



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Análisis de Estabilidad de Controladores
Proporcional-Integral
para el Control de Congestión en Internet**

Tesis que presenta

Ing. Victor Hugo Castillo Torres

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

San Luis Potosí, S.L.P., Noviembre del 2006



INSTITUTO POTOSINO
DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Análisis de Estabilidad de Controladores Proporcional-Integral para el Control de Congestión en Internet** presentada para obtener el Grado de **Maestro en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos** fue elaborada por **Victor Hugo Castillo Torres** y aprobada el **30 de Noviembre del 2006** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
(Director de la tesis)

Dr. Jesús Leyva Ramos
(Sinodal)

Dr. Daniel Ulises Campos Delgado
(Sinodal)

Dr. Ernesto Castellanos Velasco
(Sinodal)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número de registro 191131.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 013 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 30 días del mes de noviembre del año 2006, se reunió a las 14:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Jesús Leyva Ramos	Presidente	IPICYT
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	Secretario	IPICYT
Dr. Daniel Ulises Campos Delgado	Sinodal externo	UASLP
Dr. Ernesto Castellanos Velasco	Sinodal externo	UASLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

Victor Hugo Castillo Torres

sobre la Tesis intitulada:

Análisis de Estabilidad de Controladores Proporcional-Integral para el Control de Congestión en Internet

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 13:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fé el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 30 días del mes noviembre de 2006.

L.C.C. Ivonne Lizette Cuevas Velez
Jefa del Departamento de Asuntos Escolares

Dr. Marcial Benhalla Ma
Secretario Académico



Agradecimientos

A mi asesor *Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar*, por su confianza y motivación durante el desarrollo de esta tesis, su amistad y apoyo incondicional.

A los Doctores Daniel Ulises Campos Delgado, Ernesto Castellanos Velasco y Jesús Leyva Ramos, por sus valiosos comentarios y aportaciones a esta tesis.

A CONACyT por el apoyo económico brindado durante el desarrollo de esta tesis.

Resumen

Actualmente existen modelos matemáticos que describen de manera aproximada el comportamiento de algunas clases de redes TCP/AQM, los cuales, tienen una interpretación como sistemas de control en lazo cerrado. Basado en esta interpretación, se han propuesto estrategias de control clásico como esquemas AQM, tales como controladores proporcionales y proporcional-integral, los cuales muestran un mejor desempeño en lazo cerrado que algunas estrategias computacionales tales como RED (Random Early Detection). En este trabajo de tesis se analiza la estabilidad y estabilidad robusta para una clase de redes TCP/AQM mediante el uso de herramientas frecuenciales para sistemas con retardo, considerando un controlador PI como estrategia AQM. Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad asintótica de los sistemas (linealizados) en lazo cerrado, mostrando así, que es posible encontrar el conjunto completo de controladores PI que estabilizan localmente el punto de equilibrio para cada uno de los sistemas. El problema de robustez ante variaciones en los parámetros de red (número de flujos TCP, tiempo de viaje redondo y capacidad de transmisión) fue tratado, mostrando como la estabilidad con respecto al valor más grande esperado de retardo y capacidad de transmisión y el valor más pequeño esperado de cargas TCP conduce al conjunto completo de controladores PI estabilizadores robustos.

Abstract

Actually, there are mathematical models that accurately describe the behaviour of some classes of TCP/AQM networks. The models have a nice interpretation as closed-loop control systems. According with this interpretation, classic control strategies such as proportional and proportional-integral controllers have been proposed as AQM schemes. These control schemes show a better performance in closed-loop than some standard AQM strategies as RED (Random Early Detection). In this thesis the stability and robust stability for some classes on TCP/AQM networks are analyzed using frequency domain tools for delay systems considering a PI controller as AQM strategy. Necessary and sufficient conditions are obtained for the asymptotic stability of the linearized closed-loop systems which show that is possible to find the complete set of PI controllers that locally stabilizes the equilibrium point of the systems. The robustness problem with uncertainty in the network parameters (number of TCP flows, round-trip times, link capacity) is also addressed. We show that stabilizing with respect to the largest expected values of delay and link capacity, and the smallest expected value of TCP loads leads to the complete set of PI robust stabilizing controllers.

Índice general

Capítulo

Notación	1
1. INTRODUCCIÓN	2
1.1. Estructura general de Internet.	2
1.2. Congestión en Internet.	4
1.3. Control de congestión en Internet.	6
1.4. Antecedentes sobre el estudio de redes TCP/AQM.	10
1.5. Organización de la tesis.	12
2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	14
2.1. Modelo general.	14
2.2. Modelo simplificado ($\tau = \frac{q_0}{c} + \tau_p$).	16
2.3. Modelo simplificado ($\tau \approx \tau_p$).	16
2.4. Modelo simplificado ($\frac{\tau c}{n} \gg 1$).	17
2.5. Objetivos de la tesis.	18

3. PRELIMINARES	20
3.1. Introducción.	20
3.2. Ecuaciones diferenciales en diferencias de tipo retardadas lineales.	24
3.3. Análisis de estabilidad.	26
3.4. Ejemplo.	31
4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	36
4.1. Diseño del controlador via linealización.	37
4.2. Análisis de estabilidad para el Modelo simplificado ($\frac{\tau c}{n} \gg 1$).	40
4.2.1. Simulaciones	42
4.3. Análisis de estabilidad para el Modelo simplificado ($\tau \approx \tau_p$).	44
4.3.1. Simulaciones	46
4.4. Análisis de estabilidad para el Modelo simplificado ($\tau = \frac{q_0}{c} + \tau_p$).	48
4.4.1. Simulaciones	52
4.5. Comparación entre regiones de estabilidad.	53
4.6. Comparación entre los resultados obtenidos en esta tesis y los obtenidos por Hollot, Misra, Towsley y Gong.	55
5. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA	58
5.1. Análisis robusto para el Modelo simplificado ($\frac{\tau c}{n} \gg 1$).	59
5.1.1. Simulaciones	65
5.2. Análisis robusto para el Modelo simplificado ($\tau \approx \tau_p$).	68
5.2.1. Simulaciones	76
5.3. Comentarios sobre la robustez del Modelo simplificado ($\tau = \frac{q_0}{c} + \tau_p$).	78
6. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO	80
 Bibliografía	 83

Índice de figuras

Figura

1.1. Conexión emisor-receptor.	4
1.2. Funcionamiento general del protocolo TCP.	7
1.3. Congestión en Internet, un problema de control retroalimentado.	9
3.1. Contorno cerrado C	29
3.2. Conjunto de curvas en el espacio de parámetros (a, b)	32
3.3. La región sombreada corresponde a la región de estabilidad asociada a (3.18).	33
3.4. Cambio de argumento de $f(j\omega_o)$ para los puntos $x - y$ respectivamente.	33
4.1. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$	41
4.2. Solución numérica de la ecuación (4.15).	42
4.3. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$ con: $n = 40$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s y $\tau = 0.7$ s.	43
4.4. Respuesta del sistema no lineal (4.1) en lazo cerrado correspondiente a los estados $q(t)$, $\omega(t)$, $\sigma(t)$ y la entrada de control $p(t)$	43

4.5. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$	45
4.6. Solución numérica de la ecuación (4.19).	46
4.7. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$ con: $n = 40$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s y $\tau = 0.7$ s.	47
4.8. Respuesta del sistema no lineal (4.2) en lazo cerrado correspondiente a los estados $q(t)$, $\omega(t)$, $\sigma(t)$ y la entrada de control $p(t)$	47
4.9. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$	50
4.10. Solución numérica de la ecuación (4.23).	50
4.11. Solución numérica de la ecuación (4.22) cuando $\bar{\omega} < \tilde{\omega}_1$	51
4.12. Solución numérica de la ecuación (4.22) cuando $\bar{\omega} > \tilde{\omega}_1$	51
4.13. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$ con: $n = 50$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s y $\tau = 0.533$ s.	52
4.14. Respuesta del sistema no lineal (4.3) en lazo cerrado correspondiente a los estados $q(t)$, $\omega(t)$, $\sigma(t)$ y la entrada de control $p(t)$	53
4.15. Comparación entre las regiones de estabilidad $\Phi_2(n, \tau, c)$ y $\Phi_3(n, \tau, c)$. . .	55
4.16. Comparación entre las regiones de estabilidad $\Phi_1(n, \tau, c)$ y $\Phi_2(n, \tau, c)$. . .	55
4.17. Comparación entre la región completa de estabilidad para el modelo (2.2) y la región de estabilidad considerada en [8].	57
4.18. Respuesta del sistema en lazo cerrado correspondiente al estado $q(t)$	57
5.1. Solución numérica de la ecuación (5.2).	60
5.2. En esta gráfica se observa como la región $\Phi_{(n_o,\tau_o,c_o)}$ se encuentra contenida dentro de la región $\Phi_{(n,\tau,c)}$	65
5.3. Región de estabilidad robusta para los valores de parámetros: $n_o = 40$ sesiones TCP, $c_o = 300$ paquetes/s y $\tau_o = 0.7$ s.	66
5.4. Respuesta del sistema para dos conjuntos de ganancias (k_p, I) pertenecientes a la región de estabilidad descrita por $\Phi_{(n_o,\tau_o,c_o)}$	68

5.5. Respuesta del sistema en lazo cerrado correspondiente a la entrada de control $p(t)$	68
5.6. Solución numérica de la ecuación (5.6) cuando $\bar{\omega} < \frac{\pi}{2\tau}$	69
5.7. Solución numérica de la ecuación (5.6) cuando $\bar{\omega} > \frac{\pi}{2\tau}$	70
5.8. Región de estabilidad robusta para los valores de parámetros: $n_o = 40$ sesiones TCP, $c_o = 300$ paquetes/s y $\tau_o = 0.7$ s.	77
5.9. Respuesta del sistema para dos conjuntos de ganancias (k_p, I) , pertenecientes a la región de estabilidad $\Phi_{(n_o, \tau_o, c_o)}$	77
5.10. Respuesta del sistema en lazo cerrado correspondiente a la entrada de control $p(t)$	78
5.11. En esta gráfica se observa como la región $\Phi_{(n_o, \tau_o, c_o)}$ se encuentra contenida dentro de la región $\Phi_{(n, \tau, c)}$	79

Notación

\mathbb{R}	denota el conjunto de números reales
\mathbb{R}^+	denota el conjunto de números reales no-negativos
$\mathbb{C}^+(\mathbb{C}^-)$	denota la mitad derecha (izquierda) del plano complejo
\mathbb{R}^n	denota el espacio Euclidiano n dimensional
$C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$	denota el espacio de Banach de funciones vectoriales continuas mapeando el intervalo $[-\tau, 0]$ en \mathbb{R}^n
$\ \phi\ $	denota la norma de convergencia uniforme en $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$
$deg(p(s))$	denota el grado del polinomio $p(s)$
∂A	denota la frontera del conjunto A
$\Delta arg f(s) \Big _{s \in C}$	denota el cambio neto del argumento de $f(s)$ a lo largo del contorno C

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este capítulo es describir el problema de congestión en Internet y en general de redes TCP/AQM, visto como un problema de control retroalimentado con retardos. Algunos trabajos sobre la estabilidad y estabilidad robusta de un modelo TCP/AQM son mencionados a manera de antecedentes. Los conceptos sobre la estructura, y en particular sobre el mecanismo de transmisión de información en Internet descritos en este capítulo, son tomados de [2, 3]. La estructura general de la tesis es proporcionada al final del capítulo.

1.1 Estructura general de Internet.

Internet se define como un conjunto de redes independientes conectadas entre sí, permitiendo el intercambio y distribución de información a nivel mundial de forma transparente. Internet abarca más de 160 países, incluyendo redes de instituciones académicas, gubernamentales, comerciales, privadas, etc. Tiene su origen en la red informática *ARPAnet* que comenzó a desarrollarse en los Estados Unidos como un proyecto con fines militares en la década de los 60's, con el objetivo de crear una red de ordenadores que uniera los centros de investigación dedicados a labores de defensa. Debido a que el número

de ordenadores entrelazados aumentó considerablemente, surgió la necesidad de distribuir información a través de redes de diferentes tipos y no necesariamente compatibles entre sí. Esto motivó la creación de un conjunto de normas que fueran capaces de regular una transmisión entre estos dispositivos, surgiendo así los protocolos de comunicación. El interés de universidades e instituciones de investigación, así como de organizaciones gubernamentales, contribuyó a que esta red continuara extendiéndose rápidamente, siendo en los años 90's cuando Internet se convierte en un nuevo y revolucionario medio de comunicación a escala mundial, gracias al desarrollo de nuevas aplicaciones para el acceso a la red mucho más sencillas para cualquier usuario, convirtiéndose en la red de comunicación más grande del mundo. Este crecimiento exponencial de Internet en los últimos años, ha representado un gran interés en su estudio y entendimiento por parte de la comunidad científica.

En Internet, las conexiones hechas tienen exactamente dos puntos terminales, conocidos como: *Emisor y Receptor* (ver Fig. 1.1). Debido a esto, el emisor desconoce el estado en el que se encuentra la red al momento de enviar información. La transmisión de información entre el emisor y el receptor se lleva a cabo mediante el uso del protocolo de comunicación TCP/IP, el cual, consta de dos partes fundamentales: El *TCP (Protocolo de Control de Transmisión)* añade la información necesaria para la transmisión y posterior decodificación de los paquetes y para la detección de posibles errores, el *IP (Protocolo de Internet)* etiqueta cada paquete con la información necesaria para su recorrido a través de la red. Cada paquete se envía a su destino por medio de ruteadores, los cuales se encuentran distribuidos en toda la red (ver Fig. 1.1). Los ruteadores son un conjunto de ordenadores que redirigen los paquetes de información que reciben de las subredes que forman Internet para encaminarlos a su destino. Para que la información viaje a través de la red, esta se divide en paquetes de datos, los cuales, se desplazan de manera independiente por toda la red, siendo reensamblados una vez que llegan a su destino (Receptor).

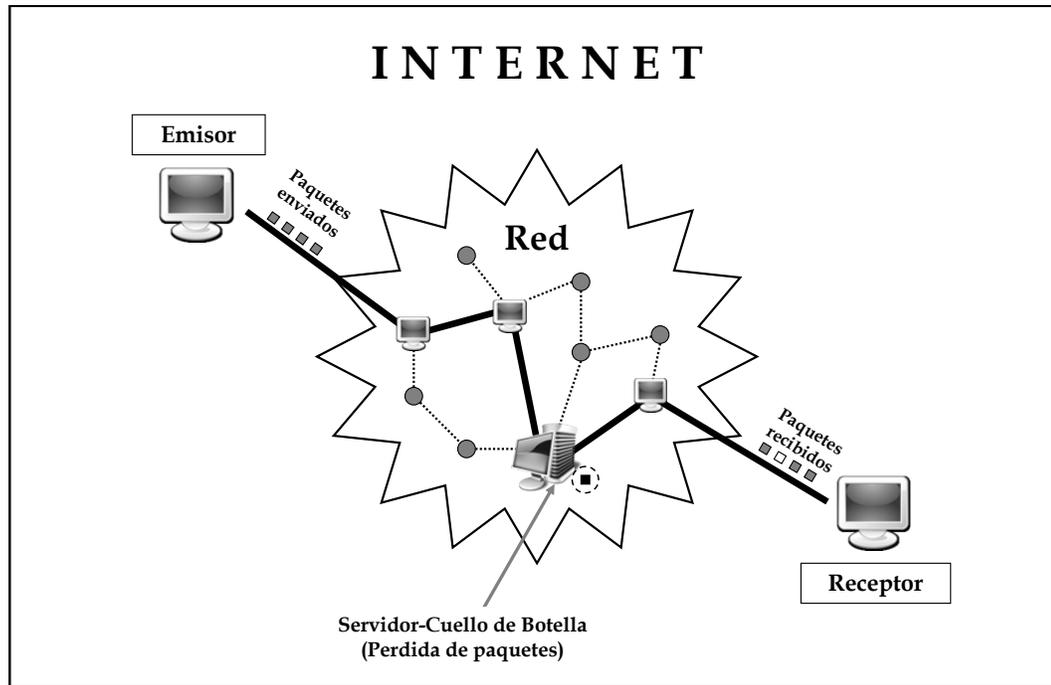


Fig. 1.1. Conexión emisor-receptor.

1.2 Congestión en Internet.

Al viajar los paquetes por la red, estos pueden pasar por servidores (ruteadores) que estén siendo utilizados por múltiples usuarios a la vez, por lo que muchas veces tienen que esperar en la cola (buffer) del servidor antes de ser atendidos. Esto se conoce como líneas de espera. La idea general de una línea de espera es la siguiente: a lo largo del tiempo se producen llegadas de clientes a la cola de un sistema desde una determinada fuente, demandando un servicio, en general las tasas de llegada y de servicio no se conocen con certeza, sino que son de naturaleza aleatoria, es decir, los tiempos de llegada y de servicio deben describirse a través de distribuciones de probabilidad. Una vez que los clientes están esperando a ser atendidos, los servidores del sistema seleccionan miembros de la cola según una regla predefinida denominada disciplina de la cola. Cuando un cliente seleccionado termina de ser atendido, este abandona el sistema.

El principal problema es que, al ser eventos de naturaleza aleatoria, no se sabe con exactitud cuantos clientes y en que momento llegarán a solicitar un servicio, por lo cual, es

común que si se tiene demasiada capacidad de servicio para operar el sistema esto podría implicar la subutilización de los recursos, y por ende costos excesivos innecesarios. Sin embargo, el no contar con suficiente capacidad de servicio conlleva a grandes problemas tales como tiempos de espera largos, retardos excesivos e incluso pérdida de clientes.

Debido a esto, la pérdida de información en Internet es muy común, pues cada uno de los usuarios conectados a la red, transmiten paquetes de datos sin saber el estado que guarda la red, por lo que en muchas ocasiones los servidores son saturados, y en consecuencia, los paquetes que pasen por esos servidores serán desechados, (ver Fig. 1.1).

Para solucionar el problema de la pérdida de la información, el receptor envía una señal de confirmación al emisor a manera de *retroalimentación*, por cada paquete que recibe satisfactoriamente, con lo cual el emisor puede detectar (después de un retardo de tiempo) que paquetes se han perdido y por consecuencia debe retransmitir. El tiempo promedio que tarda un paquete en llegar a su destino y en avisar al emisor que fue recibido correctamente, se conoce como Tiempo de Viaje Redondo, (RTT).

De manera general, la información perdida es retransmitida desde el emisor sin que muchas veces el usuario se de cuenta de ello. De este modo, la estructura de Internet resulta ser muy benéfica en un gran número de aplicaciones, pues permite el intercambio de información en un tiempo relativamente “corto ” y a un costo relativamente “bajo” (un ejemplo claro de ello es el correo electrónico). Por el contrario, Internet presenta grandes desventajas en aplicaciones en donde se requiere que la información enviada, sea procesada conforme esta va llegando a su destino, pues al haber retraso y/o pérdida de paquetes en la red, la información procesada en el receptor se mostrará desordenada o incompleta, siendo esto un problema grave en aplicaciones tales como videoconferencias, tele-operaciones en medicina y manipulación de robots a distancia, llamadas telefónicas (voz sobre IP), por mencionar algunas. Extensas investigaciones en el área computacional se han llevado a cabo con el fin de tratar de encontrar posibles soluciones a este problema, siendo un problema vigente en la actualidad.

1.3 Control de congestión en Internet.

La velocidad de transmisión del emisor es determinada a través de la ventana de transmisión (WINDOW) la cual toma el mínimo valor entre dos ventanas, la ventana de congestión llamada CWND y la ventana de recepción llamada RWND. Al inicio de la conexión el emisor establece la ventana de congestión al tamaño máximo de un paquete, determinado a través de la información intercambiada inicialmente con el receptor y transmite un paquete, si recibe la señal de confirmación del paquete por parte del receptor antes de un cierto tiempo, aumenta en uno el tamaño de la ventana de congestión ($CWND=CWND+1$ por cada señal recibida) y vuelve a transmitir según lo especificado, con lo cual el crecimiento de la ventana es exponencial, esta etapa corresponde al algoritmo de inicio lento (S-S) (ver Fig. 1.2). Este comportamiento se mantiene hasta que el tamaño de la ventana alcanza un valor fijado inicialmente llamado umbral, una vez pasado este valor, la ventana de congestión aumentará en uno por cada ráfaga de señales de confirmación que lleguen al emisor, ($CWND=CWND+1/CWND$ por cada señal), con lo cual el crecimiento de la ventana será lineal, esta etapa corresponde al algoritmo de evitación de congestión (C-A) (ver Fig. 1.2).

Este comportamiento se mantiene hasta que alguno de los paquetes vence un temporizador (time-out) de espera de confirmación, o bien cuando se reciben tres avisos por parte del receptor de que un paquete aún no llega, en este momento, el valor del umbral se establece a la mitad del valor de la ventana de congestión actual y el tamaño de la ventana de congestión se establece nuevamente a un paquete, comenzando otra vez con el algoritmo (S-S). Si no se presentan dichos casos, la ventana de congestión sigue creciendo hasta alcanzar el valor de la ventana de recepción, en donde el tamaño de la ventana de congestión permanecerá constante hasta que el receptor anuncie un nuevo valor a la ventana de recepción, o bien ocurra uno de los casos mencionados con anterioridad (ver Fig. 1.2).

Debido al funcionamiento de los algoritmos de control de congestión (S-S) y (C-A), la velocidad de transmisión siempre se mantiene oscilando (la velocidad de transmisión depende de la ventana de congestión), siendo imposible determinar una velocidad de transmisión óptima. La oscilación de la velocidad de transmisión induce generalmente oscilaciones en la longitud activa de la cola del servidor, las cuales pueden provocar, en muchas ocasiones, la saturación del servidor o de manera contraria la subutilización de los recursos.

El problema del control de la congestión en Internet se presenta de la siguiente manera:

Encontrar la velocidad de transmisión óptima del emisor de manera que se evite la congestión en la red así como en el receptor.

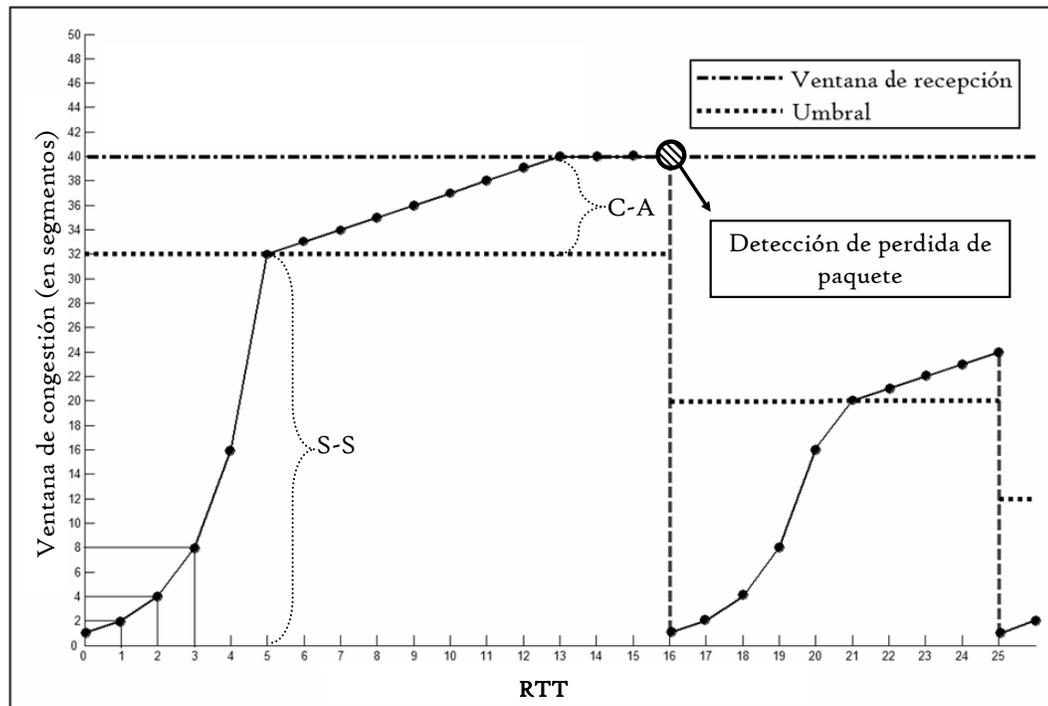


Fig. 1.2. Funcionamiento general del protocolo TCP.

El problema de control de congestión en internet ha sido atacado durante muchos años en el área computacional. En los últimos años se han propuesto estrategias conocidas como *AQM (Administrador de Colas Activas)* las cuales intentan aliviar en algo este problema. Éstas estrategias, que son implantadas a nivel de servidor, funcionan como esquemas de marcado de paquetes, marcando con cierta probabilidad un paquete como perdido antes de que esto ocurra, dependiendo del tamaño de cola que guarda el servidor en ese momento, con lo cual, el emisor puede tomar medidas de prevención de congestión anticipadamente.

Los esquemas AQM pueden ser vistos como estrategias de control para tratar de evitar la congestión del servidor, y por ende, de la red. Esto lleva a la idea de que el problema de congestión en Internet puede ser visto como un problema de control retroalimentado con retardos, siendo el emisor y el receptor la entrada y la salida del sistema, el servidor congestionado la planta a controlar y la confirmación de los paquetes recibidos (tras un retardo de tiempo) la retroalimentación del sistema (ver Fig. 1.3). Dado lo anterior, los esquemas AQM vistos como estrategias de control presentan tres objetivos:

Utilización eficiente de la cola. Por uso eficiente se toma que la cola debe evitar el sobreflujo o el vacío. El sobreflujo deriva en pérdida de paquetes y retransmisiones no deseadas, mientras que un buffer vacío subutiliza el enlace. Ambos extremos deben ser evitados en operaciones transitorias así como en operaciones de estado estable.

Regular el retardo de espera en la cola. El tiempo requerido para que un paquete de datos sea tomado de la cola y procesado para ser atendido se llama retardo de cola. Este retardo junto con el tiempo que tarda un paquete en viajar por la red, conforman el tiempo de viaje redondo (RTT). Es deseable que se mantengan pequeños tanto el retardo en la cola como sus variaciones. Esto nos lleva a una regulación para las longitudes pequeñas de cola, sin embargo, el hacerlo podría resultar en una sub-utilización del enlace y esta limitación presenta un problema fundamental del diseño AQM.

Robustez. Los esquemas AQM necesitan mantener un desempeño en lazo cerrado a pesar de las condiciones variantes de la red. Éstas condiciones incluyen variaciones en el número de sesiones TCP que llegan al servidor, variaciones en el tiempo de viaje redondo y variaciones en la capacidad de transmisión.

El objetivo principal es estabilizar el tamaño de la cola del servidor, evitando así, su saturación y por ende la pérdida de información.

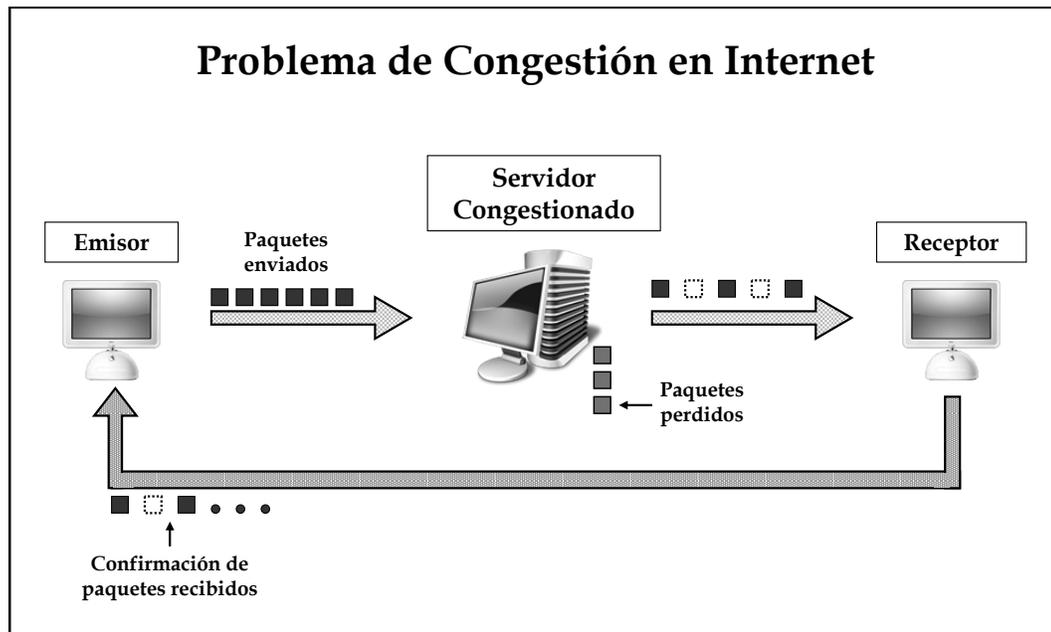


Fig. 1.3. Congestión en Internet, un problema de control retroalimentado.

1.4 Antecedentes sobre el estudio de redes TCP/AQM.

Basado en los argumentos expuestos en las secciones anteriores, el análisis de modelos de flujo de fluidos para el comportamiento de redes TCP/AQM representa un tema de interés recurrente en los últimos años. Recientemente, en [12] fué presentado un modelo de flujo de fluidos que describe aproximadamente el comportamiento de flujos TCP soportando AQM en ruteadores congestionados. Tal modelo expresa los esquemas AQM como un problema de retroalimentación clásico. En [7], una versión linealizada simplificada del modelo introducido en [12] es analizada considerando a RED (Random Early Detection) como esquema de control retroalimentado, siendo este un esquema AQM muy popular en el área computacional. El análisis en [7] permite demostrar matemáticamente porque existen problemas de sintonización en los parámetros de RED, más aun, condiciones suficientes para entradas y salidas acotadas (BIBO) con estabilidad tipo L_2 fueron obtenidas. Del trabajo en [7] y motivados por la interpretación de control retroalimentado, controladores P (Proporcional) y PI (Proporcional Integral) fueron propuestos como estrategias AQM en [8], y controladores basados en la optimización de una función de costo \mathcal{H}^∞ en [15] para la versión linealizada del modelo. Se mostró que tales controladores mejoran el desempeño obtenido con el controlador basado en RED. En [8], un análisis lineal de los controladores propuestos fue llevado a cabo enfocándose en la dinámica de baja frecuencia y considerando la dinámica de alta frecuencia como incertidumbre, condiciones suficientes para BIBO con estabilidad tipo L_2 basada en el teorema de pequeña ganancia fueron obtenidas.

Recientemente en [11], se desarrolló un análisis de estabilidad lineal del modelo simplificado introducido en [6], considerando un controlador P como estrategia AQM. Se muestra que *condiciones necesarias y suficientes para estabilidad asintótica* pueden ser obtenidas usando herramientas del dominio de la frecuencia para el análisis de estabilidad de sistemas con retardo de tiempo. Tal resultado proporciona el *conjunto completo*

de controladores P que estabilizan localmente el punto de equilibrio. También es desarrollado un análisis de estabilidad no lineal y condiciones suficientes de estabilidad en términos de los parámetros de red, sencillas de verificar mediante el enfoque funcional de Lyapunov-Krasovskii fueron obtenidas.

En nuestro conocimiento, no existen resultados específicos para el problema de encontrar el conjunto completo de controladores PI-AQM que estabilicen el modelo lineal simplificado introducido en [8], siendo este, el objetivo principal de esta tesis.

Recientemente, en [17] se propone un método para calcular el conjunto completo de controladores PI que estabilizan una cierta clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo. Tal método está basado en primero determinar el conjunto completo de ganancias del control PI que estabilizan el sistema libre de retardo. Entonces, para un valor fijo de la ganancia proporcional, se calcula el conjunto de valores de ganancias integrales que hacen al sistema estable para valores de retardo que van de cero hasta un retardo desestabilizador mínimo. El conjunto completo de controladores PI es determinado mediante un barrido sobre el conjunto de ganancias proporcionales permisibles. Sin embargo, como se verá en el capítulo 3, para sistemas de redes TCP/AQM no es posible investigar la estabilidad para el caso libre de retardo, y por lo tanto, el enfoque propuesto en [17] no puede ser aplicado. Un primer intento para tratar este problema puede ser encontrado en [18], donde un nuevo método para la sintonización de parámetros de controladores PI AQM es propuesto. El enfoque intenta encontrar los intervalos permisibles más grandes para las ganancias del controlador, y selecciona las “ganancias óptimas” como el centro de estos intervalos (el sistema retroalimentado será robusto con respecto a perturbaciones en los parámetros del controlador).

1.5 Organización de la tesis.

En el primer capítulo presentamos la importancia del estudio de congestión en Internet, y en general de redes TCP/AQM, visto como un problema de control retroalimentado con retardos. El capítulo 2 es dedicado a la formulación del problema. Un modelo matemático para una clase de redes TCP/AQM, en el cual basaremos nuestro estudio, es introducido de la literatura. En el capítulo 3 se proporcionan las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de la tesis. En el capítulo 4 se presenta el análisis de estabilidad local para tres modelos simplificados introducidos en el capítulo 2, más explícitamente, se determinan condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica sobre cada uno de los tres modelos simplificados. Se presenta una comparación entre los resultados obtenidos en esta tesis y aquellos mostrados en [8], enfatizando las ventajas de obtener el conjunto completo de controladores PI que estabilizan localmente el equilibrio. Simulaciones sobre los resultados obtenidos son presentadas. En el capítulo 5 se presenta el análisis de estabilidad robusta ante variaciones paramétricas, para dos de los modelos simplificados introducidos en el capítulo 2. Simulaciones sobre los resultados obtenidos son presentadas. En el capítulo 6 se presentan conclusiones, así como trabajo a futuro.

Capítulo 2

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Este capítulo se enfoca en la formulación del problema. Los objetivos principales de esta tesis son presentados. El modelo matemático para una clase de redes TCP/AQM ha de considerarse es introducido.

2.1 Modelo general.

En esta tesis se considera un modelo de flujo de fluidos dinámico introducido en [8] para describir el comportamiento de una red TCP/AQM, el cual ignora el time-out y el mecanismo de inicio lento. Tal modelo, relaciona el valor promedio de las variables clave de red de n fuentes homogéneas controladas por TCP y un único ruteador congestionado, está descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales acopladas con retardo variante en tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{1}{\tau(t)} - \frac{1}{2} \frac{w(t)w(t-\tau(t))}{\tau(t-\tau(t))} p(t-\tau(t)), \\ \dot{q}(t) &= \begin{cases} n(t) \frac{w(t)}{\tau(t)} - c, & q > 0 \\ \max(0, n(t) \frac{w(t)}{\tau(t)} - c), & q = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde $w(t)$ denota el promedio de tamaño de ventana TCP (paquetes), $q(t)$ es el promedio de la longitud de la cola (paquetes), $\tau(t) = \frac{q(t)}{c} + \tau_p$ es el tiempo promedio de viaje

redondo (segundos) donde τ_p representa el retardo de propagación, c es la capacidad de transmisión (paquetes/segundo), $n(t)$ es el número de sesiones TCP y $p(\cdot)$ es la probabilidad de marcado de paquetes. La longitud de la cola $q(t)$ y el tamaño de ventana $w(t)$ son cantidades positivas y acotadas, i.e., $q(t) \in [0, q_{\text{máx}}]$ y $w(t) \in [0, w_{\text{máx}}]$, donde $q_{\text{máx}}$ y $w_{\text{máx}}$ denotan la capacidad de almacenamiento y el tamaño máximo de ventana respectivamente. El modelo evita que $\dot{q}(t) < 0$ cuando $q = 0$, con lo cual previene que la longitud promedio de la cola $q(t)$ tome valores negativos. La función $p(\cdot)$ toma valores solamente en $[0, 1]$. La primera ecuación diferencial describe la dinámica de control de ventana TCP: el primer término en el lado derecho indica que el tamaño de ventana TCP será incrementado en uno cada RTT (algoritmo C-A); el segundo término indica que el tamaño de ventana TCP se divide a la mitad en el instante que se detecta una pérdida ($p(\cdot)=1$). Como se argumenta en el capítulo 1, el emisor es el encargado de la dinámica de ventana TCP, mientras que los esquemas AQM son estrategias de control a nivel de servidor. Debido a esto, la confirmación de que un paquete ha sido marcado como perdido, es recibida por el emisor (y por consecuencia reflejado en la dinámica de ventana) después de un cierto tiempo de retardo. Esto puede ser observado en (2.1), en donde la función de marcado de paquetes $p(\cdot)$ viene retrasada. La segunda ecuación describe la longitud promedio de la cola como la diferencia entre la tasa de llegada de paquetes $\frac{n(t)w(t)}{\tau(t)}$ y la capacidad de transmisión c , asumiendo que no existe dinámica interna en el cuello de botella. Es importante señalar que la función de marcado de paquetes p (cuya dinámica depende de q) representa la estrategia de control retroalimentado del sistema.

Observando (2.1) es claro que uno no puede investigar la estabilidad del sistema en lazo cerrado para el caso libre de retardo ($\tau = 0$). Esta es una propiedad particular de los sistemas de redes TCP/AQM, y en general en sistemas de comunicación, donde el valor del retardo (tiempo de viaje redondo) no puede ser considerado cero. De modo que, el enfoque desarrollado en [17] no puede ser aplicado para determinar el conjunto completo de controladores estabilizadores PI para el sistema (2.1).

2.2 Modelo simplificado ($\tau = \frac{q_0}{c} + \tau_p$).

Siguiendo [8], sobre la dinámica (2.1) se asume que el número de sesiones TCP y la capacidad de transmisión son constantes, i.e., $n(t) \equiv n$ y $c(t) \equiv c$. Tomando (w, q) como los estados y p como la entrada, el punto de equilibrio (w_0, q_0, p_0) del sistema (2.1) es definido por

$$w_0^2 p_0 = 2, w_0 = \frac{\tau_0 c}{n} \text{ y } \tau_0 = \frac{q_0}{c} + \tau_p.$$

Asimismo, la dependencia del argumento de retardo de tiempo $t - \tau(t)$ sobre la longitud de la cola q es ignorada, y se asume que está compuesto por $t - \tau_0$. Como resultado se tiene la siguiente dinámica simplificada:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{1}{\frac{q(t)}{c} + \tau_p} - \frac{1}{2} \frac{w(t)w(t - \tau_0)}{\frac{q(t - \tau_0)}{c} + \tau_p} p(t - \tau_0), \\ \dot{q}(t) &= \frac{nw(t)}{\frac{q(t)}{c} + \tau_p} - c. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3 Modelo simplificado ($\tau \approx \tau_p$).

Siguiendo [8, 11, 6], sobre la dinámica (2.2) se asume que $\tau(t) = \frac{q(t)}{c} + \tau_p$ es constante, con lo cual $\tau(t) \equiv \tau$. La suposición sobre el retardo puede ser considerada como una buena aproximación cuando el retardo de cola es mucho menor que el retardo de propagación, lo cual ocurre cuando la capacidad de transmisión c es suficientemente grande, con lo cual, $\tau(t) \approx \tau_p$. Como Kelly argumenta en [9], el hardware de los ruteadores y la capacidad de la red continúa mejorando rápidamente reduciendo los retardos de cola. Por otro lado, los retardos de propagación están compuestos por las distancias entre nodos sobre la red y la velocidad de la luz. Como resultado, se tiene una dinámica más simplificada:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau} w(t)w(t - \tau)p(t - \tau), \\ \dot{q}(t) &= \frac{n}{\tau} w(t) - c. \end{aligned} \quad (2.3)$$

El punto de equilibrio (w_0, q_0, p_0) del sistema (2.3) es definido por

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) = 0 &\Rightarrow w_0^2 p_0 = 2 \\ \dot{q}(t) = 0 &\Rightarrow w_0 = \frac{\tau c}{n}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.4 Modelo simplificado ($\frac{\tau c}{n} \gg 1$).

En [6] fué motivado que si $\frac{\tau c}{n} \gg 1$, entonces el comportamiento local de (2.3) alrededor del equilibrio puede ser aproximado por el comportamiento local de

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau} w^2(t) p(t - \tau) \\ \dot{q}(t) &= \frac{n}{\tau} w(t) - c, \end{aligned} \quad (2.5)$$

teniendo el mismo equilibrio. De la suposición sobre la capacidad de transmisión (suficientemente grande para tomar el valor de retardo como constante) se puede considerar que para parámetros de red dados n y τ la capacidad de transmisión es suficientemente grande para satisfacer la condición $w_0 \gg 1$. En otras palabras, la suposición de que $w_0 \gg 1$ es razonable debido a que la ventana TCP es por lo general mucho mayor que uno, en la parte del algoritmo de evitación de congestión, que es la parte de la dinámica TCP que considera el modelo (2.1) (capítulo 1). De esta manera, tal condición es una suposición razonable para parámetros de redes típicas, y por lo tanto, (2.5) es un modelo aceptable para investigar el comportamiento local de algunas clases de redes TCP/AQM descritas por (2.3). De (2.5) se puede observar como la dinámica del sistema queda libre de retardos, existiendo un único valor de retardo en la entrada de control $p(\cdot)$.

Considerando $p(t) = 0, \forall t \geq -\tau$, entonces, la dinámica en (2.5) se simplifica como:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{1}{\tau} \\ \dot{q}(t) &= \frac{n}{\tau} w(t) - c. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Integrando el sistema de ecuaciones en (2.6) se obtiene la solución:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{\tau}t + \gamma_1 \\ q(t) &= \frac{n}{2\tau^2}t^2 + \gamma_2t + \gamma_3, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde γ_1 , γ_2 y γ_3 son constantes arbitrarias.

De (2.7) se puede observar que si $t \rightarrow +\infty$ entonces $w(t) \rightarrow +\infty$ y $q(t) \rightarrow +\infty$, y por lo tanto, el sistema es inestable.

Lo anterior es consistente con el hecho de que el modelo utilizado en esta tesis, únicamente describe el mecanismo de evitación de congestión (crecimiento lineal) de la dinámica del TCP, ignorando los mecanismos de inicio lento y time-out.

2.5 Objetivos de la tesis.

Considerese un controlador PI de la forma:

$$p(t) = k_p q(t) + \frac{k_p}{I} \int_0^t (q(\eta) - q_0) d\eta. \tag{2.8}$$

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de estabilidad y estabilidad robusta de los sistemas en lazo cerrado (2.2)-(2.8), (2.3)-(2.8) y (2.5)-(2.8).

El problema es encontrar el conjunto de ganancias (k_p, I) del controlador, que estabilicen localmente el punto de equilibrio de cada uno de los sistemas en lazo cerrado para un conjunto dado de parámetros de red (tiempo de viaje redondo, número de cargas TCP y capacidad de transmisión). Como resultado, *condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica local para cada uno de los sistemas* son obtenidas con lo cual, el *conjunto completo* de ganancias (k_p, I) , que estabilizan localmente el punto de equilibrio de los sistemas en lazo cerrado (2.2)-(2.8), (2.3)-(2.8) y (2.5)-(2.8) son obtenidas. La robustez de los controladores para incertidumbres en los parámetros de red es también tratada. Se muestra que la estabilidad con respecto al valor más grande esperado de retardo y capacidad de transmisión, y el valor esperado más pequeño de cargas TCP conducen al *conjunto completo* de controladores PI estabilizadores robustos.

Capítulo 3

PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es presentar las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de esta tesis. Teoría sobre ecuaciones diferenciales con retardo de tiempo y en particular de ecuaciones diferenciales en diferencias de tipo retardadas (RDDE) es introducida de la literatura. Algunas herramientas frecuenciales para el análisis de estabilidad de este tipo de ecuaciones son presentadas.

3.1 Introducción.

Existen una gran cantidad de sistemas donde su dinámica puede ser descrita mediante el estado presente. Por otro lado, existen sistemas en los cuales su tasa de evolución puede ser descrita por ecuaciones diferenciales incluyendo información sobre la historia pasada del sistema. Los sistemas con retardo de tiempo representan una clase de sistemas en gran parte usados para describir fenómenos de propagación y transporte o dinámicas de poblaciones. Como ejemplo, se pueden mencionar sistemas de transporte como tuberías, bandas transportadoras, sistemas de control por tele-operación o donde se utilizan sistemas de visión para la adquisición de información, así como los sistemas de telemetría en general, procesos biológicos como evolución de especies, etc. Particularmente, en sis-

temas de comunicación, la transmisión de datos es siempre acompañada por un *intervalo de tiempo distinto de cero* entre el inicio y el tiempo de entrega de un mensaje o señal, como es el caso de internet.

Independientemente del sistema, el problema del efecto del retardo sobre la estabilidad es un problema de interés recurrente, esto debido a que la presencia de retardos puede inducir comportamientos complejos tales como oscilaciones, inestabilidad y mal desempeño. Más aún, existen casos en los que retardos “pequeños” pueden desestabilizar algunos sistemas, pero retardos “grandes ” pueden estabilizar otros sistemas [13].

Los retardos pueden aparecer como *discretos* (memoria selectiva), como *distribuidos* (todos los valores dentro de un intervalo de tiempo con cotas superiores finitas o infinitas) o incluso *discreto/distribuido* mixto, etc. También se puede tener un único o múltiples retardos discretos, constantes, constantes por tramos o variantes en tiempo (continuos o no), retardos finitos o infinitos, etc.

De manera general, las ecuaciones diferenciales en diferencias pueden ser catalogadas en tres tipos: ecuaciones de tipo retardada, de tipo neutro o de tipo avanzada. Una ecuación de tipo retardada permite representar el comportamiento de un sistema en el cual la tasa de cambio (derivada) de una cantidad bajo investigación depende de valores pasados y presentes de la cantidad. Una ecuación de tipo neutro permite representar un sistema en el cual por lo general la tasa de cambio presente de una cantidad depende de la tasa de cambio pasada así como de valores pasados y presentes de la cantidad. Una ecuación de tipo avanzada permite representar un sistema en el cual la tasa de cambio de una cantidad depende de valores presentes y futuros de la cantidad (o alternativamente, en el cual el valor presente de la cantidad depende del valor pasado y de la tasa de cambio pasada).

Una ecuación diferencial funcional (FDE) puede ser expresada como:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{3.1}$$

donde $x(t)$ es un vector en \mathbb{R}^n , y x_t (estado natural) denota el operador de translación actuando sobre la trayectoria $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $\tau > 0$. Para determinar una solución de (3.1), se necesita una condición inicial dada por alguna función φ definida sobre un intervalo de retardo $[-\tau, 0]$ [13]. Generalmente φ es un elemento del espacio de Banach $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ de las funciones vectoriales continuas que mapean el intervalo $[-\tau, 0]$ en \mathbb{R}^n con la norma de convergencia uniforme $\|\phi\| = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|$.

La ecuación (3.1) es un tipo de ecuación muy general. Esta incluye ecuaciones diferenciales ordinarias ($\tau = 0$)

$$\dot{x}(t) = F(x(t))$$

ecuaciones diferenciales en diferencias

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t)))$$

con $0 \leq \tau_j(t) \leq \tau$, $j = 1, 2, \dots, p$, así como ecuaciones integro-diferenciales

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^0 g(t, \theta, x(t + \theta)) d\theta.$$

El trabajo en esta tesis se enfoca en una clase de ecuaciones diferenciales en diferencia de la forma siguiente:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (3.2)$$

donde $\tau > 0$. Supongase que f es continua con respecto a todos sus argumentos. Dada una función $\varphi_0(t)$ continua en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$, se forma el sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t - \tau)), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau].$$

Considerese una solución de este sistema determinada por la condición inicial $x(t_0) = \varphi_0(t_0)$. Sea $\varphi_1(t)$ ésta solución, la cual existe debido a la hipótesis de continuidad de la función f y debido a que se tiene una ecuación diferencial ordinaria.

Si ésta solución está definida en todo el intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$, entonces se puede formar el nuevo sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t - \tau)), \quad t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau].$$

Considerese una solución de éste sistema determinada por la condición inicial $x(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau)$. Sea $\varphi_2(t)$ ésta solución. En general, asumiendo que $\varphi_{k-1}(t)$ está definida en el intervalo $[t_0 + (k-2)\tau, t_0 + (k-1)\tau]$ se forma el sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_{k-1}(t - \tau)), \quad t \in [t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau]$$

y se considera una solución de éste sistema con condición inicial

$$x(t_0 + (k-1)\tau) = \varphi_{k-1}(t_0 + (k-1)\tau).$$

Sea $\varphi_k(t)$ ésta solución. Así, una solución del sistema (3.2), $x(t)$, definida por la condición inicial $\varphi_0(t)$ estará determinada por

$$x(t) = \varphi_k(t), \quad t \in [t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La función $x(t)$ es continua como consecuencia de su construcción. La función $x(t)$ es diferenciable y tiene una derivada continua en los puntos interiores de los intervalos $[t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau]$, $k \geq 1$. La función $x(t)$ es diferenciable y tiene una derivada continua en los puntos $t_0 + k\tau$, $k \geq 1$. En el punto t_0 , únicamente la derivada derecha existe.

Si $f(t, x, y)$ satisface una condición de Lipschitz con respecto a x , independientemente de y , entonces existe *una única solución* la cual coincide con $\varphi_0(t)$ en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$. Bajo ésta condición las funciones $\varphi_k(t)$ son únicamente determinadas y cada solución coincide con $\varphi_k(t)$ en el intervalo $[t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau]$.

Este método de construcción de soluciones para DDE es conocido como *método de pasos* [1].

Para ilustrar mejor el método de pasos considerese la siguiente clase de sistemas

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + f(t), \quad (3.3)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tau > 0$ y $f(t)$ una función vectorial continua para todo $t \geq 0$.

Dada una función inicial $\varphi(t)$ continua en el intervalo $t \in [-\tau, 0]$, se forma el siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(t - \tau) + f(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Construyendo la solución de éste sistema tal que $x(0) = \varphi(0)$. Se tiene que

$$x(t) = e^{At} \left(\varphi(0) + \int_0^t e^{-A\xi} [B\varphi(\xi - \tau) + f(\xi)] d\xi \right), \quad t \in [0, \tau].$$

Con la solución $x(t)$ para $t \in [0, \tau]$ se forma el nuevo sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + f(t), \quad t \in [\tau, 2\tau].$$

Entonces dedido a que $x(t - \tau)$ es ya conocida en el intervalo $[0, \tau]$ se puede construir la solución $x(t)$ para $t \in [\tau, 2\tau]$ en la forma siguiente:

$$x(t) = e^{A(t-\tau)} \left(x(\tau) + \int_\tau^t e^{-A(\xi-\tau)} [Bx(\xi - \tau) + f(\xi)] d\xi \right), \quad t \in [\tau, 2\tau].$$

Continuando este proceso se obtendra la solución $x(t)$ definida para $t \in [-\tau, \infty)$ que coincide con φ en el intervalo $[-\tau, 0]$. Es claro que $x(t)$ tiene primera derivada continua para $t > 0$ y tiene una derivada continua en $t = 0$, si y solo si, $\varphi(t)$ tiene derivada en $t = 0$ y satisface que

$$\dot{\varphi}(0) = A\varphi(0) + B\varphi(-\tau) + f(0).$$

3.2 Ecuaciones diferenciales en diferencias de tipo retardadas lineales.

Considere una RDDE lineal de la forma:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{k=1}^m A_kx(t - \tau_k). \quad (3.4)$$

La función característica correspondiente al sistema (3.4) está descrita por:

$$p(s; e^{-\tau_1 s}, \dots, e^{-\tau_m s}) = \det\left(sI - A_0 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-\tau_k s}\right) \quad (3.5)$$

Definición 1 [4] La función característica (3.5) es estable si

$$p(s; e^{-\tau_1 s}, \dots, e^{-\tau_m s}) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+. \quad (3.6)$$

Es estable independientemente del retardo si (3.6) se mantiene para todo $\tau_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Al igual que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, la *estabilidad* de la *función característica* (3.5) es equivalente a la *estabilidad exponencial* del sistema (3.4).

La función (3.5) pertenece a un grupo de funciones llamadas polinomios exponenciales o quasipolinomios. Un quasipolinomio es una función entera, analítica para toda $s \in \mathbb{C}$, cuya principal característica es que tiene un número infinito de ceros. Esto muestra una clara diferencia con respecto a la función característica (polinomio característico) asociada a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde el grado del polinomio determina el número de raíces en el plano complejo. La existencia de un número infinito de raíces para el caso de ecuaciones diferenciales con retardo, incluso para ecuaciones de primer orden, permite observar la complejidad que presenta el estudio de estos sistemas.

De la función característica (3.5) se deriva el siguiente lema:

Lema 2 [5] Si existe una secuencia s_l de ceros de la función característica (3.5) tal que $|s_l| \rightarrow \infty$ cuando $l \rightarrow \infty$, entonces $Re(s_l) \rightarrow -\infty$ cuando $l \rightarrow \infty$. Así, existe un número real α tal que todos los ceros de la función característica (3.5) satisfacen $Re(s) < \alpha$ y existe solamente un número finito de ceros a la derecha de cualquier línea vertical en el plano complejo.

3.3 Análisis de estabilidad.

La función característica (3.5) se puede escribir en la forma siguiente:

$$f(s) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj} s^k e^{-hjs} \quad (3.7)$$

donde los h_j son combinaciones lineales de los τ_j . Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $0 = h_0 < h_1 < h_2 \dots < h_m$. El término $a_{mn} s^n e^{hms}$ se conoce como término principal del quasipolinomio $f(s)$. El término principal juega un papel importante en el análisis de estabilidad de $f(s)$. Explicitamente, la existencia del término principal es una condición necesaria para la estabilidad de $f(s)$ ya que si no existe término principal, existen un número infinito de ceros de $f(s)$ con parte real positiva arbitrariamente grande.

Otra forma de expresar (3.7) es:

$$f(s) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{kj} s^k e^{-hjs} \quad (3.8)$$

así como también:

$$f(s) = s^n + \sum_{k=0}^m p_k(s) e^{-h_k s} \quad (3.9)$$

donde $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m$, y $p_k(s)$ son polinomios tales que $\deg(p_k(s)) < n$ para $k = 1, 2, 3, \dots, m$.

Considerando el caso de retardos conmensurables, es decir, $\tau_k = k\tau$, $\tau > 0$, entonces, considerando un cambio de variable de tiempo, es posible demostrar que el quasipolinomio (3.9) se puede escribir como:

$$f(s) = s^n + \sum_{k=0}^m p_k(s) e^{-ks} \quad (3.10)$$

Para este caso, existe un criterio de estabilidad debido a Pontryagin.

Teorema 3 [Pontryagin] [10]. Supongase que $f(s)$ en (3.10) tiene término principal.

Sean $F(\omega)$ y $G(\omega)$ definadas por

$$f(j\omega) = F(\omega) + jG(\omega).$$

Entonces la función $f(s)$ no tiene ceros en el semiplano $Re(s) \geq 0$ si una de las siguientes condiciones se satisface:

1. Todos los ceros de las funciones $F(\omega)$ y $G(\omega)$, son reales y simples, y para cada cero ω se satisface la siguiente relación:

$$\dot{F}(\omega)G(\omega) - \dot{G}(\omega)F(\omega) < 0. \quad \dot{F} := \frac{dF(\omega)}{d\omega} \quad (3.11)$$

2. Todos los ceros de las funciones $F(\omega)$ y $G(\omega)$ son reales, simples, alternados, y para al menos un ω la relación (3.11) se satisface.
3. Todos los ceros de la función $F(\omega)$ son reales, y para cada cero ω se satisface la desigualdad:

$$\dot{F}(\omega)G(\omega) < 0. \quad (3.12)$$

4. Todos los ceros de la función $G(\omega)$ son reales, y para cada cero ω se satisface la desigualdad:

$$\dot{G}(\omega)F(\omega) > 0. \quad (3.13)$$

Principio del Argumento. Este método está directamente relacionado con el criterio de Nyquist, el cual tiene como objetivo, determinar la estabilidad de sistemas lineales. Se relaciona directamente con los ceros de la función característica del sistema. Se basa en el mapeo del plano s al plano $f(s)$. Se tendrá estabilidad cuando todas las raíces de la función característica estén en el semiplano izquierdo de s . A un camino cerrado continuo dado en el plano s que no pasa por ningún punto singular, corresponde una curva cerrada en el plano $f(s)$. La cantidad de lazos alrededor del origen en el plano $f(s)$ puede ser relacionada con la estabilidad del sistema. Para esto se requiere que el contorno cerrado del plano s abarque todo el semiplano derecho s . El contorno consiste en todo el eje ω desde $(\omega = -\infty$ hasta $\omega = +\infty)$ y un paso semicircular de radio infinito en el semiplano

s derecho. El recorrido sobre este contorno abarca todo el semiplano derecho de s y contiene todos los ceros con parte real positiva de la función característica. Si no hay ceros en el semiplano derecho de s el sistema es estable.

Teorema 4 [Principio del Argumento] [1]. Sea C un contorno cerrado, simple, descrito en sentido positivo, sea f una función analítica dentro y sobre el contorno C , excepto posiblemente en puntos interiores a C . Supóngase además que f no tiene ceros sobre C . Entonces:

$$\Delta \arg f(s) \Big|_{s \in C} = 2\pi(N - P)$$

donde N y P denotan el número de ceros y polos de f respectivamente, incluyendo sus multiplicidades interiores a C .

En el caso de quasipolinomios (funciones enteras), $P = 0$ por lo cual:

$$\Delta \arg f(s) \Big|_{s \in C} = 2\pi N \tag{3.14}$$

Considerese un quasipolinomio de la forma (3.9). Para efecto de analizar la estabilidad, se toma un contorno cerrado C formado por el eje imaginario y un semicírculo en el semiplano derecho de s con radio R suficientemente grande, ver Fig. 3.1. Así, mediante la aplicación del principio del argumento es posible mostrar el siguiente teorema.

Teorema 5 [10]. Sea $f(s)$ un quasipolinomio de la forma (3.9) sin ceros en el eje imaginario, $f(s)$ es estable si y solo si

$$\Delta \arg f(j\omega) \Big|_0^{+\infty} = \frac{n\pi}{2} \tag{3.15}$$

La condición anterior implica realizar un barrido de frecuencia de 0 a ∞ para verificar la estabilidad de un quasipolinomio. El siguiente teorema mostrado recientemente en [16], proporciona una forma de reducir el intervalo de barrido a un intervalo finito $[0, R_0]$, $R_0 > 0$, tal que para $R \geq R_0$ no existe una contribución significativa en el cambio del argumento.

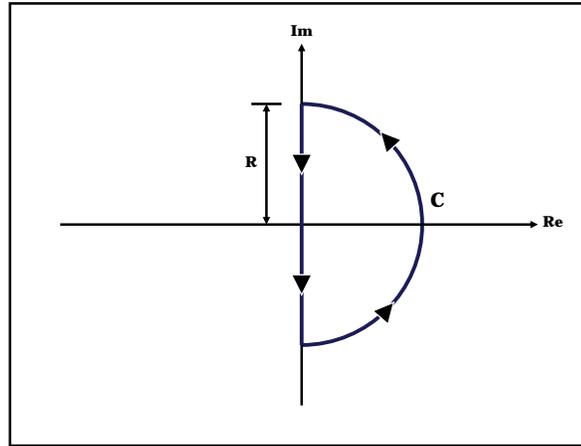


Fig. 3.1. Contorno cerrado C.

Teorema 6 [Finitio de Nyquist] [16]. Dado un quasipolinomio de tipo retardado de la forma (3.8). Sea $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$ y sea ψ la única raíz positiva de la ecuación polinomial:

$$Y_0\psi^n + Y_1\psi^{n-1} + \dots + Y_{n-1}\psi = \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right),$$

donde

$$0 \leq Y_k = \sum_{j=0}^m |a_{kj}|, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

el cambio de argumento de $f(j\omega)$ para $\omega \in [0, \infty)$ con $R \geq \frac{1}{\psi}$ esta acotado por ϵ .

Método de D-descomposición [13]. Este método debido a Neimark consiste en obtener una *descomposición* del espacio de parámetros en varias regiones, tal que cada región este acotada por una hipersuperficie, la cual corresponde al caso cuando al menos una de las las raíces caen en el eje imaginario. Además, para todos los parámetros contenidos en una región dada, la correspondiente ecuación característica tiene el mismo número de raíces con parte real positiva. En este caso, el estudio de estabilidad se reduce al análisis de las regiones sin raíces inestables.

Para ilustrar el método de D-Descomposición, considere una función característica de la forma

$$q(s, \lambda) = q_0(s) + \lambda_1 q_1(s) + \lambda_2 q_2(s), \quad (3.16)$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ representa un vector de parámetros y $\{q_0, q_1, q_2\}$ son quasipolinomios con término principal único. Las raíces de $q(s, \lambda)$ son funciones continuas de los parámetros (λ_1, λ_2) .

Sea $s_o = j\omega_o$ una raíz de $q(s, \lambda)$, para algún $\omega_o \in \mathbb{R}$, entonces,

$$q(j\omega_o, \lambda) = q_0(j\omega_o) + \lambda_1 q_1(j\omega_o) + \lambda_2 q_2(j\omega_o) = 0. \quad (3.17)$$

De (3.17) se tiene que:

$$\text{Re}\{q_0(j\omega_o) + \lambda_1 q_1(j\omega_o) + \lambda_2 q_2(j\omega_o)\} = 0,$$

$$\text{Im}\{q_0(j\omega_o) + \lambda_1 q_1(j\omega_o) + \lambda_2 q_2(j\omega_o)\} = 0,$$

de donde

$$\lambda_1 = \psi_1(\omega_o),$$

$$\lambda_2 = \psi_2(\omega_o).$$

Graficando $\{\psi_1(\omega_o), \psi_2(\omega_o)\}$ en el espacio de parámetros, para todo $\omega \in \mathbb{R}$, se obtienen un conjunto de curvas límite, las cuales dividen el espacio de parámetros en regiones continuas. Este conjunto de curvas representan fronteras de estabilidad del quasipolinomio $q(s, \lambda)$. Dado que las raíces de $q(s, \lambda)$ son funciones continuas de los parámetros del sistema, entonces, el número de raíces es constante en cada dominio separado por las curvas límite.

Utilizando el principio del Argumento junto con el método de D-Descomposición, es posible determinar el dominio completo de estabilidad del quasipolinomio (3.16) en el espacio de parámetros (λ_1, λ_2) .

3.4 Ejemplo.

Considere a la siguiente ecuación diferencial en diferencia escalar de tipo retardada:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau), \quad (3.18)$$

donde a y b son cualesquiera números reales y τ es un real positivo.

De (3.5) se tiene que la función característica asociada a (3.18) está dada por

$$f(s) = s - a - be^{-\tau s}. \quad (3.19)$$

Del método de D-Descomposición se tiene que es posible obtener un conjunto de curvas que particionan el plano de coeficientes a y b en un conjunto de dominios conectados. Cada una de estas curvas representan fronteras de estabilidad del quasipolinomio (3.19), en donde para cualquier conjunto de coeficientes (a, b) pertenecientes a estas curvas, existe al menos un cero de $f(s)$ sobre el eje imaginario y por lo tanto, el sistema (3.18) es inestable. Para obtener este conjunto de fronteras de estabilidad se tiene que, sea $s_o = j\omega_o \neq 0$ un cero de $f(s)$. Entonces:

$$f(j\omega_o) = (j\omega_o) - a - be^{-\tau j\omega_o} = 0, \quad (3.20)$$

de donde se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega_o \cos(\tau\omega_o)}{\sin(\tau\omega_o)} \\ b &= \frac{-\omega_o}{\sin(\tau\omega_o)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

La parametrización en (3.21) define un número contable de curvas en el espacio de coeficientes (a, b) , cada una de éstas curvas es obtenida mediante un barrido de ω_o en los intervalos $(\frac{k\pi}{\tau}, \frac{(k+1)\pi}{\tau})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ver Fig. 3.2. Por otro lado, si $\omega_o = 0$, de la igualdad $f(j\omega_o) = 0$ se obtiene la recta $a + b = 0$.

Utilizando el principio del argumento junto con el Teorema Finito de Nyquist, se puede determinar gráficamente, el número de ceros de lado derecho del plano complejo de $f(s)$ para cada una de las regiones generadas por la parametrización en (3.21).

Tomando $\tau = 1$, en la Fig. 3.4 se observa como, para un punto x dentro de la región en el espacio de coeficientes (a, b) (ver Fig. 3.3) definida por la parametrización (3.21) en el intervalo $\omega_o \in (0, \pi)$, el cambio del argumento $\Delta \arg f(j\omega_o) \Big|_0^R \approx \frac{\pi}{2}$, con lo cual el número de ceros de $f(s)$ para todo el conjunto de coeficientes (a, b) dentro de esta región es igual a cero, y por lo tanto el sistema (3.18) es estable. También se observa como para un punto y dentro de otra región en el espacio de coeficientes (a, b) (ver Fig. 3.3), el cambio del argumento $\Delta \arg f(j\omega_o) \Big|_0^R \approx \frac{-5\pi}{2}$, con lo cual el número de ceros de $f(s)$ para todo el conjunto de coeficientes (a, b) dentro de esta región es distinto de cero, y por lo tanto el sistema (3.18) es inestable.

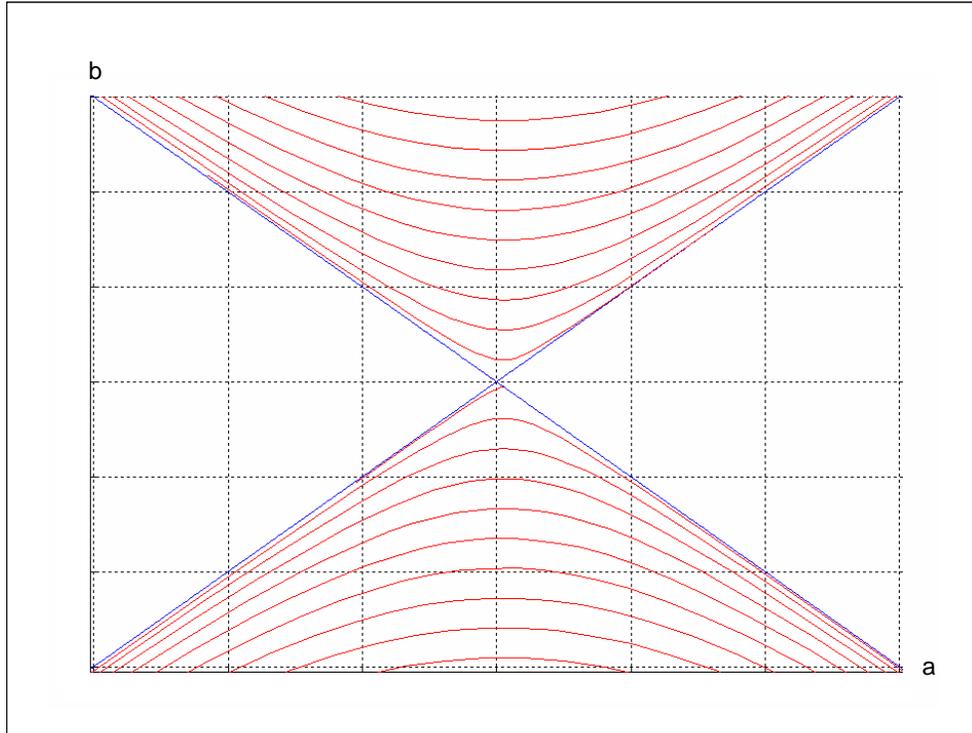


Fig. 3.2. Conjunto de curvas en el espacio de parámetros (a, b) .

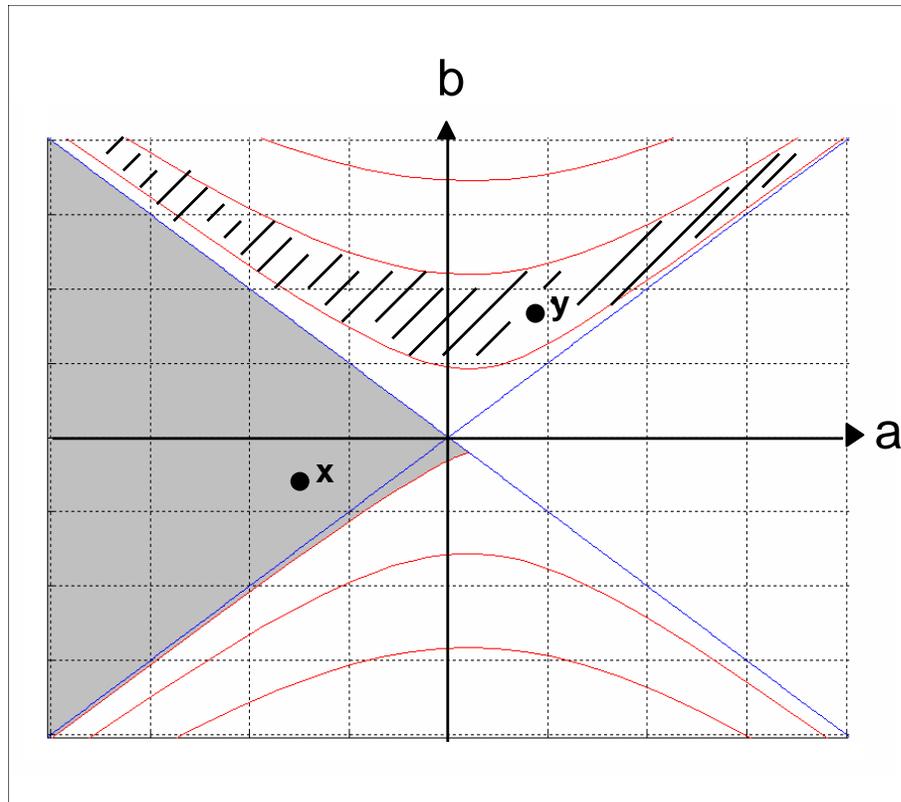


Fig. 3.3. La región sombreada corresponde a la región de estabilidad asociada a (3.18).

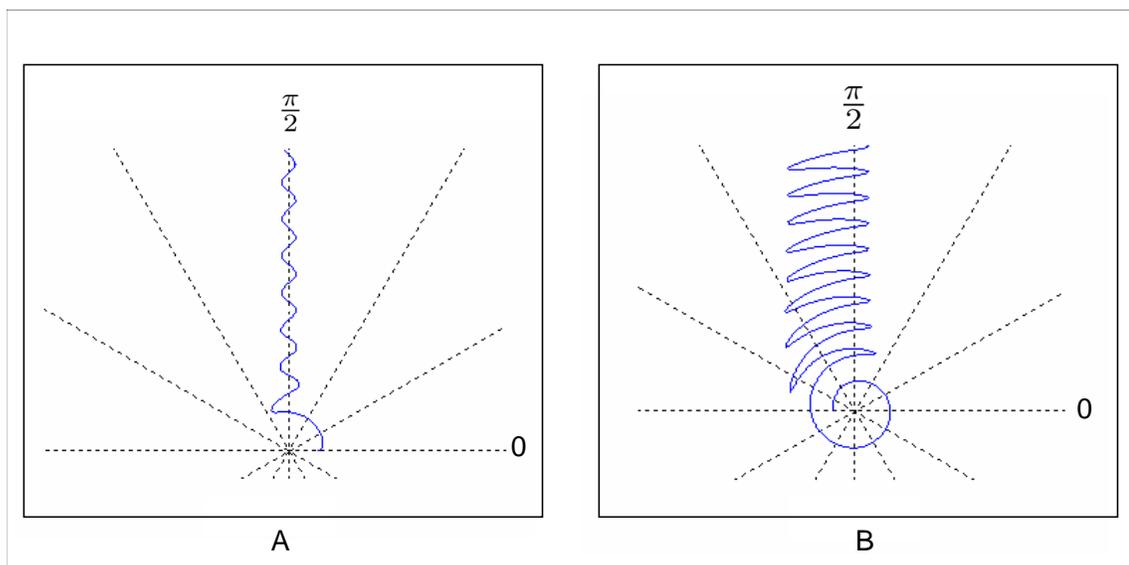


Fig. 3.4. Cambio de argumento de $f(j\omega_0)$ para los puntos x - y respectivamente.

En este trabajo de tesis, básicamente se van a utilizar estos métodos para la obtención de los resultados.

Existen muchos más métodos de análisis de los sistemas con retardo, tanto en el dominio del tiempo (enfoque de Lyapunov) como en el dominio de la frecuencia, pero no es el objetivo de esta tesis hacer una descripción de tales métodos. Para mayor información véase [4], [10], [1] y [13].

Capítulo 4

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En este capítulo se presenta el análisis de estabilidad para los modelos (2.2), (2.3) y (2.5). Condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad asintótica de los modelos linealizados son obtenidas. Explícitamente, el conjunto completo de controladores PI que estabilizan localmente el equilibrio de cada uno de los modelos (2.2), (2.3) y (2.5) es obtenido. Una comparación entre las regiones completas de estabilidad asociada a cada modelo es presentada con el objetivo de observar las ventajas y desventajas de las simplificaciones consideradas en el capítulo 2 para el sistema (2.1). Por último, una comparación entre la región de estabilidad completa asociada al sistema (2.2), y la región de estabilidad para el mismo sistema derivada en [8] es presentada con el objetivo de observar las ventajas de obtener el conjunto completo de controladores estabilizadores PI. Algunas simulaciones son presentadas al final del capítulo.

4.1 Diseño del controlador via linealización.

Con el objeto de diseñar un controlador PI a través de la linealización de cada uno de los sistemas (2.2), (2.3) y (2.5), alrededor de su punto de equilibrio, definase

$$\sigma(t) = \int_0^t (q(\eta) - q_0) d\eta,$$

y considerese los sistemas aumentados correspondientes a los sistemas (2.2), (2.3) y (2.5).

Así, para el modelo (2.5) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau} w^2(t) p(t - \tau), \\ \dot{q}(t) &= \frac{n}{\tau} w(t) - c, \\ \dot{\sigma}(t) &= q(t) - q_0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

mientras que para el modelo (2.3) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau} w(t) w(t - \tau) p(t - \tau), \\ \dot{q}(t) &= \frac{n}{\tau} w(t) - c, \\ \dot{\sigma}(t) &= q(t) - q_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

El modelo (2.2) toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{1}{\frac{q(t)}{c} + \tau_p} - \frac{1}{2} \frac{w(t) w(t - \tau_0)}{\frac{q(t - \tau_0)}{c} + \tau_p} p(t - \tau_0), \\ \dot{q}(t) &= \frac{nw(t)}{\frac{q(t)}{c} + \tau_p} - c \\ \dot{\sigma}(t) &= q(t) - q_0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

El control p para cada uno de los modelos (4.1), (4.2) y (4.3), será diseñado como una función de (q, σ) tal que los sistemas en lazo cerrado tienen un equilibrio (w_0, q_0, σ_0) , donde σ_0 será diseñado por retroalimentación.

Linealizando (4.1), (4.2) y (4.3) respectivamente, alrededor del equilibrio $(w_0, q_0, p_0, \sigma_0)$, y considerando: $\tilde{w}(t) = w(t) - w_0$, $\tilde{q}(t) = q(t) - q_0$, $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(t) - \sigma_0$ y $\tilde{p}(t) = p(t) - p_0$, se tiene:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + b\tilde{p}(t - \tau), \quad (4.4)$$

$$\text{donde } \xi(t) = \begin{pmatrix} \tilde{w}(t) \\ \tilde{q}(t) \\ \tilde{\sigma}(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -\frac{2n}{\tau^2 c} & 0 & 0 \\ \frac{n}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\frac{\tau c^2}{2n^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para el caso del modelo (4.1), mientras que para el modelo (4.2) se tiene:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + A_1\xi(t - \tau) + b\tilde{p}(t - \tau), \quad (4.5)$$

$$\text{donde } \xi(t) = \begin{pmatrix} \tilde{w}(t) \\ \tilde{q}(t) \\ \tilde{\sigma}(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\tau^2 c} & 0 & 0 \\ \frac{n}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\tau^2 c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\frac{\tau c^2}{2n^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La linealización del modelo (4.3) toma la siguiente forma:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + A_1\xi(t - \tau_0) + b\tilde{p}(t - \tau_0), \quad (4.6)$$

$$\text{donde } \xi(t) = \begin{pmatrix} \tilde{w}(t) \\ \tilde{q}(t) \\ \tilde{\sigma}(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\tau_0^2 c} & -\frac{1}{c\tau_0^2} & 0 \\ \frac{n}{\tau_0} & -\frac{1}{\tau_0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\tau_0^2 c} & \frac{1}{c\tau_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\frac{\tau_0 c^2}{2n^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora considerese un controlador PI de la forma

$$\tilde{p}(t) = k_p \tilde{q}(t) + \frac{k_p}{I} \tilde{\sigma}(t), \quad (4.7)$$

donde $\frac{k_p}{I} \neq 0$.

El sistema en lazo cerrado (4.4)-(4.7) tiene la siguiente forma:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\xi(t - \tau), \quad (4.8)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\tau c^2}{2n^2} k_p & -\frac{\tau c^2}{2n^2} \frac{k_p}{I} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema en lazo cerrado (4.5)-(4.7) tiene la forma:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\xi(t - \tau), \quad (4.9)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\tau^2 c} & -\frac{\tau c^2}{2n^2} k_p & -\frac{\tau c^2}{2n^2} \frac{k_p}{I} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el sistema en lazo cerrado (4.6)-(4.7) tiene la forma:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\xi(t - \tau), \quad (4.10)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\tau_0^2 c} & \frac{1}{c\tau_0^2} - \frac{\tau_0 c^2}{2n^2} k_p & -\frac{\tau_0 c^2}{2n^2} \frac{k_p}{I} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Asúmase por el momento que es posible encontrar ganancias del control que hacen los sistemas (4.8), (4.9) y (4.10) asintóticamente estables. Entonces, el controlador debe ser tomado como:

$$p(t) = k_p (q(t) - q_0) + \frac{k_p}{I} (\sigma(t) - \sigma_0) + p_0.$$

Seleccionado σ_0 como:

$$\sigma_0 = \frac{I}{k_p} (p_0 - k_p q_0),$$

el controlador se simplifica como:

$$p(t) = k_p q(t) + \frac{k_p}{I} \sigma(t). \quad (4.11)$$

Puede ser verificado fácilmente que los sistemas en lazo cerrado (4.1)-(4.11), (4.2)-(4.11) y (4.3)-(4.11), tienen un único punto de equilibrio (w_0, q_0, σ_0) respectivamente, y todas las soluciones de (4.1), (4.2) y (4.3), que comienzan suficientemente cerca de su equilibrio, tienden a él cuando t tiende a infinito.

4.2 Análisis de estabilidad para el Modelo simplificado ($\frac{\tau c}{n} \gg 1$).

El sistema (4.8) es asintóticamente estable, si y solo si, la función característica

$$f(s) = s^3 + \frac{2n}{\tau^2 c} s^2 + \frac{c^2}{2n} e^{-\tau s} k_p \left(s + \frac{1}{I} \right), \quad (4.12)$$

no tiene ceros con parte real no negativa [4].

En el siguiente teorema, se expresan *condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica* para el sistema (4.8).

Teorema 7 Dado un conjunto de parámetros (n, τ, c) , el sistema (4.8) es asintóticamente estable si, y solo si, las ganancias del controlador (k_p, I) pertenecen a la región de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$, gráficamente en la Fig. 4.1, cuya frontera en el espacio de ganancias del controlador (k_p, I) está descrita por

$$\partial\Phi_{(n, \tau, c)} = \left\{ (I, k_p) : I = \frac{\omega \cos(\omega\tau) + \frac{2n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau)}{\omega \left(\frac{2n}{\tau^2 c} \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau) \right)} \right. \\ \left. y k_p = \frac{2n}{c^2} \omega \left(\omega \cos(\omega\tau) + \frac{2n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau) \right), \omega \in (0, \omega^*) \right\},$$

donde ω^* es la solución de la ecuación

$$\tan(\omega\tau) = \frac{2n}{\tau^2 c \omega}, \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau} \right). \quad (4.13)$$

Prueba. Primero obsérvese que $\frac{k_p}{I} \neq 0$ y $s = 0$ no es cero de $f(s)$. Suponga que $f(s)$ tiene un cero imaginario puro $s = j\omega \neq 0$. Entonces, un cálculo directo nos proporciona

$$k_p = \frac{2n}{c^2} \omega \left(\omega \cos(\omega\tau) + \frac{2n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau) \right) \quad (4.14) \\ I = \frac{\omega \cos(\omega\tau) + \frac{2n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau)}{\omega \left(\frac{2n}{\tau^2 c} \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau) \right)}.$$

Esta parametrización define un número contable de curvas en el espacio de parámetros (k_p, I) , y cada una de éstas es obtenida variando ω en un intervalo $(\omega_k^*, \omega_{k+1}^*)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, donde ω_k^* es la solución de la ecuación

$$\frac{2n}{\tau^2 c \omega} = \tan(\omega \tau), \quad \omega \in \left(\frac{k\pi}{\tau}, \frac{(2k+1)\pi}{2\tau} \right). \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

Una solución analítica de (4.15) es difícil de encontrar. Sin embargo, una solución numérica puede ser encontrada graficando las dos funciones $\frac{2n}{\tau^2 c \omega}$ y $\tan(\omega \tau)$, (ver Fig. 4.2). Éstas curvas particionan el plano (k_p, I) en un conjunto de dominios conectados. Del principio del argumento es fácil mostrar que para todos los valores (k_p, I) dentro del dominio abierto $\Phi_{(n, \tau, c)}$, acotado por la curva para $k = 0$ y el eje coordenado $k_p = 0$, la función $f(s)$ no tiene ceros con parte real estrictamente positiva. ■

Observación 8 De la parametrización en (4.14) no es difícil ver que $I(\omega) \rightarrow \frac{\tau^2 c}{2n} + \tau$ y $k_p(\omega) \rightarrow +0$ cuando $\omega \rightarrow +0$, y $I(\omega) \rightarrow +\infty$ y $k_p(\omega) \rightarrow \frac{2n(\omega^*)^2}{c^2 \cos(\omega^* \tau)}$ cuando $\omega \rightarrow -\omega^*$.

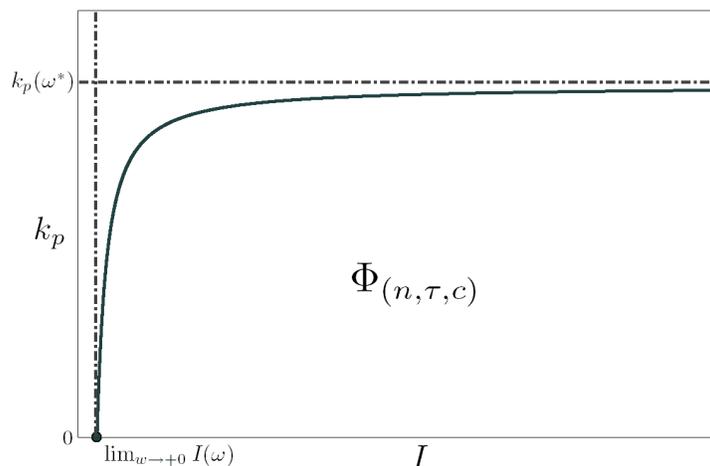


Fig. 4.1. Región de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$.

Observación 9 En la Fig. 4.1 se observa la región completa de estabilidad del sistema (4.8), con lo cual, el conjunto completo de ganancias (k_p, I) que estabilizan localmente el equilibrio del sistema no lineal (4.1) son obtenidas. La frontera de la región de estabilidad

es obtenida a través de la parametrización (4.14), haciendo un barrido de w en el intervalo $(0, w^*)$.

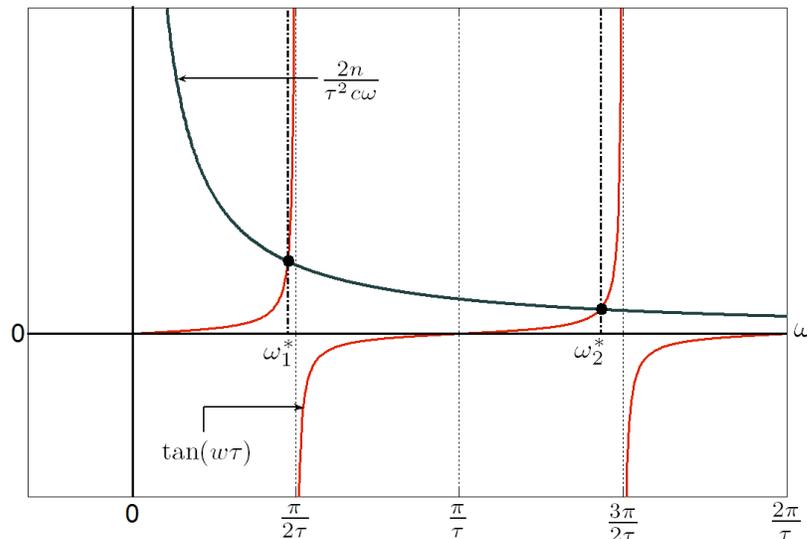


Fig. 4.2. Solución numérica de la ecuación (4.15).

4.2.1 Simulaciones

Las simulaciones fueron realizadas utilizando MATLAB/SIMULINK. El sistema no lineal utilizado es el definido en (4.1). Los parámetros de red considerados son: $n = 40$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s, $\tau = 0.7$ s. En la Fig. 4.3 se observa la región de estabilidad $\Phi_{(n,c,\tau)}$ en el espacio de ganancias (k_p, I) determinada por el Teorema 7, correspondiente a dichos parámetros. Se seleccionaron los siguientes valores de ganancias dentro de la región $\Phi_{(n,c,\tau)}$: $k_p = 2.7 \times 10^{-4}$, $I = 12$ (vease la Fig. 4.3).

En la Fig. 4.4 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado para los estados $q(t)$, $w(t)$, $\sigma(t)$ y para la entrada de control $p(t)$. Gráficamente se observa como el equilibrio $(w_0, q_0, p_0, \sigma_0)$ con valores $w_0 = 5.25$ paquetes, $q_0 = 300$ paquetes, $p_0 = 0.0726$ paquetes y $\sigma_0 = -373.3332$ paquetes, es alcanzado. Notese que la respuesta para $q(t)$ permanece constante en 0 durante un periodo de tiempo, esto debido a que el modelo previene que la longitud de la cola sea negativa, lo cual se explica en el capítulo 2 de esta tesis.

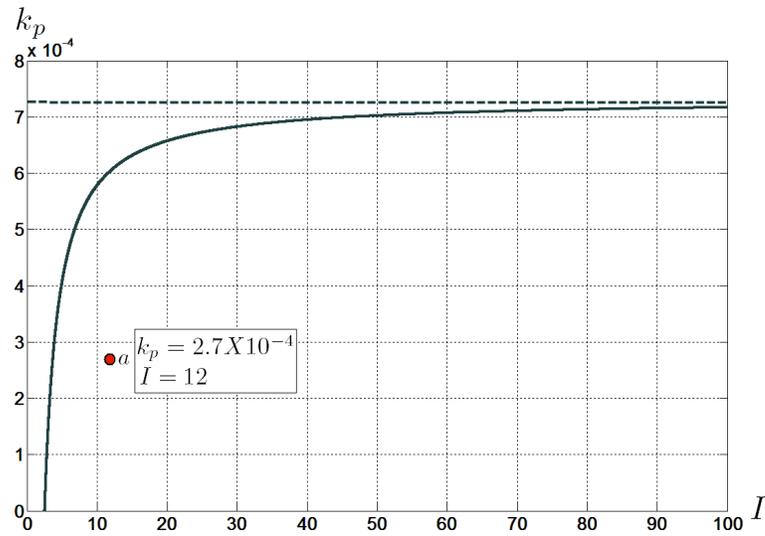


Fig. 4.3. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$ con: $n = 40$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s y $\tau = 0.7$ s.

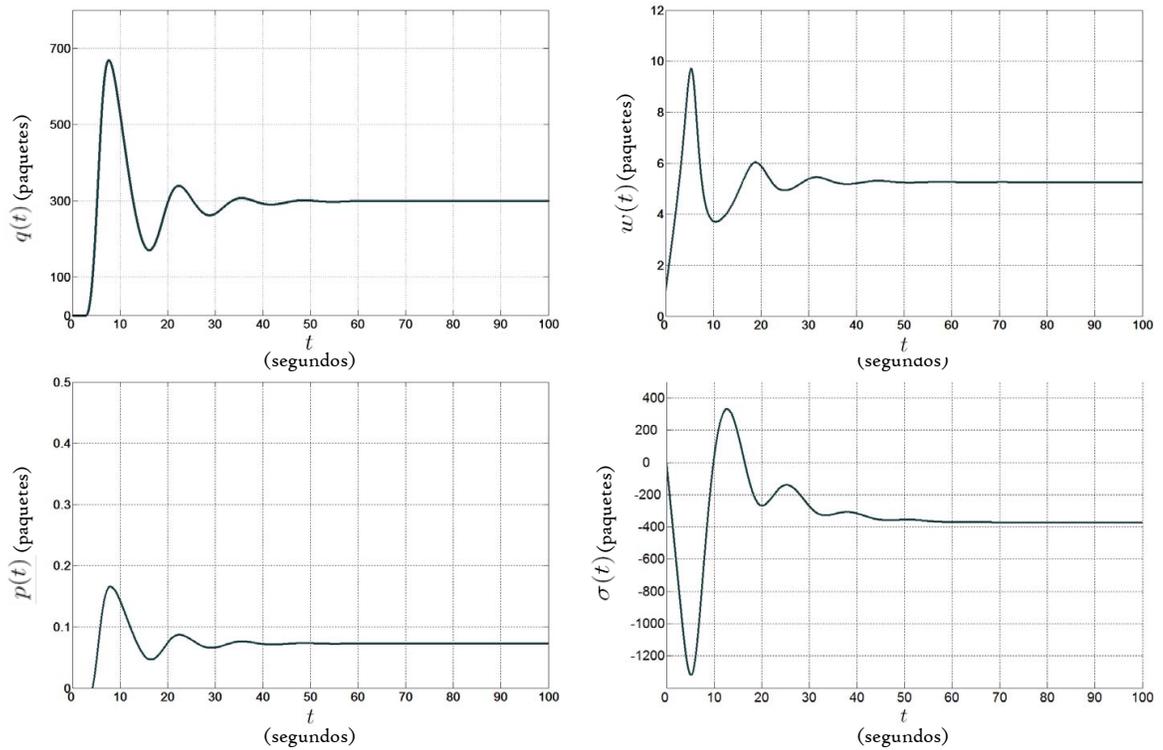


Fig. 4.4. Respuesta del sistema no lineal (4.1) en lazo cerrado correspondiente a los estados $q(t)$, $w(t)$, $\sigma(t)$ y la entrada de control $p(t)$.

4.3 Análisis de estabilidad para el Modelo simplificado ($\tau \approx \tau_p$).

El sistema (4.9) es asintóticamente estable, si y solo si, la función característica

$$f(s) = s^3 + \frac{n}{\tau^2 c} s^2 + \left[\frac{n}{\tau^2 c} s^2 + \frac{c^2}{2n} k_p \left(s + \frac{1}{I} \right) \right] e^{-\tau s}, \quad (4.16)$$

no tiene ceros con parte real no negativa [4].

En el siguiente teorema, se expresan *condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica* para el sistema (4.9).

Teorema 10 Dado un conjunto de parámetros (n, τ, c) , el sistema (4.9) es asintóticamente estable, si y solo si, las ganancias del controlador (k_p, I) pertenecen a la región de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$, gráficamente en la Fig. 4.5, cuya frontera en el espacio de ganancias del controlador (k_p, I) está descrita por

$$\partial\Phi_{(n, \tau, c)} = \left\{ (I, k_p) : I = \frac{\omega \cos(\omega\tau) + \frac{n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau)}{\omega \left(\frac{n}{\tau^2 c} (1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau) \right)} \right. \\ \left. y k_p = \frac{2n}{c^2} \omega \left(\omega \cos(\omega\tau) + \frac{n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau) \right), \omega \in (0, \omega^*) \right\},$$

donde ω^* es la solución de la ecuación

$$\frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau) + 1} = \frac{n}{\tau^2 c \omega}, \omega \in \left(0, \frac{\pi}{\tau} \right). \quad (4.17)$$

Prueba. Primero obsérvese que $\frac{k_p}{I} \neq 0$ y $s = 0$ no es cero de $f(s)$. Suponga que $f(s)$ tiene un cero imaginario puro $s = j\omega \neq 0$. Entonces, un cálculo directo nos proporciona

$$k_p = \frac{2n}{c^2} \omega \left(\omega \cos(\omega\tau) + \frac{n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau) \right) \quad (4.18) \\ I = \frac{\omega \cos(\omega\tau) + \frac{n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau)}{\omega \left(\frac{n}{\tau^2 c} (1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau) \right)}.$$

Esta parametrización define un número contable de curvas en el espacio de parámetros (k_p, I) , y cada una de éstas es obtenida variando ω en un intervalo $(\omega_k^*, \omega_{k+1}^*)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, donde ω_k^* es la solución de la ecuación

$$h(\omega) = g(\omega), \omega \in \left(\frac{2k\pi}{\tau}, \frac{(2k+1)\pi}{\tau} \right), k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.19)$$

donde

$$h(\omega) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau) + 1} \text{ y } g(\omega) = \frac{n}{\tau^2 c \omega}.$$

Una solución analítica de (4.19) es difícil de encontrar. Sin embargo, una solución numérica puede ser encontrada graficando las dos funciones $h(\omega)$ y $g(\omega)$, ver Fig. 4.6. Estas curvas particionan el plano (k_p, I) en un conjunto de dominios conectados. Del principio del argumento es fácil mostrar que para todos los valores (k_p, I) dentro del dominio abierto $\Phi_{(n,\tau,c)}$, acotado por la curva para $k = 0$ y el eje coordenado $k_p = 0$, la función $f(s)$ no tiene ceros con parte real estrictamente positiva. ■

Observación 11 De la parametrización en (4.18) no es difícil ver que $I(\omega) \rightarrow \frac{\tau^2 c}{2n} + \frac{\tau}{2}$ y $k_p(\omega) \rightarrow +0$ cuando $\omega \rightarrow +0$, y $I(\omega) \rightarrow +\infty$ y $k_p(\omega) \rightarrow \frac{2n}{c^2} (\omega^*)^2$ cuando $\omega \rightarrow -\omega^*$.

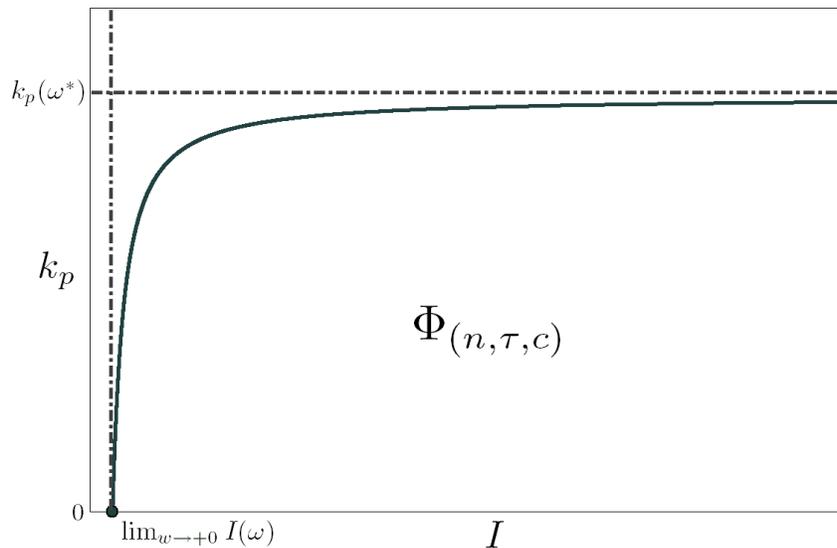


Fig. 4.5. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$.

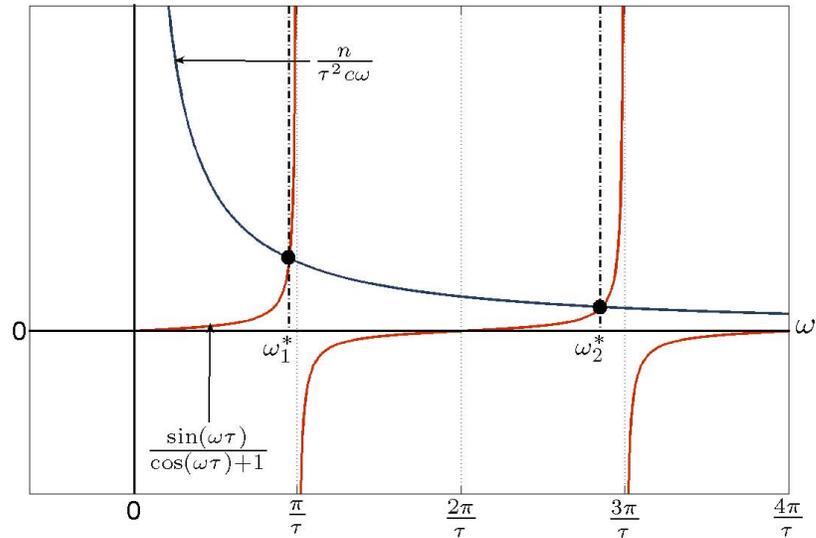


Fig. 4.6. Solución numérica de la ecuación (4.19).

4.3.1 Simulaciones

Las simulaciones fueron realizadas utilizando MATLAB/SIMULINK. El sistema no lineal utilizado es el definido en (4.2). Los parámetros de red considerados son: $n = 40$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s, $\tau = 0.7$ s. En la Fig. 4.7 se observa la región de estabilidad $\Phi_{(n,c,\tau)}$ en el espacio de ganancias (k_p, I) determinada por el Teorema 10, correspondiente a dichos parámetros. Se seleccionaron los siguientes valores de ganancias dentro de la región $\Phi_{(n,c,\tau)}$: $k_p = 2,5 \times 10^{-4}$ e $I = 20$ (vease la Fig. 4.7).

En la Fig. 4.8 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado para los estados $q(t)$, $w(t)$, $\sigma(t)$ y para la entrada de control $p(t)$. Gráficamente se observa como el equilibrio $(w_0, q_0, p_0, \sigma_0)$ con valores $w_0 = 5.25$ paquetes, $q_0 = 300$ paquetes, $p_0 = 0.0726$ paquetes y $\sigma_0 = -192$ paquetes, es alcanzado.

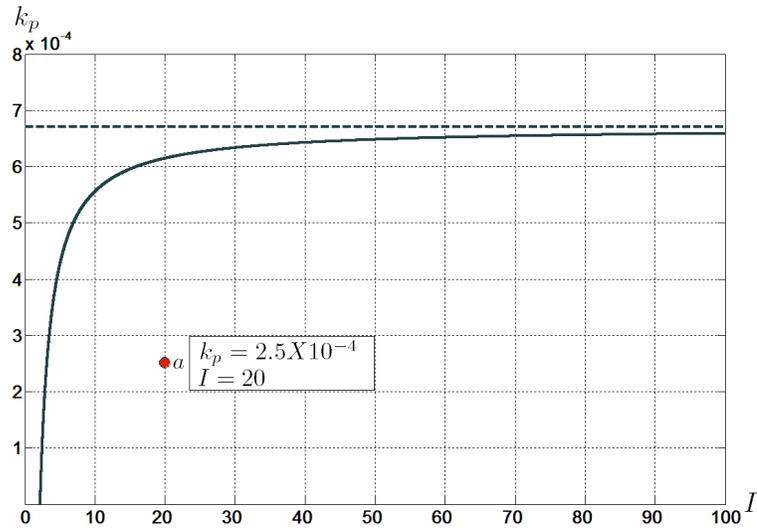


Fig. 4.7. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$ con: $n = 40$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s y $\tau = 0.7$ s.

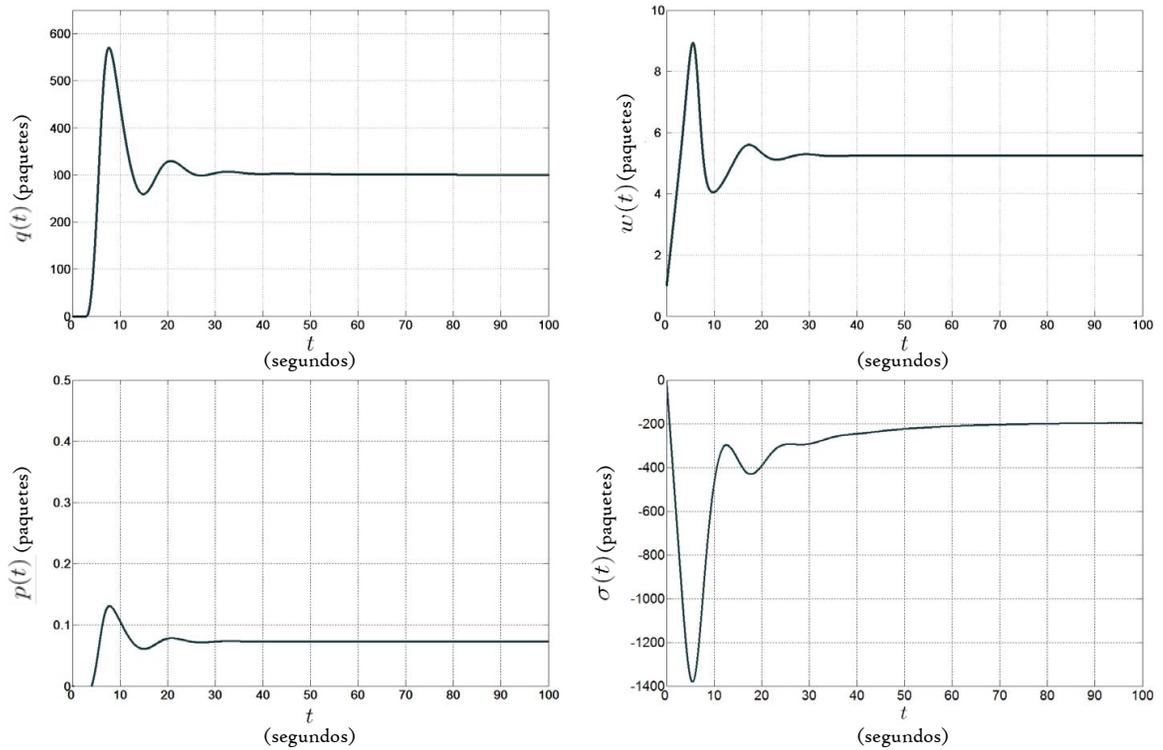


Fig. 4.8. Respuesta del sistema no lineal (4.2) en lazo cerrado correspondiente a los estados $q(t)$, $w(t)$, $\sigma(t)$ y la entrada de control $p(t)$.

4.4 Análisis de estabilidad para el Modelo simplificado ($\tau = \frac{q_0}{c} + \tau_p$).

El sistema (4.10) (considerando solo para efectos de notación τ_0 como τ) es asintóticamente estable, si y solo si, la función característica

$$f(s) = s^3 + \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{n}{\tau c}\right) s^2 + \frac{2n}{\tau^3 c} s + \left[\frac{n}{\tau^2 c} s^2 + \frac{c^2}{2n} k_p \left(s + \frac{1}{I}\right) \right] e^{-\tau s}, \quad (4.20)$$

no tiene ceros con parte real no negativa [4].

En el siguiente teorema, se expresan *condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica* para el sistema (4.10).

Teorema 12 Dado un conjunto de parámetros (n, τ, c) , el sistema (4.10) es asintóticamente estable, si y solo si, las ganancias del controlador (k_p, I) pertenecen a la región de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$, gráfícada en la Fig. 4.9, cuya frontera en el espacio de ganancias del controlador (k_p, I) está descrita por

$$\partial\Phi_{(n, \tau, c)} = \left\{ (I, k_p) : I = \frac{(\omega^2 - \frac{2n}{\tau^3 c}) \cos(\omega\tau) + \frac{\omega}{\tau} \left(1 + \frac{n}{\tau c}\right) \sin(\omega\tau)}{\omega \left[\frac{\omega}{\tau} \left(1 + \frac{n}{\tau c}\right) \cos(\omega\tau) + \left(\frac{2n}{\tau^3 c} - \omega^2\right) \sin(\omega\tau) + \frac{n\omega}{\tau^2 c} \right]} \right. \\ \left. y k_p = \frac{2n}{c^2} \left[\left(\omega^2 - \frac{2n}{\tau^3 c}\right) \cos(\omega\tau) + \frac{\omega}{\tau} \left(1 + \frac{n}{\tau c}\right) \sin(\omega\tau) \right], \omega \in (0, \omega^*) \right\},$$

donde ω^* es la solución de la ecuación

$$\frac{\omega}{\tau \left(\omega^2 - \frac{2n}{\tau^3 c}\right)} = \frac{\sin(\omega\tau)}{\frac{n}{\tau c} + \left(1 + \frac{n}{\tau c}\right) \cos(\omega\tau)}, \omega \in \left(0, \frac{\pi}{\tau}\right).$$

Prueba. Primero obsérvese que debido a que $\frac{k_p}{I} \neq 0$, $s = 0$ no es un cero de $f(s)$. Suponga que $f(s)$ tiene un cero imaginario puro $s = j\omega \neq 0$. Entonces, un cálculo directo nos proporciona

$$k_p = \frac{2n}{c^2} \left[\left(\omega^2 - \frac{2n}{\tau^3 c}\right) \cos(\omega\tau) + \frac{\omega}{\tau} \left(1 + \frac{n}{\tau c}\right) \sin(\omega\tau) \right] \quad (4.21) \\ I = \frac{(\omega^2 - \frac{2n}{\tau^3 c}) \cos(\omega\tau) + \frac{\omega}{\tau} \left(1 + \frac{n}{\tau c}\right) \sin(\omega\tau)}{\omega \left[\frac{\omega}{\tau} \left(1 + \frac{n}{\tau c}\right) \cos(\omega\tau) + \left(\frac{2n}{\tau^3 c} - \omega^2\right) \sin(\omega\tau) + \frac{n\omega}{\tau^2 c} \right]}.$$

La solución de la ecuación

$$g(\omega) = h(\omega), \quad (4.22)$$

donde

$$g(\omega) = \frac{\omega}{\tau \left(\omega^2 - \frac{2n}{\tau^3 c} \right)} \text{ y } h(\omega) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\frac{n}{\tau c} + \left(1 + \frac{n}{\tau c} \right) \cos(\omega\tau)}$$

son las frecuencias para las cuales el parámetro I es indeterminado. La función $g(\omega)$ es indeterminada en $\bar{\omega} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2n}{\tau c}}$. Por otro lado, la función $h(\omega)$ es indeterminada en frecuencias las cuales son soluciones de la ecuación

$$\cos(\omega\tau) = -\frac{1}{1 + \frac{\tau c}{n}}. \quad (4.23)$$

Esta ecuación tiene las siguientes soluciones:

$$\tilde{\omega}_{1l} = \tilde{\omega}_1 + 2l\pi, l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tilde{\omega}_{2l} = \tilde{\omega}_2 + 2l\pi, l = 0, 1, 2, \dots$$

donde $\tilde{\omega}_1$ y $\tilde{\omega}_2$ son las correspondientes soluciones de la ecuación en el intervalo $(0, \frac{2\pi}{\tau})$, ver Fig. 4.10. De hecho, tenemos que $\tilde{\omega}_1 \in (\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau})$ y $\tilde{\omega}_2 \in (\frac{\pi}{\tau}, \frac{\pi}{2\tau})$. Es claro que podemos tener los siguientes dos casos diferentes: si $\bar{\omega} < \tilde{\omega}_1$ entonces existe ω_0^* solución de la ecuación (4.22) en el intervalo $(\bar{\omega}, \tilde{\omega}_1)$, y si $\bar{\omega} > \tilde{\omega}_1$ entonces existe ω_0^* solución de la ecuación (4.22) en el intervalo $(\tilde{\omega}_1, \frac{\pi}{\tau})$, ver Figs. 4.11 y 4.12. De modo que, en cada intervalo de longitud π existe una solución de la ecuación (4.22) lo cual implica la existencia de una secuencia $\omega_k^*, k = 0, 1, 2, \dots$, donde ω_k^* es la solución de la ecuación (4.22) en el intervalo $(\frac{k\pi}{\tau}, \frac{(k+1)\pi}{\tau})$, $k = 0, 1, 2, \dots$. De esta manera, la parametrización (4.21) define un número contable de curvas en el espacio de parámetros (k_p, I) y cada una de éstas es obtenida variando ω en un intervalo $(\omega_k^*, \omega_{k+1}^*)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Éstas curvas particionan el plano (k_p, I) en un conjunto de dominios conectados. Del principio del argumento es fácil mostrar que para todos los valores (k_p, I) dentro del dominio abierto $\Phi_{(n, \tau, c)}$, acotado por la curva para $k = 0$ y el eje coordenado $k_p = 0$, la función $f(s)$ no tiene ceros con parte real estrictamente positiva. ■

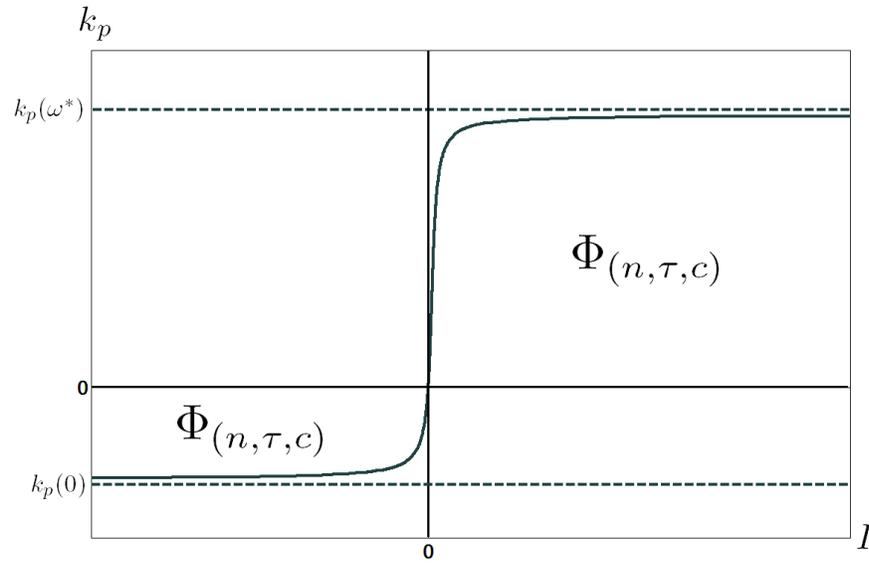


Fig. 4.9. Región de estabilidad $\Phi(n, \tau, c)$.

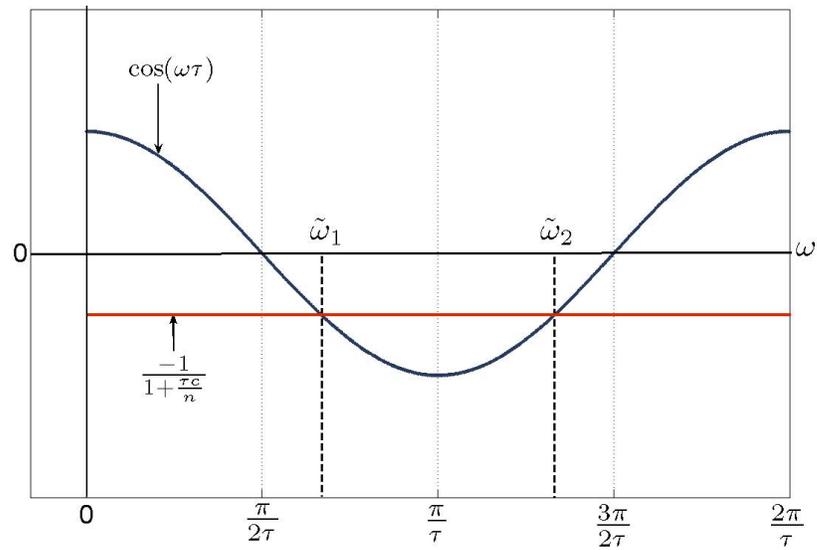


Fig. 4.10. Solución numérica de la ecuación (4.23).

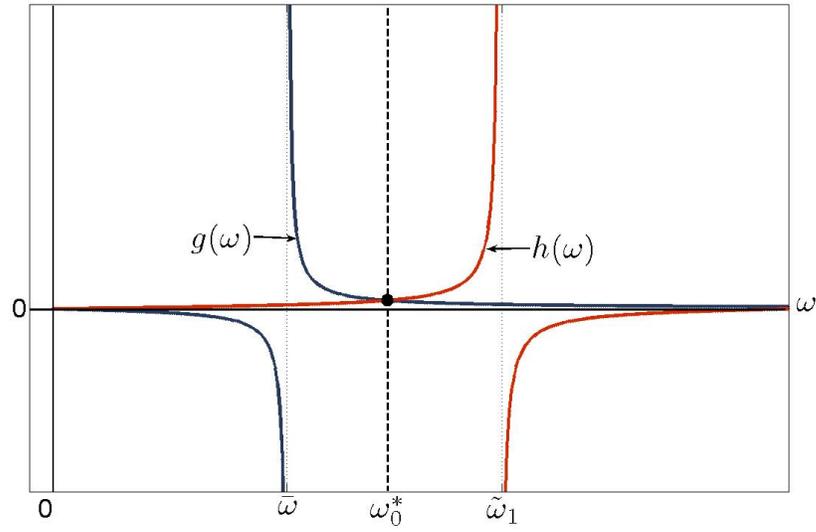


Fig. 4.11. Solución numérica de la ecuación (4.22) cuando $\bar{\omega} < \tilde{\omega}_1$.

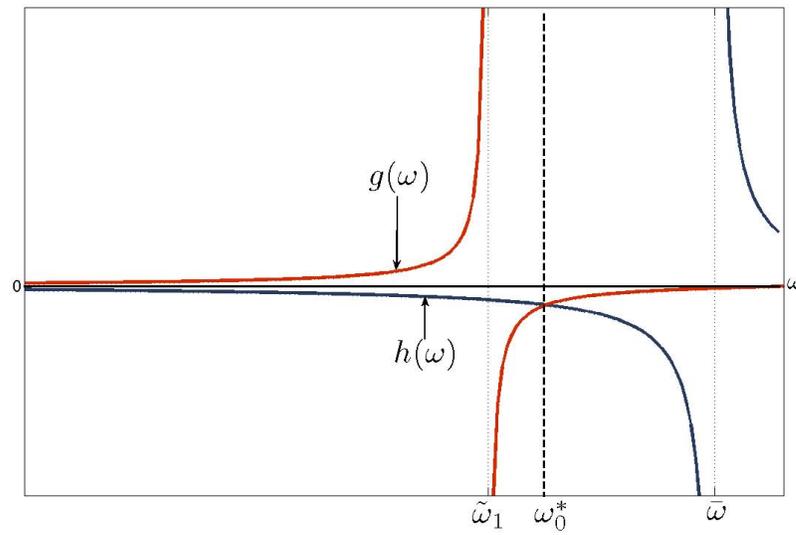


Fig. 4.12. Solución numérica de la ecuación (4.22) cuando $\bar{\omega} > \tilde{\omega}_1$.

4.4.1 Simulaciones

Las simulaciones fueron realizadas utilizando MATLAB/SIMULINK. El sistema no lineal utilizado es el definido en (4.3). Los parámetros de red considerados son: $n = 50$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s, $\tau = 0.533$ s. En la Fig. 4.13 se observa la región de estabilidad $\Phi_{(n,c,\tau)}$ en el espacio de ganancias (k_p, I) determinada por el Teorema 12, correspondiente a dichos parámetros. Se seleccionaron los siguientes valores de ganancias dentro de la región $\Phi_{(n,c,\tau)}$: $k_p = 1,99 \times 10^{-3}$ e $I = 20$ (vease la Fig. 4.13).

En la Fig. 4.14 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado para los estados $q(t)$, $w(t)$, $\sigma(t)$ y para la entrada de control $p(t)$. Gráficamente se observa como el equilibrio $(w_0, q_0, p_0, \sigma_0)$ con valores $w_0 = 3.198$ paquetes, $q_0 = 100$ paquetes, $p_0 = 0.1956$ paquetes y $\sigma_0 = -34.1709$ paquetes, es alcanzado.

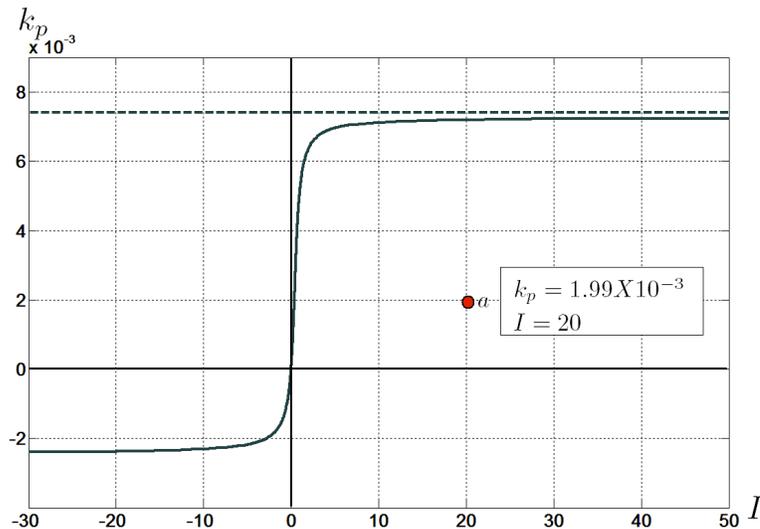


Fig. 4.13. Región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$ con: $n = 50$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s y $\tau = 0.533$ s.

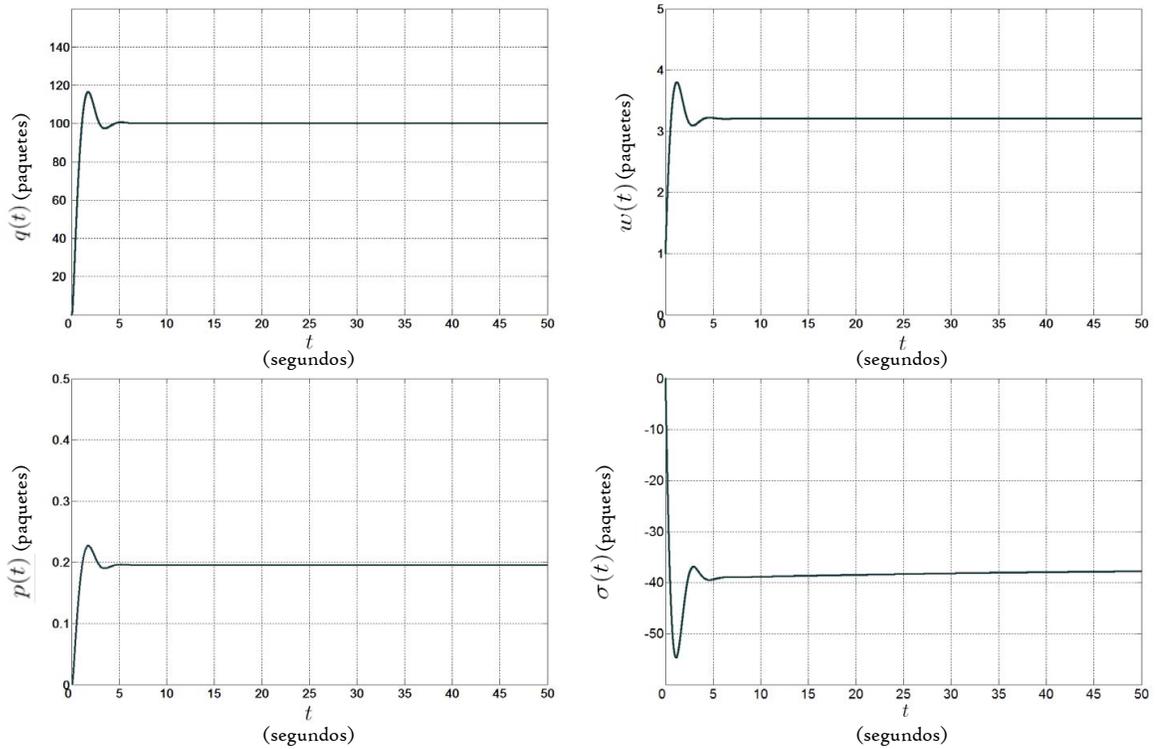


Fig. 4.14. Respuesta del sistema no lineal (4.3) en lazo cerrado correspondiente a los estados $q(t)$, $w(t)$, $\sigma(t)$ y la entrada de control $p(t)$.

4.5 Comparación entre regiones de estabilidad.

En esta sección se presenta gráficamente una comparación entre las regiones de estabilidad $\Phi_1(n, \tau, c)$, $\Phi_2(n, \tau, c)$ y $\Phi_3(n, \tau, c)$, descritas en el espacio de ganancias (k_p, I) , obtenidas para los modelos (4.8), (4.9) y (4.10) respectivamente. Los parámetros de red considerados son: $n = 50$ sesiones TCP, $c = 3000$ paquetes/s, $\tau = 0.7$ s. Considerando al parámetro de red c (capacidad de transmisión) suficientemente grande, como en este ejemplo, las simplificaciones consideradas para el modelo (2.3) ($\tau(t) = \frac{q(t)}{c} + \tau_p \approx \tau$) y para el modelo (2.5) ($w_0 = \frac{\tau c}{n} \gg 1$) se satisfacen.

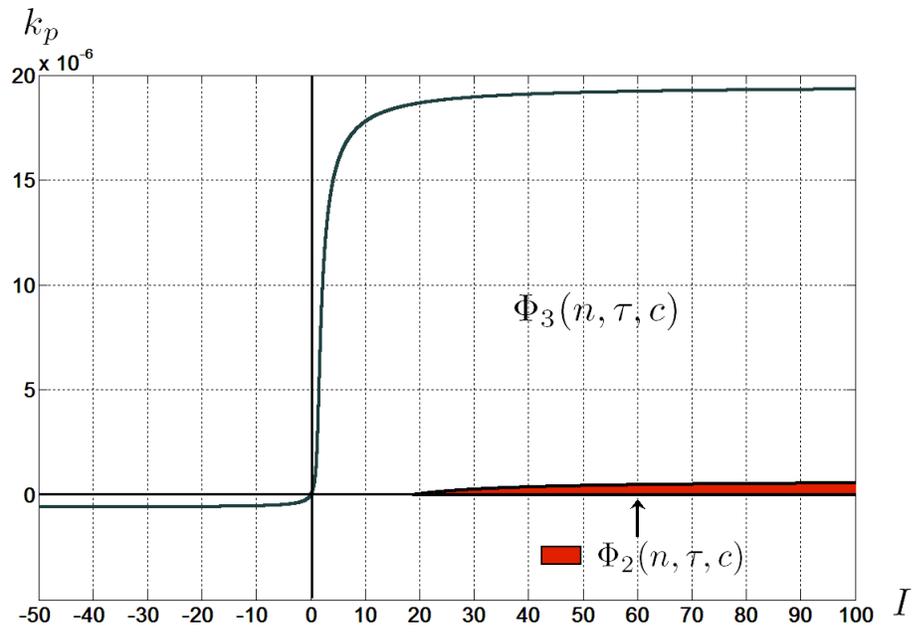


Fig. 4.15. Comparación entre las regiones de estabilidad $\Phi_2(n, \tau, c)$ y $\Phi_3(n, \tau, c)$.

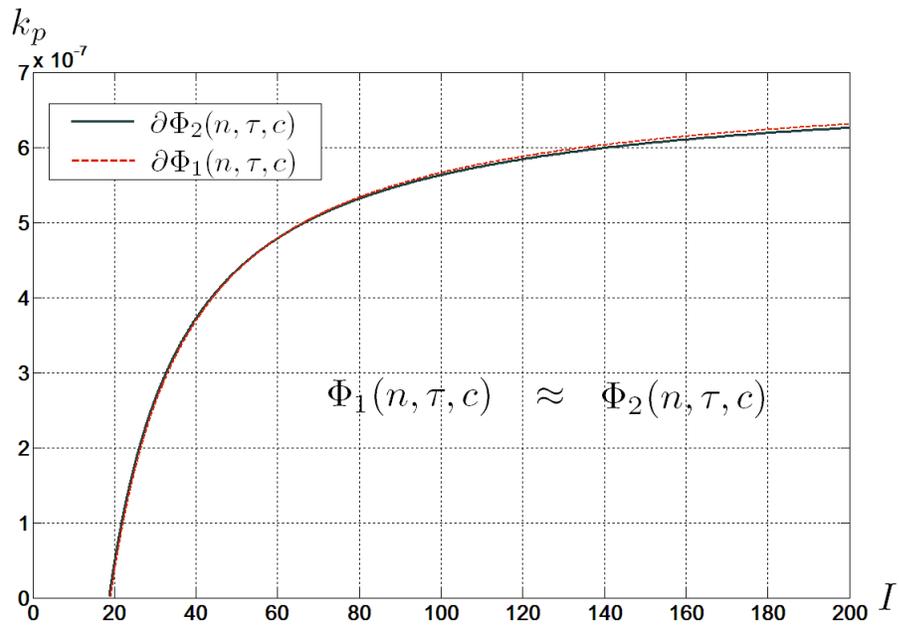


Fig. 4.16. Comparación entre la regiones de estabilidad $\Phi_1(n, \tau, c)$ y $\Phi_2(n, \tau, c)$.

En la fig. 4.15 se puede observar que:

$$\Phi_2(n, \tau, c) \subset \Phi_3(n, \tau, c). \quad (4.24)$$

Esto es muy interesante, ya que se observa como el conjunto completo de controladores que estabilizan localmente el punto de equilibrio de (2.3), también estabilizan localmente el punto de equilibrio de (2.2), mientras que, basados en el desarrollo de este capítulo, el análisis de estabilidad para el modelo (2.3) resulta ser mucho más sencillo que para el modelo (2.2). Esto es importante mencionarlo, ya que la robustez del modelo (2.2), puede ser analizada a partir de la robustez del modelo (2.3) para un mismo conjunto de parámetros (n, τ, c) .

Por otro lado, en la fig. 4.16 se puede observar que:

$$\Phi_1(n, \tau, c) \approx \Phi_2(n, \tau, c). \quad (4.25)$$

lo cual permite observar como el comportamiento local del modelo (2.3) alrededor del equilibrio, puede ser aproximado por el comportamiento local del modelo (2.5).

4.6 Comparación entre los resultados obtenidos en esta tesis y los obtenidos por Hollot, Misra, Towsley y Gong.

En la Fig. 4.17 se graficó la región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$ para el modelo (4.10) y las condiciones suficientes de estabilidad obtenidas en [8], considerando los siguientes parámetros de red: $n = 50$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s y $\tau = 0.533$ s. Se observa como el conjunto de controladores PI obtenidos en [8] es un subconjunto muy pequeño del conjunto completo de controladores PI, el cual estabiliza localmente el equilibrio del sistema (2.2). Además, el conjunto de controladores PI obtenidos en [8] pueden resultar muy sensibles a pequeñas perturbaciones en los coeficientes del controlador, ya que esta cerca de la frontera de la región de estabilidad $\Phi_{(n,\tau,c)}$, es decir, los controladores podrían no ser robustos en el espacio de los coeficientes del controlador. De esta manera, en una

implementación práctica de tales controladores algunos problemas de estabilidad podrían presentarse cuando existen errores de redondeo en los parámetros del controlador durante la implementación.

Como ejemplo se toma un conjunto de ganancias (k_p, I) dentro de la región de estabilidad descrita por $\Phi_{(n,c,\tau)}$ en el Teorema 12. Los valores usados fueron: $k_p = 1.99 \times 10^{-3}$ e $I = 20$, Asimismo se toma un conjunto de ganancias (k_p, I) dentro de la región de estabilidad descrita en [8]. Los valores usados fueron: $k_p = 1 \times 10^{-3}$ e $I = 0.8523$. Estos conjuntos de puntos pueden ser ubicados como el punto a y el punto b respectivamente, en la región de estabilidad graficada en la Fig. 4.17.

En la Fig. 4.18 se muestra la respuesta obtenida para $q(t)$ (longitud de cola), con el conjunto de ganancias descritos por el punto a y el punto b , considerando $q(0) = 0$ paquetes y $q_o = 100$ paquetes. Gráficamente se observa como el equilibrio q_0 es alcanzado en ambos casos, sin embargo, se observa como la respuesta para el punto a presenta un menor sobretiro y tiempo de estabilización que la respuesta para el punto b , con lo cual se ejemplifica la ventaja de contar con la región completa de estabilidad.

Basado en la región de estabilidad exacta en el espacio de parámetros (k_p, I) podemos seleccionar el valor de ganancia integral dentro del conjunto permisible de ganancias y entonces podemos seleccionar el valor proporcional en el centro de el rango de valores de ganancia proporcionales permisible. En esta forma, evitaremos escenarios indeseables donde los parámetros del controlador PI estan cerca de la inestabilidad.

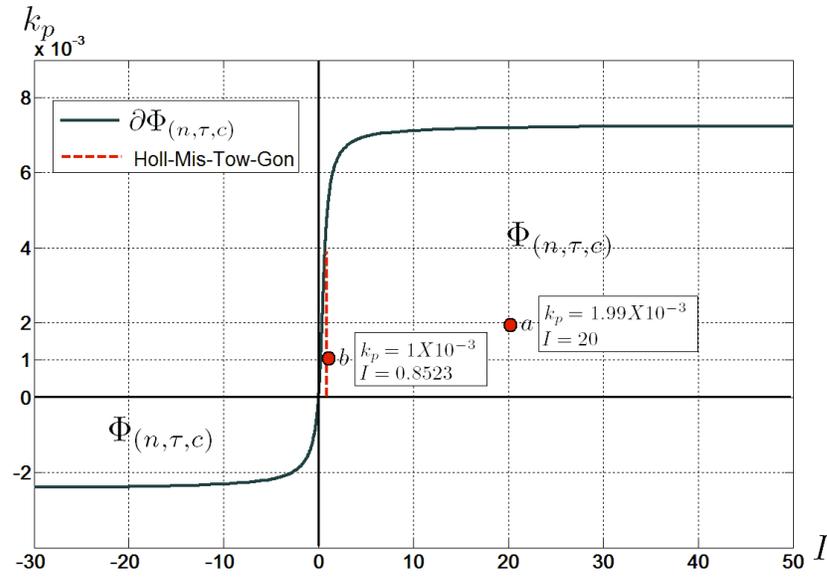


Fig. 4.17. Comparación entre la región completa de estabilidad para el modelo (2.2) y la región de estabilidad considerada en [8].

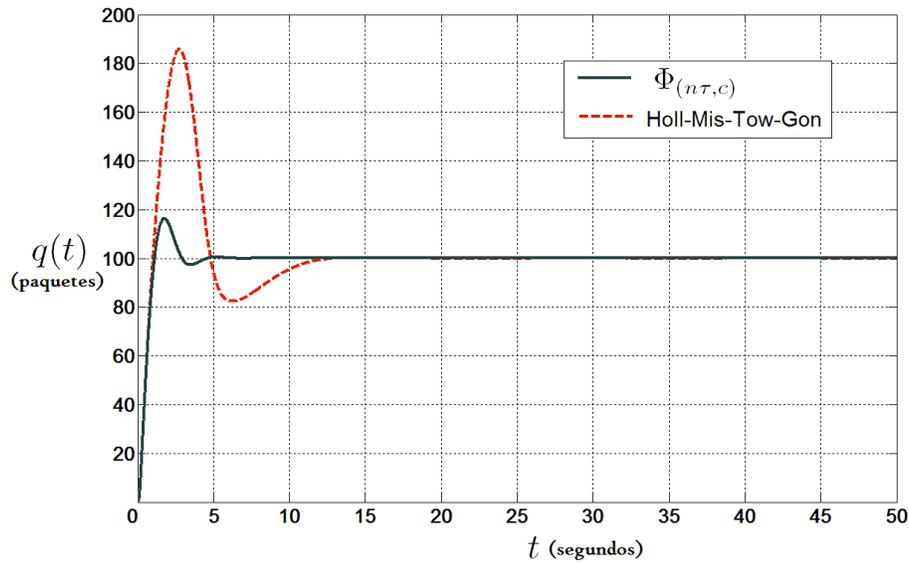


Fig. 4.18. Respuesta del sistema en lazo cerrado correspondiente al estado $q(t)$.

Capítulo 5

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA

En este capítulo se tratará el problema de robustez del controlador PI para los modelos (2.3) y (2.5). Considérese que los parámetros de red (n, τ, c) son constantes, y varían en los intervalos: $n \in [\underline{n}, \bar{n}]$, $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ y $c \in [\underline{c}, \bar{c}]$. El objetivo es determinar el conjunto completo de controladores para el cual el equilibrio de los sistemas no lineales en lazo cerrado (4.1)-(4.11) y (4.2)-(4.11) es local asintóticamente estable para cualquier conjunto de parámetros (n, τ, c) dentro de los intervalos. Se muestra que la estabilización con respecto al valor más grande esperado de retardo ($\bar{\tau}$), capacidad de transmisión (\bar{c}) y el valor más pequeño esperado de cargas TCP (\underline{n}) conduce al conjunto completo de controladores PI estabilizadores robustos. Algunas simulaciones son presentadas al final del capítulo.

Para lo anterior, considérese que los parámetros de red nominales (n_0, τ_0, c_0) y los parámetros de red desconocidos (n, τ, c) satisfacen

$$n \geq n_0, \tau \leq \tau_0 \text{ y } c \leq c_0. \quad (5.1)$$

En lo siguiente, denotaremos las ganancias del controlador como $k_p(\omega, n, \tau, c)$ y $I(\omega, n, \tau, c)$, para enfatizar la dependencia de las funciones sobre los parámetros de red. Usaremos la misma notación para todas las otras funciones definidas anteriormente.

5.1 Análisis robusto para el Modelo simplificado ($\frac{\tau c}{n} \gg 1$).

Lema 13 La función $k_p(\omega)$ definida por la parametrización (4.14) tiene a lo más un único punto crítico en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2\tau})$. El punto crítico, si existe, es un máximo.

Prueba. Vamos a calcular

$$k_p'(\omega) = \frac{2n}{c^2} \left[\left(2\omega + \frac{2n}{\tau c} \omega \right) \cos(\omega\tau) + \left(\frac{2n}{\tau^2 c} - \tau\omega^2 \right) \sin(\omega\tau) \right].$$

Los ceros de la función $k_p'(\omega)$ son $\omega = 0$ y las soluciones de la ecuación

$$m(\omega) = \tan(\omega\tau), \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau} \right), \quad (5.2)$$

donde

$$m(\omega) = \frac{\left(2 + \frac{2n}{\tau c} \right) \omega}{\tau\omega^2 - \frac{2n}{\tau^2 c}}.$$

De nuevo, es difícil encontrar una solución analítica de la ecuación (5.2). Graficando las dos funciones $m(\omega)$ y $\tan(\omega\tau)$ una solución numérica puede ser encontrada, ver la Fig. 5.1. La función $m(\omega)$ se indetermina en $\bar{\omega} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2n}{\tau c}}$. Es claro que si $\bar{\omega} \geq \frac{\pi}{2\tau}$ no existe una solución de la ecuación (5.2) y si $\bar{\omega} < \frac{\pi}{2\tau}$ siempre existe una solución de la ecuación (5.2), y por lo tanto un único punto crítico de $k_p(\omega)$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2\tau})$. Así, la primera parte del lema es probada. Falta probar que tal punto crítico, cuando existe, es un máximo. Sea $\tilde{\omega}$ la solución de la ecuación (5.2). De la Fig. 5.1 tenemos las siguientes desigualdades:

1. $m(\omega) < \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (0, \bar{\omega})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) > 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{2n}{\tau^2 c} < 0$ para $\omega \in (0, \bar{\omega})$ se sigue que $k_p'(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \bar{\omega})$.
2. $m(\omega) > \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (\bar{\omega}, \tilde{\omega})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) > 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{2n}{\tau^2 c} > 0$ para $\omega \in (\bar{\omega}, \tilde{\omega})$ se sigue que $k_p'(\omega) > 0$, $\omega \in (\bar{\omega}, \tilde{\omega})$.
3. $m(\omega) < \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (\tilde{\omega}, \frac{\pi}{2\tau})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) > 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{2n}{\tau^2 c} > 0$ para $\omega \in (\tilde{\omega}, \frac{\pi}{2\tau})$, se sigue que $k_p'(\omega) < 0$, $\omega \in (\tilde{\omega}, \frac{\pi}{2\tau})$. Por lo tanto, $k_p(\tilde{\omega})$ es un máximo.

■

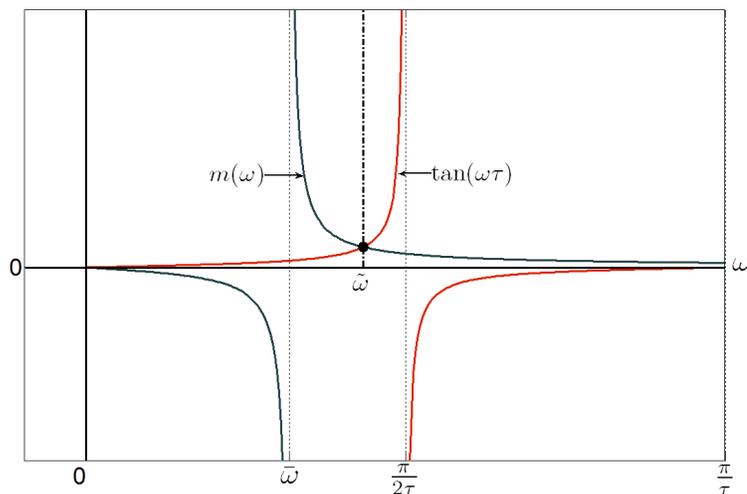


Fig. 5.1. Solución numérica de la ecuación (5.2).

Lema 14 La función $k_p(\omega)$ definida por la parametrización (4.14) es una función monótonicamente creciente de ω en el intervalo $(0, \omega^*)$. Donde ω^* es la solución de la ecuación (4.13).

Prueba. En virtud del lema 13 es suficiente probar que para cualesquiera parámetros de red dados (n, τ, c) se tiene que $\omega^* < \tilde{\omega}$. Primero obsérvese que si para algunos parámetros de red tenemos que $\bar{\omega} \geq \omega^*$ entonces se tiene que $\omega^* < \tilde{\omega}$. Basado en la continuidad de las funciones $\frac{2n}{\tau^2 c \omega}$, $m(\omega)$ y $\tan(\omega\tau)$ con respecto a los parámetros de red asúmase que existen parámetros de red (n, τ, c) tal que $\bar{\omega} < \omega^*$ y $\omega^* = \tilde{\omega}$. De las ecuaciones (4.15) y (5.2) tenemos que

$$\frac{2n}{\tau^2 c \tilde{\omega}} = \frac{\left(2 + \frac{2n}{\tau c}\right) \tilde{\omega}}{\tau \tilde{\omega}^2 - \frac{2n}{\tau^2 c}}.$$

Se sigue que

$$2n\tau\tilde{\omega}^2 - \frac{4n^2}{\tau^2 c} = 2\tau^2 c\tilde{\omega}^2 + 2n\tau\tilde{\omega}^2,$$

Lo cual implica que no existen parámetros de red tal que $\bar{\omega} < \omega^*$ y $\omega^* = \tilde{\omega}$. La contradicción prueba el lema. ■

Lema 15 La función $I(\omega)$ definida por la parametrización (4.14) es una función monótonicamente creciente de ω en el intervalo $(0, \omega^*)$.

Prueba. Sea $I'(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$, y $a = \frac{2n}{\tau^2 c}$. Entonces

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \omega \cos(\omega\tau) [a \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)] \\ &+ \omega\tau [a \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)]^2 + \omega\tau [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)]^2 \\ &- [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] [a \cos(\omega\tau) - 2\omega \sin(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

y $D(\omega) = \omega^2 [a \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)]^2$. Sumando el segundo y el tercer término del lado derecho de (5.3) obtenemos

$$\omega\tau [a \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)]^2 + \omega\tau [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)]^2 = \omega\tau [a^2 + \omega^2].$$

El cuarto término del lado derecho de (5.3) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} &- [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] [a \cos(\omega\tau) - 2\omega \sin(\omega\tau)] \\ = &- [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] [a \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)] \\ &+ \omega \sin(\omega\tau) [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)]. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las últimas igualdades en (5.3) llegamos a la siguiente expresión de $N(\omega)$:

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \omega\tau [a^2 + \omega^2] + \omega \sin(\omega\tau) [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] \\ &- a \sin(\omega\tau) [a \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)] \\ = &a^2 [\omega\tau - \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau)] + a\omega \sin^2(\omega\tau) + \omega^3\tau \\ &+ \omega \sin(\omega\tau) [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] \\ = &\frac{a^2}{2} [2\omega\tau - \sin(2\omega\tau)] + a\omega \sin^2(\omega\tau) + \omega^3\tau \\ &+ \omega \sin(\omega\tau) [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)]. \end{aligned}$$

Debido a que $\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau) > 0$ y $\sin(\omega\tau) > 0$ para $\omega \in (0, \omega^*)$ y $2\omega\tau - \sin(2\omega\tau) > 0$ para $\omega \in \mathbb{R}^+$, se sigue que $N(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \omega^*)$, lo cual implica que $I'(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \omega^*)$. ■

Sean ω_0^* y ω^* soluciones de la ecuación (4.15) correspondientes a los parámetros de red (n_0, τ_0, c_0) y (n, τ, c) respectivamente. Graficando las funciones involucradas en la ecuación (4.15) correspondientes a los parámetros de red (n_0, τ_0, c_0) y (n, τ, c) respectivamente, no es difícil mostrar que $\omega_0^* \leq \omega^*$.

Lema 16 Para parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) que satisfacen (5.1), la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ satisface:

$$k_p(\omega, n, \tau, c) \geq k_p(\omega, n_0, \tau_0, c_0), \quad \omega \in (0, \omega_0^*).$$

Prueba. Vamos a calcular la derivada de la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ con respecto al parámetro τ . Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} k_p(\omega, n, \tau, c) = \frac{2n}{c^2} \omega \left[\frac{2n}{\tau^2 c} \omega \cos(\omega \tau) - \left(\omega^2 + \frac{4n}{\tau^3 c} \right) \sin(\omega \tau) \right].$$

Vamos a considerar la siguiente función

$$\zeta(\omega) = \frac{\frac{2n}{\tau^2 c} \omega}{\omega^2 + \frac{4n}{\tau^3 c}}.$$

La derivada de la función $\zeta(\omega)$ es

$$\zeta'(\omega) = \frac{\frac{2n}{\tau^2 c} \left(\frac{4n}{\tau^3 c} - \omega^2 \right)}{\left(\omega^2 + \frac{4n}{\tau^3 c} \right)^2}. \quad (5.4)$$

La función $\zeta(\omega)$ tiene un único máximo en $\hat{\omega} = \frac{2}{\tau} \sqrt{\frac{n}{\tau c}}$. De esta manera, la función $\zeta(\omega)$ es monotónicamente creciente para $\omega \in (0, \hat{\omega})$ y monotónicamente decreciente para $\omega \in (\hat{\omega}, +\infty)$. De (5.4) tenemos que

$$\zeta'(\omega) < \frac{\frac{2n}{\tau^2 c} \left(\frac{4n}{\tau^3 c} \right)}{\left(\frac{4n}{\tau^3 c} \right)^2} = \frac{\tau}{2}, \quad \omega \in (0, \hat{\omega}),$$

lo cual implica que $\zeta(\omega) < \tau \omega$, $\omega \in (0, \hat{\omega})$. De esta manera, para $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$ se tiene que $\zeta(\omega) < \tan(\omega \tau)$. Ya que $\cos(\omega \tau) > 0$, para $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$ se sigue que

$$\frac{2n}{\tau^2 c} \omega \cos(\omega \tau) < \left(\omega^2 + \frac{4n}{\tau^3 c} \right) \sin(\omega \tau),$$

lo cual implica que $\frac{\partial}{\partial \tau} k_p(\omega, n, \tau, c) < 0$, $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$. De esta manera la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es una función monotónicamente decreciente de τ para toda $\omega \in (0, \omega^*)$. Calculando la derivada de $k_p(\omega, n, \tau, c)$ con respecto a n obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial n} k_p(\omega, n, \tau, c) = \frac{2\omega}{c^2} \left[\omega \cos(\omega\tau) + \frac{4n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau) \right] > 0, \quad \forall \omega \in (0, \omega^*)$$

y con respecto a c tenemos

$$\frac{\partial}{\partial c} k_p(\omega, n, \tau, c) = -\frac{4n\omega}{c^3} \left[\omega \cos(\omega\tau) + \frac{3n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau) \right] < 0, \quad \forall \omega \in (0, \omega^*).$$

También, la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es una función monotónicamente creciente de n y una función monotónicamente decreciente de c para toda $\omega \in (0, \omega^*)$. De esta manera, para parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) que satisfacen (5.1) se tiene el lema. ■

Lema 17 Para parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) que satisfacen (5.1) se tiene que

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} \geq \frac{k_p(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}{I(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}, \quad \omega \in (0, \omega_0^*). \quad (5.5)$$

Prueba. De la parametrización (4.14) tenemos que

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} = \frac{2n}{c^2} \omega^2 \left[\frac{2n}{\tau^2 c} \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau) \right].$$

Esta expresión puede ser escrita como

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} = \frac{2n}{c^2} \omega^3 \cos(\omega\tau) \left[\frac{2n}{\tau^2 c \omega} - \tan(\omega\tau) \right].$$

Graficando las funciones $\frac{2n}{\tau^2 c \omega}$ y $\tan(\omega\tau)$ correspondientes a los parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \tan(\omega\tau) &\leq \tan(\omega\tau_0), \quad \forall \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau_0}\right), \\ \frac{2n}{\tau^2 c \omega} &\geq \frac{2n_0}{\tau_0^2 c_0 \omega}, \quad \forall \omega \geq 0. \end{aligned}$$

De éstas desigualdades se sigue que

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} \geq \frac{2n}{c^2} \omega^3 \cos(\omega\tau) \left[\frac{2n_0}{\tau_0^2 c_0 \omega} - \tan(\omega\tau_0) \right], \quad \omega \in (0, \omega_0^*).$$

Ya que $\cos(\omega\tau) \geq \cos(\omega\tau_0)$, $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau_0}\right)$ y $\frac{2n}{c^2} \geq \frac{2n_0}{c_0^2}$ tenemos

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} \geq \frac{2n_0}{c_0^2} \omega^3 \cos(\omega\tau_0) \left[\frac{2n_0}{\tau_0^2 c_0 \omega} - \tan(\omega\tau_0) \right], \quad \omega \in (0, \omega_0^*),$$

lo cual implica que

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} \geq \frac{k_p(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}{I(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}, \quad \omega \in (0, \omega_0^*).$$

■

Teorema 18 Dados los parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) que satisfacen (5.1) se tiene que

$$\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)} \subseteq \Phi_{(n, \tau, c)}.$$

Prueba. Primero observamos que las fronteras de las regiones de estabilidad $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)}$ y $\Phi_{(n, \tau, c)}$ son determinadas barriendo ω en los intervalos $(0, \omega_0^*)$ y $(0, \omega^*)$ en la parametrización (4.14) correspondientes a los parámetros de red (n_0, τ_0, c_0) y (n, τ, c) respectivamente. El lema 17 implica que barriendo ω en el intervalo $(0, \omega_0^*)$, la región de estabilidad $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)}$ está parcialmente contenida en la región de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$. Así, con el fin de probar la inclusión de las regiones de estabilidad resta probar que la correspondiente parte de la frontera de la región de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$ para $\omega \in (\omega_0^*, \omega^*)$ no se intersecciona con la frontera de la región de estabilidad $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)}$.

De el lema 14 tenemos que la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es monotónicamente creciente de $k_p(\omega_0^*, n, \tau, c)$ a $k_p(\omega^*, n, \tau, c) > k_p(\omega_0^*, n_0, \tau_0, c_0)$ cuando ω va de ω_0^* a ω^* . Del lema 15 tenemos que la función $I(\omega, n, \tau, c)$ es una función monotónicamente creciente de ω en el intervalo (ω_0^*, ω^*) y del lema 16 tenemos que $k_p(\omega_0^*, n, \tau, c) > k_p(\omega_0^*, n_0, \tau_0, c_0)$. Entonces podemos concluir que $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)} \subset \Phi_{(n, \tau, c)}$, ver Fig. 5.2. ■

Corolario 19 Asuma que un controlador (4.11) estabiliza localmente el punto de equilibrio del sistema (4.1) con parámetros de red (n_0, τ_0, c_0) . Entonces estabiliza localmente el punto de equilibrio del sistema (4.1) con parámetros de red (n, τ, c) que satisfacen (5.1).

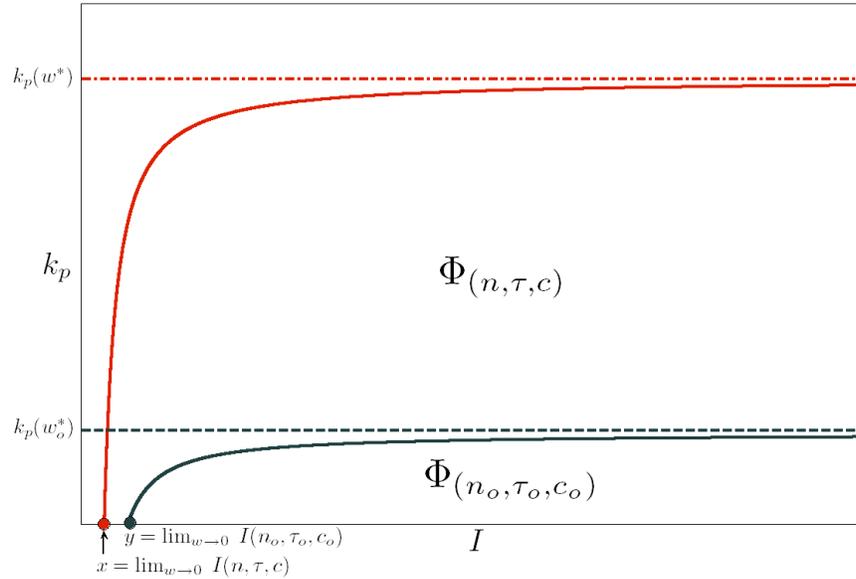


Fig. 5.2. En esta gráfica se observa como la región $\Phi_{(n_o, \tau_o, c_o)}$ se encuentra contenida dentro de la región $\Phi_{(n, \tau, c)}$.

5.1.1 Simulaciones

Las simulaciones fueron realizadas utilizando MATLAB/SIMULINK. El sistema utilizado es el definido en (4.1). Los parámetros nominales (parámetros de diseño del controlador) considerados son: $n_o = 40$ sesiones TCP, $c_o = 300$ paquetes/s, $\tau_o = 0.7$ s. En la Fig. 5.3 se observa la región de estabilidad $\Phi_{(n_o, c_o, \tau_o)}$ en el espacio de ganancias (k_p, I) , correspondiente a dichos parámetros.

Con efecto de analizar la robustez del esquema propuesto, se proponen los siguientes valores reales (parámetros de simulación) del sistema: $n = 50$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s, $\tau = 0.533$ s, los cuales cumplen con (5.1). Como ejemplo se toman dos pares de ganancias (k_p, I) dentro de la region de estabilidad descrita por $\Phi_{(n_o, c_o, \tau_o)}$, los valores usados fueron: $k_p = 1 \times 10^{-4}$, $I = 5$ y $k_p = 3.36 \times 10^{-4}$, $I = 70$, los cuales se muestran en la Fig. 5.3 como los puntos a y b respectivamente.

En la Fig. 5.4 se observa la respuesta obtenida para $q(t)$ (longitud de cola), con el conjunto de ganancias a y b , considerando $q(0) = 300$ paquetes y $q_o = 600$ paque-

tes, observando la estabilidad del sistema lazo cerrado para cada uno de los casos, lo cual ejemplifica la robustez del sistema. Asimismo se observa un mejor comportamiento (tiempo de estabilización y sobretiros) para el conjunto de ganancias (k_p, I) definidas por el punto b , lo cual muestra una vez más la ventaja de contar con la región completa de estabilidad, permitiendo un margen más amplio de posibilidades al momento de seleccionar el conjunto de ganancias (k_p, I) más adecuado dependiendo de los objetivos de desempeño que se tengan.

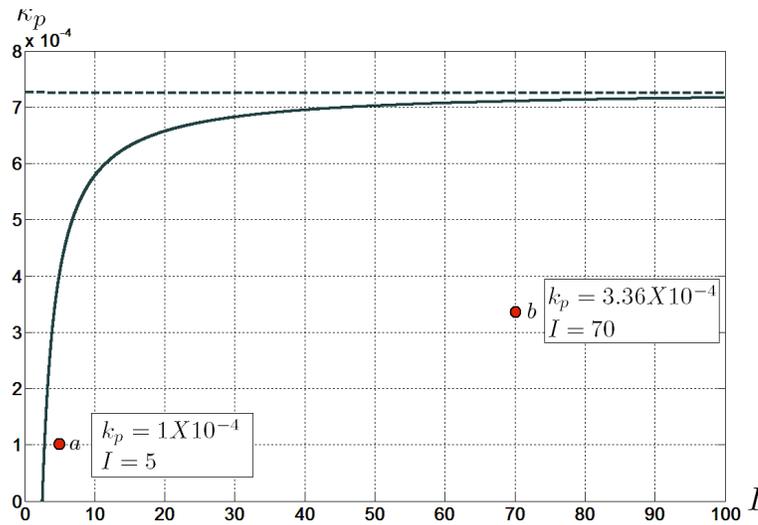


Fig. 5.3. Región de estabilidad robusta para los valores de parámetros: $n_o = 40$ sesiones TCP, $c_o = 300$ paquetes/s y $\tau_o = 0.7$ s.

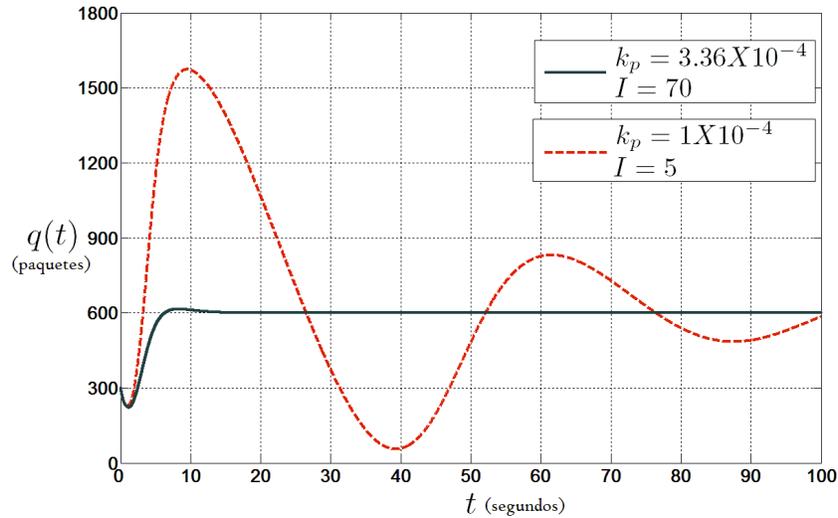


Fig. 5.4. Respuesta del sistema para dos conjuntos de ganancias (k_p, I) pertenecientes a la región de estabilidad $\Phi_{(n_o, \tau_o, c_o)}$.

En la Fig. 5.5 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado para la entrada de control $p(t)$, observando la convergencia al punto de equilibrio $p_0 = 0.1956$ paquetes. También se puede observar como la respuesta del control toma valores solamente entre $[0, 1]$, por lo cual la restricción de la función de marcación de paquetes $p(\cdot)$ se satisface.

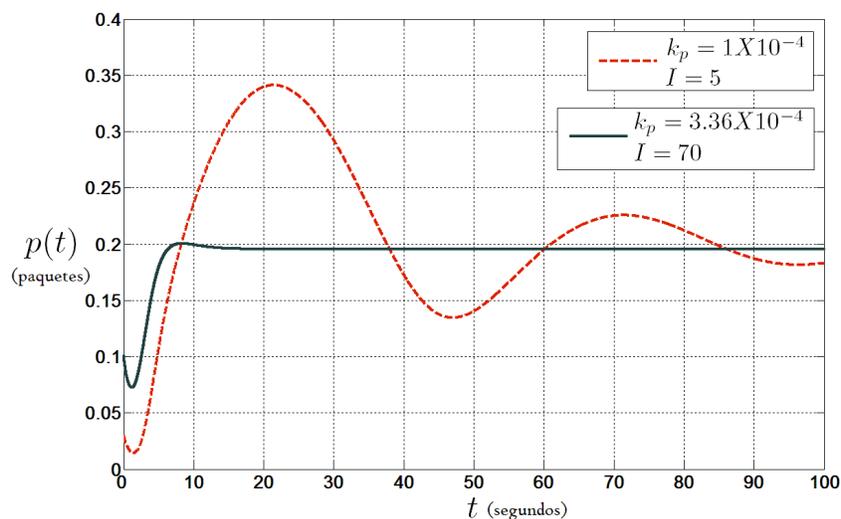


Fig. 5.5. Respuesta del sistema en lazo cerrado correspondiente a la entrada de control $p(t)$.

5.2 Análisis robusto para el Modelo simplificado ($\tau \approx \tau_p$).

Lema 20 La función $k_p(\omega)$ definida por la parametrización (4.18) tiene un único punto crítico en el intervalo $(0, \frac{\pi}{\tau})$. El punto crítico es un máximo.

Prueba. Vamos a calcular

$$k'_p(\omega) = \frac{2n}{c^2} \left[\left(2\omega + \frac{n}{\tau c} \omega \right) \cos(\omega\tau) + \left(\frac{n}{\tau^2 c} - \tau\omega^2 \right) \sin(\omega\tau) \right].$$

Los ceros de la función $k'_p(\omega)$ son $\omega = 0$ y las soluciones de la ecuación

$$m(\omega) = \tan(\omega\tau), \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{\tau} \right), \quad (5.6)$$

donde

$$m(\omega) = \frac{\left(2 + \frac{n}{\tau c} \right) \omega}{\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2 c}}.$$

De nuevo, es difícil encontrar una solución analítica de la ecuación (5.6). Graficando las dos funciones $m(\omega)$ y $\tan(\omega\tau)$ una solución numérica puede ser encontrada, ver la Fig. 5.6 y la Fig. 5.7. Es claro que existe siempre una solución de la ecuación (5.6) y por lo tanto un único punto crítico de $k_p(\omega)$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{\tau})$. Falta probar que tal punto crítico es un máximo. Sea $\tilde{\omega}$ la solución de (5.6) y $\bar{\omega} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{n}{\tau c}}$ la frecuencia donde la función $m(\omega)$ se indetermina. Ahora consideramos dos casos diferentes.

Caso 1: $\bar{\omega} < \frac{\pi}{2\tau}$ y $\bar{\omega} < \tilde{\omega} < \frac{\pi}{2\tau}$. En este caso tenemos las siguientes desigualdades, ver Fig. 5.6:

1. $m(\omega) < \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (0, \bar{\omega})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) > 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2 c} < 0$ para $\omega \in (0, \bar{\omega})$ se sigue que $k'_p(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \bar{\omega})$.
2. $m(\omega) > \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (\bar{\omega}, \tilde{\omega})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) > 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2 c} > 0$ para $\omega \in (\bar{\omega}, \tilde{\omega})$ se sigue que $k'_p(\omega) > 0$, $\omega \in (\bar{\omega}, \tilde{\omega})$.
3. $m(\omega) < \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (\tilde{\omega}, \frac{\pi}{2\tau})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) > 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2 c} > 0$ para $\omega \in (\tilde{\omega}, \frac{\pi}{2\tau})$, se sigue que $k'_p(\omega) < 0$, $\omega \in (\tilde{\omega}, \frac{\pi}{2\tau})$.

4. $m(\omega) > \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) < 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2c} > 0$ para $\omega \in (\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau})$, se sigue que $k'_p(\omega) < 0$, $\omega \in (\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau})$. Por lo tanto, $k_p(\tilde{\omega})$ es un máximo.

Caso 2: $\bar{\omega} > \frac{\pi}{2\tau}$ y $\frac{\pi}{2\tau} < \tilde{\omega} < \bar{\omega}$. En este caso tenemos las siguientes desigualdades, ver Fig. 5.7:

1. $m(\omega) < \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) > 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2c} < 0$ para $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$ se sigue que $k'_p(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$.
2. $m(\omega) > \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (\frac{\pi}{2\tau}, \tilde{\omega})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) < 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2c} < 0$ para $\omega \in (\frac{\pi}{2\tau}, \tilde{\omega})$ se sigue que $k'_p(\omega) > 0$, $\omega \in (\frac{\pi}{2\tau}, \tilde{\omega})$.
3. $m(\omega) < \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (\tilde{\omega}, \bar{\omega})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) < 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2c} < 0$ para $\omega \in (\tilde{\omega}, \bar{\omega})$, se sigue que $k'_p(\omega) < 0$, $\omega \in (\tilde{\omega}, \bar{\omega})$.
4. $m(\omega) > \tan(\omega\tau)$, $\omega \in (\bar{\omega}, \frac{\pi}{\tau})$. Puesto que $\cos(\omega\tau) < 0$ y $\tau\omega^2 - \frac{n}{\tau^2c} > 0$ para $\omega \in (\bar{\omega}, \frac{\pi}{\tau})$, se sigue que $k'_p(\omega) < 0$, $\omega \in (\bar{\omega}, \frac{\pi}{\tau})$. Por lo tanto, $k_p(\tilde{\omega})$ es un máximo.

■

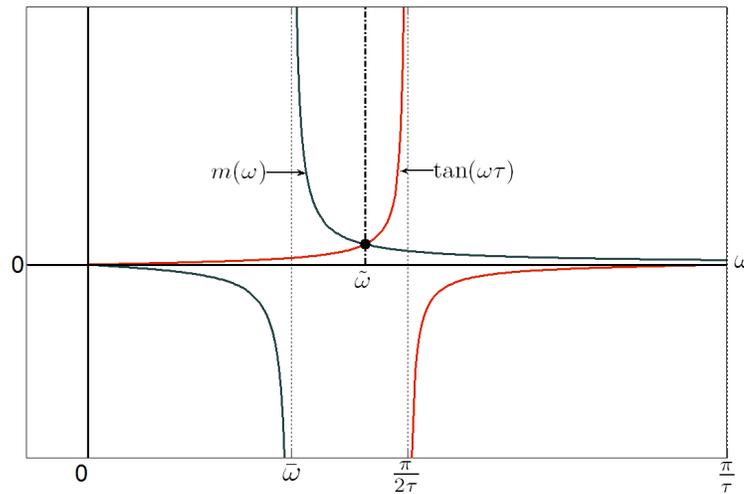


Fig. 5.6. Solución numérica de la ecuación (5.6) cuando $\bar{\omega} < \frac{\pi}{2\tau}$.

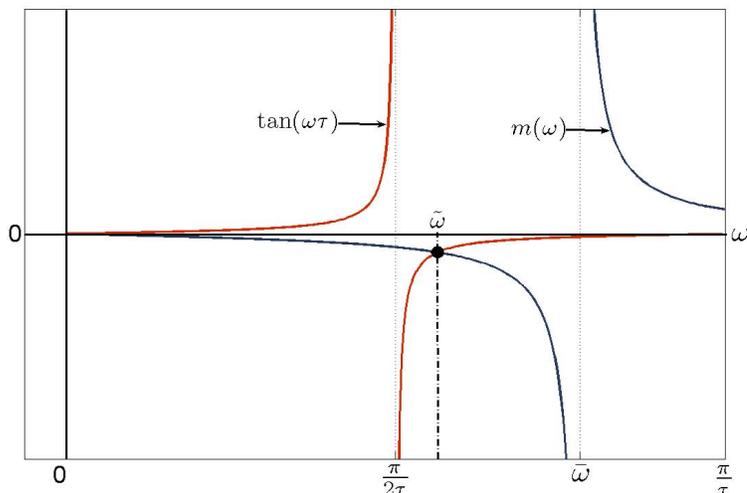


Fig. 5.7. Solución numérica de la ecuación (5.6) cuando $\bar{\omega} > \frac{\pi}{2\tau}$.

Lema 21 La función $I(\omega)$ definida por la parametrización (4.18) es una función monótonicamente creciente de ω en el intervalo $(0, \omega^*)$. Donde ω^* es la solución de la ecuación (4.17).

Prueba. Sea $I'(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$, y $a = \frac{n}{\tau^2 c}$. Entonces

$$\begin{aligned}
 N(\omega) &= \omega \cos(\omega\tau) [a(1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau)] & (5.7) \\
 &+ \omega\tau [a(1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau)] [a \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)] \\
 &- [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] [a(1 + \cos(\omega\tau)) - 2\omega \sin(\omega\tau)] \\
 &+ \omega\tau [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)]^2
 \end{aligned}$$

y $D(\omega) = \omega^2 [a(1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau)]^2$. Sumando el segundo y el cuarto término del lado derecho de (5.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
 &\omega\tau [a(1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau)] [a \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)] \\
 &+ \omega\tau [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)]^2 = a\omega\tau [a(1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau)] + \omega^3\tau.
 \end{aligned}$$

El tercer término de (5.7) puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
 &- [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] [a(1 + \cos(\omega\tau)) - 2\omega \sin(\omega\tau)] \\
 = &- [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] [a(1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau)] \\
 &+ \omega \sin(\omega\tau) [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)].
 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las últimas igualdades en (5.7) llegamos a la siguiente expresión de $N(\omega)$:

$$N(\omega) = \omega \sin(\omega\tau) [\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau)] \\ + a [a (1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau)] [\omega\tau - \sin(\omega\tau)] + \omega^3\tau.$$

Debido a que $\omega \cos(\omega\tau) + a \sin(\omega\tau) > 0$, $\sin(\omega\tau) > 0$ y $a (1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau) > 0$ para $\omega \in (0, \omega^*)$ y $\omega\tau - \sin(\omega\tau) > 0$ para $\omega \in \mathbb{R}^+$, se sigue que $N(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \omega^*)$, lo cual implica que $I'(\omega) > 0$, $\omega \in (0, \omega^*)$. ■

Sean ω_0^* y ω^* soluciones de la ecuación (4.19), y $\tilde{\omega}_0$ y $\tilde{\omega}$ soluciones de la ecuación (5.6) correspondientes a los parámetros de red (n_0, τ_0, c_0) y (n, τ, c) respectivamente. Graficando las funciones involucradas en las ecuaciones (4.19) y (5.6) correspondientes a los parámetros de red (n_0, τ_0, c_0) y (n, τ, c) respectivamente no es difícil mostrar que $\omega_0^* \leq \omega^*$ y $\tilde{\omega}_0 \leq \tilde{\omega}$.

Lema 22 Para parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (5.1), la función $k_p(\omega)$ satisface:

$$k_p(\omega, n, \tau, c) \geq k_p(\omega, n_0, \tau_0, c_0), \quad \omega \in (0, \omega_0^*).$$

Prueba. Vamos a calcular la derivada de la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ con respecto a el parámetro τ . Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} k_p(\omega, n, \tau, c) = \frac{2n}{c^2} \omega \left[\frac{n}{\tau^2 c} \omega \cos(\omega\tau) - \left(\omega^2 + \frac{2n}{\tau^3 c} \right) \sin(\omega\tau) \right].$$

Vamos a considerar la siguiente función

$$\zeta(\omega) = \frac{\frac{n}{\tau^2 c} \omega}{\omega^2 + \frac{2n}{\tau^3 c}}.$$

La derivada de la función $\zeta(\omega)$ es

$$\zeta'(\omega) = \frac{\frac{n}{\tau^2 c} \left(\frac{2n}{\tau^3 c} - \omega^2 \right)}{\left(\omega^2 + \frac{2n}{\tau^3 c} \right)^2}. \quad (5.8)$$

la función $\zeta(\omega)$ tiene un único máximo en $\hat{\omega} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2n}{\tau c}}$. De esta manera, la función $\zeta(\omega)$ es monotónicamente creciente para $\omega \in (0, \hat{\omega})$ y monotónicamente decreciente para $\omega \in (\hat{\omega}, +\infty)$. De (5.8) tenemos que

$$\zeta'(\omega) < \frac{\frac{n}{\tau^2 c} \left(\frac{2n}{\tau^3 c} \right)}{\left(\frac{2n}{\tau^3 c} \right)^2} = \frac{\tau}{2}, \quad \omega \in (0, \hat{\omega}),$$

lo cual implica que $\zeta(\omega) < \tau\omega$, $\omega \in (0, \hat{\omega})$. De esta manera, para $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$ se tiene que $\zeta(\omega) < \tan(\omega\tau)$. Ya que $\cos(\omega\tau) > 0$, $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$ se sigue que

$$\frac{n}{\tau^2 c} \omega \cos(\omega\tau) < \left(\omega^2 + \frac{2n}{\tau^3 c} \right) \sin(\omega\tau),$$

lo cual implica que $\frac{\partial}{\partial \tau} k_p(\omega, n, \tau, c) < 0$, $\omega \in (0, \frac{\pi}{2\tau})$. Para $\omega \in (\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau})$ se tiene que $\zeta(\omega) > \tan(\omega\tau)$. Ya que ahora $\cos(\omega\tau) < 0$, $\omega \in (\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau})$ se sigue que

$$\frac{n}{\tau^2 c} \omega \cos(\omega\tau) < \left(\omega^2 + \frac{2n}{\tau^3 c} \right) \sin(\omega\tau),$$

Lo cual implica que $\frac{\partial}{\partial \tau} k_p(\omega, n, \tau, c) < 0$, $(\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau})$. Observando que $\frac{\partial}{\partial \tau} k_p(\frac{\pi}{2\tau}, n, \tau, c) < 0$, obtenemos que $\frac{\partial}{\partial \tau} k_p(\omega, n, \tau, c) < 0$, $\omega \in (0, \frac{\pi}{\tau})$. De esta manera la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es una función monotónicamente decreciente de τ para toda $\omega \in (0, \omega^*)$. Calculando la derivada de $k_p(\omega, n, \tau, c)$ con respecto a n obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial n} k_p(\omega, n, \tau, c) = \frac{2\omega}{c^2} \left[\omega \cos(\omega\tau) + \frac{2n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau) \right] > 0, \quad \forall \omega \in (0, \omega^*)$$

y con respecto a c tenemos

$$\frac{\partial}{\partial c} k_p(\omega, n, \tau, c) = -\frac{2n\omega}{c^3} \left[2\omega \cos(\omega\tau) + \frac{3n}{\tau^2 c} \sin(\omega\tau) \right] < 0, \quad \forall \omega \in (0, \omega^*).$$

también, la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es una función monotónicamente creciente de n y una función monotónicamente decreciente de c para toda $\omega \in (0, \omega^*)$. De esta manera, para parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (5.1) se tiene el lema. ■

Lema 23 Para parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (5.1) se tiene que

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} \geq \frac{k_p(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}{I(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}, \quad \omega \in (0, \omega_0^*). \quad (5.9)$$

Prueba. De la parametrización (4.18) tenemos que

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} = \frac{2n}{c^2} \omega^2 \left[\frac{n}{\tau^2 c} (1 + \cos(\omega\tau)) - \omega \sin(\omega\tau) \right].$$

Esta expresión puede ser escrita como

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} = \frac{2n}{\tau^2 c^2} \omega^3 [1 + \cos(\omega\tau)] [g(\omega, n, c) - h(\omega, \tau)].$$

Graficando las funciones $g(\omega, n, c)$ y $h(\omega, \tau)$ correspondientes a los parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) respectivamente obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} h(\omega, \tau) &\leq h(\omega, \tau_0), \quad \forall \omega \in \left(0, \frac{\pi}{\tau_0}\right), \\ g(\omega, n, c) &\geq g(\omega, n_0, c_0), \quad \forall \omega \geq 0. \end{aligned}$$

De estas desigualdades se sigue que

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} \geq \frac{2n}{\tau^2 c^2} \omega^3 [1 + \cos(\omega\tau)] [g(\omega, n_0, c_0) - h(\omega, \tau_0)], \quad \omega \in (0, \omega_0^*).$$

Ya que $1 + \cos(\omega\tau) \geq 1 + \cos(\omega\tau_0)$, $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{\tau_0}\right)$ y $\frac{2n}{\tau^2 c^2} \geq \frac{2n_0}{\tau_0^2 c_0^2}$ tenemos

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} \geq \frac{2n_0}{\tau_0^2 c_0^2} \omega^3 [1 + \cos(\omega\tau_0)] [g(\omega, n_0, c_0) - h(\omega, \tau_0)], \quad \omega \in (0, \omega_0^*),$$

lo cual implica que

$$\frac{k_p(\omega, n, \tau, c)}{I(\omega, n, \tau, c)} \geq \frac{k_p(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}{I(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}, \quad \omega \in (0, \omega_0^*).$$

■

Teorema 24 Dados los parámetros de red (n, τ, c) y (n_0, τ_0, c_0) satisfaciendo (5.1) se tiene que

$$\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)} \subseteq \Phi_{(n, \tau, c)}.$$

Prueba. Primero observamos que las fronteras de las regiones de estabilidad $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)}$ y $\Phi_{(n, \tau, c)}$ son determinadas barriendo ω en los intervalos $(0, \omega_0^*)$ y $(0, \omega^*)$ en la parametrización (4.18) correspondientes a los parámetros de red (n_0, τ_0, c_0) y (n, τ, c) respectivamente. El lema 23 implica que barriendo ω en el intervalo $(0, \omega_0^*)$, la región de estabilidad

$\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)}$ esta parcialmente contenida en la región de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$. Así, con el fin de probar la inclusión de las regiones de estabilidad resta probar que la correspondiente parte de la frontera de la región de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$ para $\omega \in (\omega_0^*, \omega^*)$ no se intercepta con la frontera de la región de estabilidad $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)}$. Tomando en cuenta que la función $I(\omega, n, \tau, c)$ es una función creciente de ω en el intervalo (ω_0^*, ω^*) y el lema 20 necesitamos considerar cuatro casos diferentes.

Caso 1: $\omega_0^* < \tilde{\omega}_0$ y $\omega^* < \tilde{\omega}$. Del lema 20 tenemos que la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es monotónicamente creciente de $k_p(\omega_0^*, n, \tau, c)$ a $k_p(\omega^*, n, \tau, c) > k_p(\omega_0^*, n_0, \tau_0, c_0)$ cuando ω va de ω_0^* a ω^* . Del lema 22 tenemos que $k_p(\omega_0^*, n, \tau, c) > k_p(\omega_0^*, n_0, \tau_0, c_0)$. De esta forma, se sigue que $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)} \subset \Phi_{(n, \tau, c)}$.

Caso 2: $\omega_0^* < \tilde{\omega}_0$ y $\tilde{\omega} < \omega^*$. Desde que $\tilde{\omega}_0 < \tilde{\omega}$ tenemos que $\omega_0^* < \tilde{\omega}$. Del lema 20 tenemos que la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es monotónicamente creciente para $\omega \in (\omega_0^*, \tilde{\omega})$ y monotónicamente decreciente de $k_p(\tilde{\omega}, n, \tau, c)$ a $k_p(\omega^*, n, \tau, c) > k_p(\omega_0^*, n_0, \tau_0, c_0)$ cuando ω va de $\tilde{\omega}$ to ω^* . Del lema 22 tenemos que $k_p(\omega_0^*, n, \tau, c) > k_p(\omega_0^*, n_0, \tau_0, c_0)$. De esta manera, se sigue que $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)} \subset \Phi_{(n, \tau, c)}$.

Caso 3: $\tilde{\omega}_0 < \omega_0^*$ y $\omega^* < \tilde{\omega}$. Del lema 20 tenemos que $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es monotónicamente creciente para $\omega \in (\omega_0^*, \omega^*)$. Del lema 22 tenemos que $k_p(\tilde{\omega}_0, n, \tau, c) > k_p(\tilde{\omega}_0, n_0, \tau_0, c_0)$. Entonces, tenemos que $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)} \subset \Phi_{(n, \tau, c)}$.

Caso 4: $\tilde{\omega}_0 < \omega_0^* < \tilde{\omega} < \omega^*$. Del lema 20 tenemos que la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ es monotónicamente creciente para $\omega \in (\omega_0^*, \tilde{\omega})$ y monotónicamente decreciente de $k_p(\tilde{\omega}, n, \tau, c)$ a $k_p(\omega^*, n, \tau, c) > k_p(\omega^*, n_0, \tau_0, c_0)$ cuando ω va de $\tilde{\omega}$ a ω^* . Vamos a considerar parámetros perturbados (n_1, τ_1, c_1) tal que $n > n_1 > n_0, \tau < \tau_1 < \tau_0$ y $c < c_1 < c_0$, y suficientemente cerca de (n, τ, c) tales que $\tilde{\omega}_0 < \omega_0^* < \tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega} < \omega_1^* < \omega^*$. Esto es siempre posible de la continuidad de las funciones $g(\omega, n, c)$, $h(\omega, \tau)$, $m(\omega, n, \tau, c)$ y $\tan(\omega\tau)$ con respecto a los parámetros. Para los parámetros (n, τ, c) y (n_1, τ_1, c_1) la desigualdad (5.9) se mantiene para $\omega \in (0, \omega_1^*)$. Del lema 22 tenemos que $k_p(\omega, n, \tau, c) > k_p(\omega, n_1, \tau_1, c_1)$ para $\omega \in (0, \omega_1^*)$. La función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ decese de $k_p(\omega_1^*, n, \tau, c)$ a

$k_p(\omega^*, n, \tau, c) > k_p(\omega_1^*, n_1, \tau_1, c_1)$ cuando ω va de ω_1^* a ω^* . La continuidad de la función $k_p(\omega, n, \tau, c)$ con respecto a ω , en el intervalo $(0, \omega^*)$, implica que existe un $\delta > 0$ tal que $k_p(\hat{\omega}, n, \tau, c) > k_p(\check{\omega}, n_1, \tau_1, c_1)$ para $\hat{\omega} \in (\omega_1^*, \omega_1^* + \delta)$ y $\check{\omega} \in (\omega_1^* - \delta, \omega_1^*)$. Seleccionando parámetros perturbados (n_1, τ_1, c_1) suficientemente cerca de los parámetros (n, τ, c) tal que $\omega^* \in (\omega_1^*, \omega_1^* + \delta)$ concluimos que $\Phi_{(n_1, \tau_1, c_1)} \subset \Phi_{(n, \tau, c)}$.

Ahora vamos a considerar parámetros perturbados (n_2, τ_2, c_2) tal que $n_1 > n_2 > n_0, \tau_1 < \tau_2 < \tau_0$ y $c_1 < c_2 < c_0$, y suficientemente cerca para (n_1, τ_1, c_1) teniendo que $\tilde{\omega}_2 < \tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega} < \omega_2^* < \omega_1^* < \omega^*$. De nuevo, para los parámetros (n_1, τ_1, c_1) y (n_2, τ_2, c_2) la desigualdad (5.9) se mantiene para $\omega \in (0, \omega_2^*)$. Aplicando los mismos argumentos como antes concluimos que $\Phi_{(n_2, \tau_2, c_2)} \subset \Phi_{(n_1, \tau_1, c_1)}$. Uno puede continuar este proceso un número finito de veces para concluir que $\Phi_{(n_0, \tau_0, c_0)} \subset \Phi_{(n, \tau, c)}$. Obsérvese que haciendo este proceso podría ser que para los mismos parámetros de red uno de los casos previos pueda aparecer. ■

Corolario 25 Asuma que un controlador (4.11) estabiliza localmente el punto de equilibrio del sistema (4.2) con parámetros de red (n_0, τ_0, c_0) . Entonces estabiliza localmente el punto de equilibrio del sistema (4.2) con parámetros de red (n, τ, c) satisfaciendo (5.1).

El corolario 25, es similar a la proposición 2 en [8], en la cual se establece que el diseño del controlador para los valores esperados más grandes de τ y c , y el valor esperado más pequeño de n producen un controlador estable robusto. La principal diferencia con [8] esta en el hecho de que con nuestro enfoque las ganancias del controlador pueden ser seleccionadas, basado sobre una región de estabilidad exacta, y no en un estimado de ésta.

5.2.1 Simulaciones

Las simulaciones fueron realizadas utilizando MATLAB/SIMULINK. El sistema utilizado es el definido en (4.2). Los parámetros nominales (parámetros de diseño del controlador) considerados son: $n_o = 40$ sesiones TCP, $c_o = 300$ paquetes/s, $\tau_o = 0.7$ s. En la Fig. 5.8 se observa la region de estabilidad $\Phi_{(n_o, c_o, \tau_o)}$ en el espacio de ganancias (k_p, I) , correspondiente a dichos parámetros.

Con efecto de analizar la robustez del esquema propuesto, se proponen los siguientes valores reales (parámetros de simulación) del sistema: $n = 50$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s, $\tau = 0.533$ s, los cuales cumplen con (5.1). Como ejemplo se toman dos pares de ganancias (k_p, I) dentro de la region de estabilidad descrita por $\Phi_{(n_o, c_o, \tau_o)}$, los valores usados fueron: $k_p = 1.5 \times 10^{-4}$, $I = 3$ y $k_p = 3.4 \times 10^{-4}$, $I = 50$, los cuales se muestran en la Fig. 5.8 como los puntos a y b respectivamente.

En la Fig. 5.9 se observa la respuesta obtenida para $q(t)$ (longitud de cola), con el conjunto de ganancias a y b , considerando $q(0) = 300$ paquetes y $q_o = 600$ paquetes, observando estabilidad del sistema en lazo cerrado para cada uno de los casos, lo cual ejemplifica la robustez del sistema. Asimismo se observa un mejor comportamiento (tiempo de estabilización y sobretiros) para el conjunto de ganancias (k_p, I) definidas por el punto b , lo cual muestra la ventaja de contar con la región completa de estabilidad, permitiendo un margen más amplio de posibilidades al momento de seleccionar el conjunto de ganancias (k_p, I) más adecuado dependiendo de los objetivos de desempeño que se tengan. En la misma figura se observa un comportamiento inicial en la dinámica de $q(t)$ en sentido contrario al equilibrio q_0 , esto es debido a que $\dot{q}(t) < 0$ durante un intervalo de tiempo a partir de $t = 0$, lo cual es explicado en el capítulo 2 de esta tesis.

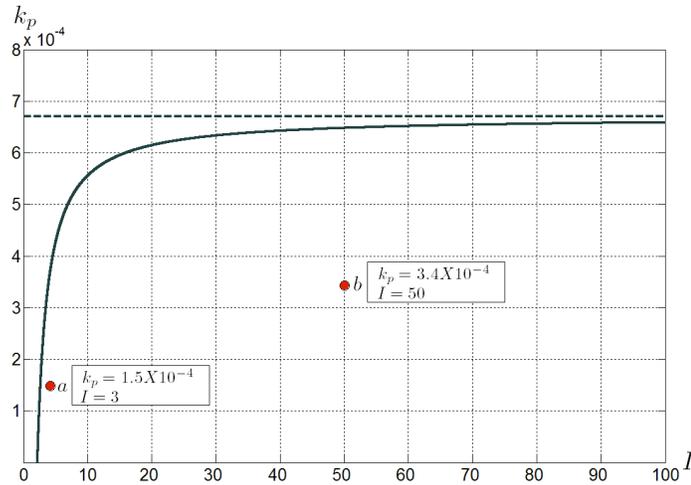


Fig. 5.8. Región de estabilidad robusta para los valores de parámetros: $n_o = 40$ sesiones TCP, $c_o = 300$ paquetes/s y $\tau_o = 0.7$ s.

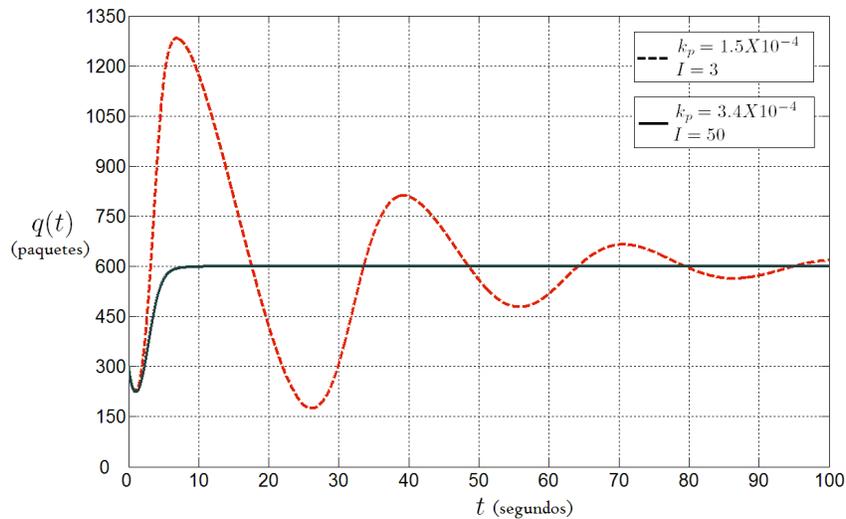


Fig. 5.9. Respuesta del sistema para dos conjuntos de ganancias (k_p, I) pertenecientes a la región de estabilidad $\Phi_{(n_o, \tau_o, c_o)}$.

En la Fig. 5.10 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado para la entrada de control $p(t)$, observando la convergencia al punto de equilibrio $p_0 = 0.1956$ paquetes. También se puede observar como la respuesta del control toma valores solamente entre $[0, 1]$, por lo cual la restricción de la función de marcación de paquetes $p(\cdot)$ se satisface.

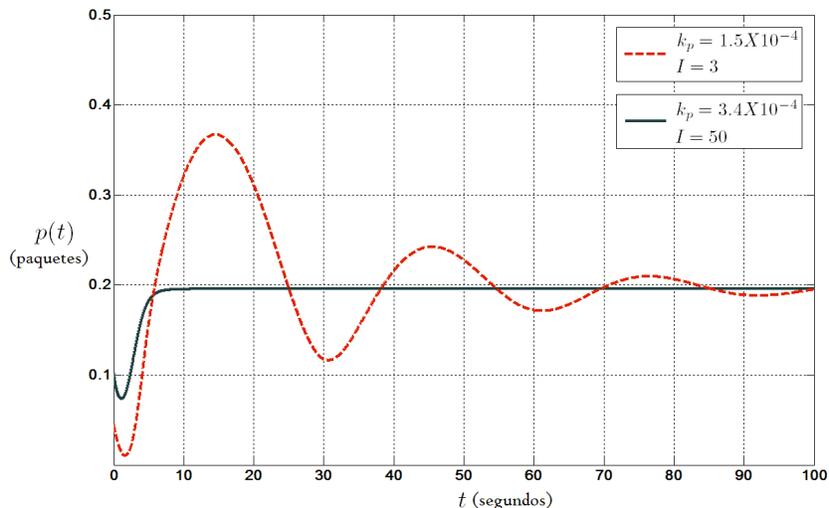


Fig. 5.10. Respuesta del sistema en lazo cerrado correspondiente a la entrada de control $p(t)$.

5.3 Comentarios sobre la robustez del Modelo simplificado ($\tau = \frac{q_0}{c} + \tau_p$).

Considerese el sistema (4.10) y los parámetros de red nominales (parámetros de diseño del controlador): $n_o = 40$ sesiones TCP, $c_o = 300$ paquetes/s, $\tau_o = 0.7$ s. Con efecto de analizar la robustez del sistema (4.3), se proponen los siguientes valores reales (parámetros de simulación) del sistema: $n = 50$ sesiones TCP, $c = 300$ paquetes/s, $\tau = 0.533$ s, los cuales cumplen con (5.1). En la Fig. 5.11 se observa como la region de estabilidad $\Phi_{(n_o, c_o, \tau_o)}$ en el espacio de ganancias (k_p, I) , se encuentra completamente contenida dentro de la region de estabilidad $\Phi_{(n, \tau, c)}$. Esto hace pensar que es posible encontrar condiciones tal que $\Phi_{(n_o, \tau_o, c_o)} \subset \Phi_{(n, \tau, c)}$ dado cualquier conjunto de parámetros (n, τ, c) y (n_o, c_o, τ_o) que satisfacen (5.1). Creemos que es posible demostrar tal condición siguiendo los mismos pasos que en los modelos anteriores, sin embargo, el análisis de la parametrización obtenida para este modelo se presenta más complicada, por lo cual, la demostración formal es tomada como trabajo a futuro.

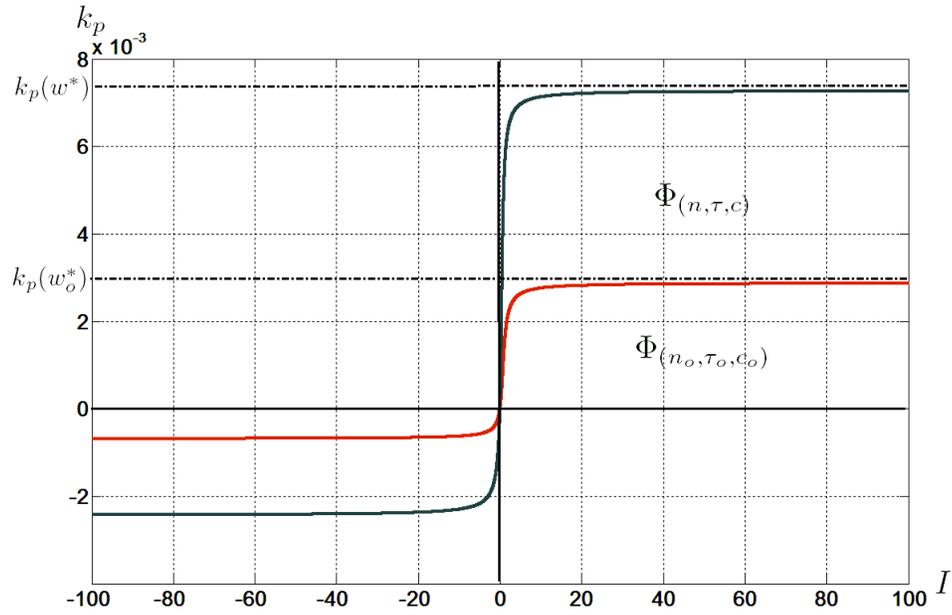


Fig. 5.11. En esta gráfica se observa como la región $\Phi_{(n_o, \tau_o, c_o)}$ se encuentra contenida dentro de la región $\Phi_{(n, \tau, c)}$.

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

En este trabajo de tesis se analizó la estabilidad y estabilidad robusta para una clase de redes TCP/AQM considerando un controlador PI como estrategia AQM.

Conclusiones.

- 1) Tres modelos simplificados de la dinámica introducida en [8] son analizados. Condiciones necesarias y suficientes para estabilidad asintótica son obtenidas para cada uno de los sistemas (linealizados alrededor del equilibrio) en lazo cerrado, mostrando así, que es posible encontrar el conjunto completo de controladores PI que estabilizan localmente el punto de equilibrio para cada uno de los sistemas.
- 2) Al comparar las regiones completas de estabilidad para el ejemplo propuesto, se observa como la región de estabilidad para el modelo (4.9) esta completamente contenida dentro de la región de estabilidad del modelo (4.10) ($\Phi_2(n, \tau, c) \subseteq \Phi_3(n, \tau, c)$), con lo cual se puede concluir que, el conjunto completo de controladores que estabilizan localmente el equilibrio del modelo (2.3), también estabilizan localmente el equilibrio del modelo (2.2). Sin embargo, la región de estabilidad del modelo (4.9) es muy pequeña comparada con la región del modelo (4.10),

lo cual permite observar el “costo” de considerar la capacidad de transmisión c suficientemente grande.

- 3) Del mismo ejemplo se observa, como la región de estabilidad del modelo (4.8) se aproxima a la región de estabilidad del modelo (4.9) ($\Phi_1(n, \tau, c) \approx \Phi_2(n, \tau, c)$), lo cual permite observar como el comportamiento local del modelo (2.5) alrededor del equilibrio, puede ser aproximado por el comportamiento local del modelo (2.3).
- 4) Una comparación entre la región de estabilidad para el modelo (4.10) y las condiciones suficientes de estabilidad obtenidas en [8] es presentada. Se observa como el conjunto de controladores PI propuestos en [8] es un subconjunto muy pequeño del conjunto completo de controladores PI, el cual estabiliza localmente el equilibrio del sistema. Esto presenta varias ventajas, primero, el rango de ganancias del control PI es mucho más amplio, lo cual es de gran utilidad para efectos de sintonización en las ganancias del control, dependiendo de los objetivos de desempeño que se tengan. Asimismo, el contar con el conjunto completo de controladores PI, permite de manera más certera, diseñar un sistema de control robusto ante variaciones en las ganancias de control nominales.
- 5) El problema de robustez para los modelos (4.8) y (4.9) ante variaciones en los parámetros de red (n, τ, c) fue tratado. Se muestra que la estabilidad con respecto al valor más grande esperado de retardo (τ) y capacidad de transmisión (c) y el valor más pequeño esperado de cargas TCP (n) conduce al conjunto completo de controladores PI estabilizadores robustos. En otras palabras, se muestra como la región de estabilidad asociada a un conjunto de parámetros nominales (n_0, τ_0, c_0) está completamente contenida dentro de la región de estabilidad asociada a un conjunto de parámetros perturbados (n, τ, c) que satisfacen: $n \geq n_0, \tau \leq \tau_0, c \leq c_0$.

Trabajo a futuro.

- 1) Análisis de robustez para el modelo faltante, considerando parámetros de red perturbados como los considerados en los otros modelos.
- 2) Definir criterios de desempeño (tiempo de estabilización, sobretiros, etc.) con el objetivo de diseñar un algoritmo de sintonización basado en la región completa de estabilidad para cada uno de los modelos.
- 3) Complementar los resultados obtenidos en esta tesis a través de simulaciones en NS (Network Simulator).
- 4) Realizar un análisis no lineal de los modelos.

Bibliografía

- [1] R. Bellman y K. L. Cooke. *Differential-Difference Equations*, Academic Press, 1963.
- [2] D. E. Comer. *Internetworking with TCP/IP. Volume I: Principles, Protocols and architecture*, Prentice Hall, 2000.
- [3] B. A. Forouzan. *TCP/IP: Protocol Suite*, McGraw-Hill, 2000.
- [4] K. Gu, V. L. Kharitonov y J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [5] J. K. Hale y S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1993.
- [6] C. V. Hollot y Y. Chait. Nonlinear Stability Analysis for a class of TCP/AQM Networks. *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 3:2309-2314, 2001.
- [7] C.V. Hollot, V. Misra, D. Towsley y W. B. Gong. A control theoretic analysis of Red, *Proc. IEEE INFOCOM*, 3:1510-1519, 2001.
- [8] C.V. Hollot, V. Misra, D. Towsley y W. B. Gong. Analysis and Design of Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows, *IEEE Trans. On Automatic Control*, 6(47):945-959,2002.
- [9] F. P. Kelly. Models for a self-managed Internet, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1773(358):2335-2348, 2000.
- [10] V. Kolmanovskii y A. Myshkis. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [11] W. Michiels , D. Melchor-Aguilar y S.-I. Niculescu. Stability Analysis of some classes of TCP/AQM networks, *International Journal of Control*, 9(79):1136-1144, 2006.

- [12] V. Misra, W. B. Gong y D. Towsley. Fluid based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED, *Proc. ACM/SIGCOMM*, 151-160, 2000.
- [13] S.-I. Niculescu. *Delay Effects On Stability A Robust Control Approach*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2001.
- [14] S.-I. Niculescu, W. Michiels , D. Melchor-Aguilar, T. Luzyanina, F. Mazenc, K. Gu, y F. Chatté. *Delay Effects on the asymptotic stability of various fluid models in high performance networks in Advances Communication Control Networks*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 2004.
- [15] P.-F. Quet y H. Özbay. On the Design of AQM Supporting TCP Flows Using Robust Control Theory, *IEEE Trans. Automatic Control*, 6(49):1031- 1036, 2004.
- [16] J. Santos, S. Mondié y V. L. Kharitonov. Robust Stability of time-delay Systems and the finite inclusions theorem, *IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, 2003.
- [17] G. J. Silva, A. Datta y S.P. Bhattacharyya. *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Birkhäuser, Boston, 2005.
- [18] D. Üstebay y H. Özbay. Remarks on PI and PID control-based AQM designs for TCP-flows, *IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, 2006.