

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Aspectos Geométricos de la Observabilidad en
Sistemas Mecánicos Simples**

Tesis que presenta

Juan Gabriel Rodríguez Zamarrón

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

San Luis Potosí, S.L.P., Octubre de 2005.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

COPIA CERTIFICADA

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 009 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 6 días del mes de octubre del año 2005, se reunió a las 18:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	Presidente	IPICYT
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Secretario	IPICYT
Dr. Daniel Ulises Campos Delgado	Sinodal externo	UASLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

Juan Gabriel Rodríguez Zamarrón

sobre la Tesis intitulada:

Aspectos Geométricos de la Observabilidad en Sistemas Mecánicos Simples

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 19:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fé el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 6 días del mes de octubre de 2005.




Mtra. Ma. Elisa Lucio Aguilar
Jefa del Departamento de Asuntos Escolares

San Luis Potosí, S.L.P. a 5 de Octubre del 2005

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
Coordinador Académico de la Opción de
Control y Sistemas Dinámicos del
Posgrado en Ciencias Aplicadas
IPICYT
P R E S E N T E.

Apreciable Dr. Femat Flores:

Por medio de la presente informamos que, después de haber revisado el trabajo de Tesis de Maestría del estudiante **Juan Gabriel Rodríguez Zamarrón**, no encontramos inconveniente alguno para que pueda llevarse a cabo el Examen de Grado ante un jurado.

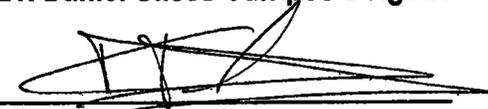
Atentamente,

Sinodales

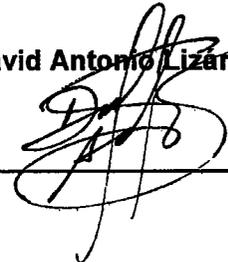
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar



Dr. Daniel Ulises Campos Delgado



Dr. David Antonio Lizarraga Navarro



INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA
IPICYT

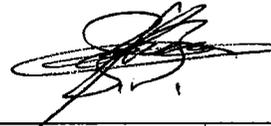
Fecha: **Octubre del 2005**

Autor: **Juan Gabriel Rodríguez Zamarrón**

Título: **Aspectos geométricos de la observabilidad en sistemas
mecánicos simples**

Departamento: **Matemáticas Aplicadas**

Grado: **Ingeniero Electrónico** Convocatoria: **Octubre** Año: **2005**



Firma del Autor

Para Adela y Dimas

Tabla de Contenidos

Tabla de Contenidos	V
Resumen	VII
Reconocimientos	VIII
1. Introducción	1
2. Nociones básicas sobre Sistemas mecánicos simples	3
2.1. Elementos básicos de geometría Riemanniana	3
2.2. Sistemas Mecánicos Simples (SMS)	4
2.2.1. Ejemplo de transporte paralelo	7
2.2.2. Modelo idealizado del Satélite con dos actuadores	9
3. Condiciones geométricas para observabilidad local	13
3.1. Preliminares	13
3.2. Accesibilidad local en configuraciones	16
3.3. Observabilidad local en configuraciones	17
3.4. Resultados auxiliares	19
3.5. Resultado principal	33
3.6. Ejemplo de Observabilidad local	35
3.6.1. El Satélite idealizado con dos actuadores	35
4. Conclusiones y trabajo futuro	39
4.1. Conclusiones	39
4.2. Trabajo futuro	40
A. Nociones básicas	41
A.1. Variedades	41
A.2. Álgebra tensorial	45

B. Reflexiones sobre el proceso de Dualización	47
B.1. Antecedentes	47
B.2. Herramientas de Dualidad	49
B.3. Dualidad en teoría geométrica	52
Bibliografía	54

Resumen

En esta tesis se presenta una definición de “*observabilidad local en configuraciones*” para sistemas mecánicos simples, noción inspirada en el trabajo de Lewis y Murray sobre accesibilidad local en configuraciones (ALC). Se desarrollan algunas de las herramientas necesarias para caracterizar tal noción en términos de objetos definidos en el espacio de configuraciones Q , cuya dimensión es un medio de la dimensión del espacio de estado TQ . Como parte de la contribución principal de esta tesis se enuncian condiciones suficientes para que un sistema mecánico simple sea localmente observable en configuraciones. En el enunciado de tales condiciones juegan un papel significativo los conceptos de producto simétrico (fundamental en el trabajo de Lewis y Murray sobre ALC) y de diferencial covariante, ambas definidas en términos de una conexión afin en Q . Con este trabajo se busca sentar bases para desarrollar una teoría sólida que aproveche la estructura geométrica de los sistemas mecánicos, tanto para el estudio de propiedades estructurales ligadas a la observabilidad, como para la construcción de observadores.

Reconocimientos

Me gustaría agradecer al Dr. David Lizárraga, mi asesor de tesis, por sus muchas sugerencias y constante apoyo durante esta investigación, además de las enseñanzas que he adquirido por parte de él para la formación de mi persona.

Por supuesto, estoy agradecido con mis padres y hermanos por su paciencia y apoyo. Sin ellos el presente trabajo no hubiera sido posible, en especial con mi hermana Victoria, quien siempre está dispuesta a brindar ayuda cuando se necesita.

Finalmente, quiero agradecer a las siguientes personas: Héctor Omar, José Cesar, Julio Cesar, Oscar Enrique y Rodolfo (por todos los buenos y malos momentos que hemos pasado juntos); Angélica, Armando, Eduardo, Felipe, Leonardo, Michael, Miguel y Rafael (por su amistad).

San Luis Potosí, S. L. P.
Octubre, 2005.

J. Gabriel Rodríguez Zamarrón

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas mecánicos en la actualidad juegan un papel importante debido a la variedad de sus aplicaciones. La estructura que presentan estos sistemas ha sido explotada en la literatura de control para resolver varios problemas de análisis y diseño de controladores, aprovechando la estructura que de manera natural está presente. En esta tesis se aprovecha una estructura específica, la de los *Sistemas Mecánicos Simples (SMS)*. En el Capítulo 2 se define un SMS y se dan algunos ejemplos de las herramientas matemáticas utilizadas, específicamente la “*derivada covariante*”, la cual interviene en la definición de “*producto simétrico*”. Además se desarrolla el modelo idealizado de un satélite con dos actuadores para mostrar la estructura impuesta en el sistema y los resultados obtenidos.

El resultado principal de la tesis se establece en el Capítulo 3, donde se utiliza la estructura de los SMS para obtener resultados de observabilidad, concepto que es ampliamente utilizado en estos sistemas. Introducimos una noción de “observabilidad local en términos del espacio de configuraciones”, la cual llamamos ***Observabilidad Local en Configuraciones***. El enfoque geométrico que proponemos es análogo al propuesto por Lewis y Murray en controlabilidad [5], quienes dan condiciones equivalentes para Controlabilidad en Configuraciones para SMS iniciando del reposo, que involucran objetos matemáticos tales como el producto simétrico y el corchete de Lie. Algunos conceptos utilizados, presentados en la Sección 3.2, son tomados de los resultados presentados por Lewis y Murray [6]. En la Sección 3.2 desarrollamos las herramientas necesarias para caracterizar los objetos, definidos en el espacio fase, que intervienen en el estudio de la observabilidad local (la llamada *codistribución de observabilidad*) en términos de objetos definidos en el espacio de configuración. La caracterización de estos objetos nos permite establecer condiciones suficientes para que un SMS sea localmente observable en configuraciones (LOC).

Por ejemplo, el problema de detección y aislamiento de fallas realizado con el enfoque de De Persis e Isidori [1] se lleva a cabo utilizando objetos geométricos definidos en TQ , es decir, los cálculos se desarrollan en el espacio de fase, cuya dimensión es el doble de la del espacio de configuración Q . El enfoque que proponemos en esta tesis es determinar

condiciones suficientes para Observabilidad Local en Configuraciones (LOC) de SMS en términos geométricos con mapeos definidos en Q , lo cual nos lleva a trabajar con sistemas “de la mitad de dimensiones” que el sistema original. Es en este punto donde la estructura de los sistemas SMS juega un papel importante.

En el caso de sistemas no lineales, el espacio de estados suele ser una variedad diferencial que dista de ser un simple espacio vectorial, por lo tanto el procedimiento de dualización no es tan directo como se realiza en sistemas lineales. Debido a la falta de un procedimiento de dualización bien definido en la literatura, surge la necesidad de reflexionar sobre el procedimiento de dualización, por esta razón en el Apéndice B se realiza una recapitulación del significado del concepto y se define un procedimiento para realizar la dualización en sistemas de control en general.

Capítulo 2

Nociones básicas sobre Sistemas mecánicos simples

2.1. Elementos básicos de geometría Riemanniana

La introducción del concepto de métrica contribuye a estudiar la geometría en variedades diferenciales en un nuevo contexto, más general que el de los espacios euclidianos. Los siguientes conceptos pueden ser consultados en [16, Lectura 8]

Sea M una variedad diferenciable n -dimensional de clase C^p , $p \geq 1$, y $T_x M$ el espacio vectorial tangente en $x \in M$.

Una variedad M se dice estar provista con una *estructura pseudo-Riemanniana* al haberse especificado un campo tensorial del tipo $\binom{0}{2}$ en M (clase C^{p-1}):

$$\mathfrak{g} : M \rightarrow T_2^0 M : x \mapsto \mathfrak{g}_x,$$

tal que:

- (i) Para cada $x \in M$ el tensor \mathfrak{g}_x es simétrico, esto es

$$\forall X, Y \in T_x M : \mathfrak{g}_x(X, Y) = \mathfrak{g}_x(Y, X).$$

- (ii) Para cada $x \in M$ la forma bilineal

$$\mathfrak{g}_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \mathfrak{g}_x(X, Y)$$

es no degenerada, esto es

$$\forall X, Y \in T_x M : \mathfrak{g}_x(X, Y) = 0 \iff Y = 0.$$

Decimos que la estructura es Riemanniana si se cumple, además, que

(iii) La forma bilineal es positiva definida:

$$\forall X \neq 0 : \mathbf{g}_x(X, X) > 0.$$

En tal caso, la forma bilineal $\mathbf{g}_x : (X, Y) \mapsto \mathbf{g}_x(X, Y)$ se llama forma métrica (*tensor métrico*). Una *variedad Riemanniana* es un par (M, \mathbf{g}) donde \mathbf{g} cumple los requerimientos (i), (ii) y (iii), \mathbf{g} siendo la métrica Riemanniana.

El tensor métrico caracteriza la dualidad entre $T_x M$ y $T_x^* M$. A cada punto $x \in M$ el tensor métrico define un producto escalar, el producto escalar de dos vectores $X, Y \in T_x M$ es denotado por:

$$\langle X, Y \rangle = \mathbf{g}_x(X, Y).$$

Ahora estableceremos un isomorfismo (canónico) entre $T_x M$ y $T_x^* M$. Sea \mathbf{g} una forma bilineal no degenerada. Existe un isomorfismo (canónico) entre $T_x M$ y $T_x^* M$ definido por el mapeo “*bemol*”:

$$\begin{aligned} \flat : T_x M &\rightarrow T_x^* M \\ X &\mapsto X^\flat = \mathbf{g}(X, \cdot), \end{aligned}$$

que a cada vector X asocia la 1-forma definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(X, \cdot) : T_x M &\rightarrow \mathbb{R} \\ Y &\mapsto \mathbf{g}(X, Y) = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

El mapeo inverso de un mapeo bemol es llamado “*sharp*” (o “sostenido”):

$$\begin{aligned} \sharp : T_x^* M &\rightarrow T_x M \\ \omega &\mapsto \omega^\sharp, \end{aligned}$$

simbólicamente lo denotamos por: $(\sharp)^{-1} = \flat$.

2.2. Sistemas Mecánicos Simples (SMS)

En esta sección estudiaremos una clase específica de sistemas mecánicos de control. La presentación se hace desde un punto de vista de la formulación Lagrangiana, ya que su estructura es la que mejor se adapta a los cálculos que realizamos. Para una descripción más detallada de las nociones presentadas en esta sección, el lector puede consultar [10, Capítulo 3] y [3, Capítulos 2 y 4].

Los *Sistemas Mecánicos Simples* se pueden considerar como cuartetos $S = (Q, \mathbf{g}, V, \{F^1, \dots, F^m\})$, donde:

1. g es una métrica Riemanniana en la variedad de configuraciones Q , de dimensión n .
2. V es una función lisa en la variedad de configuraciones, y
3. $\{F^1, \dots, F^m\}$ es un conjunto de m formas linealmente independientes en Q .

La Lagrangiana para el sistema de control que consideramos es una función $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$L(v) = \frac{1}{2}g_{\tau_Q(v)}(v, v) - V \circ \tau_Q(v), \quad (2.1)$$

donde $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$ es la proyección canónica; $\tau_Q(v) = q$ si y sólo si $v \in T_qQ$. Esto es, la Lagrangiana es igual a la "energía cinética menos la energía potencial". Usando \sharp obtenemos los campos de control $Y_i = (F^i)^\sharp$ ($i = 1, \dots, m$) y el gradiente de V , dado por $(dV)^\sharp$. En los sistemas donde se incluyen restricciones, éstas se modelan a través de una distribución Δ , de dimensión constante, la cual define el subespacio de velocidades instantáneas permitidas en cada punto de Q .

Con estos datos, la Lagrangiana del sistema de control en coordenadas locales está dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = u^a F_i^a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Sea X un campo vectorial en Q , su levantamiento vertical (llamado informalmente *lift*) es el campo vertical en TQ definido por:

$$X^{\text{lift}}(v) = \frac{d}{dt}(v + tX(\tau_Q(v))),$$

donde $t \mapsto tX(\tau_Q(v))$ es una curva $\mathbb{R} \rightarrow TQ$. En coordenadas locales, si:

$$X(q) = X^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i}$$

entonces tenemos

$$X^{\text{lift}}(v) = X^i \circ \tau_Q(v) \frac{\partial}{\partial v^i} = X^i(q) \frac{\partial}{\partial v^i}$$

En [3, Capítulo 4] se muestra que las ecuaciones (2.2) son equivalentes a

$$\dot{v}(t) = X_L(v(t)) + u^a(t) Y_a^{\text{lift}}(\tau_Q(v(t)))$$

donde X_L es llamado el campo vectorial de deriva y $Y_a = (F^a)^\sharp$ para $a = 1, \dots, m$ son los campos vectoriales de control.

En el haz tangente se define una conexión afín en Q por su acción en campos vectoriales como el mapeo que asocia a dos campos vectoriales $X, Y \in \Gamma(TQ)$ un campo vectorial $\nabla_X Y$ (llamado la derivada covariante de Y con respecto de X) que satisface, para $f, g \in C^\infty$ y $X, Y, Z \in \Gamma(TQ)$:

- $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$.
- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$.
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (L_Xf)Y$, donde $L_Xf = df(X)$ es la derivada direccional de f a lo largo de X (también llamada *la derivada de Lie* de f a lo largo de X).

En una carta coordenada $(U, (q^1, \dots, q^n))$ para Q , si X, Y son campos vectoriales dados localmente por $X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ y $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ (usando la convención de Einstein), tenemos:

$$\nabla_X Y = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial q^i}$$

donde los *símbolos de Christoffel* Γ_{jk}^i son funciones lisas en U determinadas por:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^j}} \frac{\partial}{\partial q^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Ahora, la conexión afin de *Levi-Civita* $\overset{g}{\nabla}$ asociada con g es la única conexión afin en Q que “preserva” la métrica, esto es $\nabla_X g = 0$ para todo $X \in \Gamma(TQ)$, y está libre de torsión, esto es $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \Gamma(TQ)$. Las dos condiciones que definen la conexión afin de Levi-Civita nos permiten calcular los símbolos de Christoffel explícitamente en términos de los componentes de la métrica Riemanniana g (ver detalles en [3, Capítulo 2]), de este modo obtenemos la fórmula:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \right).$$

Una curva $c : [0, T] \rightarrow Q$ en una variedad Riemanniana se dice ser una *geodésica* de una conexión afin ∇ si $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Además, dada una curva $c : [0, T] \rightarrow Q$ y $X_0 \in T_{c(0)}Q$, existe un único campo vectorial X a lo largo de c con la propiedad que $(\nabla_{\dot{c}} X)_{c(t)} = 0$ para todo $t \in [0, T]$, esto define un mapeo de $T_{c(s)}Q$ en $T_{c(t)}Q$ para todo $s, t \in [0, T]$ el cual envía $X(c(s))$ a $X(c(t))$; éste mapeo es llamado *transporte paralelo*. En coordenadas locales, una geodésica está dada por la solución de la siguiente ecuación diferencial de segundo orden en Q :

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por supuesto, ésta última corresponde a una ecuación diferencial de primer orden en TQ . Si denotamos coordenadas naturales en TQ por $(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n)$, entonces la ecuación diferencial de primer orden es: $\dot{q}^i = v^i, \dot{v}^i = -\Gamma_{jk}^i v^j v^k, i = 1, \dots, n$. Estas ecuaciones definen un campo vectorial $S(v) = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i}$, éste es conocido como el *spray geodésico*, o simplemente el *spray*, asociado a la métrica g o a la conexión $\overset{g}{\nabla}$.

Dada una conexión afin ∇ en Q se define el *producto simétrico* $\langle \cdot : \cdot \rangle : \Gamma(TQ) \times \Gamma(TQ) \rightarrow \Gamma(TQ)$ por medio de $\langle X : Y \rangle = \nabla_X Y + \nabla_Y X$. Este elemento geométrico, utilizado ampliamente en [5, 4], será muy importante en el desarrollo del resultado principal de la presente tesis. Se determina fácilmente que, en coordenadas:

$$\langle X : Y \rangle = \left(Y^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j} + X^j \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k + \Gamma_{jk}^i Y^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial q^i}. \quad (2.3)$$

A su vez, las ecuaciones (2.2) también se pueden escribir de la siguiente forma, la cual usaremos más adelante:

$$\nabla_{c'(t)} c'(t) = (dV(c(t)))^\sharp + u^a(t) Y_a(c(t)). \quad (2.4)$$

2.2.1. Ejemplo de transporte paralelo

Daremos un ejemplo simple por medio del cual ilustraremos los conceptos dados anteriormente e interpretaremos elementos tales como los símbolos de Christoffel y las geodésicas.

Ejemplo 1. Sea el sistema en $\mathbb{R}^6 \simeq T\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_5 \\ \dot{x}_3 &= x_6 \\ \dot{x}_4 &= 0 \\ \dot{x}_5 &= 0 \\ \dot{x}_6 &= x_2 x_4^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde vemos que el único símbolo de Christoffel no nulo es $\Gamma_{11}^3(x) = -x_2$. En este caso particular se puede integrar explícitamente el campo, y las soluciones del sistema están dadas por:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} + x_{40}t \\ x_2(t) &= x_{20} + x_{50}t \\ x_3(t) &= x_{30} + x_{60}t + \frac{1}{2}x_{20}x_{40}^2t^2 + \frac{1}{6}x_{40}^2x_{50}t^3 \\ x_4(t) &= x_{40} \\ x_5(t) &= x_{50} \\ x_6(t) &= x_{60} + x_{20}x_{40}^2t + \frac{1}{2}x_{40}^2x_{50}t^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde x_{i0} , para $i = 1, \dots, 6$, son las condiciones iniciales del sistema.

Ahora formamos el sistema equivalente y calculamos el transporte paralelo a lo largo de las geodésicas del sistema (se obtienen a partir de las ecuaciones (2.6)), y a lo largo del flujo de la velocidad inicial (dirección) dada por $U_0 = (1, 0, 0)^T$ para el punto inicial $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$

geodésicas :	flujo con velocidad inicial U_0 :
$x_1(t) = x_{10} + t$	$\bar{x}_1(t) = x_{10} + t$
$x_2(t) = x_{20}$	$\bar{x}_2(t) = x_{20}$
$x_3(t) = x_{30} + \frac{1}{2}x_{20}t^2$	$\bar{x}_3(t) = x_{30}$

La derivada covariante a lo largo de $\gamma_1(t)$ (flujo de U_0), con la condición inicial $U_0 = U(0)$, debe cumplir que $\nabla_{\dot{\gamma}_1(t)} U(t) = 0$, para todo t . Recordemos que para un campo vectorial V a lo largo de γ tenemos

$$(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} V)_{\gamma(t)} = \left((L_{\dot{\gamma}(t)} V^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i(t) V^j) \frac{\partial}{\partial q^k} \right)_{\gamma(t)}$$

con $U(t) = V(\gamma(t))$. Vemos entonces que

$$\frac{d}{dt}(V^k(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}(U^k(t)) = \frac{\partial V^k}{\partial r^i}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) = \dot{\gamma}(t) \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\gamma(t)} (V^k) = (L_{\dot{\gamma}(t)} V^k),$$

de donde se deduce que no es necesario evaluar en puntos fuera de la curva γ , sólo necesitamos evaluar a lo largo de la misma. Evaluando tenemos:

$$\nabla_{\dot{\gamma}_1(t)} U(t) = 0 = \begin{pmatrix} \dot{U}_1(t) \\ \dot{U}_2(t) \\ \dot{U}_3(t) - x_2 U_1(t) \end{pmatrix}$$

resolviendo para $U(t)$ obtenemos:

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_{20}t \end{pmatrix}$$

Ahora evaluaremos la derivada covariante a lo largo de $\gamma_2(t)$ (geodésicas) con la condición inicial $U_0 = \bar{U}(0)$:

$$\nabla_{\dot{\gamma}_2(t)} \bar{U}(t) = 0 = \begin{pmatrix} \dot{\bar{U}}_1(t) \\ \dot{\bar{U}}_2(t) \\ \dot{\bar{U}}_3(t) - x_2 \bar{U}_1(t) \end{pmatrix}$$

resolviendo para $\bar{U}(t)$ obtenemos:

$$\bar{U}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_{20}t \end{pmatrix}$$

Para γ_1 obtuvimos $\bar{U}(t)$, que no es tangente en todo punto a lo largo del flujo U_0 , lo que significa que a lo largo de $\gamma_1(t)$, el vector U_0 no es transportado paralelamente, debido a que γ_1 no es una geodésica. Para el caso de γ_2 , obtenemos una dirección tangente en cualquier punto a lo largo de la geodésica dado por el vector $U(t)$, como se muestra en la siguiente figura:

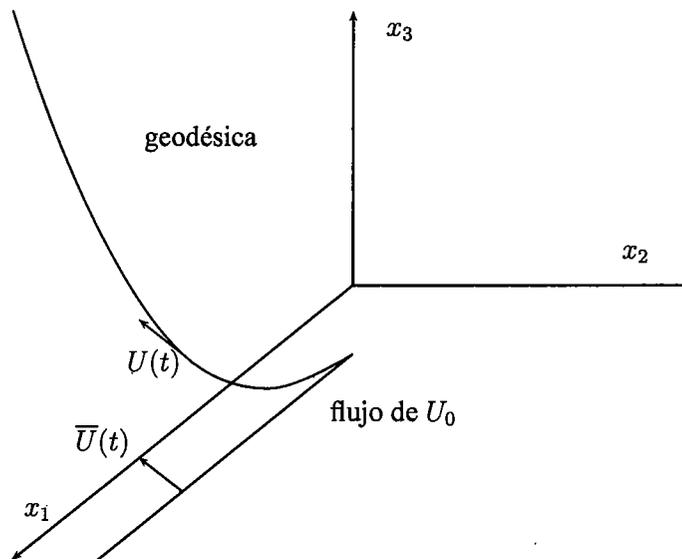


figura 1. Transporte paralelo del vector U_0 .

□

2.2.2. Modelo idealizado del Satélite con dos actuadores

A continuación obtendremos el modelo del Satélite, desde un punto de vista de la formulación *Lagrangiana*, donde pondremos de manifiesto la estructura de un SMS.

Ejemplo 2. Denotemos la posición del satélite, en coordenadas polares, por $q = (\rho, \phi)$, σ es la velocidad radial, ω es la velocidad angular, por lo tanto $\dot{q} = (\sigma, \omega)$; u_1 es el impulsor radial y u_2 es el impulsor tangencial. La masa del satélite (m_s) se supone conocida, K es una constante conocida relacionada con la gravedad.

Cualquier punto en el plano se puede obtener por medio de una rotación y una traslación del origen (ver detalles en [15, Capítulo 2]), la rotación se obtiene por medio de la siguiente matriz

$${}^0T_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y la traslación está dada por la matriz

$${}^1T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \rho & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el vector posición $p(q)$ está dado por una rotación y una traslación del origen, esto es

$$p(q) = {}^0T_1 {}^1T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el vector posición y el vector velocidad están dados por

$$p(q) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\phi) \\ \rho \sin(\phi) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dot{p}(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos^2(\phi) - \rho \sin^2(\phi) \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \sin^2(\phi) + \rho \cos^2(\phi) \dot{\phi} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La energía cinética del sistema está dada por

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_s |\dot{p}|^2 \\ &= \frac{1}{2} m_s [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2]. \end{aligned}$$

La energía potencial se obtiene integrando la fuerza

$$F(q) = \frac{-K}{\rho^2} d\rho,$$

por lo tanto la energía potencial es

$$V(q) = \int_{\infty}^{\rho} \frac{-K}{\rho^2} d\rho = \frac{K}{\rho},$$

por lo tanto:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2}m_s[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2] - \frac{K}{\rho}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange (2.2), tenemos las ecuaciones diferenciales de segundo orden siguientes

$$\begin{aligned} m_s\ddot{\rho} - m_s\rho(\dot{\phi})^2 - \frac{K}{\rho^2} &= u^1 \\ m_s\rho^2\ddot{\phi} + 2m_s\rho\dot{\rho}\dot{\phi} &= u^2\rho. \end{aligned}$$

En forma matricial, las ecuaciones anteriores son

$$\begin{pmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_s\rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\rho} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_s\rho(\dot{\phi})^2 \\ 2m_s\rho\dot{\rho}\dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-K}{\rho^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2\rho \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

la matriz

$$\begin{pmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_s\rho^2 \end{pmatrix}$$

define el mapeo ^b (*bémol*). Recordemos que los objetos matemáticos que se sustituyen en las ecuaciones de Lagrange son 1-formas, para transformarlas en campos vectoriales utilizamos el mapeo [#] (*sharp*), que no es más que multiplicar la ecuación (2.7) por la matriz inversa del mapeo ^b. Multiplicando por la matriz inversa del mapeo ^b y simplificando, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho(\dot{\phi})^2 &= \frac{K}{m_s\rho^2} + \frac{1}{m_s}u^1 \\ \rho^2\ddot{\phi} + \frac{2}{\rho^2}\rho\dot{\rho}\dot{\phi} &= \frac{1}{m_s\rho}u^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.8) están en la forma (2.4), las ecuaciones puestas en esta forma nos permiten obtener los diferentes elementos que definen la estructura de un SMS. De esta manera obtenemos los campos vectoriales de control, que son

$$Y_1(q) = \frac{1}{m_s} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad Y_2(q) = \frac{1}{m_s\rho} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

y el campo vectorial correspondiente a la energía potencial

$$dV^\#(q) = \frac{K}{m_s\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Además, los símbolos de Christoffel los obtenemos de las ecuaciones $\nabla_{c'(t)}c'(t)$, en las coordenadas (q, \dot{q}) , tenemos

$$\begin{aligned}\ddot{q}^1 + \Gamma_{jk}^1(q)\dot{q}^j\dot{q}^k &= \ddot{\rho} - \rho(\dot{\phi})^2 & \Rightarrow \Gamma_{22}^1(q) &= -\rho \\ \ddot{q}^2 + \Gamma_{jk}^2(q)\dot{q}^j\dot{q}^k &= \frac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\phi} & \Rightarrow \Gamma_{12}^2(q) &= \Gamma_{21}^2(q) = \frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

En la literatura de control, las ecuaciones que se utilizan son en la forma de ecuaciones diferenciales de primer orden, en las coordenadas (q, \dot{q}) están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \sigma \\ \dot{\phi} &= \omega \\ \dot{\sigma} &= \rho\omega^2 + \frac{1}{m_s}u^1 + \frac{K}{m_s\rho^2} \\ \dot{\omega} &= -\frac{2}{\rho}\sigma\omega + \frac{1}{m_s\rho}u^2\end{aligned}\tag{2.9}$$

notemos que los campos vectoriales ahora están definidos en la variedad TQ , mientras que los campos vectoriales de las ecuaciones (2.8) están definidos en la variedad Q . Si introducimos las coordenadas $v = (\rho, \phi, \sigma, \omega)$ para TQ , el *spray geodésico* S es

$$S(v) = \sigma \frac{\partial}{\partial \rho} + \omega \frac{\partial}{\partial \phi} + \rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{2}{\rho}\sigma\omega \frac{\partial}{\partial \omega},$$

o en forma de vector columna:

$$S(v) = \begin{pmatrix} \sigma \\ \omega \\ \rho\omega^2 \\ -\frac{2}{\rho}\sigma\omega \end{pmatrix}.$$

y los campos vectoriales del sistema son

$$\begin{aligned}Y_1^{\text{lift}}(v) &= \frac{1}{m_s} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ Y_2^{\text{lift}}(v) &= \frac{1}{m_s\rho} \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ (dV^\sharp)^{\text{lift}}(v) &= \frac{K}{m_s\rho^2} \frac{\partial}{\partial \sigma},\end{aligned}$$

de manera que el sistema completo se escribe

$$\dot{v} = S(v) + u^1 Y_1^{\text{lift}}(v) + u^2 Y_2^{\text{lift}}(v) + (dV^\sharp)^{\text{lift}}(v).$$

□

Capítulo 3

Condiciones geométricas para observabilidad local

En este capítulo se da a conocer el resultado principal de esta tesis. Se presenta la definición de “*observabilidad local en configuraciones*” y posteriormente se establecen condiciones suficientes para la observabilidad local en configuraciones involucrando objetos definidos en la variedad de configuraciones Q . Esto es de utilidad debido a que el sistema bajo estudio está definido en el espacio de estado TQ , cuya dimensión es el doble que la de Q .

3.1. Preliminares

Sea Q una variedad diferenciable n -dimensional. Utilizando las notaciones y definiciones del capítulo 2, el sistema sobre el cual basaremos los cálculos está definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= S(v) + \sum_{a=1}^m u^a Y_a^{\text{lift}}(v) + (dV^\sharp)^{\text{lift}}(v) \\ y_i &= H_i(v), \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{3.1}$$

En este capítulo supondremos que las H_i dependen solamente de las variables de configuración, es decir, que existe $h_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H_i = h_i \circ \tau_Q, i = 1, \dots, p$, donde $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$.

El restringir la salida a depender sólo de las variables de configuración no es demasiado limitante si nos referimos a las posibles aplicaciones de los SMS. En la práctica, es común tratar con sistemas mecánicos cuyas señales de salida sólo dependen de las variables de configuración (posición y orientación). Por otro lado, es común, en especial en el caso de estabilización local de puntos de equilibrio, prestar especial atención a las propiedades estructurales de un sistema mecánico cerca de “*puntos de reposo*”. Nos interesa evaluar

la observabilidad de un sistema en puntos cercanos a un punto de reposo (es decir, un estado en T_qQ con velocidad cero). Es por ésta razón que este estudio gira en torno de la observabilidad local en configuraciones, que se define más adelante.

Con las suposiciones anteriores los cálculos se facilitan enormemente. Como trabajo futuro esperamos que el trabajo presentado se pueda extender a sistemas cuyas salidas dependan no sólo de las variables de configuración sino también de las velocidades asociadas.

Dado un conjunto \mathcal{V} de campos vectoriales en Q , $\text{Lie}(\mathcal{V})$ denota el *álgebra de Lie* engendrada por \mathcal{V} , es decir, la más pequeña subálgebra de Lie (respecto de la inclusión de conjuntos) contenida en $\Gamma(TQ)$ que a su vez contiene a \mathcal{V} . Similarmente, $\text{Sym}(\mathcal{V})$ representa el *álgebra simétrica* engendrada por \mathcal{V} , es decir, el más pequeño subespacio vectorial de $\Gamma(TQ)$ que contiene a \mathcal{V} y es cerrado respecto al producto simétrico, es decir, es tal que $\forall X, Y \in \text{Sym}(\mathcal{V}), \langle X : Y \rangle \in \text{Sym}(\mathcal{V})$.

Definición 3.1.1. (Tomada de [7, Definición 3.29]). Considere el sistema (3.1). El **espacio de observación** \mathcal{O} de (3.1) es el espacio vectorial (sobre \mathbb{R}) de funciones en TQ engendrado por $\{H_1, \dots, H_p\}$ y por todas las derivadas de Lie iteradas

$$L_{X_1}L_{X_2}\dots L_{X_k}H_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots$$

con $X_i \in \mathcal{Y} = \{S, Y_1^{\text{lift}}, \dots, Y_m^{\text{lift}}, (dV^\#)^{\text{lift}}\}$.

Definamos $\tilde{\mathcal{O}}$ como el espacio vectorial de funciones definidas en Q engendrado por $\{h_1, \dots, h_p\}$ y por todas las derivadas de Lie de éstas a lo largo de los campos vectoriales pertenecientes a $\text{Lie}(\text{Sym}(\bar{\mathcal{Y}}))$, donde $\bar{\mathcal{Y}} = \{Y_1, \dots, Y_m, dV^\#\}$:

$$\tilde{\mathcal{O}} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{h_i, L_U h_i : U \in \text{Lie}(\text{Sym}(\bar{\mathcal{Y}}))\}. \quad (3.2)$$

Definamos $\bar{\mathcal{O}}$ como el espacio vectorial de funciones en TQ engendrado por $\{H_1, \dots, H_p\}$ y por todas las derivadas de Lie de éstas a lo largo de los campos vectoriales pertenecientes a $\text{Lie}(\mathcal{Y})$, donde $\mathcal{Y} = \{S, Y_1^{\text{lift}}, \dots, Y_m^{\text{lift}}, (dV^\#)^{\text{lift}}\}$:

$$\bar{\mathcal{O}} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{H_i, L_U H_i : U \in \text{Lie}(\mathcal{Y})\}. \quad (3.3)$$

Observación: Observar que $\bar{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$; $\bar{\mathcal{O}}$ no contiene derivadas parciales de orden superior a 2 de la función de entrada H_i .

A continuación se mencionan algunos conceptos que serán utilizados en lo sucesivo. Sea $A(\mathbf{X})$ el *álgebra libre* asociada con el conjunto \mathbf{X} (ver [3, sección 2.2.2]). Sea I el *ideal bilateral* de $A(\mathbf{X})$ generado por elementos de la forma $a \cdot a$ y $a \cdot (b \cdot c) + c \cdot (a \cdot b) + b \cdot (c \cdot a)$, para $a, b, c \in A(\mathbf{X})$. El *álgebra de Lie libre* generada por \mathbf{X} es el cociente $L(\mathbf{X}) = A(\mathbf{X})/I$, equipado con la suma, multiplicación escalar y el corchete $[\cdot, \cdot]$ heredados de $L(\mathbf{X})$. Estas operaciones dotan a $L(\mathbf{X})$ de una estructura de álgebra de Lie. Denotamos por $\text{Br}(\mathbf{X})$ el

subconjunto de $L(\mathbf{X})$ que contiene el conjunto \mathbf{X} , así como corchetes de elementos de \mathbf{X} . Este subconjunto genera a $L(\mathbf{X})$ como \mathbb{R} -espacio vectorial. Unos corchetes que nos será de gran utilidad son los informalmente llamados “abrientes”, cuya estructura es de la forma $[X_{i_1}, [X_{i_2}, [\dots, [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \dots]]]$ donde $X_{i_1}, \dots, X_{i_k} \in \mathbf{X}$, ya que el conjunto de estos corchetes genera también a $L(\mathbf{X})$. En la siguiente proposición (cuya prueba se encuentra en [12]) se establece esta última afirmación.

Proposición 3.1.1. *Cada elemento de $L(\mathbf{X})$ es una combinación lineal de corchetes iterados de la forma*

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_2, X_1] \dots]]], \quad (3.4)$$

donde $X_i \in \mathbf{X}$, $i = 1, \dots, k$ y $k = 1, 2, \dots$

Cada elemento $u \in L(\mathbf{X})$ tiene una única descomposición como $u = [u_1, u_2]$ donde, a su vez, cada u_1 y u_2 puede ser expresado de manera única como $u_1 = [u_{11}, u_{12}]$ y $u_2 = [u_{21}, u_{22}]$. Este proceso continua hasta que ya no se puedan descomponer los elementos. Estos elementos $u_{i_1 \dots i_m}$, $i_a \in \{1, 2\}$, son llamados *componentes* de u .

Si $\mathbf{X} = \{X_0, \dots, X_{l+1}\}$ y $B \in \text{Br}(\mathbf{X})$, definimos $\delta_a(B)$ para $a = 0, \dots, l+1$ como el número de veces que X_a ocurre en B . La suma $\sum_{a=1}^{l+1} \delta_a$ recibe el nombre de *grado o longitud* de B .

Dada una familia $\mathcal{Y} \subset \Gamma(TTQ)$ de campos vectoriales en una variedad TQ , definimos una distribución en TQ de la siguiente manera

$$D_{\mathcal{Y}}(x) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{X(x) : X \in \mathcal{Y}\}.$$

Sea $\mathcal{Y} = \{S, Y_1^{\text{lift}}, \dots, Y_m^{\text{lift}}, (dV^{\#})^{\text{lift}}\}$ y sea $\mathbf{X} = \{X_0, \dots, X_{m+1}\}$ un conjunto con $m+1$ elementos, supongamos que existe una biyección $\phi : \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{Y} \subset \Gamma(TTQ)$ que mapea X_0 en S , X_i en Y_i^{lift} para $i = 1, \dots, m$, y X_{m+1} en $(dV^{\#})^{\text{lift}}$. Debido a que los cálculos involucran los campos vectoriales definidos para el sistema (3.1), necesitamos establecer un “puente” entre el álgebra de Lie libre $L(\mathbf{X})$ y el álgebra de Lie engendrada por dichos campos vectoriales, la cual está contenida en $\Gamma(TTQ)$. Establecemos un homomorfismo $\text{Ev}(\phi) : L(\mathbf{X}) \rightarrow \Gamma(TTQ)$ de manera natural definiendo, para cada $X \in \mathbf{X}$, $\text{Ev}(\phi)(X) = \phi(X)$ y extendiendo $\text{Ev}(\phi)$ por linealidad y de tal manera que satisfaga, para $B_1, B_2 \in \text{Br}(\mathbf{X})$, $\text{Ev}(\phi)([B_1, B_2]) = [\text{Ev}(\phi)(B_1), \text{Ev}(\phi)(B_2)]$. La subálgebra de Lie más pequeña contenida en $\Gamma(TTQ)$ que contiene la familia de campos vectoriales \mathcal{Y} es simplemente la imagen de $L(\mathbf{X})$ bajo el homomorfismo $\text{Ev}(\phi)$. Denotamos dicha subálgebra como $\text{Lie}(\mathcal{Y})$ y la llamamos *cerradura involutiva* de \mathcal{Y} .

Para simplificar los cálculos de observabilidad podemos hacer algunas simplificaciones al conjunto de generadores para $L(\mathbf{X})$, con el cual realizaremos los cálculos necesarios en la demostración del teorema principal. Tomamos prestada de [3, sección 5.1] la siguiente

notación:

$$\begin{aligned} \text{Br}^k(\mathbf{X}) &= \{B \in \text{Br}(\mathbf{X}) : \text{el grado de } B \text{ es } k\}, \\ \text{Br}_k(\mathbf{X}) &= \left\{ B \in \text{Br}(\mathbf{X}) : \delta_0(B) - \sum_{a=1}^{m+1} \delta_a(B) = k \right\}. \end{aligned}$$

Al evaluarse en puntos con velocidades nulas, sólo un subconjunto de $\text{Br}(\mathbf{X})$ es diferente de cero. Si $B \in \text{Br}_k(\mathbf{X})$ entonces, se dice que B es de tipo k .

De la proposición 3.4, sabemos que para obtener un conjunto generador de $L(\mathbf{X})$ es suficiente considerar los elementos de la forma

$$[X_{a_k}, [X_{a_{k-1}}, [\dots, [X_{a_2}, X_{a_1}] \dots]]]$$

donde $a_i \in \{0, \dots, m+1\}$ para $i = 1, \dots, k$ y k es la *longitud* del corchete. Más adelante veremos que los elementos en $\text{Br}_j(\mathbf{X})$, para $j \geq 2$ y $j \leq -1$, no afectan a la dimensión de la codistribución de observabilidad y, por lo tanto, no serán de interés para nosotros. En particular, para $j \leq -2$ los corchetes son idénticamente cero, ver [3, Lema 5.6].

El espacio de observación \mathcal{O} define la *codistribución de observabilidad*, denotada como $d\mathcal{O}$, estableciendo

$$d\mathcal{O}(v) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{df(v) : f \in \mathcal{O}\}, \quad v \in TQ.$$

El espacio vectorial de funciones $\overline{\mathcal{O}}$ define un subespacio $d\overline{\mathcal{O}}$ del espacio vectorial de 1-formas $\Gamma(T^*TQ)$ dado por:

$$d\overline{\mathcal{O}}(v) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{df(v) : f \in \overline{\mathcal{O}}\}. \quad (3.5)$$

A su vez, $d\overline{\mathcal{O}}$ define de manera obvia una codistribución en TQ . Es utilizando la codistribución $d\overline{\mathcal{O}}$ que suele evaluarse la **condición de rango para observabilidad local**, ver [7, teorema 3.32]. Sin embargo las 1-formas en $d\overline{\mathcal{O}}$ están definidas en TQ . Nuestra aportación va en el sentido de caracterizar ésta codistribución con objetos definidos en Q , para lo cual explotaremos las características de los SMS y las propiedades de objetos matemáticos tales como el producto simétrico. Notemos que $d\overline{\mathcal{O}}$ difiere de $d\mathcal{O}$ (codistribución usada típicamente en la teoría de control), sin embargo, para nuestro análisis utilizaremos la codistribución $d\overline{\mathcal{O}}$ porque el objetivo de los cálculos es relacionar el álgebra $\text{Lie}(\mathcal{Y})$ con el álgebra $\text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$.

3.2. Accesibilidad local en configuraciones

Para motivar la sección con los resultados principales de esta tesis, hacemos un breve recordatorio de la definición de accesibilidad local en configuraciones descrita en [6]. En esta

sección se considera un sistema mecánico simple de la forma (3.1) evolucionando en una variedad n -dimensional Q y, dado un punto $q_0 \in Q$, se denota por $\mathcal{V}(q_0)$ el conjunto de vecindades de q_0 en Q . Comenzamos por definir conjuntos de configuraciones localmente accesibles en tiempo finito.

Definición 3.2.1. *Sea $q_0 \in Q$ y $U \in \mathcal{V}(q_0)$. El conjunto de configuraciones accesibles desde $q_0 \in Q$ en tiempo $T > 0$ es el conjunto*

$$R_Q^U(q_0, T) = \{q \in Q : \text{existe solución } (v, u) \text{ de (3.1) t.q. } (\tau_Q \circ v)'(0) = 0_{q_0}, \\ (\tau_Q \circ v)(t) \in U \text{ para } t \in [0, T] \text{ y } (\tau_Q \circ v)'(T) \in T_q Q\}.$$

El conjunto de configuraciones accesibles desde $q_0 \in Q$ en tiempo no mayor que $T > 0$ es el conjunto

$$R_Q^U(q_0, \leq T) = \bigcup_{t \in [0, T]} R_Q^U(q_0, t).$$

Con estos conceptos se puede entonces definir la noción de accesibilidad local en configuraciones.

Definición 3.2.2. *El sistema (3.1) se dice ser localmente accesible en configuraciones en un punto $q_0 \in Q$ si existe $T > 0$ tal que, para toda $U \in \mathcal{V}(q_0)$ y todo $t \in [0, T]$, el conjunto $R_Q^U(q_0, \leq t)$ contiene un abierto de Q no vacío. El sistema (3.1) es localmente accesible en configuraciones si para todo $q_0 \in Q$ el sistema es localmente accesible en configuraciones en q_0 .*

El siguiente resultado, tomado de [6], es parte del resultado principal de Lewis y Murray en accesibilidad en configuraciones.

Teorema 3.2.1. *El sistema (3.1) en la variedad de configuración Q es localmente accesible en configuraciones en $q \in Q$ si la distribución $\text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{V}}))$ tiene rango n en el punto q .*

La aportación principal de esta tesis es derivar una definición de observabilidad que de alguna manera sea análoga (o dual) de la noción de accesibilidad local en configuraciones de Lewis y Murray, y luego dar una caracterización parcial de tal noción.

3.3. Observabilidad local en configuraciones

En esta sección se define la noción que ocupa el lugar central en este trabajo. La idea subyacente a tal definición es proponer un concepto que, de alguna manera todavía por

explorarse, resulte ser “dual” o análogo al de accesibilidad local en configuraciones para sistemas mecánicos simples. Consideremos un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $f(\cdot, u)$ es un campo vectorial en una variedad M y el vector de entradas u toma valores en \mathbb{R}^m . Tal como se describe en [8], dada una condición inicial $x_0 \in M$, el sistema (3.6) define un mapeo “entrada-salida” por medio de la asignación

$$\begin{aligned} (\Sigma, x_0) : PC([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m) &\rightarrow C^0([t_0, t_1]; \mathbb{R}) \\ u &\mapsto h(\phi(\cdot, t_0, x_0, u)), \end{aligned}$$

donde $t \mapsto \phi(t, t_0, x_0, u)$ es la solución de (3.6) con entrada u y tal que $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0$. Dados $x_0, x_1 \in M$, se dice que x_0 es **indistinguible de** x_1 , denotado $x_0 I x_1$, si y sólo si $(\Sigma, x_0) = (\Sigma, x_1)$ (ver [8]). Dados $x_0, x_1 \in M$ y una vecindad V de x_0 , se dice que x_0 es **V -indistinguible de** x_1 , denotado $x_0 I^V x_1$, si para toda entrada $u \in PC([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ con la propiedad de que $\phi(t, t_0, x_0, u) \in V$ y $\phi(t, t_0, x_1, u) \in V$ para $t \in [t_0, t_1]$, se tiene $h(\phi(t, t_0, x_0, u)) = h(\phi(t, t_0, x_1, u))$.

Definición de observabilidad local, tomada de [7, Definición 3.28]

Definición 3.3.1. *El sistema (3.1) es llamado **localmente observable en** x_0 si existe una vecindad W de x_0 tal que para cada vecindad $V \subset W$ de x_0 la relación $x_0 I^V x_1$ (V -indistinguible) implica $x_1 = x_0$. El sistema es **localmente observable** si es localmente observable en cada $x_0 \in M$.*

Ahora se define lo que entenderemos por observabilidad local en configuraciones.

Definición 3.3.2. *El sistema (3.1) es **localmente observable en configuraciones en** q (abreviado **LOC**(q)) si*

- (a) *existe una función $h : Q \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $H = h \circ \tau_Q$, y*
- (b) *el sistema (3.1) es localmente observable en 0_q .*

*El sistema es **localmente observable en configuraciones (LOC)** si, para todo $q \in Q$, el sistema es localmente observable en configuraciones en q .*

Observación. Es importante mencionar que la observabilidad local en configuraciones, tal como se ha definido, coincide con un caso particular de observabilidad local (en el que la salida “depende” sólo de las variables de configuración y se evalúa en puntos de la cero-sección). Resta aún por explorarse la relación precisa entre esta noción y la de accesibilidad local en configuraciones, así como si existe, o no, un procedimiento de “**dualización**” que permita definir observabilidad local en configuraciones a partir de accesibilidad local en configuraciones.

3.4. Resultados auxiliares

Antes de proceder a enunciar y demostrar el resultado principal de este capítulo, en esta sección estableceremos algunos resultados preliminares.

La siguiente estructura nos será útil para identificar los corchetes de $\text{Br}(\mathbf{X})$ que juegan un papel significativo al evaluar la codistribución (3.5) en puntos de la cero-sección de TQ . Durante este capítulo, para los cálculos que desarrollemos, supondremos dadas coordenadas naturales en TQ de la forma $(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n)$. Cuando hablamos de polinomios en $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$, utilizaremos la notación que involucra multi-índices. Así, dado un multi-índice $I = (k_1, \dots, k_n)$, donde $k_i \in \mathbb{Z}$, se define

$$v^I = (v^1)^{k_1} \dots (v^n)^{k_n} \quad \text{e} \quad |I| = \sum_{i=1}^n k_i.$$

Adaptaremos además la convención siguiente:

- (a) Si $|I| < 0$ entonces $v^I = 0$;
- (b) Si $|I| = 0$ entonces $v^I = 1$.

Lema 3.4.1. Si $k \geq 2$ y $B \in \text{Br}^k(\mathbf{X})$ ($\text{longitud}(B) = k$) entonces

$$\text{tipo}(B) \leq k - 1. \quad (3.7)$$

Demostración: Procedemos por inducción en la longitud k .

Sea $B \in \text{Br}^k(\mathbf{X})$, Para $K = 2$ tenemos las siguientes opciones $[X_0, X_i], [X_0, X_0], [X_i, X_j]$ donde $i, j \in \{1, \dots, m+1\}$, pero $\text{Ev}(\phi)([X_0, X_0]) = [S, S] = 0$ y $\text{Ev}(\phi)([X_i, X_j]) = [Z_i, Z_j] = 0$ para $Z_i, Z_j \in \{Y_1^{\text{lift}}, \dots, Y_m^{\text{lift}}, (dV^\#)^{\text{lift}}\}$ (ver [5, Lema 5.5]). Si $B = [X_0, X_i]$ para $i \in \{1, \dots, m+1\}$ tenemos $\text{tipo}(B) = 0$, por lo tanto B cumple la desigualdad (3.7). Ahora supongamos que el lema es verdad para todos los corchetes de longitud menor o igual que k . Sea $B \in \text{Br}^{k+1}(\mathbf{X})$ ($\text{longitud}(B) = k+1$), como cualquier corchete se puede expresar como una suma de corchetes de la forma (3.4) y "del mismo tipo", es suficiente probar para corchetes de la forma (3.4). B es de la forma $B = [X_0, \bar{B}]$ con $\text{longitud}(\bar{B}) = k$, por lo tanto $\text{tipo}(B) \leq k$ lo cual satisface la desigualdad (3.7), o bien B es de la forma $B = [X_i, \bar{B}]$ donde $i \in \{1, \dots, m+1\}$, por lo tanto $\text{tipo}(B) \leq k-2$ lo cual satisface la desigualdad (3.7). De donde se concluye que $B \in \text{Br}^{k+1}(\mathbf{X})$ satisface el lema. ■

Lema 3.4.2. Supóngase que, para $j \leq -2$, $\text{Br}_j(\mathbf{X})$ está contenida en el kernel de $\text{Ev}(\phi)$. Si $k \geq -1$ y $B \in \text{Br}_k(\mathbf{X})$ entonces:

$$\text{Ev}(\phi)(B)(v) = \alpha_I^i \circ \tau_Q(v) v^I \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta_J^j \circ \tau_Q(v) v^J \frac{\partial}{\partial v^i}; \quad |I| = k, |J| = k+1, \quad (3.8)$$

donde las α_I^i, β_J^j son funciones lisas en Q .

Nota: En lugar de $\alpha_I^i \circ \tau_Q, \beta_J^i \circ \tau_Q$ escribiremos α_I^i, β_J^i con la convención de que $q = \tau_Q(v)$.

Demostración: Sea $B \in \text{Br}_k(\mathbf{X})$; B se puede expresar como la suma de abrientes (del mismo tipo, es decir, en $\text{Br}_k(\mathbf{X})$). Por lo tanto es suficiente mostrar el resultado para corchetes de la forma (3.4).

La demostración es por inducción en la longitud de B . Para $\text{longitud}(B) = 1$ tenemos $\text{Ev}(\phi)(B) = Z$ donde $Z \in \{S, Y_1^{\text{lift}}, \dots, Y_m^{\text{lift}}, (dV^\#)^{\text{lift}}\}$, por lo tanto, de [5], se puede ver fácilmente que Z satisface (3.8).

Ahora, sea $B \in \text{Br}_k(\mathbf{X})$ de la forma (3.4), supongamos que el resultado es verdad para los corchetes de longitud menor o igual a $l \in \mathbb{Z}$ ($\text{longitud}(B) \leq l$). Sea $B \in \text{Br}_k(\mathbf{X})$ de la forma (3.4) y $\text{longitud}(B) = l+1$, entonces, B es de la forma $B = [X_0, \bar{B}]$ o bien $B = [X_i, \bar{B}]$, $i \in \{1, \dots, m+1\}$ (observe que ambos satisfacen (3.7)). Como $\text{longitud}(\bar{B}) = l$ se tiene que \bar{B} satisface (3.8), es decir:

$$\text{Ev}(\phi)(\bar{B}) = U = \alpha_I^i v^I \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta_J^i v^J \frac{\partial}{\partial v^i},$$

donde $|I| = l-1, |J| = l$ por el Lema (3.4.1).

Para el caso $B = [X_0, \bar{B}]$ tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Ev}(\phi)([X_0, \bar{B}]) &= [S, U] \\ &= \left(v^s \frac{\partial}{\partial q^s} - \Gamma_{mn}^s v^m v^n \frac{\partial}{\partial v^s} \right) \left(\alpha_I^i v^I \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta_J^i v^J \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\ &\quad - \left(\alpha_I^i v^I \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta_J^i v^J \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \left(v^s \frac{\partial}{\partial q^s} - \Gamma_{mn}^s v^m v^n \frac{\partial}{\partial v^s} \right) \\ &= \left(v^s \left(\frac{\partial \alpha_I^i}{\partial q^s} v^I + \frac{\partial \beta_J^i}{\partial q^s} v^J \right) - \Gamma_{mn}^s v^m v^n \left(\alpha_I^i \frac{\partial v^I}{\partial v^s} + \beta_J^i \frac{\partial v^J}{\partial v^s} \right) \right) \\ &\quad - \left(\alpha_I^i v^I v^m v^n \left(-\frac{\partial \Gamma_{mn}^s}{\partial q^i} \right) + \beta_J^i \Gamma_{mn}^s v^J \left(\frac{\partial v^s}{\partial v^i} - v^n \frac{\partial v^m}{\partial v^i} - v^m \frac{\partial v^n}{\partial v^i} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial \alpha_I^i}{\partial q^s} v^{\bar{I}} + \frac{\partial \beta_J^i}{\partial q^s} v^{\bar{J}} - \Gamma_{mn}^s \alpha_I^s v^{\bar{I}} - \Gamma_{mn}^s \beta_J^s v^{\bar{J}} \right) \\ &\quad - \left(\alpha_I^i \frac{\partial \Gamma_{mn}^s}{\partial q^i} v^{\bar{J}} + \beta_J^i v^{\bar{I}} - \beta_J^i \Gamma_{in}^s v^{\bar{J}} - \beta_J^i \Gamma_{mi}^s v^{\bar{J}} \right), \end{aligned}$$

con $|\bar{I}| = l, |\bar{J}| = l+1$, simplificando (agrupando términos) tenemos:

$$\text{Ev}(\phi)([X_0, \bar{B}]) = \bar{\alpha}_{\bar{I}}^i v^{\bar{I}} \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{\beta}_{\bar{J}}^i v^{\bar{J}} \frac{\partial}{\partial v^i},$$

donde $\bar{\alpha}_{\bar{I}}^i, \bar{\beta}_{\bar{J}}^i$ sólo dependen de las variables de configuración, además, como $B = [X_0, \bar{B}]$ satisface la desigualdad (3.7) se tiene que el resultado es válido para todo $B \in \text{Br}_k(\mathbf{X})$ de

longitud(B) = $l + 1$.

Para el caso $B = [X_i, \bar{B}]$, $i \in \{1, \dots, m + 1\}$ se tiene $\text{Ev}(\phi)([X_i, \bar{B}]) = [Z, U]$ donde $Z \in \{Y_1^{\text{lift}}, \dots, Y_m^{\text{lift}}, (dV^{\#})^{\text{lift}}\}$, como Z es un levantamiento vertical (lift) se puede expresar de la forma $\gamma^s \frac{\partial}{\partial v^s}$ donde γ^s depende sólo de las variables de configuración. Desarrollando $\text{Ev}(\phi)([X_i, \bar{B}])$ tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Ev}(\phi)([X_i, \bar{B}]) &= [Z, U] \\ &= \left(\gamma^s \frac{\partial}{\partial v^s} \right) \left(\alpha_I^i v^I \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta_J^i v^J \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\ &\quad - \left(\alpha_I^i v^I \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta_J^i v^J \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \left(\gamma^s \frac{\partial}{\partial v^s} \right) \\ &= \left(\gamma^s \left(\alpha_I^i \frac{\partial v^I}{\partial v^s} + \beta_J^i \frac{\partial v^J}{\partial v^s} \right) \right) - \left(\alpha_I^i v^I \frac{\partial \gamma^s}{\partial q^i} \right) \\ &= \left(\gamma^s \alpha_I^i v^{\bar{I}} + \gamma^s \beta_J^i v^{\bar{J}} - \alpha_I^i \frac{\partial \gamma^s}{\partial q^i} v^{\bar{J}} \right) \end{aligned}$$

con $|\bar{I}| = l - 2$, $|\bar{J}| = l - 1$, simplificando (agrupando términos) tenemos:

$$\text{Ev}(\phi)([X_i, \bar{B}]) = \bar{\alpha}_{\bar{I}}^i v^{\bar{I}} \frac{\partial}{\partial q^i} + \bar{\beta}_{\bar{J}}^i v^{\bar{J}} \frac{\partial}{\partial v^i},$$

donde $\bar{\alpha}_{\bar{I}}^i, \bar{\beta}_{\bar{J}}^i$ sólo dependen de las variables de configuración, además, como $B = [X_i, \bar{B}]$ satisface la desigualdad (3.7) se tiene que el resultado es válido para todo $B \in \text{Br}_k(\mathbf{X})$ de longitud(B) = $l + 1$. ■

Ahora veremos los tipos de corchetes que contribuyen a la codistribución (3.5). Con estas simplificaciones nos dispondremos a desarrollar el resultado principal de esta tesis. Los corchetes del tipo $\text{Br}_l(\mathbf{X})$, para $l \leq -2$ son idénticamente cero, ver [3, Lema 4.8]. Por lo tanto, los corchetes de este tipo no contribuyen a modificar el rango de la codistribución (3.5).

Lema 3.4.3. *Sea l un entero tal que $l \notin \{0, 1\}$ y sea $B \in \text{Br}_l(\mathbf{X})$. Si $U = \text{Ev}(\phi)(B)$ entonces $d(L_U(h_i \circ \tau_Q))(0_q) = 0$ para toda $i \in \{1, \dots, p\}$ y $q \in Q$.*

Demostración: Para el caso $B \in \text{Br}_{-1}(\mathbf{X})$ sabemos que $U = \text{Ev}(\phi)(B)$ es el levantamiento vertical de un campo vectorial en Q , es decir, $U = \alpha^i \frac{\partial}{\partial v^i}$. Por las suposiciones adoptadas, las funciones de salida $h_i \circ \tau_Q$ dependen sólo de las variables de configuración, por lo tanto $U(h_j \circ \tau_Q) = \alpha^i \frac{\partial}{\partial v^i}(h_j \circ \tau_Q) = 0$ para $j = 1, \dots, p$.

Sea $l \geq 2$ un entero y sea $B \in \text{Br}_{-l}(\mathbf{X})$, entonces $\text{Ev}(\phi)(B) = 0$, tal como se demuestra en [3, Lema 4.8]. De ello se sigue que, si $U = \text{Ev}(\phi)(B)$, $d(L_U(h_i \circ \tau_Q))(0_q) = 0$ para $i = 1, \dots, p$.

Para $l = 2$, sea $U = \text{Ev}(\phi)(B)$ con $B \in \text{Br}_2(\mathbf{X})$. Por el Lema (3.4.2), utilizando el hecho que

$$\begin{aligned} |I| &= \sum_{i=1}^n k_i = 2 \implies v^I = v^j v^k \\ |J| &= \sum_{i=1}^n s_i = 3 \implies v^J = v^j v^k v^l \\ & \quad j, k, l \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

deducimos que U es de la forma

$$U = \mu_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial}{\partial q^i} + \gamma_{jkl}^i v^j v^k v^l \frac{\partial}{\partial v^i},$$

donde μ_{jk}^i y γ_{jkl}^i son funciones lisas en Q .

Evaluando la derivada de Lie de $h_r \circ \tau_Q$ a lo largo de U se obtiene

$$\begin{aligned} L_U(h_r \circ \tau_Q) &= U(h_r \circ \tau_Q) \\ &= \left(\mu_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial}{\partial q^i} + \gamma_{jkl}^i v^j v^k v^l \frac{\partial}{\partial v^i} \right) (h_r \circ \tau_Q) \\ &= \left(\mu_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^i} \right), \end{aligned}$$

cuya diferencial es

$$\begin{aligned} d(U(h_r \circ \tau_Q)) &= d \left(\mu_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^i} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mu_{jk}^i}{\partial q^l} v^j v^k \frac{\partial(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^i} + \mu_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial^2(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^l \partial q^i} \right) dq^l \\ &\quad + \left(\mu_{jk}^i \frac{\partial v^j}{\partial v^l} v^k \frac{\partial(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^i} + \mu_{jk}^i v^j \frac{\partial v^k}{\partial v^l} \frac{\partial(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^i} \right) dv^l \\ &= \left(\frac{\partial \mu_{jk}^i}{\partial q^l} v^j v^k \frac{\partial(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^i} + \mu_{jk}^i v^j v^k \frac{\partial^2(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^l \partial q^i} \right) dq^l \\ &\quad + \left(\mu_{ik}^i v^k \frac{\partial(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^i} + \mu_{jl}^i v^j \frac{\partial(h_r \circ \tau_Q)}{\partial q^i} \right) dv^l. \end{aligned}$$

Finalmente, al evaluar en puntos de la cero-sección $Z(TQ)$, los que se caracterizan por tener componentes de velocidad nulas ($v^i = 0, i = 1, \dots, n$), deducimos que $d(U(h_r \circ \tau_Q))(0_q) = 0$ para $r = 1, \dots, p$.

Ahora, para el caso $l > 2$, basados en el caso anterior y en el Lema 3.8, notemos que las componentes de $d(L_U(h_i \circ \tau_Q))$ en las direcciones dq^i y dv^i dependen de v de manera polinomial con grado mayor o igual a 1. Por lo tanto, al evaluar en puntos de la cero-sección, la diferencial se anula. ■

Del lema anterior podemos observar que los corchetes de los tipos 0 y 1 son los únicos que juegan un papel significativo, por medio del mapeo $\text{Ev}(\phi)$, en la codistribución $d\mathcal{O}$.

A continuación desarrollaremos algunas otras herramientas necesarias para la demostración del Teorema principal de esta tesis.

Sea $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\text{Ev}(\phi)(B) : B \in \text{Br}_0(\mathbf{X})\}$, es decir, el subespacio vectorial de $\Gamma(TTQ)$ engendrado por los elementos en la imagen de $\text{Br}_0(\mathbf{X})$ por $\text{Ev}(\phi)$. Una propiedad interesante de $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ se establece en el lema siguiente:

Lema 3.4.4. *Con la suma, la multiplicación por escalares y el corchete de Lie heredados de $\Gamma(TTQ)$, $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ es una subálgebra de Lie de $\Gamma(TTQ)$.*

Demostración: Sean $X, Y \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X}))$. Entonces $X = \alpha^i \text{Ev}(\phi)(X_i)$ y $Y = \beta^j \text{Ev}(\phi)(Y_j)$, con α^i, β^j reales y X_i, Y_j en $\text{Br}_0(\mathbf{X})$. Tenemos:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [\alpha^i \text{Ev}(\phi)(X_i), \beta^j \text{Ev}(\phi)(Y_j)] \\ &= \alpha^i \beta^j [\text{Ev}(\phi)(X_i), \text{Ev}(\phi)(Y_j)] \\ &= \alpha^i \beta^j \text{Ev}(\phi)([X_i, Y_j]). \end{aligned}$$

Pero $[X_i, Y_j] \in \text{Br}_0(\mathbf{X})$, lo que se demuestra fácilmente. Entonces $[X, Y] \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$, de donde se sigue que $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ es una subálgebra de Lie de $\Gamma(TTQ)$. ■

Lema 3.4.5. *Sea \mathcal{R} la relación definida en $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ al establecer que*

$$X\mathcal{R}Y \iff X(f \circ \tau_Q) = Y(f \circ \tau_Q) \quad \forall f \in C^\infty(Q).$$

Entonces \mathcal{R} es una relación de equivalencia y el cociente $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle / \mathcal{R}$ posee una estructura de álgebra de Lie gracias a la suma, la multiplicación por escalares y el corchete de Lie inducidos por las operaciones correspondientes en $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$.

Demostración: Las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad de \mathcal{R} se siguen de las propiedades correspondientes de la igualdad. Por lo tanto, tiene sentido hablar del cociente $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle / \mathcal{R}$. Las operaciones de suma, multiplicación por escalares y el corchete de Lie se definen por medio de representantes. Más precisamente, si $B, C \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ están representadas por X y Y respectivamente, es decir, $B = [X]$ y $C = [Y]$, donde $[\cdot]$ representa la proyección canónica, entonces:

$$\begin{aligned} B + C &\triangleq [X + Y] \\ \alpha B &\triangleq [\alpha X], \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ [B, C] &\triangleq [[X, Y]]. \end{aligned}$$

Para mostrar que tales operaciones están bien definidas, consideremos $\bar{X}, \bar{Y} \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X}))$ tales que $B = [X] = [\bar{X}]$ y $C = [Y] = [\bar{Y}]$. Entonces, para toda $f \in C^\infty(Q)$:

$$\begin{aligned} (\bar{X} + \bar{Y})(f \circ \tau_Q) &= \bar{X}(f \circ \tau_Q) + \bar{Y}(f \circ \tau_Q) \\ &= X(f \circ \tau_Q) + Y(f \circ \tau_Q) \\ &= (X + Y)(f \circ \tau_Q). \end{aligned}$$

Así, $[\bar{X} + \bar{Y}] = [X + Y]$, por lo que la suma está bien definida. Similarmente se muestra que $[\alpha \bar{X}] = [\alpha X]$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$. Por otro lado se tiene, para toda $f \in C^\infty(Q)$:

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}] &= \bar{X}(\bar{Y}(f \circ \tau_Q)) - \bar{Y}(\bar{X}(f \circ \tau_Q)) \\ &= \bar{X}(Y(f \circ \tau_Q)) - \bar{Y}(X(f \circ \tau_Q)). \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $X, Y \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X}))$, del Lema 3.8 deducimos que

$$\begin{aligned} X(v) &= \alpha^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \beta_j^i(q) v^j \frac{\partial}{\partial v^i} \\ Y(v) &= \gamma^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \delta_j^i(q) v^j \frac{\partial}{\partial v^i}, \end{aligned}$$

donde $\alpha^i, \gamma^i, \beta_j^i, \delta_j^i$ son funciones en $C^\infty(Q)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} X(f \circ \tau_Q) &= \left(\alpha^i(q) \frac{\partial f}{\partial q^i} \right) \circ \tau_Q \\ Y(f \circ \tau_Q) &= \left(\gamma^i(q) \frac{\partial f}{\partial q^i} \right) \circ \tau_Q, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}](f \circ \tau_Q) &= \bar{X} \left(\left(\gamma^i(q) \frac{\partial f}{\partial q^i} \right) \circ \tau_Q \right) + \bar{Y} \left(\left(\alpha^i(q) \frac{\partial f}{\partial q^i} \right) \circ \tau_Q \right) \\ &= X(Y(f \circ \tau_Q)) - Y(X(f \circ \tau_Q)) \\ &= [X, Y](f \circ \tau_Q). \end{aligned}$$

Así, $[[\bar{X}, \bar{Y}]] = [[X, Y]]$. Las propiedades de Bilinealidad, Antisimetría e identidad de Jacobi se deducen de manera directa de las operaciones anteriores, por lo tanto se concluye que el corchete de Lie está bien definido. ■

Sea $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ un conjunto de m "indeterminadas" y consideremos el álgebra simétrica $S(W)$. Definimos $\chi : W \rightarrow \bar{\mathcal{Y}}$ por

$$\chi(w_i) = Y_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Definimos $\text{Ev}(\chi) : L(S(W)) \rightarrow \Gamma(TQ)$ como el homomorfismo de álgebras de Lie que “evalúa” un elemento de $L(S(W))$ “substituyendo” w_i 's por Y_i 's, $\text{Ev}(\chi)(w_i) = Y_i$. Además el mapeo $\text{Ev}(\chi)$ satisface:

$$\begin{aligned}\text{Ev}(\chi)(\langle Z_1 : Z_2 \rangle) &= \langle \text{Ev}(\chi)(Z_1) : \text{Ev}(\chi)(Z_2) \rangle \\ \text{Ev}(\chi)([Z_1, Z_2]) &= [\text{Ev}(\chi)(Z_1), \text{Ev}(\chi)(Z_2)].\end{aligned}$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\tau} & L(S(W)) \xrightarrow{\pi_L} L(S(W))/I \\ \downarrow \chi & & \downarrow \text{Ev}(\chi) \\ \overline{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{i} & \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}})) \end{array} \quad (3.9)$$

Donde π_L es la proyección canónica del álgebra de Lie libre $L(S(W))$ en el cociente $L(S(W))/I$ y τ es el mapeo de “inclusión” canónico de W en $L(S(W))$. Por ligero abuso de notación, escribiremos $\tau(w_i) = w_i$.

Ahora definamos el mapeo $\alpha : \text{Pr}(W) \rightarrow \Gamma(TTQ)$ como

$$\alpha(P) \triangleq (\text{Ev}(\chi)(P))^{\text{lift}}.$$

De nuevo, abusaremos ligeramente de la notación al escribir sólo w_i en vez de $\pi_L \circ \tau(w_i)$.

Lema 3.4.6. α *satisface, para todo* $P_1, P_2 \in \text{Pr}(W)$:

$$\alpha(\langle P_1 : P_2 \rangle) = [\alpha(P_1), [S, \alpha(P_2)]]$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\alpha(\langle P_1 : P_2 \rangle) &\triangleq (\text{Ev}(\chi)(\langle P_1 : P_2 \rangle))^{\text{lift}} \\ &= \langle \text{Ev}(\chi)(P_1) : \text{Ev}(\chi)(P_2) \rangle^{\text{lift}}\end{aligned}$$

utilizando el resultado de Lewis y Murray [6, sección 4.3]

$$\begin{aligned}\langle \text{Ev}(\chi)(P_1) : \text{Ev}(\chi)(P_2) \rangle^{\text{lift}} &= [(\text{Ev}(\chi)(P_1))^{\text{lift}}, [S, (\text{Ev}(\chi)(P_2))^{\text{lift}}]] \\ &= [\alpha(P_1), [S, \alpha(P_2)]]\end{aligned}$$

por lo tanto $\alpha(\langle P_1 : P_2 \rangle) = [\alpha(P_1), [S, \alpha(P_2)]]$. ■

Lema 3.4.7. $\alpha(\text{Pr}(W)) \subset \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_{-1}(X))$ *siempre que* $\phi(X_i) = (\chi(w_i))^{\text{lift}}$ *para todo* $i \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración: Procedemos por inducción en la longitud k (productos simétricos iterados) de P en $\alpha(P)$.

Para $k = 1$, $P \in W$, de forma que $\alpha(P) = (\text{Ev}(\chi)(P))^{\text{lift}} = (\text{Ev}(\chi)(w_i))^{\text{lift}}$ para algún i .

Con referencia al diagrama 3.9, vemos que éste conmuta, debido a que

$$\begin{aligned} i \circ \chi(w_i) &= i(Y_i) = Y_i \\ \text{Ev}(\chi) \circ \pi_L \circ \tau(w_i) &= \text{Ev}(\chi)(w_i) = Y_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\text{Ev}(\chi)(w_i))^{\text{lift}} = (Y_i)^{\text{lift}} = \phi(X_i) = \text{Ev}(\phi)(X_i)$, con $X_i \in \text{Br}_{-1}(\mathbf{X})$.

Supongamos que $\alpha(P) \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_{-1}(\mathbf{X}))$, $\forall P \in \text{Pr}^k(W)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Sea $P = \langle P_1 : P_2 \rangle \in \text{Pr}^{k+1}(W)$. Como $l(P_1) \geq 1$ (longitud de P_1), $l(P_2) \geq 1$ y $l(P_1) + l(P_2) = k + 1$, entonces $k + 1 = l(P_1) + l(P_2) \geq l(P_1) + 1$ y, por lo tanto, $l(P_1) \leq k$ (de la misma manera para $l(P_2) \leq k$).

Se sigue entonces que $\alpha(P_i) = \text{Ev}(\phi)(Q_i)$ con $Q_i \in \text{Br}_{-1}(\mathbf{X})$, $i = 1, 2$. Entonces, usando el Lema 3.4.6

$$\begin{aligned} \alpha(\langle P_1 : P_2 \rangle) &= [\alpha(P_1), [S, \alpha(P_2)]] \\ &= [\text{Ev}(\phi)(Q_1), [\text{Ev}(\phi)(X_0), \text{Ev}(\phi)(Q_2)]] \\ &= \text{Ev}(\phi)([Q_1, [X_0, Q_2]]) \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_{-1}(\mathbf{X})) \end{aligned}$$

puesto que $[Q_1, [X_0, Q_2]] \in \text{Br}_{-1}(\mathbf{X})$. ■

Sea el mapeo $\hat{\psi} : S(W) \rightarrow \Gamma(TTQ)$ definido por

$$\hat{\psi}(P) = -[S, \alpha(P)].$$

El mapeo $\hat{\psi}$ se extiende al cociente $L(S(W))/I$ imponiendo que $\hat{\psi}$ sea un homomorfismo de álgebras de Lie, esto es, $\hat{\psi}$ se define para que tenga las propiedades:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(a^i P_i) &= a^i \hat{\psi}(P_i), \quad \forall a^i \in \mathbb{R} \\ \hat{\psi}([P, Q]) &= [\hat{\psi}(P), \hat{\psi}(Q)], \quad \forall P, Q \in L(S(W))/I. \end{aligned}$$

Observación: Nótese que $\hat{\psi}$ no es un homomorfismo de álgebras simétricas.

Lema 3.4.8. $\hat{\psi}(L(S(W))/I) \subset \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ siempre que $\phi(X_i) = (\chi(w_i))^{\text{lift}}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración: Utilizando el hecho de que los corchetes “abrientes” forman un conjunto generador en $L(\mathbf{X})$ para cualquier conjunto \mathbf{X} , y en virtud de la bilinealidad del corchete de Lie, se muestra fácilmente que un conjunto generador de $L(S(W))/I$ consiste de los elementos de la forma:

$$P = [X_1, [X_2, [\dots [X_{k-1}, X_k] \dots]]] \quad (3.10)$$

con $X_i \in \text{Pr}(W)$ (en realidad $\pi_L(\text{Pr}(W))$), pero omitiremos la proyección π_L para simplificación de escritura en los cálculos).

Por lo tanto basta demostrar que si P es un elemento de la forma (3.10), entonces $\widehat{\psi}(P) \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X}))$ para todo k . Procedemos por inducción en la longitud k .

Si P es de la forma (3.10) con $k = 1$, entonces $P \in \text{Pr}(W)$. Por ende $\widehat{\psi}(P) = -[S, \alpha(P)]$. Ahora bien, en virtud del lema anterior, $\alpha(\text{Pr}(W)) \subset \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_{-1}(\mathbf{X}))$ por lo que existe $B \in \text{Br}_{-1}(\mathbf{X})$ tal que $\alpha(P) = \text{Ev}(\phi)(B)$.

Entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(P) &= -[S, \text{Ev}(\phi)(B)] \\ &= -\text{Ev}(\phi)([X_0, B]),\end{aligned}$$

de donde $\widehat{\psi}(P) \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X}))$ ya que $[X_0, B] \in \text{Br}_0(\mathbf{X})$.

Supongamos ahora que todo corchete de la forma (3.10) y de longitud menor o igual que k satisface $\widehat{\psi}(P) \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X}))$.

Sea P de la forma (3.10) pero con longitud $k + 1$:

$$P = [X_1, [X_2, [\dots [X_k, X_{k+1}] \dots]]].$$

Entonces

$$\widehat{\psi}(P) = [\widehat{\psi}(X_1), \widehat{\psi}([X_2, [\dots [X_k, X_{k+1}] \dots]])]$$

pero, como las longitudes de $\widehat{\psi}(X_1)$ y de $\widehat{\psi}([X_2, [\dots [X_k, X_{k+1}] \dots]])$ son menores o iguales que k , por la hipótesis de inducción existen $B_1, B_2 \in \text{Br}_0(\mathbf{X})$ tales que $\widehat{\psi}(X_1) = \text{Ev}(\phi)(B_1)$ y $\widehat{\psi}([X_2, [\dots [X_k, X_{k+1}] \dots]]) = \text{Ev}(\phi)(B_2)$.

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(P) &= [\text{Ev}(\phi)(B_1), \text{Ev}(\phi)(B_2)] \\ &= \text{Ev}(\phi)([B_1, B_2]) \in \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})),\end{aligned}$$

ya que $[B_1, B_2] \in \text{Br}_0(\mathbf{X})$. Esto completa la demostración por inducción. ■

Lema 3.4.9. $\widehat{\psi}$ se factoriza a través del cociente $(L(S(W))/I)/\ker(\text{Ev}(\chi))$, es decir, $\widehat{\psi}$ define un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\overline{\psi} : (L(S(W))/I)/\ker(\text{Ev}(\chi)) \rightarrow \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle.$$

Observación: Nótese que $(L(S(W))/I)/\ker(\text{Ev}(\chi))$ no es más que una "copia" de $\text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$.

Demostración: Utilizando el hecho de que los corchetes de la forma (3.10) con $X_i \in \text{Pr}(W)$ son generadores de $L(S(W))/I$ y de que $\widehat{\psi}$ es un homomorfismo de álgebras de

Lie, basta con mostrar que, si $P_1, P_2 \in \text{Pr}(W)$ son tales que $\text{Ev}(\chi)(P_1) = \text{Ev}(\chi)(P_2)$ entonces $\widehat{\psi}(P_1) = \widehat{\psi}(P_2)$.

Sean $P_1, P_2 \in \text{Pr}(W)$ tales que $\text{Ev}(\chi)(P_1) = \text{Ev}(\chi)(P_2)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(P_1) &= -[S, \alpha(P_1)] \\ &= -[S, (\text{Ev}(\chi)(P_1))^{\text{lift}}] \\ &= -[S, (\text{Ev}(\chi)(P_2))^{\text{lift}}] \\ &= \widehat{\psi}(P_2).\end{aligned}$$

■

De los resultados anteriores formamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}L(S(W))/I & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle & \xrightarrow{\pi} & \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle / \mathcal{R} \\ \text{Ev}(\chi) \downarrow & \searrow \widehat{\pi} & \uparrow \overline{\psi} & \nearrow \pi \circ \overline{\psi} & \\ \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}})) & \xrightarrow{\beta} & (L(S(W))/I) / \ker(\text{Ev}(\chi)) & & \end{array} \quad (3.11)$$

Definamos el mapeo $\psi : \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}})) \rightarrow \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ dado por

$$\psi = \pi \circ \overline{\psi} \circ \beta.$$

Lema 3.4.10. Para cada $X \in \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$ se tiene $\psi(X) = [-[S, X^{\text{lift}}]]$.

Demostración: Procedemos por inducción en la longitud k (como corchete de Lie de productos simétricos). Sea $X \in \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$ de la forma (3.10), para $k = 1$, $X = X_i \in \text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}})$ para algún i . Existe entonces $\overline{X} \in L(S(W))/I$ tal que $X = \text{Ev}(\chi)(\overline{X})$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\psi(X) &= \pi \circ \overline{\psi} \circ \beta(\overline{X}) \\ &= \pi \circ \overline{\psi} \circ \beta(\text{Ev}(\chi)(\overline{X})) \\ &= \pi \circ \widehat{\psi}(\overline{X}) \\ &= [-[S, (\text{Ev}(\chi)(\overline{X}))^{\text{lift}}]] \\ &= [-[S, X^{\text{lift}}]].\end{aligned}$$

Ahora supongamos que la hipótesis es verdad para corchetes de longitud menor o igual que k . Sea X de longitud $k+1$ de la forma (3.10), es decir, $X = [X_1, [X_2, [\dots [X_k, X_{k+1}] \dots]]]$,

donde $X_i \in \text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}})$ para $i = 1, \dots, k+1$. Para cada X_i existe $\overline{X}_i \in L(S(W))/I$ tal que $X_i = \text{Ev}(\chi)(\overline{X}_i)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\psi(X) &= \pi \circ \overline{\psi} \circ \beta(X) \\ &= \pi \circ \overline{\psi} \circ \beta([X_1, [X_2, [\dots [X_k, X_{k+1}] \dots]]) \\ &= \pi \circ \overline{\psi} \circ \beta([\text{Ev}(\chi)(\overline{X}_1), [\text{Ev}(\chi)(\overline{X}_2), [\dots [\text{Ev}(\chi)(\overline{X}_k), \text{Ev}(\chi)(\overline{X}_{k+1})] \dots]]) \\ &= \pi \circ \widehat{\psi}([\overline{X}_1, [\overline{X}_2, [\dots [\overline{X}_k, \overline{X}_{k+1}] \dots]]).\end{aligned}$$

Puesto que $\widehat{\psi}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, se tiene

$$\psi(X) = \pi \circ [\widehat{\psi}(\overline{X}_1), \widehat{\psi}([\overline{X}_2, [\dots [\overline{X}_k, \overline{X}_{k+1}] \dots]])],$$

con $Q = \text{Ev}(\chi)(\overline{Q}) = [\text{Ev}(\chi)(\overline{X}_2), [\dots [\text{Ev}(\chi)(\overline{X}_k), \text{Ev}(\chi)(\overline{X}_{k+1})] \dots]]$. Como Q es de longitud k , por la hipótesis de inducción, se tiene

$$\begin{aligned}\psi(Q) &= \pi \circ \overline{\psi} \circ \beta(Q) \\ &= \pi \circ \overline{\psi} \circ \beta(\text{Ev}(\chi)(\overline{Q})) \\ &= \pi \circ \widehat{\psi}(\overline{Q}) \\ &= [-[S, (\text{Ev}(\chi)(\overline{Q}))^{\text{lift}}]] \\ &= [-[S, Q^{\text{lift}}]].\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\psi(X) &= \pi \circ ([\widehat{\psi}(\overline{X}_1), \widehat{\psi}([\overline{X}_2, [\dots [\overline{X}_k, \overline{X}_{k+1}] \dots]])]) \\ &= \pi \circ ([\widehat{\psi}(\overline{X}_1), \widehat{\psi}(\overline{Q})]) \\ &= \pi \circ [-[S, X_1^{\text{lift}}], -[S, Q^{\text{lift}}]] \\ &= [[[S, X_1^{\text{lift}}], [S, Q^{\text{lift}}]],\end{aligned}$$

utilizando el resultado de [6, ecuación 4.3], se cumple que

$$-[S, [X, Y]^{\text{lift}}](f \circ \tau_Q) = [[S, X^{\text{lift}}], [S, Y^{\text{lift}}]](f \circ \tau_Q), \quad \forall f \in C^\infty(Q).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\psi(X) = [-[S, [X_1, Q]^{\text{lift}}]].$$

Esto completa la prueba del lema. ■

Lema 3.4.11. Para todo $C \in \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$ existe $U \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ tal que

$$L_U(f \circ \tau) = L_C f \circ \tau, \quad \forall f \in C^\infty(Q).$$

Demostración: Sea $U \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ tal que $\pi(U) = \psi(C) = \pi \circ \bar{\psi} \circ \beta(C)$. Sea $\bar{C} \in L(S(W))/I$ tal que $\text{Ev}(\chi)(\bar{C}) = C$. Por suposición de que $\pi(U) = \psi(C)$, se tiene $U(f \circ \tau) = (\bar{\psi} \circ \beta(C))(f \circ \tau)$ para toda $f \in C^\infty(Q)$.

Ahora bien, por el Lema 3.4.10 se tiene:

$$\begin{aligned} U(f \circ \tau) &= -[S, C^{\text{lift}}](f \circ \tau) \\ &= -S(C^{\text{lift}}(f \circ \tau)) + C^{\text{lift}}(S(f \circ \tau)) \\ &= C^j \frac{\partial}{\partial v^j} (v^i \frac{\partial}{\partial q^i} (f \circ \tau)) \\ &= (C^i \frac{\partial}{\partial q^i} f) \circ \tau \\ &= C(f) \circ \tau. \end{aligned}$$

Esto prueba que $L_U(f \circ \tau) = L_C f \circ \tau$. ■

Del Lema anterior establecemos el siguiente Teorema que es parte importante del resultado principal de este trabajo.

Teorema 3.4.12. *Para todo $C \in \text{Lie}(\text{Sym}(\bar{\mathcal{Y}}))$ existe $U \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ tal que*

$$d(L_U(f \circ \tau))(0_q) = d(L_C f) \circ \tau(0_q), \quad \forall f \in C^\infty(Q).$$

Demostración: Del Lema 3.4.11 sabemos que las funciones definidas por $L_U(f \circ \tau)$ y $L_C f \circ \tau$ son iguales, por lo tanto al obtener las diferenciales y evaluarlas en puntos de la cero-sección obtenemos la igualdad

$$d(L_U(f \circ \tau))(0_q) = d(L_C f) \circ \tau(0_q).$$
■

De Lema 3.4.11 podemos darnos cuenta que las funciones en $\tilde{\mathcal{O}}$ no dependen de las coordenadas correspondientes a las velocidades, por lo tanto, al obtener la diferencial correspondiente las componentes dv^i son cero. Más adelante obtendremos provecho de este hecho para la demostración del resultado principal.

Hasta este punto hemos establecido una correspondencia entre campos definidos en $\text{Lie}(\text{Sym}(\bar{\mathcal{Y}}))$ y campos definidos en $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$. Ahora se establecerá una correspondencia entre campos de $\text{Lie}(\text{Sym}(\bar{\mathcal{Y}}))$ y campos de $\langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_1(\mathbf{X})) \rangle$.

Lema 3.4.13. *[5, sección 5.5] Sea $C \in \Gamma(TQ)$, entonces*

$$[S, C^{\text{lift}}] = -C^k \frac{\partial}{\partial q^k} + v^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} C^k + 2C^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial v^k}.$$

Demostración: La demostración se realiza en las coordenadas naturales en TQ denotadas por $(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n)$. Para toda $f \in C^\infty(Q)$ se tiene

$$\begin{aligned}
[S, C^{\text{lift}}](f) &= v^k \frac{\partial}{\partial q^k} \left(C^l \frac{\partial}{\partial v^l} f \right) - \Gamma_{ij}^k v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k} \left(C^l \frac{\partial}{\partial v^l} f \right) \\
&\quad - C^l \frac{\partial}{\partial v^l} \left(v^k \frac{\partial}{\partial q^k} f - \Gamma_{ij}^k v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k} f \right) \\
&= v^k \frac{\partial}{\partial q^k} C^l \frac{\partial}{\partial v^l} f - \Gamma_{ij}^k v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k} C^l \frac{\partial}{\partial v^l} f - C^l \delta_l^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \\
&\quad + C^l \frac{\partial}{\partial v^k} f \Gamma_{ij}^k (\delta_l^i v^j + v^i \delta_l^j) \\
&= -C^k \frac{\partial}{\partial q^k} f + \left(v^k \frac{\partial}{\partial q^k} C^l - \Gamma_{ij}^k v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k} C^l \right) \frac{\partial}{\partial v^l} f + (C^i \Gamma_{ij}^l v^j + C^j \Gamma_{ij}^l v^i) \frac{\partial}{\partial v^l} f \\
&= -C^k \frac{\partial}{\partial q^k} f + \left(v^j \frac{\partial}{\partial q^j} C^l + 2\Gamma_{ij}^l v^j \right) \frac{\partial}{\partial v^l} f \quad (\text{utilizando } \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k) \\
&= -C^k \frac{\partial}{\partial q^k} f + v^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} C^k + 2C^j \Gamma_{ji}^k \right) \frac{\partial}{\partial v^k} f
\end{aligned}$$

Teorema 3.4.14. Sea $C \in \Gamma(TQ)$. Para toda $f \in C^\infty(Q)$ la componente de

$$d(L_{[S, C^{\text{lift}}]}(f \circ \tau_Q))(0_q)$$

en la dirección dv^j es igual a la componente de

$$-2\nabla C(f)(q)$$

en la dirección dq^j , $j = 1, \dots, n$.

Demostración: Sea

$$\begin{aligned}
B = [S, C^{\text{lift}}] &= -C^k \frac{\partial}{\partial q^k} f + v^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} C^k + 2C^j \Gamma_{ji}^k \right) \frac{\partial}{\partial v^k} f \quad \text{por el lema anterior} \\
&= B^k \frac{\partial}{\partial q^k} + v^i B_i^k \frac{\partial}{\partial v^k}
\end{aligned}$$

con $B^k = -C^k$ y $B_i^k = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} C^k + 2C^j \Gamma_{ji}^k \right)$. Desarrollando $[S, B]$ en coordenadas

$$\begin{aligned}
[S, B] &= \left(v^l \frac{\partial}{\partial q^l} B^k + v^r B_r^k \right) \frac{\partial}{\partial q^k} + \left(v^l v^i \frac{\partial}{\partial q^k} B_i^k - \Gamma_{rs}^l v^r v^s B_l^k \right. \\
&\quad \left. + B^l v^i v^j \frac{\partial}{\partial q^l} \Gamma_{ij}^k v^r B_r^i \Gamma_{ij}^k v^j + v^r B_r^j \Gamma_{ij}^k v^i \right) \frac{\partial}{\partial v^k}.
\end{aligned}$$

De forma que:

$$L_{[S,B]}(f \circ \tau_Q) = \left(v^l \frac{\partial}{\partial q^l} B^k + v^r B_r^k \right) \frac{\partial}{\partial q^k} f$$

y

$$\begin{aligned} d(L_{[S,B]}(f \circ \tau_Q)) &= d \left(\left(v^l \frac{\partial}{\partial q^l} B^k + v^r B_r^k \right) \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) \\ &= d \left(v^l \frac{\partial}{\partial q^l} B^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) - d \left(v^r B_r^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q^i} \left(v^l \frac{\partial}{\partial q^l} B^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) dq^i + \frac{\partial}{\partial v^i} \left(v^l \frac{\partial}{\partial q^l} B^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) dv^i \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial q^i} \left(v^r B_r^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) dq^i - \frac{\partial}{\partial v^i} \left(v^r B_r^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) dv^i \\ &= v^l \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial}{\partial q^l} B^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) dq^i + \delta_i^l \frac{\partial}{\partial q^l} B^k \frac{\partial}{\partial q^k} f dv^i \\ &\quad + v^l \frac{\partial}{\partial v^i} \left(\frac{\partial}{\partial q^l} B^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) dv^i - v^r \frac{\partial}{\partial q^i} \left(B_r^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) dq^i \\ &\quad - \delta_i^r B_r^k \frac{\partial}{\partial q^k} f dv^i - v^r \frac{\partial}{\partial v^i} \left(B_r^k \frac{\partial}{\partial q^k} f \right) dv^i. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} d(L_{[S,B]}(f \circ \tau_Q))(0_q) &= \frac{\partial}{\partial q^i} B^k \frac{\partial}{\partial q^k} f dv^i - B_i^k \frac{\partial}{\partial q^k} f dv^i \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q^i} B^k - B_i^k \right) \frac{\partial}{\partial q^k} f dv^i \\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial q^i} C^k - \left(\frac{\partial}{\partial q^i} C^k + 2C^j \Gamma_{ij}^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial q^k} f dv^i \\ &= \left(-2 \left(\frac{\partial}{\partial q^i} C^k + C^j \Gamma_{ij}^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial q^k} f dv^i. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial q^i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial q^j}) = X^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} Y^j \frac{\partial}{\partial q^j} + Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial q^k} \right)$, de manera que :

$$\nabla Y = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} Y^k + Y^j \Gamma_{ij}^k \right) dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial q^k}$$

y

$$\nabla C(f)(q) = \left(\frac{\partial}{\partial q^j} C^k + \Gamma_{ij}^k C^j \right) \frac{\partial}{\partial q^k} f dq^i.$$

Así, la componente dw^i de $d(L_{[S, [S, C^{\text{lift}}]]}(f \circ \tau_Q))(0_q)$ es igual a la componente dq^i de $-2\nabla C(f)(q)$. ■

Lema 3.4.15. *Para todo $C \in \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$*

$$[S, [S, C^{\text{lift}}]] \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_1(\mathbf{X})) \rangle.$$

Demostración: Por el diagrama (3.11), $\overline{\psi} \circ \beta \circ \text{Ev}(\chi) = \widehat{\psi}$ y $\widehat{\psi}(\overline{C}) = -[S, (\text{Ev}(\chi)(\overline{C}))^{\text{lift}}]$. Como se demostró en el Teorema 3.4.11, $\widehat{\psi}$ define un mapeo $\overline{\psi} \circ \beta$ en $\text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$ tal que $C = \text{Ev}(\chi)(\overline{C})$ entonces $\overline{\psi} \circ \beta(C) = \widehat{\psi}(\overline{C})$. Además, $\text{im}(\overline{\psi} \circ \beta \circ \text{Ev}(\chi)) = \text{im}(\widehat{\psi}) \subset \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$.

De forma que $[S, C^{\text{lift}}] = \widehat{\psi}(\overline{C}) \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ para todo $\overline{C} \in \text{Ev}(\chi)^{-1}(\{C\})$. Entonces $[S, [S, C^{\text{lift}}]] \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_1(\mathbf{X})) \rangle$. ■

3.5. Resultado principal

El resultado principal de observabilidad local en configuraciones se basa en el siguiente Teorema, tomado de [7, Teorema 3.32], cuya demostración se encuentra en [7, sección 3.2].

Consideremos el siguiente sistema de control afin

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u^j, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m, \\ y_i &= h_i, \quad i \in \{1, \dots, p\}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $h = (h_1, \dots, h_p)^T : M \rightarrow Y = \mathbb{R}^p$ es el mapeo liso de salida del sistema. El espacio de observación \mathcal{O} de (3.12) es el espacio vectorial (sobre \mathbb{R}) de funciones en M conteniendo h_1, \dots, h_p y todas las derivadas iteradas

$$L_{X_1} L_{X_2} \cdots L_{X_k} h_j, \quad j \in \{1, \dots, p\}, k = 1, 2, \dots$$

con $X_i \in \{f, g_1, \dots, g_m\}$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Teorema 3.5.1. *Considere el sistema (3.12) con $\dim M = s$. Supóngase que*

$$\dim d\mathcal{O}(x_0) = s,$$

entonces el sistema es localmente observable en x_0 .

El siguiente teorema es nuestro resultado principal, cuya demostración utiliza los resultados de la sección anterior.

Teorema 3.5.2. Resultado principal Sean

$$\mathcal{C}_L(q) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{d(L_U h_i)(q), dh_i(q) : i = 1, \dots, p, U \in \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))\} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{C}_H(q) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{(\nabla U)(h_i)(q), \nabla h_i(q) : i = 1, \dots, p, U \in \text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}})\}. \quad (3.14)$$

Si $T_q^*Q = \mathcal{C}_L(q) = \mathcal{C}_H(q)$ entonces el sistema (3.1) es localmente observable en configuraciones en q ($LOC(q)$).

Demostración: Supongamos que $\dim(\mathcal{C}_L(q)) = n$.

Sean $\omega^1, \dots, \omega^n \in \mathcal{C}_L$ tales que $\text{span}\{\omega^1(q), \dots, \omega^n(q)\} = T_q^*Q$. Por definición de \mathcal{C}_L , para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se tiene $\omega^j = dh_i$ para algún $i \in \{1, \dots, m\}$ u $\omega^j = d(L_{\overline{U}} h_i)$ con $\overline{U} \in \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$.

Si $\omega^j = dh_i$ entonces, como $H_i = h_i \circ \tau_Q$, con $H_i \in \overline{\mathcal{O}}$, entonces

$$dH_i = d(h_i \circ \tau_Q) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial q^j} \circ \tau_Q \right) \frac{\partial \tau_Q^j}{\partial q^k} dq^k$$

pero, en coordenadas, $\tau_Q(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n) = (q^1, \dots, q^n)$, de donde se sigue que $\frac{\partial \tau_Q^j}{\partial q^k} = \delta_k^j$. Así

$$dH_i = \left(\frac{\partial h_i}{\partial q^j} \circ \tau_Q \right) dq^j.$$

Ahora bien, si las formas $\frac{\partial h_i}{\partial q^j} dq^j, i = 1, \dots, m$ engendran una codistribución en Q de dimensión k , entonces las formas $\left(\frac{\partial h_i}{\partial q^j} \circ \tau_Q \right) dq^j, i = 1, \dots, m$, engendran una codistribución de dimensión k en TQ .

Si $\omega^j = d(L_{\overline{U}} h_i)$, entonces procedemos como sigue.

Sean $\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_{n-k} \in \text{Lie}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{Y}}))$ y (i_1, \dots, i_{n-k}) una familia de enteros en $\{1, \dots, m\}$ tales que:

$$\dim \left(\text{span}\{dL_{\overline{U}_j} h_{i_j}(q) : j \in \{1, \dots, n-k\}\} \right) = n-k.$$

Sabemos, en virtud del Teorema 3.4.12, que existe, para cada $j \in \{1, \dots, l\}$, un campo vectorial $U_j \in \langle \text{Ev}(\phi)(\text{Br}_0(\mathbf{X})) \rangle$ tal que, para $j = 1, \dots, n-k$,

$$d(L_{U_j} H_{i_j})(0_q) = d(L_{\overline{U}_j} h_{i_j}) \circ \tau_Q(0_q).$$

Por lo tanto $\dim(d\overline{\mathcal{O}})(0_q) \geq n$. Dadas $\omega_1 \in \mathcal{C}_L, \omega_2 \in \mathcal{C}_H$ tales que $\omega_1 \neq 0$ y $\omega_2 \neq 0$. Entonces $d(L_U H_i)(0_q)$ con U escogido según Teorema (3.4.12) para ω_1 , es linealmente independiente de la forma en $d\overline{\mathcal{O}}$ cuyas componentes en dv^i corresponden a las componentes

en dq^i de $\omega_2 = (\nabla U)(h_i)(q)$. De aquí se obtiene que, dada la hipótesis del Teorema (3.5.2), entonces $\dim(d\bar{O})(0_q) = 2n$. ■

3.6. Ejemplo de Observabilidad local

Utilizaremos el modelo del Satélite (ver capítulo 2) para dar un ejemplo del resultado principal. Realizaremos los cálculos para diferentes funciones de salida del sistema para ilustrar la aplicación del Teorema 3.5.2.

3.6.1. El Satélite idealizado con dos actuadores

El modelo del sistema se presenta libre de perturbaciones, sin embargo, es posible incluir perturbaciones siempre y cuando se puedan expresar como un levantamiento vertical en $\Gamma(TTQ)$.

Ejemplo 3. El modelo del sistema es dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales (ver Capítulo 2, sección 2.2.2)

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \sigma \\ \dot{\phi} &= \omega \\ \dot{\sigma} &= \rho\omega^2 + \frac{1}{m_s}u^1 + \frac{K}{m_s\rho^2} \\ \dot{\omega} &= -\frac{2}{\rho}\sigma\omega + \frac{1}{m_s\rho}u^2\end{aligned}\tag{3.15}$$

en donde $q = (\rho, \phi)$ representan la posición del satélite en coordenadas polares, por lo tanto $\rho > 0$, σ es la velocidad radial, ω la velocidad angular y u^1, u^2 son la entradas de control. Los parámetros m_s (masa del satélite) y K se suponen conocidos y diferentes de cero. Los campos vectoriales de control son

$$Y_1(q) = \frac{1}{m_s} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad Y_2(q) = \frac{1}{m_s\rho} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

y el campo vectorial correspondiente a la energía potencial

$$dV^{\sharp}(q) = \frac{K}{m_s\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Los símbolos de Christoffel diferentes de cero son

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\rho}(q) = -\rho, \quad \Gamma_{\rho\phi}^{\phi}(q) = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma_{\phi\rho}^{\phi}(q) = \frac{1}{\rho}.$$

Los siguientes cálculos son suficientes para obtener los resultados que deseamos:

$$\begin{aligned}\langle Y_1 : Y_1 \rangle &= 0, & \langle Y_1 : Y_2 \rangle &= \frac{1}{m_s^2 \rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi}, & \langle Y_1 : dV^\# \rangle &= -\frac{2K}{m_s^2 \rho^3} \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ \langle Y_2 : dV^\# \rangle &= \frac{K}{m_s^2 \rho^4} \frac{\partial}{\partial \phi}, & [Y_1, Y_2] &= -\frac{1}{m_s^2 \rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi},\end{aligned}$$

utilizando los cálculos anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla Y_1 &= 0 \\ \nabla Y_2 &= -\frac{1}{m_s} d\phi \otimes \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \nabla dV^\# &= -\frac{2K}{m_s \rho^3} d\rho \otimes \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{K}{m_s \rho^3} d\phi \otimes \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \nabla \langle Y_1 : Y_1 \rangle &= 0 \\ \nabla \langle Y_1 : Y_2 \rangle &= -\frac{1}{m_s^2 \rho} d\phi \otimes \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{m_s^2 \rho^3} d\rho \otimes \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \nabla \langle Y_1 : dV^\# \rangle &= \frac{6K}{m_s^2 \rho^4} d\rho \otimes \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{2K}{m_s^2 \rho^4} d\phi \otimes \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \nabla \langle Y_2 : dV^\# \rangle &= -\frac{K}{m_s^2 \rho^3} d\phi \otimes \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{3K}{m_s^2 \rho^5} d\rho \otimes \frac{\partial}{\partial \rho}.\end{aligned}$$

Para la salida $h(q) = \rho$, utilizando los cálculos anteriores obtenemos los elementos siguientes

$$\begin{aligned}
d(L_{Y_1}h) &= d\left(\frac{1}{m_s}\right) = 0 \\
d(L_{Y_2}h) &= 0 \\
d(L_{dV^\#}h) &= d\left(\frac{K}{m_s\rho^2}\right) = -\frac{2K}{m_s\rho^3}d\rho \\
d(L_{\langle Y_1:Y_2 \rangle}h) &= 0 \\
d(L_{\langle Y_1:dV^\# \rangle}h) &= d\left(-\frac{2K}{m_s^2\rho^3}\right) = \frac{6K}{m_s^2\rho^4}d\rho \\
d(L_{\langle Y_2:dV^\# \rangle}h) &= 0 \\
\nabla Y_2(h) &= -\frac{1}{m_s}d\phi \\
\nabla dV^\#(h) &= -\frac{2K}{m_s\rho^3}d\rho \\
\nabla\langle Y_1:Y_2 \rangle(h) &= -\frac{1}{m_s^2\rho}d\phi \\
\nabla\langle Y_1:dV^\# \rangle(h) &= \frac{6K}{m_s^2\rho^4}d\rho \\
\nabla\langle Y_2:dV^\# \rangle(h) &= -\frac{K}{m_s^2\rho^3}d\phi - \frac{3K}{m_s^2\rho^5}d\rho.
\end{aligned}$$

Con las 1-formas diferentes de cero, obtenemos las codistribuciones correspondientes del Teorema 3.5.2

$$\begin{aligned}
C_L(q) &= \text{span}_{\mathbb{R}}\left\{-\frac{2K}{m_s\rho^3}d\rho, \frac{6K}{m_s^2\rho^4}d\rho\right\} \\
C_H(q) &= \text{span}_{\mathbb{R}}\left\{-\frac{1}{m_s}d\phi, -\frac{2K}{m_s\rho^3}d\rho, -\frac{1}{m_s^2\rho}d\phi, \frac{6K}{m_s^2\rho^4}d\rho, -\frac{K}{m_s^2\rho^3}d\phi\right\}.
\end{aligned}$$

Para realizar la comparación de resultados, calculamos las codistribuciones, definidas en TQ , $d\bar{\mathcal{O}}$ y $d\mathcal{O}$. El conjunto $\mathcal{Y} = \{S, Y_1^{\text{lift}}, \dots, Y_m^{\text{lift}}, (dV^\#)^{\text{lift}}\}$ es

$$\mathcal{Y} = \left\{ \begin{pmatrix} \sigma \\ \omega \\ -\rho\omega \\ -\frac{2}{\rho}\sigma\omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s\rho} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K}{m_s\rho^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Los espacios de observación $\bar{\mathcal{O}}$ y \mathcal{O} son

$$\bar{\mathcal{O}} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \rho, \sigma, -\frac{1}{m_s}, -\frac{K}{m_s \rho^2}, -\frac{2\omega}{m_s} \right\}$$

$$\mathcal{O} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \rho, \sigma, -\rho\omega^2, \frac{1}{m_s}, \frac{K}{m_s \rho^2}, -5\sigma\omega^2, -\frac{2\omega^2}{m_s}, \rho\omega^4 + \frac{4}{\rho}\sigma^2\omega^2 \right\}$$

y las codistribuciones respectivas son

$$d\bar{\mathcal{O}}(0_q) = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ d\rho, d\sigma, \frac{2K}{m_s \rho^3} d\rho, -\frac{2}{m_s} d\omega \right\}$$

$$d\mathcal{O}(0_q) = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ d\rho, d\sigma, -\frac{2}{m_s} d\omega \right\}.$$

Con los cálculos realizados, en el cuadro (3.1) mostramos los resultados de Observabilidad Local en Configuraciones (LOC) para diferentes posibles salidas presentes en el sistema del satélite. \square

Salidas	$\dim(C_L(q))$	$\dim(C_H(q))$	$\dim(d\bar{\mathcal{O}}(0_q))$	$\dim(d\mathcal{O}(0_q))$	LOC(q)
ρ	1	2	3	3	no
ϕ	2	2	3	4	si
$\rho + \phi$	2	2	4	4	si
ρ^2	1	1	3	3	no

Cuadro 3.1: Resultados de Observabilidad para el ejemplo del satélite. La primera columna es la salida disponible para medición, la segunda da la dimensión de la codistribución C_L , la tercera muestra la dimensión de la codistribución C_H , la cuarta muestra la dimensión de la codistribución $d\bar{\mathcal{O}}$, la quinta muestra la dimensión de la codistribución $d\mathcal{O}$ y la última columna indica si el sistema es LOC para la salida dada.

En el ejemplo anterior, nos damos cuenta de la diferencia entre los espacios de observabilidad $\bar{\mathcal{O}}$ y \mathcal{O} , lo cual se manifiesta en la dimensión de las codistribuciones respectivas. Para poder extender el resultado principal (Teorema 3.5.2) es necesario caracterizar el conjunto $\text{Br}(\mathbf{X})$, en el sentido de dar condiciones suficientes para los Teoremas 3.4.12 y 3.4.14, lo cual se propone como trabajo futuro.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

4.1. Conclusiones

En [5] Lewis y Murray explotan la estructura de los SMS para dar una definición de Controlabilidad en configuraciones, en donde nos damos cuenta de la utilidad del producto simétrico como herramienta computacional en el análisis y diseño de controladores. En observabilidad, caracterizar objetos definidos en el espacio fase en función de objetos definidos en el espacio de configuraciones, se realiza en gran medida, gracias al producto simétrico, éste preserva muchas de las funciones que realiza el spray en el espacio fase. Sin embargo la dualidad entre controlabilidad (o más precisamente, accesibilidad) y observabilidad en estos términos no está clara aún.

La suposición impuesta a el mapeo de salida (dependencia de h sólo de las variables de configuración en Q) y la restricción a puntos de velocidad nula ($0_q \in TQ$) para definir una noción de observabilidad en configuraciones, propuesta en el Capítulo 3, obedece a la meta, a largo plazo, de caracterizar propiedades estructurales en términos de objetos geométricos definidos en la variedad de configuración Q . Esta meta puede verse como un paso preliminar en la construcción de observadores que utilice de manera provechosa la estructura geométrica presente en los sistemas mecánicos simples. Es interesante mencionar, sin embargo, que tanto la independencia de la salida de las variables de configuración, como la evaluación de la observabilidad en puntos de velocidad cero, reflejan situaciones frecuentemente halladas en aplicaciones reales. Por consiguiente, puede esperarse que la caracterización de la noción de observabilidad propuesta en el Capítulo 3 sea de utilidad en aplicaciones tales como la construcción de observadores complementarios a leyes de control que estabilicen puntos de equilibrio en sistemas cuyas salidas no dependen de las coordenadas de velocidad.

Desde un punto de vista más técnico, una parte considerable del trabajo realizado durante la tesis fue encaminado hacia la caracterización del conjunto $\text{Br}(\mathbf{X})$, la teoría propuesta involucra diferentes mapeos para llegar a una caracterización de $\text{Br}(\mathbf{X})$ de manera rigurosa,

sin embargo, las definiciones dadas nos permitieron dar sólo una condición “suficiente” para que un sistema sea localmente observable en configuraciones. Un punto importante es la intervención del operador ∇ en la caracterización de $\text{Br}(\mathbf{X})$. El operador ∇ tiene aspectos, como se muestra en el ejemplo (1), que podríamos utilizar en la caracterización de $\text{Br}(\mathbf{X})$ para llegar a una condición “necesaria” de la definición de LOC. La trascendencia del resultado, en cálculos simbólicos, se manifiesta en sistemas de dimensión relativamente grande, además este resultado nos permite obtener conocimientos para continuar en el estudio de los SMS siguiendo el enfoque geométrico propuesto.

4.2. Trabajo futuro

Como trabajo futuro uno de los puntos que se consideran es encontrar una condición suficiente para LOC, y de esta manera complementar el resultado principal de la tesis.

La primera incursión para definir observabilidad en configuraciones se manifiesta en el Capítulo 3, sin embargo en el transcurso de la tesis se manifestó, de manera intuitiva, la dualidad de la definición dada por Lewis y Murray en [5]. Como primer punto dentro del trabajo futuro es llegar al resultado de LOC a partir de la definición de accesibilidad local en configuraciones utilizando un procedimiento de dualidad.

Que el mapeo de salida dependa solamente de las variables de configuración, es una restricción que limita la teoría de observabilidad propuesta. Se propone como trabajo futuro el extender el mapeo de salida a mapeos definidos en el espacio fase, de esta manera la definición de LOC sería independiente del mapeo de salida, lo cual proporcionaría un resultado más general. Todo lo anterior siguiendo el enfoque geométrico que se ha planteado durante la disertación.

Apéndice A

Nociones básicas

A.1. Variedades

Suponemos que el lector conoce las nociones básicas de Topología. Se presentan algunos conceptos para la realización de la operación de *paso al cociente*, además de la definición de *conexión*, a través de la cual se define la noción de horizontalidad en un haz. También se incluyen algunos ejemplos para mostrar la forma en que intervienen dichos conceptos. Los conceptos no se presentan en detalle, el lector interesado puede consultar los textos [7, 14] propuestos en la Bibliografía.

Una *relación* \mathcal{R} (o *correspondencia*) entre dos conjuntos X y Y es un subconjunto de $X \times Y$. Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ se dice que x está relacionado con y y se escribe alternativamente $x\mathcal{R}y$. Una *aplicación* (o *mapeo*) entre dos conjuntos X y Y es una relación $\mathcal{R} \subset X \times Y$ con las siguientes propiedades adicionales:

- $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x\mathcal{R}y)$
- $(\forall x \in X)(\forall y, y' \in Y)(x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}y' \implies y = y')$.

Una *relación de equivalencia* \mathcal{R} en un conjunto X , es una relación $\mathcal{R} \subset X \times X$ con las tres propiedades siguientes:

- (i) Reflexividad: $(\forall x \in X)(x\mathcal{R}x)$
- (ii) Simetría: $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)$
- (iii) Transitividad: $(\forall x, y, z \in X)(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z)$.

Si X y Y son espacios topológicos, una función $f : X \rightarrow Y$ es un *homeomorfismo* si f es continua y posee una inversa continua. Si existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$, se dice que X y Y son *homeomorfos*. Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de *clase* C^k si todas sus derivadas parciales de orden menor o igual a k existen y son continuas.

Un espacio topológico M se dice ser de *Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x, y \in M$ existen abiertos disjuntos U y V , vecindades de x y y , respectivamente.

Una *variedad topológica* (o *espacio localmente euclidiano*) de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff M con la propiedad de que para cada $x \in M$ existe un abierto U , vecindad de x , que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .

Sea M una variedad topológica de dimensión n , U un abierto de M y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo que establece un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \phi(U)$. Bajo estos supuestos, a ϕ se le llama un *mapa de coordenadas*, a U se le llama un *dominio de coordenadas* y a la pareja (U, ϕ) se le llama *carta* (o *sistema*) de coordenadas.

Dada M , una variedad topológica de dimensión n , un *atlas* \mathcal{A} de clase C^k para M consiste de una colección de cartas coordenadas $\{(U_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ que satisfacen:

- (i) $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una cubierta (abierto) de M , es decir, $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$
- (ii) Todo par de cartas $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta) \in \mathcal{A}$ es C^k -compatible, es decir, la aplicación $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es una aplicación k veces continuamente diferenciable.

Definición A.1.1. Sea M una variedad topológica de dimensión n . Una *estructura diferenciable de clase C^k sobre M* consiste en un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ de clase C^k que es maximal en el sentido de que, si (V, ψ) es una carta coordenada para M que es C^k -compatible con todas las cartas de \mathcal{A} , entonces $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Si además, M es segundo-contable, a la pareja (M, \mathcal{A}) se le llama *variedad diferenciable de clase C^k de dimensión n* (o simplemente *variedad C^k de dimensión n* o incluso *variedad* si se quiere abreviar y tanto la clase de diferenciabilidad como la dimensión son irrelevantes para efectos de una discusión).

Sea M una variedad diferenciable de clase C^∞ y de dimensión n . Por $C^\infty(p)$ representamos al conjunto de funciones lisas a valores reales, cada una definida en alguna vecindad de $p \in M$. Una *derivación puntual en $p \in M$* (alternativamente un *vector tangente a la variedad M en el punto p*) es una función (\mathbb{R} lineal) $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la identidad de Leibnitz, es decir

$$\forall f, g \in C^\infty(p) : v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

El conjunto de derivaciones en p se denota por $T_p M$. Para cada $p \in M$, el espacio $T_p M$ admite una estructura de espacio vectorial real de dimensión n . El *haz (vectorial) tangente de M* se define como

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Al conjunto de campos vectoriales de clase C^k en M se le representa por medio de $\Gamma^k(TM)$.

A continuación veremos un ejemplo donde se muestran los principios básicos en la definición de un haz y algunos de los conceptos definidos anteriormente. La simplicidad del ejemplo propuesto nos permite ilustrar la operación de *paso al cociente* de un conjunto, concepto presente de manera predominante en matemáticas.

Ejemplo 4. Sea el conjunto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, obtendremos el cociente de A por la relación de equivalencia dada por:

$$\sim: p \sim q \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(p = \lambda q).$$

Pasando al cociente obtenemos el conjunto $\mathbb{R}P^1 = A / \sim = \{[z] : z \in A\}$, donde $[z]$ representa la clase de equivalencia de z .

Primero vamos a caracterizar el conjunto $\mathbb{R}P^1$, para eso utilizaremos el siguiente diagrama que muestra la estructura de un haz en general:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow P_1 \\ & & U \end{array}$$

π es la proyección del haz, P_1 es la proyección en el primer factor y a $(\pi^{-1}(U), \psi)$ se le conoce como carta trivializante.

Sea V una vecindad de $z \in A$, definimos $U_{[z_0]} = \{[z] : z \in V\}$, probaremos que $U_{[z_0]}$ es abierto.

$$\begin{aligned} U_{[z_0]} \text{ es abierto} &\iff \pi^{-1}(U_{[z_0]}) \text{ es abierto en } A \\ q \in \pi^{-1}(U_{[z_0]}) &\iff \pi(q) \in U_{[z_0]} \\ &\iff [q] \in U_{[z_0]} \\ &\iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, p \in V)(q = \lambda p) \quad ; \text{ donde } \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Ahora suponemos que existe una "bola" abierta centrada en $p \in \pi^{-1}(U_{[z_0]})$

$$\begin{aligned} \exists B_\delta(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p\| < \delta\} \\ \lambda B_\delta(p) &= \{\lambda x : \|x - p\| < \delta\} \\ B_{|\lambda|\delta}(q) &= \{\lambda x : \|\lambda x - \lambda p\| < |\lambda|\delta\} \end{aligned}$$

Demostraremos que $B_{|\lambda|\delta}(q) \subset \pi^{-1}(U_{[z_0]})$, esto es $(\forall x \in B_{|\lambda|\delta}(q))(x \in \pi^{-1}(U_{[z_0]}))$:
Sea $\bar{x} \in B_{|\lambda|\delta}(q)$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*(\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2/0)$ y $x \in \mathbb{R}^{2*}$ tal que $\bar{x} = \lambda x$ y $\|x - p\| < \delta$ pero entonces $x \in B_\delta(p) \subset V$ se sigue que $[\bar{x}] = [\lambda x] = [x] \subset U_{[z_0]}$ por ello $\bar{x} \in \pi^{-1}(U_{[z_0]})$

$$\begin{aligned} \text{Si } \bar{x} \in \pi^{-1}(U_{[z_0]}) &\iff \pi \bar{x} \in U_{[z_0]} \\ &\iff [\bar{x}] \in U_{[z_0]} \\ &\iff (\exists z \in V)([z] = [\bar{x}]) \\ &\iff (\exists x \in V, \exists \lambda \in \mathbb{R}^*)(\bar{x} = \lambda x) \end{aligned}$$

Ahora sea $\phi([z]) = \frac{z_1}{z_0} = B$ entonces $\phi^{-1}(B) = [z]$; $B \in \mathbb{R}^*$
 por lo tanto $z_1 = Bz_0$, donde un representante es $(1, a)$.

Ahora demostraremos que $\mathbb{R}P^1$ es una variedad diferencial:

$$\begin{aligned} U &= \{[z] : z \in V\} \text{ es abierto en } \mathbb{R}P^1 \\ U_0 &= \{[z] : z_0 \neq 0\} \\ U_1 &= \{[z] : z_1 \neq 0\} \end{aligned}$$

Se proponen las siguientes funciones coordenadas:

$$\phi_0([z]) = \frac{z_1}{z_0}, \phi_1([z]) = \frac{z_0}{z_1}$$

Sea $z \in [z]$ y $x \in [x]$ entonces $z = \lambda x = \lambda(x_0, x_1)$ por lo tanto:

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{\lambda x_1}{\lambda x_0}$$

Con esto verificamos que ϕ_i están bien definidas.

Bijectividad:

Sean $[z], [\bar{z}]$

$$\phi_0([z]) = \frac{z_1}{z_0}, \phi_0([\bar{z}]) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_0}$$

supongamos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_0} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_0} &\implies \exists \lambda = \frac{z_0}{\bar{z}_0} \text{ tal que} \\ z = (z_0, z_1) &= \lambda(\bar{z}_0, \bar{z}_1) \end{aligned}$$

Dado $a \in \mathbb{R}, \exists [z] \in U_0$, con $a = \frac{z_1}{z_0}$ tenemos $\phi_0^{-1}(a) = [(1, a)]$ ssi $\phi_0([(1, a)]) = \frac{a}{1} = a$
 Ahora

$$\begin{aligned} \phi_0 \circ \phi_0^{-1}(a) &= a \\ \phi_0^{-1} \circ \phi_0([z]) &= [z] \\ \exists \lambda \text{ tal que } \lambda &= \lambda\left(1, \frac{z_1}{z_0}\right) = (z_0, z_1) \\ \text{con } \lambda &= z_0 \text{ tenemos } [z] = \left[\left(1, \frac{z_1}{z_0}\right)\right] \end{aligned}$$

lo cual demuestra que es sobreyectivo.

Ahora, como $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}(a) = \phi_0([(a, 1)]) = \frac{1}{a}$ tenemos que para $a \neq 0$ son C^∞ , lo cual demuestra que son C^∞ -compatibles.

Por lo tanto $\mathbb{R}P^1$ es una variedad diferenciable. \square

A.2. Álgebra tensorial

Lo que se discute en esta sección puede ser encontrado en [16]. La noción de tensor es necesario en el desarrollo de la Geometría Riemanniana y los conceptos de Mecánica.

Sean E y F espacios vectoriales reales de dimensión finita. El espacio vectorial E^* es el espacio dual de E . Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para E , elegimos las funciones $\{e^1, \dots, e^n\}$, llamada la base de E^* dual de $\{e_i\}$, tal que $e^i(e_j) = \delta_j^i$ (ver detalles en [13]).

- Dados $\alpha \in E^*, \beta \in F^*$

$$\alpha \otimes \beta : (e, f) \mapsto \alpha(e)\beta(f)$$

$$\alpha \otimes \beta \in E^* \otimes F^*$$

- Dados $e \in E, f \in F$

$$e \otimes f : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha(e)\beta(f)$$

Teorema A.2.1. [16, lectura 4] Si $\{e_i\}$ y $\{f_j\}$ son bases de E y F respectivamente, entonces:

$$\{e_i \otimes f_j : i = 1, \dots, \dim(E), j = 1, \dots, \dim(F)\}$$

es una base para $E \otimes F$.

Dado E y su dual E^* , se define

$$T_r^s(E) = (\overset{r}{\otimes} E^*) \otimes (\overset{s}{\otimes} E).$$

Si $t \in T_r^s(E)$, se dice que t es de tipo $\binom{s}{r}$, o que es r veces covariante y s veces contravariante, tomada de [16, lectura 4].

Teorema A.2.2. [14] Sean E y F \mathbb{R} -espacios vectoriales. El mapeo $\tau : (e, f) \mapsto e \otimes f$ y el producto tensorial $E \otimes F$ son tales que para todo \mathbb{R} -espacio vectorial V y todo mapeo lineal $f : E \times F \rightarrow V$ existe un único mapeo lineal $\hat{f} : E \otimes F \rightarrow V$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\tau} & E \otimes F \\ & \searrow f & \downarrow \hat{f} \\ & & V \end{array}$$

El espacio *producto tensorial* de espacios vectoriales T_p^q y T_r^s es el espacio vectorial de tipo $\binom{q+s}{p+r}$ denotado:

$$T_p^q \otimes T_r^s = T_{p+r}^{q+s}.$$

Sea M una variedad diferencial, a cada punto $x \in M$ se le asocian varios tipos de espacios vectoriales que son productos tensoriales de algunos espacios $T_x M$ y $T_x^* M$. El haz vectorial de tensores de tipo $\binom{q}{p}$ es:

$$T_p^q(TM) = \coprod_{x \in M} T_p^q(T_x M)$$

Un campo tensorial de tipo $\binom{s}{r}$ es una sección del haz vectorial $T_r^s(TM)$ es decir, $X : M \rightarrow T_r^s(TM)$ es campo tensorial $\binom{s}{r}$ si $\pi \circ X = Id_M$.

Casos particulares

▪

$$X \in \Gamma^\infty(T_0^0(M)) \iff X \in \Gamma^\infty(M \times \mathbb{R}) = C^\infty(M; \mathbb{R})$$

X es una función lisa en M

▪

$$X \in \Gamma^\infty(T_0^1(M)) \iff X \in \Gamma^\infty(TM)$$

X es campo vectorial en M

▪

$$X \in \Gamma^\infty(T_1^0(M)) \iff X \in \Gamma^\infty(T^*M)$$

X es una 1-forma diferencial en M

Apéndice B

Reflexiones sobre el proceso de Dualización

B.1. Antecedentes

En matemáticas y sus aplicaciones el concepto de *dualidad* es utilizado frecuentemente; sin embargo tal concepto se trata, en muchas referencias, sólo de manera “intuitiva”. En teoría de control la dualidad se aplica de manera directa; no obstante, la discusión sobre dualidad se debería manejar con el rigor necesario para establecer un proceso sistemático de dualización que permita ver los conceptos involucrados claramente. En este capítulo se aborda el concepto de dualidad y se derivan algunas de las herramientas necesarias para pasar de una noción dada a su dual, sobre todo en lo que concierne a nociones que aparecen en teoría de control.

Por ejemplo, en el caso de sistemas lineales, los conceptos de controlabilidad y observabilidad están definidos como se describe a continuación (ver [9, capítulo 9]).

Consideremos el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo n -dimensional, con espacio de estado X , m entradas y p salidas:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{B.1}$$

donde A, B, C son matrices constantes de dimensión adecuada. La controlabilidad involucra la influencia de la señal de entrada en el vector de estado y no involucra a la ecuación de salida. Por otro lado, observabilidad involucra la influencia del vector de estado en la señal de salida.

Definición B.1.1. *El sistema de control lineal (B.1) es llamado controlable en $[t_0, t_f]$ si, dado cualquier estado inicial x_0 , existe una señal de entrada continua por trozos $u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que la solución de (B.1) satisface $x(t_0) = x_0$ y $x(t_f) = 0$.*

En términos matriciales, la controlabilidad se puede caracterizar de la siguiente manera [9, teorema 9.5]. La ecuación de estado (B.1) es controlable en $[t_0, t_f]$ si y sólo si la *matriz de controlabilidad* $n \times nm$ $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ satisface la siguiente condición de rango

$$\text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n \quad (\text{B.2})$$

Para el caso de la observabilidad, por simplicidad, supondremos el caso de entrada cero debido a que el concepto no cambia en la presencia de una entrada. Consideremos el sistema lineal invariante en el tiempo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Definición B.1.2. La ecuación de estado lineal (B.3) es llamada observable en $[t_0, t_f]$ si todo estado inicial x_0 es determinado de manera única por la correspondiente respuesta $y(t)$ para $t \in [t_0, t_f]$.

En forma matricial, la observabilidad, se caracteriza de la siguiente manera [9, Teorema 9.10]. La ecuación de estado (B.3) es observable en $[t_0, t_f]$ si y sólo si la *matriz de observabilidad* $np \times n$

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

satisface $\text{rank}(\mathbb{O}) = n$. Comparando las definiciones de controlabilidad y observabilidad vemos que el sistema

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

es controlable si y sólo si el sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A^T z(t) \\ y(t) &= B^T z(t) \end{aligned}$$

es observable.

Con base en lo anterior podemos observar que la matriz de observabilidad se puede obtener, tomando $B^T = C$, a partir de la transpuesta de la matriz de controlabilidad. En este capítulo daremos argumentos de dualidad por medio de los cuales la observabilidad se puede obtener a partir de la caracterización de controlabilidad, utilizando un proceso de dualización que se presenta en la siguiente sección.

B.2. Herramientas de Dualidad

A continuación se darán algunas herramientas necesarias para dualizar una noción dada. En la siguiente sección, se utilizarán dichas herramientas para dualizar la caracterización de controlabilidad, utilizada en teoría geométrica.

Sean E y F espacios vectoriales. En la discusión siguiente se considera que E y F están provistas de formas bilineales no degeneradas $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$, respectivamente (ver [13, Cap. XIII, Sección 5]).

Sea $f : E \rightarrow F$ un mapeo lineal. La *transpuesta* de f se define, de manera única, como el mapeo

$${}^t f : F \rightarrow E$$

tal que para todas $x \in E$ y $y \in F$

$$\langle x, {}^t f(y) \rangle_E = \langle f(x), y \rangle_F.$$

Además, sea $h : F \rightarrow G$ un mapeo lineal, entonces

$${}^t(h \circ f) = {}^t f \circ {}^t h$$

Ejemplo 5. Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapeo lineal. Considere bases canónicas $\{e_i\}$ para \mathbb{R}^n y $\{f_j\}$ para \mathbb{R}^m , definiendo $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ y $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^m} = \sum_{j=1}^m x^j y^j$, en la base canónica, tenemos

$$\begin{aligned} \langle e_i, {}^t h(f_j) \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \langle h(e_i), f_j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\ \langle e_i, ({}^t h(f_j))^k e_k \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \langle (h(e_i))^k f_k, f_j \rangle_{\mathbb{R}^m} \\ ({}^t h(f_j))^k \langle e_i, e_k \rangle_{\mathbb{R}^n} &= (h(e_i))^k \langle f_k, f_j \rangle_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

Por ser bases canónicas $\{e_i, e_k\}_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ik}$ y $\{e_i, e_k\}_{\mathbb{R}^m} = \delta_{kj}$, entonces la última ecuación implica

$$({}^t h(f_j))^i = (h(e_i))^j, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

En términos de las matrices de h y ${}^t h$ dadas por $h_i^j = (h(e_i))^j$ y $({}^t h)_j^i = ({}^t h(f_j))^i$, obtenemos entonces

$$h_i^j = ({}^t h(f_j))^i = ({}^t h)_j^i$$

esto es, la matriz de ${}^t h$ es la transpuesta de la matriz de h . □

Sea E un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ una forma bilineal no degenerada en E . Se define, para un subespacio A de E , el complemento ortogonal de A como

$$A^\perp = \{x \in E \mid \langle x, y \rangle_E = 0, \quad \forall y \in A\}$$

A continuación enunciaremos algunos teoremas que involucran espacios vectoriales y que son utilizados frecuentemente en teoría geométrica de sistemas.

Teorema B.2.1. Sean E un espacio vectorial y A un subespacio de E . Se tiene $A^\perp = \ker(i^* \circ {}^b)$, donde $i : A \hookrightarrow E$ denota la inclusión y ${}^b : E \rightarrow E^*$ es el mapeo $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ definido en el Capítulo 2.

Demostración: Sea $i^* : E^* \rightarrow A^*$ la aplicación dual inducida por i . Realizando la composición de b con i^* , vemos que $i^* \circ {}^b : E \rightarrow A^*$ y

$$x \in \ker(i^* \circ {}^b) \Leftrightarrow i^* \circ {}^b(x) = 0.$$

Dado que $i^*({}^b(x)) \in A^*$ está definido por el siguiente diagrama conmutativo, para cualquier mapeo lineal $h : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & E \\ & \searrow i^*(h) & \swarrow h \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

entonces, $i^*({}^b(x)) \in A^* = {}^b(x) \circ i$. Por lo tanto, si $a \in A$

$$\begin{aligned} i^*({}^b(x)) \in A^* &= {}^b(x)(i(a)) \\ &= \langle x, i(a) \rangle \\ &= \langle x, a \rangle \end{aligned}$$

de esta manera, $x \in \ker(i^* \circ {}^b)$ si y sólo si $\langle x, a \rangle = 0$ para toda $a \in A$. Concluimos que

$$A^\perp = \ker(i^* \circ {}^b).$$

■

Teorema B.2.2. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y A, B subespacios de E , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una forma bilineal no degenerada y simétrica definida en E . Supóngase que para todas $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = 0$ si y sólo si $\langle y, x \rangle = 0$. Entonces

$$(i) \quad (A^\perp)^\perp = A$$

$$(ii) \quad (A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$$

$$(iii) \quad (A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$$

Demostración: (i) Sea $a \in A$. Entonces $\forall x \in A^\perp \quad \langle x, a \rangle = 0$. Pero entonces $\langle a, x \rangle = 0 \quad \forall x \in A^\perp$. Por lo tanto $a \in (A^\perp)^\perp$. Recíprocamente, $A^\perp = \ker(i^* \circ {}^b)$. Pero la composición $i^* \circ {}^b$ es suprayectiva (b es un isomorfismo y i^* es suprayectiva). Entonces $\text{Rank}(i^* \circ {}^b) = \dim(A^*) = \dim(A)$. Por lo tanto $\dim(A^\perp) = \dim(\ker(i^* \circ {}^b)) = n - \dim(A)$. Esto se aplica

también para $(A^\perp)^\perp$, esto es $\dim(A^\perp)^\perp = n - \dim(A^\perp) = n - (n - \dim(A)) = \dim(A)$. Como $A \subset (A^\perp)^\perp$ obtenemos $(A^\perp)^\perp = A$.

(ii) Sea $v \in (A + B)^\perp$, $v \in \ker(i^* \circ {}^b)$ entonces $i^* \circ {}^b(v) = 0$ i.e., ${}^b(v) \circ i(w) = 0$ para toda $w \in A + B$. Sea $a \in A$, entonces $w = a + 0 \in A + B$

$${}^b(v) \circ i(w) = \langle v, i(w) \rangle = \langle v, a \rangle = 0$$

así, $v \in A^\perp$, de igual manera para $v \in B^\perp$.

Ahora, sea $v \in A^\perp \cap B^\perp$ y $w \in A + B$. Existen a, b tal que $w = a + b$

$$\langle v, w \rangle = \langle v, a + b \rangle = \langle v, a \rangle + \langle v, b \rangle = 0$$

entonces $v \in (A + B)^\perp$.

(iii) Por (i) y (ii) tenemos $(A^\perp + B^\perp)^\perp = (A^\perp)^\perp \cap (B^\perp)^\perp = A \cap B$. Ahora $(A \cap B)^\perp = ((A^\perp + B^\perp)^\perp)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

Nota: En el inciso (i), para que la igualdad se cumpla, es necesario que la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sea simétrica, de otra manera no se llega a tal conclusión. ■

Teorema B.2.3. Sean E, F espacios vectoriales de dimensión finita, $f : E \rightarrow F$ un mapeo lineal, y supóngase que E, F están dotados con mapeos bilineales no degenerados $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$, respectivamente [13, Cap. XIII, sección 5]. Entonces

$$(\text{im}({}^t f))^\perp = \ker(f)$$

Demostración: Sea $x \in (\text{im}({}^t f))^\perp$. Entonces $\langle x, a \rangle = 0 \quad \forall a \in \text{im}({}^t f)$. Por lo tanto, $\forall y \in F$, $\langle x, {}^t f(y) \rangle = 0$, debido a que ${}^t f(y) \in \text{im}({}^t f)$. Pero, por definición de transpuesta, y usando $\langle x, {}^t f(y) \rangle = 0$, vemos que

$$\langle x, {}^t f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = 0.$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerada, tenemos que $f(x) = 0$, esto es $x \in \ker(f)$.

Inversamente, sea $x \in \ker(f)$, de manera que $f(x) = 0$. Sea $a \in \text{im}({}^t f)$, existe $y \in F$ tal que $a = {}^t f(y)$. Se tiene

$$\langle x, a \rangle = \langle x, {}^t f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0.$$

Por lo tanto $x \in (\text{im}({}^t f))^\perp$. ■

B.3. Dualidad en teoría geométrica

Dejando a un lado el álgebra matricial, pasamos al enfoque geométrico, enfoque que se pretende utilizar en este trabajo. Ahora la condición de rango, utilizada en la caracterización de controlabilidad, se evalúa en el llamado “subespacio controlable” para la ecuación de estado (B.1) [9, Definición 18.3]

$$\langle A|\mathcal{B} \rangle = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{B}$$

donde $\mathcal{B} = \text{Im}[B]$ es la imagen o espacio rango de B .

Para pasar a la definición de observabilidad a partir del subespacio controlable no está claro como proceder, sin embargo, utilizando herramientas de dualidad podemos definir un procedimiento sistemático para pasar al concepto dual. La noción dual de “subespacio controlable” es el llamado “subespacio inobservable” para la ecuación de estado (B.1) [9, Definición 18.10]

$$\mathcal{N} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker[CA^k]$$

donde $\ker[A]$ es el kernel o espacio nulo de A .

En la siguiente discusión veremos cómo “controlabilidad” es dual de “observabilidad”. Para la prueba hacemos uso de las reglas de la sección anterior y resultados de la teoría lineal [9, Cap. 18]. La función transpuesta de un mapeo f se denota como ${}^t f$, para la transpuesta de la matriz A asociada con un mapeo escribimos A^T .

Teorema B.3.1. *Sea \mathcal{X} el espacio de estados n dimensional. El sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$ es controlable si y sólo si, el sistema $\dot{x} = A^T x, y = B^T x$ es observable.*

Demostración: De [9, Cor. 18.7] sabemos que el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ es controlable, si y sólo si,

$$\mathcal{X} = \langle A|\mathcal{B} \rangle. \tag{B.5}$$

Esto quiere decir que $\langle A|\mathcal{B} \rangle$ tiene dimensión n . Haciendo uso de [9, Cor. 18.12], tenemos que $\dot{x} = Ax, y = Cx$ es observable, si y sólo si,

$$0 = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker[CA^k].$$

Ahora, suponga que $\dot{x} = Ax + Bu$ es controlable. Tomando el complemento ortogonal de

ambos miembros de (B.5) y utilizando los Teoremas B.2.2 y B.2.3 tenemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle A|B \rangle^\perp \\
 &= (\text{Im}[B] + \text{Im}[AB] + \dots + \text{Im}[A^{n-1}B])^\perp \\
 &= (\text{Im}[B])^\perp \cap (\text{Im}[AB])^\perp \cap \dots \cap (\text{Im}[A^{n-1}B])^\perp \\
 &= \ker[B^T] \cap \ker[(AB)^T] \cap \dots \cap \ker[(A^{n-1}B)^T] \\
 &= \ker[B^T] \cap \ker[B^T A^T] \cap \dots \cap \ker[B^T (A^{n-1})^T].
 \end{aligned}$$

Esto significa que el sistema $\dot{x} = A^T x, y = B^T x$ es observable. Lo recíproco se demuestra procediendo de manera análoga. ■

Observando el resultado anterior, vemos que la noción dual “subespacio controlable” está definida por

$$\langle A|B \rangle^\perp = \mathcal{N}.$$

Esto es, a partir de la noción de Controlabilidad y una de sus caracterizaciones, obtuvimos una caracterización de Observabilidad (ver [11]). El rol de la forma bilineal elegida se manifiesta a la hora de obtener los sistemas análogos, por ejemplo, en la demostración del teorema (B.3.1) suponemos una forma bilineal positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el espacio de estados \mathbb{R}^n y obtenemos una ecuación de estado $\dot{x} = A^T x$, sin embargo, si elegimos una forma bilineal con signo menos, $-\langle \cdot, \cdot \rangle$, obtenemos una ecuación de estado de la forma $\dot{x} = -A^T x$ lo cual concuerda con los resultados de algunas de las referencias en teoría de control (ver [2]). Lo anterior muestra que si bien, el procedimiento de dualización es el mismo, es posible llegar a versiones duales distintas al escoger distintas formas bilineales en los espacios involucrados.

El procedimiento mostrado en la Sección 1 para obtener observabilidad a partir de controlabilidad en sistemas lineales parece aplicarse de manera directa. Sin embargo, con el procedimiento mostrado en el Teorema B.3.1 vemos que el proceso de dualización es más claro.

Bibliografía

- [1] De Persis C. and Isidori A., *A Geometric Approach to Nonlinear Fault Detection and Isolation*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 46 (2001), no. 6, 853–865.
- [2] C. T. Chen, *Linear Systems Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [3] Lewis A. D., *Aspects of Geometric Mechanics and Control of Mechanical Systems*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1995.
- [4] ———, *Simple Mechanical Control Systems with Constrains*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 45 (2000), no. 8, 1420–1436.
- [5] Lewis A. D. and Murray R. M., *Configuration controllability of simple mechanical control systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 35 (1997), no. 3, 766–790.
- [6] ———, *Configuration controllability of simple mechanical control systems*, SIAM Review, vol. 45 (1999), no. 3, 555–574.
- [7] Nijmeijer H. and van der Schaft A., *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag, New York, 1990.
- [8] Robert Hermann and Krener Arthur J, *Nonlinear Controllability and Observability*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22 (1977), no. 5.
- [9] Rugh Wilson J., *Linear System Theory*, second ed., Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1996.
- [10] Bloch A. M., *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer Verlag, New York, 2003.
- [11] Wonham W. Murray, *Linear Multivariable Control A Geometric Approach*, Springer Verlag, New York, 1985.

- [12] Jacobson N., *Lie Algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics (1962), no. 10.
- [13] Lang S., *Linear Algebra*, Springer Verlag, New York, Marzo 2001.
- [14] Warner F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, vol. 94 of Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, 1983.
- [15] Tsuneo Yoshikawa, *Foundations of Robotics, Analysis and Control*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.
- [16] Talpaert Yves, *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

