



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Control de movimiento de Robots Manipuladores
con entradas acotadas**

Tesis que presenta

Ing. Emeterio Aguiñaga Ruiz

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Arturo Zavala Río

San Luis Potosí, S.L.P., Septiembre del 2006



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Control de movimiento de Robots Manipuladores con entradas acotadas** presentada para obtener el Grado de **Maestro en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos** fue elaborada por **Emeterio Aguiñaga Ruiz** y aprobada el **15 de Septiembre del 2006** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Arturo Zavala Río
(Director de la tesis)

Dr. Víctor Santibáñez Dávila
(Sinodal)

Dra. Ilse Cervantes Camacho
(Sinodal)

Dr. David Lizárraga Navarro
(Sinodal)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Arturo Zavala Río.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número de registro 189627.

Agradecimientos

A mi asesor *Dr. Arturo Zavala Río*, por su motivación, confianza y apoyo incondicional, por la gran amistad que me ha brindado, por guiarme a través de los senderos de la investigación y abrirme las puertas hacia nuevos conocimientos.

A CONACyT por el apoyo económico brindado durante el desarrollo de esta tesis.

Resumen

El presente trabajo abarca tres enfoques alternativos para el seguimiento (semi) global de trayectorias para robots manipuladores considerando acotamiento en la entrada, a través de extensiones simples de la ley de control “PD+” (Proporcional -Derivativo en el error de posición). En el primer esquema (denotado como SP-SD_c+) se aplican funciones de saturación sobre la parte proporcional, por un lado, y la derivativa, por el otro, en cada unión del robot. Se trata de una ley de control dinámica, que prescinde de mediciones de velocidad, la cual generaliza y engloba dos algoritmos previamente propuestos en la literatura. El segundo esquema (denotado SP-SD+) es una versión estática de la anterior, en la que se consideran mediciones tanto de las posiciones como de las velocidades articulares. La tercera ley propuesta (denotada SPD+) es una variante de esta última en la que tanto la parte proporcional como la derivativa del algoritmo de control (en cada unión) son inmersas en una sola función de saturación. Diversas simulaciones numéricas, considerando un manipulador de 2 grados de libertad, prueban la eficiencia de los algoritmos propuestos y muestran mejoras en el funcionamiento de lazo cerrado con respecto a los algoritmos previamente presentados en la literatura. Hasta donde el autor tiene conocimiento sobre el tema, el segundo y tercer esquemas propuestos en esta tesis son los primeros algoritmos estáticos en resolver el problema de seguimiento global de trayectorias para robots manipuladores con entradas acotadas.

Abstract

This work proposes three alternative approaches for the (semi) global tracking of robot manipulators with bounded inputs through simple extensions of “PD+” (Proportional-Derivative in the position error) control law to the bounded-input case. The first scheme (denoted SP-SD_c+) considers that the P and D parts (at every joint) are, each explicitly, bounded through saturation functions. It is a dynamic control law released from velocity measurements, which generalizes two algorithms previously proposed in the literature. The second scheme (denoted SP-SD+) is a static version of the precedent one, which considers both position and velocity measurements. The third proposed law (denoted SPD+) is a different version of the latter, where both the P and D parts of the control algorithm (at every joint) are embedded in a single saturation function. Several numerical simulations, considering a 2-degree-of-freedom manipulator, prove the efficiency of the proposed algorithms and show that the closed-loop performance is improved with respect to the schemes previously presented in the literature. As far as the author is aware, the second and third schemes proposed in this thesis, are the first to solve the global trajectory tracking for robot manipulators with bounded inputs through a static algorithm.

Índice general

Capítulo

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Notación	1
1.2. Robots manipuladores: conceptos fundamentales	1
1.3. Modelo dinámico	2
1.3.1. Dinámica sin fricción	4
1.3.2. Dinámica con modelación parcial de fricción	5
1.4. Propiedades	6
1.5. Control de Posición y Movimiento.	7
1.6. Antecedentes	8
1.7. Motivación de la tesis	10
1.8. Estructura de la tesis	11
2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS	13
2.1. Teoría de estabilidad de Lyapunov	14

2.2. Sistemas no-autónomos	17
2.3. Otros resultados	19
3. CONTROL DE MOVIMIENTO CON ENTRADAS ACOTADAS	21
3.1. Ley de control PD+	21
3.2. Extensiones al caso de entradas acotadas	22
3.2.1. Un tipo de control SP-SD+ con retroalimentación dinámica	23
3.2.2. Una extensión que logra la estabilización global	26
3.3. Contribución de la tesis	29
3.3.1. Control SP-SD _c + generalizado con retroalimentación dinámica	33
3.3.2. Estabilización global con retroalimentación estática	43
4. SIMULACIONES	50
4.1. Control SP-SD _c + generalizado: caso global	51
4.2. Control SP-SD _c + generalizado: caso semi-global	54
4.3. Estabilización global con retroalimentación estática: SP-SD+, SPD+	59
5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	62
Apéndice	
A. Demostración del Corolario 3.1.	65
Bibliografía	
	68

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Notación

A lo largo de esta tesis, el origen de \mathbb{R}^n ($n > 1$) será denotado 0_n , mientras que $0_{n \times n}$ denotará el elemento neutro de $\mathbb{R}^{n \times n}$. $\|\cdot\|$ convencionalmente denotará la norma Euclídiana estandar (norma 2), i.e. $\|x\| = [x_1^2 + \dots + x_n^2]^{\frac{1}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Robots manipuladores: conceptos fundamentales

El contenido de esta sección está basado en [5, Caps.1, 3 y 4]. De esta referencia, se adopta la siguiente definición de robot manipulador: “Un robot manipulador es un brazo mecánico articulado formado de eslabones conectados a través de uniones o articulaciones que permiten un movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos”.

El movimiento de cada articulación puede ser traslacional, rotacional o una combinación de ambos. En esta tesis se consideran únicamente articulaciones rotacionales. Para efectos prácticos, el número de grados de libertad (g.d.l.) de un robot manipulador se determina por su número de articulaciones. En la figura 1.1 se muestra el esquema de un robot de 4 g.d.l. Las variables q_1, q_2, q_3 y q_4 se refieren a las posiciones articulares del robot. Para propósitos analíticos, las posiciones articulares se agrupan para formar el

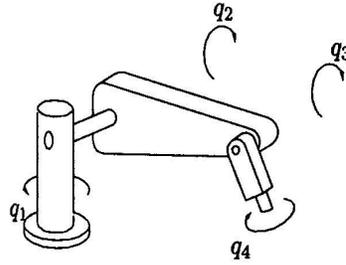


Figura 1.1: Robot de 4 g.d.l.

vector de posiciones q :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Tanto las posiciones q como sus derivadas temporales, es decir, las velocidades articulares $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, se miden mediante sensores convenientemente colocados en el robot.

A cada articulación del robot le corresponde un actuador, que puede ser de naturaleza electromecánica, neumática o hidráulica. Dichos actuadores tienen como objetivo generar fuerzas o pares, introduciendo así el movimiento de los eslabones y en consecuencia, el movimiento del robot como un todo. El conjunto de fuerzas y pares generados por los actuadores del robot son agrupados para fines analíticos en el vector τ , esto es,

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$

1.3 Modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador puede obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. El inconveniente que presenta este método es que el

análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del robot. Uno de los métodos para la obtención de los modelos dinámicos de robots manipuladores está basado en las ecuaciones de movimiento de Lagrange, método sencillo de utilizar aún cuando el número de articulaciones del robot aumenta. El empleo de las ecuaciones de Lagrange para el modelado requiere la noción de dos conceptos importantes: energía cinética y energía potencial. La energía total del robot manipulador de n g.d.l. es la suma de sus energías cinética $K(q(t), \dot{q}(t))$ y potencial $U(q(t))$, donde $q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$. El Lagrangiano $L(q(t), \dot{q}(t))$ de un robot manipulador es el diferencia entre su energía cinética y su energía potencial, esto es,

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)) \quad (1.1)$$

donde se considera que la energía potencial $U(q(t))$ se debe a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y fuerzas de resortes.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de n g.d.l. (la deducción, aplicación y desarrollo de las ecuaciones de Lagrange puede consultarse en [3] y [8]) vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

donde Q_i son las fuerzas y pares ejercidos externamente en cada articulación. Notemos que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como g.d.l. tenga el robot manipulador.

La metodología para la obtención del modelo dinámico de robots de n g.d.l. se puede encontrar en textos tradicionales de robótica tales como [1] y [16], por lo que el desarrollo de dicho modelo se presentará en forma resumida en esta tesis.

Considérese el robot manipulador que se compone de n eslabones rígidos, conectados por uniones libres de fricción y elasticidad. La energía cinética $K(q, \dot{q})$ asociada al robot puede ser expresada de forma general como

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (1.3)$$

donde $D(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ denominada *matriz de inercia*. La energía potencial $U(q)$ no tiene forma específica, pero depende del vector de posiciones articulares q .

El Lagrangiano $L(q, \dot{q})$, dado por (1.1), es en este caso

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} - U(q),$$

por lo tanto la ecuación de movimiento de Lagrange (1.2) está dada por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = Q$$

con $Q = [Q_1, \dots, Q_n]^T$. De lo anterior, la ecuación de movimiento toma la forma

$$D(q) \ddot{q} + \dot{D}(q, \dot{q}) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T D(q) \dot{q}] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = Q$$

o de modo compacto

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = Q \tag{1.4}$$

donde $C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{D}(q, \dot{q}) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T D(q) \dot{q}]$ y $g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}$.

La ecuación (1.4) es la ecuación dinámica para robots de n g.d.l., la cual es una ecuación vectorial no-lineal. La matriz $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada *matriz centrífuga y de Coriolis* y puede no ser única, pero el vector $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ sí lo es. La manera de obtener los elementos de $C(q, \dot{q})$ puede consultarse en [5], [16] y referencias ahí citadas. El vector n -dimensional $g(q)$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales (simplemente el gradiente de la energía potencial, i.e. $g(q) = \nabla U(q)$). Los elementos de $D(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ dependen, por supuesto, de la geometría del robot que modelan. Ejemplos sencillos donde se obtiene el modelo para diferentes configuraciones de robots manipuladores pueden consultarse en [5].

1.3.1 Dinámica sin fricción

En el caso en que se desprecia todo tipo de fuerzas disipativas actuando sobre el robot, se tiene que $Q = \tau$, donde, recordando de la sección 1.1, τ es el vector de pares

y fuerzas generados por los actuadores en las articulaciones del robot. Éste será, para nuestros efectos, el vector de entradas (arbitrarias) de control. Así, el modelo en este caso toma la forma **convencional**

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1.5)$$

1.3.2 Dinámica con modelación parcial de fricción

Cuando se consideran fuerzas disipativas, $f_d \in \mathbb{R}^n$, actuando sobre las articulaciones del robot, éstas son consideradas externas al manipulador. Tal tipo de fuerzas es caracterizado por una *función de disipación de Rayleigh* [9] (o simplemente *función de disipación*), $\mathcal{F}(q, \dot{q})$, de tal manera que $f_d = \nabla_{\dot{q}}\mathcal{F}(q, \dot{q})$. Dicha función está sujeta a cumplir las siguientes propiedades: $\nabla_{\dot{q}}\mathcal{F}(q, 0_n) = 0_n$, $\forall q \in \mathbb{R}^n$, y $\dot{q}^T \nabla_{\dot{q}}\mathcal{F}(q, \dot{q}) > 0$, $\forall (q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

Por su naturaleza, las fuerzas de disipación se oponen al movimiento, por lo que, al añadirse al resto de las fuerzas externas, un signo negativo les antecede. Así, en este caso, $Q = \tau - \nabla_{\dot{q}}\mathcal{F}(q, \dot{q})$. Un tipo de fuerza disipativa cuya presencia en las articulaciones robóticas es considerada inherente es el de la fricción viscosa (esto puede corroborarse, por ejemplo, en [2]). Su función de disipación, \mathcal{F}_v , está caracterizada por una forma cuadrática definida positiva con dependencia exclusiva del vector de velocidades articulares, i.e. $\mathcal{F}_v(q, \dot{q}) \equiv \frac{1}{2}\dot{q}^T F \dot{q}$, con $0 < F \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Esta matriz cuadrada definida positiva, F , es generalmente diagonal y sus elementos son conocidos como *coeficientes de fricción viscosa*. Así, bajo la consideración de fricción viscosa en las articulaciones, la dinámica general de un robot manipulador de n g.d.l. toma la forma

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau - F\dot{q}$$

o equivalentemente

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1.6)$$

Cabe resaltar que no se puede pretender que un modelo de fricción que considera únicamente fricción viscosa es completo. Faltan componentes esenciales en el modelo como la fricción seca o la fricción estática, entre otros (véase por ejemplo [2]). Sin embargo, una modelación parcial de la fricción, como en (1.6), puede resultar útil para efectos de diseño, como será el caso de algunos resultados analizados y/o propuestos en capítulos posteriores de esta tesis (específicamente en el Capítulo 3). Como en el caso de (1.4), las componentes de fricción no consideradas son simplemente tomadas como fenómenos (no lineales) no modelados.

1.4 Propiedades

A continuación se presenta en forma resumida algunas propiedades básicas del modelo dinámico para robots de n g.d.l., las cuales se utilizarán ampliamente en el Capítulo 3 de esta tesis donde se llevará a cabo el análisis de diversas estrategias de control. La demostración de las propiedades puede consultarse con detalle en [5].

Matriz de inercia. La matriz de inercia, además de que se encuentra íntimamente relacionada con la energía cinética (ecuación (1.3)), juega un papel muy importante tanto en el modelado dinámico como en el desarrollo de controladores. $D(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ cuyos elementos son funciones sólo de q , la cual satisface la siguiente propiedad.

- **Propiedad 1.1.** Existen constantes reales positivas d_m y d_M tales que

$$d_m I \leq D(q) \leq d_M I \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

donde I denota la matriz identidad de $n \times n$. $D^{-1}(q)$ existe y es definida positiva.

Matriz centrífuga y de Coriolis. $C(q, \dot{q})$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos son funciones de q y \dot{q} , la cual satisface las siguientes propiedades.

- **Propiedad 1.2.** $C(q, 0_n) = 0_{n \times n} \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$

- **Propiedad 1.3.** Para todo $q, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y escalar α

$$C(q, x)y = C(q, y)x,$$

$$C(q, z + \alpha x)y = C(q, z)y + \alpha C(q, x)y$$

- **Propiedad 1.4.** Para robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales se tiene que

$$\|C(q, x)y\| \leq k_c \|x\| \|y\| \quad \forall q, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

- **Propiedad 1.5.** La matriz $C(q, \dot{q})$ está relacionada con la matriz $D(q)$ por la expresión

$$x^T \left[\frac{1}{2} \dot{D}(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q}) \right] x = 0 \quad \forall q, \dot{q}, x \in \mathbb{R}^n$$

y de hecho, $\frac{1}{2} \dot{D}(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q})$ es una matriz antisimétrica si los elementos de $C(q, \dot{q})$ son obtenidos usando los coeficientes de Christoffel [5,16]. También resulta cierto que $\dot{D}(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T$. Independientemente de la manera en la que se obtenga $C(q, \dot{q})$, ésta siempre satisfará:

$$\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{D}(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0 \quad \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$$

El vector de gravedad. $g(q)$ depende sólo de las posiciones articulares y cumple con la siguiente propiedad.

- **Propiedad 1.6.** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k_g tal que:

$$\|g(q)\| \leq k_g \quad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

1.5 Control de Posición y Movimiento.

El problema de control de posición y movimiento para robots manipuladores de n g.d.l. (*RMngdl*) puede formularse en los siguientes términos. Considérese la ecuación dinámica de un robot de n g.d.l. (1.5).

Control de posición. Dado un vector de posiciones articulares deseadas q_d , cuyos elementos $q_{d_i}, i = 1, \dots, n$, se suponen constantes, se trata de determinar una función vectorial τ de tal forma que los estados del manipulador $[q(t)^T \dot{q}(t)^T]^T$ converjan a $[q_d^T \ 0_n^T]^T$. Lo anterior se puede expresar de la siguiente forma: se busca determinar una τ que garantice que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_d \\ 0_n \end{pmatrix}.$$

Control de movimiento. Dado un vector de trayectorias deseadas $q_d(t)$, cuyos elementos $q_{d_i}(t), i = 1, \dots, n$, son funciones (al menos) doblemente diferenciables acotadas hasta su segunda derivada, se busca determinar una función vectorial τ de tal forma que los estados del manipulador $[q(t)^T \dot{q}(t)^T]^T$ converjan a $[q_d(t)^T \dot{q}_d(t)^T]^T$, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_d(t) \\ \dot{q}_d(t) \end{pmatrix}.$$

1.6 Antecedentes

Dentro de los trabajos propuestos en la literatura que resuelven el problema de **regulación** para *RMngdl* se encuentra el esquema propuesto por Takegaki y Arimoto en 1981 [17]. Estos autores proponen un controlador PD (Proporcional-Derivativo en el error de posición) con compensación de gravedad y demuestran la estabilización global de las variables articulares hacia la configuración deseada. El esquema de control considera información completa del sistema, i.e. conocimiento de los parámetros del sistema y las lecturas de posición y velocidad. El esquema de Takegaki y Arimoto [17] fue retomado por Tomei en 1991 [19] donde considera compensación precalculada de gravedad en el controlador. En este trabajo se demuestra que, con el esquema propuesto bajo ciertas consideraciones, también se logra la estabilización global de las variables articulares hacia la configuración deseada.

Dentro de los esquemas propuestos en la literatura que resuelven el problema de

seguimiento tenemos el controlador denominado PD+ propuesto por Paden y Panja en [10], el cual considera conocimiento de los parámetros del sistema así como lecturas de posición y velocidad. Estos autores realizan el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el uso del teorema de Matrosov [10, Apéndice], concluyendo la estabilización global de las variables articulares hacia la trayectoria deseada.

Entre los algoritmos de control que resuelven el problema de regulación y seguimiento para *RMngdl* se encuentran aquéllos que consideran **acotamiento en la entrada**. La motivación de estos esquemas nace de una restricción que se presenta en la vida real: los actuadores son incapaces de proveer fuerza (potencia) ilimitada. Diversas soluciones para sistemas mecánicos (o Euler-Lagrangianos) considerando acotamiento en la entrada han sido propuestos en la literatura. Esquemas que resuelven el problema de regulación para *RMngdl* considerando acotamiento en la entrada, conocimiento de los parámetros del sistema y lecturas de posiciones y velocidades son los propuesto por Kelly et al. en [6] y Santibáñez et al. en [14]. En dichos esquemas se propone una extensión de la ley de control PD con compensación de gravedad aplicando funciones de saturación sobre la parte proporcional (P), por un lado, y la parte derivativa (D), por el otro, de cada unión. Como una mejora a dichos esquemas, Zavala y Santibáñez proponen en [22] y [21] esquemas de saturación más generales aplicados a la ley de control PD con compensación de gravedad, los cuales muestran un mejor desempeño del sistema en lazo cerrado que los propuestos en [6] y [14].

Los esquemas anteriormente citados son algunos de los muchos que se pueden encontrar en la literatura. Nótese que en estos esquemas se consideran leyes de control estáticas, i.e. controladores sin dinámica interna. Existen aproximaciones adaptables de leyes de control PD que resuelven el problema de regulación y movimiento para *RMngdl*, sin requerir el conocimiento exacto de los parámetros del manipulador. Sin embargo, cuando las estimaciones de tales parámetros son adecuados, tales esquemas adaptables, aunque son más atractivos por su naturaleza, tienden a reducir el desempeño del sistema en lazo

cerrado (respuestas lentas, transitorios altamente oscilatorios, etc.). Un esquema interesante propuesto en la literatura que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias, prescindiendo de lecturas de velocidad y considerando acotamiento en la entrada, es el desarrollado por Loria y Nijmeijer en [7]. Este último esquema se estudió con profundidad durante el desarrollo de esta tesis.

1.7 Motivación de la tesis

Como se comentó de manera breve en la sección anterior, existen trabajos que resuelven el problema de regulación y seguimiento para $RMngdl$ en la literatura bajo la consideración de diversos marcos analíticos y objetivos de control. El desarrollo de leyes de control que resuelvan el problema de control de movimiento para $RMngdl$ considerando acotamiento en la entrada es el **propósito fundamental de esta tesis**.

Aunque existen trabajos en la literatura que resuelven este problema, generalmente se trata de esquemas que prescinden de lecturas de velocidad. Por su naturaleza dinámica, estos esquemas tienden a reducir el desempeño del sistema en lazo cerrado. Por esta razón, el desarrollo de leyes de control que consideren la información completa del sistema (conocimiento de los parámetros del sistema y lecturas de posición y velocidad) son algoritmos que representan una buena opción (cuando la estimación de tal información es aceptable). Por tales motivos, el estudio y desarrollo de algoritmos de control considerando acotamiento en la entrada e información completa del sistema es uno de los objetivos de esta tesis.

Los trabajos comentados en la sección anterior tienen que ver de manera directa con la motivación y, por supuesto, con el desarrollo de esta tesis. En particular, algo que motivó la realización de esta tesis fue el reto de desarrollar una posible extensión de los esquemas de regulación con saturación propuestos en [6], [14] y [21] al caso de seguimiento.

Dentro de los esquemas que resuelven el problema de seguimiento prescindiendo de

lecturas de velocidad, el estudio del trabajo propuesto por Loria y Nijmeijer [7] en el desarrollo de esta tesis nos mostró ciertas limitaciones, tales como restricciones en la elección de los parámetros de control (ganancias proporcionales y derivativas) y el estar sujetos a una función de saturación específica (tangente hiperbólica). Así, el desarrollo de una generalización de este esquema, tal que se resuelva el problema de valores restringidos para los parámetros de control y de la libertad de escoger funciones de saturación dentro de un conjunto, se convirtió en otro de los objetivos principales de esta tesis. Tales logros estarán orientados a mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado (explicación más detallada de este punto se encuentra en el Capítulo 4 de esta tesis).

1.8 Estructura de la tesis

La tesis se estructura de la siguiente manera: en este primer capítulo se da una breve introducción de $RMngdl$, donde se obtiene el modelo dinámico y se describe de manera breve las propiedades que dicho modelo cumple. Se formula el problema de regulación y seguimiento y se dan antecedentes sobre esquemas que resuelven ambos problemas para $RMngdl$. Finalmente se da la motivación y objetivos del trabajo de la tesis.

En el Capítulo 2 se da una introducción a la teoría de Lyapunov para el análisis de estabilidad de sistemas no-lineales, así como definiciones importantes y teoremas utilizados en el Capítulo 3.

En el Capítulo 3 se desarrolla el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado con los controladores estudiados en esta tesis. El primer esquema presentado es el propuesto por Paden y Panja [10]. Posteriormente se presentan dos extensiones de [10] al caso de entradas acotadas: Loria y Nijmeijer [7] y Santibañez y Kelly [13]. Finalmente presentamos la contribución de esta tesis: la generalización de [7] y [13] propuesta en este trabajo de tesis y las extensiones de [14] y [21] del caso de regulación a seguimiento.

En el Capítulo 4 se presentan las simulaciones de los controladores propuestos en este trabajo.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y perspectivas correspondientes al trabajo desarrollado.

Capítulo 2

PRELIMINARES MATEMÁTICOS

El objetivo de este capítulo es presentar las herramientas que servirán de base para desarrollar los análisis que soportarán los resultados propuestos en este trabajo de tesis. Se presentarán algunos aspectos de la teoría de estabilidad de Lyapunov, donde se enunciarán el Método Directo de Lyapunov. Enseguida se enunciará la extensión de la teoría de Lyapunov para sistemas no-autónomos. Finalmente presentamos la definición de estabilizabilidad semi-global así como condiciones suficientes para garantizar estabilidad asintótica con dominio de atracción $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. Los conceptos, definiciones y teoremas a continuación presentados fueron tomados de [4], [12], [15], [20], y [18].

Empezaremos por enunciar los siguientes resultados analíticos que serán de mucha utilidad en nuestros desarrollos.

Lema 2.1 [4, Lema 2.2] Sea $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en algún dominio (abierto y conexo) $D \subset \mathbb{R}^n$. Supóngase que la matriz Jacobiana $[\partial f / \partial x]$ existe y es continua en $[a, b] \times D$. Si para un conjunto convexo $W \subset D$ existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L$$

en $[a, b] \times W$, entonces

$$\forall t \in [a, b], \quad \forall x, y \in W : \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (2.1)$$

□

La desigualdad (2.1) es llamada **condición de Lipschitz** [4, Cap. 2]. Toda función $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface la condición (2.1) es llamada **función Lipschitz** [4, Cap. 2].

El siguiente resultado es conocido como el **Lema de Barbalat**.

Lema 2.2 [4, Lema 4.2] Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en $[0, \infty)$.

Supóngase que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(r) dr$ existe y es finito. Entonces

$$\phi(t) \rightarrow 0 \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty$$

□

2.1 Teoría de estabilidad de Lyapunov

Empezaremos por introducir las definiciones de base sobre las cuales reposa la teoría de estabilidad de Lyapunov. Considérese el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz y $D \subset \mathbb{R}^n$. El origen es un **punto de equilibrio** de (2.2) si $x(0) = 0_n \Rightarrow x(t) = 0_n, \forall t \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1 El punto de equilibrio $x = 0_n$ es llamado

- **estable** si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$$

- **inestable** si no es estable;

- **asintóticamente estable** si es estable, y adicionalmente existe $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica que $x(t) \rightarrow 0_n$ cuando $t \rightarrow \infty$. □

Sea $\phi(t; x)$ la solución de (2.2) con condición inicial x . La **región de atracción** se define como el conjunto de todos los puntos x tales que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x) = 0_n$. Cuando la región de atracción es todo \mathbb{R}^n , se dice que la estabilidad del punto de equilibrio es global, tal como se expresa en la siguiente definición.

Definición 2.2 El punto de equilibrio $x = 0_n$ es llamado **global asintóticamente estable** si es estable, y adicionalmente $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0_n$ para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$. □

Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov (en adelante referido como M.D.L.) es una herramienta poderosa para el análisis de sistemas no lineales. Dicho método es una generalización de los conceptos de energía asociada a un sistema mecánico: el movimiento de un sistema mecánico es estable si su energía mecánica decrece en función del tiempo.

La forma de proceder del M.D.L. es obtener una función escalar de energía generalizada (en la mayoría de los casos) del sistema dinámico, y examinar la variación en el tiempo de tal función. De esta manera se pueden obtener conclusiones acerca de la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema dinámico sin requerir el conocimiento explícito de sus soluciones. La función de energía generalizada que se debe obtener, $V(x)$, debe tener dos propiedades importantes: la primera es ser estrictamente positiva, excepto en el punto de equilibrio, i.e. $V(x) > 0, \forall x \in D \setminus \{0_n\}$ y $V(0_n) = 0$, donde $\{0_n\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$. La segunda propiedad está asociada con la dinámica: que la derivada de la función evaluada a lo largo de las trayectorias de (2.2), denotada como $\dot{V}(x)$, debe ser decreciente, i.e.

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$$

En este método, una función que cumple la primera propiedad es denominada **función definida positiva**, mientras que si $V(x) \geq 0, \forall x \in D$, es llamada función **semi-definida**

positiva. Por otro lado, una función que satisface la segunda propiedad es denominada **función semi-definida negativa**, i.e. $V(x) \leq 0, \forall x \in D \setminus \{0_n\}$. Si adicionalmente $V(x) < 0, \forall x \in D \setminus \{0_n\}$ es llamada función **definida negativa**. Más aún, si la función cumple con la primera propiedad, entonces es llamada **función candidata de Lyapunov**. Si además cumple con la segunda propiedad, entonces es llamada **función de Lyapunov**.

Las relaciones entre las funciones de Lyapunov y la estabilidad de los sistemas se expresan a través de los teoremas del método directo de Lyapunov. Dichos teoremas usualmente tienen versiones locales y globales.

Teorema 2.1 (Método Directo de Lyapunov) Sea $x^* = 0_n$ un punto de equilibrio de (2.2) y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Si existe una función escalar continuamente diferenciable $V : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$, tal que:

- $V(x)$ es definida positiva
- $\dot{V}(x)$ es semi-definida negativa

entonces $x^* = 0_n$ es estable. Si la derivada $\dot{V}(x)$ es definida negativa, i.e., $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D \setminus \{0_n\}$, entonces la estabilidad de $x^* = 0_n$ es asintótica. \square

Teorema 2.2 Asuma que existe una función escalar continuamente diferenciable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $V(x)$ es definida positiva
- $\dot{V}(x)$ es definida negativa
- $V(x)$ es radialmente desacotada, i.e. $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$

entonces el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable. \square

2.2 Sistemas no-autónomos

Considérese el sistema no-autónomo

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.3}$$

donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua por pedazos en t y localmente Lipschitz en x sobre $[0, \infty) \times D$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0_n$. El origen es un punto de equilibrio de (2.3) en $t = 0$ si

$$f(t, 0_n) = 0_n, \quad \forall t \geq 0.$$

Para sistemas no-autónomos, las nociones de estabilidad y estabilidad asintótica deben considerar si existe uniformidad con respecto al instante inicial o no [4, Cap. 3]. Así, en este contexto, las definiciones de base de la teoría de estabilidad de Lyapunov son replanteadas de la siguiente manera:

Definición 2.3 El punto de equilibrio $x = 0_n$ de (2.3) es

- **estable** si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \tag{2.4}$$

- **uniformemente estable** si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, independiente de t_0 , tal que (2.4) se cumple,
- **inestable** si no es estable,
- **asintóticamente estable** si es estable y existe $c = c(t_0) > 0$ tal que $x(t) \rightarrow 0_n$ conforme $t \rightarrow \infty \quad \forall \|x(t_0)\| < c$,
- **uniformemente asintóticamente estable** si es uniformemente estable y existe $c > 0$, independiente de t_0 , tal que $\forall \|x(t_0)\| < c, x(t) \rightarrow 0_n$ conforme $t \rightarrow \infty$, uniformemente en t_0 ; esto es, para cada $\epsilon > 0$, existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon), \forall \|x(t_0)\| < c$$

- **global uniformemente asintóticamente estable** si es uniformemente estable y, para cada par de números positivos ϵ y c , existe $T = T(\epsilon, c) > 0$ tal que

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon, c), \forall \|x(t_0)\| < c$$

Un teorema de estabilidad para sistemas no-autónomos es el siguiente.

Teorema 2.3 [4, Teo. 3.8] Sea $x = 0_n$ un punto de equilibrio de (2.3) y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen $x = 0_n$. Sea $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \tag{2.6}$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ donde W_1, W_2 y W_3 son funciones continuas definidas positivas en D .

Entonces, $x = 0_n$ es uniformemente asintóticamente estable. \square

Corolario 2.1 [4, Corol. 3.3] Supóngase que todas las condiciones de Teorema 2.3 son satisfechas globalmente (i.e. para todo $x \in \mathbb{R}^n$) y $W_1(x)$ es radialmente desacetada. Entonces $x = 0_n$ es global uniformemente asintóticamente estable. \square

Una función $V(t, x)$ que satisface el lado izquierdo de la desigualdad (2.5) es llamada **definida positiva**. Una función $V(t, x)$ que satisface el lado derecho de la desigualdad (2.5) es llamada **menguante** [5, Cap. 2]. Una función $V(t, x)$ es llamada **definida negativa** si $-V(t, x)$ es definida positiva. Si $V(t, x) \geq 0, \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D$, entonces $V(t, x)$ es llamada **semi-definida positiva**, mientras que si $V(t, x) \leq 0, \forall (t, x) \in [0, \infty) \times D$, entonces $V(t, x)$ es llamada **semi-definida negativa**. Una función $V(t, x)$ continuamente diferenciable es llamada **Función de Lyapunov** si es definida positiva, menguante, y su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es semi-definida negativa. Una función de Lyapunov $V(t, x)$ es llamada **radialmente desacetada** si $W_1(x)$ en la desigualdad (2.5) es radialmente desacetada. i.e. $W_1(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$.

2.3 Otros resultados

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y defínanse $B_\rho = \{x : \|x\| < \rho\}$, $B_\sigma = \{y : \|y\| \leq \sigma\}$ e $I_t = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$. El siguiente lema establece condiciones para garantizar que la solución de (2.3) no abandone un dominio dado.

Lema 2.3 [12, Lema 1.4.3] Sea Γ un dominio en \mathbb{R}^n tal que $\bar{\Gamma} \subset B_\rho$. Sea

$$V : I_t \times B_\rho \rightarrow \mathbb{R}$$

una función de clase C^1 y sea a una constante. Si

1. $x_0 \in \Gamma$, $t_0 \in I_t$;
2. $V(t_0, x_0) < a$;
3. $\forall (t, x) \in I_t \times \partial\Gamma$, $V(t, x) \geq a$;
4. $\forall (t, x) \in I_t \times \Gamma$, $\dot{V}(t, x) \leq 0$;

entonces $\forall t \geq t_0$, $x(t; t_0, x_0) \in \Gamma$. □

El siguiente resultado reúne el Teorema 1.4.10 y el Corolario 1.4.11 de [12], los cuales dan condiciones suficientes para garantizar que las soluciones de (2.3) tiendan al origen conforme $t \rightarrow \infty$, uniformemente en t_0 .

Teorema 2.4 [12, Teo. 1.4.10 y Corol. 1.4.11] Sea $\sigma < \rho$ y sea $V : I_t \times B_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Lyapunov de (2.3) sobre $I_t \times \bar{B}_\sigma$ de clase C^1 . Si

1. $V(t, x) \rightarrow 0$ conforme $x \rightarrow 0_n$ uniformemente en $t \in I_t$;
2. $\dot{V}(t, x)$ es definida negativa en $I_t \times B_\sigma$;
3. $(\exists c \in \mathbb{R}) : \forall (t, x) \in I_t \times B_\sigma$, $V(t, x) \leq c$,

entonces todas las soluciones $x(t; t, x_0)$ tal que $x(t; t_0, x_0) \in B_\sigma$ para cada $t \geq t_0$ tienden a 0_n conforme $t \rightarrow \infty$, uniformemente en t_0 y x_0 . □

Por último, presentamos la definición de estabilizabilidad semi-global dada en [18, Def. 3]. Considérese el sistema no-lineal en su forma general

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, u), \\ y = g(z) \end{cases} \quad (2.7)$$

con $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

Definición 2.4 (Estabilizabilidad semi-global) El equilibrio $z = 0_n$ del sistema (2.7) es llamado semi-globalmente estabilizable por retroalimentación dinámica si para cada conjunto compacto $\mathfrak{N}_z \subset \mathbb{R}^n$, vecindad del origen 0_n , existe una retroalimentación dinámica localmente Lipschitz $u = \theta_1(z, \zeta)$, $\dot{\zeta} = \theta_2(z, \zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^q$, y un conjunto compacto $\mathfrak{N}_\zeta \in \mathbb{R}^q$ tal que el equilibrio $(z, \zeta) = (0_n, 0_q)$ es asintóticamente estable, con dominio de atracción conteniendo a $\mathfrak{N}_z \times \mathfrak{N}_\zeta$.

□

Capítulo 3

CONTROL DE MOVIMIENTO CON ENTRADAS ACOTADAS

En este capítulo se presentan los esquemas de control propuestos en esta tesis y se desarrolla el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado para cada uno de ellos. Primero se describe el algoritmo propuesto por Paden y Panja en [10], el cual da una solución global al problema de control de movimiento para Robots Manipuladores sin restricciones de entrada (i.e. considerando entradas no-acotadas). En seguida se presentan dos extensiones de [10] al caso de entradas acotadas: la primera propuesta por Loría y Nijmeijer en [7] y la segunda desarrollada por Santibáñez y Kelly en [13]. Por último, se presentan los esquemas de control desarrollados en esta tesis: el primero generaliza y engloba los algoritmos propuestos en [7] y [13]; los restantes son una extensión al caso de seguimiento (de trayectorias) de los trabajos propuestos en [6], [14] y [21], en los que se dio una solución al problema de regulación.

3.1 Ley de control PD+

Paden y Panja presentan en [10] un esquema de control de movimiento para la estabilización global hacia trayectorias deseadas (suficientemente suaves) de Robots Manipuladores sin restricciones de entrada (i.e. considerando entradas no-acotadas). El esquema

está compuesto por términos de compensación (continua y deseada) de la dinámica más términos de corrección de errores de posición y velocidad.

Bajo la notación adoptada en esta tesis (definida en los capítulos anteriores), el algoritmo de control está dado por

$$\tau = -K_p \bar{q} - K_d \dot{\bar{q}} + D(q) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}) \dot{q}_d + g(q) \quad (3.1)$$

donde K_p y K_d son matrices diagonales definidas positivas, $q_d(t)$ es el vector de trayectorias articulares deseadas y $\bar{q} = q - q_d(t)$. La dinámica en lazo cerrado adopta la forma

$$D(q) \ddot{\bar{q}} + C(q, \dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} + K_p \bar{q} + K_d \dot{\bar{q}} = 0. \quad (3.2)$$

La estabilidad asintótica global de la solución trivial $(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t)) \equiv (0_n, 0_n)$ es demostrada en [10] a través de la siguiente función de Lyapunov

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) \dot{\bar{q}} + \frac{1}{2} \bar{q}^T K_p \bar{q}. \quad (3.3)$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado está dada por

$$\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -\dot{\bar{q}}^T K_d \dot{\bar{q}} \quad (3.4)$$

la cual es semidefinida negativa.

Debido a que el sistema en lazo cerrado, (3.2), es no-autónomo, no se puede hacer uso del teorema de LaSalle [4, Cap. 3] para finalizar la prueba de estabilidad. Así pues, la prueba es concluida aplicando el teorema de Matrosov [10, Apéndice]. Una prueba de estabilidad alternativa de este esquema de control, por medio del método directo de Lyapunov, puede consultarse en [5, Cap. 10].

3.2 Extensiones al caso de entradas acotadas

Una extensión de la ley de control PD+ al caso de Robots Manipuladores con entradas acotadas, que no involucra lecturas de velocidad, fue propuesta por A. Loría y H. Nijmeijer en [7]. El análisis desarrollado en ese trabajo garantiza estabilidad semiglobal

de la solución trivial del sistema en lazo cerrado en el espacio de las variables de error. Posteriormente, V. Santibáñez y R. Kelly propusieron en [13] una extensión al esquema de Loría y Nijmeijer en la que, a través de la consideración de términos de fricción viscosa en el modelo de Robots Manipuladores, logran probar la estabilización asintótica global para trayectorias “suficientemente pequeñas”. Ambos algoritmos son descritos en esta sección.

3.2.1 Un tipo de control SP-SD+ con retroalimentación dinámica

Loría y Nijmeijer reformulan en [7] el problema analizado por Paden y Panja en [10] considerando dos nuevas restricciones. Por un lado, se asume que sólo se dispone de mediciones de las posiciones articulares q . Por otro lado, se considera que las entradas del sistema están restringidas de manera que

$$|\tau_i| \leq T \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.5)$$

para algún valor conocido $T > 0$. La solución propuesta asume que las trayectorias deseadas son (al menos) dos veces diferenciables y acotadas hasta su segunda derivada temporal, i.e. $\max \{ \sup_{t \geq 0} \|q_d(t)\|, \sup_{t \geq 0} \|\dot{q}_d(t)\|, \sup_{t \geq 0} \|\ddot{q}_d(t)\| \} \leq B_d$ para algún valor conocido $B_d > 0$, y se asume que

$$T > B_d(d_M + k_c B_d) + k_g. \quad (3.6)$$

Bajo estas condiciones el algoritmo propuesto está dado por

$$\tau = -K_p \text{Tanh}(\bar{q}) - K_d \text{Tanh}(\vartheta) + D(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q), \quad (3.7)$$

$$\dot{q}_c = -A \text{Tanh}(q_c + B\bar{q}), \quad (3.8)$$

$$\vartheta = q_c + B\bar{q} \quad (3.9)$$

donde $A = \text{diag} \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \text{diag} \{b_1, \dots, b_n\}$, $\text{Tanh}(z) = [\tanh(z_1), \dots, \tanh(z_n)]^T$, $K_p = \text{diag} \{k_{p1}, \dots, k_{pn}\}$ y $K_d = \text{diag} \{k_{d1}, \dots, k_{dn}\}$, donde k_{pi} y k_{di} , $i = 1, \dots, n$, son

valores positivos tales que

$$k_{pM} + k_{dM} < T - B_d(d_M + k_c B_d) - k_g \quad (3.10)$$

con $k_{pM} = \max_i \{k_{pi}\}$ y $k_{dM} = \max_i \{k_{di}\}$.

El sistema en lazo cerrado toma la forma:

$$D(q)\ddot{\bar{q}} + [C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q}_d)]\dot{\bar{q}} + K_p \text{Tanh}(\bar{q}) + K_d \text{Tanh}(\vartheta) = 0 \quad (3.11)$$

$$\dot{\vartheta} = -A \text{Tanh}(\vartheta) + B\dot{\bar{q}} \quad (3.12)$$

La prueba de estabilidad desarrollada en [7] se lleva a cabo utilizando la siguiente función de Lyapunov:

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) \dot{\bar{q}} + \sum_{i=1}^n \left(k_{pi} \ln |\cosh(\bar{q}_i)| + \frac{k_{di}}{b_i} \ln |\cosh(\vartheta_i)| \right) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T [\text{Tanh}(\bar{q}) - \text{Tanh}(\vartheta)] \quad (3.13)$$

donde ϵ es un número positivo que satisface

$$\epsilon \leq \min \left\{ (k_{pm} d_m)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{k_{dm} d_m}{b_M} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (3.14)$$

lo cual asegura que V es definida positiva (los detalles de la prueba pueden ser consultados en [7]).

Dado $\eta > 0$, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado está acotada (aplicando las Propiedades 1.1–1.6) de acuerdo a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \leq & - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\bar{q})\| \\ \|\text{Tanh}(\vartheta)\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \epsilon \frac{k_{p_m}}{d_m} & -\frac{\epsilon}{d_m} [k_{p_M} + k_{d_M}] \\ -\frac{\epsilon}{d_m} [k_{p_M} + k_{d_M}] & \frac{2k_{d_m} a_m}{3b_M} \end{bmatrix}}^{Q_1} \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\bar{q})\| \\ \|\text{Tanh}(\vartheta)\| \end{bmatrix} \\
 & - \epsilon \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} k_{p_m}/2d_M & -k_c B_d/d_m \\ -k_c B_d/d_m & b_m \text{sech}^2(\eta)/3 \end{bmatrix}}^{Q_2} \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_{d_m} a_m}{3b_M} & -\epsilon \left[\frac{k_c B_d}{d_m} + \frac{a_M}{2} \right] \\ -\epsilon \left[\frac{k_c B_d}{d_m} + \frac{a_M}{2} \right] & \frac{\epsilon}{3} b_m \text{sech}^2(\eta) \end{bmatrix}}^{Q_3} \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \\
 & - \overbrace{\left[\frac{k_{d_m} a_m}{3b_M} - \epsilon \frac{k_{d_M}}{d_m} \right]}^{\gamma_1} \|\text{Tanh}(\vartheta)\|^2 - \overbrace{\left[\frac{\epsilon}{3} b_m \text{sech}^2(\eta) - k_c B_d - \frac{2\epsilon \sqrt{n} k_c}{d_m} - \epsilon \right]}^{\gamma_2} \|\dot{\bar{q}}\|^2.
 \end{aligned}$$

para todo $(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \in I_t \times \bar{B}_\eta$, donde $I_t = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, $B_\eta = \{x \in \mathbb{R}^{3n} : \|x\| < \eta\}$ y \bar{B}_η denota la cerradura de B_η . Las matrices Q_1 y Q_3 son definidas positivas y (simultáneamente) el término γ_1 es positivo si

$$\epsilon < \min \left\{ \frac{2k_{p_m} k_{d_m} a_m d_m^2}{3d_M b_M (k_{p_M} + k_{d_M})^2}, \frac{4d_m^2 k_{d_m} a_m b_m \text{sech}^2(\eta)}{9b_M (2k_c B_d + d_m a_M)^2}, \frac{k_{d_m} a_m d_m}{3k_{d_M} b_M} \right\} \quad (3.15)$$

mientras que Q_2 es definida positiva si

$$k_{p_m} b_m \text{sech}^2(\eta) > \frac{6k_c^2 B_d^2 d_M}{d_m^2}, \quad (3.16)$$

y $\gamma_2 > 0$ si

$$b_m > \frac{6}{\text{sech}^2(\eta)} \quad (3.17)$$

y

$$\epsilon > \frac{k_c B_d}{b_m \text{sech}^2(\eta)/6 - 2k_c \sqrt{n}/d_m}. \quad (3.18)$$

Las condiciones (3.14) y (3.15) se satisfacen para cualquier valor positivo en los parámetros de control y ϵ suficientemente pequeño. La condición (3.16) se satisface para b_m suficientemente grande mientras que la condición (3.18) impone una cota inferior para

ϵ , la cual se puede hacer arbitrariamente pequeña incrementando b_m . En [7] se demuestra que para a_m y b_m **suficientemente grandes**, todas las condiciones (3.14)–(3.18) se satisfacen simultáneamente. Esto asegura la existencia de $\epsilon > 0$ tal que \dot{V} es definida negativa y simultáneamente V es definida positiva en $I_t \times \bar{B}_\eta$. La prueba de estabilidad asintótica con dominio de atracción \bar{B}_η está basada en la aplicación del Lema 1.4.3, Teorema 1.4.10 y Corolario 1.4.11 de [12] (Lema 2.3 y el Teorema 2.4 en el Capítulo 2 de esta tesis).

Finalmente, de (3.5)–(3.7), obsérvese que las ganancias de control en K_p y K_d están restringidas a tomar valores suficientemente pequeños, de manera a satisfacer la condición (3.10), con el fin de evitar las saturaciones de las entradas. Además, nótese que el radio de la región de atracción, η , puede ser incrementado indefinidamente si las ganancias en la dinámica auxiliar son incrementadas. Esto explica el carácter semiglobal de la propiedad de estabilidad demostrada (de acuerdo con la Definición 2.4).

3.2.2 Una extensión que logra la estabilización global

En [13], V. Santibáñez y R. Kelly demuestran que, bajo la consideración de fricción viscosa en las articulaciones del robot, es posible lograr la estabilización global en el problema formulado por A.Loría y H. Nijmeijer en [7]. Así, el modelo general de Robots Manipuladores toma la forma (1.6), i.e.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.19)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fricción viscosa con coeficientes constantes, la cual es diagonal y definida positiva, por lo cual

$$f_m \|x\|^2 \leq x^T F x \leq f_M \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.20)$$

donde f_m y f_M son respectivamente el menor y mayor elementos en la diagonal de F .

Se asume que sólo las mediciones de posición son conocidas y que las fuerzas de

entrada al sistema están restringidas por

$$|\tau_i| \leq T \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.21)$$

para algún valor $T > 0$. La solución propuesta asume que las trayectorias deseadas son (al menos) dos veces diferenciables y acotadas hasta su segunda derivada temporal, i.e. $\max\{\sup_{t \geq 0} \|q_d(t)\|, \sup_{t \geq 0} \|\dot{q}_d(t)\|, \sup_{t \geq 0} \|\ddot{q}_d(t)\|\} \leq B_d$ para algún valor conocido $B_d > 0$. Además se asume que

$$T > B_d(d_M + k_c B_d + f_M) + k_g. \quad (3.22)$$

Bajo estas condiciones, el algoritmo propuesto está dado por

$$\tau = -K_p \text{Tanh}(\bar{q}) - K_d \text{Tanh}(\vartheta) + D(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + F\dot{q}_d + g(q), \quad (3.23)$$

$$\dot{q}_c = -A \text{Tanh}(q_c + B\bar{q}), \quad (3.24)$$

$$\vartheta = q_c + B\bar{q} \quad (3.25)$$

donde $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$, con $a_i, b_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $\text{Tanh}(z) = [\tanh(z_1), \dots, \tanh(z_n)]^T$, $K_p = \text{diag}\{k_{p1}, \dots, k_{pn}\}$ y $K_d = \text{diag}\{k_{d1}, \dots, k_{dn}\}$, donde k_{pi} y k_{di} , $i = 1, \dots, n$, son valores positivos tales que

$$k_{pM} + k_{dM} < T - B_d(d_M + k_c B_d + f_M) - k_g \quad (3.26)$$

con $k_{pM} = \max_{\forall i} \{k_{pi}\}$ y $k_{dM} = \max_{\forall i} \{k_{di}\}$.

El sistema en lazo cerrado toma la forma

$$D(q)\ddot{\bar{q}} + [C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q}_d)]\dot{\bar{q}} + F\dot{\bar{q}} + K_p \text{Tanh}(\bar{q}) + K_d \text{Tanh}(\vartheta) = 0$$

$$\dot{\vartheta} = -A \text{Tanh}(\vartheta) + B\dot{\bar{q}}$$

La prueba de estabilidad desarrollada en [13] se lleva a cabo utilizando la misma función de Lyapunov utilizada en [7] (función (3.13)), la cual es definida positiva bajo la satisfacción de la desigualdad (3.14).

La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está acotada (aplicando las Propiedades 1.1–1.6) de acuerdo a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \leq & - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\bar{q})\| \\ \|\text{Tanh}(\vartheta)\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \epsilon \frac{k_{pM}}{d_M} & -\frac{\epsilon}{d_m} [k_{pM} + k_{dM}] \\ -\frac{\epsilon}{d_m} [k_{pM} + k_{dM}] & \frac{2k_{dM}a_m}{3b_M} \end{bmatrix}}^{\bar{Q}_1} \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\bar{q})\| \\ \|\text{Tanh}(\vartheta)\| \end{bmatrix} \\
 & - \epsilon \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} k_{pM}/2d_M & -\frac{2k_c B_d + f_M}{2d_m} \\ -\frac{2k_c B_d + f_M}{2d_m} & \frac{f_m}{3\epsilon} \end{bmatrix}}^{\bar{Q}_2} \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_{dM}a_m}{3b_M} & -\rho \\ -\rho & \frac{f_m}{3} \end{bmatrix}}^{\bar{Q}_3} \begin{bmatrix} \|\text{Tanh}(\vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \\
 & - \overbrace{\left[\frac{k_{dM}a_m}{3b_M} - \epsilon \frac{k_{dM}}{d_m} \right]}^{\bar{\gamma}_1} \|\text{Tanh}(\vartheta)\|^2 - \overbrace{\left[\frac{f_m}{3} - k_c B_d - \frac{2\epsilon\sqrt{n}k_c}{d_m} - \epsilon \right]}^{\bar{\gamma}_2} \|\dot{\bar{q}}\|^2.
 \end{aligned}$$

para todo $(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \in I_t \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $I_t = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, donde

$$\rho = \epsilon \left[\frac{2k_c B_d + f_M}{2d_m} + \frac{a_M}{2} \right].$$

Las matrices \bar{Q}_1 y \bar{Q}_3 son definidas positivas y (simultáneamente) el término $\bar{\gamma}_1$ es positivo si

$$\epsilon < \min \left\{ \frac{2k_{pM}k_{dM}a_md_m^2}{3d_M b_M (k_{pM} + k_{dM})^2}, \frac{4d_m^2 k_{dM} a_m f_m}{9b_M (2k_c B_d + f_M + d_m a_m)^2}, \frac{k_{dM} a_m d_m}{3k_{dM} b_M} \right\}, \quad (3.27)$$

\bar{Q}_2 es definida positiva si

$$\epsilon < \frac{4d_m^2 k_{pM} f_m}{6d_M (2k_c B_d + f_M)^2} \quad (3.28)$$

y $\bar{\gamma}_2 > 0$ si

$$\epsilon < \frac{f_m - 3k_c B_d}{\frac{6k_c}{d_m} + 3}. \quad (3.29)$$

Así, para toda trayectoria deseada tal que $B_d < \frac{f_m}{3k_c}$, existe $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño, tal que las condiciones (3.14),(3.27)–(3.29) se satisfacen y por lo tanto \dot{V} es definida negativa en $I_t \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De acuerdo con las condiciones del Teorema

2.3 y el Corolario 2.1 (Capítulo 2) concluimos entonces que la solución trivial $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \equiv (0_n, 0_n, 0_n)$ es global uniformemente asintóticamente estable.

Finalmente, de (3.21)–(3.23), obsérvese que las ganancias de control en K_p y K_d están restringidas a tomar valores suficientemente pequeños, de manera a satisfacer la condición (3.26), con el fin de evitar la saturación de las entradas.

3.3 Contribución de la tesis

En esta sección se presentan los algoritmos de control desarrollados en este trabajo de tesis. El primero, presentado en la Subsección 3.3.1, engloba y generaliza los esquemas propuestos en [7] y [13]. Mas aún, con respecto a éstos, se logran las siguientes mejoras:

- Los parámetros de control (en K_p y K_d) pueden tomar cualquier valor positivo.
- Se da al usuario la libertad de escoger funciones de saturación dentro de un conjunto.

Tal conjunto de funciones de saturación se caracteriza de la siguiente manera:

Definición 3.1 Dada una constante positiva M , una función $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \varsigma \mapsto \sigma(\varsigma)$ es llamada **función de saturación generalizada** con cota M si es localmente Lipschitz, no-decreciente y satisface las siguientes propiedades:

1. $\varsigma\sigma(\varsigma) > 0 \quad \forall \varsigma \neq 0$
2. $|\sigma(\varsigma)| \leq M \quad \forall \varsigma \in \mathbb{R}$

□

Una función continuamente diferenciable y estrictamente creciente que cumple con la Definición 3.1 tiene las propiedades que se enuncian a continuación.

Lema 3.1 Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \varsigma \mapsto \sigma(\varsigma)$ una función de saturación generalizada continuamente diferenciable y estrictamente creciente con cota M . Sea k una constante positiva. Entonces,

1. $y[\sigma(x + y) - \sigma(x)] > 0, \quad \forall y \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $\lim_{|\varsigma| \rightarrow \infty} \sigma'(\varsigma) = 0.$
3. $\sigma'(\varsigma)$ es positiva y acotada en \mathbb{R} , i.e. $\exists \quad 0 < \sigma'_M < \infty$ tal que $0 < \sigma'(\varsigma) \leq \sigma'_M, \forall \varsigma \in \mathbb{R}.$
4. $\frac{\sigma^2(k\varsigma)}{2k\sigma'_M} \leq \int_0^\varsigma \sigma(kr)dr \leq \frac{k\sigma'_M\varsigma^2}{2}, \quad \forall \varsigma \in \mathbb{R}.$
5. $\int_0^\varsigma \sigma(kr)dr > 0, \quad \forall \varsigma \neq 0.$
6. $\int_0^\varsigma \sigma(kr)dr \rightarrow \infty$ cuando $|\varsigma| \rightarrow \infty.$ □

Demostración

1. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Puesto que σ es estrictamente creciente, tenemos que

$$\sigma(z) > \sigma(x) \Leftrightarrow z > x \quad \text{y} \quad \sigma(z) < \sigma(x) \Leftrightarrow z < x$$

Sea $z = y + x$. Entonces

$$\sigma(y + x) - \sigma(x) > 0 \Leftrightarrow y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y

$$\sigma(y + x) - \sigma(x) < 0 \Leftrightarrow y < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

de donde se sigue que $y[\sigma(y + x) - \sigma(x)] > 0, \forall y \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

2. Puesto que σ es una función continua, con el signo de su argumento (de acuerdo a la Propiedad 1 de la Definición 3.1), estrictamente creciente y acotada por M ,

se tiene que existe una constante positiva $c \leq M$ tal que $\lim_{|\varsigma| \rightarrow \infty} |\sigma(\varsigma)| = c$. De esto se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{|\varsigma| \rightarrow \infty} \sigma'(\varsigma) &= \lim_{|\varsigma| \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(\varsigma + h) - \sigma(\varsigma)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{|\varsigma| \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\varsigma + h) - \sigma(\varsigma)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot \text{sign}(\varsigma) - c \cdot \text{sign}(\varsigma)}{h} = 0 \end{aligned}$$

3. Puesto que σ es una función continuamente diferenciable y estrictamente creciente, se tiene que $\sigma'(\varsigma)$ existe y es continua en \mathbb{R} , y que $\sigma'(\varsigma) > 0$, $\forall \varsigma \in \mathbb{R}$. Por otro lado, por su continuidad, $\sigma'(\varsigma)$ es acotada en cualquier intervalo compacto en \mathbb{R} . Así, su acotamiento será uniforme si $\lim_{|\varsigma| \rightarrow \infty} \sigma'(\varsigma) < \infty$. Puesto que $\lim_{|\varsigma| \rightarrow \infty} \sigma'(\varsigma) = 0$, se concluye acotamiento uniforme de $\sigma'(\varsigma)$, i.e. $\exists \sigma'_M > 0$ tal que $\sigma'(\varsigma) \leq \sigma'_M$, $\forall \varsigma \in \mathbb{R}$.
4. Puesto que $\sigma(k\varsigma)$ es una función continuamente diferenciable con derivada acotada por $k\sigma'_M$, se tiene que $\sigma(k\varsigma)$ satisface la condición de Lipschitz ([4, Cap.2]) con constante de Lipschitz $k\sigma'_M$ (de acuerdo al Lema 2.1). Así, $\sigma(k\varsigma)$ satisface la siguiente desigualdad $\forall \varsigma \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\sigma'(k\varsigma)}{k\sigma'_M} |\sigma(k\varsigma)| \leq |\sigma(k\varsigma)| \leq k\sigma'_M |\varsigma|$$

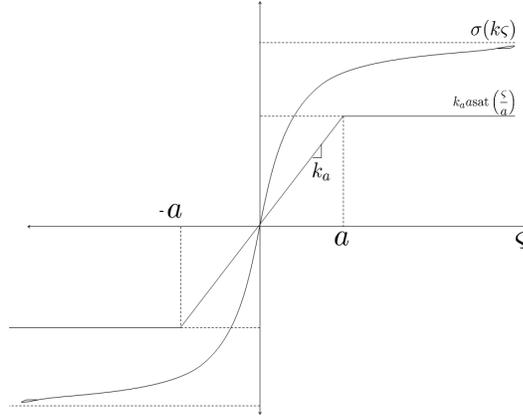
de donde, considerando que σ tiene el signo de su argumento, se tiene que

$$\int_0^\varsigma \frac{\sigma'(kr)}{k\sigma'_M} \sigma(kr) dr = \int_0^\varsigma \frac{\sigma(kr)}{k\sigma'_M} d\sigma(kr) \leq \int_0^\varsigma \sigma(kr) dr \leq \int_0^\varsigma k\sigma'_M r dr$$

de donde se obtiene

$$\frac{\sigma^2(k\varsigma)}{2k\sigma'_M} \leq \int_0^\varsigma \sigma(kr) dr \leq \frac{k\sigma'_M \varsigma^2}{2}, \quad \forall \varsigma \in \mathbb{R}.$$

5. Puesto que $\sigma(k\varsigma) < 0 \forall \varsigma < 0$ y $\sigma(k\varsigma) > 0 \forall \varsigma > 0$, la función $\int_0^\varsigma \sigma(kr) dr$ es estrictamente decreciente a la izquierda de 0 y estrictamente creciente a la derecha de 0. Consecuentemente, tiene un mínimo global en 0 y por lo tanto es positiva para cualquier otro valor de su argumento, i.e. $\int_0^\varsigma \sigma(kr) dr > 0 \quad \forall \varsigma \neq 0$.


 Figura 3.1: $|k_a \text{asat}(\frac{\xi}{a})| \leq |\sigma(k\xi)|$.

6. Puesto que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \sigma'(k\xi) = 0$, la continuidad de $\sigma'(k\xi)$ es uniforme en \mathbb{R} . Como además $|\sigma(k\xi)| \neq 0$ cuando $|\xi| \rightarrow \infty$, entonces, por el Lema de Barbalat (Lema 2.2 en el Capítulo 2 de esta tesis), se tiene que $\int_0^\xi \sigma(kr)dr \rightarrow \infty$ cuando $|\xi| \rightarrow \infty$.

Una manera alternativa, aunque más elaborada, de demostrar este punto es la siguiente. Puesto que σ es una función continuamente diferenciable y estrictamente creciente, se tiene que $\sigma'(k\xi)$ es continua, positiva y acotada en $\mathbb{A} = [-a, a]$, para cualquier $a > 0$, de manera que $0 < \inf_{r \in \mathbb{A}} \sigma'(kr) \leq \sigma'(k\xi) \leq \sup_{r \in \mathbb{A}} \sigma'(kr) \leq k\sigma'_M \forall \xi \in [-a, a]$. Defínase una constante positiva $k_a \leq \inf_{r \in \mathbb{A}} \sigma'(kr)$. Entonces se tiene que

$$\left| k_a \text{asat}\left(\frac{\xi}{a}\right) \right| \leq |\sigma(k\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}; \quad (3.30)$$

véase la Figura 3.1. De (3.30) se sigue que

$$S_a(\xi) = \int_0^\xi k_a \text{asat}\left(\frac{r}{a}\right) dr \leq \int_0^\xi \sigma(kr)dr, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

con

$$S_a(\xi) \triangleq \begin{cases} \frac{k_a}{2} \xi^2, & \forall |\xi| \leq a \\ k_a a \left(|\xi| - \frac{a}{2} \right), & \forall |\xi| > a \end{cases}$$

Así pues, de estas expresiones se observa por un lado que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} S_a(\xi) \leq \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_0^\xi \sigma(kr)dr$, y por otro lado que $S_a(\xi) \rightarrow \infty$ cuando $|\xi| \rightarrow \infty$, de donde

se concluye que $\int_0^\varsigma \sigma(kr)dr \rightarrow \infty$ cuando $|\varsigma| \rightarrow \infty$.

△

3.3.1 Control SP-SD_c+ generalizado con retroalimentación dinámica

Considérese la dinámica general de Robots Manipuladores dada por (1.6), i.e.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.31)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fricción viscosa con coeficientes constantes, considerada diagonal semidefinida positiva, por lo que satisface

$$f_m \|x\|^2 \leq x^T F x \leq f_M \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.32)$$

con $f_M > f_m \geq 0$.

Supóngase que sólo las mediciones de posición son conocidas y que las fuerzas de entrada al sistema están restringidas por

$$|\tau_i| \leq T \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.33)$$

para algún $T > 0$. El algoritmo propuesto asume que las trayectorias deseadas son (al menos) dos veces diferenciables y acotadas hasta su segunda derivada temporal, i.e.

$$\max \left\{ \sup_{t \geq 0} \|q_d(t)\|, \sup_{t \geq 0} \|\dot{q}_d(t)\|, \sup_{t \geq 0} \|\ddot{q}_d(t)\| \right\} \leq B_d. \quad (3.34)$$

Proposición 3.1 *Considérese el sistema (3.31) bajo las restricciones de entrada (3.33) y asúmase que*

$$T > B_d(d_M + k_c B_d + f_M) + k_g. \quad (3.35)$$

Considérese la ley de control

$$\tau = -S_p(K_p \bar{q}) - S_d(K_d \vartheta) + D(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + F\dot{q}_d + g(q), \quad (3.36)$$

$$\dot{q}_c = -AK_d^{-1}S_d(K_d(q_c + B\bar{q})), \quad (3.37)$$

$$\vartheta = q_c + B\bar{q} \quad (3.38)$$

donde A, B, K_p y K_d son matrices diagonales definidas positivas cuyos elementos son a_i, b_i, k_{p_i} y k_{d_i} , $i = 1, \dots, n$, respectivamente, $\bar{q} = q - q_d(t)$ y $S(Kq) = [\sigma_1(k_1 q_1), \dots, \sigma_n(k_n q_n)]^T$ donde $\sigma_i(\cdot)$ son **funciones de saturación generalizadas continuamente diferenciables y estrictamente crecientes** con cotas M_i , tales que

$$M_{pM} + M_{dM} < T - B_d(d_M + k_c B_d + f_M) - k_g$$

donde $M_{pM} = \max_{i=1, \dots, n} \{M_{p_i}\}$ y $M_{dM} = \max_{i=1, \dots, n} \{M_{d_i}\}$.

La solución trivial, $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta)(t) \equiv (0_n, 0_n, 0_n)$, del sistema en lazo cerrado (3.31), (3.36)–(3.38) es:

1. GLOBAL ASINTÓTICAMENTE ESTABLE: si, con $f_m > 0$, (3.34) es satisfecha con $B_d < f_m/2k_c$, y a_i, b_i, k_{p_i} y k_{d_i} toman (cada uno) cualquier valor positivo.
2. SEMI-GLOBAL ASINTÓTICAMENTE ESTABLE: si, con $f_M \geq 0$, (3.34) es satisfecha con $B_d \geq f_m/2k_c$, $k_{p_i}, k_{d_i} > 0$, y a_m, b_m toman valores positivos suficientemente grandes, donde $a_m = \min_{i=1, \dots, n} \{a_i\}$ y $b_m = \min_{i=1, \dots, n} \{b_i\}$.

□

Demostración. Usando la Propiedad 1.3, el sistema en lazo cerrado (3.31), (3.36)–(3.38) puede ser reescrito como

$$D(q)\ddot{\bar{q}} + [C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q}_d)]\dot{\bar{q}} + F\dot{\bar{q}} + S_p(K_p \bar{q}) + S_d(K_d \vartheta) = 0, \quad (3.39)$$

$$\dot{\vartheta} = -AK_d^{-1}S_d(K_d \vartheta) + B\dot{\bar{q}}. \quad (3.40)$$

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned} V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) &= \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) \dot{\bar{q}} + \int_{0_n}^{\bar{q}} S_p^T(K_p r) dr + \int_{0_n}^{\vartheta} S_d^T(K_d r) B^{-1} dr \\ &+ \epsilon \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) [S_p(K_p \bar{q}) - S_d(K_d \vartheta)], \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde

$$\begin{aligned}\int_{0_n}^{\bar{q}} S_p^T(K_p r) dr &= \sum_{i=1}^n \int_0^{\bar{q}_i} \sigma_{p_i}(k_{p_i} r_i) dr_i \\ \int_{0_n}^{\vartheta} S_d^T(K_d r) B^{-1} dr &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} \int_0^{\vartheta_i} \sigma_{d_i}(k_{d_i} r_i) dr_i\end{aligned}$$

y ϵ es un escalar a ser definido.

Usando la Propiedad 4 del Lema 3.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{0_n}^{\bar{q}} S_p^T(K_p r) dr + \int_{0_n}^{\vartheta} S_d^T(K_d r) B^{-1} dr &\geq \frac{1}{2} S_p^T(K_p \bar{q}) K_p^{-1} \Sigma_p^{-1} S_p(K_p \bar{q}) \\ &+ \frac{1}{2} S_d^T(K_d \vartheta) K_d^{-1} B^{-1} \Sigma_d^{-1} S_d(K_d \vartheta)\end{aligned}$$

donde $\Sigma_p = \text{diag}[\sigma'_{p_{S_1}}, \dots, \sigma'_{p_{S_n}}]$, con $\sigma'_{p_{S_i}} = \sup_{\forall \varsigma} \sigma'_{p_i}(\varsigma)$, $i = 1, \dots, n$, y $\Sigma_d = \text{diag}[\sigma'_{d_{S_1}}, \dots, \sigma'_{d_{S_n}}]$, con $\sigma'_{d_{S_i}} = \sup_{\forall \varsigma} \sigma'_{d_i}(\varsigma)$, $i = 1, \dots, n$.

Entonces V está acotada por abajo de acuerdo a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) &\geq \frac{1}{4} \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) \dot{\bar{q}} + \frac{1}{4} S_p^T(K_p \bar{q}) K_p^{-1} \Sigma_p^{-1} S_p(K_p \bar{q}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) S_p(K_p \bar{q}) \\ &+ \frac{1}{4} \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) \dot{\bar{q}} + \frac{1}{4} S_d^T(K_d \vartheta) K_d^{-1} B^{-1} \Sigma_d^{-1} S_d(K_d \vartheta) - \epsilon \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) S_d(K_d \vartheta) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{\bar{q}_i} \sigma_{p_i}(k_{p_i} r_i) dr_i + \frac{1}{b_i} \int_0^{\vartheta_i} \sigma_{d_i}(k_{d_i} r_i) dr_i \right) \\ &\geq W_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + W_2(\dot{\bar{q}}, \vartheta) + W_3(\bar{q}, \vartheta)\end{aligned}$$

donde, bajo la consideración de la Propiedad 1.1,

$$\begin{aligned}W_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= \frac{d_m}{4} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{1}{4k_{p_M} \sigma'_{p_M}} \|S_p(K_p \bar{q})\|^2 - \epsilon d_M \|\dot{\bar{q}}\| \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4k_{p_M} \sigma'_{p_M}} & -2\epsilon d_M \\ -2\epsilon d_M & d_m \end{bmatrix}}^{Z_1} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}, \\ W_2(\dot{\bar{q}}, \vartheta) &= \frac{d_m}{4} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{1}{4k_{d_M} b_M \sigma'_{d_M}} \|S_d(K_d \vartheta)\|^2 - \epsilon d_M \|\dot{\bar{q}}\| \|S_d(K_d \vartheta)\| \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \|S_d(K_d \vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4k_{d_M} b_M \sigma'_{d_M}} & -2\epsilon d_M \\ -2\epsilon d_M & d_m \end{bmatrix}}^{Z_2} \begin{bmatrix} \|S_d(K_d \vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}\end{aligned}$$

y

$$W_3(\bar{q}, \vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{\bar{q}_i} \sigma_{p_i}(k_{p_i} r_i) dr_i + \frac{1}{b_i} \int_0^{\vartheta_i} \sigma_{d_i}(k_{d_i} r_i) dr_i \right)$$

con $\sigma'_{pM} = \max_{i=1, \dots, n} \{ \sigma'_{pSi} \}$ y $\sigma'_{dM} = \max_{i=1, \dots, n} \{ \sigma'_{dSi} \}$.

Obsérvese que las matrices Z_1 y Z_2 son definidas positivas si y sólo si

$$\epsilon < \min \left\{ \frac{1}{2d_M} \left(\frac{d_m}{k_{pM} \sigma'_{pM}} \right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2d_M} \left(\frac{d_m}{k_{dM} \sigma'_{dM} b_M} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.42)$$

Entonces, bajo la condición (3.42), $W_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ y $W_2(\dot{\bar{q}}, \vartheta)$ son globalmente definidas positivas en sus argumentos y radialmente desacotadas. Por otro lado, de las Propiedades 5 y 6 del Lema 3.1, nótese que $W_3(\bar{q}, \vartheta)$ también es globalmente definida positiva en sus argumentos y radialmente desacotada. Consecuentemente, $(W_1 + W_2 + W_3)(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta)$ es globalmente definida positiva, por lo que se concluye que V es una función globalmente definida positiva.

Se demuestra ahora que V es menguante. Utilizando la Propiedad 4 del Lema 3.1 y la Propiedad 1.1, V está acotada por arriba de acuerdo a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) &\leq \frac{d_M}{4} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{k_{pM} \sigma'_{pM}}{2} \|\bar{q}\|^2 + \epsilon d_M k_{pM} \sigma'_{pM} \|\bar{q}\| \|\dot{\bar{q}}\| \\ &\quad + \frac{d_M}{4} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{k_{dM} \sigma'_{dM}}{2b_m} \|\vartheta\|^2 + \epsilon d_M k_{dM} \sigma'_{dM} \|\vartheta\| \|\dot{\bar{q}}\| \end{aligned}$$

donde se ha considerado $\|S_p(K_p \bar{q})\| \leq k_{pM} \sigma'_{pM} \|\bar{q}\|$ y $\|S_d(K_d \vartheta)\| \leq k_{dM} \sigma'_{dM} \|\vartheta\|$ de acuerdo al Lema 2.1. La expresión anterior puede ser escrita en forma matricial como

$$\begin{aligned} V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) &\leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} k_{pM} \sigma'_{pM} & \epsilon d_M \sigma'_{pM} k_{pM} \\ \epsilon d_M \sigma'_{pM} k_{pM} & d_M/2 \end{bmatrix}}^{H_1} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\vartheta\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} k_{dM} \sigma'_{dM}/b_m & \epsilon d_M \sigma'_{dM} k_{dM} \\ \epsilon d_M \sigma'_{dM} k_{dM} & d_M/2 \end{bmatrix}}^{H_2} \begin{bmatrix} \|\vartheta\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Las matrices H_1 y H_2 son definidas positivas si y sólo si

$$\epsilon \leq \min \left\{ \left(\frac{d_M}{2d_M^2 k_{pM} \sigma'_{pM}} \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{d_M}{2b_m d_M^2 k_{dM} \sigma'_{dM}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.44)$$

No es difícil verificar que las condiciones (3.42) implican las condiciones (3.44), por lo tanto, bajo las condiciones (3.42) se tiene que V es globalmente definida positiva, menguante y radialmente desacotada.

La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) = & - \dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t)) \dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T F \dot{\bar{q}} - S_d^T(K_d \vartheta) B^{-1} A K_d^{-1} S_d(K_d \vartheta) \\
 & - \epsilon S_p^T(K_p \bar{q}) F \dot{\bar{q}} - \epsilon S_p^T(K_p \bar{q}) S_p(K_p \bar{q}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{\bar{q}} + \dot{q}_d(t)) S_p(K_p \bar{q}) \\
 & + \epsilon \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) K_p S_p'(K_p \bar{q}) \dot{\bar{q}} + \epsilon S_d^T(K_d \vartheta) C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t)) \dot{\bar{q}} \\
 & + \epsilon S_d^T(K_d \vartheta) S_d(K_d \vartheta) - \epsilon \dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{\bar{q}} + \dot{q}_d(t)) S_d(K_d \vartheta) + \epsilon S_d^T(K_d \vartheta) F \dot{\bar{q}} \\
 & - \epsilon \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) K_d S_d'(K_d \vartheta) B \dot{\bar{q}} + \epsilon \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t)) S_d'(K_d \vartheta) A S_d(K_d \vartheta) \\
 & - \epsilon S_p^T(K_p \bar{q}) C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t)) \dot{\bar{q}}
 \end{aligned}$$

donde $S'(Kz) = \text{diag}[\sigma'_1(k_1 z_1), \dots, \sigma'_n(k_n z_n)]$, con $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\}$ y $z \in \mathbb{R}^n$.

1. RESULTADO GLOBAL

Aplicando las Propiedades 1.1–1.6 tenemos que \dot{V} está acotada por arriba de acuerdo a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \leq & k_c B_d \|\dot{\bar{q}}\|^2 - f_m \|\dot{\bar{q}}\|^2 + 2\epsilon k_c B_d \|\dot{\bar{q}}\| (\|S_p(K_p \bar{q})\| + \|S_d(K_d \vartheta)\|) \\
 & + \epsilon f_M \|S_p(K_p \bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\| - \epsilon \|S_p(K_p \bar{q})\|^2 + \epsilon k_c \|\dot{\bar{q}}\|^2 (\|S_p(K_p \bar{q})\| + \|S_d(K_d \vartheta)\|) \\
 & + \epsilon d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \epsilon f_M \|S_d(K_d \vartheta)\| \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon \|S_d(K_d \vartheta)\|^2 \\
 & + \epsilon d_M a_M \sigma'_{d_M} \|\dot{\bar{q}}\| \|S_d(K_d \vartheta)\| - \frac{a_m}{b_M k_{d_M}} \|S_d(K_d \vartheta)\|^2
 \end{aligned}$$

La expresión anterior puede ser escrita en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \leq & - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|S_d(K_d \vartheta)\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \frac{a_m}{b_M k_{d_M}} - 2\epsilon \end{bmatrix}}^{Q_1^*} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|S_d(K_d \vartheta)\| \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{2} & -\epsilon \left(k_c B_d + \frac{f_M}{2} \right) \\ -\epsilon \left(k_c B_d + \frac{f_M}{2} \right) & \kappa \end{bmatrix}}^{Q_2^*} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} \|S_d(K_d \vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{a_m}{2b_M k_{d_M}} & -\zeta \\ -\zeta & \frac{f_m}{2} \end{bmatrix}}^{Q_3^*} \begin{bmatrix} \|S_d(K_d \vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{f_m}{2} - \epsilon(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) - k_c B_d, \\
 \zeta &= \epsilon \left(k_c B_d + \frac{f_M + d_M a_M \sigma'_{d_M}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$y \nu = \sqrt{\sum_{i=1}^n M_{p_i}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n M_{d_i}^2} \geq \|S_p(K_p \bar{q})\| + \|S_d(K_d \vartheta)\|.$$

Las matrices Q_1^* y Q_3^* son definidas positivas si y sólo si

$$\epsilon < \min \left\{ \frac{a_m}{2b_M k_{d_M}}, \frac{(a_m f_m)^{\frac{1}{2}}}{(b_M k_{d_M})^{\frac{1}{2}} (2k_c B_d + f_M + d_M a_M \sigma'_{d_M})^2} \right\}, \quad (3.45)$$

la matriz Q_2^* es definida positiva si y sólo si

$$\epsilon < \frac{f_m - 2k_c B_d}{2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) + (2k_c B_d + f_M)^2}, \quad (3.46)$$

con

$$B_d < \frac{f_m}{2k_c} \quad (3.47)$$

Así pues, para trayectorias deseadas tales que $B_d < f_m/2k_c$, existe $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeño) tal que las condiciones (3.42),(3.45)–(3.46) se satisfacen y por lo tanto \dot{V} es globalmente definida negativa.

De acuerdo con las condiciones del Teorema 2.3 y el Corolario 2.1 (Capítulo 2) concluimos entonces que la solución trivial $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \equiv (0_n, 0_n, 0_n)$ es global uniformemente

asintóticamente estable.

2. RESULTADO SEMI-GLOBAL

Defínase $B_\eta = \{x \in \mathbb{R}^{3n} : \|x\| < \eta\}$. Para todo $(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \in I_t \times \bar{B}_\eta$, $I_t = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, \dot{V} está acotada por arriba (aplicando las Propiedades 1.1–1.6) de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \leq & k_c B_d \|\dot{\bar{q}}\|^2 - f_m \|\dot{\bar{q}}\|^2 + 2\epsilon k_c B_d \|\dot{\bar{q}}\| (\|S_p(K_p \bar{q})\| + \|S_d(K_d \vartheta)\|) \\ & + \epsilon f_M \|S_p(K_p \bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\| - \epsilon \|S_p(K_p \bar{q})\|^2 + \epsilon k_c \|\dot{\bar{q}}\|^2 (\|S_p(K_p \bar{q})\| + \|S_d(K_d \vartheta)\|) \\ & + \epsilon d_M k_{pM} \sigma'_{pM} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \epsilon f_M \|S_d(K_d \vartheta)\| \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon \|S_d(K_d \vartheta)\|^2 - \frac{a_m}{b_M k_{dM}} \|S_d(K_d \vartheta)\|^2 \\ & + \epsilon d_M a_M \sigma'_{dM} \|\dot{\bar{q}}\| \|S_d(K_d \vartheta)\| - \epsilon b_m k_{dM} d_m \sigma'_{dM}(\eta) \|\dot{\bar{q}}\|^2. \end{aligned}$$

donde $\sigma_{dm}(\eta) = \min_{i=1, \dots, n} \{\inf_{|\vartheta_i| \leq \eta} \sigma'_{di}(\eta)\}$. La expresión anterior puede ser reescrita en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \leq & -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|S_d(K_d \vartheta)\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \frac{a_m}{b_M k_{dM}} - 2\epsilon \end{bmatrix}}^{\hat{Q}_1} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|S_d(K_d \vartheta)\| \end{bmatrix} \\ - & \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{2} & -\epsilon \left(k_c B_d + \frac{f_M}{2}\right) \\ -\epsilon \left(k_c B_d + \frac{f_M}{2}\right) & \mu \end{bmatrix}}^{\hat{Q}_2} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \\ - & \begin{bmatrix} \|S_d(K_d \vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{a_m}{2b_M k_{dM}} & -\zeta \\ -\zeta & \frac{\epsilon b_m k_{dM} d_m \sigma'_{dM}(\eta)}{2} \end{bmatrix}}^{\hat{Q}_3} \begin{bmatrix} \|S_d(K_d \vartheta)\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu &= f_m/2 + \epsilon b_m k_{dM} d_m \sigma'_{dM}(\eta)/2 - \epsilon(k_c \nu + d_M k_{pM} \sigma'_{pM}) - k_c B_d, \\ \zeta &= \epsilon \left(k_c B_d + \frac{f_M + d_M a_M \sigma'_{dM}}{2} \right) \end{aligned}$$

y al igual que el caso anterior $\nu = \sqrt{\sum_{i=1}^n M_{p_i}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n M_{d_i}^2} \geq \|S_p(K_p \bar{q})\| + \|S_d(K_d \vartheta)\|$.

Las matrices \widehat{Q}_1 y \widehat{Q}_3 son definidas positivas si y sólo si

$$\epsilon < \min \left\{ \frac{a_m}{2b_M k_{d_M}}, \frac{a_m b_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta)}{b_M k_{d_M} (2k_c B_d + f_M + d_M a_M \sigma'_{d_M})^2} \right\}, \quad (3.48)$$

donde a_M, b_M, d_M y k_{d_M} denotan los valores propios máximos de las matrices A, B, D y K_d respectivamente. La matriz \widehat{Q}_2 es definida positiva si y sólo si

$$\epsilon > \frac{2k_c B_d - f_m}{b_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) - (2k_c B_d + f_M)^2}, \quad (3.49)$$

con

$$b_m > \frac{2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) + (2k_c B_d + f_M)^2}{k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta)} \quad (3.50)$$

y

$$B_d > \frac{f_m}{2k_c}, \quad \text{con } f_m \geq 0. \quad (3.51)$$

Nótese que la condición (3.49) representa una cota inferior para ϵ mientras que las condiciones (3.42) y (3.48) representan cotas superiores. Con a_m y b_m suficientemente grandes, existe una intersección entre estas desigualdades asegurando la existencia de un ϵ que cumple con (3.42), (3.48) y (3.49) simultáneamente. Esta parte de la prueba se desarrolla en el apéndice A.

Así pues, con a_m y b_m suficientemente grandes, de manera a satisfacer (3.42), (3.48)–(3.50) simultáneamente, y bajo la satisfacción de (3.51), \dot{V} es definida negativa en $I_t \times B_\eta$. De acuerdo con las condiciones del Teorema 2.3 y el Corolario 2.1, concluimos entonces que la solución trivial, $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta)(t) \equiv (0_n, 0_n, 0_n)$, es uniformemente asintóticamente estable.

Hasta este punto del análisis no hemos puesto ninguna restricción sobre η , i.e. podemos hacer η tan grande como queramos. Obsérvese además que el tiempo interviene en V a través de $q_d(t)$ la cual se asume acotada. Por lo tanto, la función V , en vista de su continuidad, es uniformemente acotada en $I_t \times B_\eta$. Así pues, del Lema 2.3, se observa que, dado $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta)(0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, definiendo η tal que

$$\inf_{(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \in I_t \times \partial B_\eta} V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) > \sup_{t \in I_t} V(t, \bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0), \vartheta(0)) \quad (3.52)$$

se asegura que $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta)(t) \in B_\eta \forall t \geq 0$.

Obsérvese de (3.43) que $V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \rightarrow 0$ cuando $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \rightarrow (0_n, 0_n, 0_n)$ uniformemente en $t \in I_t$. Entonces, puesto que \dot{V} es definida negativa en $I_t \times B_\eta$, $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta)(t) \in B_\eta$, $\forall t \geq 0$ y con la satisfacción de (3.52), del Teorema 2.4 se concluye que $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta)(t) \rightarrow (0_n, 0_n, 0_n)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Con esto, y en virtud de la Definición 2.4, la estabilidad asintótica semi-global de la solución trivial $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta)(t) \equiv (0_n, 0_n, 0_n)$ queda demostrada.

△

Finalmente, de la demostración de la Proposición 3.1, como parte del análisis se puede enunciar el siguiente Corolario, en el cual se demuestra la existencia de a_m y b_m suficientemente grandes tal que se cumplen las condiciones (3.42), (3.48)–(3.50) simultáneamente, bajo la satisfacción de (3.51).

Corolario 3.1 *Asúmase que las condiciones de la **Proposición 3.1** son satisfechas tal que $B_d > f_m/2k_c$ con $f_M \geq 0$. Si a_m y b_m cumplen*

$$a_m > \frac{2rk_{d_M}(2k_c B_d - f_m)}{k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta)} \quad \text{con } r \geq 0, \quad (3.53)$$

$$b_m > \max \left\{ (\alpha + \beta), (\alpha + \delta(1 + (1 + (2\alpha/\delta)^{\frac{1}{2}}))), \phi, \alpha + \gamma, \right\} \quad (3.54)$$

$$(3.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) + (2k_c B_d + f_M)^2}{d_m k_{d_m} \sigma'_{d_m}(\eta)}, \\ \beta &= \frac{2d_M (k_{p_M} \sigma'_{p_M})^{\frac{1}{2}} (2k_c B_d - f_m)}{d_m^{\frac{3}{2}} k_{d_m} \sigma'_{d_m}(\eta)}, \\ \delta &= \frac{2rk_{d_M} \sigma'_{d_M} d_M^2 (2k_c B_d - f_m)^2}{k_{d_m}^2 d_m^3 \sigma_{d_m}^{\prime 2}(\eta)}, \\ \phi &= \frac{a_m (2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) + (2k_c B_d + f_M)^2)}{a_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2rk_{d_M} (2k_c B_d - f_m)}, \\ \gamma &= \frac{rk_{d_M} (2k_c B_d - f_m) (2k_c B_d + f_M + d_M a_M \sigma'_{d_M})^2}{a_m k_{d_m}^2 d_m^2 \sigma_{d_m}^{\prime 2}(\eta)}, \end{aligned}$$

con $r = b_M/b_m$ y η es tal que

$$\inf_{(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) \in I_t \times \partial B_\eta} V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vartheta) > \sup_{t \in I_t} V(t, \bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0), \vartheta(0)),$$

entonces existe un ϵ tal que las condiciones (3.42), (3.48)–(3.50) se satisfacen. □

Demostración. Ver apéndice A.

Conclusiones.

1. Se mostró la solución del problema de control de movimiento global/semi-global con retroalimentación exclusiva de las posiciones articulares considerando entradas acotadas, utilizando funciones de saturación generalizadas.
2. El radio de la vecindad de atracción η puede ser incrementado si a_m y b_m toman valores cada vez mas elevados.
3. Para el caso global, sólo se requiere que las ganancias de control $a_i, b_i, k_{p_i}, k_{d_i}$, $i = 1, \dots, n$, sean positivas.
4. Para el caso semi-global, se ha demostrado que para valores suficientemente grandes de a_m y b_m , existe una intersección entre las condiciones (3.42), (3.48)–(3.50). Las condiciones propuestas en el Corolario 3.1 se pueden usar como criterio de sintonización. Sin embargo, tales condiciones pueden generar valores demasiado altos de a_m y b_m , que resulten inconvenientes para efectos del desempeño del sistema en lazo cerrado, tal como se mostrará en el Capítulo 4.
5. Las ganancias de control k_p y k_d en ambos casos pueden tomar cualquier valor positivo (no están restringidas como en [7] y [13]). Se mostrará en el capítulo siguiente que esto ayuda a mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado.

3.3.2 Estabilización global con retroalimentación estática

En esta sección se presentan las extensiones al caso de seguimiento de los controladores propuestos en [14] y [21] para el caso de regulación. A diferencia del algoritmo presentado en la subsección anterior, este esquema considera la retroalimentación no sólo de posiciones sino además de velocidades articulares. Aún y cuando el resultado se limita a trayectorias deseadas “pequeñas”, hasta donde sabemos, los algoritmos propuestos en esta subsección son los primeros en ofrecer una solución global al problema de seguimiento con entradas acotadas con retroalimentación estática.

Formulación del problema y su solución

Para el sistema (3.31) supóngase que se cuenta con las mediciones continuas de posición y velocidad de todas las articulaciones y que las entradas al sistema están restringidas por

$$|\tau_i| \leq T \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.56)$$

Se busca encontrar una ley de control con retroalimentación acotada de estados (posiciones y velocidades) la cual estabilice asintóticamente el sistema (3.31) de forma global, donde $q_d(t)$ es (al menos) dos veces diferenciable y acotada hasta su segunda derivada temporal, i.e.

$$\max \left\{ \sup_{t \geq 0} \|q_d(t)\|, \sup_{t \geq 0} \|\dot{q}_d(t)\|, \sup_{t \geq 0} \|\ddot{q}_d(t)\| \right\} \leq B_d \quad (3.57)$$

para algún $B_d > 0$ conocido.

Control SP-SD+ generalizado con retroalimentación estática

Este esquema de control es una extensión a seguimiento del esquema SP-SD desarrollado en [14] para regulación.

Proposición 3.2 *Considérese el sistema (3.31) bajo las restricciones de entrada (3.56) y asúmase*

$$T > B_d(d_M + k_c B_d + f_M) + k_g. \quad (3.58)$$

Considérese la ley de control

$$\tau = -S_p(K_p\bar{q}) - S_d(K_d\dot{\bar{q}}) + D(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + F\dot{q}_d + g(q), \quad (3.59)$$

donde K_p y K_d son matrices diagonales definidas positivas con elementos en su diagonal denotados por k_{p_i} y k_{d_i} , $i = 1, \dots, n$, respectivamente, $\bar{q} = q - q_d$ y $S(Kz) = [\sigma_1(k_1 z_1), \dots, \sigma_n(k_n z_n)]^T$ donde $\sigma_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, son **funciones de saturación generalizadas estrictamente crecientes y continuamente diferenciables** con cotas M_i tales que

$$M_{pM} + M_{dM} < T - B_d(d_M + k_c B_d + f_M) - k_g$$

donde $M_{pM} = \max_{i=1, \dots, n} \{M_{p_i}\}$ y $M_{dM} = \max_{i=1, \dots, n} \{M_{d_i}\}$.

Para trayectorias deseadas tales que $B_d < f_m/k_c$, la solución trivial $(\bar{q}, \dot{\bar{q}})(t) \equiv (0_n, 0_n)$ del sistema en lazo cerrado (3.31), (3.59), es globalmente asintóticamente estable.

□

Demostración. Usando la Propiedad 1.3, el sistema en lazo cerrado (3.31) y (3.59) puede ser escrito como

$$D(q)\ddot{\bar{q}} + [C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q}_d)]\dot{\bar{q}} + F\dot{\bar{q}} + S_p(K_p\bar{q}) + S_d(K_d\dot{\bar{q}}) = 0. \quad (3.60)$$

Considérese la siguiente función escalar

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t))\dot{\bar{q}} + \int_0^{\bar{q}} S_p^T(K_p\theta)d\theta + \epsilon S_p^T(K_p\bar{q})D(\bar{q} + q_d(t))\dot{\bar{q}}, \quad (3.61)$$

donde ϵ es un escalar a ser definido.

Usando la Propiedad 4 del Lema 3.1 tenemos que

$$\int_0^{\bar{q}} S_p^T(K_p\theta)d\theta \geq \frac{1}{2}S_p^T(K_p\bar{q})K_p^{-1}\Sigma_p^{-1}S_p(K_p\bar{q}). \quad (3.62)$$

Por lo tanto, aplicando (3.62) y las Propiedades 1.1–1.6 tenemos que

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \geq \frac{1}{2}d_m \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{1}{4k_{pM}\sigma'_{pM}} \|S_p(K_p\bar{q})\|^2 - \epsilon d_M \|S_p(K_p\bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\| + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{q}} S_p^T(K_p\theta)d\theta \quad (3.63)$$

o expresado en forma matricial

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2k_{pM}\sigma'_{pM}} & -\epsilon d_M \\ -\epsilon d_M & d_m \end{bmatrix}}^{\hat{Z}} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{q}} S_p^T(K_p \theta) d\theta. \quad (3.64)$$

Notemos que $\sigma(\cdot)$ es una función de saturación generalizada la cual tiene el signo de su argumento, por lo tanto el término $\int_0^{\bar{q}} S_p^T(K_p \theta) d\theta$ es definido positivo y radialmente desacotado en \bar{q} , de acuerdo con la Propiedad 6 del Lema 3.1. Así, V es definida positiva si la matriz \hat{Z} es definida positiva, lo cual tiene lugar si y sólo si

$$\epsilon < \frac{1}{d_M} \left(\frac{d_m}{2k_{pM}\sigma'_{pM}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.65)$$

Por otro lado, notemos que bajo la condición (3.65) la forma cuadrática en (3.64) es además radialmente desacotada en $\dot{\bar{q}}$. Consecuentemente, la función V es globalmente definida positiva y radialmente desacotada.

Se demuestra ahora que V es menguante. Utilizando la Propiedad 4 del Lema 3.1 y la Propiedad 1.1, V está acotada por arriba de acuerdo a la siguiente expresión

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq \frac{d_M}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{k_{pM}\sigma'_{pM}}{2} \|\bar{q}\|^2 + \epsilon d_M k_{pM} \sigma'_{pM} \|\bar{q}\| \|\dot{\bar{q}}\|$$

donde se ha considerado $\|S_p(K_p \bar{q})\| \leq k_{pM} \sigma'_{pM} \|\bar{q}\|$ de acuerdo al Lema 2.1. La expresión anterior puede ser escrita en forma matricial como

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} k_{pM}\sigma'_{pM} & \epsilon d_M \sigma'_{pM} k_{pM} \\ \epsilon d_M \sigma'_{pM} k_{pM} & d_M \end{bmatrix}}^{\hat{H}} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

donde la matriz \hat{H} es definida positiva si y sólo si

$$\epsilon \leq \left(\frac{1}{d_M k_{pM} \sigma'_{pM}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.67)$$

No es difícil verificar que la desigualdad (3.65) implica la condición (3.67). Por lo tanto, bajo la condición (3.65) se tiene que V es definida positiva, menguante y radialmente desacotada.

La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= -\dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T S_d(K_d\dot{\bar{q}}) - \dot{\bar{q}}^T F\dot{\bar{q}} - \epsilon S_p^T(K_p\bar{q})C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} \\ &- \epsilon S_p^T(K_p\bar{q})S_d(K_d\dot{\bar{q}}) - \epsilon S_p^T(K_p\bar{q})F\dot{\bar{q}} + \epsilon\dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t))S_p(K_p\bar{q}) \\ &- \epsilon S_p^T(K_p\bar{q})S_p(K_p\bar{q}) + \epsilon\dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t))S_p'(K_p\bar{q})K_p\dot{\bar{q}},\end{aligned}$$

donde $S'(Kz) = \text{diag}[\sigma'_1(k_1z_1), \dots, \sigma'_n(k_nz_n)]$ con $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\}$. Aplicando las Propiedades 1.1–1.6 tenemos que \dot{V} está acotada por arriba de acuerdo a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &\leq k_c B_d \|\dot{\bar{q}}\|^2 - \dot{\bar{q}}^T S_d(K_d\dot{\bar{q}}) - f_m \|\dot{\bar{q}}\|^2 + 2\epsilon k_c B_d \|\dot{\bar{q}}\| \|S_p(K_p\bar{q})\| - \epsilon \|S_p(K_p\bar{q})\|^2 \\ &+ \epsilon \|S_p(K_p\bar{q})\| \|S_d(K_d\dot{\bar{q}})\| + \epsilon f_M \|\dot{\bar{q}}\| \|S_p(K_p\bar{q})\| + \epsilon k_c \|S_p(K_p\bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\|^2 \\ &+ \epsilon d_M \sigma'_{p_M} k_{p_M} \|\dot{\bar{q}}\|^2\end{aligned}$$

la cual se puede expresar en forma matricial como

$$\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq -\dot{\bar{q}}^T S_d(K_d\dot{\bar{q}}) - \begin{bmatrix} \|S_p(K_p\bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \epsilon & \omega \\ \omega & v \end{bmatrix}}^{\tilde{Q}} \begin{bmatrix} \|S_p(K_p\bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

donde

$$\begin{aligned}\omega &= -\epsilon \left(k_c B_d + \frac{\sigma'_{d_M} k_{d_M} + f_M}{2} \right), \\ v &= f_m - k_c B_d - \epsilon (k_c \nu_p + d_M \sigma'_{p_M} k_{p_M})\end{aligned}$$

$$y \nu_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n M_{p_i}^2} \geq \|S_p(K_p\bar{q})\|.$$

El primer término de (3.68) es definido negativo en $\dot{\bar{q}}$. La matriz \tilde{Q} es definida positiva si ϵ satisface

$$\epsilon < \frac{f_m - k_c B_d}{k_c \nu_p + d_M \sigma'_{p_M} k_{p_M} + \left(k_c B_d + \frac{\sigma'_{d_M} k_{d_M} + f_M}{2} \right)} \quad (3.69)$$

con

$$B_d < \frac{f_m}{k_c}. \quad (3.70)$$

De lo anterior, para trayectorias deseadas tal que $B_d < f_m/k_c$, existe $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeño) tal que las condiciones (3.65),(3.69) se satisfacen y por lo tanto \dot{V} es globalmente definida negativa. De acuerdo con las condiciones del Teorema 2.3 y el Corolario 2.1 concluimos entonces que la solución trivial $(\bar{q}, \dot{\bar{q}})(t) \equiv (0_n, 0_n)$ es global uniformemente asintóticamente estable. \triangle

Control SPD+ generalizado con retroalimentación estática

Este esquema de control es una extensión a seguimiento del controlador SPD desarrollado en [21] para regulación.

Proposición 3.3 *Considérese el sistema (3.31) bajo las restricciones de entrada (3.56) y asúmase que se cumple la condición (3.58).*

Considérese la ley de control

$$\tau = -S(K_p \bar{q} + K_d \dot{\bar{q}}) + D(q) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d) \dot{q}_d + F \dot{q}_d + g(q), \quad (3.71)$$

donde $\bar{q} = q - q_d(t)$ y K_p y K_d son matrices diagonales definidas positivas cuyos elementos en la diagonal son denotados por k_{p_i} y k_{d_i} , $i = 1, \dots, n$, respectivamente. $S(K_p \bar{q} + K_d \dot{\bar{q}}) = [\sigma_1(k_{p_1} \bar{q}_1 + k_{d_1} \dot{\bar{q}}_1), \dots, \sigma_n(k_{p_n} \bar{q}_n + k_{d_n} \dot{\bar{q}}_n)]^T$ donde $\sigma_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, son **funciones de saturación generalizadas estrictamente crecientes y continuamente diferenciables** con cotas M_i , tales que

$$M_M \leq T - B_d(d_M + k_c B_d + f_M) - k_g \quad (3.72)$$

donde $M_M = \max_{i=1, \dots, n} \{M_i\}$.

Para trayectorias deseadas tales que $B_d < f_m/k_c$, la solución trivial $(\bar{q}, \dot{\bar{q}})(t) \equiv (0_n, 0_n)$ del sistema en lazo cerrado (3.31),(3.71) es globalmente asintóticamente estable.

□

Demostración. Usando la Propiedad 1.3, el sistema en lazo cerrado (3.31) y (3.71) puede

ser escrito como

$$D(q)\ddot{\bar{q}} + [C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q}_d)]\dot{\bar{q}} + F\dot{\bar{q}} + S(K_p\bar{q} + K_d\dot{\bar{q}}) = 0. \quad (3.73)$$

Considérese la siguiente función escalar

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t))\dot{\bar{q}} + \int_0^{\bar{q}} S^T(K_p\theta)d\theta + \epsilon S^T(K_p\bar{q})D(\bar{q} + q_d(t))\dot{\bar{q}}, \quad (3.74)$$

Nótese que la función (3.74) es la misma que (3.61). En la demostración de la Proposición 3.2 se demostró que esta función es globalmente definida positiva, menguante y radialmente desacotada si ϵ satisface

$$\epsilon < \frac{1}{d_M} \left(\frac{d_m}{2k_{p_M}\sigma'_M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.75)$$

donde $\sigma'_M = \max_{i=1, \dots, n} \{ \sup_{\forall \varsigma \in \mathbb{R}} \sigma'_i(\varsigma) \}$.

La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= -\dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T S(K_p\bar{q} + K_d\dot{\bar{q}}) - \dot{\bar{q}}^T F\dot{\bar{q}} + S^T(K_p\bar{q})\dot{\bar{q}} \\ &\quad - \epsilon S^T(K_p\bar{q})S(K_p\bar{q} + K_d\dot{\bar{q}}) - \epsilon S^T(K_p\bar{q})F\dot{\bar{q}} + \epsilon \dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{\bar{q}} + \dot{q}_d(t))S(K_p\bar{q}) \\ &\quad + \epsilon \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t))S'(K_p\bar{q})K_p\dot{\bar{q}} - \epsilon S^T(K_p\bar{q})C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}}, \end{aligned}$$

donde $S'(Kz) = \text{diag}[\sigma'_1(k_1 z_1), \dots, \sigma'_n(k_n z_n)]$, con $K = \text{diag}[k_1, \dots, k_n]$, $z \in \mathbb{R}^n$. Sumando y restando el término $\epsilon S^T(K_p\bar{q})S(K_p\bar{q})$ en la expresión anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= -\dot{\bar{q}}^T (S(K_p\bar{q} + K_d\dot{\bar{q}}) - S(K_p\bar{q})) - \dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T F\dot{\bar{q}} - \epsilon S^T(K_p\bar{q})S(K_p\bar{q}) \\ &\quad - \epsilon S^T(K_p\bar{q})F\dot{\bar{q}} + \epsilon \dot{\bar{q}}^T C(\bar{q} + q_d(t), \dot{\bar{q}} + \dot{q}_d(t))S(K_p\bar{q}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T D(\bar{q} + q_d(t))S'(K_p\bar{q})K_p\dot{\bar{q}} \\ &\quad - \epsilon S^T(K_p\bar{q})C(\bar{q} + q_d(t), \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} - \epsilon S^T(K_p\bar{q})(S(K_p\bar{q} + K_d\dot{\bar{q}}) - S(K_p\bar{q})). \end{aligned}$$

De la Propiedad 1 del Lema 3.1, tenemos que $-\dot{\bar{q}}^T [S(K_p\bar{q} + K_d\dot{\bar{q}}) - S(K_p\bar{q})] = -\sum_{i=1}^n \bar{q}_i(\sigma_i(k_{p_i}\bar{q}_i + k_{d_i}\dot{\bar{q}}_i) - \sigma_i(k_{p_i}\bar{q}_i)) \leq 0$. Por otro lado, de acuerdo al Lema 2.1, tenemos que $-\epsilon S^T(K_p\bar{q})(S(K_p\bar{q} + K_d\dot{\bar{q}}) - S(K_p\bar{q})) \leq k_{d_M}\sigma'_M \|\dot{\bar{q}}\|$. Por lo tanto, \dot{V} está acotada superiormente (escrito en

forma matricial) de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|S(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \epsilon & -\epsilon \left(k_c B_d + \frac{\sigma'_M k_{d_M} + f_M}{2} \right) \\ -\epsilon \left(k_c B_d + \frac{\sigma'_M k_{d_M} + f_M}{2} \right) & \varsigma \end{bmatrix}}^{\hat{Q}} \begin{bmatrix} \|S(K_p \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

donde $\varsigma = f_m - k_c B_d - \epsilon(k_c \nu + d_M \sigma'_M k_{p_M})$ y $\nu = \sqrt{\sum_{i=1}^n M_i^2} \geq \|S(K_p \bar{q})\|$.

De (3.76), la matriz \hat{Q} es definida positiva si y sólo si

$$\epsilon < \frac{f_m - k_c B_d}{k_c \nu + d_M \sigma'_M k_{p_M} + \left(k_c B_d + \frac{\sigma'_M k_{d_M} + f_M}{2} \right)^2} \quad (3.77)$$

con

$$B_d < \frac{f_m}{k_c}. \quad (3.78)$$

De lo anterior, para trayectorias deseadas tales que $B_d < f_m/k_c$, existe $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeño) tal que las condiciones (3.75) y (3.77) se satisfacen y por lo tanto \dot{V} es globalmente definida negativa. De acuerdo con las condiciones del Teorema 2.3 y el Corolario 2.1 concluimos entonces que la solución trivial $(\bar{q}, \dot{\bar{q}})(t) \equiv (0_n, 0_n)$ es global uniformemente asintóticamente estable. \triangle

Capítulo 4

SIMULACIONES

En este capítulo se desarrollan las simulaciones de los esquemas de control presentados en el Capítulo 3 usando SIMULINK de MATLAB. En las simulaciones se considera un robot de dos eslabones directamente actuados [11], cuya dinámica, de acuerdo a la ecuación (3.19), está caracterizada de la siguiente manera:

$$D(q) = \begin{bmatrix} 2.351 + 0.168 \cos(q_2) & 0.102 + 0.084 \cos(q_2) \\ 0.102 + 0.084 \cos(q_2) & 0.102 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -0.084 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -0.084 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0.084 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$g(q) = 9.81 \begin{bmatrix} 3.921 \sin(q_1) + 0.186 \sin(q_1 + q_2) \\ 0.186 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$F = \begin{bmatrix} 2.288 & 0 \\ 0 & 0.175 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Los valores máximos del par aplicado en cada articulación para el sistema [11] están dados por $T_1 = 150$ Nm y $T_2 = 15$ Nm para la primera y segunda articulación respectivamente.

La función de saturación utilizada en las simulaciones (cumpliendo con la definición 3.1) está dada por:

$$\sigma(x) = \begin{cases} (M - L) \tanh\left(\frac{x-L}{M-L}\right) + L & \forall x > L \\ x & \forall |x| \leq L \\ (M - L) \tanh\left(\frac{x+L}{M-L}\right) - L & \forall x < -L \end{cases}$$

con $L < M$. Nótese que esta función de saturación es estrictamente creciente y continuamente diferenciable.

4.1 Control SP-SD_c+ generalizado: caso global

Para comparar el desempeño del sistema en lazo cerrado presentamos las simulaciones del **controlador de la Proposición 3.1 para el caso global** y el esquema propuesto por Santibañez y Kelly [13]. Las trayectorias deseadas se definen como $q_{d1}(t) = 0.39 \sin(t)$ [rad] y $q_{d2}(t) = 0.1 \cos(t)$ [rad] para el primer y segundo eslabón respectivamente, de donde $B_d = 0.403$. Para este sistema tenemos que $f_m = 0.175$ y $k_c = 0.1423$, por lo tanto, $B_d = 0.403 \leq 0.41 = f_m/3k_c < f_m/2k_c = 0.62$, lo cual cumple con la restricción en B_d para los esquemas de control considerados.

Considerando la desigualdad (3.26), se escogieron las ganancias de control de la siguiente manera. Para el esquema propuesto en [13]: $K_p = \text{diag}[k_{p1}, k_{p2}] = [65, 6.5]$ y $K_d = \text{diag}[k_{d1}, k_{d2}] = [35, 3.5]$. Para la ley de control SP-SD_c+ generalizada (Proposición 3.1) los valores máximos de las funciones de saturación son $M_{p1} = 65$, $M_{p2} = 6.5$, $M_{d1} = 35$ y $M_{d2} = 3.5$ con valores para las ganancias de control $k_{p1} = 21$, $k_{p2} = 4.1$, $k_{d1} = 11$ y $k_{d2} = 0.9$. En este último caso notemos que el esquema generalizado propuesto en este trabajo de tesis nos da la libertad de que los parámetros de control k_{pi}, k_{di} , $i = 1, 2$, puedan tomar cualquier valor positivo sin dejar de cumplir la condición (3.35) y así entonces poder mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado.

Para ambos controladores se escogió $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 48$ con condiciones iniciales $[q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)] = [9, -9, 0, 0]$ y $q_c(0) = [q_{c1}(0), q_{c2}(0)] = [0, 0]$.

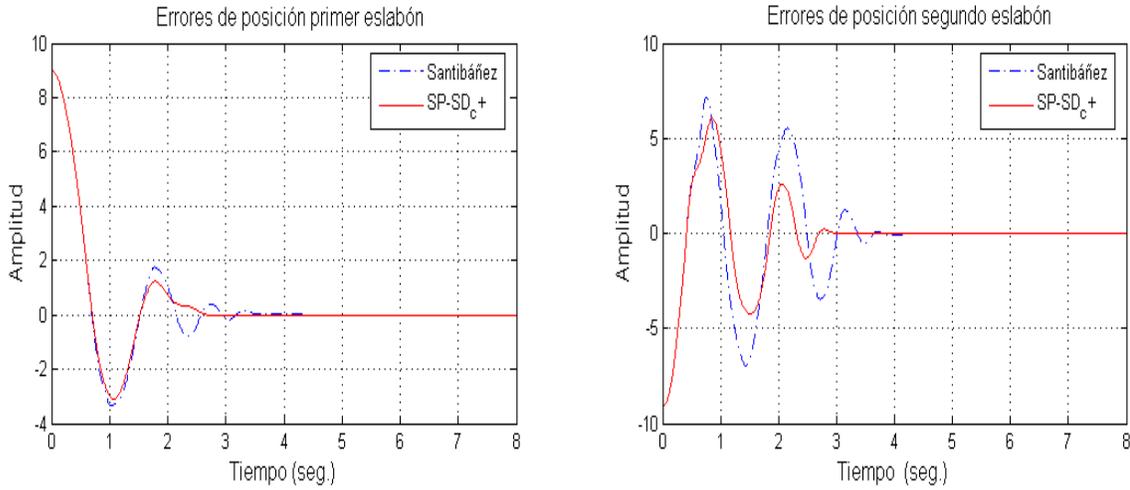


Figura 4.1: Controladores Proposición 3.1 y [13]: errores de posición primer y segundo eslabón.

En la Figura 4.1 se muestran los errores de posición para ambos eslabones. Nótese que para [13] los valores escogidos de las constantes de control $k_{pi}, k_{di}, i = 1, 2$, son iguales a las cotas de las funciones de saturación $M_{pi}, M_{di}, i = 1, 2$, de la ley SP-SD_c+, i.e. ambos esquemas de control tienen los mismos valores de saturación en las partes proporcionales al error de posición y velocidad para ambos eslabones. Obsérvese que el desempeño del sistema en lazo cerrado con el controlador SP-SD_c+ **mejora** al del controlador propuesto en [13]. Dicha mejora, como se ha comentado anteriormente, se debe principalmente a la libertad que tenemos de escoger cualquier valor positivo en los parámetros de control $k_{pi}, k_{di}, i = 1, 2$.

En la Figura 4.2 se muestran las variables auxiliares ϑ_1 y ϑ_2 para ambos controladores. Obsérvese que la convergencia de las variables auxiliares con el algoritmo SP-SD_c+ es más rápida que con el esquema de control [13], lo cual contribuye al mejor desempeño del sistema en lazo cerrado.

En la Figura 4.3 se muestran las entradas de control para los dos eslabones. Obsérvese que ambos controladores evitan la saturación de las entradas, sin embargo se observa que las señales de control generadas con el algoritmo SP-SD_c+ son menos oscilatorias que

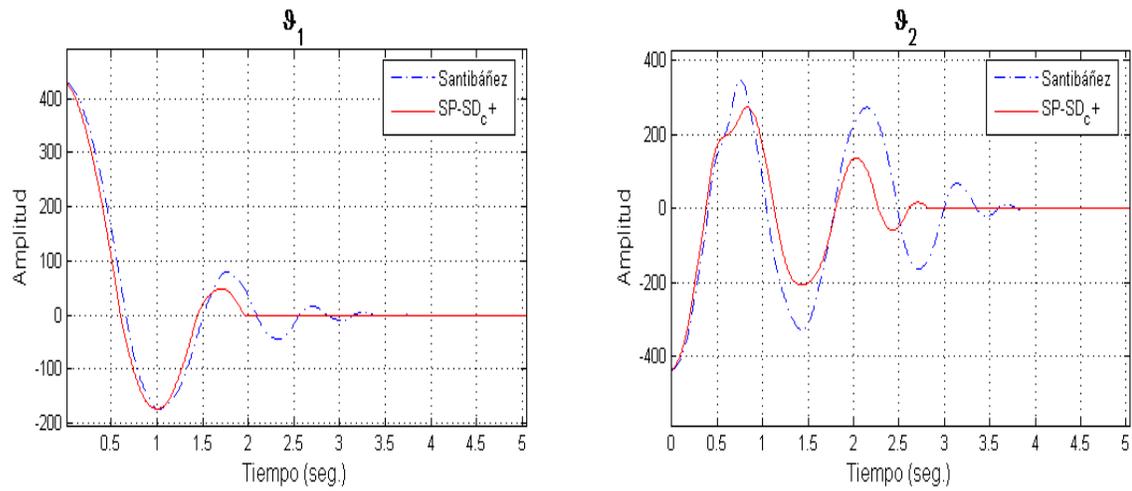


Figura 4.2: Controladores Proposición 3.1 y [13]: dinámica auxiliar.

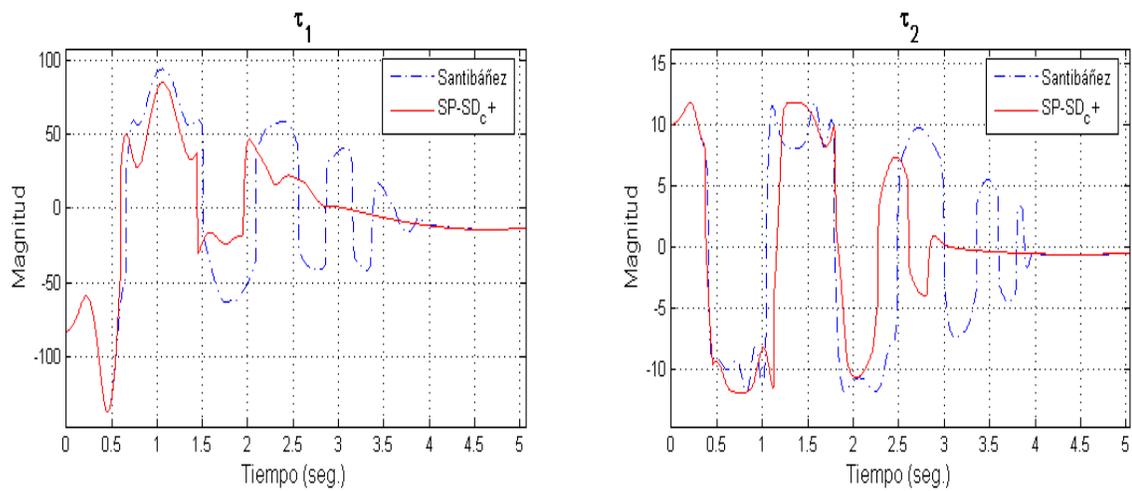


Figura 4.3: Leyes de control saturadas: primer y segundo eslabón.

aquéllas obtenidas con la ley de control propuesta en [13].

4.2 Control SP-SD_c+ generalizado: caso semi-global

Para comparar el desempeño del sistema en lazo cerrado presentamos las simulaciones del **controlador de la Proposición 3.1 para el caso semi-global** y el esquema propuesto por Loría y Nijmeijer en [7]. Nótese que el esquema propuesto en [7] no considera fricción viscosa, por lo tanto, en el caso semi-global del esquema de la Proposición 3.1 se considerará $f_M = f_m = 0$.

En la primera simulación que presentamos en esta sección, las trayectorias deseadas se definen como $q_{d1}(t) = \sin(\pi t)$ [rad] y $q_{d2}(t) = 0$ para el primer y segundo eslabón respectivamente, de donde $B_d = 10$. Considerando la condición (3.10), se escogieron las ganancias de control de la siguiente manera: para el esquema propuesto en [7], $K_p = \text{diag}[k_{p1}, k_{p2}] = [65, 7.5]$ y $K_d = \text{diag}[k_{d1}, k_{d2}] = [41, 5.1]$. Para el algoritmo SP-SD_c+, las cotas de las funciones de saturación son $M_{p1} = 65$, $M_{p2} = 7.5$, $M_{d1} = 41$ y $M_{d2} = 5.1$, con valores para las ganancias de control $k_{p1} = 80$, $k_{p2} = 30$, $k_{d1} = 20$ y $k_{d2} = 10$. Para ambos controladores se escogió $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 48$ con condiciones iniciales $[q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)] = [3, 0, 0, 0]$ y $q_c(0) = [q_{c1}(0), q_{c2}(0)] = [-144, 0]$.

En la Figura 4.4 se muestran los errores de posición para ambos eslabones. Obsérvese que el controlador SP-SD_c+ mejora el tiempo de estabilización hacia las trayectorias deseadas en comparación con el propuesto en [7].

En la Figura 4.5 se muestran ϑ_1 y ϑ_2 para ambos controladores. Nótese que las variables auxiliares del controlador SP-SD_c+ presentan un transitorio menos oscilatorio y de menor amplitud en comparación con el mostrado para [7].

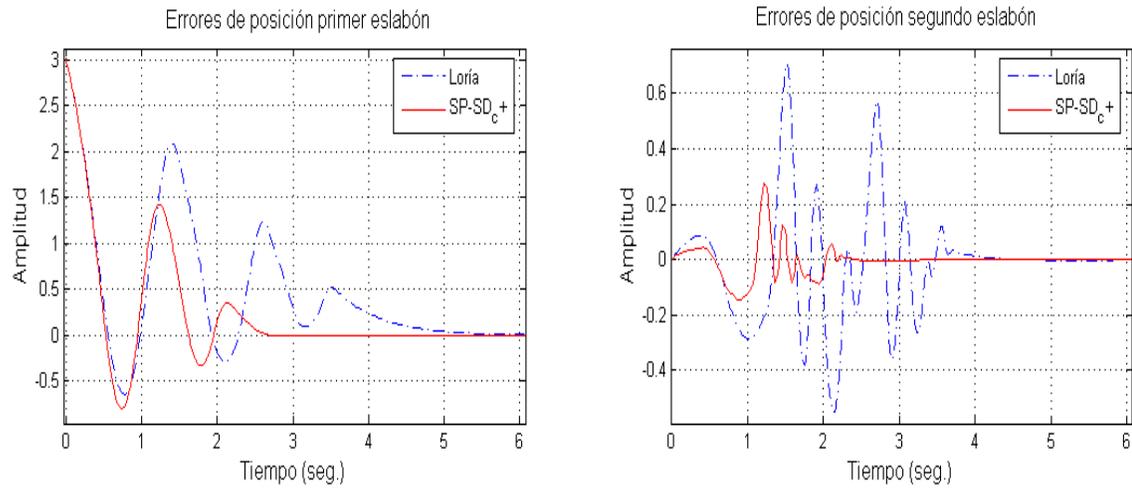


Figura 4.4: Controladores proposición 3.1 y [7].

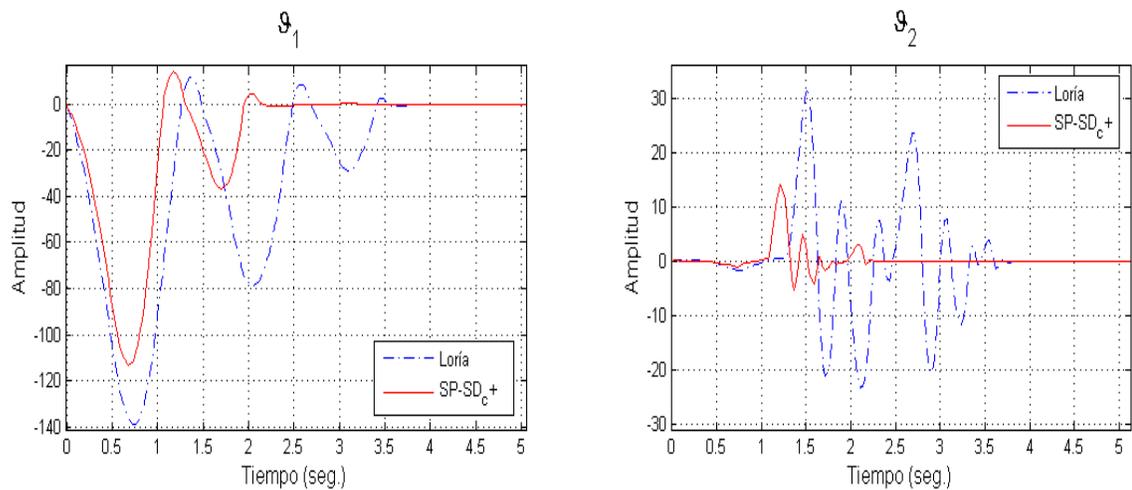


Figura 4.5: Controladores proposición 3.1 y [7] variables auxiliares: caso semi-global

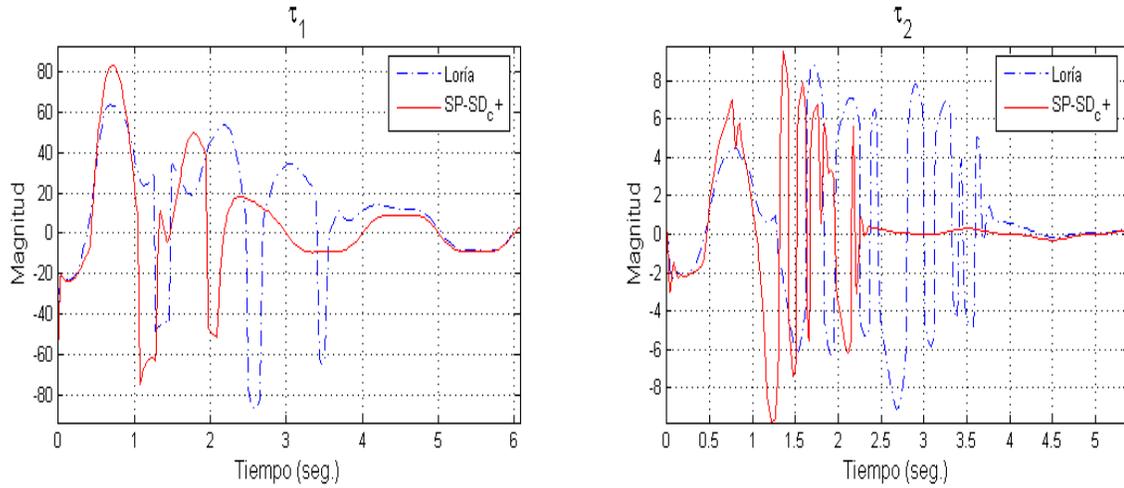


Figura 4.6: Leyes de control saturadas: primer y segundo eslabón.

En la Figura 4.6 se muestran las entradas de control, τ_1 y τ_2 , para ambos esquemas de control. Nótese que el objetivo de control, para ambos esquemas, se cumple sin saturaciones en las entradas.

Observación 4.1 Los valores escogidos para los parámetros de control $a_i = b_i = 48$, $i = 1, 2$, no cumplen necesariamente con las condiciones del Corolario 3.1, el cual es un criterio conservador que establece condiciones suficientes mas no necesarias. No obstante, en las simulaciones presentadas, los valores escogidos para a_i, b_i , $i = 1, 2$, fueron lo suficientemente grandes para obtener estabilidad asintótica.

□

Para la segunda simulación que se presenta en esta sección, las trayectoria deseadas son las mismas que las propuestas en la primera simulación de esta sección, así como los valores en las matrices K_p y K_d para ambos esquemas de control. A diferencia de la primera simulación, se escogió $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 480000$ para ambos controladores, con condiciones iniciales $[q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)] = [3, 0, 0, 0]$ y $q_c(0) = [q_{c1}(0), q_{c2}(0)] = [-1440000, 0]$. Los valores para a_i, b_i , $i = 1, 2$, fueron escogidos de tal forma que, o bien cumplen, o bien están cercanos a cumplir, las condiciones del Corolario 3.1. Además, para

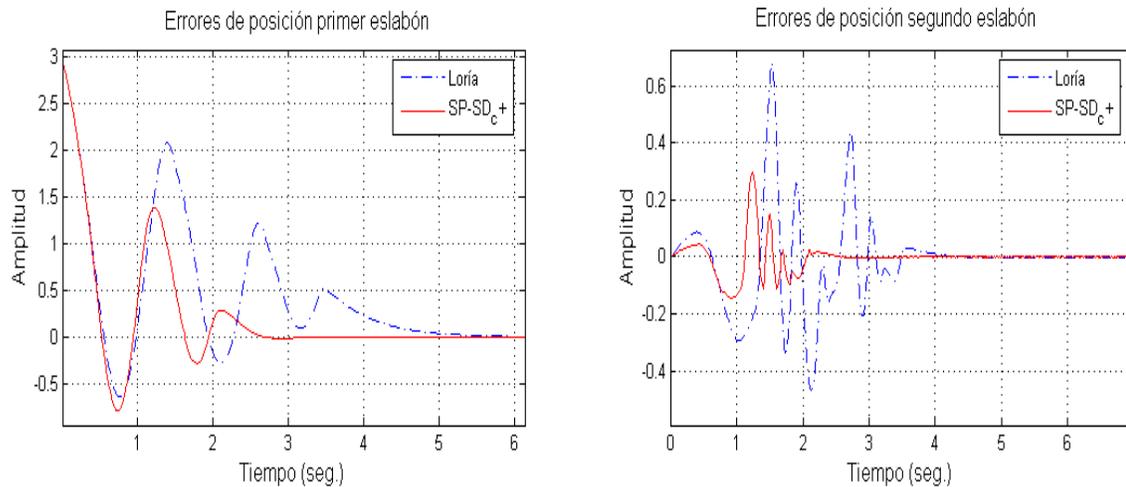


Figura 4.7: Controladores proposición 3.1 y [7]: errores de posición primer y segundo eslabón.

efectos de comparación entre ambos esquemas (el controlador $SP-SD_c+$ y el propuesto en [7]), los valores de $a_i, b_i, i = 1, 2$, son los mismos que los reportados en [7].

En la Figura 4.7 se muestran los errores de posición para ambos eslabones. Obsérvese que el controlador $SP-SD_c+$ mejora el tiempo de estabilización hacia las trayectorias deseadas en comparación con el propuesto en [7].

En la Figura 4.8 se muestran ϑ_1 y ϑ_2 para ambos controladores. A pesar de que la amplitud máxima en la evolución de ambas variables toma valores muy elevados, nótese que las variables auxiliares en $SP-SD_c+$ presentan un transitorio menos oscilatorio y de menor amplitud en comparación con el mostrado para [7].

En la Figura 4.9 se muestran las entradas de control, τ_1 y τ_2 , para ambos esquemas de control. El objetivo de control, para ambos esquemas, se cumple sin saturación en las entradas.

Observación 4.2 De la Figura 4.9 se observa que las señales de control presentan una desventaja: efecto de *chattering* el cual es indeseable en implementaciones reales. Esta desventaja se debe a las altas ganancias en los parámetros $a_i, b_i, i = 1, 2$. Esto se puede observar de las ecuaciones que describen la dinámica de las variables auxiliares, (3.40)

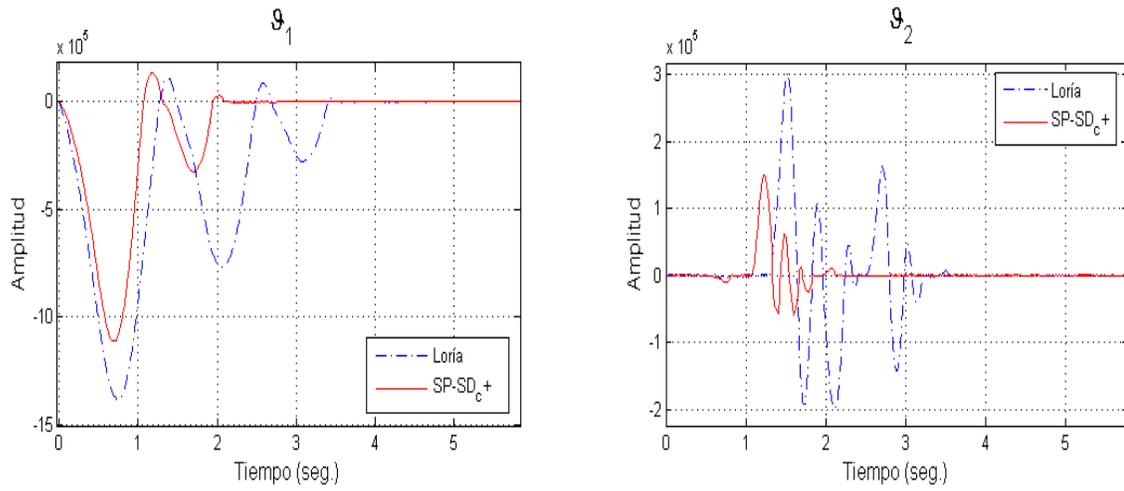


Figura 4.8: Controladores proposición 3.1 y [7].

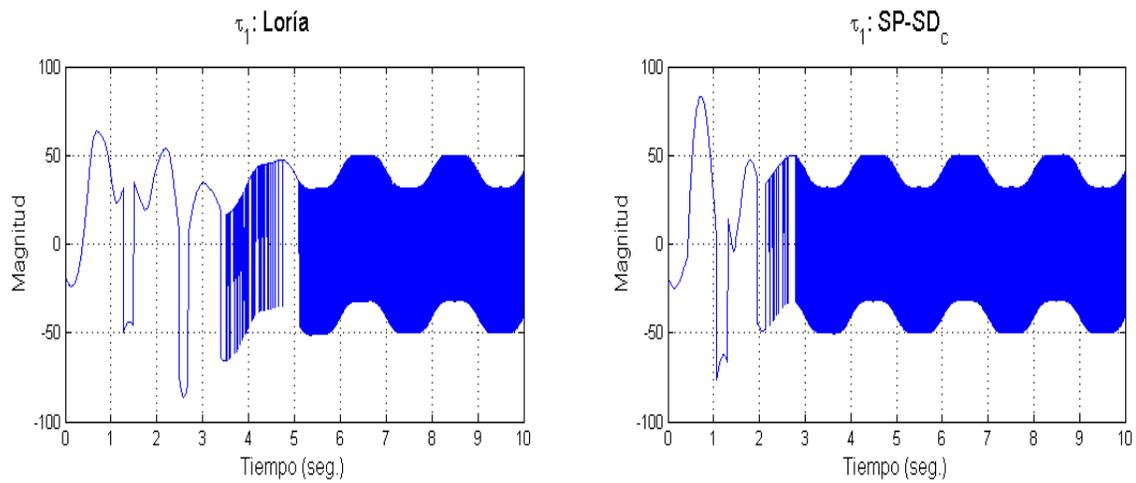


Figura 4.9: Leyes de control saturadas: primer y segundo eslabón.

para la ley SP-SD_c+ y (3.12) para el esquema de [7]. En ambas ecuaciones dinámicas, la derivada de ϑ toma valores muy elevados debido a los altos valores en A y B , lo cual da como consecuencia que la amplitud de ϑ tome valores altos y tenga una variación muy brusca. Esto pone en evidencia lo conservador del criterio obtenido como parte de la demostración de la Proposición 3.1, y enunciado como Corolario 3.1, y lo innecesario por cumplir tales condiciones suficientes tan estrictas. Así pues, tal parte del análisis debe tomarse como una manera de demostrar lo enunciado en la Proposición 3.1 más que como un criterio adecuado de sintonización.

□

4.3 Estabilización global con retroalimentación estática: SP-SD+, SPD+

Las trayectorias deseadas en este caso se definen como $q_{d1}(t) = \sin(t)$ [rad] y $q_{d2}(t) = 0.7 \cos(t)$ [rad] para el primer y segundo eslabón respectivamente, de donde $B_d = 1.21 \leq f_m/k_c = 1.23$ (lo cual cumple con la restricción en B_d para ambos esquemas de control). Se escogieron las ganancias de control de la siguiente manera: para el controlador de la Proposición 3.2 los valores máximos de las funciones de saturación son $M_{p1} = 51$, $M_{p2} = 6.4$, $M_{d1} = 52$ y $M_{d2} = 6.4$. Para el controlador de la Proposición 3.3, los valores máximos de las funciones de saturación son $M_1 = 104$ y $M_2 = 12.8$. Los valores para las ganancias de control k_{pi}, k_{di} , $i = 1, 2$, en ambos esquemas son $k_{p1} = 21$, $k_{p2} = 20$, $k_{d1} = 10$ y $k_{d2} = 1$.

En la Figura 4.10 se muestran los errores de posición del primer y segundo eslabón para ambos esquemas de control. Los esquemas de control SP-SD+ y SPD+ tienen valores de saturación en las partes proporcional y derivativa en los dos eslabones tales que: $M_{p1} + M_{d1} = M_1$ y $M_{p2} + M_{d2} = M_2$. Obsérvese que el desempeño del sistema en lazo cerrado con el controlador SPD+ es mejor que el controlador SP-SD+. Esto se debe a

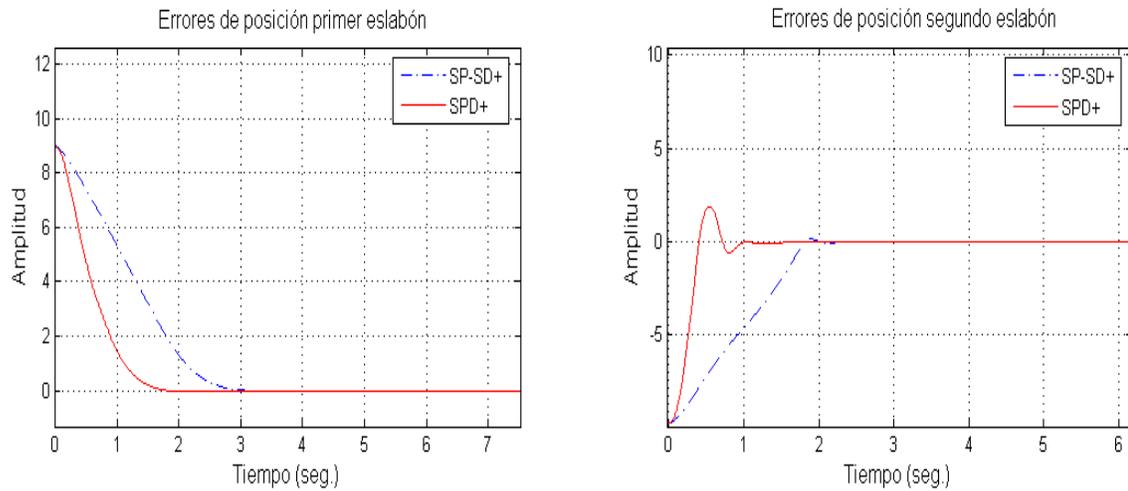


Figura 4.10: Controladores Proposiciones 3.2 y 3.3: errores de posición primer y segundo eslabón.

que dicho esquema aprovecha de mejor manera el nivel de saturación máximo permitido en comparación con el esquema de control SP-SD+.

En la Figura 4.11 se muestran las entradas de control para los dos eslabones. Obsérvese que en ambos casos se cumple con el objetivo de control evitando saturación en las entradas.

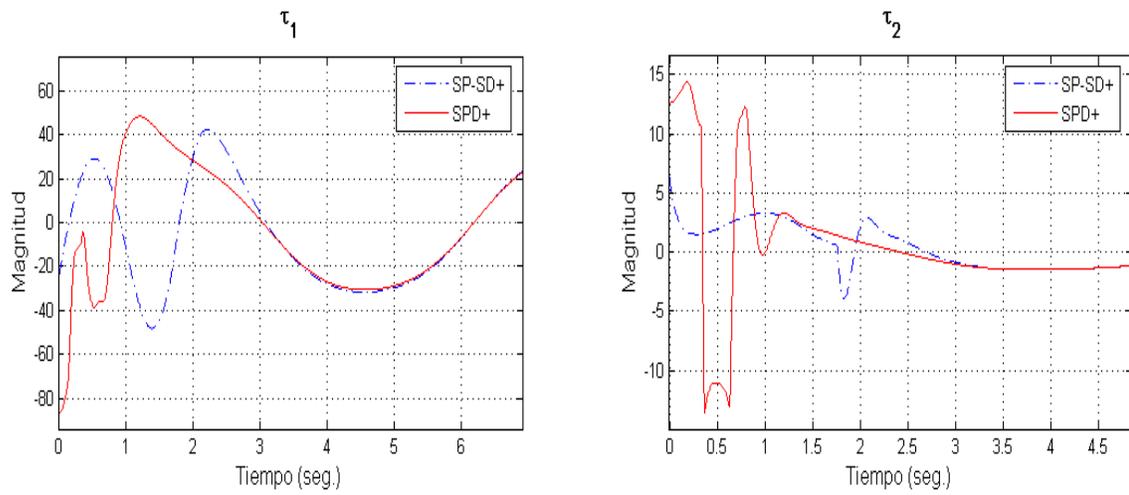


Figura 4.11: Leyes de control saturadas: Controladores Proposiciones 3.2 y 3.3.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo de tesis, se proponen esquemas que resuelven el problema de control de movimiento considerando entradas acotadas.

El primer esquema de control propuesto (Proposición 3.1) generaliza y engloba los algoritmos desarrollados en [7] y [13], en los cuales se prescinde de lecturas de velocidad. Con este esquema generalizado se ha mostrado estabilidad asintótica global de la solución trivial de las variables de error del sistema en lazo cerrado para trayectorias deseadas tales que $B_d < f_m/2k_c$, con $f_m > 0$, y estabilidad asintótica semi-global para trayectorias deseadas tales que $B_d \geq f_m/2k_c$, con $f_M \geq 0$. Como consecuencia de nuestra propuesta se da al usuario la libertad de escoger una función de saturación dentro de un conjunto (funciones de saturación generalizadas, Def. 3.1) y se mejoran las condiciones sobre los parámetros de control k_{p_i} y k_{d_i} , $i = 1, \dots, n$, de manera tal que pueden tomar cualquier valor positivo.

Para el caso semi-global, como una parte del análisis desarrollado en la demostración de la Proposición 3.1, se desarrolla un método de sintonización más detallado para las ganancias de control a_m y b_m que el mostrado en [7]. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que el uso de este método de sintonización puede traer como consecuencia valores

muy altos para los parámetros de control a_i, b_i , $i = 1, \dots, n$, y esto puede producir el efecto de *chattering* en las señales de control, lo cual es indeseable en implementaciones reales.

Para una sintonización adecuada de los parámetros a_i, b_i , $i = 1, \dots, n$, el esquema generalizado propuesto en esta tesis (SP-SD_c+) ha mostrado dar lugar a un desempeño altamente aceptable, sin presencia del efecto de *chattering* en las señales de control. Además, se mejora el desempeño mostrado por los esquemas de control propuestos en [13] y [7] para el caso global y semi-global respectivamente.

El segundo y tercer esquema de control propuestos en esta tesis (Proposiciones 3.2 y 3.3 respectivamente) son una extensión de los esquemas propuestos por Santibáñez et. al. [14] y Zavala y Santibáñez [21] del caso de regulación a seguimiento considerando fuerza de fricción viscosa en las articulaciones. Ambos esquemas consideran retroalimentación estática de los estados del sistema. Con ambos algoritmos se muestra estabilidad asintótica global del sistema en lazo cerrado para trayectorias deseadas tales que $B_d < f_m/k_c$, con $f_m > 0$, la cual es una condición sobre B_d menos restrictiva que la obtenida en el análisis para la ley de control generalizada de la Proposición 3.1 en el caso global, a su vez mejor que aquella obtenida en [13]. El desempeño del esquema en la Proposición 3.3 mejora el mostrado por el algoritmo de la Proposición 3.2.

Aunque el resultado obtenido en ambos esquemas de control (Proposiciones 3.2 y 3.3) está restringido a trayectorias tales que $B_d < f_m/k_c$, el autor no tiene conocimiento de la existencia de algún resultado en la literatura con el cual se resuelva el problema de control de seguimiento de trayectorias para Robots Manipuladores con entradas acotadas considerando retroalimentación estática de los estados del sistema. Esto marcó un reto al inicio de este proyecto de tesis y un logro importante en los resultados obtenidos al final del desarrollo de este trabajo.

Como trabajo a futuro, se considera la extensión de los esquemas de saturación mostrados en las Proposiciones 3.2 y 3.3 a la siguiente forma:

$$\tau = S(-K_p \bar{q} - K_d \dot{q} + D(q) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d) \dot{q}_d + F \dot{q}_d + g(q)),$$

con lo cual se espera un mejor desempeño del sistema en lazo cerrado debido a que se evitan saturaciones innecesarias de los términos individuales involucrados.

Apéndice A

Demostración del Corolario 3.1.

Considerando $b_M = rb_m$, para algún $r \geq 1$, de la condición (3.49) y la primera condición en (3.42) tenemos que

$$\frac{2k_c B_d - f_m}{b_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) - (2k_c B_d + f_M)^2} < \frac{1}{2d_M} \left(\frac{d_m}{k_{p_M} \sigma'_{p_M}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Despejando b_m tenemos

$$\frac{2d_M (k_{p_M} \sigma'_{p_M})^{\frac{1}{2}} (2k_c B_d - f_m)}{d_m^{\frac{3}{2}} k_{d_m} \sigma'_{d_m}(\eta)} + \frac{2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) + (2k_c B_d + f_M)^2}{d_m k_{d_m} \sigma'_{d_m}(\eta)} < b_m \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, de la condición (3.49) y la segunda condición en (3.42) tenemos que

$$\frac{2k_c B_d - f_m}{b_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) - (2k_c B_d + f_M)^2} < \frac{1}{2d_M} \left(\frac{d_m}{k_{d_M} \sigma'_{d_M} r b_m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad anterior tenemos

$$\frac{4d_M^2 (2k_c B_d - f_m)^2}{(b_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) - (2k_c B_d + f_M)^2)^2} < \frac{d_m}{r k_{d_M} \sigma'_{d_M} b_m} \quad (\text{A.2})$$

Multiplicando la desigualdad (A.2) por $(b_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2(k_c \nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) - (2k_c B_d + f_M)^2)^2$ y posteriormente restando el término $4d_M^2 (2k_c B_d - f_m)^2$ en ambos lados de la desigualdad tenemos que

$$0 < k_{d_m}^2 d_m^3 \sigma_{d_m}'^2(\eta) (b_m^2 - 2b_m(\alpha + \delta) + \alpha^2 \pm (\alpha + \delta)^2) \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2(k_c\nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) + (2k_c B_d + f_M)^2}{d_m k_{d_m} \sigma'_{d_m}(\eta)}, \\ \delta &= \frac{2r k_{d_M} \sigma'_{d_M} d_M^2 (2k_c B_d - f_m)^2}{k_{d_m}^2 d_m^3 \sigma_{d_m}'^2(\eta)}.\end{aligned}$$

Nótese que en la desigualdad (A.3) se sumó y restó el término $(\alpha + \delta)^2$ para completar el trinomio cuadrado perfecto. Por lo tanto, de la desigualdad (A.3) tenemos que

$$0 < (b_m - \alpha - \delta)^2 - ((\alpha + \delta)^2 - \alpha^2) = (b_m - \alpha - \delta)^2 - \delta^2 \left(\frac{2\alpha}{\delta} + 1 \right)$$

donde se sigue que

$$0 < \left(b_m - \alpha - \delta - \delta \left(\frac{2\alpha}{\delta} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(b_m - \alpha - \delta + \delta \left(\frac{2\alpha}{\delta} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{A.4})$$

Para cumplir con la desigualdad (A.4) tenemos que

$$b_m > \alpha + \delta + \delta \left(\frac{2\alpha}{\delta} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \alpha + \delta \left(1 + \left(1 + \frac{2\alpha}{\delta} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{A.5})$$

Ahora, de la condición (3.49) y la primera condición en (3.48) tenemos que

$$\frac{2k_c B_d - f_m}{b_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2(k_c\nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) - (2k_c B_d + f_M)^2} < \frac{a_m}{2r b_m k_{d_M}}. \quad (\text{A.6})$$

Despejando el término b_m de la desigualdad (A.6) tenemos que

$$b_m > \frac{a_m(2(k_c\nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) + (2k_c B_d + f_M)^2)}{a_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2r k_{d_M} (2k_c B_d - f_m)} \quad (\text{A.7})$$

con

$$a_m > \frac{2r k_{d_M} (2k_c B_d - f_m)}{k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta)}. \quad (\text{A.8})$$

De la condición (3.49) y la segunda condición en (3.48) tenemos que

$$\frac{2k_c B_d - f_m}{b_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta) - 2(k_c\nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) - (2k_c B_d + f_M)^2} < \frac{a_m k_{d_m} d_m \sigma'_{d_m}(\eta)}{r k_{d_M} \zeta^2}. \quad (\text{A.9})$$

donde $\zeta = 2k_c B_d + f_M + d_M a_M \sigma'_{d_M}$. Despejando b_m del denominador del término derecho

de la desigualdad (A.9) tenemos que

$$b_m > \frac{2(k_c\nu + d_M k_{p_M} \sigma'_{p_M}) + (2k_c B_d + f_M)^2}{d_m k_{d_m} \sigma'_{d_m}(\eta)} + \frac{r k_{d_M} (2k_c B_d - f_m) \zeta^2}{a_m k_{d_m}^2 d_m^2 \sigma_{d_m}'^2(\eta)}. \quad (\text{A.10})$$

De lo anterior, si a_m es tal que se cumple (A.8) y b_m es tal que se cumplen (A.1), (A.5), (A.7) y (A.10), existe un ϵ tal que las condiciones (3.42),(3.48)–(3.50) se satisfacen.

△

Bibliografía

- [1] H. Asada y J. J. Slotine. *Robot analysis and control*, Wiley, New York, 1986.

- [2] B. Armstrong-Hélouvry. *Control of Machines with friction*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

- [3] H. Goldstein, C. Poole y J. Safko. *Classical Mechanics*, 3a. edición, Addison Wesley, 1992.

- [4] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*, 2a. edición, Prentice Hall, 1996.

- [5] R. Kelly y V. Santibañez. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Pearson. Prentice Hall, 2003.

- [6] R. Kelly, V.Santibañez y H. Berghuis. Point-to-point robot control under actuator constraints. *Control Engineering Practice*, 5(11):1555-1562, 1997.

- [7] A. Loria y H. Nijmeijer. Bounded output feedback tracking control of fully-actuated Euler-Lagrange systems. *Systems and Control Letters*, 33:151-161, 1998.

- [8] J.B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Academic Press, INC. 1970.

- [9] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson y H. Sira-Ramírez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Springer, London, 1998.
- [10] B. Paden y R. Panja. Globally asymptotically PD+ controller for robot manipulators. *International Journal of Control*, 47(6):1697-1712, 1988.
- [11] F. Reyes y R. Kelly. Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm. *Mechatronics*, 11:267-282, 2001.
- [12] N. Rouche y J. Mawhin. *Ordinary Differential Equations: Stability and Periodic Solutions*, Pitman, London, 1980.
- [13] V. Santibáñez y R. Kelly. Global asymptotic stability of bounded output feedback tracking control for robot manipulators. *Proc. 40th IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 1378-1379, 2001.
- [14] V. Santibáñez, R. Kelly y F. Reyes. A new set-point controller with bounded torques for robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 45(1):126-133, 1998.
- [15] J.J. Slotine y Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [16] M. Spong y M. Vidyasagar. *Robot dynamics and control*, Wiley, New York, 1989.
- [17] M. Takegaki y S. Arimoto. A new feedback Method for dynamic control of manipulators. *Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 103:119-125, 1981.
- [18] A. Teel y L. Praly. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM J. Control Opt.*, 33(5):1443-1488, 1995.
- [19] P. Tomei. Adaptive PD controller for robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(4):565-570, 1991.
- [20] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*, 2a. edición, SIAM, 2002.

- [21] A. Zavala-Río y V. Santibáñez. Simple extensions of the PD-with-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(5):958-965, Septiembre de 2006.
- [22] A. Zavala-Río y V. Santibáñez. A natural extension of the PD-with-desired-gravity-compensation control law for robot manipulators with input saturations. *8th International IFAC Symposium on Robot Control*, Bologna, Italia, 6-8 de Septiembre, 2006.