



IPICYT

INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y
TECNOLÓGICA A.C.

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Traslación controlada de actuador con
colchón de aire ante fenómenos tipo *Jerk*.**

Tesis que presenta

Héctor Eduardo Gilardi Velázquez

Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores

San Luis Potosí, S.L.P., Febrero de 2014



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Traslación controlada de actuadores con colchón de aire ante fenómenos tipo jerk** presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Héctor Eduardo Gilardi Velázquez** y aprobada el **26 de Febrero de 2014** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Eric Campos Cantón
(Sinodal)

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
(Sinodal)

Dr. Francisco Cruz Ordaz Salazar
(Sinodal)

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
(Director de la tesis)



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 006 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 26 días del mes de febrero del año 2014, se reunió a las 17:30 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Francisco Cruz Ordaz Salazar	Presidente	UPSLP
Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores	Secretario	IPICYT
Dr. Eric Campos Cantón	Sinodal	IPICYT
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Héctor Eduardo Gilardi Velázquez

sobre la Tesis intitulada:

Traslación controlada de actuador con colchón de aire ante fenómenos tipo Jerk

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores

El Jurado, después de deliberar, determinó

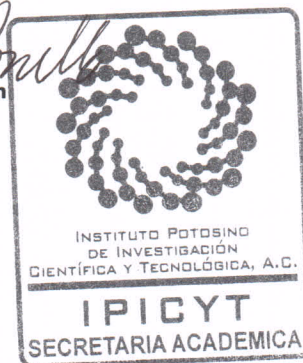
APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 18:55 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 26 días del mes de febrero de 2014.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico





Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT-262243 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

Dedicatoria

A mi familia. Y para ella, la mujer que me ha acompañado a lo largo de este camino, Bahía.

Agradecimientos

Durante esta etapa de vida que hoy termina, agradezco ha todas las personas que han intervenido para que este trabajo tenga un final feliz.. aún si no se encuentran en esta lista, pero estuvieron en el camino, muchas gracias.

De manera muy especial quiero agradecer a mi hermosa esposa Bahia, gracias por permitirme formar parte de tu vida, gracias por tu amor, gracias por ser como eres, gracias por ser la mujer con los mejores sentimientos que he conocido, gracias por ayudarme con las correcciones, gracias por aguantarme, pero sobre todo gracias por motivarme a hacer las cosas de la mejor manera. Mi vida, te adoro.

A mis padres, Carlos y Leticia Así como a mi hermano, gracias por apoyarme en todo momento, por los valores de me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

A la familia Dorantes Gilardi por el apoyo durante esta etapa, sus sabios consejos y abrirme las puertas de su hogar, por haberme hecho sentir siempre en casa y en familia, por su cariño y comprensión. Agradezco también a la familia Cassal Quiroga por el cariño, es especial a mi querida suegra Verónica, por su fe inquebrantable en la vida y sus desafíos.

A mi asesor de tesis, el Dr. Ricardo Femat por la confianza, orientación y ayuda que me brindó para la realización de este trabajo, por su apoyo, los conocimientos y experiencia.

A mis sinodales, Dr. Barajas, Dr. Campos, Dr. Ordaz, gracias por darme la oportunidad, sus consejos, comentarios y por el tiempo que me han dedicado para leer este trabajo.

A todos mis profesores de la maestría que me enseñaron tanto de la profesión como de la vida, impulsándome siempre a seguir adelante.

A mis compañeros y amigos del IPICYT. Omar, Luis, Anzo, Ismael, Roberto, Pablo, Aide, Adriana, Ernesto, Erick, Angeles, Nelly, gracias por pasar a mi lado los momentos de vida y estar siempre en las buenas y en las malas, jamás los olvidaré.

A la familia Báez Miranda, mi familia de corazón, gracias por la calidez de su hogar y por hacerme sentir como uno más de ellos.

Finalmente a la vida que me dio la oportunidad de contar con todos y cada uno de ustedes.

Índice de figuras

2.1. Representación de las líneas de campo de un imán.	8
2.2. Representación de la fuerza de repulsión entre dos imanes.	9
2.3. Representación de un motor de imanes permanentes.	9
2.4. Desfasamiento de corrientes de un sistema trifásico.	10
2.5. Motor Festo y estructura	10
2.6. <i>Servo-Drive</i> Festo (sistema de control del motor)	11
2.7. <i>PLC</i> Allen Bradley Utilizado para dar las secuencias de control al servo-drive	12
2.8. <i>Panel View</i> Medio de comunicación del usuario con el <i>PLC</i>	12
2.9. <i>FLEX I/O</i>	13
2.10. Esquema de conexión de los dispositivos utilizados	14
2.11. Perfil de velocidad creado por el <i>Servo-Drive</i> bajo la configuración en la Figura 2.10	15
2.12. Esquema de conexión modificado para el lazo cerrado de control con el cuál se aborda el problema de seguimiento de salida en el actuador de la Figura 2.5	16
2.13. Perfil de movimiento trapezoidal	17
2.14. Perfil de movimiento curva-s	18

2.15. Representación de la variación de la aceleración con el tiempo.	19
3.1. Circuito equivalente a una fase del electroimán	23
3.2. Diagrama de bloques del sistema de control. Donde el bloque M representa al actuador mostrado en la Figura 2.5 y la referencia el perfil mostrado en la Figura 2.11. La referencia y la ley de control son calculadas en el PLC.	27
3.3. Perfil de movimiento obtenido con las curvas de Bézier. Para un recorrido de 18 cm de ida y vuelta en un tiempo de 1.5 seg. con un tiempo de parada en cada extremo de 0.4 seg.	32
3.4. Perfil de aceleración obtenido con las curvas de Bézier.	33
3.5. Seguimiento de la referencia con el control PID	35
3.6. Error de seguimiento de la referencia con el control PID	36
3.7. Seguimiento de la referencia con el control linealizante	39
3.8. Error de seguimiento de la referencia con el control linealizante	39
4.1. Error entre el estado medible del sistema y el estimado por el observador.	49
4.2. Diagrama de bloques programa principal	53
4.3. Diagrama de bloques programa planta	53
4.4. Diagrama de bloques ley de control	54
4.5. Diagrama de bloques sistema del observador	54
4.6. Seguimiento de la referencia con el control aproximado al linealizante	55
4.7. Error de seguimiento de la referencia con el control linealizante	55
4.8. Señal de control (Corriente demandada por el motor).	56
4.9. Perfil de aceleración del motor en el seguimiento de la referencia.	56
4.10. Seguimiento de la referencia con el control aproximado al linealizante con masa variable.	57

4.11. Señal de control (Corriente demandada por el motor). Para masas de 10, 11, 12, y 13 kg respectivamente	58
---	----

Resumen

Los procesos de manufactura pueden requieren movimientos rápidos y precisos; por ejemplo, para el transporte de materiales, paquetes, ensamble, etc. Los motores lineales de magnetos permanentes son una alternativa para garantizar precisión en movimientos lineales a altas velocidades. Sin embargo, los movimientos a altas velocidades ocasionan problemas que reducen el desempeño del sistema.

Estos sistemas presentan fenómenos de sacudida al tener un lazo cerrado de control. Es por esto que, queremos un mínimo de sacudidas como requerimiento de diseño. El sistema en lazo cerrado puede ser descrito por una ecuación diferencial tipo *Jerk* al considerar la derivada temporal de las fuerzas que actúan en el sistema (por ejemplo fricción, reluctancia, inducida por la ley de control, entre otras) obteniendo una ecuación diferencial de tercer orden. En el presente trabajo se busca la disminución de fenómenos de cambios temporales en la aceleración (sacudidas o *Jerk*) mediante una ley de control en un actuador lineal magnético para lograr un perfil de movimiento suave, el cual nos permite reducir el error durante el movimiento, menor desgaste del actuador y nos ayuda a evitar resonancia mecánica en la estructura. Sin embargo, ya que hay incertidumbre en la expresión exacta de estas fuerzas, si el sistema es observable, se puede construir un observador que estime los estados internos no medibles, relacionados a las fuerzas desconocidas, y con ellos diseñar una ley de control que aproxime la linealización del modelo y sea capaz de lograr el seguimiento de una referencia que garantice un mínimo de sacudidas. La

aproximación es construida por un control dinámico no lineal que converge a uno geométrico linealizante.

Abstract

Manufacturing processes might required fast and accurate movements, for example to transfer of materials, packages, assembly, etc. The permanent magnet linear motors are an alternative to ensure accuracy in linear movements at high speeds. Nevertheless, high speed movements bring inertia troubles reducing the system performance.

This thesis seeks the compensation phenomena of temporal changes in acceleration, (known as Jerk), via a control law on a magnetic linear actuator and smooth motion, which allows us to reduce the movement error, less deterioration on the actuator and this helps us to avoid mechanical resonance in the structure. These systems present shaken phenomena as a result of having a closed loop control, this is why when closing the control loop, low shaken is required from design. This system can be described by a differential equation type *Jerk* considering the time derivative of the forces acting on the system (friction, reluctance, induced by the control law among others) obtaining a third-order differential equation, however, because we don't know the exact expression of these forces, and knowing the system is observable, an observer is built to estimate the unmeasured internal states related to the unknown forces and from them designing a control law that approximates to a linear type control capable to achieve the tracking of a reference that guarantees bounded Jerk.

Índice general

Constancia de aprobación de la tesis	III
Créditos Institucionales	V
Acta de examen	VII
Dedicatoria	IX
Agradecimientos	XI
Lista de figuras	XVII
Resumen	XVIII
Abstract	XX
1. Introducción	1
2. Actuadores lineales y sistemas <i>Jerk</i>.	5
2.1. Funcionamiento de los motores lineales	6
2.2. Información del actuador y red de comunicación	9
2.3. Perfiles de movimiento utilizados actualmente	15
2.4. Sistemas Jerk	18
3. Planteamiento del problema.	21
3.1. Modelado del Actuador Festo	22
3.2. Controlabilidad	27

3.3. Diseño de trayectorias	31
3.4. Control PID	33
3.5. Control no lineal linealizante por retroalimentación de estados	36
3.6. Observador	40
4. Control del sistema <i>Jerk</i>	43
4.1. Observabilidad	43
4.2. Construcción de observador y análisis de estabilidad	46
4.3. Diseño de controlador aproximado al linealizante y su análisis de es- tabilidad	49
4.4. Resultados	52
Conclusiones	59
A. Código curvas de Bezier	61
Bibliografía	67

Capítulo 1

Introducción

A medida que los fabricantes industriales siguen buscando máquinas con mejor eficiencia energética y mayor rendimiento efectivo (rapidez de ejecución, precisión, durabilidad, etc.) los desarrollos tecnológicos han aumentado considerablemente [17]. Sin embargo, en muchas industrias sus procesos siguen siendo aún manuales. Es por esto que los fabricantes recurren a productos y soluciones de automatización avanzadas para satisfacer sus necesidades sin sacrificar las utilidades, el tiempo de lanzamiento al mercado ni la confiabilidad.

Al implementar una estrategia de diseño de sistemas de control se ha demostrado que permite reducir el riesgo de fallas en el diseño y aumenta el rendimiento de la máquina a la vez que reduce al mínimo los costos de desarrollo[6][16][31].

En la actualidad ha habido un gran incremento en la implementación de actuadores en la automatización de procesos industriales. Los actuadores lineales magnéticos son utilizados principalmente en líneas de producción industriales gracias a la alta precisión que tienen y a la alta aceleración que alcanzan[5][6][9].

Los avances en los últimos años en el campo de teoría control han permitido

desarrollar controles avanzados para este tipo de actuadores[31] [34], abriendo para ellas el campo de las aplicaciones que requieren grandes prestaciones de aceleración, velocidad y precisión. Por su facilidad de construcción y bajo costo los motores lineales de magnatos permanentes resultan particularmente mejores alternativas para aplicaciones donde es necesario un movimiento lineal alternativo de carrera larga.

La dinámica de los actuadores lineales, considerando solo la parte mecánica, puede ser modelada a partir de la segunda ley de Newton obteniendo un sistema de segundo orden. Adicionalmente, al considerar que el actuador sigue un perfil de movimiento con cambios bruscos de aceleración la inercia del motor induce una dinamica tipo *Jerk*. Con los cambios temporales de velocidad la descripción de la dinamica del actuador se puede representar por un sistema de tercer orden en el cual podemos compensar los efectos *Jerk* en el sistema (la tercera derivada de la posición con respecto del tiempo es llamada *Jerk*).

La segunda ley de Newton lleva a un *Jerk* cuando la fuerza en el marco de referencia de la masa es variante en tiempo [4][10][11].

En el presente trabajo se aborda el problema de seguimiento de salida ante fenómenos tipo *Jerk* en un actuador lineal magnético (Festo modelo ELGL-LAS-64-720-SRE-B), la dinámica de estos actuadores presentan fenómenos tipo *Jerk* relacionados al seguimiento de perfiles de movimiento cuando estos requieren cambios de sentido abruptos las magnitudes de *Jerk* pueden considerarse no acotadas [16][17]. Es por eso que, se busca a través del diseño de una ley de control modificar los perfiles de movimiento impuestos por los fabricantes de manera que podamos obtener valores de *Jerk* acotados.

El que exijamos la disminución del *Jerk* en el actuador implica que el desgaste y el consumo de energía sea menor así como que no exista resonancia mecánica en la estructura del actuador. Se puede garantizar la disminución del *Jerk* si la

referencia del movimiento es continua, de manera particular un perfil de movimiento con cambios de aceleración continuos en el tiempo. Un perfil de movimiento suave (un perfil con valores de *Jerk* acotado) nos permite reducir el error durante el movimiento y el esfuerzo para el actuador.

Por otro lado, es necesario también una ley de control que nos permita seguir la referencia de manera precisa, sin embargo, ya que para la construcción de una ley de control es necesario conocer el modelo del sistema y en nuestro caso no se tiene de manera exacta el modelo dinámico del actuador, se utilizará un observador para la construcción de la ley de control [7][21]. Lo cual se explicará de manera detallada en el Capítulo 3.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: En el Capítulo dos se abordara la teoría de motores lineales, ¿qué son? y ¿cuál es su principio de funcionamiento?, introduciremos qué son y qué forma tienen los sistemas *Jerk* y cuáles son los perfiles de movimiento utilizados en este tipo de motores. Y por último los datos técnicos relacionados con el motor. En el Capítulo tres se presentarán tanto el modelo cinemático del motor así como su modelo eléctrico. Al igual que las técnicas de diseño utilizadas para la generación de trayectorias con bajo *Jerk*, se muestran también los resultados obtenidos con dos leyes de control comúnmente utilizadas, mostrando con ellas la necesidad de utilizar un observador. En el Capítulo cuatro se mostrarán los resultados obtenidos con la ley de control propuesta así como los respectivos análisis de estabilidad de los sistemas. Por último, en el Capítulo cinco se presenta un resumen de las conclusiones obtenidas de este trabajo.

Capítulo 2

Actuadores lineales y sistemas

Jerk.

Nuestro interés es controlar un actuador lineal de magnetos permanentes un aspecto importante es comprender el funcionamiento de estos así como el campo de aplicación que tienen tomando en cuenta sus principales características; en este capítulo se mostrarán los principios básicos sobre los actuadores magnéticos, tales como sus propiedades y los principios físicos básicos de su funcionamiento partiendo de algunos de los conceptos de magnetismo. Al igual se presentará la información técnica del actuador, tales como las características específicas de este actuador, sus capacidades y sus limitantes, así como el equipo utilizado para el montaje, comunicación y puesta en marcha. También mostraremos cómo estos actuadores, al tener una fuerza aplicada la cual sea dependiente del tiempo, pueden ser descritos por un sistema *Jerk*. Analizaremos también los perfiles de movimiento utilizados en este tipo de actuadores tanto para velocidad como para aceleración.

2.1. Funcionamiento de los motores lineales

Los motores eléctricos son modo de accionamiento eficientes, al no precisar contacto físico entre el elemento transmisor de energía (el campo electromagnético) y el elemento receptor (el eje), las que más se han desarrollado y utilizado son las máquinas lineales sincrónicas y las máquinas lineales de inducción.

El principio de funcionamiento del motor lineal permite obtener una forma de conversión de la energía cuyas ventajas se imponen en forma determinante en todos los sectores en donde están en juego fuerzas para traslación; el motor lineal provee por sí mismo un esfuerzo de propulsión sin ningún medio de transmisión mecánica y con solamente el vínculo electromagnético entre las partes fijas y móviles. De esta forma se elimina el recurso clásico de transformar el movimiento de rotación del motor convencional en un movimiento lineal eliminando los problemas de los sistemas de transmisión y de adherencia en las ruedas motrices.

Un motor lineal es un motor eléctrico que en vez de producir un torque (rotación) produce una fuerza lineal en el sentido de su longitud. El modo más común de funcionamiento es como un actuador tipo Lorentz[30], en el cual la fuerza aplicada es linealmente proporcional a la corriente eléctrica y al campo magnético[3]. Se han propuesto varios diseños de motores lineales, los cuales se enmarcan en dos categorías principales, motores lineales de baja aceleración y de alta aceleración. Los motores lineales de alta aceleración por lo general son relativamente cortos y se diseñan para acelerar un objeto a muy alta velocidad.

Los motores de alta aceleración por lo general poseen diseños tipo motor de inducción lineal AC con un embobinado trifásico activo de un lado del núcleo magnético de aire y una placa conductora pasiva del otro lado. Los motores de baja aceleración, alta velocidad y alta potencia por lo general son del tipo motores lineales sincrónicos

(LSM por sus siglas en inglés), con un embobinado activo de un lado del núcleo magnético de aire y un conjunto de imanes con sus polos alternados del otro lado. Estos imanes pueden ser imanes permanentes o electroimanes[3].

Los avances en el campo de la teoría de control han permitido desarrollar controladores muy avanzados para este tipo de máquinas, abriendo para ellas el campo de las aplicaciones que requieren grandes prestaciones de aceleración, velocidad y precisión. Los actuadores lineales de alta aceleración resultan particularmente interesantes para aplicaciones donde sea necesario un movimiento lineal alternativo de carrera larga, donde su facilidad de construcción les hacen muy competitivos[29][31].

La principal ventaja de los motores lineales radica en que pueden conducir el movimiento sin necesidad de engranajes intermedios, tornillos, ejes inestables, u otros mecanismos. Todo ello, comparado con los motores rotatorios, proporciona una serie de ventajas entre las que están:

- Mayores valores de aceleración.
- Construcción simple y robusta.
- Reducción de los costes de mantenimiento y mayor disponibilidad de componentes.
- Reducción de los niveles de ruido y vibración.

Sin embargo, aún queda mucho por hacer para diseñar correctamente equipos en los que interaccionen simultáneamente campos electromagnéticos fuertes, sistemas mecánicos y sistemas electrónicos, siguiendo unas determinadas leyes de control[46].

Los principios básicos del funcionamiento de los motores magnéticos parten de conceptos básicos de magnetismo. Los fenómenos magnéticos fueron descubiertos en la antigua Grecia. Sabían que ciertas piedras atraían trocitos de hierro y éstos al ser

atraídos a su vez atraen otros. A estas piedras se les denominaron imanes naturales (tienen campo magnético propio debido a su estructura atómica).

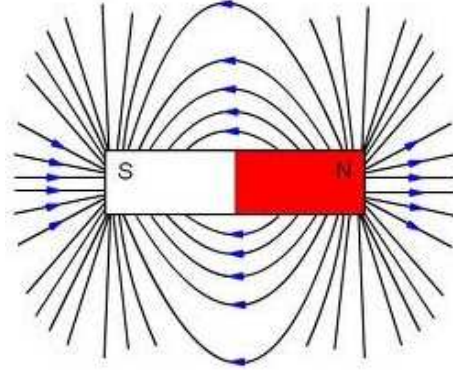


Figura 2.1: Representación de las líneas de campo de un imán.

Un campo magnético es la influencia de las corrientes eléctricas y de los materiales magnéticos sobre una carga. Los campos magnéticos son producidos por cualquier carga eléctrica en movimiento y el momento magnético intrínseco de las partículas elementales asociadas con una propiedad cuántica fundamental, el espín.

El principio básico del funcionamiento de los motores eléctricos es la anteposición de los polos magnéticos de dos o más imanes, (ya sean naturales o electroimanes), lo que produce una fuerza de repulsión entre ellos en dirección perpendicular a las líneas de campo de los imanes.

En el caso del motor magnético se tiene el arreglo anti-simétrico de imanes naturales (estator), y un arreglo de bobinas que conforman al electroimán (actuador) y siguiendo el principio de repelencia de los imanes se hace el arreglo entre el estator y el actuador de tal manera que al cambiar la polaridad del electroimán se obtiene un desplazamiento horizontal.

Para que se desplace linealmente el actuador, creado por el electroimán, se aplicará un conjunto de corrientes a los conductores del electroimán según el sistema trifásico

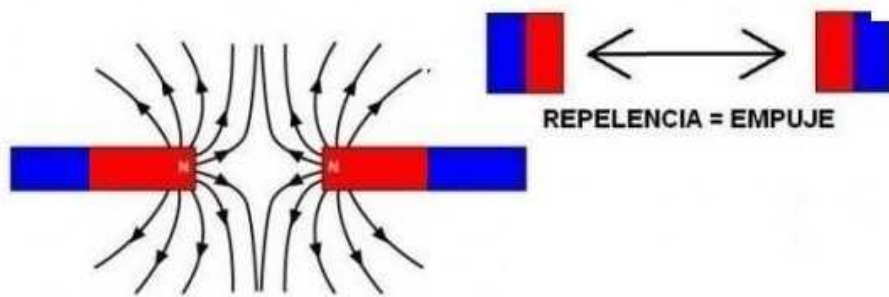


Figura 2.2: Representación de la fuerza de repulsión entre dos imanes.

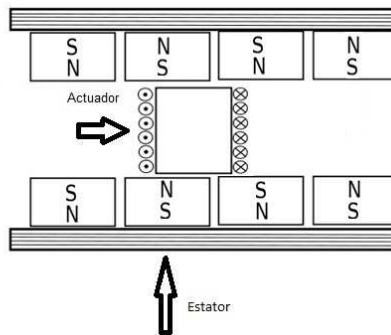


Figura 2.3: Representación de un motor de imanes permanentes.

de corrientes. De este modo, un conjunto de corrientes trifásicas, cada una de igual magnitud y desfasadas 120° Figura 2.4, producirán un campo magnético de magnitud constante que se desplaza a lo largo del eje x (Teorema de Ferraris) [48].

2.2. Información del actuador y red de comunicación

El actuador eléctrico lineal es un eje de manipulación con guía apoyada sobre un colchón neumático. Los elementos de accionamiento y el colchón de aire forman una unidad. El carro se mueve sobre la guía que hace las veces de estator Figura 2.5. A

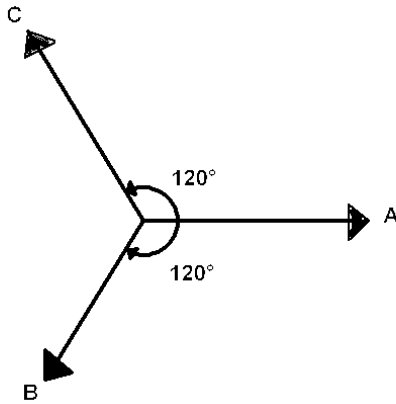


Figura 2.4: Desfasamiento de corrientes de un sistema trifásico.

través de un sistema de medición de recorrido (sensores), el controlador y el motor funcionan en un circuito posicionador cerrado. De este modo, se puede regular la velocidad y el avance del actuador hasta las posiciones con gran precisión y dentro de la carrera admisible, de acuerdo con valores nominales definidos con anterioridad.

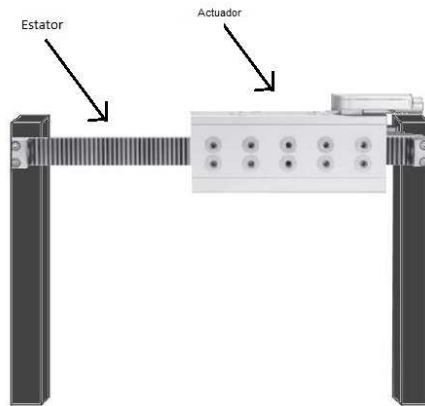


Figura 2.5: Motor Festo y estructura

Entre las principales características del motor están [53]: carrera útil de 1.65 *m* alcanzan una fuerza de avance continua de 160 *N*, alcanzan una aceleración máxima

de 29.1 m/s^2 , es un motor del tipo servo motor AC lineal con sistema de medición magnético con una corriente pico de 4.5 A y una capacidad de carga de hasta 15 kg . Los equipos necesarios para la puesta en marcha del motor son:

Servo-controlador (*servo-drive*) es el CMMP-AS-C5-3A Figura. (2.6) es una herramienta flexible, diseñada para controlar cualquier sistema que requiera un lazo de control cerrado tipo PID. Un *servo-drive* recibe la señal de comando de un sistema de control, amplifica la señal y transmite la corriente eléctrica al actuador para producir el movimiento proporcional a la señal comando. Típicamente la señal de comando representa la velocidad deseada, pero también puede representar un torque o posición deseados.

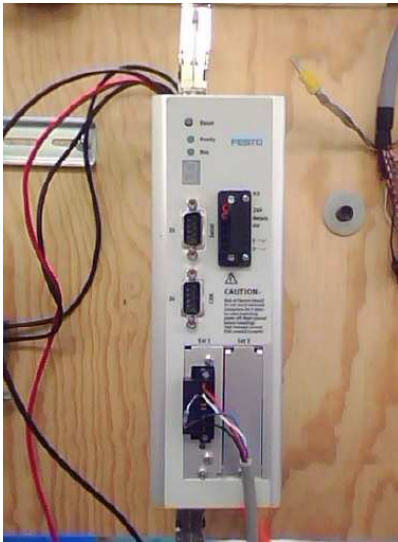


Figura 2.6: *Servo-Drive* Festo (sistema de control del motor)

En la Figura 2.7 el Controlador Lógico Programable (*PLC* por sus siglas en inglés) Control Logix familia 5000 de Allen Bradley (AB). El *PLC* es una computadora utilizada para automatizar procesos electromecánicos, a diferencia de las computadoras

de propósito general, el *PLC* está diseñado para múltiples señales de entrada y de salida.



Figura 2.7: *PLC* Allen Bradley Utilizado para dar las secuencias de control al servo-drive

En la Figura 2.8 se muestra la interfaz hombre-máquina por sus siglas en ingles *HMI* (Pantalla *Panel View* 1250) son dispositivos de pantalla para montaje en panel que ofrecen opciones de teclado o pantalla táctil para la entrada de datos por el operador.



Figura 2.8: *Panel View* Medio de comunicación del usuario con el *PLC*

En la Figura 2.9 el equipo remoto de control (adquisición de datos) *FLEX I/O*

(Input/Output). El cual nos permite tener distintos protocolos de comunicación en una red de dispositivos de control.



Figura 2.9: *FLEX I/O*

En la Figura 2.10 se muestra el esquema de conexión de los dispositivos utilizados para el control de movimiento del motor. Del arreglo presentado, en nuestro caso la planta a controlar es el actuador junto con en servo-drive y se presentan el resto de los dispositivos debido a que éstos son indispensables para el funcionamiento del actuador.

Las redes de comunicación DeviceNet, CANopen y Ethernet/IP. (i) La red de DeviceNet: permite la comunicación, control y adquisición de señales entre el PLC y todos los sensores (inductivos, capacitivos, ópticos, encoders, etc.) y actuadores (servo-válvulas, electroválvulas, venturiers, etc.) del prototipo mecatrónico. (ii) Red CANOpen: lleva a cabo la comunicación entre los controladores (servo-drives) de los diferentes motores a utilizar, es decir, se utilizará para el control de movimiento. (iii) Red Ethernet/IP: Es el medio de comunicación entre los PLCs y el Panel View (interfaces de usuario), así como también entre el PLC y la red CANOpen de los

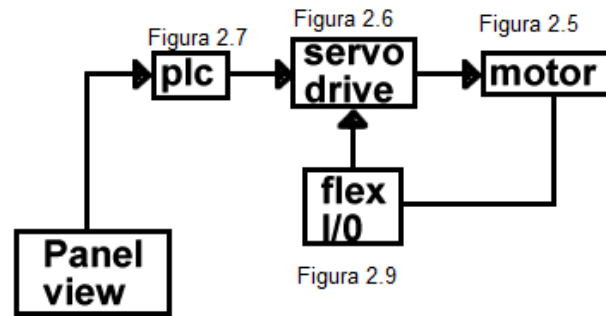


Figura 2.8

Figura 2.10: Esquema de conexión de los dispositivos utilizados

motores a través de un Gateway (Dispositivo utilizado para la interacción y la transferencia de información de un protocolo de comunicación a otro).

El sistema de comunicación entre los equipos es de la siguiente manera: En el Panel view se especifican los requerimientos de movimiento como recorrido, tiempo y ciclos éstos son recibidos por el PLC en donde se calcula el perfil de movimiento y la ley de control, esta información llega al servo drive del motor a través del Gateway es de esta manera que el servo drive proporciona la potencia al motor para el movimiento. La retroalimentación de los sensores para la ley de control llegan de los sensores al PLC por medio del Flex I/O.

El sistema de control del diagrama de conexión mostrado en la Figura 2.10 es un lazo abierto en el cual, dada la distancia que se requiere recorrer y el tiempo, el Servo-Drive calcula un perfil de velocidad para el movimiento dividiendo el tiempo de desplazamiento en tres partes: la primera el periodo de aceleración (tiempo en el que se alcanza la velocidad máxima para el movimiento), la segunda el periodo en el que se mantiene la velocidad máxima y por último la etapa de frenado Figura

2.11 [51]. Este tipo de diseño de control presentan dos problemas, el primero es que para movimientos rápidos, el perfil de movimiento creado, la demanda de corriente en las etapas de aceleración y desaceleración son altos y el segundo es que al tener un control en lazo abierto en movimientos rápidos se ve comprometida la precisión del actuador.

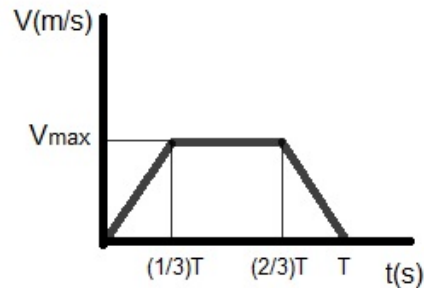


Figura 2.11: Perfil de velocidad creado por el *Servo-Drive* bajo la configuración en la Figura 2.10

Sin embargo, al cerrar el lazo de control modificando el esquema de conexión Figura 2.12 y un perfil de movimiento suave con el que podamos dar la posición, velocidad y aceleración deseados es posible regular el consumo de corriente y la precisión del actuador en movimientos rápidos.

2.3. Perfiles de movimiento utilizados actualmente

Pero ¿cuál es el objetivo de considerar los efectos de sacudida en este tipo de sistemas? En la búsqueda del algoritmo para la compensación entre la necesidad de un tiempo corto de ejecución y los requerimientos de suavidad en la trayectoria. lo cual es bien conocido como una condición necesaria para limitar la vibración (sacudidas) durante movimientos rápidos[9].

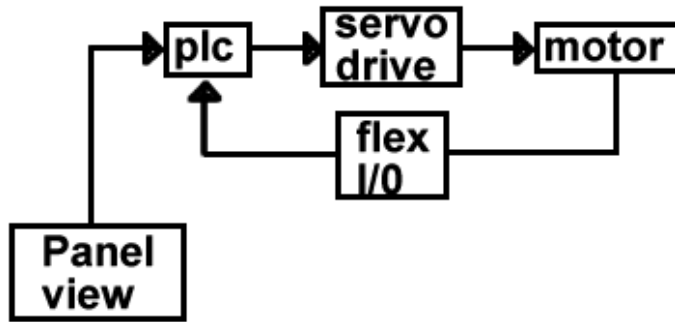


Figura 2.12: Esquema de conexión modificado para el lazo cerrado de control con el cuál se aborda el problema de seguimiento de salida en el actuador de la Figura 2.5

En la actualidad los perfiles de movimiento que tienen este tipo de actuadores son trapezoidales [5][46][47] como los que se muestran en la Fig.(2.13) o de curva-s Fig (2.14). La diferencia entre estos dos tipos de movimiento es la suavidad en los cambios de velocidad durante el movimiento, esto es, los cambios de aceleración del sistema. En las Figuras 2.13,2.14 se muestra el perfil de aceleración para un perfil trapezoidal y de curva s, respectivamente.

La función logística, curva logística o curva en forma de S es una función matemática que aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones. Dicha función constituye un refinamiento del modelo exponencial para el crecimiento de una magnitud. Modelo de la función sigmoidea de crecimiento de un conjunto:

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \quad (2.1)$$

Los perfiles de movimiento fueron obtenidos del software Motion Analyzer, encargado de proporcionar datos de medidas, selección, optimización y simulación junto con el análisis de ratios, pares de apriete y tolerancias. El software Motion Analyzer



Figura 2.13: Perfil de movimiento trapezoidal

de Rockwell Automation es una herramienta completa de dimensionamiento para aplicaciones de movimiento que se usa para análisis, optimización, selección y validación de sistemas de control de movimiento. Este software nos permite simular los elementos físicos de un sistema de movimiento para calcular la fuerza o par que un motor debe aplicar para mover la carga a través de diferentes perfiles de movimiento al igual que permite calcular el factor de seguridad y los efectos de la fatiga cíclica del sistema.

Tomando en cuenta los problemas generados con este tipo de perfiles de movimiento, para poder diseñar una ley de control que nos permita tener perfiles de movimiento suaves (perfiles de aceleración continuos) es necesario un modelo que considere la dinámica de la aceleración, esto quiere decir, un sistema de tercer orden (sistema *Jerk*).



Figura 2.14: Perfil de movimiento curva-s

2.4. Sistemas Jerk

La gran mayoría de sistemas mecánicos para el movimiento de partículas o cuerpos están constituidos por ecuaciones diferenciales de segundo orden. Esto tiene sentido para el movimiento de partículas o cuerpos, donde esencialmente se pretende relacionar las fuerzas existentes con la trayectoria de la partícula, y éstas a su vez son completamente expresables (caracterizadas) en términos de la primera y segunda derivada de las coordenadas, resulta que el movimiento de una partícula, conocida su posición y velocidad inicial, está completamente especificado si se relacionan las fuerzas con las derivadas primera y segunda[10][11]. Sin embargo, otros fenómenos físicos pueden exhibir conductas más complejas ya que en ellos se deben especificar ecuaciones para más estados que los que determinan una trayectoria continua en el espacio, y por tanto podrían requerir la especificación de la tercera derivada. En el año 2000, J.C:Sprott y S. J. Linz [4][13][22]publicaron una serie de ecuaciones polinomiales de tercer orden con no linealidades llamando a dichas ecuaciones, ecuaciones o sistemas Jerk.

Un sistema de sobreaceleración es un sistema cuya evolución temporal está dada por una ecuación del tipo[10]:

$$\frac{d^3\vec{x}}{dt^3} = F(x, \frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}) \quad (2.2)$$

La sobreaceleración (conocida también como tirón o *Jerk*) es la tasa de cambio de la aceleración, es decir, la derivada de la aceleración con respecto al tiempo, la segunda derivada de la velocidad, o la tercera derivada de la posición. Dado que la aceleración es una magnitud vectorial, la sobreaceleración también lo es[11].

$$\vec{J} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{d^3\vec{x}}{dt^3} \quad (2.3)$$

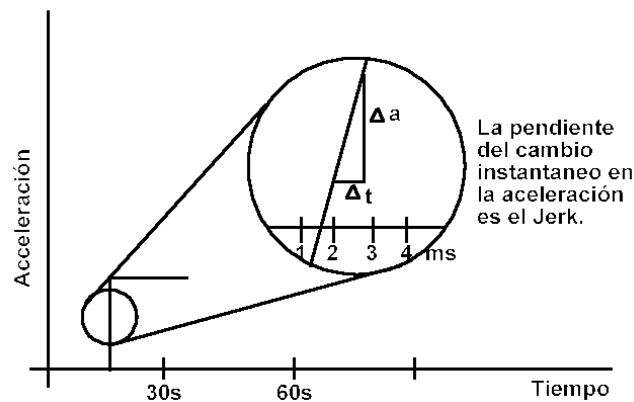


Figura 2.15: Representación de la variación de la aceleración con el tiempo.

El control del *Jerk* permite graduar la aceleración para suavizar los cambios bruscos de velocidad. Los escalones o saltos bruscos de velocidad tienden a excitar oscilaciones en las frecuencias de resonancia de los sistemas mecánicos provocando desgastes o rupturas[9]. Algunos de los fenómenos que pueden ser descritos por sistemas tipo *Jerk* son[8][15][25]:

- Estudio de satélites orbitales
- Diseño de levas (los cambios bruscos de aceleración lo deterioran rápidamente)
- Mecanizado con Control Numérico Computalizado (CNC) a alta velocidad
- Diseño de subidas y bajadas en una montaña rusa
- Estudio de la aceleración de la luna con respecto a la Tierra

Para mostrar como aparece la dinámica del Jerk en un sistema mecánico (*Jerk* Newtoniano) podemos partir de la dinámica Newtoniana para la cual la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (2.4)$$

ésta describe la evolución temporal de una partícula de masa m en este caso la fuerza sólo depende explícitamente de la posición velocidad y tiempo. Pero este tipo de sistemas puede ser llevado a una función tipo *Jerk* si la derivada total de la ecuación de Newton cumple [4]:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \ddot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.5)$$

Una vez mencionado esto en el siguiente Capítulo se mostrara un modelo cinemático, el cual podrá ser llevado a una ecuación tipo Jerk con los antecedentes mostrados en esta seccion dicho modelo sera utilizado para el diseño de la ley de control.

Capítulo 3

Planteamiento del problema.

El Capítulo inicia con la formulación y discusión de las ecuaciones que serán consideradas como modelo del actuador. Cabe mencionar que el actuador tiene una ley de control a través del Servo, estos aspectos serán considerados para el modelado tanto cinemático así como para el modelado eléctrico, esto permitirá llevar al sistema de fuerzas (ecuación diferencial de segundo orden) a un sistema de tercer orden (*Jerk*) en el que podremos compensar los efectos asociados al cambio de la aceleración con respecto al tiempo provocados por la ley de control y los perfiles de movimiento impuestos por el *servo drive*. Se mostrarán también los perfiles de movimiento de bajo *Jerk* obtenidos a través de los polinomios de *Bezier* los cuales serán utilizados como referencia para probar dos leyes de control, la primera del tipo proporcional integral derivativo (PID) y la segunda una ley de control linealizante. Estas dos leyes de control nos darán la pauta para mostrar la necesidad de diseñar un observador de estados.

3.1. Modelado del Actuador Festo

En un motor lineal síncrono, el movimiento mecánico está en sincronía con el campo magnético, esto quiere decir que podemos suponer que la velocidad del motor es la misma que la velocidad del flujo de campo magnético. Este empuje generado es causado por un campo magnético producido por el cambio de dirección de corriente directa en los embobinados del electroimán y en el arreglo de polos magnéticos N,S,N,S,...,N,S (riel ferromagnético). Para este tipo de actuadores la fuerza de empuje electromagnético está dada por [3]:

$$F_x = m_m \frac{c_F}{2} \phi_f I_a \cos \Psi \quad (3.1)$$

donde m_m (kg) es la masa del motor, c_F es la constante de proporcionalidad, $\phi_f(T)$ es el flujo magnético producido por el arreglo de imanes, $I_a(A)$ es la corriente de la armadura y Ψ es el ángulo entre el eje y la corriente I_a el cual es constante. Asumiendo que el único valor que es variable en este caso es I_a podemos reescribir la ecuación (3.1) para obtener.

$$F_x = K_f I_a \quad (3.2)$$

El valor de la constante $K_f = 1/62$ (??) la provee el fabricante del motor en nuestro caso. Como se mostró la fuerza de empuje es debida a la corriente, por lo que resulta necesario relacionar la cinemática del motor con su modelo eléctrico. Por simplicidad, a lo largo del trabajo a la corriente I_a la denotaremos con la letra i .

El circuito eléctrico que modela el comportamiento del motor se muestra en la Figura 3.1 con el cual se representa una fase del motor [29][30].

Al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene la siguiente ecuación:

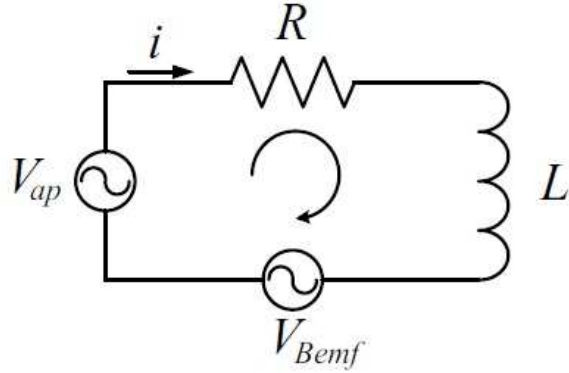


Figura 3.1: Circuito equivalente a una fase del electroimán

$$V_{ap} = Ri + L\frac{di}{dt} + V_{Bemf} \quad (3.3)$$

Donde V_{ap} es el voltaje aplicado, Ri es la caída de voltaje en la resistencia interna de la bobina, $L\frac{di}{dt}$ es la caída de voltaje en la bobina y V_{Bemf} es el voltaje inducido por el motor llamado fuerza contraelectromotriz. En el caso de los actuadores lineales síncronos la velocidad de la pieza móvil es igual a la velocidad de desplazamiento síncrono del campo magnético. Por lo tanto se cumple la siguiente relación [3]:

$$V_{Bemf} = C_E\Psi_f v = K_e v \quad (3.4)$$

el voltaje contraelectromotriz es proporcional a la velocidad de desplazamiento del motor.

De la ecuación (2.4) y considerando que la fuerza que actúan sobre el sistema es la fuerza de empuje electromagnético ecuación(3.2) tenemos que:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}K_f i \quad (3.5)$$

despejando de la ecuación (3.3) a $\frac{di}{dt}$. Obtenemos el sistema de ecuaciones (3.6).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_f}{m}i \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L}V_{Bemf} - \frac{R}{L}i + \frac{V_{ap}}{L} \end{aligned} \quad (3.6)$$

y sustituyendo la ecuación (3.4) tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_f}{m}x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{K_e}{L}x_2 - \frac{R}{L}x_3 + \frac{V_{ap}}{L} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donde por la segunda ley de Newton que relaciona la aceleración de un sistema mecánico con la fuerza que actúa en él, denotamos a x_1 como la posición del actuador, x_2 es la velocidad del actuador y x_3 es la corriente de la armadura. En este caso, vemos como el sistema puede ser descrito por una ecuación tipo *Jerk*[22] al incluirse la dinámica de la corriente del electroimán. La finalidad de relacionar la cinemática del actuador y el modelo eléctrico es, mostrar que los cambios de aceleración en el actuador son debidos a la corriente en el electroimán y es por esto que la dinámica del actuador puede ser descrita por un sistema de tercer orden cuya forma satisface a los sistemas con *Jerk*. Mas adelante mostraremos cómo este tipo de ecuación se puede obtener al tener una interconexión en lazo cerrado. Esto es, cuando el actuador está sujeto a una retroalimentación con PID.

Ahora bien, Partiendo de un análisis de fuerzas podemos también obtener una ecuación con *Jerk*. Esto es de nuestro interés ya que el objetivo principal de este trabajo es el seguimiento de salida bajo condiciones de cambios temporales en la aceleración (*Jerk*), es necesario considerar un modelo del actuador lineal que describa dicho fenómeno [31], al igual se debe considerar que por el diseño de estos

actuadores se presenten una serie de efectos anómalos que afectan a su rendimiento y desempeño. La presencia de estos efectos anómalos, sobre todo de los efectos dependientes de la velocidad, muestran la importancia de considerarlos al modelar este tipo de actuadores. La presencia de imanes permanentes en el estator de estas máquinas hace que existan fuerzas, que varían según la posición del primario del motor, entre su actuador y los propios imanes. Estas fuerzas son de dos tipos: fuerzas de reluctancia (resistencia de un material al paso de un flujo magnético) y fuerzas atractivas entre los imanes y el actuador. Estas fuerzas son causantes de problemas tales como imprecisiones dinámicas y esfuerzos en sus elementos [28][29][30] pero no hay que confundirlas con las fuerzas de empuje, que son las que, en principio, interesan.

Teniendo en cuenta los aspectos a considerar en el modelo, mencionados anteriormente, podemos entonces construir un modelo del sistema a partir de la segunda ley de Newton tomando en cuenta las fuerzas que actúan sobre el motor.

$$F = \sum_j F_j = \tau + F_i \quad (3.8)$$

donde τ es la fuerza aplicada por una ley de control la cual es causante del movimiento y F_i las fuerzas inciertas del sistema relacionadas a la reluctancia y atractivas las cuales denotaremos por $\psi(x, \dot{x})$. De esta sumatoria de fuerzas obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden.

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = \psi(x, \dot{x}) + \tau \quad (3.9)$$

Supongamos que las leyes de control (a través del *servo drive*) son del tipo Proporcional Integral Derivativo (PID); entonces tenemos $\tau = \kappa_p(r - x) + \kappa_d(\dot{r} - \dot{x}) +$

$\int \kappa_i(r - x)$, se obtiene que:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = \psi(x, \dot{x}) + \kappa_p(r - x) + \kappa_d(\dot{r} - \dot{x}) + \int_0^\tau \kappa_i(r - x) dt \quad (3.10)$$

donde r es la referencia a seguir y \dot{r} es la velocidad de referencia. Ya que lo que nos interesa es compensar los fenómenos asociados a cambios temporales de aceleración en el actuador podemos llevar la ec. (3.10) a un sistema Jerk mediante la derivada temporal de la fuerza ecuación (2.5). Con esto se obtiene que el *Jerk* del sistema está dado por:

$$\frac{dF}{dt} = m \frac{d^3 x}{dt^3} = \ddot{x} \left(\frac{\partial \psi(\dot{x}, x)}{\partial \dot{x}} - \kappa_d \right) + \dot{x} \left(\frac{\partial \psi(\dot{x}, x)}{\partial x} - \kappa_p \right) + \kappa_i(r - x) + \kappa_p \dot{r} + \kappa_d \ddot{r} \quad (3.11)$$

Con $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ y $x_3 = \ddot{x}$ de la ec. (3.11) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{m} x_3 \left(\frac{\partial \psi(x_2, x_1)}{\partial x_2} - \kappa_d \right) + x_2 \left(\frac{\partial \psi(x_2, x_1)}{\partial x_1} - \kappa_p \right) + \kappa_i(r - x_1) + u(x) + \kappa_p \dot{r} + \kappa_d \ddot{r} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde es x_1 la posición, x_2 la velocidad, x_3 la aceleración, m es la masa a mover y $u(x)$ la ley de control que nos ayudará a compensar los cambios en la aceleración. En la Figura 3.2 se muestra el esquema de control para el sistema *Jerk* en donde la planta a controlar está conformada por el motor (M) y el *servo-drive*.

En comparación, al igual que la ecuación (3.7) la ecuación (3.12) satisface la forma de un sistema jerk. Sin embargo, en la ecuación (3.12) el cambio temporal en la

aceleración es dependiente del lazo cerrado, con la ley de control tipo PID, a diferencia con la ecuación (3.7) que el cambio temporal en la aceleración es dependiente de la corriente en el electroimán. En este caso utilizaremos el modelo (3.12) ya que es el que considera los cambios por la ley de control.

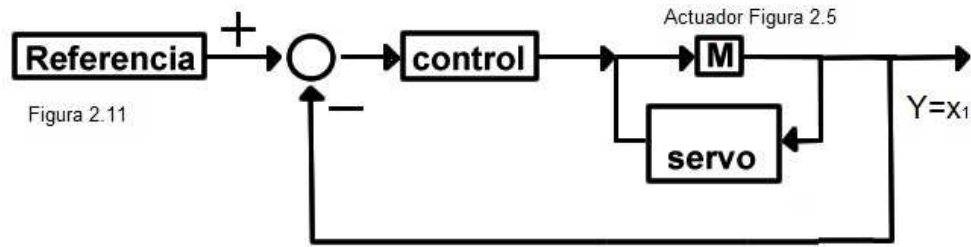


Figura 3.2: Diagrama de bloques del sistema de control. Donde el bloque M representa al actuador mostrado en la Figura 2.5 y la referencia el perfil mostrado en la Figura 2.11. La referencia y la ley de control son calculadas en el PLC.

Una vez que hemos obtenido el modelo dinámico del motor, antes de diseñar una ley de control que nos permita modificar los perfiles de movimiento, mostrados en la sección (2.4), a un perfil de aceleración suave, es necesario mostrar si el sistema es controlable.

3.2. Controlabilidad

Definición 1 [49][50] Sea M una variedad del espacio de estados, un sistema no lineal se dice controlable si para cualesquiera dos puntos x_1, x_2 en M existe un tiempo finito $T > 0$ y una función de control $u : [0, T] \rightarrow U$ tal que $x(T, x_1, u) = x_2$.

La controlabilidad de un sistema no lineal se puede determinar con los corchetes de Lie o las derivadas de Lie; según interese controlabilidad u observabilidad [50]

Para controlabilidad, se discute lo siguiente: dados $f(x)$ y $g(x)$ en \mathbb{R}^n

El multiplicador corchete de Lie es el campo vectorial definido por:

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \quad (3.13)$$

El producto corchete de Lie (3.13) es recursivo de tal manera que los corchetes de Lie de orden superior obedecen lo siguiente

$$\begin{aligned} (ad_f^1, g) &= [f, g] \\ (ad_f^2, g) &= [f, [f, g]] \\ &\dots \\ (ad_f^k, g) &= [f, (ad_f^{k-1} g)] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Así, consideremos un sistema no lineal afin de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^l g_i(x) u_i \quad (3.15)$$

donde $f(x)$ es el campo vectorial y $g_i(x)u_i$ son los vectores de entrada del sistema.

El sistema definido por (3.15) es localmente controlable alrededor de x_0 si la distribución C genera un espacio de dimensión n , donde n es la dimensión de x con C definido por:

$$C = [g_1, g_2, \dots, g_m, [g_i, g_j], \dots, [ad_{g_i}^k, g_j], \dots, [f, g], \dots, [ad_f^k, g_i], \dots] \quad (3.16)$$

Para el problema que ocupa consideremos el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{m} \left[x_3 \left(\frac{\partial \psi(x_2, x_1)}{\partial x_2} - \kappa_d \right) + x_2 \left(\frac{\partial \psi(x_2, x_1)}{\partial x_1} - \kappa_p \right) + \kappa_i (r - x_1) \right] + u(x)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Para probar la controlabilidad del actuador tenemos que:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \frac{1}{m} x_3 \left(\frac{\partial \psi(x_2, x_1)}{\partial x_2} - \kappa_d \right) + x_2 \left(\frac{\partial \psi(x_2, x_1)}{\partial x_1} - \kappa_p \right) + \kappa_i (r - x_1) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

y

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Por lo tanto tenemos que la matriz C queda dada por:

$$C = [g, [f, g], (ad_f^2, g)] \tag{3.20}$$

Al efectuar los calculos de $[f, g]$ resulta lo siguiente

$$\begin{aligned}
 [f, g] &= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f(x) - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_i & \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1} - k_p & \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} - k_d \end{pmatrix} g(x) \\
 \Rightarrow [f, g] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_i & \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1} - k_p & \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} - k_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} - k_d \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

De manera recursiva calculamos el corchete $[f, [f, g]]$

$$\begin{aligned}
 [f, [f, g]] &= \frac{\partial [f, g]}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} [f, g] = \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \frac{1}{m} x_3 \left(\frac{\partial \psi(x_2, x_1)}{\partial x_2} - \kappa_d \right) + x_2 \left(\frac{\partial \psi(x_2, x_1)}{\partial x_1} - \kappa_p \right) + \kappa_i (r - x_1) \end{pmatrix} - \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_i & \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1} - k_p & \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} - k_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2} - k_d \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}x_2 + \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2\partial x_2}x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2} - k_d \\ \left(\frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2} - k_d\right)^2 + \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_1} - k_p \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2} - k_d \\ \left(\frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2} - k_d\right)^2 + \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_1} - k_p - \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}x_2 + \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2\partial x_2}x_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2} - k_d & 1 & 0 \\ \left(\frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2} - k_d\right)^2 + \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_1} - k_p - \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}x_2 + \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2\partial x_2}x_3 & \frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2} - k_d & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal, el determinante de C es 1 por lo tanto la matriz C tiene rango 3 y se tiene que el sistema es controlable $\forall x$ al rededor de x_0 .

3.3. Diseño de trayectorias

La propiedad de suavidad requerida sobre la trayectoria implica que la trayectoria generada no excita la resonancia mecánica del manipulador. Con la finalidad de satisfacer los requerimientos las derivadas de la trayectoria deben ser continuas en particular se desea obtener trayectorias con continuos cambios de aceleración [9][16].

El seguimiento de una trayectoria suave (una trayectoria con valor de *Jerk* acotado) nos permite reducir el error durante el movimiento y el estrés para el actuador y

la estructura del manipulador. Trayectorias de bajo *Jerk* pueden ser ejecutadas mas rápida y acertadamente[16].

Con esto nace la necesidad de diseñar un perfil de movimiento el cual satisfaga los requerimientos concernientes a posición, velocidad, aceleración y *Jerk* en el tiempo y un controlador capaz de lograr el seguimiento de esta referencia. Esto es crucial para asegurar resultados óptimos desde el punto de vista del desempeño del movimiento, especialmente para operaciones de altas velocidades las cuales son requeridas en muchas aplicaciones.

En este trabajo para el diseño del perfil de movimiento se utilizaron las curvas de Bézier. La curva de Bézier es una función $b(t)$ polinómica de grado n [44][45]:

Los perfiles de movimiento obtenidos utilizando esta técnica (código Apéndice A) se muestran en la Figura 3.3 para el desplazamiento del actuador (perfil de movimiento) y la Figura 3.4 el perfil de aceleración del desplazamiento.

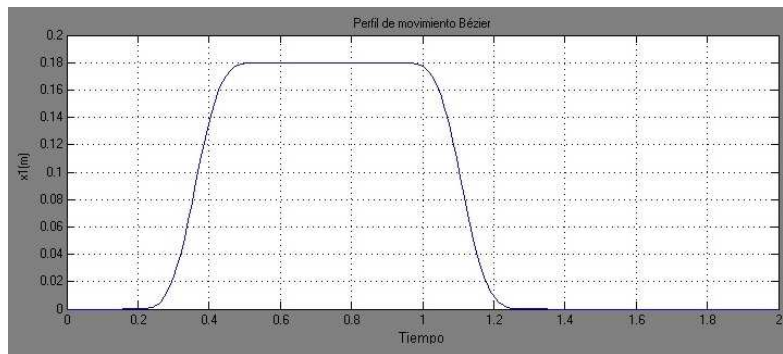


Figura 3.3: Perfil de movimiento obtenido con las curvas de Bézier. Para un recorrido de 18 cm de ida y vuelta en un tiempo de 1.5 seg. con un tiempo de parada en cada extremo de 0.4 seg.

Como podemos observar en la gráfica del perfil de aceleración se tiene un perfil suave y continuo en comparación con las Figuras 2.13,2.14, lo cual nos garantiza tener un *Jerk* bajo, por lo que es factible utilizar este tipo de perfil de movimiento.

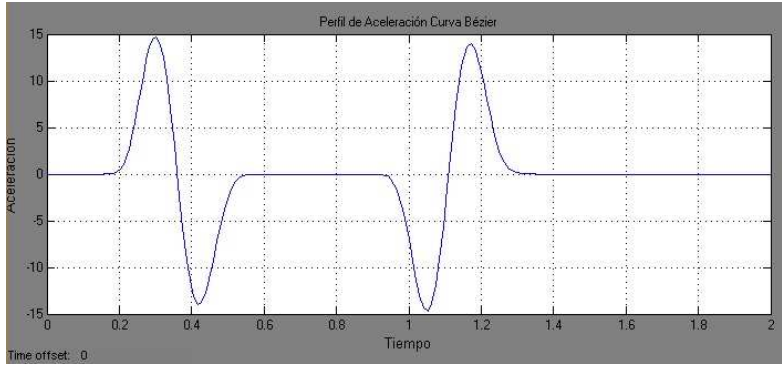


Figura 3.4: Perfil de aceleración obtenido con las curvas de Bézier.

3.4. Control PID

En la búsqueda de un controlador capaz de compensar los efectos tipo *Jerk* en el sistema y lograr el seguimiento de una referencia con valores de *Jerk* acotado, probamos tres tipos de controladores (PID, linealizante y aproximado al linealizante).

El cálculo del control PID se da en tres parámetros distintos: el proporcional, el integral, y el derivativo. La parte proporcional ayuda a que el error en estado estacionario se aproxime a cero, el derivativo determina la reacción del tiempo en el que el error se produce. El modo de control Integral tiene como propósito disminuir y eliminar el error en estado estacionario, provocado por el modo proporcional. A continuación se presenta la forma más general de un control PID.

$$u(x) = \kappa_p(r - x) + \kappa_d\left(\dot{r} - \frac{dx}{dt}\right) + \int_0^\tau \kappa_i(r - x) \quad (3.21)$$

Donde r es la referencia y x es el estado que se desea controlar.

A continuación se presenta la implementación de esta ley de control al sistema (3.12), agrupando la dinámica asociada al *Jerk* y los parámetros inciertos en $\Phi(\ddot{x}, \dot{x}, x)$, esto es

$$\Phi(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \frac{1}{m}x_3\left(\frac{\partial\psi(x_2, x_1)}{\partial x_2} - \kappa_d\right) + x_2\left(\frac{\partial\psi(x_2, x_1)}{\partial x_1} - \kappa_p\right) + \kappa_i(r - x_1)$$

se obtuvo de manera general el siguiente sistema de error.

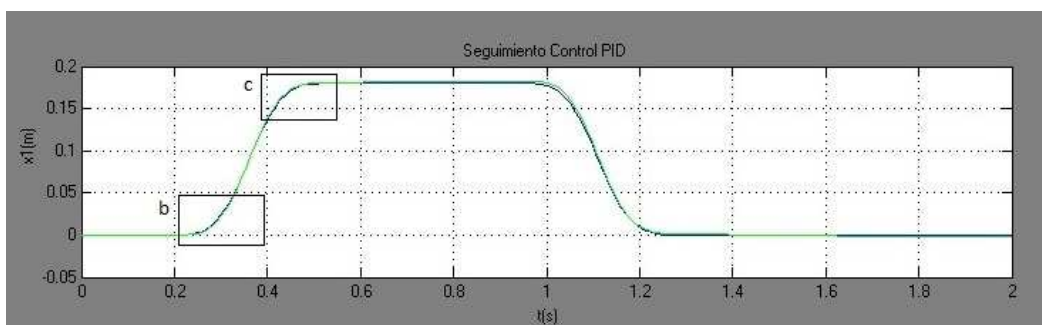
$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= \Phi(x, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3) + \kappa_p(e_1) + \kappa_d(e_2) + \int \kappa_i(e_1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde $e_1 = r - x$, $e_2 = \dot{r} - \frac{dx}{dt}$ y $e_3 = \ddot{r} - \frac{d^2x}{dt^2}$.

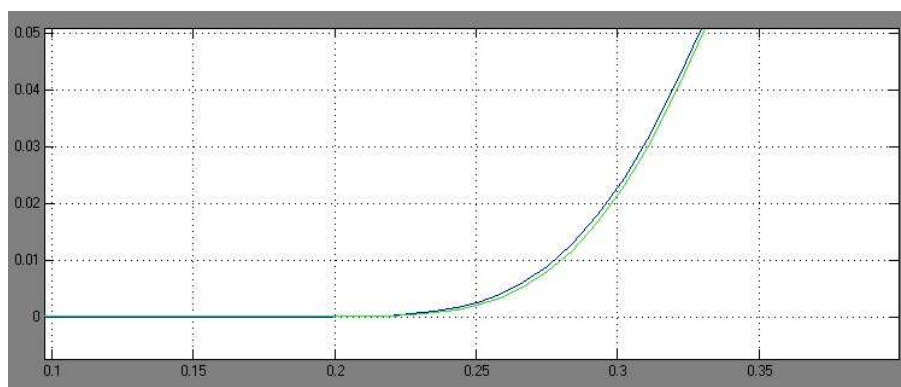
Para garantizar la estabilidad del sistema del error se obtuvo el polinomio característico de la matriz Jacobiana del sistema en lazo cerrado ecuación 3.22 y se utilizó la técnica de imposición de polos para la obtención de los valores de las ganancias κ_p , κ_d y κ_i (Procedimiento que será mostrado en el capítulo 4). Para las simulaciones numéricas se supuso a la función $\psi(x, \dot{x})$ como $-0.25x_2$ ya que es una fuerza que se opone al movimiento además es proporcional a la velocidad del motor y los perfiles de movimiento utilizados como referencias se generaron con las curvas de Bézier. Las ganancias obtenidas del análisis de estabilidad son $\kappa_p = -120$, $\kappa_i = -95$, $\kappa_d = -45$

La prueba aplicada a este controlador fue para un recorrido de 18 cm ida y vuelta en un tiempo de 1.5s el perfil de movimiento usado como referencia es el mostrado en la Figura 3.3. Esta misma prueba será utilizada con los otros controladores.

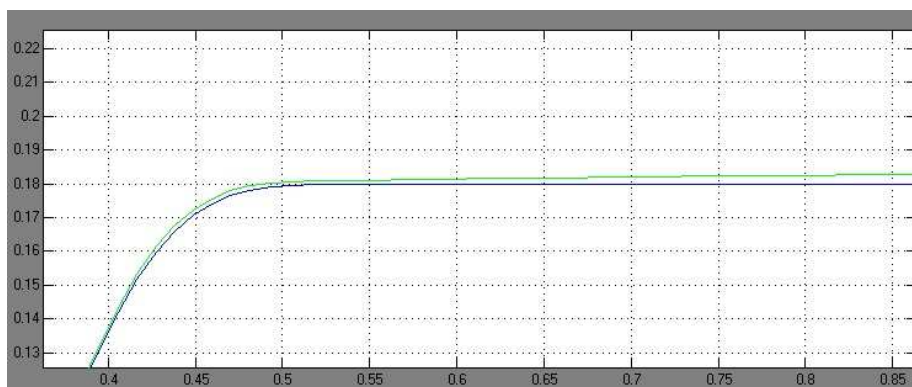
En la Figura 3.5(a) se muestra el seguimiento del actuador al perfil de movimiento. En la cual podemos observar que no aparenta haber mucho error en el seguimiento, sin embargo, es necesario observar el comportamiento del error y con ello poder medir la precisión del seguimiento, ya que en este tipo de motores la precisión en el movimiento es un factor importante.



(a) Seguimiento



(b) Acercamiento b



(c) Acercamiento c

Figura 3.5: Seguimiento de la referencia con el control PID

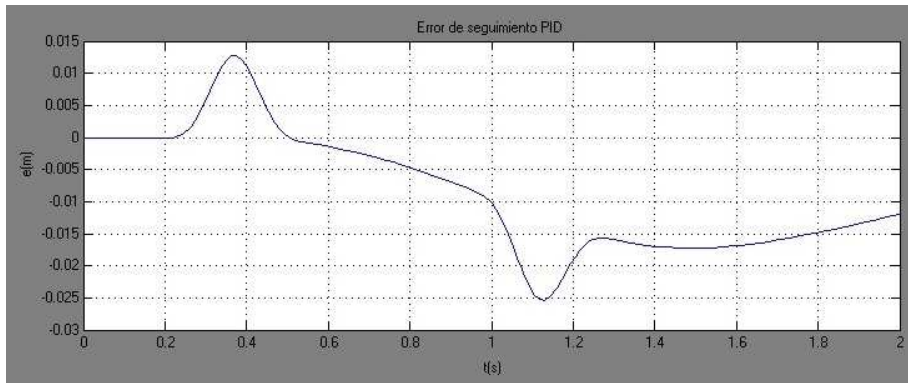


Figura 3.6: Error de seguimiento de la referencia con el control PID

Al observar la gráfica del error Figura 3.6 se muestra el error positivo relacionado al recorrido de ida del actuador y representa el retraso del actuador con respecto de la referencia. De la misma manera el error negativo está relacionado al regreso del actuador, notamos que en las secciones de estado estacionario (entre 0.5 y 0.9 s.) el error es menor a un centímetro por lo que este tipo de control no nos es útil ya que en este tipo de motores se requiere que el error esté en el orden de micras. Ya que con la ley de control PID no se obtuvieron resultados satisfactorios se probará una ley de control linealizante.

3.5. Control no lineal linealizante por retroalimentación de estados

La linealización por retroalimentación es un método de diseño de control no lineal que ha experimentado un gran auge y aceptación. La idea principal detrás de esta ley de control es, transformar la dinámica no lineal de un sistema a controlar en una dinámica lineal. Por otro lado, el principal inconveniente de este método es la

necesidad de conocer el modelo exacto del sistema y que es sensible a ruido.

La primera condición para utilizar la ley de control linealizante es que el sistema de ecuaciones sea de la forma [18]:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= \psi(z_1, z_2, \dots, z_n) + \gamma(z)u
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Donde $\psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ agrupa las no linealidades del sistema dinámico.

La forma más general de un control linealizante es[18]:

$$U = \frac{1}{\gamma(z)}(-\psi(z_1, z_2, \dots, z_n) + v) \tag{3.24}$$

tomando a v como:

$$v = \kappa_p(r - z) + \kappa_d(\dot{r} - \frac{dz}{dt}) + \kappa_{2d}(\ddot{r} - \frac{d^2z}{dt^2}) \tag{3.25}$$

y sustituyendo esta ley de control en el sistema (3.23) se obtiene el sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\dot{z}_n &= \kappa_p(r - z) + \kappa_d(\dot{r} - \frac{dz}{dt}) + \kappa_{2d}(\ddot{r} - \frac{d^2z}{dt^2})
\end{aligned} \tag{3.26}$$

De la misma manera que con el control PID se aplica la ley de control (3.24) en el sistema (3.12), se obtuvo el siguiente sistema de error.

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 \\
\dot{e}_2 &= e_3 \\
\dot{e}_3 &= \kappa_p(e_1) + \kappa_d(e_2) + \kappa_{2d}(e_3)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Donde $e_1 = r - x_1$, $e_2 = \dot{r} - x_2$ y $e_3 = \ddot{r} - x_3$.

Al igual que en el caso del control PID se realizó un análisis de la estabilidad del sistema del error, calculando la matriz Jacobiana y su polinomio característico para encontrar las ganancias del controlador, utilizando imposición de polos, para garantizar la estabilidad del sistema. Los valores de ganancia obtenidos fueron $\kappa_p = -1000$, $\kappa_d = -300$ y $\kappa_{2d} = -30$.

En la Figura 3.7 se muestra el seguimiento del motor al perfil de movimiento impuesto. En la cual podemos observar que no aparenta haber mucho error en el seguimiento al igual que como se vio en los resultados obtenidos para el PID, sin embargo, de la misma manera como en el caso anterior, es necesario observar el comportamiento del error y con ello poder medir la precisión del controlador.

En este caso al observar la gráfica del error Figura 3.6 notamos que en las secciones de estado estacionario (entre 0.5 y 0.9 s.) el error es menor a 2 micras por lo que

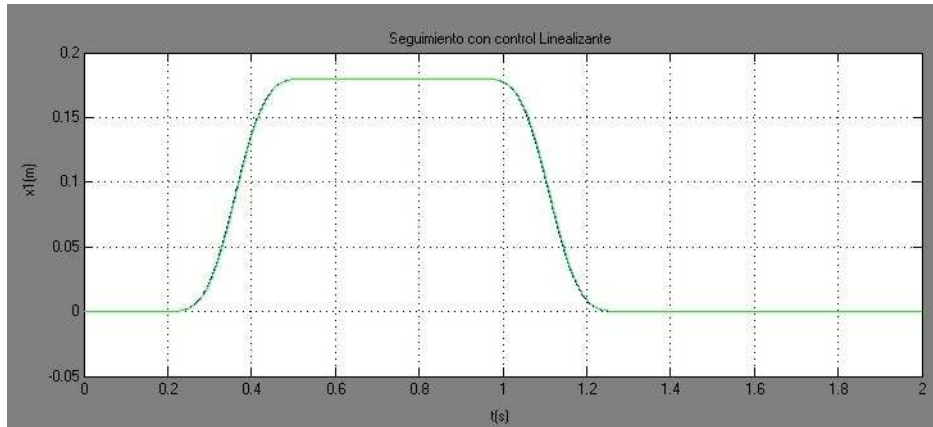


Figura 3.7: Seguimiento de la referencia con el control linealizante

este tipo de control es útil ya que el error está en el orden de micras. Sin embargo, la principal desventaja de esta técnica de control es la necesidad de tener el modelo exacto y en nuestro caso nosotros no contamos éste. Por lo que esta ley no la podemos utilizar directamente.

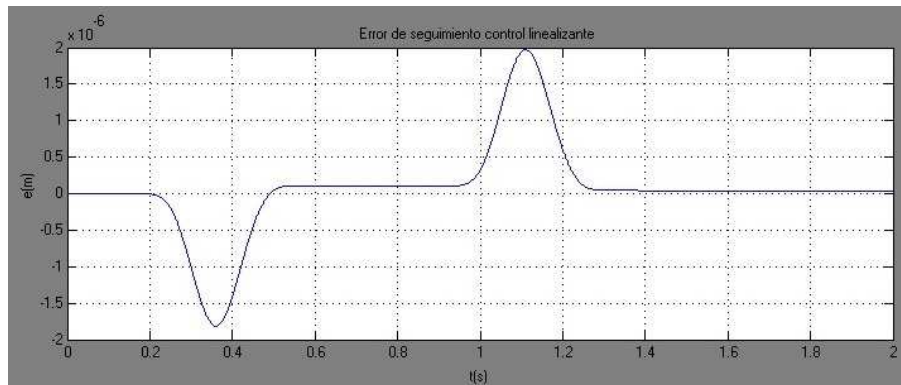


Figura 3.8: Error de seguimiento de la referencia con el control linealizante

Por otro lado, para poder utilizar esta ley de control es posible a través de un observador (estimador) obtener la dinámica incierta de las no linealidades del sistema y utilizarla en la ley de control[7][18].

3.6. Observador

Un observador es un sistema que provee los estados internos de un sistema real dado, esto a partir de mediciones entrada-salida del sistema real. Este tipo de sistemas son la base de muchas aplicaciones prácticas [38][39][40].

El modelo típico de un observador para un sistema lineal de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BU \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{3.28}$$

es [18][3][36]:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BU + K(y - C\hat{x})\tag{3.29}$$

Donde K son las ganancias del observador.

El error entre el observador y el sistema es $e = x - \hat{x}$ por lo tanto el sistema del error queda descrito por:

$$\dot{e} = (A - KC)e\tag{3.30}$$

Se busca que los eigenvalores de la matriz $(A - KC)$ al tomar los valores apropiados de K garanticen que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En el caso de sistemas no lineales de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + B(x)U \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.31}$$

Una forma de construir un observador para un sistema no lineal es llevar al sistema a una forma linealizada a través de una transformación (difeomorfismo) $Z = \Upsilon(x)$

tal que el sistema sea de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + \Upsilon(z) \\ y &= Cz\end{aligned}\tag{3.32}$$

En este trabajo se utilizará el observador de no lineal extendido para sistemas de la forma (3.31), el cual está definido como [2]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + Lk_1(z_1 - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + L^2k_2(z_1 - \hat{z}_1) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{\hat{z}}_n &= \hat{\eta} + L^n k_n(z_1 - \hat{z}_1) + \tau \\ \dot{\hat{\eta}} &= L^{n+1} k_{n+1}(z_1 - \hat{z}_1)\end{aligned}\tag{3.33}$$

donde τ es la ley de control utilizada en el sistema a observar. La construcción y análisis de estabilidad del observador se mostrarán en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Control del sistema *Jerk*

Hemos visto en el capítulo anterior que el control linealizante mostró un mejor desempeño en comparación con el PID, mostramos también, que no es posible la utilización de un control linealizante ya que no conocemos el modelo exacto del sistema. Sin embargo, es posible observar los estados del sistema y utilizar estos para la construcción de una ley de control que se aproxime al linealizante. En este capítulo presentaremos la construcción de un control que se aproxime al linealizante, utilizando un observador no lineal extendido de cuarto orden, para controlar el sistema *Jerk* y los resultados obtenidos con esta ley de control.

4.1. Observabilidad

Antes de construir un observador es necesario probar la observabilidad del sistema lo cual será abordado en esta sección.

Sea X^* un espacio vectorial dual del espacio de estados X . Un elemento X^* de X es llamado coestado.

Definición 2 [49] Un coestado x^* de la planta se dice que es observable si su valor exacto $[x^*, x]$ desde cualquier estado de x en tiempo 0 puede ser determinado por mediciones de la señal de salida. $y(t) = [b^*, \Phi(t; x, 0)]$ sobre el intervalo finito $0 \leq t \leq t_2$. Si todos los coestados son observables, se dice que el sistema es completamente observable.

La observabilidad de un sistema no lineal se puede determinar con las derivadas de Lie. La derivada de Lie es la derivada de una función escalar a lo largo de un campo vectorial.

Derivadas de Lie

Sea $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ un campo vectorial en \mathfrak{R}^n .

Sea $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ una función escalar suave.

Entonces, la derivada de Lie de h con respecto de f es:

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot f_i \quad (4.1)$$

Podemos ver a la derivada de Lie como:

$$L_f h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Por definición

$$L_f^0(h) = h \quad (4.3)$$

Podemos entonces definir las derivadas de Lie de orden mayor:

$$\begin{aligned}
 L_f^2(h) &= \frac{\partial}{\partial x}[L_f^1(h)] \cdot f \\
 L_f^3(h) &= \frac{\partial}{\partial x}[L_f^2(h)] \cdot f \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 L_f^n(h) &= \frac{\partial}{\partial x}[L_f^{n-1}(h)] \cdot f
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sea G el conjunto de todas la combinaciones lineales de las derivadas de Lie de h_1, \dots, h_p con respecto de f , y sea dG el conjunto de todos los gradientes. Si dG genera un espacio de dimensión n entonces el sistema es observable.

Con

$$G = \begin{bmatrix} L_f^0(h_1) & \cdots & L_f^0(h_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_f^{n-1}(h_1) & \cdots & L_f^{n-1}(h_p) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

y

$$dG = \begin{bmatrix} dL_f^0(h_1) & \cdots & dL_f^0(h_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ dL_f^{n-1}(h_1) & \cdots & dL_f^{n-1}(h_p) \end{bmatrix} = O \tag{4.6}$$

Esto quiere decir que O debe tener rango n para que el sistema sea observable [50].

Consideremos el sistema (3.12) con $y(t) = x_1$ Para probar si el sistema en observable obtenemos las derivadas de Lie de la salida del sistema.

$$L_f^0(h) = x_1$$

$$L_f^1(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} [f(x)] = x_2 \quad (4.7)$$

$$L_f^2(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [f(x)] = x_3$$

Construimos G con las derivadas de Lie.

$$G = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Entonces tenemos que:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Ya que el rango de O es tres el sistema (3.12) con $y(t) = x_1$ es observable por lo que es factible la construcción de un observador.

4.2. Construcción de observador y análisis de estabilidad

Como hemos mencionado, no podemos aplicar directamente un control linealizante en el sistema, ya que no conocemos su modelo dinámico exacto, utilizaremos un observador para el diseño de una ley de control que nos permita tener un perfil de

movimiento de bajo *Jerk* en el actuador.

El observador que utilizaremos es el no lineal (3.33) para el sistema *Jerk* (3.12) en el cual podemos reescribir con la función $\Phi(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ y τ un control que linealice el sistema a través de los estados observados.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 \dot{x}_3 &= \Phi(\ddot{x}, \dot{x}, x) + \tau \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Siendo que queremos estimar un sistema como el mostrado en la ecuación (4.10) el observador necesario tiene la forma [2]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + Lk_1(z_1 - \hat{z}_1) \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + L^2k_2(z_1 - \hat{z}_1) \\
 \dot{\hat{z}}_3 &= \hat{\eta} + L^3k_3(z_1 - \hat{z}_1) + \tau \\
 \dot{\hat{\eta}} &= L^4k_4(z_1 - \hat{z}_1)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Con este observador a través de $\hat{\eta}$ se obtiene la dinámica del tercer estado del sistema. Para garantizar que el observador reproduce los estados del sistema hacemos un análisis del error entre el sistema (4.10) y (4.11), definiendo el error como, $e_1 = L^3(x_1 - \hat{z}_1)$, $e_2 = L^2(x_2 - \hat{z}_2)$, $e_3 = L(x_3 - \hat{z}_3)$, $e_4 = \Phi(\ddot{x}, \dot{x}, x) - \hat{\eta}$. Entonces el sistema en lazo cerrado lo podemos representar de la forma $\dot{e} = LA(k)e + [0 \ 0 \ 0 \ \dot{\Phi}(x_3, x_2, x_1)]^T$, donde $\Phi(x_3, x_2, x_1)$ es una función acotada.

El sistema del error nos queda de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - k_1(e_1) \\
\dot{e}_2 &= e_3 - k_2(e_1) \\
\dot{e}_3 &= e_4 - k_3(e_1) + \tau \\
\dot{e}_4 &= -k_4(e_1)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Para obtener los valores de las ganancias tal que el sistema del error sea estable calculamos la matriz Jacobiana del sistema (4.12) alrededor de $e = 0$.

$$J = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & 1 \\ -k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Una vez obtenida la matriz Jacobiana obtenemos el polinomio característico del sistema y para buscar los valores de k 's tal que los eigenvalores sean negativos.

El polinomio característico del sistema es:

$$s^4 - k_1s^3 - k_2s^2 - k_3s - k_4 \tag{4.14}$$

Para calcular los valores de k 's imponemos los polos en -1 tal que el sistema del error (4.12) sea estable.

$$(s + 1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 \tag{4.15}$$

Por comparación tenemos que $k_1 = -4$, $k_2 = -6$, $k_3 = -4$, $k_4 = -1$ y con $L = 100$

Para probar la estabilidad del sistema se realizaron simulaciones numéricas con los valores de ganancias antes citados se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 4.1, en donde podemos observar que el error entre el estado medible del sistema y el

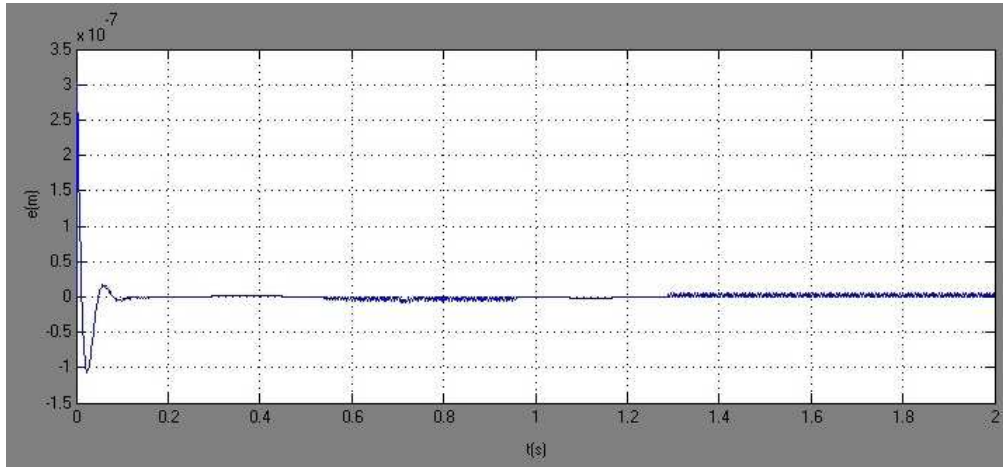


Figura 4.1: Error entre el estado medible del sistema y el estimado por el observador.

reproducido por el observador es menor a una micra.

4.3. Diseño de controlador aproximado al linealizante y su análisis de estabilidad

Ya que hemos garantizado la convergencia del observador, podemos entonces, utilizar los estados observados en el controlador [3] ya que como mencionamos antes $\hat{\eta}$ estima la dinámica desconocida del sistema. Por lo tanto, la forma del controlador es[3]:

$$U = -\hat{\eta} + \kappa_p(\hat{z}_1 - r) + \kappa_d(\hat{z}_2 - \dot{r}) + \kappa_{2d}(\hat{z}_3 - \ddot{r}) \quad (4.16)$$

donde \hat{z} son los estados observados y r la referencia a seguir mostrada en la Figura 3.3.

Ya que el sistema extendido $[\dot{x}, \dot{\hat{z}}]^T$ no cumple con el principio de separación [52]. Esto quiere decir, que la dinámica de la planta se ve afectada por el estimador. Por

lo tanto el observador y el control deben de calcularse a la vez, realizamos el análisis de estabilidad para esta ley de control a través del observador, ya que se ha mostrado que éste reproduce la dinámica del sistema. Por lo tanto el sistema en lazo cerrado nos queda representado por la ecuación (4.17).

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + Lk_1(z_1 - \hat{z}_1) \\
\dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + L^2k_2(z_1 - \hat{z}_1) \\
\dot{\hat{z}}_3 &= \hat{\eta} + L^3k_3(z_1 - \hat{z}_1) - \hat{\eta} + \kappa_p(\hat{z}_1 - r) + \kappa_d\left(\frac{d(z_1 - r)}{dt}\right) + \kappa_{2d}\left(\frac{d^2(z_1 - r)}{dt^2}\right) \\
\dot{\hat{\eta}} &= L^4k_4(z_1 - \hat{z}_1)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

y por el análisis de estabilidad del observador tenemos que $e_1 \rightarrow 0$. El sistema en lazo cerrado (4.17) nos queda:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 \\
\dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 \\
\dot{\hat{z}}_3 &= \kappa_p(\hat{z}_1 - r) + \kappa_d(\hat{z}_2 - \dot{r}) + \kappa_{2d}(\hat{z}_3 - \ddot{r})
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Dado que el problema de control es de seguimiento hacemos el análisis del error entre el sistema (4.18) y la referencia a seguir $r(t)$.

Tomando a

$$\begin{aligned}
e_1 &= z_1 - r, & \dot{e}_1 &= \dot{z}_1 - \dot{r} \\
e_2 &= z_2 - \dot{r}, & \dot{e}_2 &= \dot{z}_2 - \ddot{r} \\
e_3 &= z_3 - \ddot{r}, & \dot{e}_3 &= \dot{z}_3 - \ddot{r}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

El sistema del error nos queda:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 \\
\dot{e}_2 &= e_3 \\
\dot{e}_3 &= \kappa_p e_1 + \kappa_d e_2 + \kappa_{2d} e_3
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Para obtener los valores de las ganancias tal que el sistema (4.20) del error sea estable calculamos la matriz Jacobiana del sistema.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \kappa_p & \kappa_d & \kappa_{2d} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Una vez obtenida la matriz Jacobiana obtenemos el polinomio característico del sistema y para buscar los valores de $k's$ tal que los eigenvalores sean negativos.

El polinomio característico del sistema es:

$$s^4 - k_{2d}s^2 - k_d s - k_p \tag{4.22}$$

Para calcular los valores de $k's$ imponemos los polos en -10

$$(s + 10)^3 = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000 \tag{4.23}$$

Por comparación tenemos que $\kappa_p = -1000$ $\kappa_d = -300$ $\kappa_{2d} = -30$

Con los valores de $\kappa's$ obtenidos la ley de control queda definida por:

$$U = -\hat{\eta} - 1000(\hat{z}_1 - r) - 300(\hat{z}_2 - \dot{r}) - 30(\hat{z}_2 - \ddot{r}) \tag{4.24}$$

Los resultados obtenidos con esta ley de control serán presentados en la siguiente sección.

4.4. Resultados

Los resultados presentados en esta sección para la ley de control (4.24) fueron obtenidos mediante simulaciones numéricas utilizando Simulink. Para la realización de las simulaciones se utilizaron los sistemas (4.10) y (4.11) y como referencia los perfiles de movimiento obtenidos con las curvas de *Bézier*.

Los sistemas a simular son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \Phi(x_3, x_2, x_1) + \tau \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + Lk_1(z_1 - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + L^2k_2(z_1 - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_3 &= \hat{\eta} + L^3k_3(z_1 - \hat{z}_1) + \tau \\ \dot{\hat{\eta}} &= L^4k_4(z_1 - \hat{z}_1) \end{aligned}$$

$$U = -\hat{\eta} - 1000(\hat{z}_1 - r) - 300(\hat{z}_2 - \dot{r}) - 30(\hat{z}_2 - \ddot{r})$$

De los cuales obtenemos que los sistemas en lazo cerrado quedan de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \Phi(x_3, x_2, x_1) - \hat{\eta} - 1000(\hat{z}_1 - r) - 300(\hat{z}_2 - \dot{r}) - 30(\hat{z}_2 - \ddot{r}) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + Lk_1(z_1 - \hat{z}_1) \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 + L^2k_2(z_1 - \hat{z}_1) \\
 \dot{\hat{z}}_3 &= \hat{\eta} + L^3k_3(z_1 - \hat{z}_1) + -\hat{\eta} - 1000(\hat{z}_1 - r) - 300\left(\frac{d(\hat{z}_1 - r)}{dt}\right) - 30\left(\frac{d^2(\hat{z}_1 - r)}{dt^2}\right) \\
 \dot{\hat{\eta}} &= L^4k_4(z_1 - \hat{z}_1)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

En las Figuras 4.2- 4.5 se muestran los programas utilizados para las simulaciones, el diagrama de bloques de la planta, el diagrama de bloques del controlador y el digrama de bloques del observador, respectivamente.

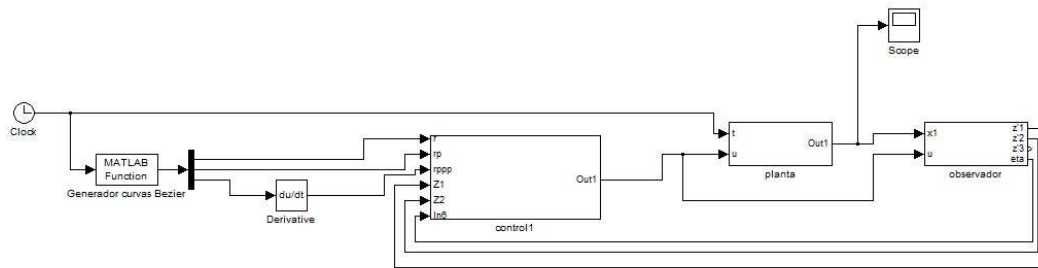


Figura 4.2: Diagrama de bloques programa principal

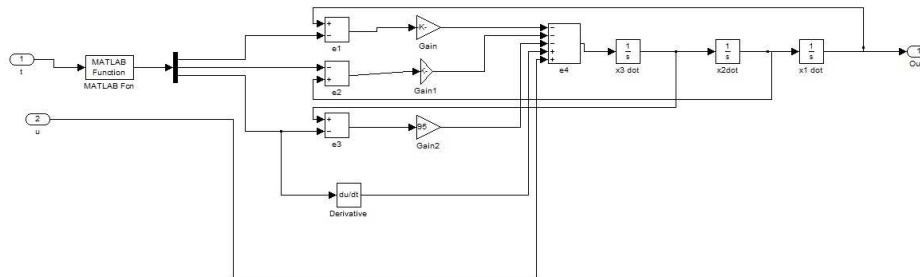


Figura 4.3: Diagrama de bloques programa planta

Los resultados obtenidos para el sistema (4.10) con la ley de control (4.24) para el

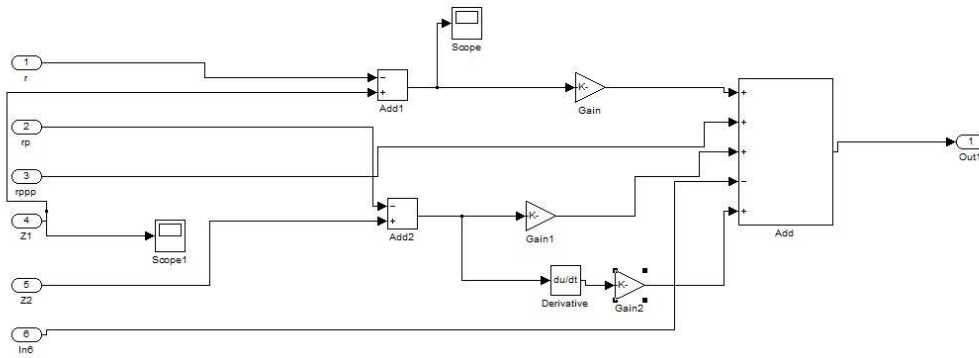


Figura 4.4: Diagrama de bloques ley de control

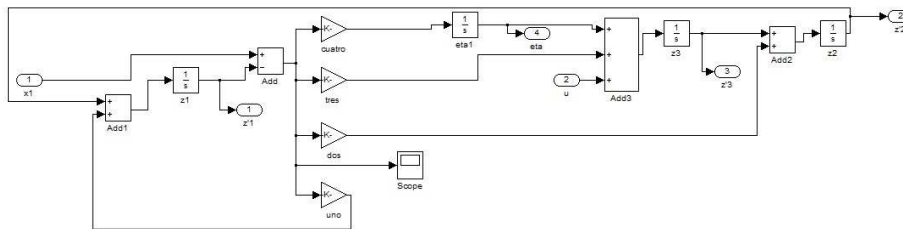


Figura 4.5: Diagrama de bloques sistema del observador

seguimiento de la referencia se muestran en la Figura 4.6 en la que se puede ver tanto la referencia, como la posición del motor y la posición estimada por el observador. En la cual podemos notar que no hay error en el seguimiento ni en el estado observado. Al igual que como se vio en los resultados obtenidos para los controladores presentados en el capítulo dos, es necesario observar el comportamiento del error y con ello poder medir la precisión del controlador.

En la Figura 4.7 se muestra el error entre la posición del motor y la referencia, en la gráfica podemos observar que en estado estacionario el error es del orden de las micras lo cual nos indica que esta ley de control es un buen prospecto para implementar en el sistema físico. Sin embargo, es necesario comprobar que la señal de control no exceda los parámetros permisibles del motor, al igual que el perfil de aceleración del

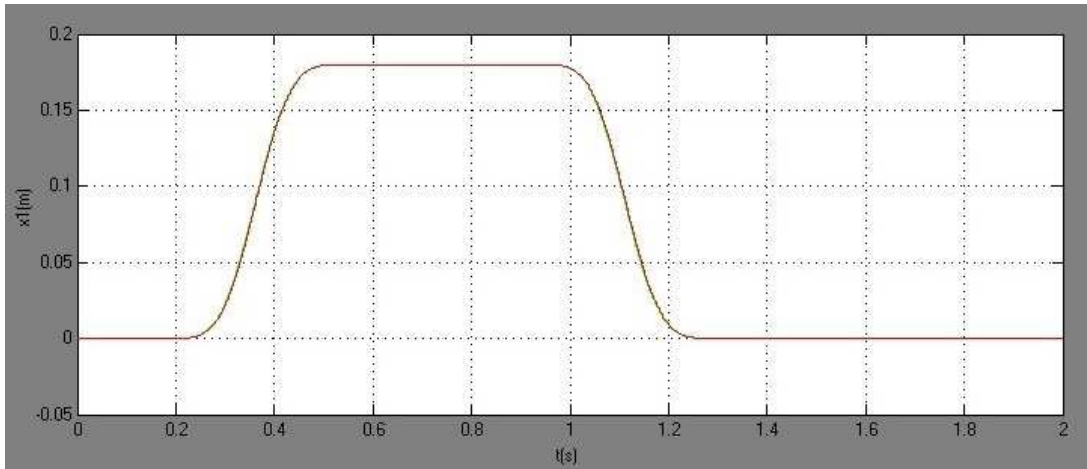


Figura 4.6: Seguimiento de la referencia con el control aproximado al linealizante mismo para verificar si se logran mantener los cambios en la aceleración suaves y acotados.

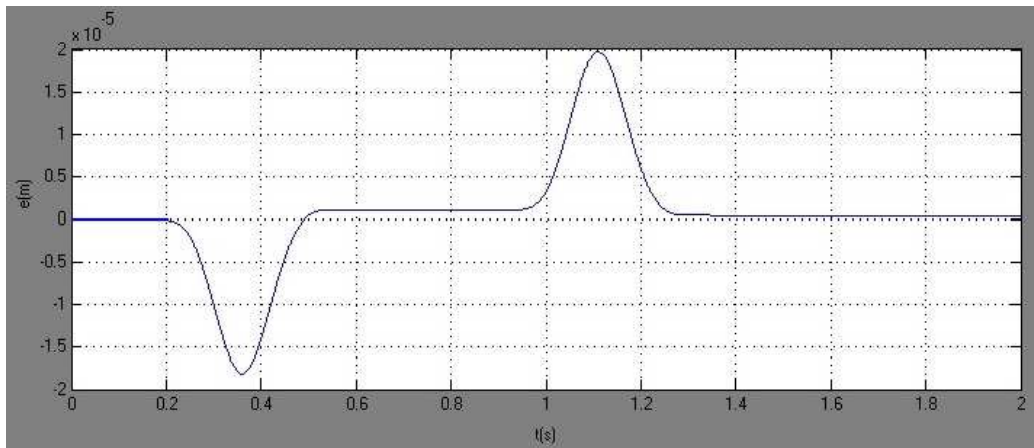


Figura 4.7: Error de seguimiento de la referencia con el control linealizante

Ya que el movimiento del actuador es debido a la corriente, en la Figura 4.8 se muestra la corriente demandada por el actuador con la ley de control utilizada. En la Figura podemos ver que los valores pico de corriente no exceden los valores

permisibles en el sistema presentados en la sección 2.2

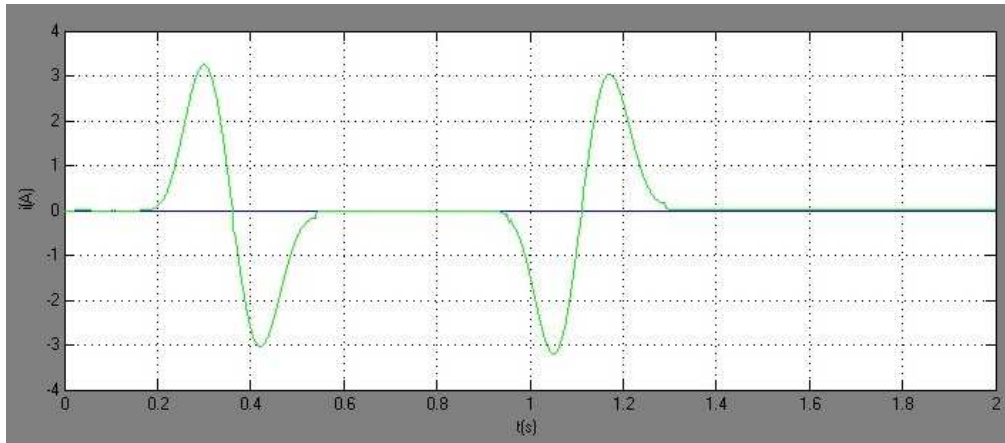


Figura 4.8: Señal de control (Corriente demandada por el motor).

Dado que la señal de control se mantiene en los límites permisibles del motor podemos ahora revisar que el perfil de aceleración del sistema sea continuo y suave. En la Figura 4.9 se observa que el perfil de aceleración es más suave que los perfiles utilizados actualmente en este tipo de motores y también que la magnitud de la aceleración se mantiene en los valores permisibles del motor.

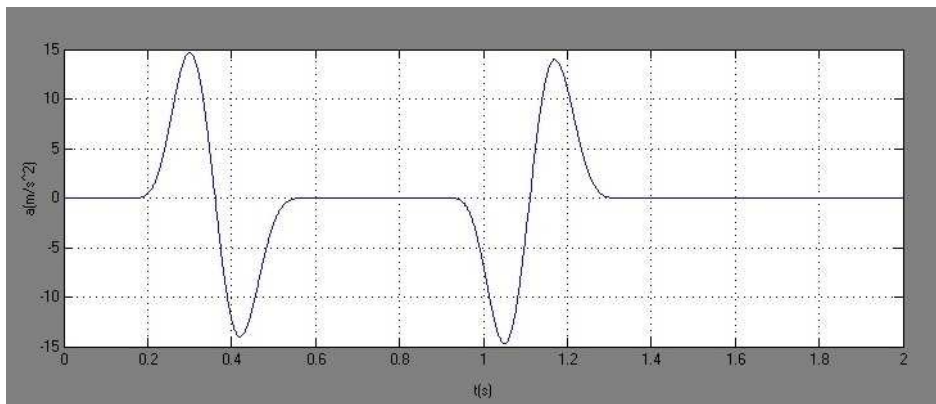


Figura 4.9: Perfil de aceleración del motor en el seguimiento de la referencia.

Una vez visto que la ley de control cumple con los requerimientos pedidos, sólo

queda mostrar que la ley de control compense variaciones en la dinámica. En este caso las variaciones son el cambio de la masa que carga el actuador. Los valores de utilizados de carga son 10, 11, 12 y 13 *kg* en la ida y 0.5 *kg* menos para el regreso.

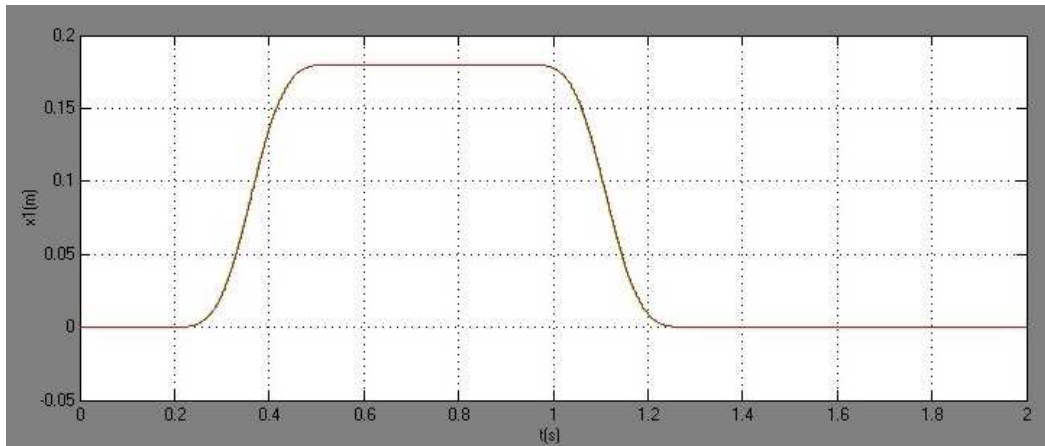


Figura 4.10: Seguimiento de la referencia con el control aproximado al linealizante con masa variable.

En la Figura 4.10 se muestran el seguimiento del motor de la referencia en la cual no se ven alteraciones debidas al cambio en la masa.

Ya que en el perfil de movimiento (Figura 4.10) se logra el seguimiento a pesar de la variación en la masa, en el caso de la corriente demandada por el actuador existen cambios los cuales los podemos observar en la Figura 4.11.

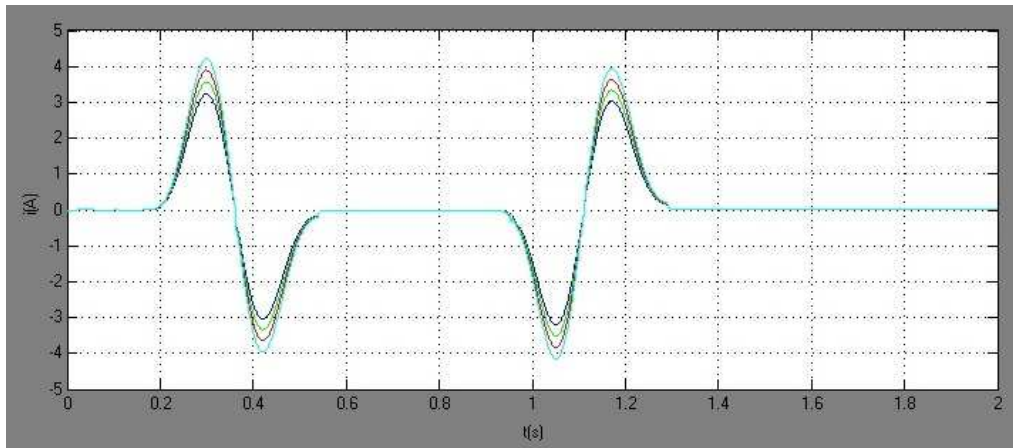


Figura 4.11: Señal de control (Corriente demandada por el motor). Para masas de 10, 11, 12, y 13 kg respectivamente

El que la corriente demandada por el actuador aumente en relación con la masa es debido a que al aumentar la masa se necesita una mayor fuerza para lograr el desplazamiento y en este caso la fuerza es proporcional a la corriente como se mostró en la sección (3.1) ecuación (3.2).

Conclusiones

En este trabajo se estudió como en un sistema en el cual actúa una fuerza externa dependiente del tiempo están involucrados los fenómenos tipo *Jerk* y se planteó la importancia de considerar este tipo de efectos en un actuador lineal magnético.

De la misma manera, se mostró que los perfiles de movimiento utilizados en los actuadores no cuentan con perfiles de aceleración suaves los cuales pueden ocasionar problemas en el sistema. Por lo que, se propusieron perfiles de movimiento suaves los cuales pueden ser implementables.

Se mostró en el capítulo dos cómo el sistema dinámico cinemático del actuador puede llevarse a un sistema *Jerk* considerando que la fuerza de desplazamiento del actuador es dependiente de la corriente demandada.

Como conclusiones generales se tiene que:

Se construyó un controlador a través de los estados de un observador tal que compensara las no linealidades del modelo cinemático del actuador, con el que se obtuvieron resultados semejantes a los del control linealizante. También podemos concluir que este tipo de control es útil cuando no se conoce de manera exacta el modelo dinámico del sistema.

Obtuvimos un mejor desempeño en el sentido del movimiento con un control lin-

realizante que con el tipo PID, logrando un mejor seguimiento y menor magnitud de error.

Las trayectorias generadas con las curvas de Bézier fueron utilizados como perfil de movimiento ya que los cambios en la aceleración son suaves y continuos útiles para este tipo de sistemas.

Se mostró que la ley de control propuesta cumple con los requerimientos de aplicación para el sistema (sección 4.4) tales como precisión suavidad y magnitud de *Jerk* acotada, esto sin exceder las capacidades físicas del motor tales como corriente pico y aceleración máxima. Por otro lado, se mostro que el controlador compensó variaciones en la masa de 0.5 kg durante el movimiento al igual que el observador (ya que los estados utilizados en el control son los observados).

Apéndice A

Código curvas de Bezier

```
function y = genbezier_co_abajoF (tim)

%% Planificacion de trayectorias      1er. Ciclo

if tim <= 1.0

t1 = 0.2;      % Initial and final instants of rest-to-rest
t2 = 0.8;

delt = t2-t1;
tdif = abs(tim-t1);

z1f = 0.38;   % Initial and final values
z1in = 0;

z1dif = z1f-z1in;

tau = (tdif/delt);
tau2 = tau*tau;
tau3 = tau*tau2;
tau4 = tau*tau3;
tau5 = tau*tau4;
tau6 = tau*tau5;
tau7 = tau*tau6;
```

```

tau8 = tau*tau7;
%tau9 = tau*tau8;

r1 = 12870;
r2 = 91520;
r3 = 288288;
r4 = 524160;
r5 = 600600;
r6 = 443520;
r7 = 205920;
r8 = 54912;
r9 = 6435;

z1st1 = z1in;
fr = r1-r2*tau+r3*tau2-r4*tau3+r5*tau4-r6*tau5+r7*tau6-r8*tau7+r9*tau8;
z1stt = z1in+z1dif*tau8*fr;
z1st2 = z1f;

z1std1 = 0;
frd2 = 14*r7*tau6-15*r8*tau7+16*r9*tau8;
frd = 8*r1-9*r2*tau+10*r3*tau2-11*r4*tau3+12*r5*tau4-13*r6*tau5+frd2;
z1stdt = z1dif*tau7*frd/delt;
z1std2 = 0;

z1stdd1 = 0;
frdd2 = -12*13*r6*tau5+13*14*r7*tau6-14*15*r8*tau7+15*16*r9*tau8;
frdd = 7*8*r1-8*9*r2*tau+9*10*r3*tau2-10*11*r4*tau3+11*12*r5*tau4+frdd2;
z1stddt = z1dif*tau6*frdd/(delt*delt);
z1stdd2 = 0;

%% Definition of nominal xis, xisd, xisdd

if tim < t1
    xis = z1st1;
    xisd = z1std1;
    xisdd = z1stdd1;
elseif tim < t2

```

```

        xis = z1stt;
        xisd = z1stdt;
        xisdd = z1stddt;
    else
        xis = z1st2;
        xisd = z1std2;
        xisdd = z1std2;
    end

end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5

% %%% CICLO DE BAJADA
%
if tim > 1.0

t1 = 1.2;      % Initial and final instants of rest-to-rest
t2 = 1.8;

delt = t2-t1;
tdif = abs(tim-t1);

z1f = 0;      % Initial and final values
z1in = 0.38;

z1dif = z1f-z1in;

tau = (tdif/delt);
tau2 = tau*tau;
tau3 = tau*tau2;
tau4 = tau*tau3;
tau5 = tau*tau4;
tau6 = tau*tau5;
tau7 = tau*tau6;
tau8 = tau*tau7;
%tau9 = tau*tau8;

r1 = 12870;

```

```

r2 = 91520;
r3 = 288288;
r4 = 524160;
r5 = 600600;
r6 = 443520;
r7 = 205920;
r8 = 54912;
r9 = 6435;

z1st1 = z1in;
fr = r1-r2*tau+r3*tau2-r4*tau3+r5*tau4-r6*tau5+r7*tau6-r8*tau7+r9*tau8;
z1stt = z1in+z1dif*tau8*fr;
z1st2 = z1f;

z1std1 = 0;
frd2 = 14*r7*tau6-15*r8*tau7+16*r9*tau8;
frd = 8*r1-9*r2*tau+10*r3*tau2-11*r4*tau3+12*r5*tau4-13*r6*tau5+frd2;
z1stdt = z1dif*tau7*frd/delt;
z1std2 = 0;

z1stdd1 = 0;
frdd2 = -12*13*r6*tau5+13*14*r7*tau6-14*15*r8*tau7+15*16*r9*tau8;
frdd = 7*8*r1-8*9*r2*tau+9*10*r3*tau2-10*11*r4*tau3+11*12*r5*tau4+frdd2;
z1stddt = z1dif*tau6*frdd/(delt*delt);
z1stdd2 = 0;

%% Definition of nominal xis, xisd, xisdd

if tim < t1
    xis = z1st1;
    xisd = z1std1;
    xisdd = z1stdd1;
elseif tim < t2
    xis = z1stt;
    xisd = z1stdt;
    xisdd = z1stddt;
else

```



```
    xis = z1st2;  
    xisd = z1std2;  
    xisdd = z1stdd2;  
end  
  
end  
  
y = [xis;xisd;xisdd];
```


Bibliografía

- [1] R. Femat, D. U. Campos Delgado, F. J. Martínez López (2005), A family of driving forces to suppress chaos in jerk equations: Laplace domain design, *chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 15.4, 043102.
- [2] R. Femat, G. Solis Perales (2008), *Robust synchronization of chaotic systems via feedback*, Springer.
- [3] J. F. Gieras, Z. J. Piech, B. Z. Tomczuk (2011), *Linear synchronous motors: transportation and automation systems*, CRC press.
- [4] J. C. Sprott (1997), Some simple chaotic jerk functions, *American Journal of Physics* 65.6, 537-543.
- [5] C. C. Tsai, S. C. Lin, T. S. Cheng, C. K. Chan (2006), Adaptive integral position control using RBF neural networks for brushless DC linear motor drive, *IEEE*, 3188-3193.
- [6] Y. K. Tan, S.K. Panda (2003), Sliding-mode position controller for linear permanent magnet brushless DC servo motors, *Power Electronics and Drive Systems* 2, 1653-1658.

- [7] R. Femat, J. Alvarez Ramirez, J. Gonzalez (1997), A strategy to control chaos in nonlinear driven oscillators with least prior knowledge, *Physics Letters A* 224.4, 271-276.
- [8] S. Alam, B. K. Sharma (2009), Order in chaos: Definite rules that govern the drift of moon away from the earth, arXiv:1001.0097 [physics.gen-ph].
- [9] V. Zanotto, A. Gasparetto, A. Lanzutti, P. Boscariol, R. Vidoni (2011), Experimental validation of minimum time-jerk algorithms for industrial robots, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 64.2, 197-219.
- [10] R. Eichhorn, S. J. Linz, P. Hänggi (1998), Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows, *Physical Review E* 58.6, 7151.
- [11] R. Eichhorn, S. J. Linz, P. Hanggi (1999), Classes of dynamical systems being equivalent to a jerky motion, Wiley-VCH 79.
- [12] C. Letellier, O. Vallée (2003), Analytical results and feedback circuit analysis for simple chaotic flows, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36.44, 11229.
- [13] S. J. Linz (2000), No-chaos criteria for certain jerky dynamics, *Physics Letters A* 275.3, 204-210.
- [14] J. M. Malasoma (2002), A new class of minimal chaotic flows, *Physics Letters A* 305.1, 52-58.
- [15] S. Ghosh, S. Mukhopadhyay (2011), Tracking reentry ballistic targets using acceleration and jerk models, *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on* 47.1, 666-683.

- [16] F. Rubio, F. Valero, J. Sunyer, J. Cuadrado (2012), Optimal time trajectories for industrial robots with torque, power, jerk and energy consumed constraints, *Industrial Robot: An International Journal* 39.1, 92-100.
- [17] W. You, M. Kong, L. Sun, Y. Diao (2012), Control system design for heavy duty industrial robot, *Industrial Robot: An International Journal* 39.4, 365-380.
- [18] H. K. Khalil (2002), *Nonlinear systems* third ed, Prentice Hall, Upper Saddle River NJ.
- [19] L. A. Zuppa, J. C. R. Garrido, S. Benitez (2004), A chaotic oscillator using the Van der Pol dynamic immersed into a Jerk system, *WSEAS Transactions on Circuits and Systems* 3.1, 198-199.
- [20] S. Benítez, L. Acho, R. J. R. Guerra (2006), Chaotification of the Van der Pol system using Jerk architecture, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* 89.4, 1088-1091.
- [21] G. Solís Perales, V. Ayala, W. Kliemann, R. Femat (2003), Complete synchronizability of chaotic systems: A geometric approach, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 13.2, 495-501.
- [22] S. J. Linz (1997), Nonlinear dynamical models and jerky motion, *American Journal of Physics* 65.6, 523-226.
- [23] J. Lu, Y. Wang, Y. Wu (2012), Measuring accelerating universe with high-redshift GRBs data and other cosmological probes, *Science China Physics, Mechanics and Astronomy* 55.9, 1713-1719.
- [24] J. C. Sprott (2000), A new class of chaotic circuit, *Physics Letters A* 266.1, 19-23.

- [25] M. H. Dehghani (2004), Accelerated expansion of the Universe in Gauss-Bonnet gravity, *Physical Review D* 70.6, 064009.
- [26] J. C. Sprott, S. J. Linz (2000), Algebraically Simple Chaotic Flows, *International Journal of Chaos Theory and Applications* 5.2, 1-20.
- [27] J. C. Sprott (2000), Simple chaotic systems and circuits, *American Journal of Physics* 68.8, 758-763.
- [28] S. I. Benítez (2007), Sincronización de sistemas electrónicos con sistemas mecánicos, Tesis Doctoral Instituto Politécnico Nacional.
- [29] P. Pillay, R. Krishnan (1989), Modeling, simulation, and analysis of permanent-magnet motor drives. II. The brushless DC motor drive, *Industry Applications, IEEE Transactions on* 25.2, 274-279.
- [30] M. J. Balchin, J. F. Eastham (1997), Model for transients in linear induction machines, *Magnetics, IEEE Transactions on* 33.5, 4191-4193.
- [31] K. K. Tan, S. N. Huang, T. H. Lee (2002), Robust adaptive numerical compensation for friction and force ripple in permanent-magnet linear motors, *Magnetics, IEEE Transactions on* 38.1, 221-228.
- [32] B. T. Ooi (1973), A generalized machine theory of the linear induction motor, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* 4, 1252-1259.
- [33] T. A. Lipa, T. A. Nondahl (1979), Pole-by-pole dq model of a linear induction machine, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* 2, 629-642.

- [34] L. Lu, B. Yao, Q. Wang, Z. Chen (2009), Adaptive robust control of linear motors with dynamic friction compensation using modified LuGre model, *Automatica* 45.12, 2890-2896.
- [35] J. Flórez, A. García Rico, G. Martínez, M. Martínez Iturralde (2003), Estrategias de control para accionamientos electrónicos lineales, Sección Española Conferencia Anual.
- [36] C. Kravaris, V. Sotiropoulos, C. Georgiou, N. Kazantzis, M. Q. Xiao, A. J. Krener (2007), Nonlinear observer design for state and disturbance estimation, *Systems & Control Letters* 56.11, 730-735.
- [37] J. Eker, K. J. Astrom (1996), A nonlinear observer for the inverted pendulum, In *Proceedings of the IEEE conference on control applications*, 332-337.
- [38] G. Grassi, S. Mascolo (1997), Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-Part I-Fundamental Theory and Applications* 44.10, 1011-1013.
- [39] R. Femat, J. Alvarez, J. González (1997), A strategy to control chaos in nonlinear driven oscillators with least prior knowledge, *Physics Letters A* 224.4, 271-276.
- [40] A. J. Krener, A. Isidori (1983), Linearization by output injection and nonlinear observers, *Systems and control letters* 3.1, 47-52.
- [41] A. J. Krener, W. Respondek (1985), Nonlinear observers with linearizable error dynamics, *SIAM Journal on Control and Optimization* 23.2, 197-216.
- [42] J. P. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman (1992), A Simple Observer for Nonlinear Systems Applications to Bioreactors, *Automatic Control, IEEE Transactions on* 37.6, 875-880.

- [43] H. Nijmeijer, I. M. Y. Mareels (1997), An Observer Looks at Synchronization, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and applications 44.10, 882-890.
- [44] A. R. Forrest (1990), Interactive interpolation and approximation by Bezier polynomials, Computer-aided design 22.9, 527-537.
- [45] C. Acevedo, S. Cardona i Foix, J. B. Cabrera (2004), Diseño de perfil de levas por curvas de Bézier, Revista Científica Ingeniería y Desarrollo.
- [46] G. Otten , T. J. De Vries , J. Van Amerongen , A. M. Rankers , E. W. Gaal (1997), Linear motor motion control using a learning feedforward controller, Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on 2.3, 179-187.
- [47] W. C. Gan , N. C. Cheung , L. Qiu (2003), Position control of linear switched reluctance motors for high-precision applications, Industry Applications, IEEE Transactions on 39.5, 1350-1362.
- [48] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, S. D. Umans (2004), Máquinas eléctricas, McGraw-Hill.
- [49] R. Kalman (1959), On the general theory of control systems. IRE Transactions on Automatic Control 4.3, 110-110.
- [50] H. Nijmeijer, A. Van der Schaft (1990). Nonlinear dynamical control systems. Springer.
- [51] http://www.festo.com/cat/en-gb_ie/data/doc_engb/PDF/EN/CMMP-AS_EN.PDF
- [52] C. T. Chen (1998), Linear system theory and design. Oxford University Press.

[53] http://www.festo.com/net/es_es/SupportPortal/default.aspx?cat=4018