázquez et.al [9].	7
1.5	Diagrama general que exhibe internamente los elementos que conforman el bloque en color obscuro de la Figura 1.1 y donde se muestra también el lugar que ocupará el AD en la bomba.	8
1.6	Geometría propuesta para el AD de la bomba. . . . .	9
1.7	Espirales de Arquímedes, (a) con parámetros $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 1$ (b) para $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = 1$ . . .	9
2.1	Diseño del AD usando las dimensiones del toro calculadas en el cuadro 2.1. . . . .	14
2.2	Diseño del AD usando diferentes valores de $\beta_2$ : (a) Con valores de $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 1$ . (b) Con valores de $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 1/2$ . . . . .	15
2.3	Propuesta de diseño del recipiente de insulina. . . . .	16
2.4	Propuesta de diseño del AD cuyas dimensiones son de 6.89 cm de base x 6.80 cm de altura x 1.5 cm de espesor. . . . .	17
2.5	Mini-motoreductor seleccionado para el AD cuyo modelo es 1524E012SR + IE2-256 + 15/5 235,067:1. . . . .	19
3.1	Transmisión de cantidad de momento en un fluido newtoniano. . . . .	21
3.2	Geometría del AD aproximado por un toroide: (a)Vista superior de AD. (b) Vista en 3Ds de un segmento del tubo. . . . .	23
3.3	Sistema de coordenadas toroidales, usado por Dean: (a) Vista geométrica. (b) Marco del sistema coordinado. . . . .	24
3.4	Principio de conservación de materia. . . . .	26
3.5	Flujo secundario desarrollado en la sección transversal del tubo. . . . .	37
4.1	Sistema de coordenadas usado en el sistema extendido: (a)Vista geométrica. (b) Marco de coordenadas espiroidales. . . . .	40
5.1	Sistema de enfriamiento basados en arreglos de tubos de cobre en forma de serpientes. . .	46
5.2	Anatomía de la Aorta, vista como un ducto de curvatura variable. . . . .	47
A.1	Sistema de coordenadas espiroidales, usado en el modelo extendido. . . . .	53
A.2	Perfil de velocidades de un fluido Newtoniano a través de un tubo recto. . . . .	55

# Lista de cuadros

1.1	Características técnicas de algunas bombas comerciales. . . . .	5
2.1	Parametros de diseño del AD considerando la geometría de un toro. . . . .	14
2.2	Valores nominales de presión arterial sanguínea. . . . .	18
2.3	Especificaciones técnicas del minimotor seleccionado para el AD. . . . .	19
4.1	Nomenclatura usada en el modelo extendido. . . . .	41

# Acrónimos

AD	Actuador/Dosificador
sin	Función trigonométrica seno
N-S	Navier-Stokes
C-T	Coordenadas Toroidales
C-E	Coordenadas Espiroidales
$R_T$	Radio de un toroide
$L_C$	Longitud de una curva
$L_E$	Longitud de curva de una espiral
DMT1	Diabetes Mellitus Tipo 1
DMT2	Diabetes Mellitus Tipo 2
UI	Unidades de Insulina
mUI	Miliunidades de insulina
CD	Corriente Directa
V	Voltaje
I(t)	Función o señal continua de insulina
I(kt)	Función o señal discreta de insulina
V(t)	Función o señal continua de Voltaje
V(kt)	Función o señal discreta de Voltaje
PID	Ley de control lineal de tipo proporcional-integral-derivativo
RPM, mRPM	Revoluciones por Minuto, mili-Revoluciones por Minuto
A, mA	Amperes, miliAmperes
Nm, mNm	Unidad de torque en Newton-Metro, miliNewton-Metro
H, $\mu$ H	Unidad de Inductancia en Henrios, microHenrios
mm	Milímetros
cm	Centímetros
$cm^3$	Centímetros cúbicos
gr, mgr	Gramos, Miligramos
dl	Decilitros
<b>GLOSARIO</b>	
Glucemia	Rango normal de concentración de glucosa en sangre entre 70-120 mg/dl
Hiper glucemia	Nivel alto de concentración de glucosa en sangre mayor a 180 mg/dl
Hipoglucemia	Nivel bajo de concentración de glucosa en sangre menor a 70 mg/dl

# Notación

$\vec{A}, \vec{B}, A, B, A_r, A_\alpha, A_\theta$	Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ , sus magnitudes y sus componentes en C-T
$F, F^{-1}$	Denota una función continua y su inversa
$F_s$	Fuerza externa por unidad de masa actuando en especie S
$h_i, h_j, h_k$	Factores de escala en coordenadas ortogonales generales
$\vec{L}, L, L_i$	Una distancia vectorial, su magnitud y sus componentes
$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$	Vector unitario Tangente, Normal y Binormal (Triedro de frenet)
P	Presión
$r, \alpha, \theta$	Valores de las componentes $L_i$ en coordenadas toroidales
$r, \alpha, s$	Valores de las componentes $L_i$ en coordenadas espiroidales
LETRAS GRIEGAS:	
$\delta$	Radio de curvatura para tubos con curvatura constante
$\delta_C$	Radio de curvatura para tubos con curvatura variable
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$r, \zeta$	Componente radial en coordenadas polares, C-T, C-E
$\alpha$	Ángulo en coordenadas toroidales
$\theta$	Ángulo en coordenadas polares y toroidales
$\mu$	Viscosidad
$\rho$	Densidad
$\nu$	$\mu/\rho$ , Viscosidad cinemática
$\psi$	Función de flujo
$\Delta$	Operador nabla o del
$\Delta^2$	Operador Laplaciano
$R$	Conjunto de los números reales
$N$	Conjunto de los números naturales

# Resumen

Esta tesis trata sobre el modelado de la mecánica de fluidos en un Actuador/Dosificador (AD) que formará parte de una bomba automática para suministrar de medicamento. La geometría del AD propuesto se basa en tubos de curvatura variable siguiendo en su línea central una espiral de Arquímedes. Lo novedoso de este diseño radica en la doble funcionalidad del AD, porque permitirá contener y a la vez dosificar el medicamento. Las dimensiones del recipiente (el cual tiene la capacidad de contener 1 mL de medicamento) son de 32.8 cm de longitud con un diámetro de 2 mm. Así, las dimensiones totales del AD incluyendo el recipiente son de 6.89 cm de base x 6.80 cm de altura x 1.5 cm de espesor.

Por otro lado, los pasos seguidos para modelar la mecánica de fluidos en este trabajo fueron:

1. Primero, aproximando secciones de la espiral por medio de toros de curvatura constante; se extendió el modelo de Dean [20], el cuál aplica para fluidos incompresibles fluyendo a través de tubos con curvatura constante, al caso de fluidos compresibles.
2. Segundo, considerando el radio de la espiral variable se modela la mecánica del fluido en el AD y se extiende el modelo de Dean-Germano [25], el cuál aplica para fluidos incompresibles fluyendo en tubos con torsión y curvatura constante, al caso de tubos con curvatura variable.

Por último, la importancia de los modelos obtenidos radica no solo porque permitirá simular la mecánica del fluido dentro del AD, sino por sus aplicaciones potenciales en diferentes áreas de la ingeniería. Por ejemplo, el modelo obtenido en el paso 1 permite modelar la mecánica de fluidos tanto de líquidos como de gases fluyendo a través de tubos curvos de curvatura constante.

Palabras clave: Modelación matemática, Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas curvilíneas, Flujo de fluidos en tubos curvos, Dosificadores de medicamento.

# Abstract

This thesis deals with the modeling of the fluid mechanics within an Actuator/Dispenser (AD) which will be part of a automatic pump to supply a medicine. The proposed AD geometry, is based in curved pipes of variable curvature that follow up an Archimedes spiral in their center line. The innovation of this design lies in the double functionality of the AD, because it will be both the container and dispenser of the medicine. The container, which has a capacity of one milliliter (mL) of medicine, is 12.9 inches long and has a diameter of 0.78 inches. The total AD dimensions, including the container, are 2.71 inches x 2.67 inches x 0.59 inches.

On the other hand, the followed steps for modeling the fluids mechanics in the AD were:

1. First, approximating sections of the spiral by means of the torus with constant curvature. The classical Dean's model [20], which describes incompressible fluids flowing across pipes with constant curvature, is extended to the compressible fluid case.
2. Second, considering the variable radius of the spiral, we extended the Dean-Germano model [25], which describes incompressible fluids flowing within pipes with constant curvature and torsion to the variable curvature case.

To conclude, the obtained models are not only important for modeling the fluid mechanics within the AD, but they have also potential applications in different areas of engineering. For instance, the model obtained in the step one, lets modeling the fluid mechanics either gases or liquids flowing across of curved pipes with constante curvature.

Keywords: Mathematical modeling, Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates, Flow in curved pipes, Medicament dispenser.

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo, se hablará brevemente de la Diabetes Mellitus como una motivación al problema que ocupa la presente investigación. Sobre todo, en lo que se refiere al cálculo y suministro del medicamento que requieren los pacientes para controlar el nivel de glucosa en sangre. En este sentido, se discute brevemente las bombas comerciales que existen para suministrar medicamento y se explica la necesidad de contar con un dispositivo de suministro automático con geometría de tubos curvos. Por último, una vez planteado el problema y dado que la geometría del AD propuesto en este trabajo involucra tubos con curvatura variable, al final del capítulo, se da una breve revisión del estado del arte en lo que respecta a la mecánica de fluidos en tubos curvos.

### 1.1 Nuestra motivación: La enfermedad de la Diabetes Mellitus Tipo 1

A la deficiencia en la producción ó utilización de la hormona llamada **insulina** se le conoce como Diabetes Mellitus (DM). Esta hormona posee múltiples funciones en el cuerpo. Entre las más importantes se encuentra promover el ingreso de la glucosa en las células. En particular, si existe carencia en la producción y/o utilización de la insulina, entonces la glucosa obtenida de los alimentos no puede ser metabolizada y en consecuencia, se genera un exceso de glucosa en la sangre llamado clínicamente como hiperglucemia y que corresponde a valores en la concentración de glucosa plasmática en ayuno mayores a 126 mg/dl [4]. Esta situación no es recomendable porque si persiste por periodos prolongados de tiempo puede derivar en múltiples trastornos fisiológicos en el cuerpo del paciente, como por ejemplo cansancio, ansiedad, hambre insaciable, sed excesiva, excreción constante de orina entre otros [1]. Las clases más comunes de DM de acuerdo a la descripción dada en las referencias [2] y [4] son: (i) Diabetes Mellitus Tipo 1 (DMT1) y (ii) Diabetes Mellitus Tipo 2 (DMT2). La forma más frecuente es la del tipo 2 con un 90 % del total de los casos de diabetes en México y se le relaciona directamente con la obesidad, malos hábitos alimenticios y falta de ejercicio. La DMT1, aparece con mayor frecuencia en personas menores de 30 años, aunque existe evidencia que puede aparecer a cualquier edad [3] [4]. La principal característica de este tipo de enfermedad es la incapacidad del cuerpo para producir insulina. Razón que la convierte en la más peligrosa de las dos porque, para poder mantener la concentración de

glucosa en niveles similares al de una persona sana, los pacientes deben suministrarse la insulina de manera externa y en dosis precisas.

### **1.1.1 Fundamentos en la dosificación de insulina**

La administración de cualquier medicamento se establece desde su prescripción, la cual debe definir su dosis, la vía de administración, el lapso de tiempo entre dosis, así como la duración del tratamiento. Normalmente estas indicaciones son responsabilidad del médico que prescribe. Sin embargo, en los casos de pacientes con DMT1; la responsabilidad de seguir la prescripción establecida es tarea del paciente. Así éste debe aprender a autoadministrarse las dosis y en tiempo requerido a fin de controlar el nivel de glucosa en sangre. Para ello el paciente debe conocer entre otros lo siguiente [6]:

1. Las condiciones de almacenamiento de la insulina.
2. Cómo preparar las combinaciones de insulina entre las diferentes formulaciones que existen.
3. La técnica y los lugares de administración de la insulina.
4. Cómo determinar las dosis de insulina a suministrarse de acuerdo a la ingesta y/o actividad física.
5. Fecha de caducidad del medicamento.
6. El tiempo de respuesta de la insulina.
7. Duración del efecto máximo de la insulina utilizada.
8. Los lapsos en los que debe suministrarse las dosis.
9. Los efectos secundarios y qué hacer en caso de sobredosis.

Todas estas tareas deterioran la calidad de vida del paciente y dificultan el control de la DMT1. Cabe señalar que los casos en que el paciente es un niño, los que deben aprender y vigilar que se cumplan todas estas indicaciones son los padres.

Por otro lado, a pesar de que estos protocolos aseguran que los pacientes se administren las cantidades de insulina lo más cercano posible a sus necesidades, las dosis requeridas por el organismo, son normalmente diferentes a lo prescrito por el médico, principalmente porque éstas son calculadas de acuerdo a reglas eurísticas y basadas en la experiencia del médico. Esta diferencia, entre lo requerido y lo suministrado, puede provocar que a largo plazo existan complicaciones en la salud de estos pacientes producto de las insulinemias mal controladas [1], [5].



## 1.1.2 Comentarios acerca del cálculo y suministro de la insulina

De acuerdo a los escenarios discutidos en la sección anterior se observan tres problemas importantes que deben resolver los pacientes con DMT1 a fin de poder lograr el control de su enfermedad.

1. El primero es medir sus concentraciones de glucosa en la sangre
2. El segundo es calcular las dosis exactas que debe suministrarse para normalizar sus concentraciones altas de glucosa
3. El tercero e igual de importante, consiste en realizarse el suministro preciso del medicamento

En este punto considero importante comentar que el proceso de regulación de los niveles de glucosa en un paciente sano no es simple. El páncreas quién es el órgano encargado de sensar la glucosa, producir y suministrar la insulina, posee tres tipos de células que son las encargadas de realizar dichas funciones. Estas células realizan la producción, el monitoreo, la inhibición y suministro de las hormonas llamadas insulina y glucagon que son las que permiten regular, tanto los niveles altos como los niveles bajos de glucosa en la sangre. A este mecanismo de regulación en el área clínica se le conoce como homeóstasis de la glucosa y es precisamente cuando este mecanismo de autorregulación se rompe que aparece la enfermedad conocida como DM. Para el caso de la DMT1 donde la producción de insulina es casi nula, el suministro debe ser externo. De tal manera que para reestablecer la homeostasis de la glucosa, una alternativa es usar la teoría de control para proveer los mecanismos de regulación de manera externa. Este concepto es conocido como páncreas endócrino artificial y es mostrado en la Figura 1.1. Aquí, el objetivo de control radica en mantener la concentración de glucosa de un paciente con DMT1 en niveles similares al de una persona sana, el cual se toma como referencia. En esta Figura el bloque llamado controlador es el que calcula las

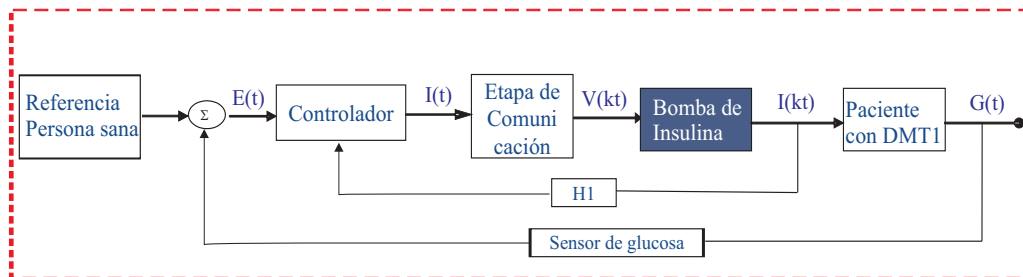


Figura 1.1: Diagrama de bloques del páncreas artificial. El bloque en color obscuro denota la parte donde se incrusta este trabajo.

dosis continuas de insulina que debe suministrarse el paciente a partir de medir sus concentraciones de glucosa por medio de un sensor de glucosa. La señal  $I(t)$  es enviada a una etapa de comunicación que traduce las dosis de insulina en un lenguaje que pueda interpretar la bomba que es quien realiza el suministro del medicamento. H1 es un sensor que le permite al controlador corroborar que el suministro realizado por la bomba logre el objetivo de control.

De esta manera, observando a la homeostasis de la glucosa como un sistema de control en lazo cerrado. Recientemente diversas compañías y grupos de investigación científica están realizando investigaciones alrededor del concepto del páncreas artificial tanto en el desarrollo de algoritmos inteligentes, bombas de infusión, como de sensores no invasivos para la medición de glucosa. En lo referente al desarrollo de algoritmos que calculan las dosis de insulina, existen varios en la literatura como por ejemplo los propuestos por [8], [9], los cuales son potencialmente realizables mediante el uso de dispositivos automáticos para suministro de insulina [17]. Para esto es importante contar con un dispositivo portátil de infusión automático de insulina que permita el suministro exacto, pero que además pueda ser usado en lazo cerrado como se muestra en la Figura 1.1. Cabe mencionar que, a pesar de que ya existen bombas comerciales que suministran la insulina de manera precisa estas poseen limitantes para ser usadas en un lazo retroalimentado, principalmente porque no han sido diseñadas para tal fin. En la siguiente subsección se explican algunas ventajas y desventajas de estas bombas comerciales y se justifica la necesidad de contar con un dispositivo automático que pueda ser usado en lazo cerrado para proveer una terapia alternativa a la tradicional que contemple el suministro automático de insulina en dosis variantes en el tiempo.

### 1.1.3 Bombas comerciales para el suministro de insulina

Actualmente existen diversos fabricantes de bombas comerciales para suministrar insulina entre los más importantes destacan:

1. Animas corporation, modelo de bomba "Animas 2020", país de origen USA[11]
2. Deltec company, modelo de bomba "Cozmo® MN", país de origen USA[12]
3. Disetronics inc., modelo de bomba "Spirit® IN", país de origen Suiza[13]
4. Minimed Company, modelo de bomba "Paradigm 722 CA", país de origen USA[14]
5. Insulet Corporation, modelo de bomba "OmniPod MA", país de origen USA[15]
6. Sooil USA Company, modelo de la bomba "DiabecareIIS CA", país de origen USA[16]

El cuadro 1.1 muestra los modelos actuales de cinco bombas de las compañías arriba mencionadas, así como las características técnicas de cada una de ellas. Las dimensiones de la bombas son dadas en mm donde "bxh" corresponde a la base y a la altura de la bomba, y el ancho al espesor de la misma. El volumen total de la bomba es dado en centímetros cúbicos ( $cm^3$ ), el peso de las bombas dada en gramos no considera el peso de las baterías ni de la insulina al estar lleno el recipiente. La capacidad de este recipiente esta dada en unidades de insulina (UI), donde 100 UI equivalen a 1 mililitro (mL) de medicamento. En estas bombas, el incremento basal se considera como la dosis mínima que puede realizar la bomba y comúnmente se mide en miliunidades de insulina (mUI), donde una mUI equivale a  $1 \times 10^{-3}$  UI. Por ejemplo el modelo paradigm® de la compañía minimed solo puede realizar dosis mínimas de 100 mUI. Por otro lado, la entrega basal se refiere al tiempo mínimo en que la bomba puede suministrar determinada dosis y no vuelve a suministrar otra hasta que haya transcurrido dicho tiempo. Por ejemplo el modelo Cosmos de la compañía Deltec puede

Modelo	Animas 2020	Cozmo®	Spirit®	Paradigm 722	DiabecareIIS
Dim. bxh(mm)	50.8 x 82.55	46 x 80	81 x 56	51 x 91	46 x 77
Dim. Ancho(mm)	21.59	24	20	20	19
Vol.(cm <sup>3</sup> )	90.54	83	90	92	67
Peso [gr]	110.5	76.5	79.38	107.73	54
Recipiente(UI)	200u	300u	315u	300u	300u
Incremento Basal	0.025u	0.05u	0.1u	0.05 u	0.01
Entrega Basal	c/ 3 min	c/ 3 min	c/ 3 min	c/ 10 min	c/ 4 min
Batería	AA x 1	AAA x 1	AA x 1	AAA x1	1/2 AA
Motor	CD	CD	CD	CD	CD

Cuadro 1.1: Características técnicas de algunas bombas comerciales.

suministrar dosis cada 3 minutos.

La Figura 1.2 muestra el modelo Animas 2020 de la compañía Animas corporation; como puede observarse su tamaño es similar al de un teléfono móvil y es capaz de suministrar incrementos de 25 mUI cada tres minutos. La mayoría de estas bombas tienen en su interior



Figura 1.2: Bomba comercial para suministro de insulina.

un compartimento destinado a colocar el depósito de insulina, el cual se recarga de manera similar al de una jeringa convencional y para lograr el suministro, se usa un micromotor que provee, la energía mecánica para desplazar el émbolo de la jeringa y así lograr dosificar el medicamento. Para recibir el suministro de forma continua, el paciente debe tener una conexión permanente a través de un catéter hacia el tejido subcutáneo, comúnmente colocado en el área del abdomen. Las ventajas que presentan estas bombas es su tamaño y el suministro preciso. La principal desventaja que presentan es su costo elevado, por ejemplo el modelo paradigm 522, cotizada en agosto del 2008 tenía un costo de 6000 dolares americanos. Otra desventaja que presentan desde el punto de vista del usuario, es que las dosis que suministran deben ser calculadas y programadas por los pacientes ántes de cada comida. Por esta razón y para evitar sobredosis en los pacientes, éstas bombas se venden siempre y

cuando exista autorización médica y solo después de que la compañía se ha asegurado que el usuario ha sido entrenado por un profesional de la salud para el uso correcto del dispositivo. La Figura 1.3 muestra el tipo de suministro que realizan estas bombas y consiste de una tasa constante de insulina de 22 mUI y de tres dosis mayores (conocidas como bolos) que el paciente calcula y programa en la bomba ántes de cada comida y de acuerdo al tipo de ingesta que realizará.

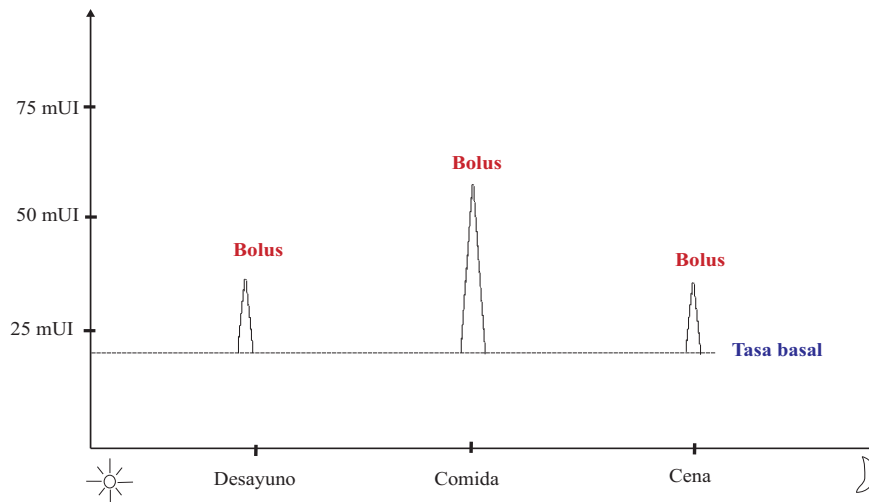


Figura 1.3: Curva de suministro realizado por este tipo de bombas comerciales.

Por otro lado y apesar de estas limitantes, actualmente existen estudios que demuestran que el uso de una terapia continua de infusión subcutánea de insulina por medio de estas bombas mejoran el control de la DMT1 con respecto a la terapia tradicional [5]. No obstante, dichos estudios también revelan casos frecuentes de hipoglucemias<sup>1</sup> durante la fase del entrenamiento en la cual el paciente aprende el uso correcto de éstos dispositivos [7].

Estas complicaciones se deben entre otros factores a que los reajustes en las dosis necesitan ser reprogramados constantemente, ya que éstas bombas no cuentan con un sistema de retroalimentación para hacer los ajustes automáticos en el suministro. Por esta razón y para proveer una terapia alternativa a la tradicional, el objetivo de este proyecto de tesis consiste en diseñar y en un futuro próximo a instrumentar una bomba (potencialmente portátil) para el suministro de insulina pero que tenga la capacidad de funcionar en lazo cerrado con los algoritmos de control propuestos en la literatura [9]; para que de esta manera no requiera ser reprogramada por el paciente.

#### 1.1.4 Suministro continuo de insulina

Por otra parte y siguiendo el concepto de páncreas artificial, recientemente algunos grupos de investigación como por ejemplo el de Ruiz-Velazquez y colaboradores [9], han propuesto que una terapia con suministro continuo pero además con tasas variantes en el tiempo,

<sup>1</sup> Condición definida como niveles muy bajos de glucosa en sangre  $\leq 70$  mg/dl.

similar al que realiza un páncreas humano sano puede ayudar a mejorar el control de la concentración de glucosa en los pacientes con DMT1 y por consiguiente reducir las enfermedades asociadas con esta enfermedad. La Figura 1.4 muestra las dosis de insulina calculadas por el algoritmo de control reportado por Ruiz-Velázquez et.al. Esta curva continua, representa la cantidad total de insulina que se debe suministrar una persona con DMT1 durante las primeras 12 horas del día y de esta forma poder regular su concentración de glucosa en sangre en niveles similares al de una persona sana. Cabe mencionar que esta gráfica fue

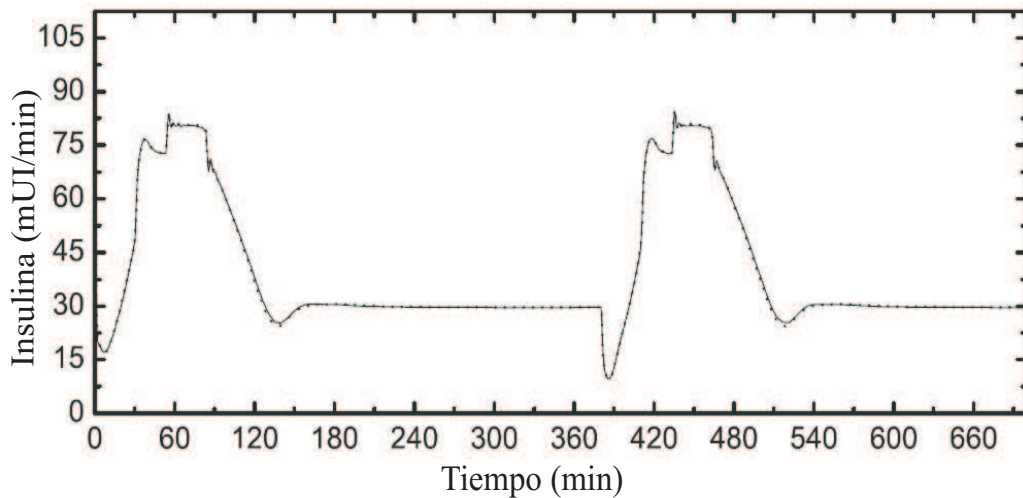


Figura 1.4: Dosis de insulina calculada por el algoritmo de control reportado por Ruiz-Velázquez et.al [9].

tomada con permiso del autor y aquí solo se expone para ilustrar que las tasas de medicamento que deberá suministrar el AD serán variantes en el tiempo y con tasas máximas de dosificación de aproximadamente 78 mili Unidades de Insulina (mUI) por minuto.

### 1.1.5 Características que debe reunir un AD

Una vez identificadas las características que debe reunir el dosificador que será propuesto en este trabajo se plantearon los siguientes objetivos a desarrollar en esta tesis:

1. El AD diseñado deberá ser pequeño y ligero para permitir en una etapa posterior desarrollar una bomba portátil y que pueda ser usada en lazo cerrado con los algoritmos de control mencionados.
2. El micromotor del AD deberá permitir suministrar tasas de insulina variantes en el tiempo para emular la secreción pancreática de insulina.

La Figura 1.5 esboza un diagrama general, donde se muestra la posición que ocupará el AD en la bomba. En este diagrama la ley de control de tipo PID, es la que se encarga de controlar la velocidad angular del micromotor para garantizar que el AD realice el suministro preciso. La etapa de comunicación permite traducir la cantidad de insulina  $I(t)$  calculada por el algoritmo de control ver Figura 1.1 a un Voltaje discreto  $V(kt)$  para ser suministrado

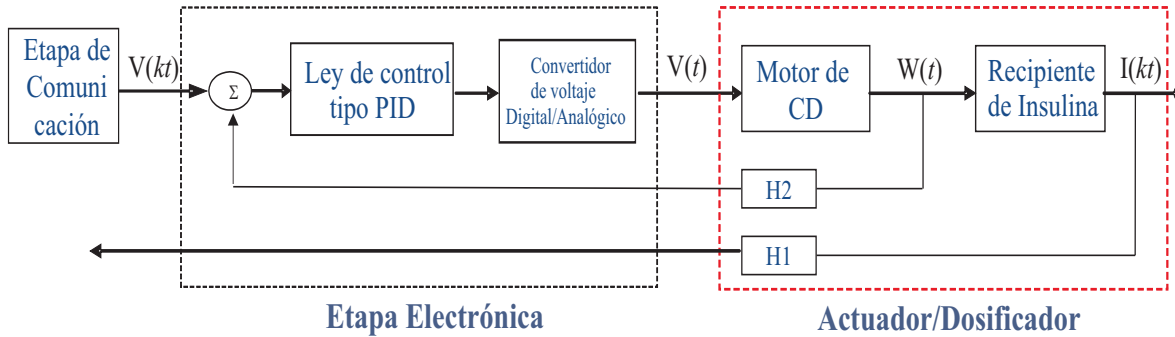


Figura 1.5: Diagrama general que exhibe internamente los elementos que conforman el bloque en color obscuro de la Figura 1.1 y donde se muestra también el lugar que ocupará el AD en la bomba.

al motor. La etapa de conversión permite convertir este voltaje discreto a voltaje continuo para controlar la velocidad angular  $W(t)$  del minimotor. El bloque H2, es un decodificador óptico que permite medir la velocidad angular del minimotor y H1 es una etapa que sensorará la posición del balín para indirectamente correlacionar el suministro de insulina  $I(kt)$ .

Aquí, es importante señalar que el diseño correspondiente a la etapa electrónica ya ha sido desarrollada en otros trabajos como por ejemplo [17], para más detalles acerca del control de la velocidad de un motor ver [18].

De esta manera, el trabajo desarrollado en esta tesis corresponde a la parte mecánica y consiste en el diseño del AD y con el fin de poder garantizar un suministro preciso al modelado de la mecánica del fluido a ser suministrado.

### 1.1.6 Geometría propuesta para el AD

La Figura 1.6 muestra la geometría del AD mecánico que ha sido seleccionado para esta bomba. Éste actuador consta de un tubo circular enrollado en forma de una espiral simétrica que, posee a su vez un balín metálico (integrado) que será movido por medio de un imán permanente para proveer el arrastre y suministro del fluido.

El principio de operación de esta etapa electromecánica será la siguiente: Mediante un imán permanente adjunto a la flecha de un motor de corriente directa, se pretende controlar el movimiento del balín y por consiguiente el desplazamiento del fluido. De esta forma el problema de control radica en controlar la velocidad angular del minimotor, para indirectamente controlar la dosificación (variante en el tiempo) del fluido. Para esto se asume que no existe fuga entre el balín y las paredes del tubo.

La espiral utilizada es una espiral de Arquímedes y se le define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto fijo a velocidad angular constante.

En coordenadas polares  $(r, \theta)$ , la espiral de Arquímedes es descrita por la siguiente ecuación:  $E_r = \beta_1 + \beta_2\theta$ , con  $\beta_1$  y  $\beta_2$  números reales; y  $\theta$  dado en radianes. El parámetro  $\beta_1$  controla el origen de la espiral, mientras que  $\beta_2$  controla la distancia entre giros sucesivos, y son iguales a  $2\pi\beta_2$ . Esta espiral de Arquímedes tiene dos trazos, uno para  $\theta > 0$  y otro para

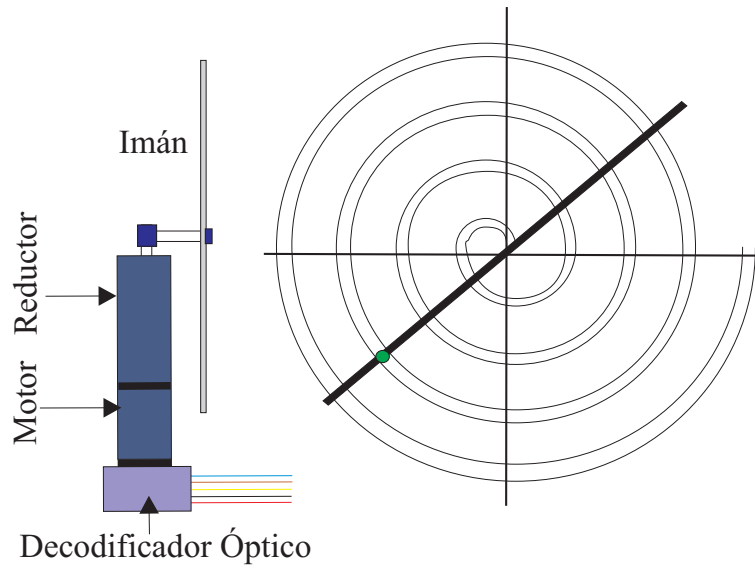


Figura 1.6: Geometría propuesta para el AD de la bomba.

$\theta < 0$ . Los dos brazos están conectados en el origen y en la Figura 1.6 sólo se muestra uno de ellos que aplica para valores positivos del ángulo  $\theta$ . La Figura 1.7 muestra dos espirales

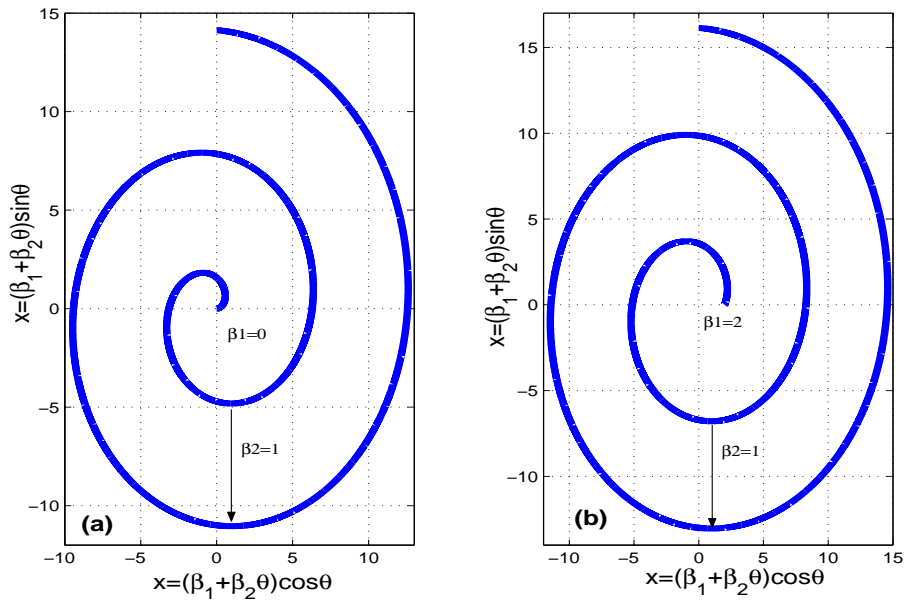


Figura 1.7: Espirales de Arquímedes, (a) con parámetros  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = 1$  (b) para  $\beta_1 = 2$  y  $\beta_2 = 1$ .

para el mismo valor de  $\beta_2$ , pero con diferente valor de  $\beta_1$ , donde se puede apreciar que este parámetro determina el inicio de la espiral. Por lo tanto  $\beta_1$  podría usarse como parámetro de diseño para definir el inicio del actuador y  $\beta_2$  como el parámetro que defina la distancia entre vueltas que permita reducir el tamaño final del AD.

## 1.2 Planteamiento y justificación del problema

Otra de las razones por las que se eligió la geometría de una espiral es porque permite convertir directamente movimiento rotacional a movimiento longitudinal. Por estas características las espirales simétricas y logarítmicas son comúnmente utilizadas para fabricar levas en transmisiones mecánicas y automotores. En nuestro caso, dicha geometría nos evitará colocar etapas adicionales principalmente por la doble funcionalidad del AD, ya que servirá como un recipiente para la insulina y además como el actuador que la suministrará. Otra ventaja de este diseño es, que no se requerirán etapas mecánicas para la conversión del movimiento rotacional del motor a movimiento lineal como es realizado en las bombas comerciales. Estas características podrían reflejarse en una reducción tanto del peso como del tamaño final del dispositivo, permitiéndonos colocar las bases hacia la instrumentación de una bomba portátil.

Por otro lado, aunque se gana reducción en el tamaño del actuador con la espiral seleccionada; uno de los principales retos en el diseño del AD mostrado en la Figura 1.6 es comprender la mecánica de fluidos en la geometría propuesta. Principalmente porque los requerimientos en la tasas de dosificación hacen necesario comprender y modelar la mecánica del fluido que se va a suministrar; esto con el fin de poder garantizar un suministro preciso del medicamento. Por esta razón parte fundamental del trabajo desarrollado en esta tesis consiste en la modelación de la mecánica del fluido, fluyendo a través de este tubo.

### 1.2.1 Antecedentes: Mecánica de fluidos en tubos curvos de curvatura constante

Actualmente es bien sabido que en un tubo recto el gradiente de presión es proporcional a la primera potencia de la velocidad media del fluido [29]. Sin embargo, como se verá mas adelante, esta relación no se cumple para tubos curvos. Por esta razón y dada la geometría del AD que en este trabajo es propuesto, resulta necesario modelar los fenómenos y las características de los perfiles de flujo que se desarrollan al usar tubos curvos. Así, en esta subsección se hará una breve revisión del estado del arte en lo que respecta al modelado de la mecánica de fluidos en tubos curvos de sección transversal circular.

Uno de los pioneros en el estudio experimental de los perfiles de flujo en tubos curvos fue Eustice en 1907 [19]. En sus experimentos, Eustice encontró que para un determinado gradiente de presión, existe un incremento en la resistencia al paso del fluido conforme se aumentaba la curvatura de los tubos. Dicha resistencia se refleja por una disminución del flujo total pasando a través del tubo. También encontró que dicho incremento es proporcional al número de vueltas de la hélice y a la magnitud del radio de curvatura del tubo. Algo más que Eustice concluyó, es que no existía una velocidad crítica<sup>2</sup> para tubos curvos análoga a la que existe para tubos rectos. Incluso descartó que esta ausencia de velocidad crítica dependerá de la deformación de la sección transversal del tubo al ser curvado.

#### Comentarios acerca del modelo de Dean

---

<sup>2</sup> La velocidad crítica de un fluido se define como la velocidad mínima a la cual el flujo deja de comportarse de forma regular (laminar) y fluye de forma errática, lo que se conoce como turbulencia.



En el año de 1927, basado en el trabajo previo de Eustice, Dean [20] obtuvo un modelo matemático que reproducía cualitativamente la mecánica de fluidos en tubos curvos de curvatura constante. En este trabajo [20], Dean demostró analíticamente que en un tubo curvo la curvatura de las líneas de flujo de la velocidad axial (en régimen laminar) son proporcionales al incremento en la velocidad del fluido. Ésto, origina que las trayectorias de la componente axial de la velocidad cambien su dirección siguiendo la curvatura del tubo. Más aún, cuando ésta velocidad se incrementa, las componentes radial y tangencial de la velocidad del fluido comienzan a formar un flujo secundario, el cual describe dos vórtices simétricos en contra flujo en el plano formado por estas velocidades y que son los responsables del efecto en el incremento de la resistencia al paso del flujo en un tubo curvo. Estos resultados permitieron explicar los efectos medidos experimentalmente por Eustice.

Posteriormente en [21], Dean demostró matemáticamente la relación que existe entre el gradiente de presión y la velocidad del fluido con la curvatura del tubo. De aquí encontró que dicha relación dependía de una simple variable conocida hoy en día como el número de Dean, el cual es una variante del número de Reynolds y que viene dado por:  $K = 2n^2(\delta)$  donde  $n$  es el número de Reynolds<sup>3</sup> y  $\delta = a/R$ , es la curvatura del tubo, definida como el cociente de "a" el radio de la sección transversal del tubo y "R" el radio del círculo donde el tubo es enrollado.

De este segundo trabajo Dean concluyó al igual que Eustice de que no existía una velocidad crítica en los tubos curvos; la razón de esta diferencia decía, se debía a que en un tubo recto el gradiente de presión necesario para mantener una tasa de flujo dada, es menor que aquel requerido cuando la velocidad crítica es alcanzada. La necesidad de una mayor presión se debe al cambio abrupto que experimenta el movimiento del fluido. Esto porque en régimen turbulento el movimiento del fluido tiene componentes laterales las cuales favorecen una pérdida de energía y de presión. En un tubo curvo, por el contrario, este movimiento lateral (flujo secundario), ya existe mucho antes de que la velocidad crítica sea alcanzada.

En 1929 White [22], midiendo la resistencia al paso del flujo confirmó experimentalmente la existencia de una velocidad crítica en tubos curvos. Él determinó que uno de los efectos provocados por la curvatura del tubo es incrementar la velocidad crítica a la cual aparece la turbulencia. En ese mismo año, basado en el trabajo de White, Taylor [23] pudo corroborar usando un haz de tinta la turbulencia en tubos curvos; solo que ésta era mucho mayor a aquella encontrada por Reynolds para tubos rectos. Por citar un ejemplo Taylor encontró en uno de sus experimentos ( $\delta = 1/18$ ) que la velocidad crítica a la cual aparece turbulencia es 2.8 veces mayor; que la velocidad crítica encontrada para un fluido en un tubo recto sometido al mismo gradiente de presión y con la misma longitud y sección transversal.

Posteriormente en los años 60s y 80s y partiendo del trabajo de Dean, muchos investigadores se dieron a la tarea de realizar aportaciones, tanto en la obtención de aproximaciones a las soluciones analíticas del modelo de Dean como a su resolución numérica empleando diferentes métodos numéricos, además de proponer diversas geometrias considerando tubos cuadrados, tubos con sección transversal ovalada etc. Sin embargo, en todos estos trabajos siempre se partió de las ecuaciones de Dean y considerando tubos con curvatura constante. Una aportación importante en esta área fue dada por Germano en 1981 [24]. Donde obtuvo un modelo matemático que describía la mecánica de fluidos en tubos helicoidales; es decir

---

<sup>3</sup> Definido por  $n = 2a(\bar{v}\rho/\mu)$ . Donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y viscosidad del fluido,  $\bar{v}$  es la velocidad media de un fluido circulando por un tubo recto de igual dimension y sometido al mismo gradiente de presión.

considerando las coordenadas de una hélice con radio de curvatura y torsión constante. En ese trabajo Germano extendió las ecuaciones de Dean para el caso helicoidal y realizó un análisis cuantitativo de su modelo similar al realizado por Dean. De aquí encontró que la torsión de la hélice no influía o no tenía un efecto de primer orden en el movimiento del fluido, como lo tiene el efecto de la curvatura en el modelo de Dean. En un segundo trabajo [25], Germano consideró un sistema similar al primero, pero de sección transversal elíptica; de estos esfuerzos finalmente encontró una dependencia de primer orden de la torsión con la mecánica del fluido para tubos helicoidales.

Por último, considero importante señalar que en toda esta revisión se han resaltado los resultados pioneros de Dean y de Germano, principalmente porque es de estos trabajos de donde se partirá para modelar la mecánica de fluidos en el AD.

### 1.2.2 Suposiciones hechas en este trabajo

1. El fluido modelado es de tipo newtoniano, no-compresible y cuyo estado o perfil de flujo se encuentra completamente desarrollado<sup>4</sup>.
2. Se considera que el área de la sección transversal del tubo no cambia cuando éste es curvado, y que en caso existir deformación, ésta puede ser despreciable al no influir ó incrementar la resistencia al paso del fluido.
3. Las condiciones de frontera se concideran de no deslizamiento en las paredes del tubo; es decir, que las componentes del vector velocidad en la paredes del tubo es cero  $u = v = w = 0$ .
4. Existe una velocidad máxima en la dirección axial (en la dirección del flujo), además de que la magnitud de la velocidad radial y tangencial son similares en el centro del tubo.

---

<sup>4</sup> Definiendose como el estado en el cuál las velocidades medias del fluido son paralelas a las paredes del tubo y dependen solo de las coordenadas normales a esta superficie.

## Capítulo 2

# Diseño del AD usando la geometría de un toro y de una espiral

En este capítulo se diseñará el AD de la bomba considerando la geometría de un toro y posteriormente la de una espiral simétrica. El recipiente de insulina del actuador contendrá  $1ml \approx 1cm^3$  de medicamento, que es la cantidad promedio que un paciente diabético tipo 1 puede llegar a requerir durante un día completo. En este diseño se pretende que el recipiente sea desechable al momento de que el paciente se haya suministrado el total de la insulina.

### 2.1 Caso I: Diseño del AD usando la geometría de un toro

Los primeros parámetros de diseño encontrados para el AD son el diámetro y la longitud del tubo. Los cuales se obtienen de la ecuación del volumen de un cilindro, dada por

$$L_t = \frac{V_i}{\pi a^2}. \quad (2.1)$$

De esta ecuación se seleccionan las dimensiones del cilindro de tal forma que pueda contener el volumen de un mililitro ( $mL$ ) de medicamento. Donde  $L_t$  denota la longitud del tubo en milímetros ( $mm$ ),  $V_i$  es el volumen a contener en el tubo en milímetros cúbicos ( $mm^3$ ) y  $a$  es el radio de la sección transversal del tubo en  $mm$ . De esta forma una vez fijado el volumen a contener y el diámetro del tubo se obtiene directamente la longitud del tubo.

Por otro lado, sabemos que la longitud de una curva parametrizada en el plano viene dada por la siguiente expresión.

$$L_T = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d}{dt} C(t) \right| dt, \quad (2.2)$$

donde  $t \in [t_0, t_1]$  es el parámetro con el que se parametriza la curva. Para nuestro caso, la línea central del toro, se toma como una circunferencia de radio  $R_T$  y parametrizada mediante el ángulo  $\theta$  y dada por la siguiente curva  $C(\theta) : (R_T \cos\theta, R_T \sin\theta)$ , de tal manera que una vez calculada la longitud del tubo mediante la ecuación 2.1 y haciendo uso de la ecuación 2.2, se puede obtener el radio del toro mediante la siguiente expresión  $R_T = \frac{L_T}{\theta_a - \theta_b}$ , donde  $\theta_a$  es escogido en cero y  $\theta_b$  igual a  $2\pi$  determinando una vuelta completa de la circunferencia.

El cuadro 2.1 muestra un resumen de los cálculos realizados para el diseño del recipiente

Vol mL	$a$ mm	Diam mm	Long cm	$R_T$ cm	$Diam_T$ cm	$Re(D = 96)$ Adim	$Re(D = 600)$ Adim	$\bar{v}$ m/s
1	1	2	31.83	5.06	10.1	120.72	754.52	44.30
1	1.5	3	14.14	2.25	4.50	69.31	433.2	16.95
1	2	4	7.95	1.26	2.53	42.59	266.4	7.81

Cuadro 2.1: Parametros de diseño del AD considerando la geometría de un toro.

del AD que podrá contener un  $mL$  de insulina. Los parámetros adimensionales denotados como  $Re(D = 96)$  y  $Re(D = 600)$  representan los números de Reynolds que se obtienen al sustituir los valores del radio del tubo  $a$  y el radio del toro  $R_T$  en la siguiente formula  $D = 4Re(\frac{2a}{R_T})^{1/2}$  y considerando un valor de  $D=96$  y  $D=600$ . En esta expresión "D" es una variante del número de Dean, que relaciona la constante de McConalogue [27] con el número de Reynolds. Por otro lado, la última columna de la tabla representa la velocidad promedio  $\bar{v}$  dada por la siguiente relación  $\bar{v} = Re\frac{\nu}{d}$ , con  $\nu$  la viscosidad cinemática y  $d$  el diámetro del tubo.

Por ejemplo, para el caso en que  $a = 2mm$  y  $R_T = 50.6mm$  con  $D = 600$ , se encuentra que

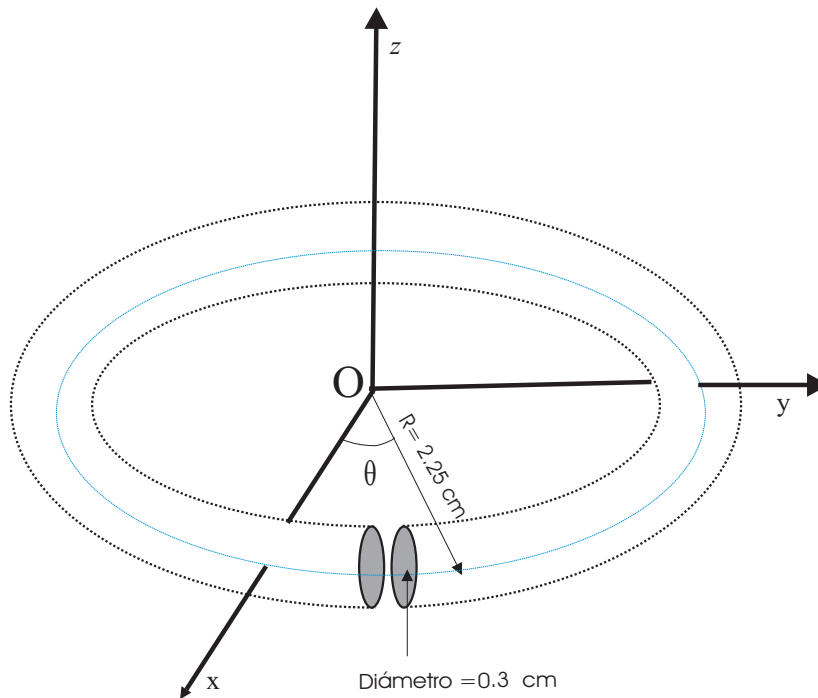


Figura 2.1: Diseño del AD usando las dimensiones del toro calculadas en el cuadro 2.1.

el número de Reynolds  $Re = 754.52$ . Ahora usando este valor, se puede calcular la velocidad promedio del fluido sustituyendo el valor de  $\nu$  similar a la viscosidad cinemática del agua y

tomando a  $d = 0.2\text{cm}$  se obtiene una  $\bar{v} = 44.30\text{cm}/s$ . Con esto se puede garantizar que para velocidades promedio en la dosificación del medicamento menores a este valor no habrá turbulencia. La Figura 2.1, muestra el diseño del AD; donde se ha seleccionado un tubo de  $0.3\text{ cm}$  de diámetro, enrollado en un círculo de  $5\text{ cm}$  de diámetro. La longitud total mide  $14.14\text{ cm}$  y puede contener la cantidad de  $1\text{ mL}$  de insulina. Cabe señalar que al disminuir el diámetro del tubo (sección transversal), la longitud del tubo se incrementa. Por ejemplo, si disminuimos a  $2\text{ mm}$  el diámetro del tubo, la longitud del tubo sería de  $31.83\text{ cm}$ , para lo cual se requeriría un toro con un diámetro de  $10.1\text{ cm}$ . Esto resultaría en un AD grande para nuestras expectativas de diseño. Por esta razón en la siguiente sección se procederá a realizar un nuevo diseño usando una espiral de arquímedes.

## 2.2 Caso II: Diseño del AD usando una espiral de Arquímedes

En esta sección, se propondrá el diseño del actuador usando la geometría de una espiral simétrica y utilizando los valores de los tubos mostrados en la tabla 2.1. En este diseño, se seleccionó un tubo con  $2\text{ mm}$  de diámetro y una longitud de  $32.47\text{ cms}$ . Primeramente, partiremos de la ecuación 2.3, obtenida en la subsección A.1.1 del apéndice A, para encontrar el valor de " $\theta$ " que aproxime la longitud de la espiral con la longitud del tubo seleccionado, de tal forma que pueda contener el volumen requerido.

$$L_E = \frac{1}{2}\beta_2 \left[ \theta(1 + \theta^2)^{1/2} + \ln(\theta(1 + \theta^2)^{1/2}) \right]_0^{\frac{5}{2}\pi} = 31.83\text{cm}. \quad (2.3)$$

Tomado un valor de  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = 1$ , se encuentra que el valor de  $\theta = 5\pi/2$ . La Figura

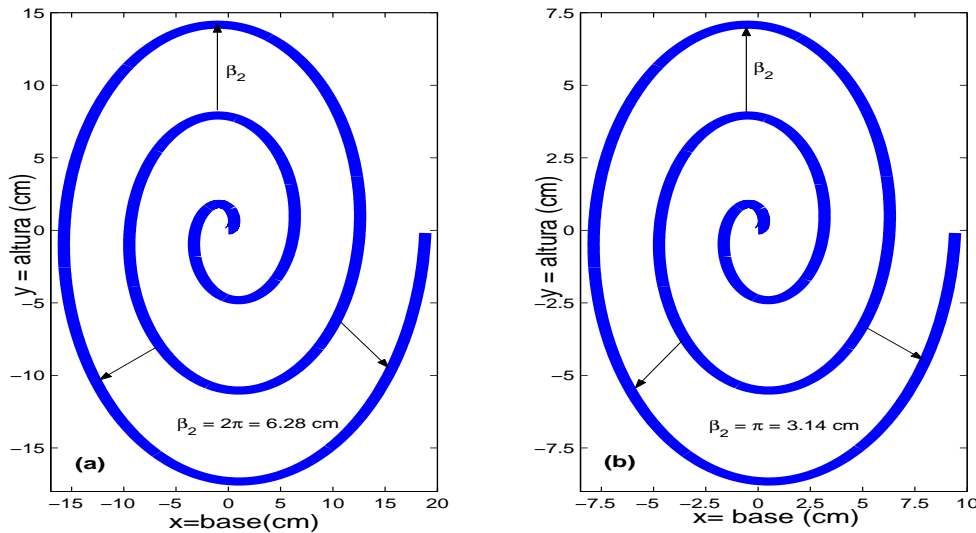


Figura 2.2: Diseño del AD usando diferentes valores de  $\beta_2$ : (a) Con valores de  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = 1$ . (b) Con valores de  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = 1/2$ .

2.2, muestra el diseño del actuador para diferentes valores de  $\beta_2$  y con  $\beta_1 = 0$ , es decir todas

inician en el origen. Donde puede observarse que el parámetro  $\beta_2$  afecta la distancia entre vueltas, pero además afecta también a la longitud de la curva. Por ejemplo la Figura 2.2b muestra el caso donde  $\beta_2 = 1/2$ , con este valor la distancia entre vueltas es de  $\pi$  es decir  $3.1416 \text{ cm}$ . Como resultado las dimensiones del actuador cambian y quedan de  $18 \text{ cm}$  de base x  $18 \text{ cm}$  de altura.

Otra situación que se observa de estos diseños es que para ángulos menores a  $\pi/4$  la curvatura de la primera vuelta es mucho mayor al resto de la curva. Así para prevenir que esta curvatura complique el arrastre del fluido en el origen por medio del balón, se propone que la espiral inicie en  $\pi/2$ . Con estos cambios es necesario recalcular la longitud de la curva, la cual queda de  $L_E = \int_{\pi/2}^{6.37\pi} (1 + \theta^2)^{1/2} d\theta = 31.87 \text{ cm}$ .

La Figura 2.3, muestra el diseño final del recipiente que contendrá la insulina; el cual se

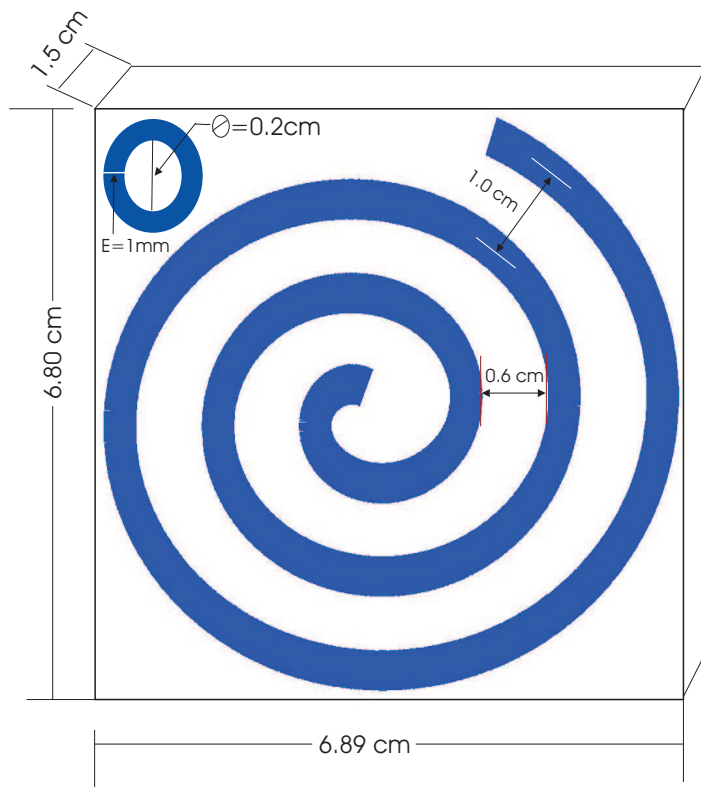


Figura 2.3: Propuesta de diseño del recipiente de insulina.

tiene contemplado sea desechable al momento en que suministre el total de la sustancia. En esta propuesta y con el fin de reducir el tamaño del AD, se escogió un valor de  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = 1/2\pi$ . La separación entre vueltas es de  $1 \text{ cm}$  medida desde la línea central del espiraloide. El diámetro del tubo es de  $2 \text{ mm}$ , con un espesor de la pared del tubo denotado por  $E = 1 \text{ mm}$ . Con estas dimensiones la separación entre las paredes del tubo quedan de  $6 \text{ mm}$ . La Figura 2.4 muestra el recipiente de insulina acoplado con el micromotor y el balón que en conjunto conforman lo que hemos denominado el AD. De tal manera que las dimensiones del actuador quedan de aproximadamente  $6.89 \text{ cm}$  de base por  $6.80 \text{ cm}$  de altura, con una

profundidad de 1.5 *cm*. Cabe señalar que este actuador tiene la capacidad de contener 1

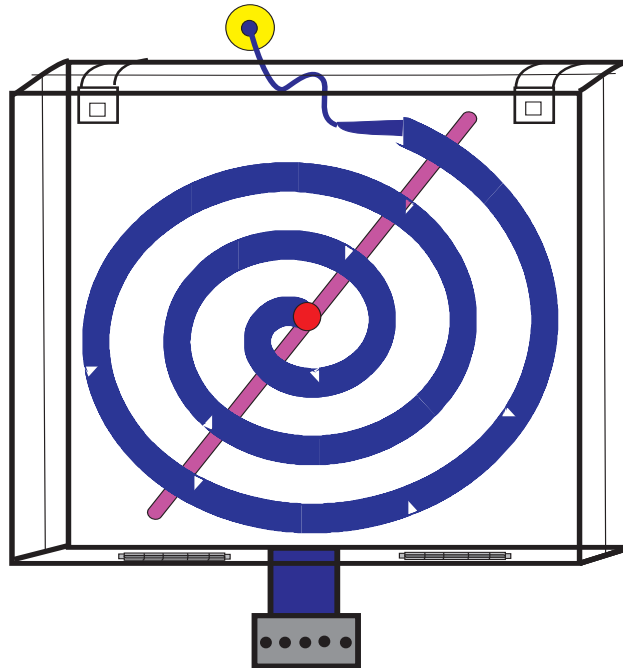


Figura 2.4: Propuesta de diseño del AD cuyas dimensiones son de 6.89 *cm* de base x 6.80 *cm* de altura x 1.5 *cm* de espesor.

*mL* de insulina que equivalen a 100 UI. Éste volumen fue seleccionado de acuerdo a la gráfica 1.4. En esa gráfica se observa que si la tasa máxima de suministro fuera continua y con un promedio de 70 mUI de insulina durante 24 horas, el volumen entregado por el dosificador sería de 100.8 UI. Pero normalmente las dosis requeridas en la noche por estos pacientes es mucho menor que esta tasa máxima; por esta razón se considera que el volumen de 1 *mL* garantiza el suministro continuo durante 24 horas. Otra razón por la que se eligió este tiempo de recarga es porque la insulina necesita refrigeración después de un período prolongado de uso. Para evitar esto se tiene contemplado que el AD posea un aislante que preserve la temperatura de la insulina al menos durante las 24 horas en que será dosificada. Por último es importante comentar que el AD diseñado en este capítulo, sólo conforma la parte electromecánica de la bomba y sobre la cual es desarrollado el presente trabajo y que consiste en la modelación de la mecánica de fluidos circulando por este AD.

### 2.2.1 Requerimientos adicionales en el diseño del AD

Otro requerimiento de diseño en el AD es la presión de salida que debe poseer la sustancia a suministrar. Esta presión debe ser tal que permita vencer la presión arterial típica de un cuerpo humano, definiéndose esta presión como la fuerza por unidad de área que ejerce la sangre bombeada por el corazón sobre las paredes de las arterias. El cuadro 2.2 muestra el

rango de valores de presión arterial en un ser humano y su clasificación. De acuerdo a estos

Categoría	Presión sistólica(mmHg)	Presión diastólica(mmHg)
Presión arterial normal	< 129	< 80
Presión arterial elevada	130 – 139	85 – 89
Hiperpresión fase 1(leve)	140 – 159	90 – 99
Hiperpresión fase 2(moderada)	160 – 179	100 – 109
Hiperpresión fase 3(grave)	180 – 209	110 – 119
Hiperpresión fase 4(muy grave)	≥ 210	≥ 120

Cuadro 2.2: Valores nominales de presión arterial sanguínea.

valores se ha seleccionado, un valor de 210 *mm* de Mercurio (*mmHg*), el cuál representa la presión arterial sistólica alta, conocida como hiperpresión grave fase 4. Cabe señalar que se ha escogido el valor máximo porque, los pacientes con diabetes mellitus algunas veces presentan complicaciones asociados a hiperpresión. De esta forma con el requerimiento de la presión a la salida y partiendo de la ecuación 3.72 desarrollada en el capítulo III, se puede obtener una fórmula para calcular el gradiente de presión que debemos inducir en el actuador para lograr que a la salida del mismo se tenga una presión mayor a 210 *mmHg*. Esta expresión viene dada por.

$$P_I = P_L - R \int G d\theta = P_L - RG\theta. \quad (2.4)$$

Donde  $P_I$  es la presión de entrada,  $P_L$  la presión de salida,  $R$  el radio del toro ó de la espiral y  $G$  es el gradiente de presión que provoca el movimiento del fluido. De tal manera que fijando  $P_L$ , es decir la presión que debemos tener a la salida del sistema y conociendo el rango de valores de  $\theta$  para la longitud de la espiral, que en nuestro caso es de  $\pi/2$  hasta  $6.37\pi$ , podemos calcular la presión que deberá ejercer el balón sobre el fluido a la entrada del sistema.

## 2.2.2 Características del minimotor seleccionado para el AD

La Figura 2.5 muestra el Mini-Motoreductor (minimotor) de la compañía "Faulhaber" que fue seleccionado para conformar la etapa electromecánica de la bomba. Este minimotor consta de un decodificador óptico, un minimotor de corriente directa y una etapa de reducción que reduce la velocidad angular pero que amplifica el torque de salida del minimotor. El modelo completo de este minimotor es, 1524E012SR + IE2-256 + 15/5 235,067:1 y corresponde al modelo del motor de CD, del decodificador óptico y de la etapa de reducción respectivamente. La longitud de este minimotor es de 58 *mm*, con un diámetro de 16 *mm*, pesa 51 *gr* y tiene un torque de salida de 100 miliNewton por metro (*mNm*). El cuadro 2.3 muestra las especificaciones técnicas del minimotor, donde se puede apreciar que este minimotor poseé baja inercia y consume solo 11 *mA* de corriente cuando se encuentra sin carga y consume 88 *mA* por cada *mNm* que se le requiera. Además debido a que la etapa de reducción es de tipo planetario y con un radio de reducción de 235,067:1, el motor adquiere una velocidad angular de 3 mili-Revoluciones por minuto por cada Volt que se suministre al



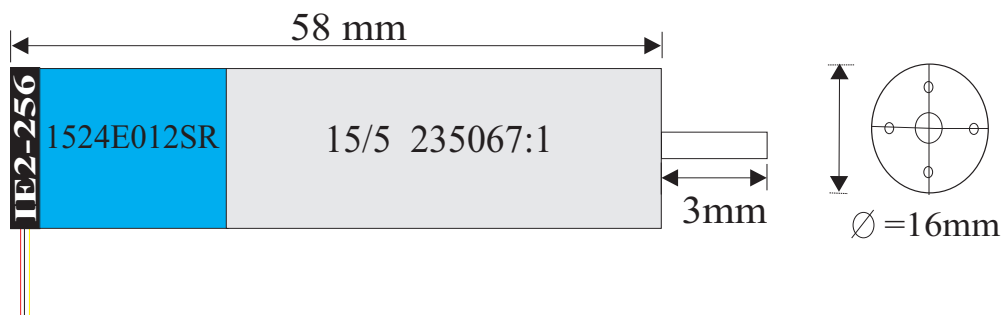


Figura 2.5: Mini-motoreductor seleccionado para el AD cuyo modelo es 1524E012SR + IE2-256 + 15/5 235,067:1.

Término	Símbolo	Cantidad	Unidades
Voltaje nominal	$V_n$	12	Volts
Resistencia de Armadura	$R_a$	12	Ohms
Potencia de salida	$P_{2max}$	1.75	Watts
Eficiencia	$\epsilon_{max}$	76	%
Velocidad sin carga	$n_o$	9900	RPMs
Corriente sin carga	$I_o$	11	mA
Torque	$M_H$	6.76	mNm
Constante de velocidad	$k_n$	840	RPMs/V
Constante contraelectromotriz	$k_e$	1.19	mV/RPM
Constante de par motriz	$k_m$	11.40	mNm/A
Constante de corriente	$k_i$	88	mA/mNm
Pendiente de curva Vel-torque	$\Delta n / \Delta M$	1460	RPM/mNm
Inductancia del rotor	L	250	$\mu\text{H}$
Constante de tiempo mecánica	$t_m$	10	ms
Inercia del motor	J	0.65	$g - \text{cm}^2$
Rango de temperatura de operación	T	-30 a + 85	$^{\circ}\text{C}$
Peso	P	21	gr

Cuadro 2.3: Especificaciones técnicas del minimotor seleccionado para el AD.

motor. La característica principal del encoder óptico es que provee una señal digital de 256 pulsos por cada revolución del motor y permite medir tanto la posición como la velocidad angular del minimotor. Por estas características de tamaño, peso y torque es que este minimotor fue seleccionado para conformar el AD. Por otro lado, y pesar de que las dimensiones del AD resultan adecuadas para nuestros fines, este diseño puede ser optimizado en el sentido de seleccionar el tamaño mínimo del AD que contenga el volumen requerido pero sin incrementar el esfuerzo para desplazarlo. Para esto, resulta conveniente modelar la mecánica de fluidos en el AD que permita en una segunda etapa, simular los perfiles de flujo y calcular los gradientes de presión requeridos para suministrar las dosis de medicamento.

# Capítulo 3

## Modelado matemático del flujo de fluidos en el AD considerando tubos de curvatura constante

### 3.1 Mecánica de fluidos

En este capítulo se desarrollará el modelo matemático que describe la dinámica de un fluido incompresible que fluye a través de un tubo de sección transversal circular. El cuál es enrollado en un círculo formando un toro.

Para modelar la mecánica de fluidos en este tubo son necesarias las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S), las cuales se obtienen de aplicar los principios de conservación de masa, conservación de cantidad de momento y conservación de energía dentro del fluido de interés. En este trabajo, como no se modelará la transferencia de energía o calor, solo se usarán las dos primeras, que son la ecuación de continuidad y la ecuación de conservación de momento.

#### 3.1.1 Antecedentes y propiedades físicas de los fluidos

Los fluidos pueden considerarse como agregaciones de moléculas, muy separadas en los gases y más próximas en los líquidos. En el caso de los gases, la distancia entre ellas es mayor al diámetro molecular, lo que resulta en una fuerza intermolecular débil que permite un movimiento más libre de las mismas. En el caso de los líquidos, por el contrario las moléculas se encuentran más próximas entre si, resultando en una fuerza intermolecular mayor, que provoca que la movilidad de éstas disminuya. Este fenómeno se traduce a nivel macroscópico en una consecuente oposición al movimiento.

A un fluido se le denomina de medio continuo o no-compresible, cuando la variación de sus propiedades físicas tales como su densidad y viscosidad no varían abruptamente en el espacio ni en el tiempo; esto significa que espacialmente estas magnitudes pueden considerarse casi uniformes, presentando sólo algunas veces variación temporal. Por el contrario en un fluido que es compresible, si existe una variación tanto espacial como temporal de sus propiedades físicas que lo convierte en un sistema de parámetros distribuidos y para su modelado, es necesario recurrir a la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y no lineales.

### 3.1.2 Clasificación de los fluidos

Una forma clásica en que los fluidos se identifican y validan experimentalmente; es cuantificando la relación que existe entre el esfuerzo de corte aplicado y su correspondiente tasa de deformación. De esta manera y dependiendo de, si dicha relación es lineal o no lineal, los fluidos son clasificados como newtonianos o no-newtonianos.

**Fluidos Newtonianos:** En este tipo de fluidos y en régimen laminar, la tasa de cambio de la velocidad del fluido es proporcional al gradiente de presión, es decir para un flujo continuo como el mostrado en la Figura 3.1, se encuentra experimentalmente que al aplicar una fuerza  $F$  en  $h_0$ , el fluido adquiere una cantidad de movimiento en la dirección de  $x$ . Esta capa del fluido comunica a su vez, parte de su cantidad de movimiento a la capa adyacente del líquido i.e. de  $h_0$  a  $h_1$ ; originando que esta capa se desplace en la dirección de  $x$ , de esta manera se tiene así una transmisión de cantidad de movimiento en  $x$  a través del fluido en la dirección del eje  $y$ . En este tipo de fluidos como por ejemplo

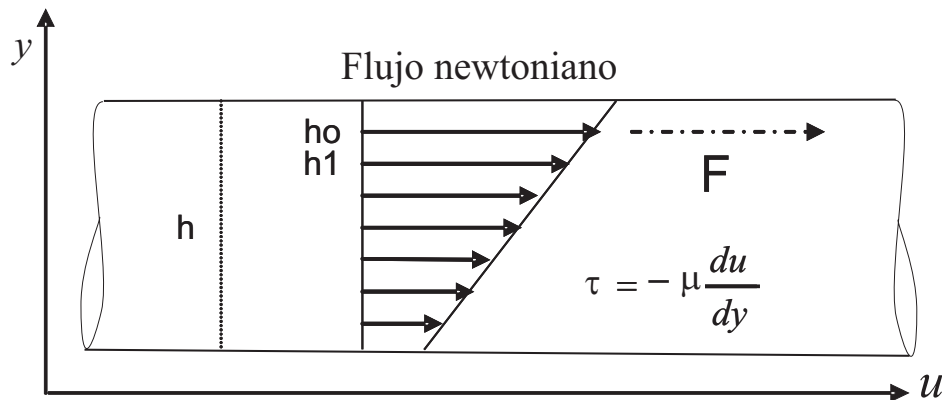


Figura 3.1: Transmisión de cantidad de momento en un fluido newtoniano.

el agua, se encuentra que las fuerzas internas netas entre capas son proporcionales al gradiente de las velocidades medias. Ésto se puede expresar matemáticamente como

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du}{dy}, \quad (3.1)$$

y establece que el tensor de estrés o esfuerzo es proporcional al gradiente negativo de la velocidad local donde a  $\mu$  se le conoce como la viscosidad del fluido y se le define como el factor de proporcionalidad que representa a las fuerzas de fricción internas y por lo tanto que impiden la deformación del fluido. Los fluidos que respetan esta ley de viscosidad de Newton son conocidos como fluidos newtonianos.

**Fluidos no Newtonianos:** El término no newtoniano se utiliza para clasificar aquellos fluidos que no cumplen la ley de viscosidad de Newton, y se expresan matemáticamente

como:

$$\tau_{yx} = -\eta \left( \mu, \frac{dv_x}{dy}, \tau_{yx} \right) \left( \frac{dv_x}{dy} \right). \quad (3.2)$$

En este tipo de fluidos, el coeficiente de proporcionalidad  $\eta$  puede ser una función no lineal ó una potencia de la tasa de deformación, e incluso puede ser función del tensor de corte para una temperatura y presión constantes dadas. Algunos ejemplos de estos modelos son:

Modelo de Bingham: Este modelo viene dado por la siguiente expresión

$$\tau_{yx} = \begin{cases} -\mu_0 \frac{dv_x}{dy} \pm \tau_0, & \text{si } |\tau_{yx}| > \tau_0. \\ \frac{dv_x}{dy} = 0, & \text{si } |\tau_{yx}| < \tau_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ejemplo de fluidos que obedecen esta relación son las pastas y algunas suspensiones

Modelo de Ostwald de Waele: Este modelo viene dado por la siguiente expresión

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \left( \frac{dv_x}{dy} \right), \quad (3.4)$$

al cual también se le conoce como ley de la potencia de la viscosidad, porque para  $n = 1$ , éste modelo se convierte en la ley de la viscosidad de Newton. Cabe mencionar que la mayoría de estas relaciones han sido deducidas mediante ajuste de las curvas obtenidas experimentalmente al caracterizar determinado fluido en condiciones de temperatura y presión constantes; y son válidos, sólo en un determinado rango de la tasa de deformación. Por lo tanto al emplearlos es importante conocer los valores de los parámetros bajo los cuales fue obtenido el modelo.

Cabe señalar que, a pesar de que la insulina pudiese comportarse de acuerdo a la relación dada por 3.4, en este trabajo se considerará que el fluido a ser modelado es de tipo newtoniano, es decir que cumple con la relación dada por 3.1.

## 3.2 Modelado del flujo de fluidos en el AD

Cuando un fluido fluye a través de un tubo curvo; la resistencia deja de ser proporcional a la velocidad media del fluido en velocidades mucho más pequeñas que para tubos rectos. Como ya se comentó en el primer capítulo, el primero en dar una aproximación analítica de este problema fue W. R. Dean [20], [21]. No obstante que el modelo propuesto por Dean aplica para tubos con curvatura constante, aquí sera usado para dar una primera aproximación al modelado del fluido circulando por el AD. De esta forma suponiendo una distancia de separación entre vueltas lo suficientemente grande ( $\beta_2 \gg 1$ ), se puede aproximar secciones de la espiral, por medio de toros de curvatura constante como se muestra en la Figura 3.2. Así, partiendo de esta suposición, se obtendrá el modelo considerando cada vuelta de la espiral como si fuera de radio constante "R" y que se puede aproximar por medio de las coordenadas de un toro del mismo radio. Para esto partiremos del modelo de Dean<sup>1</sup>, pero en este capítulo dicho modelo será extendido al caso de fluidos newtonianos compresibles en estado no desarrollado.

<sup>1</sup> El cual aplica para fluidos newtonianos, incompresibles y en estado completamente desarrollado.

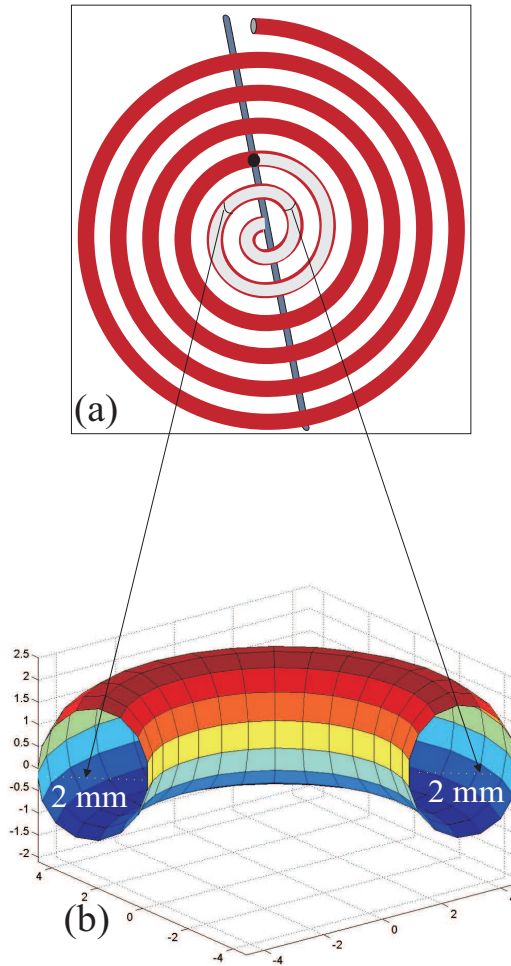


Figura 3.2: Geometría del AD aproximado por un toroide: (a) Vista superior de AD. (b) Vista en 3Ds de un segmento del tubo.

### 3.2.1 Sistema coordenado usado en el modelo de Dean

La Figura 3.3 muestra el sistema de coordenadas usado por Dean, y que permite modelar la mecánica de fluidos en las coordenadas de un toro. En este sistema coordenado, la superficie de un tubo de sección circular (anillo) es enrollado en un círculo de radio " $R$ ". El eje del círculo en el cual el tubo es enrollado es " $OZ$ ". " $C$ " designa al centro de la sección transversal del tubo en el plano " $COZ$ " y que forma un ángulo  $\theta$  con respecto al plano axial fijo " $XOZ$ ". " $OC$ " es el radio del toro. El plano " $XY$ " que pasa por " $OC$ " y que corta al tubo a la mitad, es llamado el plano central del toro. Y al círculo trazado por " $C$ " al girar alrededor de " $OZ$ " se le conoce como la línea central del toro. La posición de cualquier punto  $P$  en la sección del tubo está dada por las coordenadas ortogonales  $(r, \alpha, \theta)$ . Donde " $r$ " denota la distancia del punto al centro del tubo,  $\alpha$  es el ángulo que se forma con respecto a el eje  $C\bar{Z}$ ; y  $\theta$  corresponde al ángulo formado por el plano fijo " $XOZ$ " y el plano que pasa por la sección

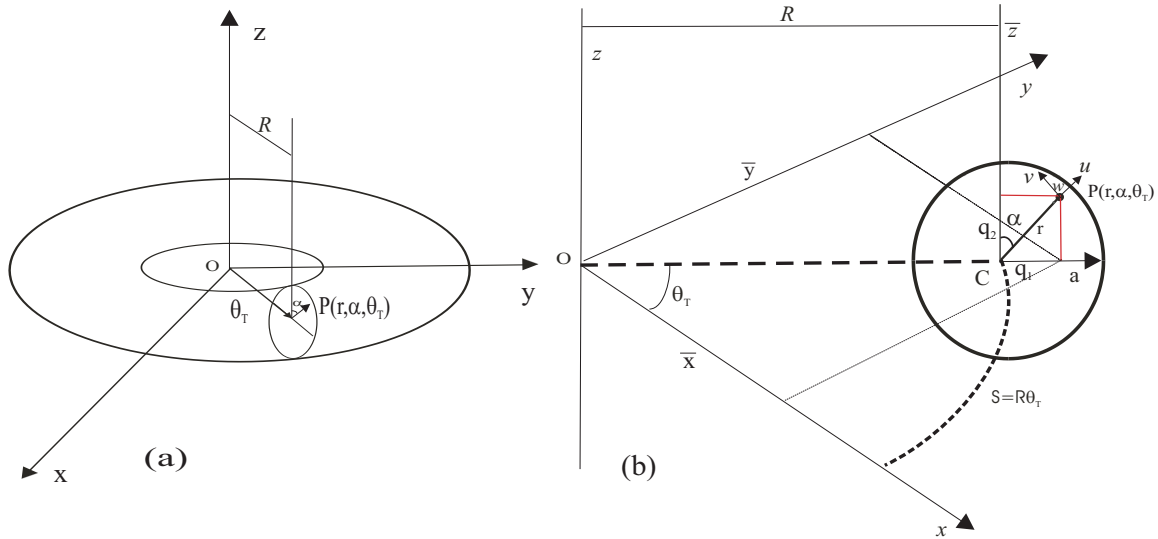


Figura 3.3: Sistema de coordenadas toroidales, usado por Dean: (a) Vista geométrica. (b) Marco del sistema coordenado.

transversal del tubo es decir el plano "COZ". Donde el radio de la sección transversal del tubo es  $a$ .

La velocidad que puede adquirir cualquier punto P al ser sometido a un gradiente de presión, es denotado por el vector velocidad  $\vec{u}$ , cuyas componentes vienen dadas por  $(u, v, w)$ . Donde  $u$  sin flecha es la componente de la velocidad en la dirección CP (radial),  $v$  es la componente de la velocidad en la dirección tangencial (perpendicular a  $u$ ) y que se encuentra en el plano de la sección transversal del tubo (anillo). Por último  $w$  es la velocidad axial, perpendicular al plano formado por  $u, v$  y que sigue la dirección del flujo.

Para obtener la relación entre coordenadas toroidales y cartesianas se procede de la siguiente forma:

1. El punto "P" en la sección transversal del toro esta determinado por las componentes  $q_1 = r \sin \alpha$  y  $q_2 = r \cos \alpha$ .
2. En seguida proyectando el punto "P" en el plano central del toro, se puede determinar la posición de la sección transversal del tubo en sus componentes cartesianas dadas por  $\bar{x} = (R + q_1) \cos \theta$  y  $\bar{y} = (R + q_1) \sin \theta$ .
3. De donde al sustituir el valor para  $q_1$  y observando de la Figura 3.3b que  $z = q_2$ , se encuentra que la relación entre coordenadas toroidales a cartesianas viene dada por las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}
 x &= [R + r \sin \alpha] \cos \theta, \\
 y &= [R + r \sin \alpha] \sin \theta, \\
 z &= r \cos \alpha,
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

con  $R = cte$ ,  $r > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 2\pi$ , y  $0 < \theta \leq 2\pi$

Derivando la posición del punto arbitrario "P" con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad del punto "P" cuyas componentes  $v_x, v_y, v_z$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v_r \sin \alpha \cos \theta + v_\alpha \cos \alpha \cos \theta - v_\theta \sin \theta, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v_r \sin \alpha \sin \theta + v_\alpha \cos \alpha \sin \theta + v_\theta \cos \theta, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = v_r \cos \alpha - v_\alpha \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donde  $v_r = \frac{dr}{dt}$ ,  $v_\alpha = r \frac{d\alpha}{dt}$ ,  $v_\theta = (R + r \sin \alpha) \frac{d\theta}{dt}$ , denotan las velocidades angulares en la dirección radial, tangencial y axial, respectivamente. Haciendo un cambio de notación en las velocidades con  $u = v_r$ ,  $v = v_\alpha$ ,  $w = v_\theta$ , la ecuación 3.6 se expresa de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} v_x &= u \sin \alpha \cos \theta + v \cos \alpha \cos \theta - w \sin \theta, \\ v_y &= u \sin \alpha \sin \theta + v \cos \alpha \sin \theta + w \cos \theta, \\ v_z &= v \cos \alpha - w \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por otro lado y a partir de la ecuación 3.5 se puede obtener la transformación de coordenadas cartesianas a toroidales, la cual viene dada por las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} r &= (((x^2 + y^2)^{1/2} - R)^2 + z^2)^{1/2}, \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right), \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde  $R = cte$ ,  $-1 \leq \frac{z}{r} \leq 1$ ,  $-\infty \leq \frac{y}{x} \leq \infty$ . Una vez que se tiene la relación entre coordenadas cartesianas y toroidales, es posible calcular la métrica en coordenadas toroidales para de esta manera poder deducir los factores de escala en este nuevo sistema curvilíneo. Los detalles de la obtención de la métrica y la obtención de los factores de escala son dados en apéndice A, sección A.2.

### 3.3 Extensión al modelo de Dean: Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes libre de coordenadas

Las ecuaciones generales de Navier Stokes describen la variación de las propiedades físicas de cualquier fluido tanto en espacio como en tiempo. En esta sección se muestra el procedimiento para obtener las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas toroidales, y que representan una extensión del modelo de Dean. Cabe mencionar que el modelo de Dean modela matemáticamente la dinámica de un fluido de tipo newtoniano, estacionario y no-compresible para tubos de curvatura constante y el aquí obtenido generaliza el modelo para el mismo tipo de fluido al caso no estacionario y compresible.

Para realizar dicha extensión, partiremos de las ecuaciones de N-S en su forma vectorial. Para esto, usaremos las operaciones elementales del producto escalar y producto cruz entre

campos escalares y vectoriales definidas en el Apéndice A, donde también se describe la forma en que son obtenidos el gradiente de un campo escalar, la divergencia y el rotacional de un campo vectorial, así como la métrica de estos sistemas coordenados.

### 3.3.1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad, se obtiene de un balance de conservación de materia que relaciona la tasa de acumulación de materia con la tasa de entrada y salida de materia como se muestra en Figura 3.4. Aplicando este principio al fluido se puede obtener la ecuación de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. de acumulación} \\ \text{de materia} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. de entrada} \\ \text{de materia} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. de salida de} \\ \text{materia} \end{array} \right\}$$

Figura 3.4: Principio de conservación de materia.

continuidad en coordenadas cartesianas y que viene dada por

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.9)$$

donde el operador  $D/Dt$  denota la derivada total ó sustancial de cualquier cantidad escalar o vectorial y  $\vec{u}$  es la velocidad del fluido. En general si la densidad del fluido es función tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo  $\rho(t, x, y, z)$ , entonces la derivada sustancial se expresa como:

$$\frac{D\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla\rho) \quad (3.10)$$

Por otro lado, se dice que un fluido es incompresible siguiendo el movimiento si  $D\rho/Dt = 0$ . Así, considerando esta condición se tienen dos implicaciones; de la ecuación 3.10 se tiene que  $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla\rho) = 0$ , y de la ecuación 3.9 se tiene que el gradiente de la velocidad debe ser cero. Ahora si se considera que el fluido es homogéneo, es decir que su densidad no varía espacialmente, entonces, la ecuación de continuidad queda de la siguiente manera.  $(\nabla \cdot \vec{u}) = 0$ . De esta forma partiendo de la ecuación para la divergencia de un campo vectorial en coordenadas curvilíneas, obtenemos la siguiente expresión para la divergencia de  $\vec{u}$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{h_r h_\alpha h_\theta} \left[ \frac{\partial h_\alpha h_\theta u_r}{\partial r} + \frac{\partial h_r h_\theta u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial h_r h_\alpha u_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (3.11)$$

De aquí sustituyendo los factores de escala para C-T y que vienen dados por  $h_r = 1$ ,  $h_\alpha = r$ ,  $h_\theta = R + r \sin \alpha = \hat{R}$ , se obtiene

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{r \hat{R}} \left[ \frac{\partial (r \hat{R} u)}{\partial r} + \frac{\partial (\hat{R} v)}{\partial \alpha} + \frac{(r w)}{\theta} \right] \quad (3.12)$$

Que después de realizar los cálculos correspondientes se llega a la ecuación de continuidad en coordenadas toroidales, para un fluido compresible y homogéneo.

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\sin \alpha u}{\hat{R}} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{v \cos \alpha}{\hat{R}} + \frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (3.13)$$



### 3.3.2 Ecuación de momento

Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes para la conservación de momento en su forma general y libre de coordenadas se tiene.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - [u \times (\nabla \times \vec{u})] + \frac{1}{2} \nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \\ -\frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} + \frac{1}{3} \nu \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nu [\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u})] + \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donde  $\vec{u}$  es el vector velocidad y " $\nu$ " la viscosidad cinématica. Ahora considerando un fluido incompresible, por la ecuación de continuidad se tiene que la divergencia de  $\vec{u}$  es cero, es decir que  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  entonces la ecuación de momento queda como.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - [u \times (\nabla \times \vec{u})] + \frac{1}{2} \nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \\ -\frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} - \nu [\nabla \times (\nabla \times \vec{u})] + \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De esta ecuación se obtendrán las tres componentes de la ecuación de momento, en la dirección radial, tangencial y axial. Para esto primeramente desarrollaremos los términos del lado izquierdo de la ecuación 3.15 y posteriormente se obtendrán los términos del lado derecho de la ecuación para cada una de sus componentes.

### 3.3.3 Ecuación de momento: Dirección radial

La ecuación 3.16 muestra la componente radial de la ecuación de momento, donde se calcularán primero los términos del lado izquierdo y posteriormente los del lado derecho. Esto con el fin de ilustrar de manera sistemática su deducción.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]_r - [\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_r + \left[ \frac{1}{2} \nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) \right]_r = \\ - \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} \right]_r - \nu [\nabla \times (\nabla \times \vec{u})]_r + \left[ \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s \right]_r. \end{aligned} \quad (3.16)$$

#### Términos lado izquierdo:

El primer término del lado izquierdo de la ecuación 3.16 queda

$$\left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.17)$$

El segundo término del lado izquierdo de la ecuación 3.16 viene dado por

$$[\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_r = u_\alpha (\nabla \times \vec{u})_\theta - u_\theta (\nabla \times \vec{u})_\alpha. \quad (3.18)$$

Donde las componentes tangencial y axial del rotacional del vector  $\vec{u}$ , son obtenidas como en la sección A.3 del apéndice A y vienen dadas por

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{u})_\theta &= \frac{1}{h_r h_\alpha} \left( \frac{\partial h_\alpha u_\alpha}{\partial r} - \frac{\partial h_r u_r}{\partial \alpha} \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r u_\alpha}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right), \\ (\nabla \times \vec{u})_\alpha &= \frac{1}{h_\theta h_r} \left( \frac{\partial h_r u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial h_\theta u_\theta}{\partial r} \right) = \frac{1}{\hat{R}} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{R} u_\theta}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

De aquí sustituyendo 3.19, en la ecuación 3.18, se llega a

$$[\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_r = u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{u_\alpha^2}{r} - \frac{u_\alpha}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{u_\theta}{\hat{R}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta^2 \frac{\sin \alpha}{\hat{R}}. \quad (3.20)$$

El tercer término del lado izquierdo de la ecuación 3.16, queda de la siguiente forma

$$\left[ \frac{1}{2} \nabla(\vec{u} \cdot \vec{u}) \right]_r = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [u_r^2 + u_\alpha^2 + u_\theta^2] = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r}. \quad (3.21)$$

Por lo tanto, sumando los primeros tres términos del lado izquierdo y designando las componentes de la velocidad  $\vec{u} = (u, v, w)$  se tiene.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{\hat{R}} \frac{\partial u}{\partial \theta} - w^2 \frac{\sin \alpha}{\hat{R}} \quad (3.22)$$

Ahora obtendremos cada uno de los términos del lado derecho de la ecuación 3.16.

#### **Términos lado derecho:**

Comenzando por el primer término del lado derecho se tiene

$$\left[ \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} \right]_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{P}}{\partial r}. \quad (3.23)$$

Para obtener el segundo término del lado derecho de la ecuación 3.16, empleamos la ecuación A.23 y designando a  $\vec{A} = \nabla \times \vec{u}$ , se tiene

$$(\nabla \times (\nabla \times \vec{u}))_r = \frac{1}{\hat{R}r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [\hat{R}(\nabla \times \vec{u})_\theta] - \frac{\partial}{\partial \theta} [r(\nabla \times \vec{u})_\alpha] \right\}, \quad (3.24)$$

de donde al sustituir las expresiones para  $(\nabla \times \vec{u})_\theta$  y  $(\nabla \times \vec{u})_\alpha$ , dadas por la ecuación 3.19, se llega a

$$\frac{1}{\hat{R}r} \left\{ \frac{\hat{R}}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial(ru_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right] + \cos \alpha \left[ \frac{\partial(ru_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right] - \frac{r}{\hat{R}} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial(\hat{R}u_\theta)}{\partial r} \right] \right\}. \quad (3.25)$$

El tercer término del lado derecho, se obtiene considerando que la única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la fuerza de gravedad y por lo tanto

$$\left[ \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s \right]_r = \rho_1 g_r, \quad (3.26)$$

donde  $\rho_1 = \rho_s/\rho$  y  $g_r$  es la componente radial de la fuerza de gravedad. Finalmente sustituyendo estos tres términos en el lado derecho de la ecuación 3.16 y reagrupando términos se obtiene la expresión del lado derecho de la componente en  $r$  dada por

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} - v \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\cos \alpha}{\hat{R}} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos \alpha v}{\hat{R}r} - \frac{\cos \alpha}{\hat{R}r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{1}{\hat{R}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin \alpha}{\hat{R}} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + \rho g_r. \quad (3.27)$$

### 3.3.4 Ecuación de momento: Dirección tangencial

Partiendo de la ecuación 3.28 para un fluido incompresible obtendremos la componente tangencial de la ecuación de momento, es decir en la dirección de  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]_{\alpha} - [\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_{\alpha} + \left[ \frac{1}{2} \nabla (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right]_{\alpha} = \\ & - \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} \right]_{\alpha} - v [\nabla \times (\nabla \times \vec{u})]_{\alpha} + \left[ \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s \right]_{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

#### Términos lado izquierdo:

El primer término del lado izquierdo viene dado por:

$$\left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]_{\alpha} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (3.29)$$

Al utilizar la ecuación A.23 y siguiendo un procedimiento similar al realizado para obtener la componente en la dirección radial se obtiene la expresión para el segundo término del lado izquierdo

$$[\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_{\alpha} = u_{\theta} (\nabla \times \vec{u})_r - u_r (\nabla \times \vec{u})_{\theta}. \quad (3.30)$$

Donde

$$(\nabla \times \vec{u})_r = \frac{1}{h_{\alpha} h_{\theta}} \left( \frac{\partial h_{\theta} u_{\theta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_{\alpha} u_{\alpha}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\hat{R} r} \frac{\partial (\hat{R} u_{\theta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r u_{\alpha})}{\partial \theta}, \quad (3.31)$$

y  $(\nabla \times \vec{u})_{\theta}$  viene dado por la ecuación 3.19. De esta manera sustituyendo en 3.30 y realizando las derivadas respectivas se llega a

$$\begin{aligned} [\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_{\alpha} &= \frac{u_{\theta}}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \alpha} + \frac{u_{\theta}^2 \cos \alpha}{\hat{R}} - \frac{u_{\theta}}{\hat{R}} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \theta} - \\ & u_r \frac{\partial u_{\alpha}}{r} - \frac{u_r u_{\alpha}}{r} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

El tercer término del lado izquierdo queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \nabla (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right]_{\alpha} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \alpha} [u_r^2 + u_{\alpha}^2 + u_{\theta}^2] = \\ & u_r \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + u_{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + u_{\theta} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

De igual forma sumando los primeros tres términos del lado izquierdo y designando las componentes de la velocidad  $\vec{u} = (u, v, w)$  se obtiene la expresión para la componente  $\alpha$  del lado izquierdo.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{w}{\hat{R}} \frac{\partial v}{\partial \theta} - w^2 \frac{\cos \alpha}{\hat{R}}. \quad (3.34)$$

#### Términos lado derecho:

Con un procedimiento similar se obtienen las expresiones para cada uno de los términos del

lado derecho de la ecuación 3.28.  
Comenzando por el primero de ellos tenemos.

$$\left[\frac{1}{\rho}\nabla\vec{P}\right]_{\alpha} = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha}. \quad (3.35)$$

Para obtener el segundo término del lado derecho, empleamos la ecuación A.23 nuevamente y designando a  $\vec{A} = \nabla \times \vec{u}$ , se tiene

$$(\nabla \times (\nabla \times \vec{u}))_{\alpha} = \frac{1}{\hat{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} [(\nabla \times \vec{u})_r] - \frac{\partial}{\partial r} [\hat{R}(\nabla \times \vec{u})_{\theta}] \right\}, \quad (3.36)$$

de donde al sustituir los valores para  $(\nabla \times \vec{u})_r$  y  $(\nabla \times \vec{u})_{\theta}$ , en la ecuación 3.36, se llega a

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}))_{\alpha} = \frac{1}{\hat{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} \left[ \frac{1}{\hat{R}r} \frac{\partial(\hat{R}u_{\theta})}{\partial\alpha} - r \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial\theta} \right] - \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial r} \left[ \hat{R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_{\alpha})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial\alpha} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Una vez realizadas las derivadas correspondientes y reagrupando términos llegamos a la expresión para el segundo término del lado derecho de la ecuación 3.15, en su componente  $\alpha$ , dada por

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}))_{\alpha} = \frac{1}{\hat{R}r} \frac{\partial w}{\partial\theta\partial\alpha} - \frac{1}{\hat{R}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial\theta} - \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r^2} + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r\partial\alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\hat{R}} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\alpha v}{\hat{R}r} + \frac{\sin\alpha}{\hat{R}r} \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\hat{R}^2} \frac{\partial w}{\partial\theta}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

El tercer término del lado derecho se obtiene, considerando que la única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la componente tangencial de la fuerza de gravedad y por lo tanto

$$\left[ \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s \right]_{\alpha} = \rho_1 g_{\alpha}, \quad (3.39)$$

donde  $\rho_1 = \rho_s/\rho$  y  $g_{\alpha}$  es la componente tangencial de la fuerza de gravedad. Finalmente sustituyendo estos tres términos en el lado derecho de la ecuación 3.28 y reagrupando términos se obtiene la expresión del lado derecho de la componente en  $\alpha$  dada por

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha} - v \left[ \frac{1}{\hat{R}r} \frac{\partial w}{\partial\theta\partial\alpha} - \frac{1}{\hat{R}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial\theta} - \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r^2} + \right. \\ \left. \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r\partial\alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\hat{R}} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\alpha v}{\hat{R}r} + \frac{\sin\alpha}{\hat{R}r} \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\hat{R}^2} \frac{\partial w}{\partial\theta} \right] + \rho_1 g_{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.3.5 Ecuación de momento: Dirección axial

Partiendo de la ecuación 3.41 para un fluido incompresible obtendremos la ecuación de momento en la dirección de  $\theta$ , es decir en la dirección del flujo ó también llamada dirección

axial

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]_{\theta} - [\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_{\theta} + \left[ \frac{1}{2} \nabla (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right]_{\theta} = \\ & - \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} \right]_{\theta} - \mathbf{v} [\nabla \times (\nabla \times \vec{u})]_{\theta} + \left[ \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s \right]_{\theta}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

**Términos lado izquierdo:**

El primer término del lado izquierdo viene dado por:

$$\left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]_{\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.42)$$

El segundo término del lado izquierdo se obtiene al utilizar la ecuación A.23, y siguiendo un procedimiento similar al realizado para obtener la componentes anteriores se llega a

$$[\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_{\theta} = u_r (\nabla \times \vec{u})_{\alpha} - u_{\alpha} (\nabla \times \vec{u})_r, \quad (3.43)$$

donde  $(\nabla \times \vec{u})_{\alpha}$ , y  $(\nabla \times \vec{u})_r$ , vienen dados por la ecuación 3.18. De esta forma sustituyendo en la ecuación 3.43, se llega a

$$(\nabla \times \vec{u})_{\theta} = u_r \left[ \frac{1}{\hat{R}r} \frac{\partial(\hat{R}u_{\theta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial(ru_{\alpha})}{\partial \theta} \right] - u_{\alpha} \left[ \frac{1}{\hat{R}} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{R}u_{\theta}}{\partial r} \right) \right]. \quad (3.44)$$

Que al realizar las derivadas correspondientes se llega a

$$\begin{aligned} [\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_{\theta} &= \frac{u_r}{\hat{R}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r u_{\theta} \sin \alpha}{\hat{R}} - u_r \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \\ & \frac{u_{\alpha}}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \alpha} - \frac{u_{\alpha} u_{\theta} \cos \alpha}{\hat{R}} + \frac{u_{\alpha}}{\hat{R}} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

El tercer término queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \nabla (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right]_{\theta} &= \frac{1}{2\hat{R}} \frac{\partial}{\partial \theta} [u_r^2 + u_{\alpha}^2 + u_{\theta}^2] = \\ & \frac{u_r}{\hat{R}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_{\alpha}}{\hat{R}} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \theta} + \frac{u_{\theta}}{\hat{R}} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Así, sumando los primeros 3 términos del lado izquierdo y designando las componentes de la velocidad  $\vec{u} = (u, v, w)$  se obtiene la expresión para la componente axial del lado izquierdo.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{uw \sin \alpha}{\hat{R}} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{w}{\hat{R}} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha v w}{\hat{R}}. \quad (3.47)$$

**Términos lado derecho:**

De igual manera, se procede a obtener las expresiones para cada uno de los términos del lado derecho de la ecuación 3.41.

Comenzando por el primero de ellos tenemos.

$$\left[ \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} \right]_{\theta} = \frac{1}{\rho \hat{R}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta}. \quad (3.48)$$

Para obtener el segundo término, empleamos la ecuación A.23 nuevamente y designando a  $\vec{A} = \nabla \times \vec{u}$ , se tiene

$$[\nabla \times (\nabla \times \vec{u})]_{\theta} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [(\nabla \times \vec{u})_{\alpha}] - \frac{\partial}{\partial \alpha} [(\nabla \times \vec{u})_r] \right\}, \quad (3.49)$$

que al sustituir los valores para  $(\nabla \times \vec{u})_r$  y  $(\nabla \times \vec{u})_{\alpha}$ , en la ecuación 3.49, se llega a

$$[\nabla \times (\nabla \times \vec{u})]_{\theta} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\hat{R}} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{R} u_{\theta}}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{\hat{R} r} \frac{\partial (\hat{R} u_{\theta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r u_{\alpha})}{\partial \theta} \right] \right\}. \quad (3.50)$$

De tal manera que al realizar las derivadas correspondientes y reagrupando términos llegamos a la expresión del segundo término del lado derecho de la componente en  $\theta$ , dada por

$$[\nabla \times (\nabla \times \vec{u})]_{\theta} = \frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r \hat{R}^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{\hat{R}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\sin \alpha}{\hat{R}^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{\hat{R}} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\cos \alpha}{\hat{R} r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\hat{R}^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (3.51)$$

El tercer término para la componente axial de la fuerza de gravedad viene dada por

$$\left[ \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s \right]_{\alpha} = \rho_1 g_{\theta}, \quad (3.52)$$

donde  $\rho_1$  ya ha sido definido anteriormente y  $g_{\theta}$  es la componente axial de la fuerza de gravedad. Finalmente sustituyendo estos tres términos en el lado derecho de la ecuación 3.28 y reagrupando términos se obtiene la expresión del lado derecho de la componente en  $\alpha$  dada por

$$-\frac{1}{\rho \hat{R}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} - v \left[ \frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r \hat{R}^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{\hat{R}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\sin \alpha}{\hat{R}^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{\hat{R}} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\cos \alpha}{\hat{R} r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\hat{R}^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + \rho_1 g_{\theta}. \quad (3.53)$$

Por último haciendo un resumen de todas las expresiones para cada una de las componentes de la ecuación de momento se obtiene, junto con la ecuación de continuidad, el modelo de Dean que aplica para fluidos compresibles fluyendo a través de tubos con curvatura constante y sección transversal circular.

## ECUACIÓN DE MOMENTO

### Dirección Radial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R + r \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} - \frac{w^2 \sin \alpha}{R + r \sin \alpha} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{P}{\rho} \right) \\ - v \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\cos \alpha}{R + r \sin \alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) - \right. \\ \left. \frac{1}{(R + r \sin \alpha)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R + r \sin \alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin \alpha}{R + r \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] + \rho_1 g_r. \end{aligned} \quad (3.54)$$

### Dirección Tangencial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{w}{R + r \operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} - \frac{w^2 \cos \alpha}{R + r \operatorname{sen} \alpha} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{P}{\rho} \right) \\ + v \left[ \left( \frac{1}{(R + r \operatorname{sen} \alpha)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r(R + r \operatorname{sen} \alpha)} \frac{\partial w}{\partial \alpha \partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{(R + r \operatorname{sen} \alpha)^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{(R + r \operatorname{sen} \alpha)} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \right] + \rho_1 g \alpha. \end{aligned} \quad (3.55)$$

### Dirección axial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u w \operatorname{sen} \alpha}{R + r \operatorname{sen} \alpha} - \frac{v w \cos \alpha}{R + r \operatorname{sen} \alpha} + \frac{w}{R + r \operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{R + r \operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{P}{\rho} \right) \\ + v \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w \operatorname{sen} \alpha}{(R + r \operatorname{sen} \alpha)} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w \cos \alpha}{(R + r \operatorname{sen} \alpha)} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{1}{(R + r \operatorname{sen} \alpha)} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{R + r \operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] + \rho_1 g \theta. \end{aligned} \quad (3.56)$$

### Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\sin \alpha u}{\hat{R}} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{v \cos \alpha}{\hat{R}} + \frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0. \quad (3.57)$$

## 3.4 Extensión del modelo al caso de fluidos compresibles

Como se comentó en la sección anterior, el modelo de Dean es obtenido considerando un flujo no-compresible. En esta sección se desarrollarán los términos adicionales que completan los modelos reportados por Dean [20] y Berger-Talbot [26], para el caso de fluidos compresibles.

Para considerar el caso de un fluido compresible es necesario considerar la ecuación de continuidad general y para el caso de la ecuación de momento se debe partir de la ecuación 3.14, en este caso el término  $\frac{1}{3} v [\nabla(\nabla \cdot \vec{u})]$  no es cero y debe ser considerado en el modelo.

### 3.4.1 Ecuación de continuidad fluido compresible

La ecuación general de continuidad que describe el caso de un fluido compresible viene dado por la siguiente ecuación; donde se considera que no existe transformación de materia.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho[(\nabla \cdot \vec{u})] = 0. \quad (3.58)$$

Ahora suponiendo que la densidad del fluido es una función tanto del tiempo como de las coordenadas espaciales, es decir que  $\rho = \rho(t, r, \alpha, \theta)$ , entonces se tiene que la ecuación de continuidad viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t, r, \alpha, \theta)}{\partial t} + \rho(t, r, \alpha, \theta) \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\sin \alpha u}{\hat{R}} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{v \cos \alpha}{\hat{R}} + \frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \\ + u \frac{\partial \rho(t, r, \alpha, \theta)}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \rho(t, r, \alpha, \theta)}{\partial \alpha} + \frac{w}{R + r \operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial \rho(t, r, \alpha, \theta)}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Donde se han colocado las tres componentes en la misma ecuación.

### 3.4.2 Términos adicionales de la ecuación de momento: Fluidos compresibles

DIRECCIÓN RADIAL: Primeramente obtendremos el término adicional en la dirección radial, para esto tenemos

$$\frac{1}{3}\mathbf{v}[\nabla(\nabla \cdot \vec{u})]_r = \frac{1}{3}\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial r}(\nabla \cdot \vec{u})_r. \quad (3.60)$$

Donde la divergencia de  $\vec{u}$  en la dirección de  $r$  viene dado por

$$\left[\frac{1}{3}\mathbf{v}(\nabla \cdot \vec{u})\right]_r = \frac{1}{3}\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\hat{R}r} \left[ \frac{\partial(r\hat{R})u_r}{\partial r} + \frac{\partial\hat{R}u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{(ru_\theta)}{\partial\theta} \right] \right\}. \quad (3.61)$$

Al realizar el desarrollo de la divergencia de  $\vec{u}$  se tiene

$$\frac{1}{3}\mathbf{v}[\nabla(\nabla \cdot \vec{u})]_r = \frac{1}{3}\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{\hat{R}}u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\hat{R}}u_\alpha + \frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \right]. \quad (3.62)$$

Donde al efectuar los cálculos correspondientes y designando las componentes de la velocidad  $\vec{u} = (u_r, u_\alpha, u_\theta) = (u, v, w)$ , se llega a

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\mathbf{v}[\nabla(\nabla \cdot \vec{u})]_r = \frac{1}{3}\mathbf{v} & \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin\alpha}{\hat{R}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin^2\alpha}{\hat{R}^2}u + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r\partial\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\hat{R}}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\hat{R}}v + \frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial w}{\partial r\partial\theta} - \frac{\sin\alpha}{\hat{R}^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

DIRECCIÓN TANGENCIAL: Partiendo de la definición del operador  $\nabla$  aplicado a un vector se tiene que la componente en la dirección de  $\alpha$ , para el término adicional viene dado por:

$$\frac{1}{3}\mathbf{v}[\nabla(\nabla \cdot \vec{u})]_\alpha = \frac{1}{3}\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\alpha} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{\hat{R}}u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\hat{R}}u_\alpha + \frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \right]. \quad (3.64)$$

Realizando las operaciones necesarias se llega a

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\mathbf{v}[\nabla(\nabla \cdot \vec{u})]_\alpha = \frac{1}{3}\mathbf{v} & \left[ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\alpha\partial r} + \frac{\sin\alpha}{\hat{R}r}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\hat{R}^2}u + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} \right. \\ & \left. + \frac{\cos\alpha}{\hat{R}r}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\hat{R}^2}v + \frac{1}{\hat{R}rr}\frac{\partial w}{\partial\alpha\partial\theta} - \frac{\cos\alpha}{\hat{R}}\frac{\partial w}{\partial\theta} \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

DIRECCIÓN AXIAL: Siguiendo con el tercer término del operador  $\nabla$  aplicado a un vector se tiene que la componente en la dirección de  $\theta$ , para el último término adicional viene dado por:

$$\frac{1}{3}\mathbf{v}[\nabla(\nabla \cdot \vec{u})]_\theta = \frac{1}{3}\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\theta} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{\hat{R}}u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\hat{R}}u_\alpha + \frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \right]. \quad (3.66)$$



Realizando las operaciones necesarias se llega a la expresión final para la tercera componente en la dirección axial

$$\frac{1}{3}v[\nabla(\nabla \cdot \vec{u})]_{\theta} = \frac{1}{3}v \left[ \frac{1}{\hat{R}r} \frac{\partial u}{\partial \theta \partial \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\hat{R}^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\hat{R}r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r\hat{R}} \frac{\partial v}{\partial \theta \partial \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\hat{R}^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\hat{R}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \quad (3.67)$$

Estas ecuaciones junto con las obtenidas en la sección anterior, completan el modelo de Dean para el caso de un fluido compresible.

### 3.4.3 Solución analítica al modelo de Dean simplificado

El modelo de Dean ha sido obtenido considerando la suposición de la ley de Hagen-Poiseuille, descrita en la subsección A.3.1 del Apéndice A, pero añadiendo algunas simplificaciones en la geometría del tubo, se puede obtener una solución analítica. Por ejemplo, se parte de la suposición que el radio de curvatura  $\delta = a/R$ , es pequeño es decir  $\delta \ll 1$ . La ecuaciones 3.68 y 3.69 muestran el modelo de Dean simplificado y sobre del cual Dean proporcionó una solución analítica. La ecuación de continuidad viene dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0, \quad (3.68)$$

y las ecuaciones de momento por

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\sin \alpha w^2}{\hat{R}} &= -\frac{\partial \vec{P}}{\partial r} \rho - \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\xi), \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\cos \alpha w^2}{\hat{R}} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha} \rho + v \frac{\partial}{\partial r} (\xi), \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} \rho + v [\nabla_1^2(w)]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Donde

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad (3.70)$$

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \quad (3.71)$$

De acuerdo a las suposiciones de que el flujo es de tipo Hagen-Poiseuille, se puede partir de que el vector  $\vec{u} = (u, v, w)$  es independiente del ángulo  $\theta$ . Bajo estas consideraciones se puede deducir de la tercera ecuación de momento 3.69 que

$$\frac{1}{\rho \hat{R}} \int \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta = \theta f_1(r, \alpha) + f_2(r, \alpha). \quad (3.72)$$

Donde  $f_2(r, \alpha)$  es una constante de integración que depende de las coordenadas polares de la sección transversal del tubo. Por otro lado despejando la presión de la primera y segunda

ecuación de momento, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\vec{P}}{\rho} \right) = -\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} [\xi(r, \alpha)] + f_3(r, \alpha), \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\vec{P}}{\rho} \right) = v \frac{\partial}{\partial r} [\xi(r, \alpha)] + f_4(r, \alpha). \quad (3.74)$$

Ahora derivando la ecuación 3.72 con respecto a  $r$  y a  $\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{P}{\rho \bar{R}} \right) = \theta \frac{\partial}{\partial r} [f_1(r, \alpha)] + \frac{\partial}{\partial r} [f_2(r, \alpha)], \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{P}{\rho \bar{R}} \right) = \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} [f_1(r, \alpha)] + \frac{\partial}{\partial \alpha} [f_2(r, \alpha)], \quad (3.76)$$

observamos que  $f_1(r, \alpha)$  debe de ser una función constante y por lo tanto de la ecuación 3.72 se deduce que el gradiente de presión a lo largo de la línea central del toro permanece sin cambio. En otras palabras,  $-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{P}{\rho} \right) = \frac{G}{\rho}$ . A la cuál se le conoce como el gradiente de presión media y es igual a la tasa espacial de decremento en la presión a lo largo de la línea central del toro. Por otro lado si reagrupamos la ecuación de continuidad tenemos  $\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right] = 0$ , de donde al despejar a  $u$  ó  $v$  en función de la otra obtenemos.

$$ru = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int v dr = -\frac{\partial f_5(r, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad (3.77)$$

$$v = -\frac{\partial}{\partial r} \int (ru) d\alpha = \frac{\partial f_6(r, \alpha)}{\partial r}. \quad (3.78)$$

Donde  $f_5$  y  $f_6$  son función sólo de las coordenadas polares, por la suposición del flujo desarrollado. De esta forma, sustituyendo a  $u$  y  $v$  en las ecuación 3.69 y eliminando la presión de la primera y segunda ecuación de momento, solo quedan dos ecuaciones con dos incognitas.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \nabla_1^2 f + \frac{2w}{Rr} \left( r \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial r} - \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) &= vr \nabla_1^4 f, \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= G/\rho + v \nabla_1^2 w, \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde  $\nabla_1^4 = (\nabla_1^2)^2$ . La ecuación anterior puede colocarse en forma adimensional, definiendo las siguientes variables  $f = v\psi$ ,  $W = W_0 w$ ,  $r = a\zeta$ , de donde 3.79 queda

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \nabla_1^2 \psi + KW \left( \zeta \cos \alpha \frac{\partial W}{\partial \zeta} - \sin \alpha \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right) &= vr \nabla_1^4 \psi, \\ \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right) &= B + v \nabla_1^2 W. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Una vez que se obtienen estas ecuaciones adimensionales, se procede a desarrollar las funciones de flujo  $\psi$  y  $W$  en series de Fourier y mediante las condiciones de frontera se pueden

determinar los coeficientes de la serie. De tal manera que al reagrupar términos se obtiene una expresión analítica para las tres componentes de la velocidad dadas por:

$$u/W_0 = [na \sin \alpha (1 - r^2)^2 (4 - r^2)] / 288R, \quad (3.81)$$

$$v/W_0 = [na \cos \alpha (1 - r^2)^2 (4 - 23r^2 + 7r^2)] / 288R, \quad (3.82)$$

$$w/W_0 = (1 - r^2) \left[ 1 - \frac{3r \sin \alpha}{4R} + \right. \quad (3.83)$$

$$\left. \frac{n^2 r \sin \alpha}{11520R} (19 - 21r^2 + 9r^4 - r^6) \right],$$

donde  $W_0$  tiene dimensiones de una velocidad y usualmente representa la velocidad media axial del fluido circulando por el tubo. Para el caso de tubos con  $\delta \ll 1$ , se asume que esta velocidad se encuentra cercana a  $r = 0$ . En estas ecuaciones  $n = Aa^3/\nu$ , con "a" el diámetro del tubo,  $\nu$  la viscosidad cinemática y "A" siendo una constante. La Figura 3.5 muestra el flujo secundario formado en la sección transversal del tubo, donde puede verse que la principal característica de este flujo es que forma dos vórtices simétricos en contraflujo, los puntos de estos vortices, según el trabajo de Dean [20] vienen dados por los puntos  $(r = 0.429a, \alpha = 0)$   $(r = 0.429a, \alpha = \pi)$  y que están marcados con cruces. Cabe mencionar que en este modelo el ángulo  $\alpha$  es medido en contra de las manecillas del reloj con respecto al eje perpendicular al plano central del tubo y paralelo al eje OZ del sistema coordinado discutido en la sección 2.2.1. Una conclusión interesante que se encontró en este estudio

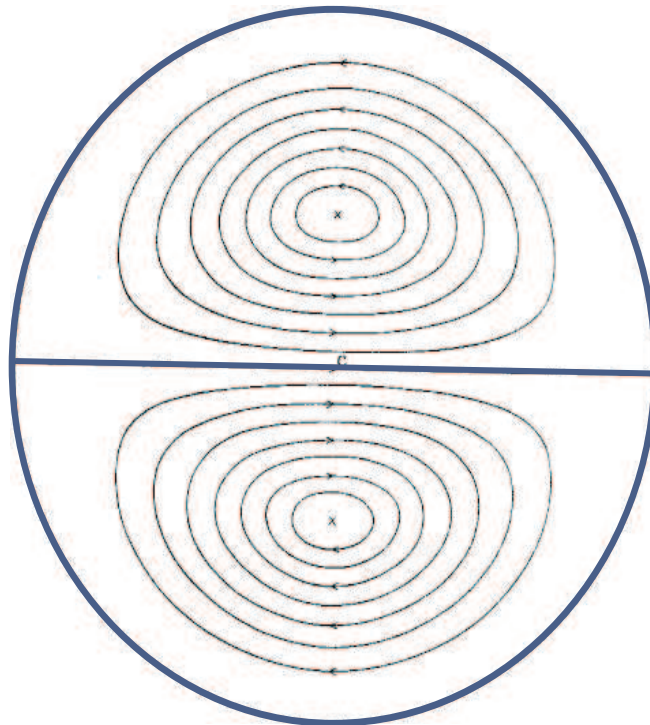


Figura 3.5: Flujo secundario desarrollado en la sección transversal del tubo.

analítico fue que dicho movimiento secundario provocaba una reducción en el gasto fluyendo

a través del tubo. Por lo que la pregunta obligada era en que porcentaje se disminuía y si este fenómeno dependía de la curvatura o de la magnitud del vector velocidad. Tratando de responder estas preguntas en su segundo trabajo Dean pudo obtener una relación que daba una medida de la razón entre el gasto total fluyendo a través de un tubo curvo entre el gasto fluyendo a través de un tubo recto de las mismas dimensiones y sometido al mismo gradiente de presión

$$F_c/F_s = 1 - \left(\frac{K}{575}\right)^2(.03058) + \left(\frac{K}{575}\right)^4(.01195). \quad (3.84)$$

Por ejemplo usando la ecuación 3.84 para el caso de Dean en que  $K = 575$ ,  $F_c/F_s = 0.98137$ , el flujo volumétrico total que pasaría por este tubo curvo se reduce en 1.2 por ciento del valor total que pasaría por un tubo recto, con las mismas dimensiones y sometido al mismo gradiente de presión.

Por esta razón consideramos importante modelar la mecánica de fluidos en el AD propuesto. Principalmente porque, se tiene contemplado en una etapa posterior a este trabajo simular los perfiles de flujo del fluido circulando por el AD; para de esta forma poder cuantificar en que porcentaje se decrementa el gasto y poder tomarlo en cuenta al momento de la dosificación.

### 3.5 Discusión acerca del Capítulo III

En este capítulo, se extendieron las ecuaciones del modelo de Dean que describen, bajo ciertas suposiciones, la mecánica de fluidos en tubos curvos de curvatura constante al caso de fluidos de tipo compresible. Este modelo puede ser aplicado para simular tanto fluidos en fase líquida como gaseosa y por lo tanto constituyen una generalización del modelo Dean. Por otro lado bajo ciertas consideraciones este modelo obtenido también puede ser aplicado al fluido circulando por el AD si consideramos en el diseño una distancia entre vuelta y vuelta de la espiral mucho mayor que el radio de la sección transversal del tubo utilizado; de tal forma que se puede aproximar cada vuelta de la espiral como un toro de curvatura constante. No obstante, que bajo ciertas condiciones esta suposición puede ser válida, recordemos que nuestro objetivo es reducir el tamaño del actuador, por lo tanto se buscará un diseño que permita la mínima distancia entre vueltas de la espiral, pero sin afectar el movimiento del fluido a ser suministrado. Por esta razón en este trabajo se obtendrá un modelo para el actuador que considera la geometría de la espiral, es decir tubos con curvatura variable. Para lograr ésto, fue necesario emplear un sistema coordenado curvilíneo que fuera ortogonal a lo largo la línea central de la espiraloide. Los detalles del modelado matemático, así como la obtención de la métrica establecida en este sistema son esbozados en el capítulo IV y apéndice A respectivamente.

# Capítulo 4

## Modelo del flujo de fluidos en el AD, considerando tubos curvos de curvatura variable

En este capítulo, el modelo de Dean-Germano obtenido para tubos con curvatura constante es extendido al caso de tubos con curvatura variable y de sección transversal circular. Para esto, se considera que la línea central del tubo es enrollado siguiendo la forma de una espiral de Arquímedes. A este sistema, de aquí en adelante, le denominaremos sistema de coordenadas espiroidales.

### 4.1 Sistema de coordenadas espiroidales, usadas en el modelo extendido

La Figura 4.1 muestra el sistema de coordenadas que será usado en este capítulo para modelar la mecánica de fluidos en tubos de curvatura variable. En este sistema coordenado introducido por Germano [24], [25], se parte de que la curva se encuentra parametrizada mediante el parámetro longitud de arco y que además esta curva es de clase  $C^3$ , es decir tres veces diferenciable respecto de este parámetro. Con dicho requerimiento se garantiza la existencia del triedro de Frenet-Serret. El cual genera una base ortonormal compuesto por los vectores  $T(s) = \frac{dC(s)}{ds}$ ,  $N(s) = \frac{dT(s)}{ds} / \left| \frac{dT(s)}{ds} \right|$  y  $B(s) = T(s) \times N(s)$  denominados vector tangente, normal y binormal a la curva  $C(s)$  respectivamente.

A fin de garantizar que localmente el marco de referencia siga siendo ortogonal, se introduce un ángulo  $\phi$  que gira en función de la torsión o curvatura de la traza de la curva de manera tal que el triedro de Frenet-serret siempre sea ortogonal.

Para nuestro caso ver Figura 4.1a, la superficie de un tubo de sección circular (anillo) es enrollado siguiendo la trayectoria de una espiral de arquímedes. El eje de la espiral en el cual el tubo es enrollado es "OZ". El plano "XY" que pasa por "OC" es llamado el plano central de la espiral. La trayectoria trazada por "C" al girar alrededor de OZ es llamada la línea central del espiraloide y corresponde al centro de la sección transversal del tubo. La posición de cualquier punto "P" en la sección transversal del tubo viene dado por las coordenadas ortogonales  $(r, \alpha, s)$ . Donde:

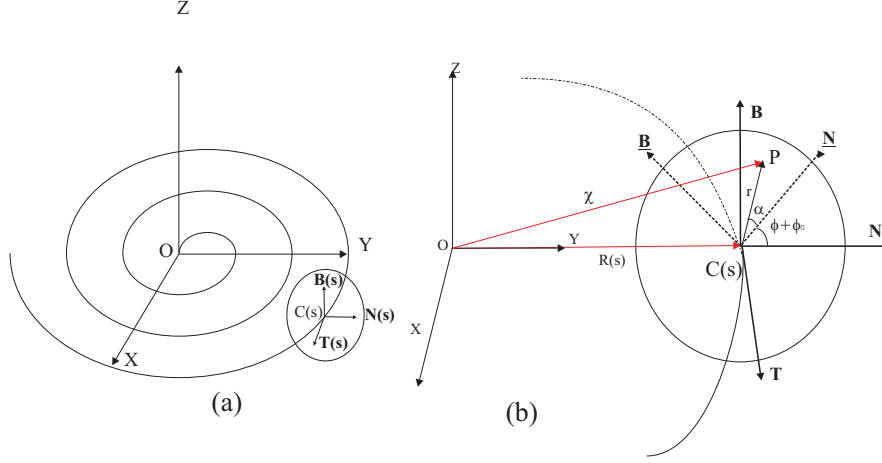


Figura 4.1: Sistema de coordenadas usado en el sistema extendido: (a) Vista geométrica. (b) Marco de coordenadas espiroidales.

$\vec{r}(s)$  es una combinación lineal de los vectores unitarios  $\vec{N}(s)$ ,  $\vec{B}(s)$  y su magnitud denota la posición del punto "P" al centro del tubo.

$\alpha(s)$  es el ángulo que forma el vector  $\vec{r}(s)$  con respecto al vector  $\vec{N}(s)$ . Donde este vector  $\vec{N}(s)$  es una combinación lineal de  $\vec{N}(s)$  y  $\vec{B}(s)$  y que se encuentra rotado un ángulo  $\phi(s)$  con respecto a N(s). Para mas detalles ver subsección A.2.2 del apéndice A.

"s" es el parámetro longitud de arco con el que se parametriza la curva y para el caso de la espiral de Arquímedes viene dado por  $s = \int (1 + \theta^2)^{1/2}$

En la Figura 4.1b, la magnitud de R(s) denota la distancia de la línea central del espiraloide al origen del sistema cartesiano y que en este caso corresponde al radio de la espiral de Arquímedes. En esta misma Figura se puede observar que cualquier vector de posición  $\chi$  viene dado por la suma vectorial de R(s) y r(s), dado por

$$\chi = P - 0 = R(s) + [r \cos(\alpha + \phi(s) + \phi_0)]\vec{N}(s) + [r \sin(\alpha + \phi(s) + \phi_0)]\vec{B}(s), \quad (4.1)$$

con  $\phi(s) = -\int_{s_0}^s \tau(\bar{s})d\bar{s}$  y donde  $\phi_0$  y  $s_0$ , representan los valores iniciales del ángulo de rotación y de la longitud de arco respectivamente. Por ejemplo tomando un valor inicial para  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$  y  $s_0 = 0$ , se puede escribir el diferencial del vector de posición como

$$d\chi = ds[1 + \kappa(s)r \sin(\alpha + \phi(s))]\vec{T}(s) + dr\vec{N}(s) + rd\alpha\vec{B}(s) \quad (4.2)$$

Donde como ya se comentó los vectores  $\vec{N}(s)$  y  $\vec{B}(s)$  son combinación lineal de los vectores unitarios  $\vec{N}(s)$  y  $\vec{B}(s)$ , los cuales vienen dados por

$$\begin{aligned} \vec{N}(s) &= \vec{B}(s) \cos(\alpha + \phi(s)) - \vec{N}(s) \sin(\alpha + \phi(s)), \\ \vec{B}(s) &= -\vec{B}(s) \sin(\alpha + \phi(s)) - \vec{N}(s) \cos(\alpha + \phi(s)), \end{aligned} \quad (4.3)$$

tomando el producto escalar de la ecuación 4.2 se pueden obtener los factores de escala en este sistema curvilíneo ortogonal, los cuales vienen dados por,

$$h_r = 1, h_\alpha = r, h_s = \tilde{R} = [1 + \kappa(s)r \sin(\alpha + \phi(s))], \quad (4.4)$$

para más detalles en su obtención ver subsección A.2.2 del apéndice A.

Una vez obtenidos los factores de escala del sistema de coordenadas espiroidales resulta más simple modelar la mecánica del fluido circulando por esta geometría.

## 4.2 Modelo extendido en coordenadas espiroidales

Como se comentó en el capítulo II, una metodología propuesta en este trabajo para obtener el modelo matemático de un sistema físico es:

1. Definir el sistema coordenado donde se modelará dicho fenómeno. Para el caso de tubos curvos resulta conveniente usar un sistema coordenado que sea curvilíneo y ortogonal.
2. El siguiente paso consiste en obtener la métrica en ese sistema coordenado y determinar los factores de escala del sistema coordenado curvilíneo
3. Una vez con los factores de conversión se procede a desarrollar las ecuaciones de N-S definidas para coordenadas cartesianas en el nuevo sistema curvilíneo ortogonal.

Por otro lado y con el fin de homologar la notación usada en los capítulos previos, se ha convenido denotar las componentes de la velocidad en la sección transversal con las mismas variables polares, pero para el caso de la componente axial, se utilizará la velocidad en la dirección tangente a la curva y parametrizada por medio de la longitud de arco. Esto se realiza para garantizar que las tres componentes del vector velocidad sean localmente ortogonales entre si. El cuadro 4.1 muestra la nomenclatura adoptada en este capítulo. Donde

<i>i</i>	<i>r</i>	$\alpha$	<i>s</i>
$h_i$	1	<i>r</i>	$1 + k(s)r \sin(\theta + \phi)$
$v_i$	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>

Cuadro 4.1: Nomenclatura usada en el modelo extendido.

*i* denota las coordenadas espiroidales. Las  $h_i, (h_r, h_\alpha, h_s)$  representan los factores de escala encontrados para este sistema coordenado y las  $u_i, (u_r, u_\alpha, u_s)$  refieren a las componentes del vector velocidad en la dirección radial, tangencial y axial respectivamente.

### 4.2.1 Ecuación de continuidad en C-E: Modelo extendido

Considerando un fluido no-compresible se tiene que la divergencia del vector velocidad es igual a cero es decir  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ , de donde se tiene que al desarrollar se llega a

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{h_r h_\alpha h_s} \left[ \frac{\partial h_\alpha h_s u_r}{\partial r} + \frac{\partial h_r h_s u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial h_r h_\alpha u_s}{\partial s} \right] = 0. \quad (4.5)$$

Donde después de sustituir los factores de escala para C-E y dados por  $h_r = 1$ ,  $h_\alpha = r$ ,  $h_\theta = 1 + k(s)r \sin(\alpha + \phi(s)) = \bar{R}$ . La ecuación 4.5 queda de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\bar{R}r} \left[ \frac{\partial [r(1 + kr \sin(\alpha + \phi(s)))u_r]}{\partial r} + \frac{\partial [1 + kr \sin(\alpha + \phi(s))u_\alpha]}{\partial \alpha} + \frac{\partial [ru_s]}{\partial s} \right] = 0, \quad (4.6)$$

que al realizar los cálculos correspondientes se obtiene

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{k(s) \sin \bar{\alpha}}{\bar{R}} v_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{k(s) \cos \bar{\alpha} v_\alpha}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{R}} \frac{\partial u_s}{\partial s} = 0. \quad (4.7)$$

Aquí, se ha tomado  $\bar{\alpha} = \alpha + \phi(s)$  y  $\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}$  porque el ángulo de rotación  $\phi(s)$  no depende de  $\alpha$  y por lo tanto en este capítulo se usará indistintamente. Ahora designando las componentes del vector velocidad  $\vec{u}$  como  $\vec{u}(u_r, u_\alpha, u_s) = \vec{u}(u, v, w)$ , se llega a la ecuación de continuidad en coordenadas espiroidales.

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{k(s) \sin \bar{\alpha}}{\bar{R}} u + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{k(s) \cos \bar{\alpha} v}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{R}} \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \quad (4.8)$$

Donde puede observarse que en la ecuación anterior, ya aparece involucrada la curvatura  $k(s)$  de la espiral. La cual se deduce a partir de la ecuación A.7 esbozada en el apéndice A y que viene dada por:

$$k(s) = \frac{2 + (F^{-1}(s))^2}{\beta_2(1 + (F^{-1}(s))^2)^{3/2}}. \quad (4.9)$$

En esta ecuación 4.9 el parámetro longitud de arco para la espiral viene dado por  $s = F(\theta) = \int [1 + (\theta')^2]^{1/2} d\theta$ . Con esta relación y asumiendo que la inversa existe para el rango de  $\theta$  de interés. Podemos parametrizar la curva y por lo tanto su curvatura mediante este parámetro. Para más detalles en su cálculo ver la subsección A.1.2 del Apéndice A

## 4.3 Ecuaciones de momento en coordenadas espiroidales

En esta sección sólo se describirá en detalle la obtención de la ecuación de momento en la dirección axial. Para obtener las componentes radial y tangencial se sigue un procedimiento similar al aquí expuesto.

### 4.3.1 Deducción de la ecuación de momento: Dirección axial

Partiendo de la ecuación 3.15 para fluido incompresible obtendremos la ecuación de momento en la dirección de  $s$ , es decir en la dirección del flujo y la cuál viene dada por:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]_s - [\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_s + \left[ \frac{1}{2} \nabla (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right]_s = \\ & - \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} \right]_s - \nu [\nabla \times (\nabla \times \vec{u})]_s + \left[ \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \vec{F}_s \right]_s. \end{aligned} \quad (4.10)$$



**Términos lado izquierdo:**

El primer término del lado izquierdo viene dado por:

$$\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right]_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Al utilizar la ecuación A.23 se obtiene la expresión para el segundo término del lado izquierdo dado por

$$[\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_s = u_r (\nabla \times \vec{u})_\alpha - u_\alpha (\nabla \times \vec{u})_r, \quad (4.12)$$

donde  $(\nabla \times \vec{u})_\alpha$ , y  $(\nabla \times \vec{u})_r$ , vienen dados por la ecuación 3.18 con sus respectivos factores de escala para C-T. De esta forma, sustituyendo en la ecuación 4.12 se obtiene

$$(\nabla[\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_s = u_r \left[ \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial(u_r)}{\partial s} - \frac{\partial(\tilde{R}u_s)}{\partial r} \right] - u_\alpha \left[ \frac{1}{\tilde{R}r} \frac{\partial(\tilde{R}u_s)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(ru_\alpha)}{\partial s} \right], \quad (4.13)$$

que al realizar los cálculos correspondientes se llega a

$$[\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})]_s = \frac{u_r}{\tilde{R}} \frac{\partial u_r}{\partial s} - \frac{u_r u_s \sin \bar{\alpha}}{\tilde{R}} - u_r \frac{\partial u_s}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} \frac{\partial u_s}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha u_s \cos \bar{\alpha}}{\tilde{R}} - \frac{u_\alpha}{\tilde{R}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial s}. \quad (4.14)$$

El tercer término del lado izquierdo queda de la siguiente forma

$$\left[\frac{1}{2} \nabla(\vec{u} \cdot \vec{u})\right]_s = \frac{1}{2\tilde{R}} \frac{\partial}{\partial s} [u_r^2 + u_\alpha^2 + u_s^2] = \frac{u_r}{\tilde{R}} \frac{\partial u_r}{\partial s} + \frac{u_\alpha}{\tilde{R}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial s} + \frac{u_s}{\tilde{R}} \frac{\partial u_s}{\partial s}. \quad (4.15)$$

De igual manera, sumando los primeros tres términos del lado izquierdo y designando las componentes de la velocidad  $\vec{u}(u_r, u_\alpha, u_s) = \vec{u}(u, v, w)$  se, obtiene la expresión para la componente axial del lado izquierdo.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{w}{\tilde{R}} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\kappa(s)}{\tilde{R}} [uw \sin \bar{\alpha} + vw \cos \bar{\alpha}]. \quad (4.16)$$

Por un procedimiento similar, se procede a obtener las expresiones para cada uno de los términos del lado derecho de la ecuación 3.15 tal como fue realizado en el capítulo II, pero para este caso se sustituyen los factores de escala en C-E. Así, en la siguiente sección se muestran las componentes radial, tangencial y axial de la ecuación de momento; que junto con la ecuación de continuidad conforman el modelo matemático del flujo de fluidos que circulará por el AD; donde éstas difieren del modelo de Dean porque ya incluyen la curvatura de la curva, que para el caso de la espiral simétrica esta curvatura no es constante.

## 4.4 Modelo del flujo de fluidos en el AD

### Dirección radial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{\tilde{R}} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v^2}{r} - \frac{k(s)}{\tilde{R}} [w^2 \sin \bar{\alpha}] = \\ \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} - v \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{k(s)}{\tilde{R}} \cos \bar{\alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial u}{\partial s} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\kappa(s)}{\tilde{R}} w \sin \bar{\alpha} \right) \right] + \rho_1 g_r. \end{aligned} \quad (4.17)$$

### Dirección tangencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{w}{\tilde{R}} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{uv}{r} - \frac{\kappa(s)}{\tilde{R}} [w^2 \cos \bar{\alpha}] = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha} - v \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{k(s)}{\tilde{R}} \sin \bar{\alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\kappa(s)}{\tilde{R}} w \cos \bar{\alpha} \right) \right] + \rho_1 g_\alpha. \end{aligned} \quad (4.18)$$

### Dirección axial

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{w}{\tilde{R}} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\kappa(s)}{\tilde{R}} [uw \sin \bar{\alpha} + vw \cos \bar{\alpha}] = \\ - \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} + v \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\kappa(s)}{\tilde{R}} w \sin \bar{\alpha} - \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\kappa(s)}{\tilde{R}} w \cos \bar{\alpha} - \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] + \rho_1 g_s. \end{aligned} \quad (4.19)$$

### Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{k(s) \sin \bar{\alpha}}{\tilde{R}} u + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{k(s) \cos \bar{\alpha} v}{\tilde{R}} + \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \quad (4.20)$$

De esta forma, dicho modelo matemático sirve para modelar la mecánica de fluidos no compresibles en tubos con curvatura variable.

### 4.4.1 Comentarios acerca del Capítulo IV

En cada uno de los modelos obtenidos en los capítulos III y IV, se observa que en las componentes de la ecuación de momento, sobre todo del lado izquierdo; aparecen términos adicionales de tipo no lineal. Estos términos corresponden a velocidades que aparecen en las ecuaciones producto tanto de la curvatura del tubo, como de las fuerzas centrífugas, desarrolladas por la rotación del fluido alrededor del eje  $OZ$  (que es perpendicular al plano de la línea central del toro y de la espiral). Por otro lado, como es discutido en el artículo de Dean [20], precisamente son estos términos no lineales los que dificultan la obtención de soluciones analíticas para condiciones de frontera simples de tipo Neumann. Por esta razón, es que muchos autores han recurrido a métodos numéricos a fin de obtener numéricamente soluciones aproximadas al modelo de Dean.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo a futuro

### 5.1 Comentarios y conclusiones sobre los modelos obtenidos

El trabajo realizado en esta tesis fue el de diseñar un AD usando tubos curvos de curvatura variable. Este diseño innovador nos permitirá reducir etapas mecánicas, principalmente porque no se requerirán etapas adicionales para convertir el movimiento rotacional del motor a movimiento longitudinal como lo realizan los mecanismos de las bombas comerciales. Éstas características del AD nos permitirán reducir el tamaño y el peso final del dispositivo. Además, se obtuvieron los modelos matemáticos de la mecánica de fluidos en el AD diseñado. Para esto, primero se consideró el caso de aproximar secciones del AD por medio de toros de curvatura constante; en este punto, es importante resaltar, que se logró generalizar el modelo de Dean para el caso de fluidos tanto compresibles como incompresibles lo cual, en nuestra opinión, ayuda a complementar y a enriquecer los modelos reportados en la literatura [20], [26], que aplican para fluidos newtonianos de tipo no compresible. De esta forma, en el modelo extendido tanto la ecuación de continuidad como la ecuación de momento cambian agregando más complejidad al modelo de Dean. Sin embargo dicho modelo resulta más general porque puede ser usado para simular tanto la mecánica de fluidos líquidos como de gases circulando por tubos curvos de curvatura constante y en estado no estacionario.

Por otro lado y debido a que la geometría del AD diseñado involucra tubos con curvatura variable, fue necesario extender el modelo de Dean-Germano al caso de tubos con curvatura variable, donde ya es incluida la curvatura de la espiral de Arquímedes.

Por último, una situación que se desprende de la obtención de estos modelos es, su potencial de aplicaciones en distintas áreas de la ingeniería donde se requiere la utilización tanto de tubos con curvatura fija como de tubos con curvatura variable. Así, en la siguiente sección se darán un par de ejemplos de donde pudieran ser empleados los modelos aquí desarrollados.

### 5.2 Áreas de aplicación de los modelos obtenidos

En el estudio del flujo de fluidos en tubos curvos, en la mayoría de los trabajos existentes en la literatura han sido enfocados a comprender el fenómeno y las consecuencias que originan el flujo secundario, pero no se esbozan posibles aplicaciones en lo que respecta al uso de

tubos curvos. De tal manera, que la mayoría de los trabajos se esfuerzan más en mostrar la aparente desventaja del efecto de la curvatura en la reducción del gasto por unidad de tiempo (flujo volumétrico) más que en buscar posibles aplicaciones de estos efectos. No obstante en mi opinión, el flujo secundario pudiera ser deseable en otras circunstancias y dependerá del tipo de aplicación que se requiera realizar. Por ejemplo, en aplicaciones donde no es importante la precisión del flujo volumétrico pero sí evitar llegar a regímenes de turbulencia. En estos casos, considero recomendable usar tubos curvos, ya que el flujo secundario hace que se incremente el número de Reynolds al cuál aparece la turbulencia. En las siguientes subsecciones se esboza brevemente un par de aplicaciones donde pudieran aplicarse los resultados alcanzados en este trabajo.

### 5.2.1 Intercambio de calor

Un nicho de aplicación de los modelos obtenidos podría ser en áreas relacionadas con el intercambio de calor. Para esto, se tendría que agregar a los modelos la ecuación de energía y de esta forma poder simular el intercambio de calor en tubos curvos. La Figura 5.1 muestra

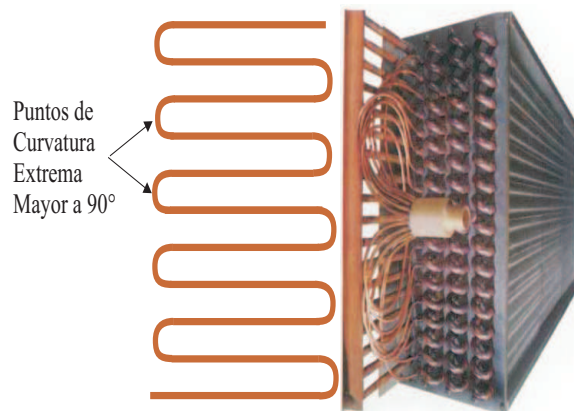


Figura 5.1: Sistema de enfriamiento basados en arreglos de tubos de cobre en forma de serpentines.

un sistema de enfriamiento típico del sector industrial donde se utilizan arreglos de tubos de cobre en forma de serpentines. Sin embargo estos sistemas presentan problemas relacionados a la obstrucción o deterioro de los ductos en la parte curva del serpentín, precisamente por las curvaturas extremas comunmente mayores a 90 grados. Por esta razón y de acuerdo a la experiencia obtenida en este trabajo se sugiere que si la curvatura fuera menor o de una variación más suave, los problemas (daños al equipo) asociados a estas curvaturas podrían ser disminuidos y mejor aún sustituyendo los tubos rectos por tubos de curvatura variable se podría favorecer o mejorar la remoción de calor. Para esto considero interesante simular los mecanismos de transporte de calor usando los modelos aquí desarrollados, y con esta información proponer rediseños en la geometría de los equipos de refrigeración utilizados actualmente.

## 5.2.2 Modelado del flujo sanguíneo aórtico

Otra área donde podrían tener aplicación los modelos desarrollados es en la simulación del flujo sanguíneo en regiones donde fuera posible aproximar secciones de las venas y arterias por ductos de curvatura constante y/o variable. La Figura 5.2 muestra la anatomía

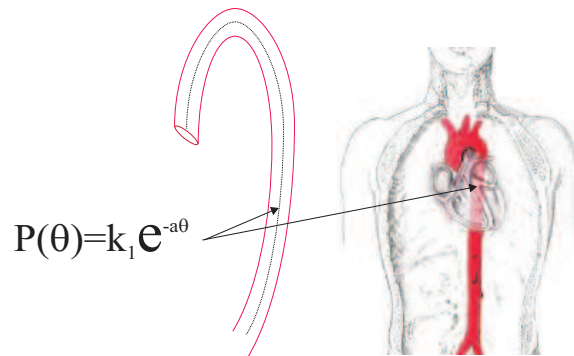


Figura 5.2: Anatomía de la Aorta, vista como un ducto de curvatura variable.

de la aorta donde se puede apreciar que existe una curvatura al inicio del ducto saliendo del corazón. Así, aproximando la línea central de este tubo por medio de una curva parametrizada y de tipo espiral logarítmica<sup>1</sup> se podrían adaptar perfectamente los modelos obtenidos a la geometría de la arteria aorta y poder simular los perfiles de flujo sanguíneo, considerando en una primera aproximación a la sangre como un fluido de tipo newtoniano.

## 5.3 Trabajo a futuro

En lo que se respecta al trabajo a futuro que se que se tiene contemplado realizar es:

1. Caracterizar la viscosidad de la insulina, dado que es el tipo de fluido que suministrará la bomba.
2. Segundo queda por concluir con las simulaciones numéricas del modelo extendido de Dean, para posteriormente realizarlas en el modelo obtenido para el flujo de fluidos en el AD, pero además incluyendo el modelo caracterizado para la viscosidad de la insulina.

De estas simulaciones se pretende cuantificar en que porcentaje será decrementado el gasto (flujo volumétrico), producto del radio no constante de la espiral. Esto, porque se prevé que dicho decremento será variable. Es decir se espera que la reducción del gasto sea mayor en las primeras vueltas del espiraloide que en la últimas donde la curvatura es casi uniforme. Así tomando en cuenta este decremento y conociendo el rango de velocidades de la dosificación, se podría garantizar que el AD suministrará el medicamento de forma precisa. Sobretudo

<sup>1</sup> Donde " $k_1$ " y " $a$ " son constantes arbitrarias que permiten ajustar la espiral logarítmica a la curva mostrada en la Figura ??

porque recordemos que las dosis suministradas por el AD deberán ser variantes en el tiempo como las calculadas por algoritmos de control automático como por ejemplo los propuestos en [9], [10]. Por último, también se tiene contemplado usar la información obtenida de las simulaciones para optimizar el diseño del AD incluyendo al micromotor, de tal manera que faciliten en una etapa posterior la realización del dispositivo portátil.

# Apéndice A

## Parametrización y cálculo de las métricas en C-T y C-E

### A.1 Parametrización de una curva mediante el parámetro longitud de arco

Sea  $C$  una curva plana parametrizada mediante el parámetro  $t$ , y representada por  $C : C(t) = (x(t), y(t))$ , con  $t_0 < t < t_1$ . De acuerdo a [32], se define la longitud  $L_C$  de una curva plana parametrizada por  $t$  mediante

$$L_C = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{dC(\tau)}{d\tau} \right| d\tau = \int_{t_0}^{t_1} (\sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}) d\tau. \quad (\text{A.1})$$

Dada esta curva  $C(t)$ , se define la longitud de arco  $S(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{dC(\tau)}{d\tau} \right| d\tau$ . De esta forma, la función  $s = S(t)$  define un nuevo parámetro denominado parámetro de longitud de arco. Por otro lado, si esta relación es invertible puede usarse a "s" como un nuevo parámetro para parametrizar la curva  $C = C(s)$  donde  $s$  es sustituido por  $t$  mediante la siguiente relación  $t = S^{-1}(s)$ . Para ilustrar un ejemplo calcularemos en la siguiente sección la longitud de la línea central del toro y usaremos esta relación para parametrizar nuevamente a la curva con respecto al parámetro longitud de arco.

#### A.1.1 Cálculo de la longitud de la curva del toro y de la espiral

La línea central del toro describe un círculo de radio  $R_T$  parametrizado por el ángulo  $\theta$  mediante  $C(\theta) = (R_T \cos \theta, R_T \sin \theta)$ . Ahora, partiendo de la ecuación A.1 para calcular la longitud de una curva [32], se tiene que para el caso de la línea central del toroide esta viene dada por

$$L_T = \int_a^b \left| \frac{dC(\theta)}{d\theta} \right| d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} [R_T^2 \cos^2(\theta) + R_T^2 \sin^2(\theta)]^{1/2} d\theta = R_T(\theta_1 - \theta_0). \quad (\text{A.2})$$

Tomando  $\theta_0 = 0$  y  $\theta_1 = 2\pi$ , se tiene que la longitud de la circunferencia del toro es  $L_T = 2\pi R_T$ , la cual es la fórmula de la longitud de un circunferencia. Por otro lado definiendo  $s =$

$L_\theta = R_T\theta$  y  $\theta = s/R_T$ , podemos parametrizar la línea central del toro mediante el parámetro longitud de arco por:

$$C(s) = (R_T \cos(s/R_T), R_T \sin(s/R_T)). \quad (\text{A.3})$$

De la misma manera y partiendo de la ecuación A.1 calcularemos la longitud de la espiral. Esta curva viene dada paramétricamente por  $C(\theta) = [(\beta_1 + \beta_2)\theta \cos \theta, (\beta_1 + \beta_2)\theta \sin \theta]$ . Al realizar el cálculo de la longitud de la curva se tiene

$$L_E = \int_a^b \left| \frac{dC(\theta)}{d\theta} \right| d\theta = \int_a^b [(\beta_1 + \beta_2)^2 (\cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \theta \cos \theta)^2]^{1/2} d\theta = \quad (\text{A.4})$$

$$(\beta_1 + \beta_2) \int_a^b (1 + \theta^2)^{1/2} d\theta,$$

la cual al resolverla analíticamente, obtenemos la fórmula para evaluar la longitud de una espiral simétrica.

$$L_E = \int_a^b (1 + \theta^2)^{1/2} d\theta = (\beta_1 + \beta_2) \left[ \frac{1}{2} \theta (1 + \theta^2)^{1/2} + \frac{1}{2} \beta_2 \sinh^{-1} \theta \right]_a^b = \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left[ \theta (1 + \theta^2)^{1/2} + \ln \left( \theta (1 + \theta^2)^{1/2} \right) \right]_a^b.$$

A partir de la ecuación A.5 podemos definir el parámetro longitud de arco como  $s = S(L_E) = \int_a^b (1 + \theta^2)^{1/2} d\theta$ . Debido a que el integrando siempre es positivo, la integral siempre es positiva y además creciente. Por lo tanto, escogiendo el valor de  $\theta$  en el intervalo de interés podemos suponer que existe un función inversa dada por  $\theta = F^{-1}(s)$  con esta relación se puede parametrizar la ecuación de la espiral y queda de la siguiente forma

$$C(s) = [(\beta_1 + \beta_2)F^{-1}(s) \cos(F^{-1}(s)), (\beta_1 + \beta_2)F^{-1}(s) \sin(F^{-1}(s))]. \quad (\text{A.6})$$

La cuál representa una parametrización de la espiral mediante el parámetro longitud de arco.

## A.1.2 Cálculo de la curvatura del toro y de la espiral

Partiendo de la ecuación para obtener la curvatura de una curva parametrizada [32], se tiene que

$$k(\theta) = \frac{\det(C'(\theta), C''(\theta))}{|C'(\theta)|^3}. \quad (\text{A.7})$$

Donde  $C'(\theta)$  y  $C''(\theta)$  denotan la primera y segunda derivada con respecto al parámetro que parametriza la curva y "det" denota el determinante del producto escalar de estas dos expresiones. Para el caso del toro y usando la ecuación A.7, la curvatura viene dada por

$$k(\theta) = R_T^2 \frac{\det \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}}{\left[ R_T ((-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2)^{1/2} \right]^3} = \frac{1}{R_T} \quad (\text{A.8})$$

Por esta razón se dice que la línea central de un toro posee una curvatura constante e igual al inverso de su radio.



Por otra parte, recordemos que la espiral parametrizada por medio del ángulo  $\theta$ , viene dada por  $C(\theta) = (\beta_2\theta\cos\theta, \beta_2\theta\sin\theta)$ . Así, usando la ecuación A.7, obtenemos la curvatura de la espiral.

$$k(\theta) = \beta_2^2 \frac{\det \begin{pmatrix} -\theta \sin \theta + \cos \theta & \theta \cos \theta + \sin \theta \\ -\theta \cos \theta - 2 \sin \theta & -\theta \sin \theta + 2 \cos \theta \end{pmatrix}}{\left[ \beta_2 \left( (\cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \theta \cos \theta)^2 \right)^{1/2} \right]^3}.$$

De donde al realizar las operaciones y reagrupando términos se llega a la expresión para la curvatura de la espiral, dada por

$$k(\theta) = \frac{2 + \theta^2}{\beta_2 (1 + \theta^2)^{3/2}}. \quad (\text{A.9})$$

## A.2 Obtención de las métricas en coordenadas toroidales y espiroidales

En este trabajo desarrollaremos el modelo de Dean a partir de las ecuaciones de N-S de forma generalizada, es decir libre de coordenadas. Parte fundamental del procedimiento para obtener el modelo matemático consiste en obtener la métrica en las distintas geometrías propuestas en este trabajo, para de esta forma encontrar los factores de escala en dicho sistema coordenado que permitan representar las ecuaciones de N-S en su forma vectorial en sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales.

### A.2.1 Métrica en coordenadas toroidales (C-T)

El diferencial de línea  $ds$  en coordenadas rectangulares se define como

$$(ds)^2 = (dL_x)^2 + (dL_y)^2 + (dL_z)^2 = \sum_i dL_i \cdot dL_i. \quad (\text{A.10})$$

Si el sistema curvilíneo transformado es ortogonal, el diferencial de línea llega a ser

$$(ds)^2 = \sum_i h_i^2 (dL_i \cdot dL_i). \quad (\text{A.11})$$

Donde  $L_i$ , representa las coordenadas del nuevo sistema y donde la letra L se usa para denotar un sistema coordenado ortogonal.

Ahora partiendo de las relaciones entre coordenadas rectangulares y toroidales y tomando su diferencial se tiene:

$$\begin{aligned} x &= [R + r \sin \alpha] \cos \theta, \\ y &= [R + r \sin \alpha] \sin \theta, \\ z &= r \cos \alpha, \\ dx &= \sin \alpha \cos \theta dr + r \cos \alpha \cos \theta d\alpha - \hat{R} \sin \theta d\theta, \\ dy &= \sin \alpha \sin \theta dr + r \cos \alpha \sin \theta d\alpha + \hat{R} \cos \theta d\theta, \\ dz &= \cos \alpha dr - r \sin \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Donde  $\hat{R} = R + r \sin \alpha$ , posteriormente al realizar la suma de los cuadrados de cada uno de los diferenciales, se obtiene la expresión para el diferencial de línea en coordenadas toroidales.

$$(dL)^2 = (dr)^2 + r^2(d\alpha)^2 + \hat{R}^2(d\theta)^2. \quad (\text{A.13})$$

De esta ecuación se obtienen los factores de escala dados por el cambio de coordenadas, y a partir de la ecuación A.11 se identifican los  $h_i$ s, para el sistema de coordenadas toroidales.

$$h_r = 1; h_\alpha = r; h_\theta = \hat{R} = R + r \sin \alpha. \quad (\text{A.14})$$

## A.2.2 Métrica en coordenadas espiroidales (C-E)

En esta sección, se obtendrá la métrica de un espacio curvilíneo y ortonormal. Para esto se seguirá el sistema coordenado introducido por Germano [24]. En este sistema, la traza de la curva debe estar parametrizada mediante el parámetro longitud de arco, además de que dicha curva debe ser de clase  $C^3$  respecto de este parámetro. Con este requerimiento se garantiza la existencia del triedro de Frenet-Serret. El cual viene dado por:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{dC(s)}{ds}, \\ N(s) &= \frac{dT(s)}{ds} / \left| \frac{dT(s)}{ds} \right|, \\ B(s) &= T(s) \times N(s). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Este triedro genera una base ortonormal compuesto por los vectores tangente, normal y binormal a la curva  $C(s)$  respectivamente. La Figura A.1 muestra este sistema coordenado curvilíneo que permite definir un sistema ortonormal a lo largo de las curvas parametrizadas mediante el parámetro "s". Para poder garantizar que localmente este marco de referencia siga siendo ortogonal, debe introducirse un ángulo  $\phi$  que gire en función de la torsión o curvatura de la traza de la curva de manera tal que el triedro de Frenet-serret siempre sea ortogonal. Este ángulo  $\phi$ , también está parametrizado por "s" y representa el ángulo de giro del vector normal  $\vec{N}(s)$  y  $\vec{B}(s)$ , en función de la torsión de la curva.

En este sistema, cualquier vector de posición  $\chi$  viene dado por

$$\chi = P - O = R(s) + [r \cos(\alpha + \phi(s) + \phi_o)]\vec{N}(s) + [r \sin(\alpha + \phi(s) + \phi_o)]\vec{B}(s), \quad (\text{A.16})$$

donde  $\phi(s) = -\int_{s_o}^s \tau(\bar{s})d\bar{s}$ , con  $\phi_o$  y  $s_o$ , representando los valores iniciales del ángulo de giro y de la longitud de arco respectivamente. Por ejemplo tomando los valores iniciales para  $\phi_o = \frac{\pi}{2}$  y  $s_o = 0$ , se puede escribir el diferencial del vector de posición como

$$d\chi = ds[1 + \kappa(s)r \sin(\alpha + \phi(s))]\vec{T}(s) + dr\vec{N}(s) + rd\alpha\vec{B}(s). \quad (\text{A.17})$$

Donde los vectores  $\vec{N}(s)$  y  $\vec{B}(s)$  son combinación lineal de los vectores unitarios  $\vec{N}(s)$  y  $\vec{B}(s)$  y que giran en función de la torsión de la curva. Estos vectores vienen dados por

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{B}(s) \cos(\alpha + \phi(s)) - \vec{N}(s) \sin(\alpha + \phi(s)), \\ \vec{B} &= -\vec{B}(s) \sin(\alpha + \phi(s)) - \vec{N}(s) \cos(\alpha + \phi(s)). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

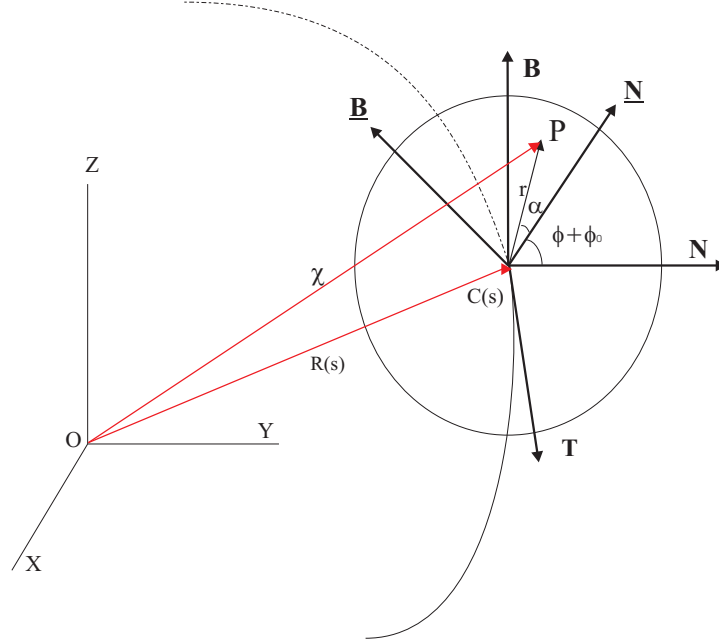


Figura A.1: Sistema de coordenadas espiroidales, usado en el modelo extendido.

Por último tomando el producto escalar de  $d\chi$  se obtiene la métrica para este sistema coordenado y que viene dado por

$$d\chi \cdot d\chi = (1 + \kappa(s)r \sin(\alpha + \phi(s)))(ds)^2 + (dr)^2 + r^2(d\alpha^2). \quad (\text{A.19})$$

De aquí se obtienen los factores de escala en este sistema curvilíneo ortogonal dados por  $h_r = 1$ ,  $h_\alpha = r$ ,  $h_s = \tilde{R} = [1 + \kappa(s)r \sin(\alpha + \phi(s))]$

### A.3 Gradiente, Divergencia y Rotacional

Empezaremos por definir las operaciones elementales de producto escalar y vectorial entre campos escalares y campos vectoriales [31]. Sean  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dos vectores con A y B sus magnitudes se define el producto escalar como

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \sum_i A_i B_i, \quad (\text{A.20})$$

y el producto vectorial o producto aspa entre 2 vectores como

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_j \sum_k e_{ijk} A_j B_k, \quad (\text{A.21})$$

donde  $e_{ijk}$  es llamado el tensor unitario o símbolo de permutación que toma los siguientes valores.

$e_{ijk} = 0$  si cualquiera dos índices son iguales,  $e_{ijk} = 1$  si  $ijk = 123, 231$  ó  $312$ , y  $e_{ijk} = -1$

si  $ijk = 132, 213$  ó  $321$ . Haciendo uso del teorema de la divergencia de gauss, se puede obtener una expresión para la divergencia de un campo vectorial en coordenadas curvilíneas ortogonales la cual viene dado por

$$(\nabla \cdot \vec{A}) = \text{div} \vec{A} = \frac{1}{h_i h_j h_k} \sum_i^c \frac{\partial h_j h_k \vec{A}_i}{\partial L_i}, \quad (\text{A.22})$$

donde  $h_i, h_j, h_k$  corresponden a los factores de escala del sistema curvilíneo que para el caso de C-T  $i, j, k = r, \alpha, \theta$  respectivamente,  $A_i$  denota la  $i$ -ésima componente del vector  $\vec{A}$ . Por otro lado, usando el teorema de Stokes se obtiene una expresión para el rotacional de un campo vectorial, dado por:

$$(\nabla \times \vec{A})_i = \frac{1}{h_j h_k} \left( \frac{\partial h_k A_k}{\partial L_j} - \frac{\partial h_j A_j}{\partial L_k} \right). \quad (\text{A.23})$$

Donde la ecuación A.23 permite obtener la  $i$ -ésima componente del nuevo vector y para deducir cada una de ellas debe seguirse una rotación cíclica de los subíndices. Por ejemplo para obtener la primer componente de la ecuación A.23 en C-T, los subíndices quedan  $i = r, j = \alpha, k = \theta$ . Para obtener la segunda componente los subíndices quedan como  $i = \alpha, j = \theta, k = r$ , por último para obtener la tercer componente del vector rotacional los subíndices quedan  $i = \theta, j = r, k = \alpha$ . Las ecuaciones A.13, A.19, A.22, A.23, serán ampliamente usadas en los capítulos I y II, para derivar los modelos matemáticos del A-D de la bomba.

### A.3.1 Cálculo del perfil de flujo en un tubo recto

Antes de empezar a familiarizarse con la mecánica de fluidos en tubos curvos, considero importante comprender como se desarrolla el perfil de velocidades en un fluido newtoniano cuando pasa a través de un tubo recto de sección circular. Este problema, que bajo ciertas simplificaciones, conocidas como suposiciones de la ley de Hagen-Poiseuille, puede ser resuelto analíticamente, es aplicable para fluidos newtonianos y no compresibles. Dichas suposiciones son:

- El Flujo es laminar, lo que significa que el número de Reynolds ( $Re$ ) es menor que 2100 ( $Re \leq 2100$ ).
- La densidad del fluido es constante, es decir el fluido es incompresible
- El perfil de velocidades del fluido es independiente del tiempo, esto se conoce como flujo en estado estacionario.
- El Fluido es newtoniano, es decir, obedece la ley de viscosidad de Newton.
- Los efectos a la salida del tubo son despreciables y se supone que la longitud del tubo es mucho mayor en comparación con su diámetro.
- El fluido se comporta como un medio continuo.
- No existe deslizamiento del fluido en las paredes del tubo.

Con las suposiciones anteriores, el problema de encontrar el perfil de velocidades de un fluido en un tubo recto, poseé solución analítica y viene dada por

$$v_z = \frac{(P_o - P_L)a^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \quad (\text{A.24})$$

La Figura A.2 muestra el perfil de velocidades de un fluido newtoniano no compresible

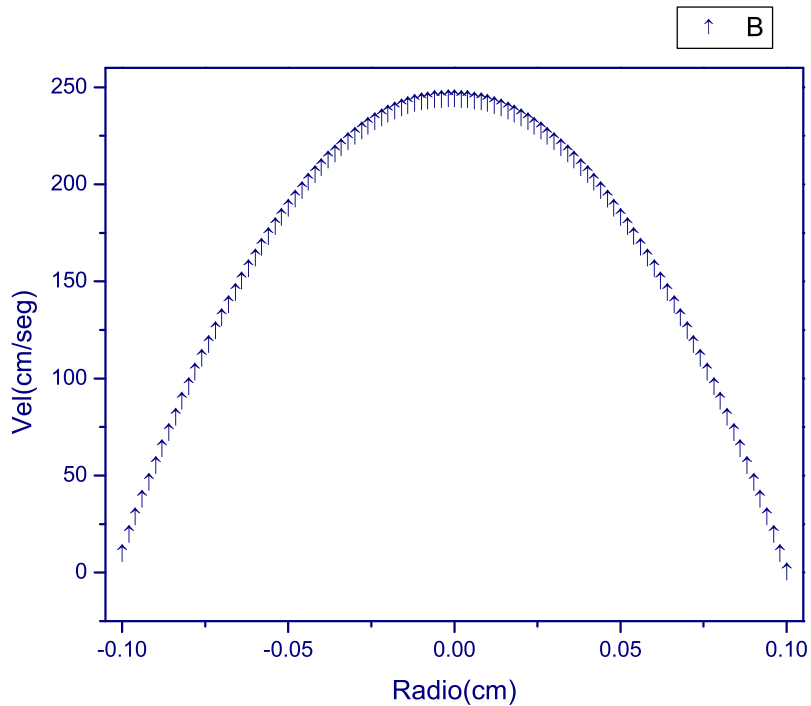


Figura A.2: Perfil de velocidades de un fluido Newtoniano a través de un tubo recto.

en un tubo recto. El diámetro y la longitud del tubo fueron seleccionados de acuerdo a la tabla 2.1. De tal manera que las velocidades encontradas reflejan aquellas que se podrían desarrollar si se considerara un tubo de las mismas dimensiones ligeramente curvado, y al cuál se le aplique el mismo gradiente de presión.

# Bibliografía

- [1] Maurer A.C., Diabetes Mellitus: A review, *American Scientist*, Vol. 67, pp. 423-431, 1979.
- [2] Aguilar-Salinas C.A, Characteristics of Patients with Type 2 Diabetes in México: Results from a large population based nation wide survey, *Diabetes Care*, Vol. 26, pp. 2021-2026, 2003.
- [3] American Diabetes Association: Diagnosis and Classification of Diabetes Mellitus, *Diabetes Care*, Vol. 29 (Suppl 1), pp. S43-S48, 2006.
- [4] Rodriguez-Saldaña J, Mejia Pedraza B., Diabetes mellitus tipo 2, *Boletín de Práctica Médica Efectiva, Editado por el Instituto Nacional de Salud publica y la Secretaría de salud*, 2006.
- [5] Jillweissberg-Benchell, Antisdell-Lomaglio J., Seshadri R., Insulin Pump therapy: A Meta-análisis, *Diabetes Care*, Vol. 26, No.4, 2003.
- [6] Santos Ramos B., Guerrero Asnar M. D., Administración de medicamentos: Teoría y Práctica, *Editorial E, Madrid*, 2000.
- [7] Pickup J., Frcpath D., Keen H., CBE, MD, FRCP, Continuous Subcutaneous Insulin Infusion at 25 Years: Evidence base for the expanding use of insulin pump therapy in type 1 diabetes, *Diabetes Care*, Vol. 25, No.3, 2002.
- [8] Campos-Delgado D.U., Hernández-Ordoñez M., Femat R., Gordillo-Moscoso A., Fuzzy-based controllers for glucose regulation in type I diabetic patients by subcutaneous route, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 53, pp. 2201-2210, 2006.
- [9] Ruiz-Velázquez E., Femat R., Campos-Delgado D.U., Blood glucose control for type I diabetes mellitus: A robust tracking approach, *Control Engineering Practice*, Vol.12, No.9, pp. 1179-1195, 2004.
- [10] Femat R., Ruiz-Velazquez E. and Quiroz G., Weighting Restriction for Intravenous Insulin Delivery on T1DM Patient via H-inf. Control, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, Aceptado(2007).
- [11] Animas Corporation, <http://www.animascorp.com/>.

- [12] Deltec Compañy, <http://www.cozmore.com/>.
- [13] Disetonic Inc., <http://www.disetronic-usa.com/>
- [14] Minimed Compañy, <http://www.minimed.com/>
- [15] Omnipod Compañy, <http://www.myomnipod.com/>
- [16] Sooil-USA Compañy, <http://www.sooil.com/english/products>
- [17] Quiroz-Compéan G., Diseño e instrumentación de una bomba para suministro de insulina, *Tesis del Instituto Tecnológico de San Luis Potosí*, 2003.
- [18] Hernández-Rosales C., Femat R. and Quiroz-Compéan G., Make a Discrete-Time PI controller on an 8 bit Microcontroller, *Embedded Systems Design*, Vol. 19, No.1, pp. 28-43, 2006.
- [19] Eustice J., Flow of water in curved pipes, *Proceedings of the Royal Society of London, series A*, Vol. 85, No.576, pp. 119-131, 1911.
- [20] Dean W. R., Note on the motion of fluid in a curved pipe, *Philosofal Magazine Science*, Vol. 4, No.20, pp. 208-223, 1927.
- [21] Dean W. R., The stream-line motion of fluid in a curved pipe, *Philosofal Magazine Science*, Vol.5, No.30, pp. 673-695, 1928.
- [22] White C.M., Streamline flow through curved pipes, *Proceedings of the Royal Society of London, series A*, Vol. 123, No.792, pp. 645-663, 1929.
- [23] Taylor, The criterion for Turbulence in curved pipes, *Proceedings of the Royal Society of London, series A*, Vol. 124, No.794, pp. 243-249, 1929.
- [24] Germano M., On the effect of torsion on a helical pipe flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.125, pp.1-8,1981.
- [25] Germano M., The Dean equation extended to a helical pipe flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.125, pp.289-305, 1989.
- [26] Berger S. A., Talbot R., Flow in curved pipes, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.15, pp.461-512, 1983.
- [27] McConalogue D.J. Srivastava R.S., Motion of a fluid in a curved tube, *Proceedings of the Royal Society of London, series A*, Vol.307, No.1488, pp.37-53, 1968.
- [28] Smith F. T., Fluid flow into a curved pipe, *Proceedings of the Royal Society of London, series A*, Vol.351, No.1664, pp. 71-87, 1976.
- [29] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot W.N. Fenómenos de Transporte, *editorial Reverté, España*, 1992.

- [30] Arfken G.B., Weber H.J., *Mathematical Methods for Physics*, *Academic Press*, 5a. Edición, USA, 1970.
- [31] Brodkey R. S., *The Phenomena of Fluid Motions*, *Addison Wesley Pub. Co.*, 1967.
- [32] Amazigo J. C., Rubinfeld L.A., *Advanced Calculus: And Its Applications to the Engineering and phisical sciencies*, *John Wiley and Son, McGraw-Hill*, 1980.